



# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

## Soluzioni analitiche dell'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo

Relatore

Prof. Lorenzo Fortunato

Laureando

Micol D'Arcangelo

Anno Accademico 2017/2018



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Formulazione dell'Equazione di Schrödinger</b>	<b>3</b>
1.1 Metodo di separazione delle variabili . . . . .	6
1.2 Potenziale additivo dipendente dal tempo . . . . .	7
1.2.1 Semplici esempi di soluzioni analitiche . . . . .	8
<b>2 Metodo di trasformazione tempo-spazio</b>	<b>11</b>
2.1 Discussione . . . . .	14
<b>3 Metodo di trasformazione di Kramers-Henneberger</b>	<b>15</b>
3.1 Discussione . . . . .	18
<b>4 Equazione di Schrödinger con potenziale a delta di Dirac</b>	<b>23</b>
4.1 Potenziale non dipendente dal tempo . . . . .	23
4.2 Potenziale dipendente dal tempo . . . . .	25
<b>Conclusioni</b>	<b>29</b>
<b>Riferimenti bibliografici</b>	<b>31</b>



# Introduzione

L'obiettivo di questo lavoro è lo studio della soluzione analitica dell'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo considerando particolari potenziali dipendenti dal tempo. Le soluzioni analitiche esatte di questo tipo di equazione sono interessanti perché possono aiutare ad esplorare ulteriormente vari affascinanti fenomeni quantistici o a chiarire alcuni concetti sottili. Ad oggi, le soluzioni trovate sono limitate a pochi casi, quelli più semplici e per così dire "speciali". In situazioni complesse è quasi impossibile riuscire a trovare la soluzione esatta dell'equazione, per cui si sono sviluppate tecniche di risoluzione numerica accurate ed efficienti e una grande varietà di metodi approssimativi.

Nel primo capitolo viene ricordata la nascita della Meccanica Quantistica e dell'equazione di Schrödinger. Si riporta poi, la soluzione analitica dell'equazione di Schrödinger considerando il potenziale non dipendente dal tempo attraverso il "metodo di separazione delle variabili". Sempre nel primo capitolo viene presentata l'equazione principale di questo lavoro: l'equazione di Schrödinger considerando un generico potenziale additivo dipendente dal tempo. È un'equazione differenziale del primo ordine lineare ed omogenea. Se ne mostra la risoluzione e se ne riportano degli esempi.

Nel secondo capitolo, invece, si analizza un caso "speciale". Viene riportato il lavoro di Long, Qin, Yang e Guo basato sull'utilizzo del "metodo di trasformazione di tempo-spazio". In questo caso l'equazione di Schrödinger oltre che considerare un particolare potenziale dipendente dal tempo presenta anche una massa dipendente dal tempo.

Nel terzo capitolo viene presentato un altro caso particolare: il potenziale dipendente dal tempo è oscillante. Si mostra e si discute lo studio di Park che utilizza la trasformazione di Kramers-Henneberger per giungere alla soluzione.

Infine, nel quarto capitolo si risolve l'equazione di Schrödinger considerando il potenziale a delta di Dirac, prima nel caso non dipendente dal tempo e poi invece dipendente dal tempo. Si presenta e analizza il lavoro di Zhdanov e Chikhachev.



# Capitolo 1

## Formulazione dell'Equazione di Schrödinger

La formulazione teorica moderna della Meccanica Quantistica si può collocare tra gli anni 1923 e 1927. In questi anni infatti, vengono presentati simultaneamente due suoi enunciati equivalenti: la Meccanica Matriciale e la Meccanica Ondulatoria. Nel 1925 Born, Heisenberg e Jordan, abbandonano la nozione di orbita di elettroni e in generale l'idea del modello atomico e si concentrano sui principi base della Meccanica Classica e sulle informazioni ottenute dalla spettroscopia. Arrivano così ad elaborare una teoria che associa ad ogni quantità fisica una certa matrice, in un'algebra differente da quella ordinaria. La Meccanica Matriciale è infatti definita in un'algebra complessa e non commutativa.

Diversa invece è stata la nascita della Meccanica Ondulatoria. Intorno al 1923 Louis de Broglie, fisico, matematico e storico francese presenta l'ipotesi del dualismo onda-particella della materia. Egli, inoltre, osserva che è possibile sfruttare la natura "ondulatoria" dell'elettrone per spiegare la quantizzazione di Bohr. Dalla stabilità dell'atomo deduce che all'elettrone deve corrispondere un'onda stazionaria, perché se così non fosse dopo un'orbita l'onda non si richiuderebbe su se stessa e si avrebbe interferenza distruttiva. De Broglie mostra la quantizzazione del momento angolare  $L$  richiedendo che la lunghezza dell'orbita  $2\pi r$  sia un multiplo della lunghezza d'onda  $\lambda$ :

$$2\pi r = n\lambda = n \frac{h}{|\vec{p}|} \quad \rightarrow \quad L = n\hbar,$$

dove  $h$  è la costante di Planck e  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  è la costante di Planck ridotta.

Successivamente Schrödinger, fisico austriaco e padre delle equazioni della Meccanica Quantistica, osserva che, in Meccanica Classica, le particelle compiono traiettorie, e similmente succede per i raggi nell'ottica geometrica, che sono un'approssimazione della teoria ondulatoria dell'Elettromagnetismo di Maxwell. Il punto di massima vicinanza tra il formalismo dell'ottica geometrica e quello della meccanica hamiltoniana sta in due enunciati differenti di un principio analogo.

Nell'ottica geometrica si fa riferimento al Principio di Fermat:

**Principio 1** (di Fermat). *I raggi in un mezzo con indice di rifrazione  $n(q)$  seguono come traiettoria tra due punti dati il cammino  $\gamma$  che minimizza l'elemento di linea  $ds(q)$  moltiplicato per l'indice di rifrazione  $n(q)$  integrato sul cammino, cioè minimizza l'integrale*

$$\int_{\gamma} n(q) ds(q).$$

Nella meccanica dei sistemi conservativi vale invece il Principio di Maupertuis:

**Principio 2** (di Maupertuis). *La traiettoria seguita tra due punti dati di una particella in un sistema conservativo è il cammino  $\gamma$  che, assumendo l'energia  $\varepsilon$  costante, minimizza l'elemento di linea  $ds(q)$  moltiplicato per il modulo del momento  $|\vec{p}|$ , integrato sul cammino, cioè minimizza l'integrale*

$$\int_{\gamma} |\vec{p}| ds(q).$$

Nell'interpretazione ondulatoria, la velocità di fase dell'onda elettromagnetica è  $v_f = \frac{c}{n(q)}$ , dunque per il principio di Fermat equivale a minimizzare

$$\int_{\gamma} \frac{ds(q)}{v_f(q)}.$$

D'altra parte, poiché  $\varepsilon = \text{costante}$ , il principio di Maupertuis equivale a minimizzare

$$\int_{\gamma} \frac{\sqrt{2m(\varepsilon - V(q))}}{\varepsilon} ds(q).$$

Ricordando che per de Broglie  $\varepsilon = \hbar\omega$ , Schrödinger afferma che

$$\frac{\sqrt{2m(\varepsilon - V(q))}}{\hbar} = \frac{\omega}{v_f}.$$

L'equazione d'onda di Maxwell in coordinate cartesiane è:

$$\left( -\frac{1}{v_f^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \right) E(\vec{x}, t) = 0, \quad (1.1)$$

considerando  $\omega = \text{cost}$  e  $E(\vec{x}, t) = E(\vec{x})e^{i\omega t}$  e applicando le sostituzioni  $E(\vec{x}) \rightarrow \psi(\vec{x})$ , dove  $\psi(\vec{x})$  è la funzione d'onda, e  $\frac{\omega^2}{v_f^2} = \frac{2m(\varepsilon - V(\vec{x}))}{\hbar^2}$ , si ottiene l'equazione di Schroedinger indipendente dal tempo:

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{x}) \right) \psi(\vec{x}) = \varepsilon \psi(\vec{x}), \quad (1.2)$$

con  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  e  $\varepsilon$  corrispondente ai possibili valori di energia del sistema; dunque l'equazione può essere intesa come una equazione agli autovalori. L'autofunzione è invece la soluzione  $\psi_{\varepsilon}(\vec{x})$  relativa all'autovalore  $\varepsilon$ . Bisogna tener conto che questo problema agli autovalori non è ben definito senza specifiche condizioni di "regolarità" e condizioni al contorno che la funzione  $\psi$  deve soddisfare.



Schrödinger risolve l'equazione per l'atomo d'idrogeno distinguendo due casi:

- $\epsilon > 0$  (stati liberi): le soluzioni sono univoche e formano un insieme continuo. Le autofunzioni non sono nulle all'infinito e di conseguenza la particella non rimane localizzata in una regione finita. Funzioni d'onda di questo tipo sono usate nei problemi di collisione.
- $\epsilon < 0$  (stati legati): dimostra che ammette soluzione solo se  $\int |\psi(\vec{x})|^2 d^3x < \infty$ . Nell'interpretazione statistica significa che c'è una probabilità nulla di trovare la particella all'infinito, la particella rimane localizzata in una regione finita. Le soluzioni formano quindi uno spettro discreto.

La versione con la  $\psi(\vec{x})$  dipendente dal tempo a  $\omega = cost$  è:

$$\psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x})e^{-i\omega t}, \quad (1.3)$$

che ad energia fissata diviene:

$$\psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x})e^{-\frac{iEt}{\hbar}}. \quad (1.4)$$

Integrando su tutte le  $\psi(\vec{x}, t)$  al variare dell'energia e applicando  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$  si ottiene:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) &= \int d\epsilon \epsilon \psi(\vec{x}) e^{-i\frac{\epsilon}{\hbar}t} \\ &= \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{x}) \right) \psi(\vec{x}, t). \end{aligned}$$

La famosa equazione di Schrödinger dipendente dal tempo è quindi:

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{x}) \right) \psi(\vec{x}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t), \quad (1.5)$$

con  $i$  unità immaginaria.

Nel 1926, Schrödinger osserva che può riscrivere l'equazione nella seguente forma:

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{x}) \right) \psi(\vec{x}, t) = \hat{H} \psi(\vec{x}, t), \quad (1.6)$$

dove  $\hat{H}$  è l'operatore hamiltoniano. L'hamiltoniana "quantistica" differisce da quella classica perchè si sostituiscono a  $\vec{x}$  e  $\vec{p}$  classici gli operatori quantistici. In particolare

$$\begin{aligned} \vec{p} &\rightarrow -i\hbar \vec{\nabla} \\ \hat{H} &= \hat{T} + \hat{V} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V, \end{aligned} \quad (1.7)$$

in cui  $V = V(\vec{x}, t)$  in generale può dipendere anche dal tempo. L'equazione relativa all'operatore hamiltoniano è per una singola particella e non relativistica.

Sempre nel 1926, Schrödinger dimostra che la sua Meccanica Ondulatoria è equivalente alla Meccanica Matriciale di Heisenberg. Di lì a poco, Born attraverso studi su questa equazione e sulla sezione d'urto trova il significato della  $\psi$ . La funzione  $\psi(\vec{x}, t)$ , che prende il nome di funzione d'onda, è tale che

$$\frac{|\psi(\vec{x}, t)|^2}{\|\psi\|^2}$$

corrisponde alla densità di probabilità di trovare la particella in  $\vec{x}$  al tempo  $t$ .

## 1.1 Soluzione analitica dell'Equazione di Schrödinger con potenziale non dipendente dal tempo (metodo di separazione delle variabili)

Il metodo di separazione delle variabili assume che le soluzioni dell'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo esistono e possono essere scritte nella forma:

$$\psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x})\chi(t). \quad (1.8)$$

Si considera l'operatore hamiltoniano con potenziale indipendente dal tempo:

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x}), \quad (1.9)$$

dunque si ottiene:

$$\hat{H}\psi(\vec{x}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t), \quad (1.10)$$

da cui

$$\hat{H}\psi(\vec{x})\chi(t) = i\hbar\psi(\vec{x})\frac{\partial\chi(t)}{\partial t};$$

dividendo per  $\psi(\vec{x})\chi(t)$  si giunge alla seguente equazione:

$$\hat{H} \frac{\psi(\vec{x})}{\psi(\vec{x})} = i\hbar \frac{\partial\chi(t)}{\partial t} \frac{1}{\chi(t)}. \quad (1.11)$$

Si osserva che nella parte destra dell'equazione ci sono solo funzioni dipendenti dal tempo mentre nella parte sinistra quelle solo dipendenti dalla posizione. Di conseguenza si pone l'equazione uguale a una costante:  $\varepsilon$  che indica l'energia. Si arriva così al seguente sistema costituito da due equazioni:

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \chi(t) = \varepsilon \chi(t) \\ \hat{H} \psi(\vec{x}) = \varepsilon \psi(\vec{x}). \end{cases} \quad (1.12)$$

La seconda equazione del sistema è l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo la cui formulazione è stata precedentemente presentata. La prima equazione del sistema può essere risolta analiticamente con il metodo di separazione delle variabili:

$$\int_{t_0}^t \frac{\partial\chi(t)}{\chi(t)} = \int_{t_0}^t -\frac{i\varepsilon}{\hbar} dt,$$

da cui segue

$$\chi(t) = \chi(t_0) e^{-\frac{i\varepsilon}{\hbar}(t-t_0)} = \chi(t_0) e^{-i\omega(t-t_0)}. \quad (1.13)$$

Considerando dunque un potenziale  $V(\vec{x})$ , indipendente dal tempo, si può scrivere la soluzione dell'equazione di Schrödinger come:

$$\psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x})\chi(t_0) e^{-\frac{i\varepsilon(t-t_0)}{\hbar}}, \quad (1.14)$$

con  $\chi(t_0)$  fattore moltiplicativo che può essere inglobato in  $\psi(\vec{x})$ . Quindi senza perdere la generalità dell'equazione si può scrivere:

$$\psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x}) e^{-\frac{i\varepsilon(t-t_0)}{\hbar}}. \quad (1.15)$$

Si nota facilmente che

$$|\psi(\vec{x}, t)|^2 = |\psi(\vec{x})|^2,$$

ovvero la densità di probabilità non dipende dal tempo, non c'è effettivamente moto e questo è un problema per la meccanica quantistica.

"La meccanica quantistica deve essere in grado di descrivere il movimento poiché il micromondo che si intende descrivere è costantemente in fase di cambiamento" [1].

La soluzione di questo "paradosso" mostra che la soluzione del sistema appena descritto è da vedere come un caso particolare di una soluzione generale che è la seguente:

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(\vec{x}) e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon_n (t-t_0)} \quad (\text{spettro discreto}) \\ & + \int_0^{\infty} a(\epsilon) \psi(\vec{x}) e^{-\frac{i}{\hbar} \epsilon (t-t_0)} d\epsilon \quad (\text{spettro continuo}), \end{aligned} \quad (1.16)$$

## 1.2 Soluzione analitica dell'Equazione di Schrödinger con potenziale additivo dipendente dal tempo

Si considera adesso una hamiltoniana indipendente dal tempo:

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x}) \quad (1.17)$$

e si introduce un potenziale additivo  $W(t)$  dipendente dal tempo. Si assume nuovamente

$$\psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x}) \chi(t) \quad (1.18)$$

e l'equazione di Schrödinger diventa:

$$\hat{H} \psi(\vec{x}, t) + W(t) \psi(\vec{x}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) \quad (1.19)$$

$$\hat{H} \psi(\vec{x}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) - W(t) \psi(\vec{x}, t)$$

$$\epsilon = \frac{\hat{H} \psi(\vec{x})}{\psi(\vec{x})} = i\hbar \frac{\psi(\vec{x})}{\psi(\vec{x}) \chi(t)} \frac{\partial \chi(t)}{\partial t} - W(t) \frac{\psi(\vec{x}) \chi(t)}{\psi(\vec{x}) \chi(t)}.$$

Risolvendo si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \chi(t) - W(t) \chi(t) = \epsilon \chi(t) \\ \hat{H} \psi(\vec{x}) = \epsilon \psi(\vec{x}). \end{cases} \quad (1.20)$$

La prima equazione è un'equazione differenziale lineare del primo ordine (omogenea) che si può riscrivere come:

$$\frac{\partial}{\partial t} \chi(t) - \frac{W(t) + \epsilon}{i\hbar} \chi(t) = 0. \quad (1.21)$$

L'integrale generale è dato da:

$$\chi(t) = C_1 e^{-\int_{t_0}^t \frac{-(W(t)+\epsilon)}{i\hbar} dt} = C_1 e^{\int_{t_0}^t \frac{W(t)}{i\hbar} dt} e^{\frac{\epsilon}{i\hbar} (t-t_0)} \quad (1.22)$$

e la soluzione particolare è

$$\psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x}) C_1 e^{\int_{t_0}^t \frac{W(t)}{i\hbar} dt} e^{\frac{\epsilon}{i\hbar}(t-t_0)} = \psi(\vec{x}) e^{\int_{t_0}^t \frac{W(t)}{i\hbar} dt} e^{\frac{\epsilon}{i\hbar}(t-t_0)}. \quad (1.23)$$

Considerando la funzione d'onda data da una sovrapposizione di stati aventi differenti energie, la soluzione generale dell'equazione di Schrödinger con il potenziale additivo dipendente dal tempo è:

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(\vec{x}) e^{\int \frac{W(t)}{i\hbar} dt} e^{\frac{\epsilon_n}{i\hbar}(t-t_0)} \quad (\text{spettro discreto}) \\ & + \int_0^{+\infty} a(\epsilon) \psi(\vec{x}) e^{\int \frac{W(t)}{i\hbar} dt} e^{\frac{\epsilon}{i\hbar}(t-t_0)} d\epsilon \quad (\text{spettro continuo}). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Per la risoluzione analitica esatta si ha dunque bisogno che la funzione  $W(t)$  sia integrabile nel dominio considerato.

### 1.2.1 Semplici esempi di soluzioni analitiche

Si riportano alcune semplici risoluzioni considerando potenziali additivi  $W(t)$  piccati attorno al valore  $t = 0$  e integrabili.

- Potenziale gaussiano

$$W(t) = W_0 e^{-\frac{t^2}{\alpha}} \quad (1.25)$$

La gaussiana è una funzione piccata nell'origine (in  $t = 0$ ) e con un andamento a "campana" come mostrato in Figura 1.

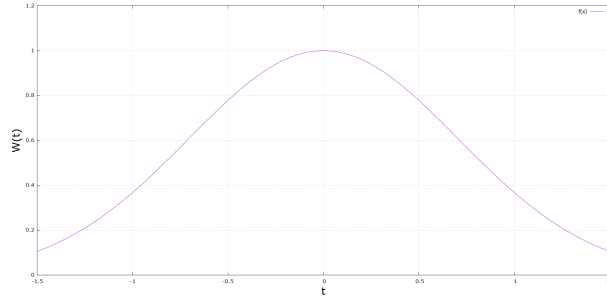


Figura 1: Potenziale additivo  $W(t) = e^{-t^2}$

La soluzione analitica dell'equazione di Schrödinger è:

$$\begin{aligned} \chi(t) = & C_1 e^{-\int_{t_0}^t \frac{-(W(t)+\epsilon)}{i\hbar} dt} = C_1 e^{\int_{t_0}^t \frac{W_0 e^{-\frac{t^2}{\alpha}}}{i\hbar} dt} e^{\frac{\epsilon}{i\hbar}(t-t_0)} = C_1 e^{\frac{W_0}{i\hbar} \frac{\sqrt{\pi\alpha}}{2} \left( \operatorname{erf}\left(\frac{t}{\sqrt{\alpha}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{t_0}{\sqrt{\alpha}}\right) \right)} e^{-i\omega(t-t_0)} \\ \psi(\vec{x}, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(\vec{x}) e^{\frac{W_0}{i\hbar} \frac{\sqrt{\pi\alpha}}{2} \left( \operatorname{erf}\left(\frac{t}{\sqrt{\alpha}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{t_0}{\sqrt{\alpha}}\right) \right)} e^{\frac{\epsilon_n}{i\hbar}(t-t_0)} \quad (\text{spettro discreto}) \\ & + \int_0^{+\infty} a(\epsilon) \psi(\vec{x}) e^{\frac{W_0}{i\hbar} \frac{\sqrt{\pi\alpha}}{2} \left( \operatorname{erf}\left(\frac{t}{\sqrt{\alpha}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{t_0}{\sqrt{\alpha}}\right) \right)} e^{\frac{\epsilon}{i\hbar}(t-t_0)} d\epsilon \quad (\text{spettro continuo}). \end{aligned} \quad (1.26)$$

- Potenziale razionale

$$W(t) = \frac{W_0}{at^2 + c} \quad (1.27)$$

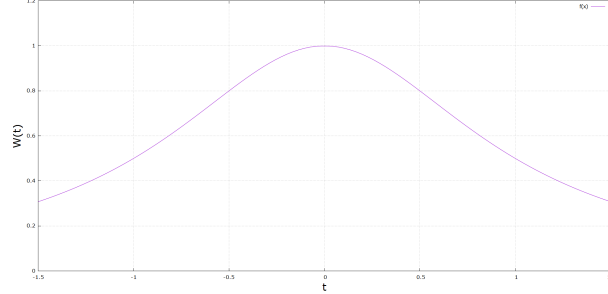


Figura 2: Potenziale additivo  $W(t) = \frac{1}{t^2+1}$

La soluzione analitica dell'equazione di Schrödinger è:

$$\begin{aligned} \chi(t) &= C_1 e^{\int_{t_0}^t \frac{-(W(t)+\varepsilon)}{i\hbar}} = C_1 e^{\int_{t_0}^t \frac{W_0}{(at^2+c)i\hbar} dt} e^{\frac{\varepsilon}{i\hbar}(t-t_0)} = C_1 e^{\frac{W_0}{i\hbar\sqrt{a}\sqrt{c}} \left[ \arctan\left(\frac{\sqrt{at}}{\sqrt{c}}\right) - \arctan\left(\frac{\sqrt{at_0}}{\sqrt{c}}\right) \right]} e^{-i\omega(t-t_0)} \\ \psi(\vec{x}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(\vec{x}) e^{\frac{W_0}{i\hbar\sqrt{a}\sqrt{c}} \left[ \arctan\left(\frac{\sqrt{at}}{\sqrt{c}}\right) - \arctan\left(\frac{\sqrt{at_0}}{\sqrt{c}}\right) \right]} e^{\frac{\varepsilon_n}{i\hbar}(t-t_0)} \quad (\text{spettro discreto}) \\ &+ \int_0^{+\infty} a(\varepsilon) \psi(\vec{x}) e^{\frac{W_0}{i\hbar\sqrt{a}\sqrt{c}} \left[ \arctan\left(\frac{\sqrt{at}}{\sqrt{c}}\right) - \arctan\left(\frac{\sqrt{at_0}}{\sqrt{c}}\right) \right]} e^{\frac{\varepsilon}{i\hbar}(t-t_0)} d\varepsilon \quad (\text{spettro continuo}). \end{aligned} \quad (1.28)$$

- Potenziale iperbolico

$$W(t) = \frac{W_0}{a \cosh(t)} \quad (1.29)$$

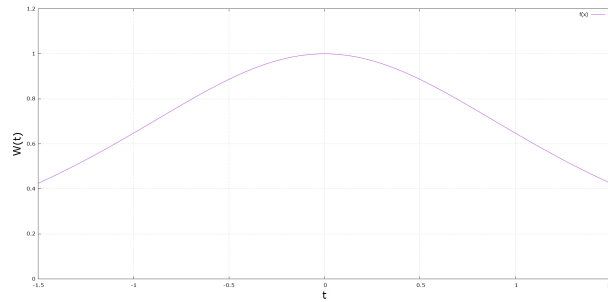


Figura 3: Potenziale additivo  $W(t) = \frac{1}{\cosh(t)}$

La soluzione analitica dell'equazione di Schrödinger è

$$\begin{aligned} \chi(t) &= C_1 e^{-\int_{t_0}^t \frac{-(W(t)+\varepsilon)}{i\hbar}} = C_1 e^{\int_{t_0}^t \frac{W_0}{a \cosh(t) i\hbar} dt} e^{\frac{\varepsilon}{i\hbar}(t-t_0)} = C_1 e^{\frac{2W_0}{i\hbar a} \left[ \arctan\left(\tanh\left(\frac{t}{2}\right)\right) - \arctan\left(\tanh\left(\frac{t_0}{2}\right)\right) \right]} e^{-i\omega(t-t_0)} \\ \psi(\vec{x}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(\vec{x}) e^{\frac{2W_0}{i\hbar a} \left[ \arctan\left(\tanh\left(\frac{t}{2}\right)\right) - \arctan\left(\tanh\left(\frac{t_0}{2}\right)\right) \right]} e^{\frac{\varepsilon_n}{i\hbar}(t-t_0)} \quad (\text{spettro discreto}) \\ &+ \int_0^{+\infty} a(\varepsilon) \psi(\vec{x}) e^{\frac{2W_0}{i\hbar a} \left[ \arctan\left(\tanh\left(\frac{t}{2}\right)\right) - \arctan\left(\tanh\left(\frac{t_0}{2}\right)\right) \right]} e^{\frac{\varepsilon}{i\hbar}(t-t_0)} d\varepsilon \quad (\text{spettro continuo}). \end{aligned} \quad (1.30)$$



## Capitolo 2

# Equazione di Schrödinger con potenziale e massa dipendenti dal tempo (metodo di trasformazione tempo-spazio)

Long, Qin, Yang e Guo hanno lavorato alla risoluzione analitica dell'equazione di Schrödinger, si veda [2] per maggiori dettagli, in  $1 + 1$  dimensioni, considerando il seguente potenziale additivo:

$$W(z, \hat{p}, t) = g_1(t)z + g_2(t)\hat{p} + g_3(t) \quad (2.1)$$

(le  $g_i(t)$  con  $i = 1, 2, 3$  sono funzioni reali del tempo mentre  $\hat{p}$  è l'operatore impulso) e una massa  $m(t)$  dipendente dal tempo. La risoluzione analitica che viene presentata è basata sul metodo di trasformazione di tempo-spazio. Per semplicità si considera  $\hbar = 1$ . Attraverso una trasformazione unitaria si definisce:

$$\psi(z, t) = \phi(z, t)e^{i\beta(t)z}, \quad (2.2)$$

dove  $\beta(t)$  sarà determinato successivamente ed è una funzione reale del tempo. Si intende risolvere la seguente equazione di Schrödinger:

$$i\frac{\partial\psi(z, t)}{\partial t} = \hat{H}\psi(z, t) + W(z, \hat{p}, t)\psi(z, t), \quad (2.3)$$

con

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m(t)}.$$

Eseguendo i calcoli si ottiene:

$$ie^{i\beta(t)z}\frac{\partial\phi(z, t)}{\partial t} - \phi(z, t)e^{i\beta(t)z}\dot{\beta}(t)z = -\frac{\partial^2\phi(z, t)}{\partial z^2}\frac{e^{i\beta(t)z}}{2m} - \frac{\partial\phi(z, t)}{\partial z}\frac{e^{i\beta(t)z}\beta(t)i}{2m} + \frac{\phi(z, t)e^{i\beta(t)z}\beta(t)^2}{2m} - \frac{\partial\phi(z, t)}{\partial z}\frac{e^{i\beta(t)z}\beta(t)i}{2m} \\ + g_1(t)\phi(z, t)e^{i\beta(t)z}z - ig_2e^{i\beta(t)z}\frac{\partial\phi(z, t)}{\partial z} + g_2\phi(z, t)e^{i\beta(t)z}\beta(t) + g_3\phi(z, t)e^{i\beta(t)z}.$$

Dividendo per l'esponenziale si ha:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\phi(z, t) = -\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi(z, t) - i\left\{\frac{\beta(t)}{m} + g_2\right\}\frac{\partial\phi(z, t)}{\partial z} \\ + \left\{\frac{\beta(t)^2}{2m} + \beta(t)g_2 + g_3\right\}\phi(z, t) + \left\{g_1(t) + \dot{\beta}\right\}\phi(z, t)z. \quad (2.4)$$

Si eseguono adesso le seguenti trasformazioni di tempo-spazio:

$$y = z + \alpha(t), \quad s = \int_0^t \frac{1}{m(\tau)} d\tau, \quad (2.5)$$

da cui segue che:

$$\frac{dy}{dt} = \dot{\alpha}(t), \quad ds = \frac{dt}{m}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y},$$

e si ricava:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial s} + \dot{\alpha} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Applicando la sostituzione  $\phi(z, t) = f(y, s)$ , si può riscrivere l'equazione nella seguente forma:

$$\begin{aligned} \frac{i}{m} \frac{\partial f(y, s)}{\partial s} &= -\frac{1}{2m} \frac{\partial^2 f(y, s)}{\partial y^2} + \{g_1 + \dot{\beta}\} y f(y, s) - i \left\{ \frac{\beta}{m} + g_2 + \dot{\alpha} \right\} \frac{\partial f(y, s)}{\partial y} \\ &+ \left\{ \frac{\beta^2}{2m} + g_2 \beta + g_3 \right\} f(y, s) - \{g_1 + \dot{\beta}\} \alpha f(y, s). \end{aligned}$$

Si determinano  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$  ponendo uguale a zero alcuni termini dell'equazione precedente:

$$\dot{\alpha} + \frac{\beta}{m} + g_2 = 0, \quad g_1 + \dot{\beta} = 0,$$

si ottiene allora:

$$\beta(t) = -\int_0^t g_1(\tau) d\tau, \quad (2.6)$$

$$\alpha(t) = -\int_0^t \left( \frac{\beta(\tau)}{m(\tau)} + g_2(\tau) \right) d\tau. \quad (2.7)$$

Si definisce invece

$$G(\tau) = \frac{\beta(\tau)^2}{2m(\tau)} + \beta(\tau)g_2(\tau) + g_3(\tau). \quad (2.8)$$

L'equazione da risolvere è:

$$\frac{i}{m} \frac{\partial f}{\partial s} = -\frac{1}{2m} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + G(t)f. \quad (2.9)$$

Per eliminare il termine G si deve assumere:

$$f(y, s) = F(y, s) e^{-i \int_0^t G(\tau) d\tau} \quad (2.10)$$

e affinché  $f(y, s)$  sia una funzione analitica si ha bisogno  $\int_0^t G(\tau) d\tau$  e  $s = \int_0^t \frac{1}{m(\tau)} d\tau$  siano integrabili. Rimane dunque da risolvere la seguente equazione:

$$\begin{aligned} \frac{i}{m} \frac{\partial f(y, s)}{\partial s} &= \frac{i}{m} \frac{\partial}{\partial s} \left\{ F(y, s) e^{-i \int_0^t G(\tau) d\tau} \right\} \\ &= \frac{i}{m} \frac{\partial F(y, s)}{\partial s} e^{-i \int_0^t G(\tau) d\tau} + \frac{iF(y, s)}{m} \frac{\partial}{\partial s} e^{-i \int_0^t G(\tau) d\tau} \\ &= \frac{i}{m} \frac{\partial F(y, s)}{\partial s} e^{-i \int_0^t G(\tau) d\tau} + iF(y, s) \left[ \frac{\partial}{\partial t} - \dot{\alpha} \frac{\partial}{\partial y} \right] e^{-i \int_0^t G(\tau) d\tau} \\ &= \left\{ \frac{i}{m} \frac{\partial}{\partial s} F(y, s) + G(t)F(y, s) \right\} e^{-i \int_0^t G(\tau) d\tau}. \end{aligned}$$



Si esegue la sostituzione ottenendo:

$$\left\{ \frac{i}{m} \frac{\partial}{\partial s} F(y, s) + G(t) F(y, s) \right\} e^{-i \int_0^t G(\tau) d\tau} = -\frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} F(y, s) e^{-i \int_0^t G(\tau) d\tau} + G(t) F(y, s) e^{-i \int_0^t G(\tau) d\tau}, \quad (2.11)$$

dopo le opportune semplificazioni, si trova infine la seguente equazione:

$$i \frac{\partial}{\partial s} F(y, s) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} F(y, s), \quad (2.12)$$

che è la stessa equazione di una particella libera  $V(x) = 0$  e  $W(t) = 0$  con  $m = 1$  e  $\hbar = 1$ .

Si riprende adesso la procedura ordinaria. Per una particella libera di  $m = 1$  e  $\hbar = 1$  l'equazione di Schrödinger è:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t), \quad (2.13)$$

che corrisponde a  $E = \frac{p^2}{2m}$  della Meccanica Classica. Si considera la soluzione particolare data da:

$$\psi(x, t) = \psi(x) e^{-i\omega t}.$$

Sostituendo l'autofunzione  $\psi(x) = e^{ikx}$  si ottiene:

$$\psi(x, t) = C e^{i(kx - \omega t)},$$

dove  $C$  è una costante scelta in modo opportuno per normalizzare la funzione d'onda e  $k$  e  $\omega$  sono legate dalla seguente relazione:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \hbar \omega.$$

Dunque con  $\hbar = 1$  e  $m = 1$  risulta che

$$\omega = \frac{k^2}{2},$$

per cui:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2\pi} e^{i(kx - k^2 t/2)}.$$

Allora tornando al caso preso in esame:

$$F(y, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(Ay - A^2 s/2)}, \quad (2.14)$$

dove  $A$  è un numero reale arbitrario. Avendo inizialmente posto che  $\phi(z, t) = f(y, s)$  si ottiene la seguente soluzione analitica:

$$\psi(z, t) = f(y, s) e^{i\beta(t)z} = F(y, s) e^{-i \int_0^t G(\tau) d\tau} e^{i\beta(t)z} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iA[z + \alpha(t)]} e^{-\frac{iA^2}{2} \int_0^t \frac{d\tau}{m(\tau)}} e^{-i \int_0^t G(\tau) d\tau} e^{i\beta(t)z}. \quad (2.15)$$

## 2.1 Discussione

Si discutono alcuni casi "speciali":

- Si considera che il potenziale dipendente dal tempo sia della seguente forma:

$$V(z, t) = g_1(t)z \quad (2.16)$$

(caso  $g_2(t) = g_3(t) = 0$ ). In questo caso la  $\beta(t)$  ha la stessa equazione precedente, invece  $G(\tau)$  e  $\alpha(\tau)$  si semplificano:

$$G(\tau) = \frac{\beta(\tau)^2}{2m(\tau)} \quad (2.17)$$

$$\alpha(\tau) = - \int_0^t \frac{1}{m(\tau)} \beta(\tau) d\tau. \quad (2.18)$$

La soluzione analitica dell'equazione di Schrödinger, con le nuove definizioni di  $\alpha(t)$  e  $G(t)$ , è:

$$\psi(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iA[z+\alpha(t)]} e^{-\frac{iA^2}{2} \int_0^t \frac{d\tau}{m(\tau)}} e^{-i \int_0^t G(\tau) d\tau} e^{i\beta(t)z}. \quad (2.19)$$

- In secondo luogo si considera il caso di potenziale nullo e massa costante  $m(t) = m_0$ . La soluzione analitica sarà:

$$\psi(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iAz} e^{-\frac{iA^2 t}{2m_0}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(pz - Et)}, \quad (2.20)$$

dove  $p = A$  e  $E = \frac{A^2}{2m_0} = \frac{p^2}{2m_0}$ . Questa soluzione è ovvia, proprio perchè è il semplice caso della particella libera con energia  $E$  e momento  $p$  lungo la direzione  $z$ .

- Si analizza infine il caso con

$$V(\hat{p}, t) = g_2(t)\hat{p} \quad (2.21)$$

con  $g_1(t) = g_3(t) = 0$ . In questo caso  $\beta = G = 0$ , la soluzione analitica diviene:

$$\psi(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iA[z - \int_0^t g_2(\tau) d\tau]} e^{-\frac{iA^2}{2} \int_0^t \frac{d\tau}{m(\tau)}}, \quad (2.22)$$

dove  $\vec{A} = (0, 0, A_z)$  è il potenziale vettore con

$$A_z = \frac{-cm(t)g_2(t)}{q} \quad (2.23)$$

e

$$\phi = \frac{-m(t)g_2(t)^2}{2q} \quad (2.24)$$

è il potenziale scalare,  $c$  è la velocità della luce e  $q$  la carica. L'importanza di questa equazione è data dal fatto che la funzione d'onda può descrivere il moto di una particella carica in un campo elettromagnetico con il potenziale vettore e il potenziale scalare appena presentati.

## Capitolo 3

# Equazione di Schrödinger con potenziale oscillante nel tempo (metodo di trasformazione di Kramers-Henneberger)

Si presenta adesso il lavoro di Park [3] basato sullo studio dell'equazione di Schrödinger con il seguente potenziale dipendente dal tempo:

$$W(t) = E_0 x \cos(\omega t), \quad (3.1)$$

è un potenziale oscillante nel tempo con  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . L'hamiltoniana

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x) + E_0 x \cos(\omega t) \quad (3.2)$$

rappresenta il sistema sotto l'azione del campo  $E_0 x \cos(\omega t)$ . Per poter giungere alla soluzione, si esegue la trasformazione di Kramers-Henneberger che consiste nel definire:

$$a_0 = \frac{E_0}{m\omega^2} \quad (3.3)$$

e introdurre una nuova variabile  $\xi$  dipendente da spazio e tempo

$$\xi(x, t) = x + a_0 \cos(\omega t). \quad (3.4)$$

A questo punto la  $V(x)$  e la  $W(t)$  si inglobano in  $V(\xi)$ , e si ha la seguente hamiltoniana:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\xi). \quad (3.5)$$

Si assume che la soluzione dipendente dal tempo possa essere scritta nel seguente modo [4]:

$$\psi(x, t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \phi(\xi, t) \chi(x, t), \quad (3.6)$$

dove  $E$  è al solito la costante che rappresenta l'energia. Si inserisce la soluzione nell'equazione di Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \hat{H} \psi(x, t) \quad (3.7)$$

e si ottiene:

$$E e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \phi(\xi, t) \chi(x, t) + i\hbar e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \dot{\phi}(\xi, t) \chi(x, t) + i\hbar e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \phi(\xi, t) \dot{\chi}(x, t) =$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \left[ \chi \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\partial \chi}{\partial x} + \phi \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \right] + e^{-\frac{iEt}{\hbar}} V(\xi) \phi \chi.$$

Dividendo per l'esponenziale e ricordando che

$$\phi(\xi, t) \chi(x, t) = \left[ \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] \chi, \quad (3.8)$$

si arriva a:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \chi \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\partial \chi}{\partial x} + \phi \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \right] + V(\xi) \phi \chi = i\hbar \left[ \chi \left( \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \phi \left( -\frac{iE}{\hbar} \chi + \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \right]. \quad (3.9)$$

Si scrive il sistema:

$$\begin{cases} -\frac{\hbar}{2m} \left[ 2 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\partial \chi}{\partial x} + \phi \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \right] = i \left[ \chi \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \phi \frac{\partial \chi}{\partial t} \right] \\ \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + V(\xi) - E \right) \phi(\xi, t) = i\hbar \frac{\partial \phi(\xi, t)}{\partial t}. \end{cases} \quad (3.10)$$

Le soluzioni dell'ultima equazione sono:

$$\phi(\xi) = e^{\pm c_1 \xi}, \quad (3.11)$$

dove  $c_1 = ik$  o  $K$  con

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

e

$$K = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

a seconda della regione di  $x$ . Si sostituisce  $\phi(\xi)$  e  $\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{p(t)}{m}$  alla prima equazione del sistema e si ottiene:

$$-\frac{\hbar}{2m} \left[ 2c_1 e^{c_1 \xi} \frac{\partial \chi}{\partial x} + e^{c_1 \xi} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \right] = i \left[ \chi \frac{-p}{m} c_1 e^{c_1 \xi} + e^{c_1 \xi} \frac{\partial \chi}{\partial t} \right], \quad (3.12)$$

dividendo per l'esponenziale e cambiando di segno si ha:

$$\frac{\hbar}{2m} \left[ 2c_1 \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \right] - i\chi \frac{p}{m} c_1 = -i \frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (3.13)$$

Per determinare la soluzione si fattorizza

$$\chi(x, t) = u(t)v(x) \quad (3.14)$$

e sostituendo e dividendo tutto per  $u(t)v(x)$  si arriva ad avere:

$$\frac{\hbar}{2m} \frac{1}{v} \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{\hbar c_1}{m} \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} = -i \left( \frac{1}{u} \frac{du}{dt} - \frac{c_1 p(t)}{m} \right). \quad (3.15)$$

Si nota che nella parte sinistra ci sono funzioni dipendenti solo da  $x$  e nella parte destra funzioni dipendenti dal tempo  $t$ . Allora si può porre la parte sinistra uguale a una costante

$$-i \left( \frac{1}{u} \frac{du}{dt} - \frac{c_1 p(t)}{m} \right) = \text{costante} = c_2, \quad (3.16)$$

da cui calcolo

$$\int \frac{du}{u} = \int \left( ic_2 + \frac{c_1}{m} p(t) \right) dt.$$

Considerando l'integrazione da  $t_0 = 0$  e  $t$ , la soluzione è:

$$u(t) = e^{ic_2t + \frac{c_1}{m} \int_0^t p(\tau) d\tau} = e^{ic_2t - c_1 a_0 \cos(\omega t)}. \quad (3.17)$$

La parte destra diviene invece:

$$\frac{\hbar}{2m} \frac{1}{v} \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{\hbar c_1}{m} \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} = \text{costante} = c_2. \quad (3.18)$$

Moltiplicando per  $v$  e spostando tutto a destra si ottiene la seguente equazione differenziale del secondo ordine:

$$\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{\hbar c_1}{m} \frac{dv}{dx} - c_2 v = 0. \quad (3.19)$$

Si inserisce

$$v(x) = e^{\lambda(x)} \quad (3.20)$$

nell'equazione e si ottiene:

$$\frac{\hbar}{2m} \left[ \frac{d^2 \lambda}{dx^2} + \left( \frac{d\lambda}{dx} \right)^2 \right] + \frac{\hbar c_1}{m} \frac{d\lambda}{dx} - c_2 = 0. \quad (3.21)$$

Si definisce

$$\frac{d\lambda}{dx} = w \quad (3.22)$$

e si risolve l'equazione differenziale del primo ordine

$$\frac{\hbar}{2m} \frac{dw}{dx} = c_2 - \frac{\hbar c_1}{m} w - \frac{\hbar}{2m} w^2, \quad (3.23)$$

questa equazione si può facilmente risolvere integrando:

$$\frac{dw}{\frac{2m}{\hbar} c_2 - 2c_1 w - w^2} = dx.$$

Definito

$$\Delta = -4 \left( \frac{2m}{\hbar} c_2 + c_1^2 \right), \quad (3.24)$$

la soluzione è:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \tanh^{-1} \left( -\frac{2(c_1 + w)}{\sqrt{-\Delta}} \right), & \Delta < 0 \\ &= \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \tan^{-1} \left( -\frac{2(c_1 + w)}{\sqrt{\Delta}} \right), & \Delta > 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Si determina  $\lambda$  integrando nuovamente:

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= \ln \left[ \cosh \left( -\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} x \right) \right] - c_1 x, & \Delta < 0 \\ &= \ln \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{2} x \right) \right] - c_1 x, & \Delta > 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Poiché  $v(x) = e^{\lambda(x)}$  si trova:

$$v(x) = \cosh \left( -\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} x \right) e^{-c_1 x}, \quad \Delta < 0$$

$$= \cos\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}x\right) e^{-c_1x}, \quad \Delta > 0. \quad (3.27)$$

Infine:

$$\begin{aligned} \chi(x,t) &= e^{ic_2t - c_1a_0 \cos(\omega t)} \cosh\left(-\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x\right) e^{-c_1x}, \quad \Delta < 0 \\ &= e^{ic_2t - c_1a_0 \cos(\omega t)} \cos\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}x\right) e^{-c_1x}, \quad \Delta > 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

La soluzione analitica esatta  $\psi(x,t)$  si ottiene moltiplicando  $\chi(x,t)$  per  $\phi(\xi,t) = e^{\pm c_1\xi}$  e per  $e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$ .

### 3.1 Discussione

In questo lavoro, si è ottenuta la soluzione esatta per un barriera rettangolare la cui posizione oscilla nel tempo attraverso l'utilizzo della trasformazione di Kramers-Henneberger che è un caso particolare della trasformazione di tempo-spazio, presentata nel capitolo precedente. All'istante  $t = 0$  la barriera è centrata in  $x = -a_0$  e all'istante  $t = \frac{2\pi}{\omega}$  è centrata in  $x = a_0$ . Il problema presentato può essere infatti riscritto come dato dalla seguente hamiltoniana:

$$\hat{H}(x,t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x,t), \quad (3.29)$$

dove

$$V(x,t) = \begin{cases} V_0, & \text{se } |x + a_0 \cos(\omega t)| < \frac{a}{2} \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases} \quad (3.30)$$

Si analizza adesso la soluzione.

- Al tempo  $t = 0$  per  $\Delta < 0$  e  $\phi(\xi,t) = e^{c_1\xi}$  si ha:

$$\psi(x,0) = \cosh\left(-\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x\right). \quad (3.31)$$

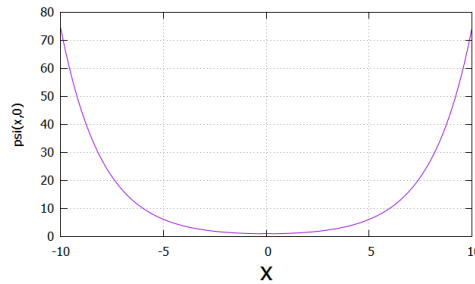


Figura 4: Soluzione al tempo  $t = 0$  e  $\Delta < 0$ ,  $\psi(x,0) = \cosh\left(-\frac{1}{2}x\right)$

- Al tempo  $t \neq 0$  e nelle stesse condizioni precedenti si ha:

$$\psi(x,t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}} e^{c_1(x+a_0 \cos(\omega t))} e^{ic_2t - c_1a_0 \cos(\omega t)} \cosh\left(-\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x\right) e^{-c_1x} = e^{-\frac{iEt}{\hbar}} e^{ic_2t} \cosh\left(-\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}x\right). \quad (3.32)$$

Per poter meglio capire la soluzione, si presenta l'andamento della parte reale della soluzione al tempo  $t = 10$  (Figura 5) e al tempo  $t = 20$  (Figura 6), nelle stesse condizioni precedenti.

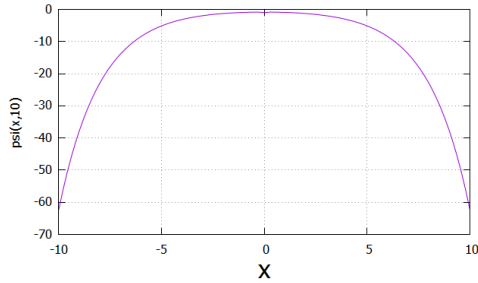


Figura 5:  $\psi(x, 10) = \cos(10) \cosh\left(-\frac{1}{2}x\right)$

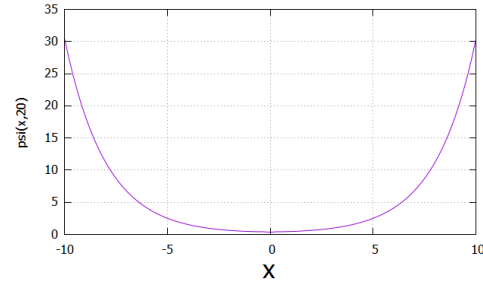


Figura 6:  $\psi(x, 20) = \cos(20) \cosh\left(-\frac{1}{2}x\right)$

Si confrontano gli andamenti della parte reale della soluzione al variare del tempo  $t_i$  (con  $i = 5, 10, 15, 20$ ), nelle stesse condizioni precedenti, attraverso il seguente grafico:

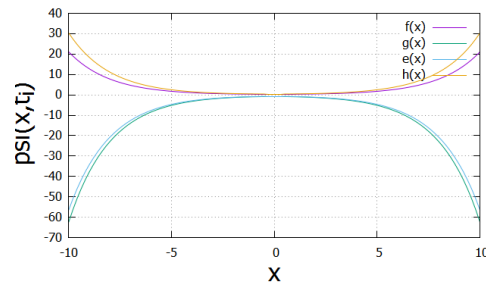


Figura 7: Soluzione al tempo  $t_i = 5, 10, 15, 20$  e  $\Delta < 0$ , parte reale  $\psi(x, t_i) = \cos(t_i) \cosh\left(-\frac{1}{2}x\right)$

Gli andamenti della parte reale e della parte immaginaria della soluzione nel grafico tridimensionale sono i seguenti:

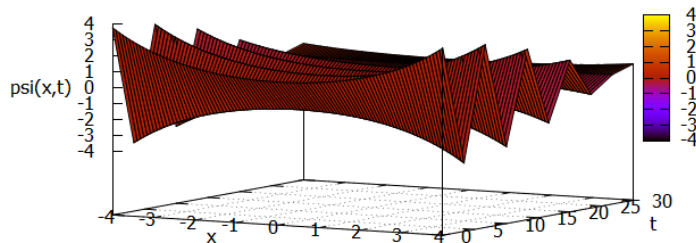


Figura 8: Soluzione in 3D al tempo  $t \neq 0$  e  $\Delta < 0$ , parte reale  $\psi(x, t) = \cos(t) \cosh\left(-\frac{1}{2}x\right)$

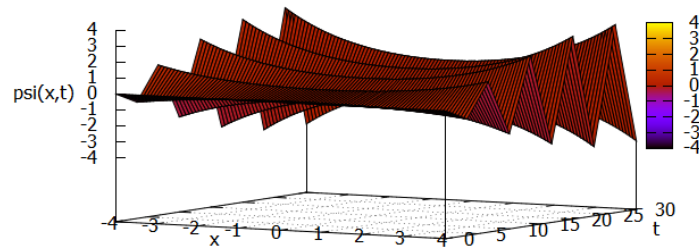


Figura 9: Soluzione 3D al tempo  $t \neq 0$  e  $\Delta < 0$ , parte immaginaria  $\psi(x,t) = \sin(t) \cosh\left(-\frac{1}{2}x\right)$

- Sempre al tempo  $t = 0$  per  $\Delta > 0$  e  $\phi(\xi, t) = e^{c_1 \xi}$  si ha:

$$\psi(x, 0) = \cos\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}x\right). \quad (3.33)$$

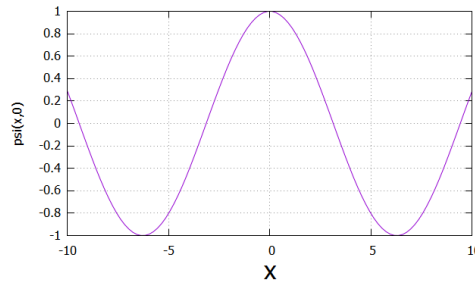


Figura 10: Soluzione al tempo  $t = 0$  e  $\Delta > 0$ ,  $\psi(x, 0) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

- Al tempo  $t \neq 0$  e nelle stesse condizioni precedenti si ha:

$$\psi(x, t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}} e^{c_1(x+a_0 \cos(\omega t))} e^{ic_2 t - c_1 a_0 \cos(\omega t)} \cos\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}x\right) e^{-c_1 x} = e^{-\frac{iEt}{\hbar}} e^{ic_2 t} \cos\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}x\right). \quad (3.34)$$

Per poter meglio capire la soluzione, si presente l'andamento della parte reale della soluzione al tempo  $t = 10$  (Figura 11) e al tempo  $t = 20$  (Figura 12).

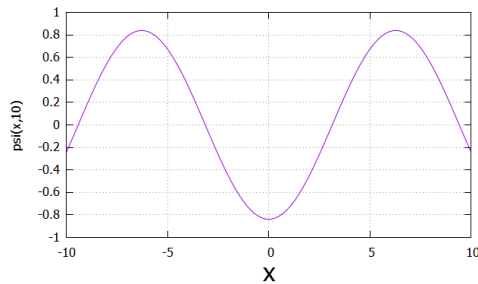


Figura 11:  $\psi(x, 10) = \cos(10) \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

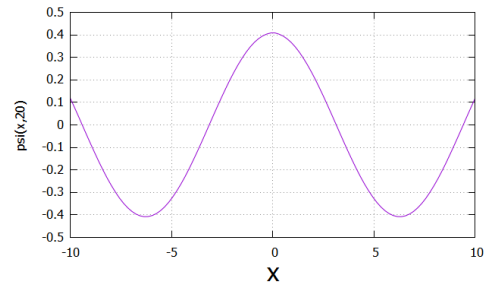


Figura 12:  $\psi(x, 20) = \cos(20) \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$



Si confrontano gli andamenti della parte reale della soluzione, nelle stesse condizioni precedenti, nel seguente grafico:

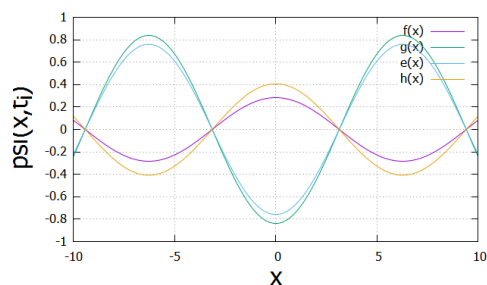


Figura 13: Soluzione al tempo  $t_i = 5, 10, 15, 20$  e  $\Delta < 0$ , parte reale  $\psi(x, t_i) = \cos(t_i) \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

Gli andamenti della parte reale e della parte immaginaria nel grafico tridimensionale sono i seguenti:

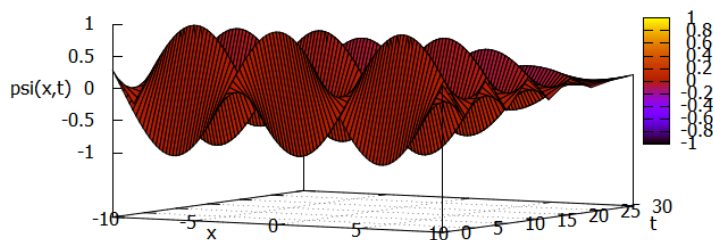


Figura 14: Soluzione 3D al tempo  $t \neq 0$  e  $\Delta > 0$ , parte reale  $\psi(x, t) = \cos(t) \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

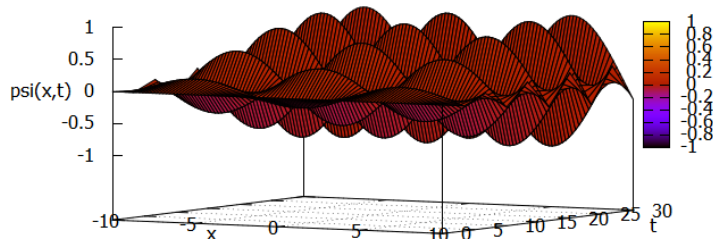


Figura 15: Soluzione 3D al tempo  $t \neq 0$  e  $\Delta > 0$ , parte immaginaria  $\psi(x, t) = \sin(t) \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$



## Capitolo 4

# Equazione di Schrödinger con potenziale a delta di Dirac

La delta di Dirac è una distribuzione temperata non regolare, si indica con il simbolo  $\delta_a$  che corrisponde a  $\delta(x-a)$ . Essa è tale che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)\psi(x) = \psi(a),$$

con

$$\delta(x-a) \sim \begin{cases} 0 & x \neq a \\ +\infty & x = a \end{cases} \quad (4.1)$$

e con la seguente proprietà

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1.$$

### 4.1 Soluzione analitica dell'Equazione di Schrödinger con potenziale a delta di Dirac non dipendente dal tempo

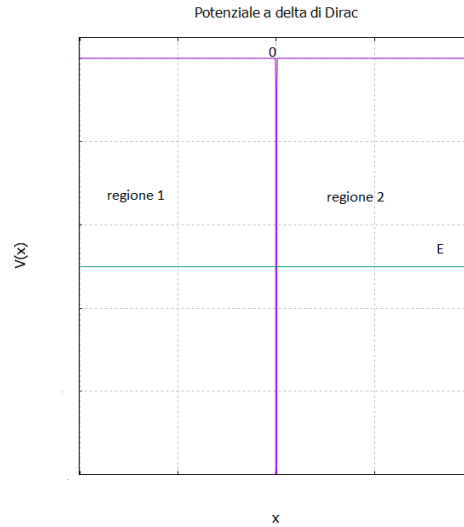
Si considera una particella in un potenziale della seguente forma:

$$V(x) = -aV_0\delta(x), \quad (4.2)$$

poichè l'integrale della delta di Dirac è pari ad 1, le sue dimensioni sono quelle di una lunghezza, di conseguenza  $a$  deve avere le dimensioni dell'inverso di una lunghezza. Come precedentemente presentato, l'equazione di Schrödinger nel caso stazionario e unidimensionale è

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right) \psi(x) = E\psi(x), \quad (4.3)$$

si prende in discussione il caso con  $E < 0$  nella condizione di stato legato (si veda Figura 16).

Figura 16:  $V(x) = -\delta(x)$ 

Nella regione 1 (terzo quadrante del piano cartesiano avente  $x$  sull'asse delle ascisse e  $V(x)$  sull'asse delle ordinate) si ha:

$$\psi(x) = Ae^{kx}, \quad (4.4)$$

e nella regione 2 (quarto quadrante) si ha:

$$\psi(x) = Be^{-kx}, \quad (4.5)$$

con  $k^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2}$ . Dalla condizione di continuità si ottiene:  $A = B$ . Per cui:

$$\psi(x) = Ae^{-k|x|}. \quad (4.6)$$

Integrando l'equazione d'onda attorno alla discontinuità si ha:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{d}{dx} \psi'(x) dx - aV_0 \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x) \psi(x) dx = E \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \psi(x) dx, \quad (4.7)$$

da cui

$$\frac{-\hbar^2}{2m} [\psi'(+\varepsilon) - \psi'(-\varepsilon)] = aV_0 \psi(0) + O(\varepsilon), \quad (4.8)$$

allora

$$2kA = \frac{2m}{\hbar^2} aV_0 A,$$

e si ricava così:

$$k = \frac{maV_0}{\hbar^2}, \quad (4.9)$$

con energia:

$$E = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = -\frac{\hbar^2 m^2 a^2 V_0^2}{\hbar^4 2m} = -\frac{ma^2 V_0^2}{2\hbar^2}. \quad (4.10)$$

La soluzione dipendente dal tempo sarà dunque della seguente forma:

$$\psi(x,t) = Ce^{-k|x|} e^{-i\frac{E}{\hbar}t}, \quad (4.11)$$

dove  $C$  si ricava dalla condizione di normalizzazione.

Per semplificare i calcoli si considera il potenziale:

$$V(x) = -2a\delta(x) \quad (4.12)$$

con  $\hbar = m = 1$ . Di conseguenza  $k = 2a$  e  $E = -2a^2$ . La soluzione risulta essere:

$$\psi(x, t) = \sqrt{2a} e^{-2a|x|} e^{2ia^2 t} \quad (4.13)$$

e può essere riscritta nella seguente forma, come è spiegato nella Ref. [5]:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ e^{ikx} + \frac{2ia}{|k| - 2ia} e^{i|k||x|} \right] e^{-\frac{ik^2 t}{2}}. \quad (4.14)$$

Questa scrittura sarà utile per risolvere il caso della delta di Dirac dipendente dal tempo.

## 4.2 Soluzione analitica dell'Equazione di Schrödinger con potenziale a delta di Dirac dipendente dal tempo

Si mostra il lavoro di Zhdanov e Chikhachev [5], in cui viene studiata la soluzione di un sistema consistente nel propagare in senso opposto i potenziali della funzione delta di Dirac  $\delta$ . Cioè considerando il seguente potenziale additivo:

$$W(x, t) = -a[\delta(x - vt) + \delta(x + vt)]. \quad (4.15)$$

L'equazione di Schrödinger è la seguente:

$$\left\{ i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a[\delta(x - vt) + \delta(x + vt)] \right\} \psi(x, t) = 0 \quad (4.16)$$

Dove  $x$  e  $t$  sono le coordinate di spazio e tempo,  $\psi$  è al solito la funzione d'onda, e la costante  $a$  caratterizza la profondità del singolo stato legato di un potenziale di funzione delta a riposo.

Come si può facilmente vedere il caso con  $v = 0$  è quello descritto nella sottosezione 4.1. Si analizza adesso il caso dipendente dal tempo con  $v \neq 0$ . Dato il problema si può scrivere la funzione d'onda finale come la somma di una funzione d'onda "particolare" e della funzione d'onda tipica della particella libera:

$$\psi_k = \tilde{\psi}_k + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx - \frac{ik^2 t}{2}}. \quad (4.17)$$

Si utilizzano le seguenti uguaglianze:

$$x = vt$$

$$z_{\pm} = |x \pm vt|$$

e

$$\phi_s(z, t) = e^{-a_s z + ia_s^2 \frac{t}{2}}$$

Dalle Referenze [7] e [6] si trova:

$$\tilde{\psi}_k = e^{\frac{iv^2 t}{2}} \sum_s \left\{ C_s^{(1)} e^{ivx} \phi_s(z_-, t) + C_s^{(2)} e^{ivx} \phi_s(z_+, t) e^{-ivx} \right\}, \quad (4.18)$$

per ricavare  $\tilde{\psi}_k$  si utilizza l'equazione di Schrödinger:

$$i \frac{\partial \tilde{\psi}_k}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_k}{\partial x^2} + a(\delta(x-vt) + \delta(x+vt)) \tilde{\psi}_k + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{ik^2 t}{2}} \left[ \delta(x-vt) e^{ikvt} + \delta(x+vt) e^{-ikvt} \right] = 0$$

$$i \frac{\partial \tilde{\psi}_k}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_k}{\partial x^2} + a(\delta(z_-) + \delta(z_+)) \tilde{\psi}_k + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{ik^2 t}{2}} \left[ \delta(z_-) e^{ikvt} + \delta(z_+) e^{-ikvt} \right] = 0. \quad (4.19)$$

Si arriva al seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \sum_s \left\{ C_s^{(1)} (a - a_s) e^{\frac{ia_s^2 t}{2}} + C_s^{(2)} a e^{\frac{i}{2}(a_s + 2vi)^2} \right\} = -\frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{it(k-v)^2}{2}} \\ \sum_s \left\{ C_s^{(1)} a e^{\frac{it(a_s + 2vi)^2}{2}} + C_s^{(2)} (a - a_s) e^{\frac{ia_s^2 t}{2}} \right\} = -\frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{it(k+v)^2}{2}}, \end{cases} \quad (4.20)$$

si esegue il seguente riscaldamento  $s \rightarrow s-1$  nel secondo termine della prima equazione e nel primo termine della seconda equazione giungendo al seguente sistema:

$$\begin{cases} \sum_s \left\{ C_s^{(1)} (a - a_s) e^{\frac{ia_s^2 t}{2}} + C_{s-1}^{(2)} a e^{\frac{i}{2}(a_{s-1} + 2vi)^2} \right\} = -\frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{it(k-v)^2}{2}} \\ \sum_s \left\{ C_{s-1}^{(1)} a e^{\frac{it(a_{s-1} + 2vi)^2}{2}} + C_s^{(2)} (a - a_s) e^{\frac{ia_s^2 t}{2}} \right\} = -\frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{it(k+v)^2}{2}}. \end{cases} \quad (4.21)$$

Poiché queste relazioni valgono per un  $t$  arbitrario, si deve avere la relazione di ricorrenza:

$$a_s = a_{s-1} + 2iv \quad (4.22)$$

Allora si trova:

$$a_s = 2ivs + \text{costante}, \quad (4.23)$$

dove la costante viene determinata in base al lato destro delle equazioni. Si ottiene:

$$a_s = i[-|k| + v(2s-1)], \quad (4.24)$$

da cui segue:

$$a_0 = -i(|k| + v)$$

e

$$a_1 = -i(|k| - v).$$

Si analizza il caso con  $k > 0$ , Il sistema può essere riscritto nella seguente forma:

$$\begin{cases} \sum_s \left[ C_s^{(1)} (a - a_s) + C_{s-1}^{(2)} a \right] e^{\frac{ia_s^2 t}{2}} = -\frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{it(k-v)^2}{2}} \\ \sum_s \left[ C_{s-1}^{(1)} a + C_s^{(2)} (a - a_s) \right] e^{\frac{ia_s^2 t}{2}} = -\frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{it(k+v)^2}{2}} \end{cases} \quad (4.25)$$

Per la convergenza delle serie bisogna imporre  $C_{-1}^{(1)} = C_0^{(1)} = 0$ . Solo due equazioni del sistema sono disomogenee:

$$\begin{cases} C_1^{(1)} (a - a_1) + C_0^{(2)} a = -\frac{a}{\sqrt{2\pi}} \\ C_{-1}^{(1)} a + C_0^{(2)} (a - a_0) = -\frac{a}{\sqrt{2\pi}}, \end{cases} \quad (4.26)$$

quindi si trova:

$$C_0^{(2)} = -\frac{a}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a + i(k+v)}$$

e

$$C_1^{(2)} = -\frac{a}{\sqrt{2\pi}} \frac{i(k+v)}{a+i(k+v)} \frac{1}{a+i(k-v)}$$

Per  $s \neq 0, 1$  invece:

$$\begin{cases} C_s^{(1)}(a-a_s) + C_{s-1}^{(2)}a = 0 \\ C_{s-1}^{(1)}a + C_s^{(2)}(a-a_s) = 0. \end{cases} \quad (4.27)$$

Dal sistema si trova che:

$$C_2^{(2)} = -\frac{i(k+v)}{\sqrt{2\pi}a} \frac{a}{a+i(k+v)} \frac{a}{a+i(k-v)} \frac{a}{a+i(k-3v)}$$

e

$$C_3^{(1)} = \frac{i(k+v)}{\sqrt{2\pi}a} \frac{a}{a+i(k+v)} \frac{a}{a+i(k-v)} \frac{a}{a+i(k-3v)} \frac{a}{a+i(k-5v)}.$$

Considerando la condizione

$$C_{-1}^{(1)} = C_0^{(1)} = 0,$$

i coefficienti  $C_s^{(1)}$  con  $s$  pari e tutti gli  $C_s^{(2)}$  con  $s$  dispari sono nulli. Si possono invece scrivere i coefficienti  $C_s^{(1)}$  con  $s$  dispari e gli  $C_s^{(2)}$  con  $s$  pari nel seguente modo:

$$C_s^{(1)} = \left(\frac{a}{2iv}\right)^{s-3} \frac{C_3^{(1)} \tau\left(4 - \frac{k+v}{2v} - \frac{a}{2iv}\right)}{\tau\left(s+1 - \frac{k+v}{2v} - \frac{a}{2iv}\right)}$$

e

$$C_s^{(2)} = \left(\frac{a}{2iv}\right)^{s-2} \frac{C_2^{(2)} \tau\left(3 - \frac{k+v}{2v} - \frac{a}{2iv}\right)}{\tau\left(s+1 - \frac{k+v}{2v} - \frac{a}{2iv}\right)}.$$

Calcolati i coefficienti, per avere la soluzione basta sostituirli nell'equazione di partenza 4.17:

$$\psi_k = e^{\frac{iv^2 t}{2}} \sum_s \left\{ C_s^{(1)} e^{ivx} \phi(z_-, t) + C_s^{(2)} e^{ivx} \phi_s(z_+, t) e^{-ivx} \right\} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx - \frac{ik^2 t}{2}}.$$

Per  $k < 0$  vi è la stessa soluzione ma con  $C_s^1 \iff C_s^2$ .





# Conclusioni

In questo lavoro si è risolta analiticamente l'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo, considerando particolari potenziali additivi dipendenti dal tempo con diversi metodi di risoluzione e se ne sono discusse le soluzioni. In particolare si è visto che la soluzione dell'equazione ottenuta mediante il metodo di trasformazione tempo-spazio ha portato, nel caso in cui  $g_1(t) = g_3(t) = 0$ , a definire un potenziale vettore (2.23) e un potenziale scalare (2.24) e di conseguenza si è concluso che la funzione d'onda è in grado di descrivere il comportamento di una particella carica in un campo elettromagnetico.

In generale l'esistenza di una soluzione esatta dell'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo trova possibili applicazioni nel caso di sistemi nucleari e atomici eccitati. Se si è ad esempio in presenza di una particella isolata al tempo  $t_0 = 0$ , a cui al tempo  $t_1 \neq 0$  si avvicina un'altra particella, la prima può acquistare energia per assorbimento di radiazione o per urto e il sistema viene messo in oscillazione. Nell'eccitazione dell'atomo l'elettrone passa dall'orbita fondamentale (a energia minima) a una più esterna, similmente nel nucleo i neutroni o protoni passano dallo stato fondamentale a uno eccitato.



# Bibliografia

- [1] Tannor, David Joshua, *Introduction to quantum mechanics: a time-dependent perspective*, (1958).
- [2] Chao-Yung Long, Shui-Jie Qin, Zhu-Hua Yang e Guan-Jie Guo, *Solution to the Schrödinger Equation for the Time-Dependent Potential*, Received: 4 June 2008 / Accepted: 8 October 2008 / Published online: 15 October 2008, Springer Science+Business Media, LLC 2008.
- [3] Tae Jun Park, *An Analytical Solution of the Schrödinger Equation for a Rectangular Barrier with Time-Dependent Position*, Departement of Chemistry, Dongguk University, Seoul 100-715, Korea Received November 12, 2001, Bull. Korean Chem. Soc. 2002, Vol. 23, No.2, p 357-358.
- [4] Truscott, W. s. *Phys. Rev. Lett.* 1993, 70, 1900.
- [5] A. S. Chikhachev, *Time-Dependent Schrödinger equation admitting an exact solution "Salyut" Commercial Bureau of the m. v. khrushchev State Space Research and Technology Center, 101000 Moscow, Russia*, (Submitted 14 November 1994), Zh. Eksp. Teor. Fiz. 107, 1153-1159 (April 1995).
- [6] W. Dappen, *J. Phys. B* 10, 2399 (1977).
- [7] S K. Zhdanov and A. S. Chikhachev, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 218, 1323 (1974) [*Sov. Phus. Dikl.* 19, 691 (1978)].