

**Università degli studi di Padova**

---

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA "GALILEO GALILEI"  
Corso di Laurea Triennale in Astronomia

TESI DI LAUREA

**Mescolamento convettivo: dalla teoria classica  
della MLT ai nuovi sviluppi derivanti dalle  
simulazioni idrodinamiche**

Laureando:

**Mattia Merola**

Matricola 1217648

Relatrice:

**Paola Marigo**

---

**Anno Accademico 2021-2022**

# Indice

Elenco delle figure . . . . .	i
Elenco delle tabelle . . . . .	ii
<b>1 Introduzione Storica</b>	<b>3</b>
<b>2 Tipi di Trasporto di Energia nelle Stelle</b>	<b>5</b>
2.1 Diffusione Radiativa . . . . .	5
2.2 Conduzione di Calore . . . . .	6
2.3 Convezione . . . . .	7
<b>3 Riassunto della MLT Classica</b>	<b>10</b>
3.1 Trattazione Matematica . . . . .	10
3.2 Punti di Forza e di Debolezza della MLT . . . . .	16
<b>4 Miglioramenti a Partire dalle Simulazioni Idrodinamiche e Prospettive Future</b>	<b>17</b>
4.1 Teoria Convettiva e Stratificazione Subfotosferica . . . . .	17
4.2 Oltre la Teoria della MLT: un Passo Verso la Teoria 321D . . . . .	23
<b>Appendice</b>	<b>28</b>
A Equazioni Base delle Simulazioni . . . . .	28
B Dimostrazione del Criterio di Stabilità Convettiva . . . . .	30
C Esponenti Politropici . . . . .	32
D Dimostrazione dell'Equazione Cubica della MLT . . . . .	34
E Equazioni Convettive . . . . .	36
<b>Bibliografia</b>	<b>37</b>

# Elenco delle figure

2.1	Schema grafico del criterio di stabilità contro la convezione . . . . .	7
4.1	Track evolutivi dei modelli solari nel diagramma HR . . . . .	19
4.2	Struttura della regione subfotosferica dei modelli solari . . . . .	20
4.3	Struttura della SAR dei modelli solari . . . . .	20
4.4	Velocità convettive dei modelli solari . . . . .	21
4.5	Grafico del lavoro di galleggiamento in funzione del raggio . . . . .	24
4.6	Schema grafico di uno strato limite convettivo . . . . .	25
7	Rappresentazione nel grafico $\log P - \log \rho$ del criterio di stabilità contro la convezione . . . . .	31

# Elenco delle tabelle

4.1	Modelli solari costruiti facendo variare $\alpha_{ml}$ e $g_{ml}$ . . . . .	18
-----	---	----

# Sinossi

L'obiettivo di questa tesi è quello di sviscerare un particolare tipo di trasporto energetico, ovvero il *trasporto convettivo*. Questo tipo di trasporto energetico è molto importante in molte fasi della vita delle stelle. Basti pensare alla linea di Hayashi, ovvero la linea che una stella completamente convettiva compie nel diagramma H-R (*Hertzsprung–Russell diagram*). Questa linea è percorsa dalle protostelle nella PMSP (*Pre-Main Sequence Phase*), cioè prima che la stella entri nella sequenza principale, e dalle stelle in prossimità della ZAMS (*Zero Age Main Sequence*) con masse inferiori a  $0.35 M_{\odot}$ . Vi sono però altre fasi dell'evoluzione stellare dove la stella non calca la linea di Hayashi ma vi tende asintoticamente, ad esempio nella *Red Giant Branch Phase (RGB phase)*, fase caratteristica dell'evoluzione delle stelle di massa piccola o intermedia, o nella *Thermally Pulsing AGB Phase (TP-AGB phase)*, fase sempre peculiare di questa classe di stelle.

La teoria utilizzata tuttora nei codici stellari è palesemente insufficiente: infatti essa non riesce a giustificare molti fenomeni che è necessario teorizzare per l'evoluzione della stella. Un esempio lampante è quello del terzo dredge-up, processo teorizzato nella TP-AGB phase in assenza del quale non si potrebbe giustificare la nucleosintesi indicata dalle osservazioni spettroscopiche ([10], sec 11.1.2). Infatti in questa fase subentra la produzione di elementi più pesanti del ferro attraverso l' s-process. Questo processo però ha bisogno di una certa quantità di neutroni liberi. Essi sono prodotti nelle regioni intershell ricche di idrogeno attraverso le reazioni  $^{13}\text{C}(\alpha, n)^{16}\text{O}$  (per le stelle con  $M < 4M_{\odot}$ ) e  $^{22}\text{Ne}(\alpha, n)^{25}\text{Mg}$  (per le stelle con  $M > 4M_{\odot}$ ). Per le stelle di massa inferiore a  $3M_{\odot}$  è la prima reazione che fornisce la maggior parte dei neutroni necessari. Ma rimane il seguente problema: come si forma questa “sacca” di  $^{13}\text{C}$ ? Si pensa che dopo il pulso termico vi sia una diffusione di protoni dall'involucro convettivo, che reagiscono con il  $^{12}\text{C}$  formando il  $^{13}\text{C}$ . I dettagli di questo processo rimangono però perlopiù sconosciuti. Una teoria convettiva adeguata dovrebbe dunque riuscire a spiegare questo fenomeno (insieme a molti altri).

La scelta della teoria del trasporto convettivo da utilizzare nel modello è, dunque, di fondamentale importanza.

Nel capitolo 1 “Introduzione Storica” si procederà con una trattazione storica del problema, partendo dall'osservazione della granulosità solare e passando per le teorie della lunghezza di mescolamento per approdare ai moderni metodi numerici di risoluzione delle equazioni del moto.

Nel capitolo 2 “Tipi di Trasporto di Energia nelle Stelle” saranno analizzati i vari tipi di trasporto energetico. Nelle sezioni 2.1 “Diffusione Radiativa” e 2.2 “Conduzione di Calore” verranno indagati in breve i primi due metodi di trasporto di calore, rispettivamente diffusione e conduzione. Ci si concentrerà poi nella sezione 2.3 “Convezione” sul meccanismo di trasporto convettivo. Verrà introdotto il criterio di stabilità e attraverso di esso i criteri di Ledoux e Schwarzschild. Si utilizzerà poi il criterio di Schwarzschild per vedere per quali condizioni avrà luogo la convezione.

A questo punto nel capitolo 3 “Riassunto della MLT Classica” verrà introdotta la teoria della convezione che è stata utilizzata fino ad oggi, la “*Mixing-Length Theory*”, MLT. Nella sezione 3.1 “Trattazione Matematica” verranno messi in relazione i vari flussi e i vari gradienti presenti all'interno delle stelle, approdando infine all'equazione cubica della MLT per la convezione non adiabatica. Nella sezione 3.2 “Punti di Forza e di Debolezza della MLT” saranno evidenziati i pro e i contro di questo modello, sottolineandone l'incompletezza e concretizzando il bisogno di formulare una teoria sostitutiva.

Infine nel capitolo 4 “Miglioramenti a Partire dalle Simulazioni Idrodinamiche e Prospettive Future” le debolezze della MLT saranno affrontate. Inizialmente nella sezione 4.1 “Teoria Convettiva e Stratificazione

Subfotosferica” si ricorrerà a una modifica dei parametri della MLT introducendo il parametro  $g_{ml}$  in aggiunta ad  $\alpha_{ml}$  e si vedrà come, facendo variare i due parametri, si ottengano modelli solari diversi, che in determinate circostanze faranno ritrovare i risultati ottenuti dalla classica teoria della MLT. Attraverso l'utilizzo di grafici si arriverà alla convinzione che una modifica seppur piccola della teoria della convezione utilizzata riecheggia sull'intera struttura della stella. Dopodichè nella sezione 4.2 “Oltre la Teoria della MLT: un Passo Verso la Teoria 321D” si andrà alla ricerca della formulazione di una teoria fisica. In particolare, sottolineando l'incompatibilità tra la velocità dedotta dalla MLT e i risultati delle simulazioni idrodinamiche, si comprenderà la necessità di modificare le equazioni del moto, equazioni che, grazie alla loro stessa formulazione, lasceranno intuire il bisogno di procedere con la teoria della RAMS, “*Reynolds-averaged Navier-Stokes equations*”. Armati di queste nuove considerazioni e delle nuove simulazioni si arriverà a constatare la presenza di una regione di frenamento, non contemplata nella MLT ma accettata dalla nuova formulazione. Partendo dunque dalle equazioni di Navier-Stokes si approderà a un modello schematico del “*convective boundary*”. Verranno quindi poste le basi per un algoritmo (che però non verrà sviluppato). Infine verranno elencati gli ambiti che hanno bisogno di una rivisitazione in conseguenza della formulazione della nuova teoria.

Per completezza sono state introdotte cinque appendici.

L'appendice A “Equazioni Base delle Simulazioni” riporta le equazioni idrodinamiche e termiche necessarie per lo studio del problema.

L'appendice B “Dimostrazione del Criterio di Stabilità Convettiva” riporta la dimostrazione del criterio di stabilità enunciato nella sezione 2.3, base della teoria della MLT.

L'appendice C “Esponenti Politropici” riporta alcune relazioni termodinamiche necessarie per la formulazione matematica della mixing-length theory.

L'appendice D “Dimostrazione dell'Equazione Cubica della MLT” riporta la dimostrazione dell'equazione 3.34, equazione base della MLT.

Infine l'appendice E “Equazioni Convettive” contiene il formalismo matematico utilizzato nella sezione 4.2.

Riassumendo, questo lavoro è incentrato sull'importanza del modello convettivo utilizzato nel codice stellare, e su come una modifica del primo comporti un drastico cambiamento del secondo in tutti i suoi aspetti.

È importante sottolineare che l'argomento è tutt'altro che chiuso: l'ultimo modello proposto in questo lavoro (la “321D theory”) è solo un tentativo, un primo passo verso una teoria completa che molto probabilmente tarderà ancora diverso tempo ad arrivare.

# Capitolo 1

## Introduzione Storica

Di notevole interesse è la trattazione storica della convezione stellare, riportata in [6].

Questo fenomeno si palesò per la prima volta con l’osservazione del Sole, in particolare della granulosità solare. Dapprima Galileo e Scheiner si accorsero di questo fenomeno; successivamente Herschel coniò la definizione stessa di granulosità solare (si veda [5] per dettagli). Nessuno di loro però seppe ricondurre questo fenomeno alla branca della fisica a cui apparteneva. La questione fu definitivamente inquadrata grazie alle fotografie di Janssen (1878). Da qui partì finalmente il dibattito fisico.

Schwarzschild per primo si chiese se la stratificazione dell’atmosfera solare fosse considerabile adiabatica, come lo è del resto quella terrestre. Dall’oscuramento al bordo del Sole comprese che era necessario teorizzare un altro meccanismo di stratificazione, che definì “equilibrio radiativo” (“Strahlungsgleichgewicht” nella versione originale tedesca). La presenza della granulosità solare, però, rendeva necessario un meccanismo energetico in grado di “creare agitazione”, rimescolare la superficie della stella. Per un certo lasso di tempo il miglior candidato fu il flusso generato dalla rotazione stellare, ma poi Eddington nel 1926 stimò le velocità di questi flussi e realizzò che non era possibile considerarli responsabili. Ciò che effettivamente aveva luogo fu intuito da Unsöld nel 1930. Egli notò che, nelle condizioni fisiche proprie della superficie del Sole, un elemento di materia discendente non doveva solo spendere lavoro per aumentare pressione e temperatura, ma aveva anche bisogno di spendere lavoro per la ionizzazione. Da queste considerazioni dedusse che al di sotto della superficie solare si trovava una zona convettiva generata dalla ionizzazione dell’idrogeno. Inoltre Biermann nel 1932 comprese che anche una grande sorgente di energia nucleare nell’interno della stella poteva creare zone convettive.

Una volta compresa l’esistenza di queste zone convettive agli inizi del 1930 si cercò di ricavare un modello teorico per la descrizione di tale fenomeno. L’approccio più intuitivo è quello di partire dalle equazioni dell’idrodinamica, cioè dall’equazione di Navier-Stokes o da quella di Eulero, e implementarle con equazioni di trasporto radiativo, opacità e altri ingredienti fondamentali per il modello (alcune delle equazioni più importanti sono riportate nell’appendice A). Il problema che si presentò fin da subito fu l’assenza di calcolatori; le soluzioni in tal modo risultavano impossibili da ottenere. Si cercò quindi di ricavare modelli che, per quanto approssimativi, fossero trattabili dalle tecniche del tempo e che fossero facilmente inseribili nei calcoli della struttura e dell’evoluzione stellare. Si passò dunque alla formulazione delle teorie delle “lunghezze di mescolamento”, “the mixing-length paradigm”, ovvero il concetto di una lunghezza di scala caratteristica dopo la quale un elemento ascendente si dissolve e libera energia verso l’esterno. Questo tipo di approccio fu tentato inizialmente da Biermann e poi fu ripreso e perfezionato da Böhm-Vitense nel suo famoso paper del 1958 “*Über die Wasserstoffkonvektionszone in Sternen verschiedener Effektivtemperaturen und Leuchtkräfte. Mit 5 Textabbildungen*” ([3]). Questa rimane la descrizione della convezione stellare più utilizzata nello studio della struttura e dell’evoluzione delle stelle. L’avvento delle teorie del mescolamento convettivo hanno portato a una riduzione delle coordinate spaziali (da tre a zero nei modelli locali, ove in ogni punto bisogna risolvere solo un’equazione algebrica) e a un annullamento della coordinata temporale. Un appunto sull’uso della parola “paradigma”, ripreso dall’articolo [6]. In realtà non vi è un paradigma della turbolenza universalmente accettato. Ciononostante questo termine viene generalmente associato a un

approccio non in relazione nè con le simulazioni numeriche dotate di scale temporali e spaziali ampiamente risolte, nè con i principi primi, ovvero le equazioni che governano il moto di questi fluidi (Navier-Stokes, Eulero, equilibrio radiativo...). Del resto le teorie del mescolamento convettivo coinvolgono proprietà di bolle fittizie che non sono osservate in nessun altro flusso convettivo. Ad ogni modo, nonostante questo grande problema, la MLT è stata la prima teoria a svilupparsi, come spiegato precedentemente; infatti la definizione del parametro libero  $\alpha_{ml}$  è molto flessibile e in grado di adattare le previsioni del modello a molte situazioni fisiche.

D'altro canto subentrò anche il bisogno di teorie non locali per giustificare l'“overshooting” e l'interazione della convezione con le pulsazioni. Nonostante la formulazione di queste teorie non locali, sicuramente più complete rispetto alla MLT, è interessante notare come queste non siano utilizzate nella maggior parte dei casi, e come si preferisca ad esse gli approcci che utilizzano la lunghezza di mescolamento. Ciò è spiegabile con il fatto che questi modelli per arrivare a un largo campo di applicabilità hanno bisogno di assunzioni che non sono deducibili dai principi primi (quelli riportati nell'appendice A). Inoltre questi nuovi modelli introducono una complessità analitica che è stata testata solo grazie ai moderni studi di astrosismologia dal lato pratico, e grazie alle avanzate simulazioni numeriche dal lato teorico. Infine si vide che le proprietà integrali delle stelle potevano essere facilmente riprodotte aggiustando i parametri liberi della MLT.

Con l'avvento di metodi computazionali più avanzati si è passati a risolvere numericamente le equazioni dinamiche dei fluidi. Infatti, mentre queste ultime si conoscevano fin dall'inizio del 1900, non solo non si avevano soluzioni analitiche, ma neanche una prova dell'unicità della soluzione (la soluzione dell'equazione di Navier-Stokes è uno dei “Millennium Prize Problems” ([12])).

Inizialmente si è cercato di trovare altre modalità per risolvere queste equazioni in modo approssimativo, o approssimando numericamente le soluzioni o approssimando le stesse equazioni ([6], sec 2.1.1).

Un approccio diffuso è quello denominato “Large Eddy Simulations” (LES), che si basa sulla costruzione di un modello per medie volumetriche. Questo approccio è abbastanza intuitivo dal momento che le osservazioni astrofisiche hanno risoluzione spaziale e temporale finita; si tratta quindi di medie volumetriche e non di valori puntuali.

Un altro metodo diffuso è quello delle “Direct Numerical Simulations” (DNS). Questo termine si riferisce a simulazioni numeriche che non assumono alcuna proprietà fisica addizionale. Nel contesto astrofisico sono generalmente indistinte dalle LES.

Ancora, è possibile trovare delle equazioni matematiche che descrivano le proprietà statistiche delle equazioni. A questo scopo si utilizza la media d'insieme di alcune grandezze (ad esempio la densità  $\bar{\rho}$  o la temperatura  $\bar{T}$ ). Questa media viene generalmente effettuata per un singolo punto (approssimazione più diffusa) o al più per due punti. Questo procedimento però ha bisogno di assunzioni di chiusura che non possono essere dedotte dai principi primi.

Un altro tentativo è stato quello di sostituire l'equazione fondamentale di Navier-Stokes. Un esempio è il metodo denominato “Lattice Boltzmann Methods” (LBM), usato però perlopiù in sostituzione di alcuni metodi numerici che come punto di partenza per una teoria fisica. Per lo studio dei fluidi in astrofisica lo “Smooth Particle Hydrodynamics” (SPH) sembra essere il metodo che ha avuto più successo. D'altra parte il problema che risiede in questi metodi è l'inutilità di avere risoluzioni molto diverse in ambiti diversi.

Chiudendo, da menzionare è l'introduzione di simulazioni stocastiche per la descrizione della turbolenza su larga scala. Grazie a queste si è in grado di mappare il tragitto delle singole particelle e l'interazione tra di esse. Si può subito notare che questo approccio in tre dimensioni risulta inaccessibile.

Ci si può infine porre la seguente domanda: perché la convezione stellare è considerata tuttora un “problema irrisolto” nell'astrofisica stellare? Perché le simulazioni numeriche possono fornire oggi risposte a molte domande inerenti a questo contesto, ma non a tutte. Rimangono infatti diversi problemi per quanto riguarda la struttura e l'evoluzione delle stelle.

Al contempo però ad oggi non esiste ancora nessun modello computazionale che possa sostituire efficacemente le simulazioni per via di incertezze dovute alle approssimazioni necessarie per la sua trattazione.

## Capitolo 2

# Tipi di Trasporto di Energia nelle Stelle

Negli interni stellari è possibile con buona approssimazione considerare materia e radiazione in *equilibrio termodinamico locale*, *LTE*. Dunque, assumendo che il cammino libero medio sia dei fotoni che delle particelle di gas sia estremamente piccolo, si può constatare la presenza di un trasporto di energia (sotto forma di calore) dalle regioni più calde alle regioni più fredde della stella. Questo trasporto può avvenire in due modi:

1. **Diffusione di calore.** Questo meccanismo di trasporto è causato dai moti termici delle particelle. Se le particelle in questione sono fotoni, si parla di *diffusione radiativa*; se invece sono particelle di gas (elettroni, ioni, atomi) si parla di *conduzione di calore*.
2. **Convezione.** Questo processo si basa sui moti collettivi delle particelle di gas. Si tratta di un processo molto efficiente e molto rapido, e perciò detiene un ruolo centrale nei modelli stellari.

Di seguito è presentata una trattazione riassuntiva dei tre processi.

### 2.1 Diffusione Radiativa

Prendiamo dunque in esame i fotoni. Chiamiamo  $l_{ph}$  il cammino libero medio di tali fotoni. Allora attraverso un calcolo approssimativo (si veda [10], sec 3.1) è possibile stimare la variazione di temperatura su  $l_{ph}$  nel Sole:  $\Delta T \approx 10^{-4} K$ . Il campo di radiazione è dunque molto vicino alla radiazione di corpo nero con  $U = aT^4$ . Nel caso di un campo di radiazione perfettamente isotropico non si avrebbe alcun trasporto di energia; però nel caso stellare è presente una piccola anisotropia dovuta a questa piccola differenza di temperatura. In particolare, per il nostro Sole abbiamo  $T \approx 10^{-7} K \implies \frac{\Delta T}{T} \approx 10^{-11}$ . Sebbene questo valore sia decisamente piccolo, esso è sufficiente a trasportare tutto il flusso di energia all'interno del Sole. Da queste considerazioni è possibile dedurre che il trasporto di energia radiativa può essere descritto tramite un processo di diffusione. Per un processo diffusivo vale la legge di Fick

$$\vec{J} = -D\vec{\nabla}n , \quad (2.1)$$

ove  $\vec{J}$  è il flusso diffusivo e  $n$  è la densità di particelle. Ciò comporta l'instaurazione di un flusso di particelle dalla zona dove la concentrazione è maggiore alla zona dove la concentrazione è minore (segno meno).  $D$  è detto *coefficiente di diffusione* ed è dato da  $D = \frac{1}{3}\bar{v}l$ , ove  $\bar{v}$  è la velocità media delle particelle e  $l$  è il cammino libero medio di esse (si veda [10], sec 5.2.1 per la dimostrazione).

In perfetta analogia si può trattare il caso fotonico. Se è presente un gradiente per quanto riguarda la densità di energia  $U$  allora vi sarà un flusso risultante  $\vec{F}$  attraverso la superficie considerata. In particolare

$$\vec{F} = -D\vec{\nabla}U = -K\vec{\nabla}T , \quad (2.2)$$

avendo utilizzato che  $\vec{\nabla}U = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \vec{\nabla}T = C_V \vec{\nabla}T$ .  $K$  è detta *conduttività* e ha la forma  $K = \frac{1}{3}\bar{v}lC_V$ . Si può ora sfruttare il fatto che le particelle in esame sono fotoni. Dunque con semplici passaggi ([10], sec 5.2.2) si può arrivare a scrivere

$$\vec{F}_{rad} = -K\vec{\nabla}T = -\frac{4acT^3}{3k\rho}\vec{\nabla}T, \quad (2.3)$$

ove  $a$  la costante di Stefan-Boltzmann,  $c$  la velocità della luce nel vuoto,  $k$  l'opacità media di Rosseland e  $\rho$  è la densità del mezzo ove si ha il trasporto energetico. Sfruttando inoltre che  $F_{rad} = \frac{l}{4\pi r^2}$ , ove  $l$  è la luminosità locale della stella, è possibile dedurre che

$$\vec{F}_{rad} = \frac{l}{4\pi r^2} = -\frac{4acT^3}{3k\rho}\vec{\nabla}T \implies \vec{\nabla}T = \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{3}{16\pi ac} \frac{k\rho l}{T^3 r^2}. \quad (2.4)$$

Passando infine in coordinate lagrangiane ( $\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}$ ) si ha

$$\frac{\partial T}{\partial m} = \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial m} = -\frac{3}{64\pi^2 ac} \frac{kl}{T^3 r^4}. \quad (2.5)$$

Questa è un'equazione molto importante in astrofisica. Infatti essa fornisce il gradiente di temperatura necessario a trasportare la luminosità  $l$  della stella per mezzo della radiazione.

Una stella per cui vige la relazione 2.5 si dice *in equilibrio radiativo* RE, o semplicemente *radiativa*.

Se oltre all'equilibrio radiativo si suppone anche l'*equilibrio idrostatico* HE ( $\frac{dP}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}$ ) (la stella in questo caso si dice in *equilibrio completo*), con semplici passaggi ([10], sec 5.2.2) si ottiene

$$\begin{cases} RE \rightarrow \frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{3}{64\pi^2 ac} \frac{kl}{T^3 r^4} \\ HE \rightarrow \frac{dP}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \end{cases} \implies \frac{dT}{dm} = -\frac{3}{64\pi^2 ac} \frac{kl}{T^3 r^4} = \frac{dP}{dm} \frac{dT}{dP} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \frac{T}{P} \frac{d \log T}{d \log P}$$

$$\implies \nabla_{rad} = \left(\frac{d \log T}{d \log P}\right)_{rad} = \frac{3}{16\pi acG} \frac{klP}{mT^4}.$$

Questa equazione è di fondamentale importanza. Essa descrive la variazione logaritmica della temperatura con la profondità per una stella in equilibrio completo, cioè per una stella in equilibrio idrostatico per la quale l'energia è trasportata solo per mezzo della radiazione. Nel caso in questione la pressione fa le veci del raggio; infatti con l'aumento del raggio la pressione diminuisce. Dunque, come si può vedere da questa equazione, maggiore è la luminosità  $l$  che deve essere trasportata e maggiore è il gradiente di temperatura richiesto.

Questa definizione verrà poi utilizzata nei *criteri di stabilità*, che verranno indagati successivamente nella sezione 2.3.

## 2.2 Conduzione di Calore

Durante la trattazione precedente non è stato considerato il trasporto energetico dovuto agli urti tra le particelle del gas. Del resto anche le collisioni a cui partecipano ioni ed elettroni possono trasportare calore. Il contributo di questo tipo di trasporto energetico però si può trascurare in condizioni normali. Infatti le sezioni d'urto di queste particelle alle temperature caratteristiche degli interni stellari sono così piccole che i relativi cammini liberi medi delle particelle risultano diversi ordini di grandezza inferiori a  $l_{ph}$ . Inoltre la velocità media delle particelle dovuta ai moti termici è  $\bar{v} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$ , che è molto inferiore alla velocità dei fotoni ( $c$ ). Per questo motivo questo meccanismo di trasporto del calore è perlopiù ignorato per la maggior parte della vita della stella. Vi sono però delle fasi evolutive per le quali l'approssimazione appena giustificata non è più applicabile. Questo avviene quando gli elettroni diventano degeneri (fasi finali della vita delle stelle). In tal caso il cammino libero medio degli elettroni  $l_e$  aumenta; ad altissime densità  $l_e \gg l_{ph}$ , per cui la conduzione di calore diventa il meccanismo di trasporto energetico preponderante.

Dal punto di vista quantitativo si può ragionare in perfetta analogia con il caso del trasporto radiativo. In particolare, richiamando l'equazione 2.3, si può scrivere:

$$\vec{F}_{cond} = -K_{cond}\vec{\nabla}T = -\frac{4acT^3}{3k_{cond}\rho}\vec{\nabla}T . \quad (2.7)$$

Perciò il flusso totale dovuto alla diffusione radiativa e alla conduzione di calore è dato da

$$\vec{F} = \vec{F}_{rad} + \vec{F}_{cond} = -(K_{rad} + K_{cond})\vec{\nabla}T = -\frac{4acT^3}{3k\rho}\vec{\nabla}T , \text{ ove } \frac{1}{k} = \frac{1}{k_{rad}} + \frac{1}{k_{cond}} . \quad (2.8)$$

Da qui si vede subito che dominerà il meccanismo rispetto al quale la materia stellare ha la maggior trasparenza, cioè quella per cui  $\frac{1}{k}$  è maggiore.

## 2.3 Convezione

Il terzo meccanismo di trasporto di energia negli interni stellari è il meccanismo convettivo. Non si ha ancora una descrizione esaustiva di questo processo. Questa tesi si incentrerà su questo terzo meccanismo di trasporto di calore, che è uno degli argomenti dell'astrofisica stellare che meno si conosce.

Come detto all'inizio del capitolo 2 la convezione è un meccanismo che coinvolge moti macroscopici ciclici della materia all'interno delle stelle.

Si prenda l'equazione 2.6. Come detto in precedenza essa fornisce la variazione di temperatura necessaria per trasportare tutta la luminosità  $l$  mediante il meccanismo radiativo. Esiste però un limite superiore per questo gradiente di temperatura. In particolare quando esso viene superato cambia il meccanismo di trasporto di calore: si passa dal trasporto radiativo al trasporto convettivo.

Si noti subito che questa instabilità non porta alla distruzione della stella; l'instaurazione della convezione infatti non porta a una violazione globale dell'equilibrio idrostatico. La convezione può essere invece vista come un efficiente mezzo di trasporto energetico e di mescolamento.

Si passi ora alla trattazione fisica. A questo scopo bisogna prendere le distanze dalla simmetria sferica, parlando invece di piccole perturbazioni. Se queste perturbazioni non crescono allora possono essere ignorate; se invece aumentano nel loro moto esse possono portare all'instaurarsi di moti globali, quali ad esempio la convezione. Bisogna quindi trovare un criterio di stabilità contro tali perturbazioni.

Per la trattazione seguente si consideri la figura 2.1.

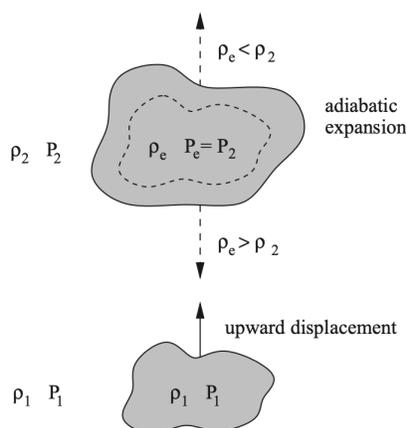


Figura 2.1: Schema grafico del criterio di stabilità contro la convezione. Figura presa da Marigo, *Theoretical Astrophysics, lecture notes* ([10], sec 5.5.1, fig 5.3).

Si consideri un elemento di massa come in figura 2.1. Esso è sottoposto a una perturbazione e compie un piccolo spostamento verso l'alto. Si chiami 1 e 2 rispettivamente il punto di partenza e il punto di arrivo della particella. In 1, al raggio  $r$ , l'ambiente e la particella hanno entrambi pressione  $P_1$  e densità  $\rho_1$ . In 2 invece, al raggio  $(r + \Delta r)$ , la densità e la pressione dell'ambiente sono rispettivamente  $\rho_2$  e  $P_2$ , mentre quelle dell'elemento sono  $\rho_e$  e  $P_e$ . Dato che la pressione diminuisce con l'aumentare del raggio  $P_1 > P_2$ . Ciò comporta che l'elemento dovrà espandersi per mantenere l'equilibrio. Si supponga che alla fine dello spostamento si abbia  $P_e = P_2$ . Questo però non comporta necessariamente che  $\rho_e = \rho_2$ . Di conseguenza si dipanano due strade:

- a.  $\rho_e > \rho_2$ ; in questo caso la forza peso è maggiore della forza di Archimede e vi sarà una forza risultante diretta verso il basso. L'elemento sarà dunque riportato nella sua posizione di partenza;
- b.  $\rho_e < \rho_2$ ; in questo caso la forza di Archimede è maggiore della forza peso e vi sarà una forza risultante diretta verso l'alto. Si avrà così una situazione instabile che sfocerà nella convezione.

L'intero processo può essere considerato adiabatico. Infatti l'espansione dell'elemento avviene su tempi scala molto minori di quelli relativi allo scambio di calore (almeno per quanto riguarda gli interni stellari). Con queste premesse è possibile dimostrare (si veda l'appendice B) l'esistenza di un criterio generale della stabilità contro la convezione. In particolare:

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{d \log \rho}{d \log P} > \left( \frac{d \log \rho}{d \log P} \right)_{ad} = \frac{1}{\gamma_{ad}} \implies \gamma < \gamma_{ad} . \quad (2.9)$$

Se questa relazione non è soddisfatta si avrà l'instaurarsi della convezione. Si noti inoltre che il processo convettivo così descritto comporta solo un trasporto verso l'alto di energia e nessun trasporto di materia. Il criterio 2.9 in generale può essere tradotto in termini di gradienti di temperatura (si veda [10], sec 5.5.1 per dettagli):

$$\nabla < \nabla_{ad} - \frac{\chi_\mu}{\chi_T} \nabla_\mu , \quad (2.10)$$

ove  $\nabla = \frac{d \log T}{d \log P}$ ,  $\nabla_{ad} = \left( \frac{d \log T}{d \log P} \right)_{ad}$ ,  $\nabla_\mu = \frac{d \log \mu}{d \log P}$ ,  $\chi_\mu = \left( \frac{d \log P}{d \log \mu} \right)_{\rho, T}$  e  $\chi_T = \left( \frac{d \log P}{d \log T} \right)_{\rho, \mu}$ .

Da qui si possono enunciare due criteri molto importanti:

- *Criterio di Ledoux.* Questo assume che tutta l'energia sia trasportata dalla radiazione, ovvero  $\nabla = \nabla_{rad}$ , per cui:

$$\nabla_{rad} < \nabla_{ad} - \frac{\chi_\mu}{\chi_T} \nabla_\mu . \quad (2.11)$$

Per un gas ideale ( $\chi_T = 1$ ,  $\chi_\mu = -1$ ) questa equazione diventa:

$$\nabla_{rad} < \nabla_{ad} + \nabla_\mu . \quad (2.12)$$

- *Criterio di Schwarzschild.* Questo parte dal criterio di Ledoux e in più assume che la stella abbia una composizione omogenea, ovvero che  $\nabla_\mu = 0$ . Dunque si ottiene:

$$\nabla_{rad} < \nabla_{ad} . \quad (2.13)$$

Utilizzando il criterio di Schwarzschild e richiamando l'equazione 2.6 per  $\nabla_{rad}$  ci si aspetta che la convezione abbia luogo quando

$$\nabla_{rad} = \frac{3}{16\pi acG} \frac{klP}{mT^4} > \nabla_{ad} . \quad (2.14)$$

Di conseguenza riferendoci al criterio di Schwarzschild appena enunciato è necessario utilizzare il formalismo convettivo quando:

- $k$  è grande, ovvero nelle regioni più opache delle stelle. Notando che le stelle meno massive sono più fredde e sfruttando la legge di Kramers dell'opacità  $k_{ff-bf} \propto T^{-7/2}$  (si veda [10], sec 5.3) ci si aspetta che le stelle di piccola massa (come il Sole) abbiano involucri convettivi ( $T \downarrow \implies k \uparrow \implies \text{convezione}$ );
- $l/m$  è grande, ovvero quando si ha un ingente flusso di energia. Ciò accade nel nucleo, ove la produzione energetica è intensa, e soprattutto per le stelle relativamente massive, tali per cui  $\epsilon_{nuc}$  è grande (si veda [10], cap 6);
- $\nabla_{ad}$  è piccolo, cosa che avviene nelle zone di ionizzazione parziale, dove le temperature sono relativamente basse. Per questo motivo gli strati superficiali delle stelle, qualunque sia la loro massa, presentano una piccola zona ove idrogeno ed elio sono parzialmente ionizzati (si veda [10], sec 3.5 per ulteriori dettagli).

# Capitolo 3

## Riassunto della MLT Classica

Precedentemente sono state indagate, dal punto di vista qualitativo, le condizioni per le quali ha luogo l'instaurarsi della convezione. Si vuole ora trattare questo argomento dal punto di vista quantitativo. L'obiettivo dunque diventa la determinazione della quantità di energia che può essere trasportata dalla convezione e la valutazione del gradiente di temperatura  $\nabla$  effettivo all'interno di una regione convettiva. Come detto in precedenza data l'assenza di una teoria dettagliata della convezione è difficile arrivare a ottenere questi valori. Ciononostante per la descrizione di questi fenomeni si utilizza una teoria monodimensionale basata su pesanti approssimazioni: la *Mixing Length Theory*, MLT.

### 3.1 Trattazione Matematica

In questa trattazione i moti convettivi globali delle particelle di gas vengono approssimati da bolle che si muovono verso l'alto e verso il basso. Si assuma l'adiabaticità per questo processo. Si supponga che ogni elemento convettivo percorra mediamente una certa distanza  $\Lambda$  (la cosiddetta *lunghezza di mescolamento* o *cammino medio*) dopo la quale si dissolve e si mescola con le regioni circostanti cedendo calore. Inoltre gli elementi convettivi sono assunti avere la stessa dimensione caratteristica in tutte le direzioni, ma la loro forma non è specificata. Questa dimensione caratteristica si assume ancora una volta essere  $\Lambda$ .  $\Lambda$  dipenderà dalle condizioni fisiche nelle quali ha luogo questo meccanismo.

Seguendo la trattazione esposta in [4] *Struttura ed evoluzione delle stelle* (capitolo 14) e in [11] *Cox & Giuli's principles of stellar structure* (capitolo 12 e 14) è possibile definire quattro gradienti ( $\nabla = \frac{d \log T}{d \log P}$ ) che saranno utili in seguito:

- a.  $\nabla \rightarrow$  gradiente medio di tutta la materia al raggio  $r$ ;
- b.  $\nabla' \rightarrow$  gradiente di un elemento convettivo in movimento;
- c.  $\nabla_{ad} \rightarrow$  gradiente adiabatico;
- d.  $\nabla_{rad} \rightarrow$  gradiente nell'ipotesi radiativa, ovvero in cui tutto il flusso sia trasportato dalla radiazione. Esso naturalmente è quello dato dall'equazione 2.6.

In generale tra i quattro gradienti appena elencati vige la seguente disuguaglianza

$$\nabla_{rad} > \nabla > \nabla' > \nabla_{ad} . \quad (3.1)$$

Si può inoltre introdurre l'*altezza di scala di pressione*  $H_P$ . Supponendo l'equilibrio idrostatico si ottiene che

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2} \implies \frac{1}{H_P} = \left( -\frac{d \log P}{dr} \right) = -\frac{1}{P} \frac{dP}{dr} = \frac{1}{P} \frac{GM\rho}{r^2} = \frac{\rho g}{P} , \quad (3.2)$$

ove  $g$  è l'accelerazione gravitazionale locale.

Tornando ora all'equazione 2.3 e utilizzando l'equazione 3.2 per  $H_P$  si ottiene

$$F_{rad} = -\frac{4acT^3}{3k\rho} \frac{dT}{dr} = \frac{4acT^3}{3k\rho} \frac{d \log T}{d \log P} \frac{dT}{d \log T} \left( -\frac{d \log P}{dr} \right) = \frac{4acT^4 g}{3kP} \nabla . \quad (3.3)$$

Si noti ora che anche in una regione convettiva una parte dell'energia sarà trasportata mediante radiazione; ciò è vero ogni qualvolta è presente un gradiente di temperatura. Dunque il flusso totale sarà dato dalla somma del flusso convettivo e del flusso radiativo. Inoltre questo flusso totale può essere visto come il flusso per una stella la cui energia è trasportata esclusivamente mediante radiazione. A questo flusso è possibile collegare  $\nabla_{rad}$ , ovvero il gradiente (fittizio) che avrebbe la materia in un determinato punto se tutta l'energia fosse trasportata mediante radiazione in quel punto (il flusso convettivo si annulla). Indicando dunque con  $F$  il flusso totale e con  $F_{rad}$  e  $F_{conv}$  rispettivamente il flusso radiativo e il flusso convettivo si ha

$$F = F_{rad} + F_{conv} = \left( \frac{4acT^4 g}{3kP} \right) \nabla_{rad} . \quad (3.4)$$

Si può ora provare a dare un'interpretazione al termine  $F_{conv}$  che compare in questa equazione.

Si consideri un elemento convettivo che sta salendo. Esso percorrerà prima di dissolversi una certa distanza  $\Delta r$ . Inoltre in questo processo si avrà un trasferimento di calore. Questo calore per unità di area per unità di tempo è dato da

$$F_{conv} = \frac{1}{2} \rho v c_p \Delta r \left[ \left( -\frac{dT}{dr} \right) - \left( -\frac{dT'}{dr} \right) \right] . \quad (3.5)$$

$c_p$  è il calore specifico a pressione costante; infatti dall'equazione 3.2 è stata assunta la condizione di equilibrio di pressione. Inoltre il fattore  $\frac{1}{2}$  deriva dal fatto che si è in assenza di movimento netto di materia, ovvero che mediamente il numero di elementi in salita e quello di elementi in discesa è uguale.

Come si può intuire il  $\Delta r$ , ovvero la distanza percorsa dall'elemento convettivo prima di dissolversi, non è uguale per tutti gli elementi convettivi. Per questo motivo viene in aiuto la definizione di cammino medio  $\Lambda$  data all'inizio del paragrafo. Un discorso analogo si può fare anche per la velocità  $v$ : c'è bisogno di ricorrere a una velocità media  $\bar{v}$ . Quindi si ottiene che (sfruttando  $T \approx T'$ )

$$\begin{aligned} F_{conv} &= \frac{1}{2} \rho v c_p \Delta r \left[ \left( -\frac{dT}{T} \frac{T}{d \log P} \frac{d \log P}{dr} \right) - \left( -\frac{dT'}{T'} \frac{T'}{d \log P} \frac{d \log P}{dr} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \rho \bar{v} c_p \Lambda \left( -\frac{d \log P}{dr} \right) T \left[ \frac{d \log T}{d \log P} - \frac{d \log T'}{d \log P} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \rho \bar{v} c_p T \frac{\Lambda}{H_P} (\nabla - \nabla') . \end{aligned} \quad (3.6)$$

Si vuole ora procedere con il calcolo di  $\bar{v}$ .

Sia  $\Delta \rho$  l'eccesso di densità di un elemento di materia rispetto al mezzo. Allora si definisce la *forza di galleggiamento* o *bouyancy force* (forza per unità di volume) come

$$f_B = -g \Delta \rho . \quad (3.7)$$

Si supponga ora che l'elemento effettui uno spostamento dalla posizione  $r$  alla posizione  $r + \Delta r$  prima di dissolversi. Sia  $v = 0$  la velocità iniziale in  $r$ . Allora la forza di galleggiamento che la particella ha alla posizione  $r + \Delta r$  è data da

$$f_B = -g \Delta \rho(\Delta r) , \quad (3.8)$$

ove  $\Delta \rho(\Delta r)$  sta a significare che la differenza di densità è calcolata in  $r + \Delta r$ .

Il lavoro effettuato sull'unità di volume nel moto è

$$W(\Delta r) = -\frac{1}{2} g \Delta \rho(\Delta r) \Delta r . \quad (3.9)$$

Mediando e introducendo, come vuole la trattazione originaria della teoria, il fattore  $\frac{1}{4}$ , si ottiene ( $\overline{\Delta r} = \Lambda$  come già visto)

$$\overline{W(\Lambda)} = -\frac{1}{8}g\Delta\rho(\Lambda)\Lambda . \quad (3.10)$$

Naturalmente una parte di questo lavoro sarà convertito in energia cinetica. Date le grandi dimensioni degli elementi convettivi le forze viscosse hanno un ruolo secondario; d'altra parte il numero di Reynolds  $R = \frac{Dv\rho}{\eta}$  (ove  $\eta$  è la viscosità,  $v$  la velocità,  $\rho$  la densità e  $D$  la dimensione caratteristica associata al moto dell'elemento) è grande, sempre in virtù della grandezza degli elementi convettivi, e dunque il moto è turbolento. Da queste considerazioni si può assumere che solamente metà del lavoro medio appena ricavato si trasformi in energia cinetica degli elementi. Perciò

$$\frac{1}{2}\overline{\rho v^2} \approx \frac{1}{2}\rho\bar{v}^2 = \frac{1}{2}\overline{W(\Lambda)} \implies \bar{v}^2 = -\frac{1}{8}g\left(\frac{\Delta\rho(\Lambda)}{\rho}\right)\Lambda = \frac{1}{8}gQ\left(\frac{\Delta T(\Lambda)}{T}\right)\Lambda , \quad (3.11)$$

avendo dedotto dalla risoluzione dell'equazione di stato che

$$\Delta\log\rho = -Q\Delta\log T, \quad , \text{ove} \quad -Q = \left(\frac{d\log\rho}{d\log\mu}\right)_{P,T} \left(\frac{d\log\mu}{d\log T}\right)_P + \left(\frac{d\log\rho}{d\log T}\right)_{\mu,P} . \quad (3.12)$$

Inoltre, sfruttando che ([10], sec 5.5.2)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dT}{dr} = T\frac{d\log T}{dr} = T\frac{d\log T}{d\log P}\frac{d\log P}{dr} \stackrel{(3.2)}{=} -\frac{T}{H_P}\nabla \\ \frac{dT'}{dr} = -\frac{T}{H_P}\nabla' \end{array} \right. \implies \Delta T = \left[\frac{dT'}{dr} - \frac{dT}{dr}\right]\Lambda = T\frac{\Lambda}{H_P}(\nabla - \nabla') \quad (3.13)$$

si arriva a scrivere l'espressione per  $\bar{v}$  che si voleva

$$\begin{aligned} \bar{v}^2 &= \frac{1}{8}gQ\frac{\Lambda}{T}\frac{\Lambda}{H_P}(\nabla - \nabla') = \frac{1}{8}gQ\Lambda^2(\nabla - \nabla')\frac{\rho g}{P} = \frac{1}{8}Q\Lambda^2(\nabla - \nabla')\frac{\rho g^2}{P} \\ &\implies \bar{v} = (2\sqrt{2})^{-1}gQ^{1/2}\left(\frac{\rho}{P}\right)^{1/2}\Lambda(\nabla - \nabla')^{1/2} . \end{aligned} \quad (3.14)$$

Quindi richiamando l'equazione 3.4 e utilizzando le equazioni 3.3, 3.6 e 3.14 si ha

$$\begin{aligned} F = F_{rad} + F_{conv} &\implies \frac{4acT^4g}{3kP}\nabla_{rad} = \frac{4acT^4g}{3kP}\nabla + \frac{1}{2}\bar{v}\rho c_p T\Lambda\frac{\rho g}{P}(\nabla - \nabla') \stackrel{(3.14)}{=} \\ &= \frac{4acT^4g}{3kP}\nabla + \frac{1}{2}\rho c_p T\Lambda\frac{\rho g}{P}(\nabla - \nabla') \left[\frac{gQ^{1/2}\rho^{1/2}\Lambda(\nabla - \nabla')^{1/2}}{2\sqrt{2}P^{1/2}}\right] = \\ &\implies \nabla_{rad} = \nabla + \frac{3kP}{4acT^4g}\frac{1}{2}\frac{g^2Q^{1/2}\rho^{5/2}c_p T\Lambda^2}{2\sqrt{2}P^{3/2}}(\nabla - \nabla')^{3/2} = \\ &= \nabla + \frac{3kgQ^{1/2}\rho^{5/2}c_p\Lambda^2}{16\sqrt{2}acT^3P^{1/2}}(\nabla - \nabla')^{3/2} . \end{aligned} \quad (3.15)$$

Tramite questa equazione è possibile legare  $\nabla$ , il gradiente effettivo, a  $\nabla'$ , il gradiente di un elemento convettivo ascendente o discendente, e a  $\nabla_{rad}$ , il gradiente radiativo fittizio. Questo legame è espresso in termini dei valori locali delle variabili fisiche coinvolte nel problema ( $c_p$ ,  $k$ ,  $Q$ ,  $\Lambda$ ,  $\rho$ ...).

Se fosse soddisfatta l'equazione  $\nabla' = \nabla_{ad}$  allora valutando semplicemente  $\nabla_{rad}$  a partire dalla luminosità ( $F(r) = \frac{L(r)}{4\pi r^2}$ ) si otterrebbe immediatamente un valore di  $\nabla$ , risolvendo il problema. D'altra parte l'uguaglianza  $\nabla' = \nabla_{ad}$  non è sempre soddisfatta (lo è negli interni stellari, ma verso le regioni esterne della stella può venir meno). In tal caso occorre dunque introdurre un'altra espressione per risolvere la questione proposta. A questo scopo c'è bisogno di introdurre un'ulteriore incognita, che è l'efficienza della convezione.

Si prenda la prima riga dell'equazione 3.15. Il fattore che moltiplica  $\nabla$  può essere visto come una *condittività*

*radiativa*. Analogamente il fattore che moltiplica  $(\nabla - \nabla')^{3/2}$  nella seconda riga può essere visto come una *conduttività convettiva*. Dunque considerando l'ultima riga dell'equazione 3.15 il fattore che moltiplica  $(\nabla - \nabla')^{3/2}$  può essere interpretato come il rapporto tra le due conduttività appena menzionate. Questo valore chiaramente fornisce una misura dell'abilità dell'elemento di trasportare energia mediante la convezione.

A seguito di queste considerazioni si può formalmente introdurre la definizione di *efficienza della convezione*. Preso un elemento convettivo essa è data da

$$\Gamma = \text{efficienza della convezione} = \frac{\text{eccesso di calore prima di dissolversi}}{\text{energia irraggiata durante il moto}} . \quad (3.16)$$

Valutando i singoli termini

$$\text{eccesso di calore} = c_p \rho (\Delta T)_{max} V , \quad (3.17)$$

ove  $V$  è il volume dell'elemento al momento di dissolversi e  $(\Delta T)_{max}$  è l'eccesso di temperatura del mezzo. Inoltre l'energia totale irraggiata da un elemento durante il suo moto avente dimensioni tipiche  $\Lambda$ , superficie  $A$  e tempo di vita  $t = \frac{\Lambda}{\bar{v}}$  è (sfruttando l'equazione 2.3 in valore assoluto)

$$\text{energia totale irraggiata} = FtA = \left( \frac{4acT^3}{3k\rho} \right) \left( \frac{\Delta T}{\Lambda/2} \right) \left( \frac{\Lambda}{\bar{v}} \right) A , \quad (3.18)$$

ove con  $\Delta T$  si indica la differenza di temperatura presente tra la parte centrale dell'elemento convettivo e il mezzo circostante.

Si assuma, come fatto nel lavoro classico di Böhm-Vitense ([3], sec B II),  $(\Delta T)_{max} = 2\Delta T$ .

Inoltre è necessario stimare, per il calcolo successivo, il rapporto tra il volume dell'elemento convettivo e la superficie dello stesso. Innanzitutto si assuma l'elemento convettivo come sferico. Seguendo la trattazione di [4] e di [11]  $\frac{V}{A} = \frac{2}{9}\Lambda$ , che si ottiene assumendo  $\Lambda = \frac{3}{2}r$ . Questa scelta in realtà diverge da quella del lavoro originario di Böhm-Vitense [3]. Infatti in quest'ultimo il diametro della particella è pari alla lunghezza di mescolamento ( $\Lambda = d = 2r \implies \frac{V}{A} = \frac{\Lambda}{6}$ ). Questa differenza nella scelta viene fatta semplicemente per giungere a una equazione per  $\Gamma$  analoga a quella di [3]; infatti in quest'ultimo la scrittura per  $\bar{v}$  ha dei coefficienti leggermente diversi da quella dedotta in [4] e in [11]. In ogni caso, come sarà possibile vedere successivamente, la scelta del coefficiente non è importante, e verrà condensata in una costante  $a_0$  generica. Detto ciò sostituendo le equazioni 3.17 e 3.18 nella definizione 3.16 e utilizzando l'equazione 3.14 si trova

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{c_p \rho (\Delta T)_{max} V}{\frac{4acT^3 2\Delta T \Lambda A}{3k\rho\Lambda\bar{v}}} \stackrel{(3.14)}{=} \frac{3k\rho^2 c_p V g Q^{1/2} \rho^{1/2} \Lambda (\nabla - \nabla')^{1/2}}{4acT^3 A 2\sqrt{2}P^{1/2}} = \\ &= \frac{c_p}{12\sqrt{2}ac} \frac{kgQ^{1/2} \rho^{5/2} \Lambda^2}{P^{1/2}T^3} (\nabla - \nabla')^{1/2} . \end{aligned} \quad (3.19)$$

Si può inoltre definire (sarà utile successivamente) la quantità adimensionale  $A$  come

$$A = \frac{c_p}{12\sqrt{2}ac} \frac{kgQ^{1/2} \rho^{5/2} \Lambda^2}{P^{1/2}T^3} . \quad (3.20)$$

Confrontando le equazioni 3.15 e 3.19 si vede che

$$\nabla_{rad} = \nabla + \frac{9}{4}\Gamma(\nabla - \nabla') . \quad (3.21)$$

Per compiere il prossimo passo bisogna legare  $\Gamma$  ad altre grandezze fisiche (in particolare termodinamiche). Tutte le relazioni utilizzate sono dimostrate nell'appendice C.

Si prendano le trasformazioni politropiche, ovvero quelle per cui  $c = \frac{dQ}{dT}$  varia in maniera assegnata. Le variabili di stato del sistema sono relazionate mediante leggi di trasformazione caratterizzate da esponenti politropici fra le quali (vedi appendice C per la dimostrazione)

$$\frac{d \log P}{d \log T} = \frac{\Gamma'_2}{\Gamma'_2 - 1} = \left( 1 - \frac{c}{c_p} \right) \frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} , \quad (3.22)$$

ove  $\Gamma_2$  è il corrispondente esponente politropico per una trasformazione adiabatica,  $c_p$  è il calore specifico di una trasformazione a pressione costante,  $c = \frac{dQ}{dT'}$  è il calore specifico per unità di massa caratteristico della trasformazione considerata, con  $T'$  temperatura della particella convettiva durante il moto. Con questo è possibile legare  $\nabla'$  a  $\nabla_{ad}$ . Infatti (si veda appendice C)

$$\nabla' = \nabla_{ad} \frac{1}{\left(1 - \frac{c}{c_p}\right)}. \quad (3.23)$$

Si può ora calcolare la variazione di calore subita dall'elemento. Essa è espressa da ([11], sec 14.5)

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dT'} \frac{dT'}{dt} = \underbrace{\Delta\epsilon}_{\text{eccesso di energia prodotto nell'interno}} - \underbrace{\Delta\left(\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{F}}{\rho}\right)}_{\text{eccesso di energia irradiato}}. \quad (3.24)$$

Perciò

$$\frac{c}{c_p} = \frac{\frac{dQ}{dT'}}{c_p} = \frac{\Delta\epsilon - \Delta\left(\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{F}}{\rho}\right)}{c_p \left(\frac{dT'}{dt}\right)} = \frac{-\Delta\left(\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{F}}{\rho}\right) \left[1 - \frac{\Delta\epsilon}{\Delta\left(\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{F}}{\rho}\right)}\right]}{c_p \left[\left(\frac{dT'}{dt}\right) - \left(\frac{dT}{dt}\right)\right] + c_p \left(\frac{dT}{dt}\right)} = -\frac{\frac{1-\eta}{\Gamma}}{1 - \frac{\nabla}{\nabla'}}, \quad (3.25)$$

ove

$$\eta = \frac{\Delta\epsilon}{\Delta\left(\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{F}}{\rho}\right)} \quad e \quad \frac{1}{\Gamma} = \frac{\Delta\left(\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{F}}{\rho}\right)}{c_p \left[\left(\frac{dT'}{dt}\right) - \left(\frac{dT}{dt}\right)\right]}, \quad (3.26)$$

avendo sfruttato la definizione 3.16 e il fatto che  $\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{T} \frac{T}{d \log P} \frac{d \log P}{dr} \frac{dr}{dt} = -T \frac{\nabla}{H_P} \bar{v}$ . Qui  $\Gamma$  ancora una volta è l'efficienza della convezione e  $\eta$  è il rapporto tra il tasso di energia specifica generata all'interno dell'elemento turbolento relativamente alla materia circostante e il tasso di energia specifica media irradiata dallo stesso elemento turbolento. Dunque se  $\eta = 0$  si è in assenza di sorgenti energetiche; se  $\eta > 0$  si è in presenza di sorgenti di energia termonucleari; se  $\eta < 0$  la perdita di energia dovuta ai neutrini supera la produzione energetica nucleare (per dettagli si veda [11], sec 14.5).

Si vuole ora trovare una forma più comoda per  $\eta$ . Sia il tasso di produzione di energia  $\epsilon(T, \rho)$  (assumendo che  $\epsilon$  non dipenda dalla composizione chimica  $\mu$ ). Allora

$$\begin{aligned} \epsilon(T, \rho) \implies d\epsilon &= \left(\frac{d\epsilon}{dT}\right)_\rho dT + \left(\frac{d\epsilon}{d\rho}\right)_T d\rho \implies \frac{d\epsilon}{\epsilon} = \left(\frac{d\epsilon}{\epsilon} \frac{T}{dT}\right)_\rho \frac{dT}{T} + \left(\frac{d\epsilon}{\epsilon} \frac{\rho}{d\rho}\right)_T \frac{d\rho}{\rho} \\ &= \left(\frac{d \log \epsilon}{d \log T}\right)_\rho d \log T + \left(\frac{d \log \epsilon}{d \log \rho}\right)_T d \log \rho \\ \implies \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon} &= \underbrace{\left(\frac{d \log \epsilon}{d \log T}\right)_\rho}_{\nu} d \log T + \underbrace{\left(\frac{d \log \epsilon}{d \log \rho}\right)_T}_{\lambda} d \log \rho \\ &= \nu d \log T + \lambda d \log \rho \stackrel{(3.12)}{=} \\ &= \nu d \log T - Q \lambda d \log T = (\nu - Q \lambda) \frac{\Delta T}{T}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Perciò sostituendo le equazioni 3.18 e 3.27 (moltiplicata per  $\rho V \frac{\Delta}{\bar{v}}$ ) in 3.26 e considerando  $\frac{V}{A} = \frac{\Delta}{\bar{v}}$  (come in [3]) si ottiene ([11], sec 14.5)

$$\eta = \frac{\Delta\epsilon}{\Delta\left(\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{F}}{\rho}\right)} = \frac{(\nu - Q \lambda) \frac{\Delta T}{T} \epsilon \rho V \frac{\Delta}{\bar{v}}}{\frac{8acT^3 \Delta T A}{3k\rho\bar{v}}} = \frac{1}{16ac} \frac{(\nu - \lambda Q)}{T^4} \epsilon k \rho^2 \Lambda^2. \quad (3.28)$$

Sostituendo infine l'equazione 3.23 all'interno della 3.25 si arriva a scrivere

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{c}{c_p}\right) \stackrel{(3.23)}{=} \frac{\nabla_{ad}}{\nabla'} &\implies \frac{c}{c_p} = 1 - \frac{\nabla_{ad}}{\nabla'} = \frac{\nabla' - \nabla_{ad}}{\nabla'} \stackrel{(3.25)}{=} \frac{1 - \eta}{\Gamma} \frac{\nabla - \nabla'}{\nabla'} \\ &\implies \frac{\Gamma}{1 - \eta} = \frac{\nabla - \nabla'}{\nabla' - \nabla_{ad}} \end{aligned} \quad (3.29)$$

che è l'equazione desiderata.

Le equazioni 3.19, 3.21 e 3.29 sono tre equazioni che coinvolgono i quattro gradienti, l'efficienza convettiva  $\Gamma$  e le variabili fisiche  $c_p$ ,  $\epsilon$ ,  $k$ ,  $\Lambda$ ,  $\rho$ ,  $T$  etc. Generalmente si assume che tutte queste variabili e  $\nabla_{ad}$  siano note. Allora ci si ritrova con tre equazioni e quattro incognite:  $\Gamma$ ,  $\nabla_{rad}$ ,  $\nabla$  e  $\nabla'$ . Chiaramente solo una di queste è indipendente; i valori delle tre rimanenti sono determinati in un dato punto dalle soluzioni simultanee delle equazioni 3.19, 3.21 e 3.29. In generale le soluzioni vengono date considerando  $\eta = 0$ , che è l'unico caso di interesse nella maggior parte dei casi. Infatti solitamente nelle regioni della stella dove è necessario utilizzare la teoria della mixing-length le sorgenti di energia non sono efficaci.

Si può esaminare ora la frazione di flusso trasportata dalla convezione nei due casi limite  $\Gamma \rightarrow \infty$  e  $\Gamma \rightarrow 0$ . Partendo dalle equazioni 3.21 e 3.29 e considerando che in generale

$$\frac{F_{conv}}{F} = \frac{F - F_{rad}}{F} = \frac{\nabla_{rad} - \nabla}{\nabla_{rad}} \quad (3.30)$$

si ha

- per  $\Gamma \rightarrow 0$  (piccola efficienza convettiva),  $\nabla$  e  $\nabla' \rightarrow \nabla_{rad}$ . In questo caso una piccola efficienza convettiva porta il flusso a essere necessariamente radiativo, e cioè

$$\frac{F_{conv}}{F} \rightarrow 0 \implies \nabla \rightarrow \nabla_{rad} \quad (3.31)$$

Dunque una piccola efficienza convettiva comporta che la convezione, sebbene possa comunque avere luogo, trasporta solo una piccola parte del flusso totale e causa solo piccole deviazioni del gradiente effettivo  $\nabla$  dal gradiente radiativo fittizio  $\nabla_{rad}$ . Ciò comporta che la convezione avrà effetti minori sulla struttura della stella nelle regioni ove  $\Gamma$  è piccolo.

- per  $\Gamma \rightarrow \infty$  (grande efficienza convettiva),  $\nabla' \rightarrow \nabla_{ad}$  e  $\nabla \rightarrow \nabla'$ . In questo caso  $\nabla \rightarrow \nabla_{ad}$  e dall'equazione 3.30

$$\frac{F_{conv}}{F} \approx \frac{\nabla_{rad} - \nabla_{ad}}{\nabla_{rad}} \quad (3.32)$$

per cui

- $\nabla_{rad} \gg \nabla_{ad} \implies \frac{F_C}{F} \rightarrow 1$ , caso tipico delle zone più interne di una regione convettiva;
- $\nabla_{rad} \rightarrow \nabla_{ad} \implies \frac{F_C}{F} \rightarrow 0$ , caso tipico della regione di transizione fra una zona convettiva e una zona in equilibrio radiativo.

Da qui si può vedere come una grande efficienza convettiva non comporta necessariamente il trasporto della maggior parte dell'energia attraverso il meccanismo convettivo.

Infine si supponga l'assenza di reazioni nucleari ( $\eta = 0$ ). Si richiami le equazioni 3.4, 3.20, 3.21 e 3.30. Si ridefinisca infine il fattore  $\frac{9}{4}$  dell'equazione 3.21 con una generica costante  $a_0$ . Definendo le grandezze

$$\zeta = \frac{\nabla_{rad} - \nabla}{\nabla_{rad} - \nabla_{ad}} \quad , \quad B = \left[ \frac{A^2}{a_0} (\nabla_{rad} - \nabla_{ad}) \right]^{1/3} \quad (3.33)$$

si ottiene l'**equazione cubica della teoria della mixing-length**

$$\zeta^{1/3} + B\zeta^{2/3} + a_0B^2\zeta - a_0B^2 = 0 \quad (3.34)$$

Per la dimostrazione di questa equazione si rimanda all'appendice D.

## 3.2 Punti di Forza e di Debolezza della MLT

Commentiamo criticamente l'equazione 3.34. Questa equazione è chiaramente un'equazione cubica per  $\zeta$ ; una volta ottenuta tale quantità è immediato determinare le altre grandezze. La soluzione dunque dipenderà da tutte le grandezze fisiche precedentemente introdotte ( $T, P, k, g, Q, \rho$ , i vari  $\nabla$  introdotti), ma anche da due grandezze che rappresentano le grandezze di scala del problema;  $a_0$  e  $\Lambda$ .  $a_0$  come visto precedentemente dipende dalla geometria del sistema (era stata assunta geometria sferica nel caso indagato per semplicità), e dunque non ha grande importanza.

D'altra parte  $\Lambda$  riveste un ruolo fondamentale nell'impostazione del modello. Solitamente si sceglie  $\Lambda$  costante, e in particolare proporzionale al fattore di scala della pressione definito dall'equazione 3.2:

$$\alpha_{ml} = \frac{\Lambda}{H_P} . \quad (3.35)$$

Qui risiede la maggior parte della semplicità e al contempo dell'imprecisione della teoria. Infatti per quanto riguarda i codici stellari è di estrema utilità porre questa  $\alpha_{ml}$  costante, indipendentemente dalle fasi evolutive stellari. Ciò toglie un grado di libertà, e semplifica il codice stesso, fornendo risultati coerenti e non dissimili dalle evidenze sperimentali. Ovviamente però la costanza di  $\alpha_{ml}$  è un'assunzione molto forte. Infatti le lunghezze di scala  $H_P$  e  $\Lambda$  dipendono fortemente dalle condizioni fisiche in cui si trova la stella, e in particolare variano con il tempo. Quest'idea della variabilità dei parametri della MLT è stata sviluppata ad esempio da Arnett et al. in [1] e sarà approfondita nella sezione 4.1. Generalmente  $\alpha_{ml}$  possiede valori compresi tra 1 e 2. Per  $\alpha_{ml}$  piccoli si ha un grande contributo radiativo, mentre per  $\alpha_{ml}$  grandi si ha un grande contributo convettivo. In pratica, come specificato in [10], sec 5.5.2, i valori di  $\alpha_{ml}$  sono spesso calibrati sulle osservazioni del Sole e di altre stelle di raggio noto. I fit migliori al giorno d'oggi si hanno per  $\alpha_{ml} \approx 1.5 - 2$ . Un'altra importantissima limitazione (indicata come “la più importante” in [4]) è che questa teoria è applicabile esclusivamente se le velocità convettive sono piccole rispetto alla velocità del suono (regime subsonico). Questa condizione è verificata negli interni stellari, dove la teoria della MLT non si applica essendo la superadiabaticità  $(\nabla - \nabla') \rightarrow 0$ , ma non lo è nelle regioni più esterne, ove invece la trattazione completa diventa necessaria. Ad oggi non si ha nessuna teoria convettiva supersonica adeguata.

Procedendo con la discussione è possibile notare che la stessa relazione 3.35 usa convenzionalmente l'altezza di scala della pressione, ma questa non è l'unica altezza di scala possibile. Infatti come commentato in [8], sec 7, in tutte le trattazioni della teoria del mescolamento convettivo si utilizza l'ipotesi di von Karman di scegliere la lunghezza di mescolamento come un multiplo di un'altezza di scala

$$\Lambda = \alpha H . \quad (3.36)$$

La scelta dell'altezza di scala però non è univoca. Infatti mentre Böhm-Vitense ha preso l'altezza di scala della pressione, Opik (1938), Biermann (1943) e Schwarzschild (1961) hanno preso l'altezza di scala della densità  $H_\rho$ . La predilezione per  $H_P$  è data semplicemente dal fatto che la teoria in uso è quella dell'astrofisica Böhm-Vitense.

Un altro importante difetto, sottolineato da D. Arnett et al., è la monodimensionalità di questa teoria. Infatti il caso reale è ovviamente tridimensionale, e una teoria che agisce esclusivamente su una direzione non può che risultare incompleta.

La teoria della MLT deve perciò essere considerata come una rozza approssimazione che, nonostante fornisca degli interessanti “insights” sull'evoluzione stellare, non può in alcun modo essere considerata come una teoria completa della convezione stellare.

## Capitolo 4

# Miglioramenti a Partire dalle Simulazioni Idrodinamiche e Prospettive Future

Come è stato sottolineato nel capitolo 3 la “mixing-length theory” può essere usata come una buona approssimazione della realtà ma non è esaustiva e non permette di prevedere in dettaglio l’evoluzione stellare. Si sta cercando perciò una teoria alternativa per superare questi problemi. Sono molti i tentativi fatti in questo proposito ma ad oggi nessuno di questi è risultato definitivo.

Questo capitolo sarà focalizzato sui tentativi effettuati da D. Arnett et al..

Inizialmente nell’articolo [1] egli cerca di introdurre un nuovo parametro cosiddetto “geometrico”,  $g_{ml}$ , da porre nelle simulazioni, così da avere una migliore descrizione fisica del fenomeno in questione.

Solo successivamente nell’articolo [2] egli passa alla formulazione di una teoria. L’approccio adottato consiste nel partire da simulazioni numeriche, e confrontando queste con le teorie di turbolenza e di fluidodinamica arrivare a un modello tridimensionale.

Quest’ultimo capitolo verterà dunque su due articoli:

1. D. Arnett et al. (2012), *Convection Theory and sub-photospheric stratification* ([1]), che verrà discusso nella sezione 4.1;
2. D. Arnett et al. (2015), *Beyond mixing-length theory: a step toward 321D* ([2]), che verrà discusso nella sezione 4.2

### 4.1 Teoria Convettiva e Stratificazione Subfotosferica

In questo articolo come detto non si ambisce a una formulazione di una teoria fisica, ma si cerca di comprendere come i risultati delle simulazioni variano al variare dei parametri della “mixing-length theory”, non più presi costanti come precedentemente fatto.

Nel capitolo 3 erano stati definiti due valori:  $\alpha_{ml}$  (equazione 3.35), un valore legato alla lunghezza di mescolamento  $\Lambda$  e all’altezza di scala della pressione  $H_P$ , e  $a_o$  (a pagina 15), legato invece alla geometria del sistema. Questi due valori erano presi costanti nella MLT.

In questo articolo mentre  $\alpha_{ml}$  mantiene la sua costanza il cosiddetto “parametro geometrico”  $g_{ml}$  (che sostituisce  $a_0$ ) recupera la sua variabilità. Si può infatti sfruttare la nebulosità insita nella definizione di “bolla convettiva” per cercare di ridefinire questo parametro. Dunque  $g_{ml}$  risulta legato allo spessore della regione superadiabatica (SAR). In particolare vige un legame tra  $g_{ml}$  e il raggio di questa bolla  $r_b$  (supposta

sferica nella MLT), ovvero

$$g_{ml} = \left( \frac{\Lambda}{\sqrt{3}r_b} \right)^2. \quad (4.1)$$

$r_b$  rimaneva fisso nella teoria della MLT, cioè la bolla aveva dimensioni fissate dalla lunghezza di mescolamento. Però ciò risulta inconsistente se confrontato con le simulazioni 3D. Ora invece a questo elemento convettivo è concesso di variare la sua dimensione (anche nel corso dell'evoluzione stellare).

Secondo questa modellizzazione la MLT viene recuperata per  $g_{ml} = 1$ . Si noti che ciò comporta  $r_b = \frac{\Lambda}{\sqrt{3}}$ , valore diverso dai valori  $r_b = 2\Lambda$  o  $r_b = \frac{3}{2}\Lambda$  definiti nel capitolo 3. Ciò comporta una variazione nel fattore numerico della 3.21 (si veda [1], Appendix) che però non altera la fisica del problema.

È possibile dare un'altra definizione di fattore geometrico come rapporto tra il tempo impiegato a percorrere la lunghezza di mescolamento e il tempo impiegato dalla diffusione nel rimuovere l'eccesso superadiabatico dalla bolla. Ancora una volta data la mancanza di una solida definizione di "bolla" questo rapporto non è ben definito. Possiamo però prendere questo rapporto così che

$$g_{ml} = \frac{\text{tempo impiegato per percorrere } \Lambda}{\text{tempo della diffusione}} = \left( \frac{l_m}{l_b} \right)^2 \quad (4.2)$$

In questo caso  $l_m$  indica la lunghezza di mescolamento ( $l_m = \Lambda$ ) e  $l_b$  indica il diametro della bolla ( $l_b = 2r_b$ ). Quello che cambia dalla definizione precedente è semplicemente il fattore numerico. Come è stato però abbondantemente discusso nella sezione 3 esso non è indispensabile al fine della corretta trattazione, ma è un termine convenzionale.

Naturalmente questo rapporto quantifica la deviazione dalla MLT, per la quale  $l_b = l_m$  ( $\rightarrow g_{ml} = 1$ ).

A questo punto è possibile fissare alcuni valori di  $\alpha_{ml}$  e  $g_{ml}$  per definire alcuni modelli che poi verranno attentamente confrontati. Inizialmente si procede fissando  $\alpha_{ml}$ ; poi si fa variare  $g_{ml}$  fin quando si ottiene il valore del raggio del Sole ad oggi (in realtà questo non è l'unico metodo di scelta possibile; si rimanda alla fine del paragrafo per una discussione in merito).

Di seguito nella tabella 4.1 si riportano alcuni modelli ottenuti con questo metodo.

Tabella 4.1: Modelli solari costruiti facendo variare  $\alpha_{ml}$  e  $g_{ml}$ .

Modello	$\alpha_{ml}$	$g_{ml}$	$\frac{l_b}{H_P}$	$\frac{l_b}{l_m}$	$\frac{R}{R_\odot}$	$\frac{L}{L_\odot}$	$\frac{r_{CZ}}{R_\odot}$	$He_{sup}$	$\bar{v}(km/s)$
A	1.650	1.0	1.65	1.0	1.001	1.000	0.7169	0.2379	2.25
B	2.323	42.0	0.358	0.154	1.001	1.000	0.7172	0.2378	2.80
C	3.286	270.0	0.200	0.0608	1.001	0.9997	0.7173	0.2377	3.05
D	4.000	595.0	0.164	0.0410	1.000	0.9997	0.7168	0.2373	3.20
E	5.190	1540.0	0.132	0.0255	1.001	0.9998	0.7172	0.2377	3.40
Sole	...	...	...	...	1.000	1.000	$0.713 \pm 0.001$	0.24	3.20

Tabella dei vari modelli solari ottenuti fissando  $\alpha_{ml}$  e facendo variare  $g_{ml}$  fino a riottenere il raggio solare.  $\frac{R}{R_\odot}$  è il rapporto tra il raggio ottenuto dal modello e il raggio solare.  $\frac{L}{L_\odot}$  è il rapporto tra la luminosità ottenuta dal modello e la luminosità solare.  $\frac{r_{CZ}}{R_\odot}$  è il rapporto tra il raggio della zona convettiva e il raggio solare.  $He_{sup}$  è l'abbondanza di elio sulla superficie.  $\bar{v}$  è la scala delle velocità convettive.

Tabella presa da D. Arnett, C. Meakin, P.A. Young (2012), *Convection Theory and sub-photospheric stratification* ([1]).

I valori di  $\alpha_{ml}$  vanno da 1.6 a 5.2. Il modello A ( $\alpha_{ml} = 1.643$ ,  $g_{ml} = 1.0$ ) è quello classico della teoria della MLT. Quello che però sembra avere maggior consistenza con le simulazioni idrodinamiche è il modello D ( $\alpha_{ml} = 4.0$ ,  $g_{ml} = 595.0$ ).

Si noti anche un'altra cosa. Se la zona convettiva è poco profonda essa dispone di distanze più brevi per far sì che l'accelerazione data dalla spinta di galleggiamento funzioni. Questo porta a valori di  $\alpha_{ml}$  e di  $\bar{v}$  (la velocità media convettiva data dall'equazione 3.14) bassi. D'altra parte se aumenta la profondità della zona

convettiva aumenta anche la dimensione dei vortici convettivi, e ciò porta all'aumento anche della pressione alla base di questa zona, il che implica un valore maggiore di  $\alpha_{ml}$ . Però questa crescita non continuerà indefinitamente, ma si assesterà su un certo valore. Infatti l'aumento della forza della convezione porta a una dissipazione maggiore. Si parla quindi di "saturazione" di  $\alpha_{ml}$  per zone convettive molto profonde. Questo valore di saturazione viene assunto uguale a  $\alpha_{ml} \approx 4$ .

Si ponga l'attenzione infine sulla velocità di scala  $\bar{v}$  nei vari modelli della tabella 4.1. Come si può subito vedere essa è l'unica grandezza che varia significativamente con il variare di  $\alpha_{ml}$  e  $g_{ml}$ .

Si passa dunque a un confronto dei modelli di tabella 4.1 per mezzo di grafici.

Prima di tutto è possibile porre nel diagramma di Hertzsprung-Russell (H-R) i track evolutivi per ognuno dei modelli della tabella 4.1. Ciò è stato fatto nella figura 4.1.

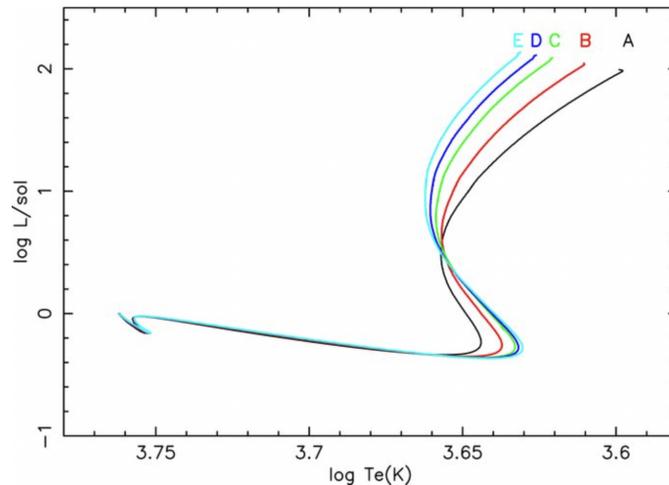


Figura 4.1: Track evolutivi dei modelli solari della tabella 4.1 nel diagramma HR. Figura presa da D. Arnett et al., *Convection Theory and sub-photospheric stratification* ([1], fig 1).

In riferimento alla figura 4.1 si può notare che le traiettorie si sovrappongono ad eccezione del tratto in corrispondenza della linea di Hayashi. Ciò non è sorprendente dal momento che questa linea corrisponde al tragitto percorso da una stella completamente convettiva; la variazione dei parametri del modello convettivo ovviamente comporterà una differenziazione della risposta grafica. Inoltre le parti dove la luminosità è maggiore devono essere ignorate perché poco realistiche dal momento che non è considerata l'accrescimento.

Un altro grafico interessante è il grafico  $(\log P, \log T)$ . Grazie ad esso è possibile confrontare la struttura delle regioni sub-fotosferiche dei vari modelli. Questo grafico è riportato in figura 4.2.

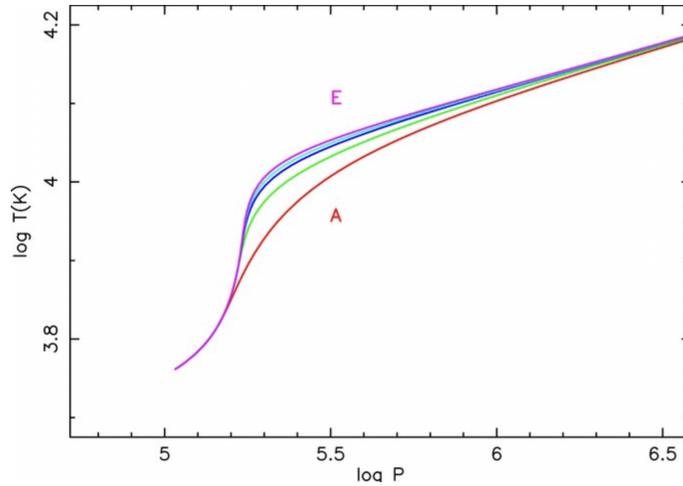


Figura 4.2: Struttura della regione subfotosferica dei modelli solari della tabella 4.1. Figura presa da D. Arnett et al., *Convection Theory and sub-photospheric stratification* ([1], fig 2).

La curva corrispondente al modello A (MLT classica) è la curva più bassa. I modelli B, C, D, E sono invece posizionati più in alto nel grafico. Il modello D è quello che più si avvicina ai modelli monodimensionali di atmosfera e ai modelli idrodinamici bidimensionali, e i modelli C ed E sono molto simili a questo. Un'altra cosa rilevante è che pare che il punto saliente non sia la scelta della diffusione radiativa piuttosto che del trasporto radiativo, ma la scelta del modello convettivo usato per la descrizione.

Si consideri ora il grafico  $(\log P, \nabla - \nabla_{ad})$ , che rapporta la superadiabaticità alla profondità (espressa mediante il logaritmo della pressione,  $\text{dynes}/\text{cm}^2$ ). Mediante questo è possibile confrontare la struttura della SAR ("superadiabatic region") dei vari modelli. Questo grafico è riportato in figura 4.3.

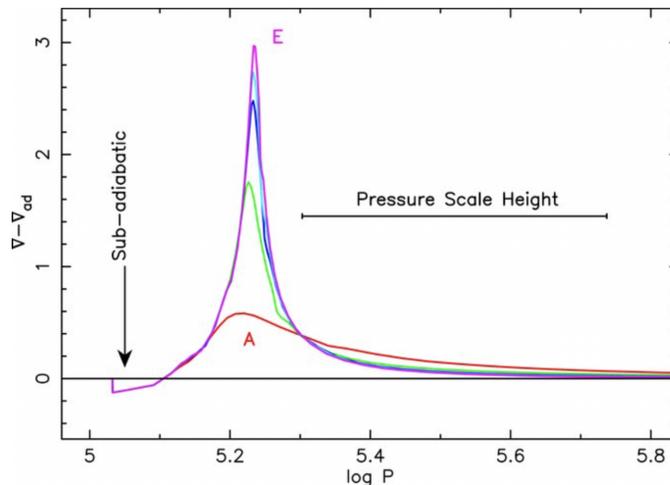


Figura 4.3: Struttura della SAR dei modelli solari della tabella 4.1. Figura presa da D. Arnett et al., *Convection Theory and sub-photospheric stratification* ([1], fig 3).

Guardando la figura 4.3 si può subito notare che l'ampiezza della SAR è decisamente inferiore all'altezza di scala della pressione. Essa può invece essere confrontata con  $\frac{l_b}{H_P}$ , che presenta una voce all'interno della tabella 4.1. Tanto minore risulta il rapporto tanto minore è la dimensione della bolla. Dunque le piccole dimensioni della bolla caratteristiche dei modelli C, D ed E sono consistenti con le piccole dimensioni della

SAR.

Guardando ancora la figura 4.3 al di sopra della linea orizzontale  $\Delta\nabla = \nabla - \nabla_{ad} = 0$  la forza di galleggiamento accelera il flusso turbolento, mentre al di sotto di questa linea si ha una decelerazione. Per quanto visto nella sezione 3 e assumendo il criterio di Schwarzschild della stabilità (equazione 2.13), se  $\Delta\nabla \leq 0$  non vi dovrebbe essere nessun flusso. Si vede però che l'area al di sopra della linea orizzontale comporta un'accelerazione e quella al di sotto una decelerazione. Quindi la decelerazione, che non è altro che una piccola depressione all'altezza di  $\log P \approx 5$ , viene completamente sovrastata dalla larga regione di accelerazione con picco a  $\log P \approx 5.2$ . Per questo motivo la decelerazione imposta dal criterio di Schwarzschild è incorretta. Dunque le velocità  $v_m$  riportate nella tabella 4.1 sono relative a quelle prodotte dall'allargamento delle righe dello spettro solare.

Infine i cinque modelli sono stati posti nel grafico ( $\log P, v_{conv}$ ). In questo modo si vede come varia la velocità convettiva in funzione della profondità (espressa mediante il logaritmo della pressione,  $\text{dynes/cm}^2$ ). Questo grafico è riportato in figura 4.4.

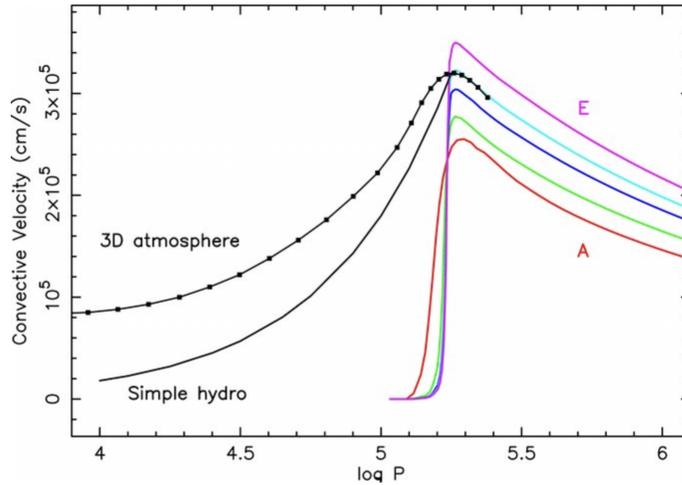


Figura 4.4: Velocità convettive dei modelli solari della tabella 4.1. Figura presa da D. Arnett et al., *Convection Theory and sub-photospheric stratification* ([1], fig 5).

La linea “3D atmosphere” in figura 4.4 è data da un modello di atmosfera tridimensionale tratto da Asplund et al. (2005). Si può subito notare che la pendenza è decisamente inferiore ai modelli A, B, C, D ed E. Questa differenza è generata dal fatto che per i modelli monodimensionali di tabella 4.1 è stato fatto uso del criterio di Schwarzschild della convezione (equazione 2.13), una condizione locale. Questo consiste, come detto nella sezione 2.3 a pagina 8 parlando di questo criterio, nel considerare il mezzo omogeneo ( $\nabla_{\mu} = 0$ ). In tal modo la stabile stratificazione può prevenire l'avvento di moti convettivi. In realtà però questa prevenzione non è verificata.

Ci si concentri ora sulla linea “Simple hydro” sempre di figura 4.4. È risaputo che i moti convettivi sono generati dallo sprofondamento della materia che si raffredda in prossimità della superficie. Ciò porta alla formazione di onde di gravità. Si assuma che la maggior parte dell'energia cinetica sia contenuta nelle scale maggiori della turbolenza. Questo moto medio su larga scala è approssimabile con il formalismo di Landau & Lifshitz delle “g-modes”. Le ampiezze di queste “g-modes” decadono esponenzialmente con l'altezza di scala della pressione. Ciò implica un riscaldamento in funzione della posizione al di sopra di una superficie al raggio  $r$  tale per cui  $P(r) = \frac{P(r_0)v(r)}{v(r_0)}$ . Questo modello è rappresentato dalla linea “Simple hydro”, fittato dal punto di massima velocità convettiva del modello D. Si potrebbe dibattere sulla semplicità e sulle rozze approssimazioni di questo modello, ma è possibile vedere immediatamente dalla figura 4.4 che è quello che meglio rappresenta il flusso considerato. In particolare esso rappresenta meglio la caduta a  $\log P \approx 5.25$  di quanto non faccia invece la prima curva.

Ciò comporta che una fisica più accurata dei moti turbolenti risulta necessaria per i modelli di atmosfere e che alcune caratteristiche tridimensionali sono molto difficili da riportare in una dimensione. Uno di questi esempi è l'inomogeneità tra i flussi diretti verso l'interno e quelli diretti verso l'esterno.

Comunque sia il modello atmosferico tridimensionale fornisce importanti indizi sulla mappatura di un modello multidimensionale in una dimensione, e può far capire quale dei modelli è preferibile utilizzare per descrivere in modo più veritiero possibile la fisica del problema. A questo proposito è possibile constatare guardando la figura 4.4 che il modello favorito da questo punto di vista è il modello D.

Vi è un altro risultato incoraggiante. Infatti lo studio di Meakin & Arnett del 2007 ([7]), trattando il bruciamento dell'ossigeno nella shell e il bruciamento di idrogeno nel core attraverso le consuete simulazioni idrodinamiche, deduce che  $\alpha_{ml}$  oscilla tra 3 e 5 (si veda [7], fig 18), intervallo di valori altamente consistente con quanto detto in merito alla saturazione e al modello D, il modello più coerente. Infatti per tale modello  $g_{ml} = 4$  e  $\alpha_{ml} = 595$ .

Si noti infine che nell'articolo [1] è stata delineata una strada per eliminare le calibrazioni astronomiche dalle teorie di convezione stellare. Ciò è molto importante ed è fortemente sottolineato da D. Arnett nei suoi lavori (si guardi ad esempio [1] e [2]). Le modalità sono le seguenti:

- dedurre  $\alpha_{ml}$  dalle simulazioni convettive. Da qui si può ricavare la lunghezza di mescolamento come  $\Lambda = \alpha_{ml} H_P$ ; inoltre per le zone convettive più profonde  $\alpha_{ml} \approx 4$  (saturazione);
- prendere  $g_{ml}$  dalle simulazioni atmosferiche idrodinamiche tridimensionali. Questo metodo è più accurato poiché basato su una rappresentazione fisica più completa, ma può essere anche evitato in favore di una scelta di  $g_{ml}$  così da riprodurre un'ampiezza della SAR che sia confrontabile con  $l_b$ , cioè riducendo il problema al caso monodimensionale. Naturalmente questo metodo è meno affidabile, ma comunque utilizzabile.

In tal modo non bisogna ricorrere al confronto con il raggio solare per fissare  $g_{ml}$ . Questo può invece essere utilizzato come test per la teoria.

L'argomento saliente su cui occorre porre l'attenzione è il fatto che conseguentemente a una scelta diversa del meccanismo convettivo inserito nelle simulazioni non cambia solo il gradiente di temperatura all'interno della stella, ma cambia proprio la struttura globale della stella. Ad esempio ne risente la stratificazione della regione subfotosferica, che si basa sul legame tra  $P$  e  $T$  (figura 4.2), il grado di superadiabaticità (figura 4.3), la velocità convettiva (figura 4.4). Questo necessariamente si riverbera a catena su molte altre caratteristiche stellari.

Dunque la struttura fisica della stella varia in base alla teoria della convezione utilizzata.

In conclusione la MLT è una teoria approssimativa e incompleta, ma è interessante vedere come piccole divergenze da questa trattazione (ad esempio la semplice supposizione che  $g_{ml}$  perda la sua costanza) fanno sì che si abbia un grande miglioramento nella comprensione del fenomeno indagato.

Eventuali miglioramenti devono dunque fondarsi su simulazioni tridimensionali e su una teoria più dettagliata della turbolenza.

## 4.2 Oltre la Teoria della MLT: un Passo Verso la Teoria 321D

In questo articolo si cercano le basi per un algoritmo in grado di sostituire la MLT nei codici di evoluzione stellare. Il procedimento discusso da Arnett et al. si basa su tre principi:

1. usare come fondamento simulazioni tridimensionali;
2. applicare la procedura detta “Reynolds-averaged Navier-Stokes” per individuare i termini dominanti delle equazioni del moto;
3. costruire un modello fisico semplice e consistente con le simulazioni da usare nei codici stellari.

Questo approccio viene chiamato “321D” proprio perché lo scopo fondamentale è quello di proiettare i risultati delle simulazioni 3D in 1D.

Si riprenda la formula della velocità media convettiva della teoria della MLT, espressa dall’equazione 3.14:

$$\bar{v}^2 = \frac{gQ\Lambda^2}{8H_P} \Delta\nabla \stackrel{(3.2)}{=} \frac{1}{8} Q\Lambda^2 \frac{\rho g^2}{P} \Delta\nabla , \quad (4.3)$$

ove  $\Delta\nabla = (\nabla - \nabla_{ad})$  è l’eccesso superadiabatico. Si può subito notare che affinché la velocità sia un numero reale c’è bisogno che  $\Delta\nabla \geq 0$ . Questa richiesta suscita visibilmente alcuni problemi.

Per ovviare a ciò si può pensare di riscrivere l’equazione 4.3 come segue

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \mathcal{B} - \mathcal{D} , \quad (4.4)$$

ove  $\mathcal{B}$  è un termine di “driving” generalizzato e  $\mathcal{D}$  è il corrispondente termine di “drag”. Si assuma un contesto idrostatico. Considerando  $\mathcal{B}$  come dovuto esclusivamente alla forza di galleggiamento,  $\mathcal{B} = -g \frac{\delta\rho}{\rho} \approx \bar{g}Q\Delta\nabla$ .

Rappresentando inoltre  $\mathcal{D} \approx \frac{\vec{v}}{\tau}$ , ove  $\tau = \frac{l_k}{|\vec{v}|}$ , con  $l_k$  lunghezza di frenamento di Kolmogorov, si ha

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \bar{g}Q\Delta\nabla - \frac{\vec{v}}{\tau} . \quad (4.5)$$

Si noti che è stata introdotta la teoria della turbolenza di Kolmogorov poiché, come verrà spiegato meglio successivamente, è necessario introdurre, al fine di rendere la modellizzazione plausibile e coerente con le evidenze osservative, un termine dovuto alla dissipazione di energia. Questo termine può essere ritrovato all’interno del formalismo della turbolenza di Kolmogorov.

Moltiplicando per  $\vec{v}$  questa equazione si ottiene un’equazione per l’energia cinetica

$$\vec{v} \cdot (\mathcal{B} - \mathcal{D}) = \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) = \vec{v} \cdot \bar{g}Q\Delta\nabla - \frac{v^2}{\tau} . \quad (4.6)$$

In questa equazione si può immediatamente constatare che valori negativi di  $\Delta\nabla$  sono ammessi, a differenza dell’equazione 4.3.

Con un’altra scelta di coordinate si può scrivere

$$\vec{v} \cdot (\mathcal{B} - \mathcal{D}) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2} \right) + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \left[ \frac{\rho \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{v})}{2} \right]}_{\vec{F}_K} , \quad (4.7)$$

ove  $\vec{F}_K = \frac{\rho \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{v})}{2}$  non è altro che il flusso di energia cinetica.

Naturalmente si recupera la MLT nel caso in cui  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_K = 0$ , ovvero nel caso in cui il termine di drag e quello di driving si equivalgono. Infatti nella MLT vi è un’esatta simmetria tra flussi verso l’alto e flussi verso il basso. In realtà però simulazioni tridimensionali indicano ingenti flussi di energia cinetica verso il basso; queste informazioni non potevano essere dedotte dalla MLT.

Un altro elemento che deve essere tenuto in considerazione nella formulazione di un modello convettivo è l'assenza nella MLT del termine di riscaldamento turbolento  $\epsilon_t$ . Infatti per un modello dinamico il trasporto energetico è dispendioso, e questa spesa di energia non può essere trascurata in un modello globale. L'energia totale deve comunque essere conservata; l'energia cinetica si deve trasformare in calore.

Si noti che nel caso stazionario e locale il termine  $\frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right)$  dell'equazione 4.6 si elimina e si ottiene una relazione molto simile a quella presentata dall'equazione 4.3, ma con una lunghezza di smorzamento turbolento al posto della lunghezza di mescolamento convettivo ( $l_k \leftrightarrow \Lambda$ ). Si può dunque ritrovare l'equazione cubica della teoria della mixing-length (equazione 3.34).

Un ulteriore problema che ora si palesa è che  $\epsilon_t$  in questo caso deve per forza incarnare il tasso di dissipazione medio e non quello istantaneo, locale. Questa considerazione lascia intuire la necessità di ricorrere a grandezze mediate e non puntuali, ovvero al metodo "RANS".

Vi sono stati alcuni tentativi per far combaciare simulazioni ed esperimenti. Un esempio fu quello dell'utilizzo della teoria "Rayleigh-Taylor Instability" (RTI), che però produceva forti discrepanze tra esperimenti e simulazioni, che portarono alla formulazione del problema  $\alpha_b$  (si veda [2], sec 2.5 per i dettagli). Ciò suggerì il bisogno di abbracciare un approccio statistico che riuscisse a combinare teoria, esperimenti e metodi numerici.

Da qui è possibile partire per lo studio delle fluttuazioni. Esse sono caratteristiche fondamentali della turbolenza e del mescolamento. Inoltre queste fluttuazioni possiedono una struttura cellulare nello spazio e nel tempo. Questa struttura può essere sfruttata per risolvere i codici stellari su tempi scala molto grandi. Ciò è possibile mediando sulle celle attive e inattive.

Un metodo alternativo si basa sull'utilizzo dell'approccio RANS, che utilizza direttamente una media delle fluttuazioni sullo spazio e sul tempo. L'utilizzo di questo metodo consente di rimuovere le fluttuazioni che si cancellano lasciando esclusivamente quelle che non si cancellano.

È possibile procedere con la trattazione matematica seguendo questo filo logico (per i dettagli si veda [2]). Comunque sia è possibile ritornare, supponendo determinate condizioni, alla teoria della MLT e all'equazione cubica della MLT.

Armati ora di questi nuovi strumenti è possibile attuare simulazioni numeriche del caso astrofisico di interesse. Una di queste è riportata nella figura 4.5.

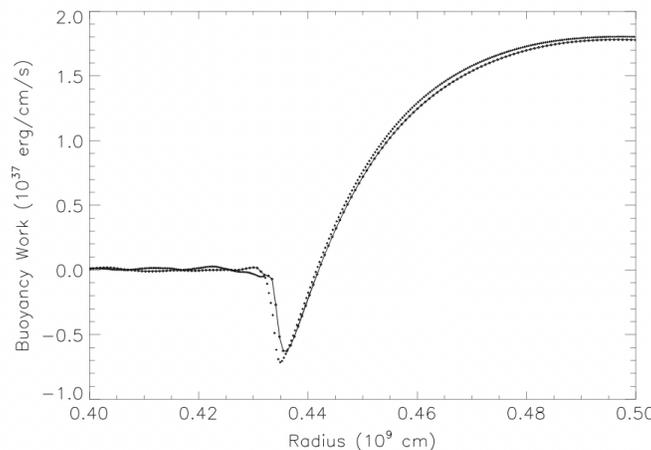


Figura 4.5: Grafico del lavoro effettuato dalla forza di galleggiamento in funzione del raggio per il bruciamento dell'ossigeno. Figura presa da D. Arnett et al., *Beyond mixing-length theory: a step toward 321D* ([2], fig 4).

Questa figura ritrae il lavoro svolto dalla forza di galleggiamento in una regione interessata dal bruciamento dell'ossigeno. Si può subito notare che vi è una zona che ha lavoro di galleggiamento negativo nel grafico 4.5.

Questa zona risulta ovviamente proibita per la teoria classica della MLT; infatti a questa corrisponde un  $\Delta\nabla \leq 0$ , che sostituito nell'equazione 4.3 darebbe luogo a una velocità immaginaria (assenza di convezione per il criterio di Schwarzschild, equazione 2.13). In corrispondenza di queste regioni non si ha dunque un'accelerazione, ma una decelerazione. Queste regioni prendono il nome di *bracking regions*. L'esistenza di queste zone di frenamento non è contemplata nelle teorie dell'evoluzione stellare (ad esempio nella MLT) poiché esse utilizzano il criterio di Schwarzschild (equazione 2.13) o di Ledoux (equazione 2.11) di stabilità lineare. Le regioni di frenamento sono invece dovute a problemi di overshoot convettivo o di convezione penetrativa. La figura 4.5 ritrae dunque una "bracking region".

È incoraggiante il fatto che vi è un alto grado di convergenza numerica. Si può dunque concludere che queste zone di frenamento, non contemplate dalla MLT e dunque nuove e che necessitano spiegazione nell'ambito di una teoria più completa, sono caratteristiche tipiche delle simulazioni ad alta risoluzione.

Una volta notata la presenza di queste regioni di frenamento e compresa la loro importanza è necessario studiarne e capirne la struttura e la natura. Infatti questo permetterà di stimare il tasso di crescita e di recessione delle zone convettive.

A questo punto si vuole costruire uno schema semplice ma dinamicamente consistente dello strato limite convettivo. A questo scopo ci si riferisce alla figura 4.6.

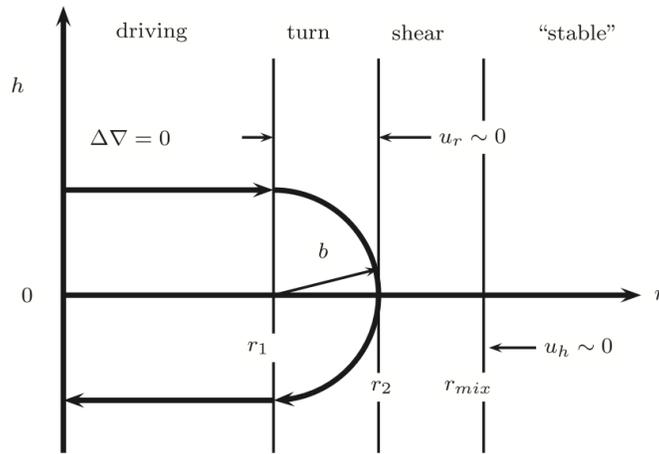


Figura 4.6: Schema grafico di uno strato limite convettivo. Figura presa da D. Arnett et al., *Beyond mixing-length theory: a step toward 321D* ([2], fig 5).

L'elemento convettivo che sta uscendo radialmente dalla stella quando incontra la regione di frenamento compie una semicirconferenza di raggio  $b$  fino a invertire il suo moto. Questo è coerente con quanto visto dalle simulazioni: a seguito della decelerazione subita dall'elemento convettivo nella regione di frenamento il vettore velocità deve invertirsi allo strato limite, e quindi il flusso deve tornare indietro per stare all'interno della regione convettiva.

Si guardi la figura 4.6. La direzione radiale è indicata con  $r$  e quella tangenziale con  $h$ . La lunghezza  $b$  di conseguenza corrisponde al raggio di curvatura necessario per invertire il flusso ( $v_r \rightarrow -v_r$ ). L'accelerazione centrifuga necessaria è data dalle fluttuazioni della pressione.

La figura 4.6 considera ovviamente la cima della zona convettiva. Un ragionamento analogo si può fare per la parte inferiore di questa zona.

Si noti che mentre nella MLT le bolle, dopo aver percorso una distanza  $\Lambda$ , scomparivano rilasciando energia verso gli strati circostanti, in questo caso ciò non si verifica. Dato che la maggior parte del momento è contenuto nelle scale maggiori sarà necessario porre l'attenzione sulle medie dinamiche caratteristiche di queste scale.

L'accelerazione richiesta affinché il moto sia invertito è esattamente quella centrifuga, il cui modulo è  $\frac{v^2}{b}$ .

Dunque, supponendo che  $b \approx \Delta r \ll l_k$  ( $\implies \mathcal{D} \ll \mathcal{B}$ ), sfruttando l'equazione 4.4 la componente radiale dell'accelerazione diventa

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \approx \frac{\Delta (v^2/2)}{\Delta r} \approx \mathcal{B} , \quad (4.8)$$

ove  $\mathcal{B}$  è l'accelerazione dovuta alle perturbazioni della forza di galleggiamento e della pressione.

Le simulazioni mostrano risultati fortemente in accordo con il campo di velocità e con la struttura chimica nello strato limite.

Le equazioni del moto utilizzate per questo modello sono riportate in dettaglio nell'appendice E. In particolare, supponendo la shell sottile ( $b \ll l_k$ ) e scegliendo un sistema inerziale ove è assunto l'equilibrio idrostatico per il "background", in prossimità dello strato limite la componente radiale dell'accelerazione è data dall'equazione 49

$$\mathcal{B} = -\frac{\rho'}{\rho_0 + \rho'} g - \frac{1}{\rho_0 + \rho'} \frac{\partial P'}{\partial r} . \quad (4.9)$$

Inoltre dalla conservazione della materia (equazione 11, appendice A) si deduce che la riduzione nella velocità radiale porta a un aumento della densità, dal momento che la materia si accumula. Ciò porta a un aumento delle perturbazioni della pressione  $P'$  man mano che ci si avvicina allo strato limite.

Le due componenti trasversali invece prendono la forma dell'equazione 50

$$v_h \frac{\partial v_h}{\partial h} = -\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \frac{\partial P'}{\partial h} . \quad (4.10)$$

Il moto trasversale richiede una accelerazione trasversale che è fornita da un eccesso di pressione.

L'effetto globale è dunque quello di completare l'inversione. La zona di inversione ha una larghezza pari a  $b = r_2 - r_1$ . Il materiale presente all'interno è dunque ben mescolato dal momento che ritorna nella zona convettiva dopo l'inversione. Per questo motivo la regione  $b$  di cui si sta discutendo la dinamica è denominata la regione di "overshoot".

Dunque contrariamente a quanto si verifica per la MLT il raggio  $r_1$ , ovvero il raggio al quale la particella comincia la sua decelerazione per via della superadiabaticità negativa, non è il limite della zona convettiva; questo limite si estende un po' al di là della regione "classica".

Le velocità del flusso in corrispondenza dello strato limite convettivo non si annullano del tutto, ma diventano piccole e oscillatorie.

Questa discussione in realtà sottostima il mescolamento poiché non considera perturbazioni turbolente.

Si noti infine che le caratteristiche termiche di cui si ha bisogno non coinvolgono alcuna calibrazione stellare o solare. Dunque, come detto in precedenza nella sezione 4.1, le osservazioni possono essere usate come verifica della teoria enunciata.

In questo articolo non è stato sviluppato alcun algoritmo, ma solo una procedura teorica su cui impostare lo stesso. Infatti Arnett et al. ritiene che vi possono essere una grande quantità di algoritmi utili, che possono essere modificati facendoli coincidere meglio con le osservazioni. Definisce però le colonne portanti di questo algoritmo:

- velocità stabilita da un'equazione dell'accelerazione, quale l'equazione 4.4;
- fisica degli strati limite;
- flussi di composizione e di densità (si veda [2]);
- velocità non-locali;
- riscaldamento turbolento del "background".

L'idea principale è comunque quella di implementare queste idee così da inserirle nei codici evolutivi. Comunque sia, sottolinea Arnett, questa teoria è tutt'altro che completa, e questo deve essere meramente visto come un punto di partenza per lo sviluppo di una teoria "321D", e non come un punto di arrivo.

Infine viene suggerita l'idea di generalizzare questi principi in modo tale da includere la rotazione stellare e l'interazione con campi elettrici e magnetici (magnetoidrodinamica).

Per concludere vengono elencati alcuni campi dove questa nuova teoria si riverbera. Infatti la teoria della convezione è di fondamentale importanza per tutta l'astrofisica stellare, e un cambiamento dell'approccio usato nella sua descrizione ha necessariamente pesanti implicazioni in molte aree dell'astrofisica e dell'astronomia. Alcune delle aree che necessitano di rivisitazione sono:

- *eliosismologia*: grazie agli strati limite convettivi è possibile ridurre la discrepanza tra eliosismologia, modelli solari e abbondanze solari ottenute dalle teorie atmosferiche tridimensionali;
- *astrosismologia*: ciò è applicabile non solo al nostro astro, ma anche alle altre stelle. La teoria della MLT infatti contiene forti discrepanze tra modelli e osservazioni;
- *nucleosintesi*: le abbondanze dettagliate dipendono dalla teoria convettiva che si sta utilizzando. In particolare questo scenario potrebbe giustificare mediante l'“overshoot” precedentemente descritto il “terzo dredge-up”, evento caratteristico delle stelle dell'asymptotic giant branch, processo cruciale per la nucleosintesi dovuta all's-process poiché comporta la presenza di neutroni necessari per alcune reazioni;
- *core collapse*: la possibilità di produrre esplosioni nelle simulazioni dipende dalla dimensione e dalla struttura dei nuclei dei progenitori. Questi a loro volta dipendono fortemente dalla teoria fisica della convezione che si utilizza per la descrizione del modello.

Dunque, come sottolineato più volte, la scelta del modello convettivo da utilizzare nei codici stellari è di fondamentale importanza poiché comporta una rivisitazione di moltissimi processi strutturali ed evolutivi delle stelle, e dunque ha forti ripercussioni sulla nostra comprensione dei fenomeni indagati.

# APPENDICE

## A Equazioni Base delle Simulazioni

In questa appendice si vuole elencare le equazioni alla base delle simulazioni astrofisiche menzionate nel lavoro.

Innanzitutto si può introdurre le tre equazioni fondamentali dell'idrodinamica.

L'equazione che esprime la *conservazione della materia* per un fluido è

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad , \quad (11)$$

ove  $\rho$  è la densità del fluido,  $\vec{v}$  è la velocità di esso (si veda Landau & Lifshits ([9]), sec 1 per la dimostrazione).

L'equazione che esprime la *conservazione del momento* per un fluido è, in notazione tensoriale,

$$\rho \left[ \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x_i} - g_i + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) \right\}}_{\pi_{ik}} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \zeta \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) \quad , \quad (12)$$

detta anche *equazione di Navier-Stokes* (si veda [9], sec 15 per la dimostrazione).  $\rho$  è la densità del fluido,  $v_i$  è la  $i$ -esima componente della velocità,  $g_i$  è la  $i$ -esima componente dell'accelerazione gravitazionale,  $\eta$  è la viscosità,  $\zeta$  è la seconda viscosità. In linea di principio  $\eta, \zeta \propto p, T$ , che non sono costanti ovunque nel fluido, e quindi non possono essere portate fuori dall'operatore gradiente; ma in realtà nella maggior parte dei casi i coefficienti di viscosità non variano apprezzabilmente e possono dunque essere considerati costanti. L'equazione diventa dunque, in forma vettoriale,

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} p - \vec{g} + \eta \nabla^2 \vec{v} + \left( \zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \quad . \quad (13)$$

Inoltre per un fluido incomprimibile ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ ) si ha che

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} p - \vec{g} + \eta \nabla^2 \vec{v} \quad . \quad (14)$$

L'equazione che esprime la *conservazione dell'energia* per un fluido è

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot [(\rho E + p) \vec{v}] = q_{sorgente} + \vec{\nabla} \cdot (\pi \vec{v}) - \rho g \vec{v} \quad , \quad (15)$$

ove  $\rho$  è la densità del fluido,  $\vec{v}$  è la velocità,  $E = \epsilon + \frac{1}{2} |\vec{v}|^2$  è l'energia specifica totale,  $\pi$  è il tensore di rango due che compare nell'equazione 12 e  $q_{sorgente} = q_{rad} + q_{cond} + q_{nuc}$  è la produzione totale di energia interna dovuta allo scambio di calore radiativo  $q_{rad}$ , conduttivo  $q_{cond}$  e nucleare  $q_{nuc}$  (si veda [6], sec 2.1). In caso di dissipazione energetica bisogna considerare un ulteriore termine  $\epsilon_t$ , che fornisce l'energia specifica dissipata a seguito della turbolenza. Si veda la sezione 4.2 per i dettagli.

L'equazione del flusso radiativo è data da

$$\vec{F}_{rad} = -K\vec{\nabla}T = -\frac{4acT^3}{3k\rho}\vec{\nabla}T , \quad (16)$$

che corrisponde all'equazione 2.3 ed è ampiamente commentata nella sezione 2.1.  $q_{rad}$  si può quindi scrivere in una forma conservativa come

$$q_{rad} = -\vec{\nabla}F_{rad} . \quad (17)$$

L'equazione del flusso conduttivo dovuto all'urto tra le particelle è data da

$$\vec{F}_{cond} = -K_{cond}\vec{\nabla}T = -\frac{4acT^3}{3k_{cond}\rho}\vec{\nabla}T , \quad (18)$$

che corrisponde all'equazione 2.7 ed è ampiamente commentata nella sezione 2.2.  $q_{cond}$  si può quindi scrivere in una forma conservativa come

$$q_{cond} = -\vec{\nabla}F_{cond} . \quad (19)$$

## B Dimostrazione del Criterio di Stabilità Convettiva

In questa appendice si vuole dimostrare il criterio di stabilità contro l'instaurarsi della convezione, equazione 2.9, nella sezione 2.3. Questa dimostrazione è tratta da [10], sec 5.5.1

Ci si riferisca alla figura 2.1 e alla descrizione della figura effettuata nella sezione 2.3. Come detto il tempo scala di espansione dell'elemento convettivo è piccolo rispetto al tempo scala caratteristico dello scambio di calore. Per questo motivo la trasformazione si può considerare adiabatica.

Si riprenda la definizione di  $\gamma_{ad} = \left( \frac{\partial \log P}{\partial \log \rho} \right)_{ad}$ . Questa equazione descrive la risposta logaritmica della pressione a una variazione della densità in regime adiabatico. Da qui, definendo  $\delta\rho_e$  la variazione infinitesima di densità dell'elemento e  $\delta P_e$  la variazione infinitesima di pressione dello stesso quando sottoposto a uno spostamento  $\Delta r$ , si ha

$$\frac{\delta P_e}{P_e} = \gamma_{ad} \frac{\delta \rho_e}{\rho_e} . \quad (20)$$

In questo caso  $\Delta P_e$  è legato al gradiente di pressione all'interno della stella dal momento che, dalle ipotesi,  $P_e = P_2$ . Perciò:

$$\delta P_e = P_2 - P_1 = \frac{dP}{dr} \Delta r \implies \delta \rho_e = \frac{\rho_e}{P_e} \frac{1}{\gamma_{ad}} \delta P_e = \frac{\rho_e}{P_e} \frac{1}{\gamma_{ad}} \frac{dP}{dr} \Delta r . \quad (21)$$

Invece per quanto riguarda la densità non si può sfruttare il ragionamento appena fatto essendo in generale  $\rho_2 \neq \rho_e$ . Si può invece scrivere  $\rho_e = \rho_1 + \delta\rho_e$  e  $\rho_2 = \rho_1 + \frac{d\rho}{dr} \Delta r$ . Ma si sa dalla trattazione di sezione 2.3 che il criterio di stabilità contro la convezione vuole che

$$\rho_e > \rho_2 , \quad (22)$$

nel qual caso la forza di galleggiamento prevale contro la forza di gravità. Quindi, sostituendo, si ha

$$\begin{aligned} \rho_1 + \delta\rho_e > \rho_1 + \frac{d\rho}{dr} \Delta r &\implies \delta\rho_e \stackrel{(21)}{=} \frac{\rho_e}{P_e} \frac{1}{\gamma_{ad}} \frac{dP}{dr} \Delta r > \frac{d\rho}{dr} \Delta r \\ &\implies \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} < \frac{1}{P} \frac{1}{\gamma_{ad}} \frac{dP}{dr} . \end{aligned} \quad (23)$$

Si noti che sono state effettuate le sostituzioni  $P_e \rightarrow P$  e  $\rho_e \rightarrow \rho$  dal momento che le perturbazioni sono assunte essere molto piccole. Inoltre passando ai logaritmi e sfruttando che  $\frac{d\rho}{dr}$  e  $\frac{dP}{dr}$  sono entrambi negativi si ottiene che

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \left| \frac{d\rho}{dr} \right| = d \log \rho > \frac{1}{P} \frac{1}{\gamma_{ad}} \left| \frac{dP}{dr} \right| = d \log P \frac{1}{\gamma_{ad}} &\implies \frac{1}{\gamma} = \frac{d \log \rho}{d \log P} > \frac{1}{\gamma_{ad}} = \left( \frac{d \log \rho}{d \log P} \right)_{ad} \\ &\implies \gamma < \gamma_{ad} . \end{aligned} \quad (24)$$

È stata dunque dimostrata l'equazione 2.9.

Se questa condizione risulta violata allora si ha l'instaurazione di moti globali.

Una visualizzazione grafica del criterio appena menzionato è riportata in figura 7.

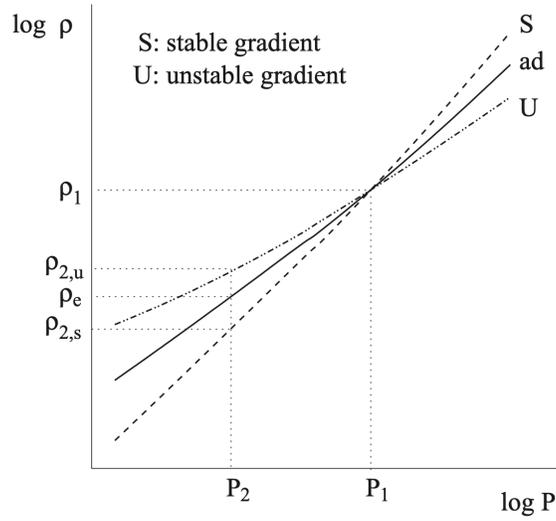


Figura 7: Rappresentazione nel grafico  $\log P - \log \rho$  del criterio di stabilità contro la convezione. Figura presa da Marigo, *Theoretical Astrophysics, lecture notes* ([10], sec 5.5.1).

Riferendoci alla figura 7 la linea retta  $ad$  si riferisce al caso adiabatico, quella tratteggiata  $S$  si riferisce a una condizione stabile e quella tratto-punto  $U$  si riferisce a una condizione instabile. La retta  $S$  è tale per cui la sua pendenza  $\frac{y}{x} = \frac{d \log \rho}{d \log P}$  è maggiore di quella della retta  $ad$ , pari a  $\frac{1}{\gamma_{ad}}$ . Di conseguenza a parità di variazione di pressione corrisponde una maggiore variazione di densità per quanto riguarda  $S$ ; perciò la forza peso sarà maggiore della forza di galleggiamento e l'elemento tenderà a tornare nella sua posizione originale, smorzando questa perturbazione.

Il contrario si può dire per quanto riguarda  $U$ .

## C Esponenti Politropici

In questa appendice vengono indagati gli esponenti politropici e alcune relazioni che sussistono tra questi necessarie per la formulazione della mixing-length theory. Questa trattazione è presa da [11], cap 12.

Si inizia con il definire una *trasformazione politropica*. Essa è una trasformazione quasi-statica tale che la grandezza *calore specifico*  $c$

$$c \equiv \frac{dQ}{dT} \quad (25)$$

varia in modo specifico. Ad esempio, per una trasformazione adiabatica  $dQ = 0 \implies c = 0$ ; per una trasformazione isoterma  $dT = 0 \implies c = \infty$ . Se  $c = c_p$  la trasformazione è isobara ( $P = cost$ ); se  $c = c_V$  la trasformazione è isometrica ( $V = cost$ ).

Si consideri le quantità specifiche (per unità di massa). Presa una qualsiasi trasformazione quasi-statica è possibile definire i cosiddetti *esponenti politropici*

$$\Gamma'_1 = \frac{d \log P}{d \log \rho} \quad , \quad (26)$$

$$\frac{\Gamma'_2}{\Gamma'_2 - 1} = \frac{d \log P}{d \log T} \quad , \quad (27)$$

$$\Gamma'_3 - 1 = \frac{d \log T}{d \log \rho} \quad . \quad (28)$$

$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  si riferiscono agli esponenti adiabatici.

Chiaramente si può subito constatare che

$$\frac{\Gamma'_2}{\Gamma'_2 - 1} = \frac{\Gamma'_1}{\Gamma'_3 - 1} \quad . \quad (29)$$

È possibile mettere in relazione  $\Gamma'_2$  e  $\Gamma_2$ . Si prenda la prima legge della termodinamica per una trasformazione infinitesima e quasi statica

$$dQ = dE - \left( \frac{P}{\rho^2} \right) d\rho \quad . \quad (30)$$

Si consideri  $\rho$  ed  $E$  come funzioni di  $P$  e  $T$  ( $\rho(P, T)$ ,  $E(P, T)$ ). Allora si ottiene

$$\begin{aligned} dQ &= \left( \frac{\partial E}{\partial P} \right)_T dP + \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_P dT - \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T \left( \frac{P}{\rho^2} \right) dP - \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \left( \frac{P}{\rho^2} \right) dT = \\ &= \left[ \left( \frac{\partial E}{\partial P} \right)_T P - \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T \left( \frac{P^2}{\rho^2} \right) \right] \frac{dP}{P} + \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_P T - \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \left( \frac{PT}{\rho^2} \right) \right]}_{c_p T} \frac{dT}{T} = \\ &= cT \frac{dT}{T} \\ \implies & \left[ \left( \frac{\partial E}{\partial P} \right)_T P - \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T \left( \frac{P^2}{\rho^2} \right) \right] d \log P = -(c_p - c)T d \log T \quad . \end{aligned} \quad (31)$$

Il fattore che moltiplica  $\frac{dT}{T}$  nella seconda riga dell'equazione 31 è semplicemente  $Tc_p$  (la pressione è costante); perciò sfruttando l'equazione 27 si ottiene

$$\frac{d \log P}{d \log T} = \frac{\Gamma'_2}{\Gamma'_2 - 1} = \frac{(c_p - c)T}{\left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T \left( \frac{P^2}{\rho^2} \right) - \left( \frac{\partial E}{\partial P} \right)_T P} \quad . \quad (32)$$

D'altra parte il termine a destra di questa uguaglianza è l'espressione per l'esponente adiabatico  $\frac{\Gamma_2}{\Gamma_2-1}$  nel caso in cui  $c = 0$ . Si ottiene dunque

$$\frac{\Gamma'_2}{\Gamma'_2 - 1} = \left(1 - \frac{c}{c_p}\right) \frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} . \quad (33)$$

Ecco quindi dimostrata l'equazione 3.22.

Inoltre si può facilmente trovare l'equazione 3.23. Infatti ricordando che  $\nabla = \frac{d \log T}{d \log P}$  dalle equazioni 27 e 33 si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nabla'} &= \frac{d \log P}{d \log T} = \frac{\Gamma'_2}{\Gamma'_2 - 1} \stackrel{(33)}{=} \left(1 - \frac{c}{c_p}\right) \frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} = \left(1 - \frac{c}{c_p}\right) \left(\frac{d \log P}{d \log T}\right)_{ad} = \left(1 - \frac{c}{c_p}\right) \frac{1}{\nabla_{ad}} \\ &\implies \nabla' = \nabla_{ad} \frac{1}{\left(1 - \frac{c}{c_p}\right)}. \end{aligned} \quad (34)$$

## D Dimostrazione dell'Equazione Cubica della MLT

In questa appendice si vuole dimostrare l'equazione cubica della teoria della mixing-length, l'equazione 3.34. La trattazione è presa da [11], sec 14.7.

Di seguito si riportano le tre equazioni base del problema impostate nella sezione 3.1 nel caso in cui  $\eta = 0$ :

$$(3.19) \implies \Gamma = A(\nabla - \nabla')^{1/2} , \quad (35)$$

$$(3.21) \implies \nabla_{rad} - \nabla = a_o A(\nabla - \nabla')^{3/2} , \quad (36)$$

$$(3.29) \implies \Gamma = \frac{\nabla - \nabla'}{\nabla' - \nabla_{ad}} , \quad (37)$$

ove  $A = \frac{c_p}{12\sqrt{2}ac} \frac{kgQ^{1/2}\rho^{5/2}\Lambda^2}{P^{1/2}T^3}$  (equazione 3.20) e dove il fattore  $\frac{9}{4}$  nell'equazione 3.21 è stato sostituito con un fattore generico  $a_o$ . I valori di  $\nabla_{ad}$  e di  $A$  sono assunti noti. Anche  $\nabla_{rad}$  è una quantità nota. Perciò le tre incognite sono  $\nabla$ ,  $\nabla'$  e  $\Gamma$ .

Si vuole dimostrare che le tre equazioni 35, 36 e 37 possono essere condensate in un'unica equazione cubica in una sola incognita. Innanzitutto si può combinare le equazioni 35 e 36

$$\nabla_{rad} - \nabla = a_o A(\nabla - \nabla')^{3/2} \stackrel{(35)}{=} a_o \Gamma(\nabla - \nabla') . \quad (38)$$

Risolviendo questa equazione per  $\nabla$  si ottiene

$$\nabla(1 + a_o\Gamma) = \nabla_{rad} + a_o\Gamma\nabla' \implies \nabla = \frac{\nabla_{rad} + a_o\Gamma\nabla'}{1 + a_o\Gamma} . \quad (39)$$

Da qui cambiando di segno e aggiungendo la quantità  $\nabla_{rad}$  ad entrambi i membri si ottiene

$$\nabla_{rad} - \nabla = \frac{a_o\Gamma(\nabla_{rad} - \nabla')}{1 + a_o\Gamma} . \quad (40)$$

Ora prendendo l'equazione 37 e sostituendovi l'espressione 39 si ottiene

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\nabla - \nabla'}{\nabla' - \nabla_{ad}} \stackrel{(39)}{=} \frac{\frac{\nabla_{rad} + a_o\Gamma\nabla'}{1 + a_o\Gamma} - \nabla'}{\nabla' - \nabla_{ad}} = \frac{\nabla_{rad} - \nabla'}{\nabla' - \nabla_{ad}} \frac{1}{1 + a_o\Gamma} \\ &\implies \nabla_{rad} - \nabla' = \Gamma(1 + a_o\Gamma)[(-\nabla_{rad} + \nabla') + (\nabla_{rad} - \nabla_{ad})] \\ &\implies (\nabla_{rad} - \nabla')[1 + \Gamma(1 + a_o\Gamma)] = (\nabla_{rad} - \nabla_{ad})\Gamma(1 + a_o\Gamma) \\ &\implies (\nabla_{rad} - \nabla') = \frac{(\nabla_{rad} - \nabla_{ad})\Gamma(1 + a_o\Gamma)}{[1 + \Gamma(1 + a_o\Gamma)]} . \end{aligned} \quad (41)$$

Sostituendo questa scrittura nell'equazione 40 e dividendo tutto per  $\nabla_{rad} - \nabla_{ad}$  si ha

$$\zeta \equiv \frac{\nabla_{rad} - \nabla}{\nabla_{rad} - \nabla_{ad}} = \frac{a_o\Gamma^2}{1 + \Gamma(1 + a_o\Gamma)} . \quad (42)$$

Si noti subito che  $\zeta$  definita nell'equazione 42 è funzione esclusivamente dell'efficienza convettiva  $\Gamma$ , e per questo motivo può essere considerata come una misura di tale quantità fisica. È possibile vedere subito che  $\zeta \rightarrow 0$  se  $\Gamma \rightarrow 0$  e che  $\zeta \rightarrow 1$  se  $\Gamma \rightarrow \infty$ .  $\zeta$  sarà l'unica incognita del problema.

Una volta determinato  $\zeta$  il valore del gradiente effettivo  $\nabla$  sarà dato da

$$\nabla = (1 - \zeta)\nabla_{rad} + \zeta\nabla_{ad} . \quad (43)$$

Si può subito notare che  $\zeta \rightarrow 0 \implies \nabla \rightarrow \nabla_{rad}$  e che  $\zeta \rightarrow 1 \implies \nabla \rightarrow \nabla_{ad}$ . Ciò significa, in riferimento a quanto detto nella sezione 3.1 a pagina 15, che  $\zeta \ll 1$  comporta una piccola efficienza convettiva e che

$\zeta \approx 1$  comporta una grande efficienza convettiva.

Per proseguire è necessario esprimere  $\Gamma$  in funzione di  $\zeta$ . Allora sfruttando le equazioni 35, 38 e 42 si ha che

$$\begin{aligned} \zeta(\nabla_{rad} - \nabla_{ad}) &\stackrel{(42)}{=} \nabla_{rad} - \nabla \stackrel{(38)}{=} a_0\Gamma(\nabla - \nabla') \stackrel{(35)}{=} a_0\frac{\Gamma^3}{A^2} \\ \implies \Gamma &= \left[ \frac{A^2}{a_0}(\nabla_{rad} - \nabla_{ad}) \right]^{1/3} \zeta^{1/3} = B\zeta^{1/3} , \end{aligned} \quad (44)$$

ove  $B = \left[ \frac{A^2}{a_0}(\nabla_{rad} - \nabla_{ad}) \right]^{1/3}$ . Essendo  $\zeta$  funzione solo di  $\Gamma$  allora  $\Gamma$  è funzione solo di  $B$ . Dunque ancora una volta  $B$  può essere visto come una misura dell'efficienza convettiva.

Infine sostituendo l'equazione 44 nella 42 si ottiene

$$\begin{aligned} \zeta[1 + B\zeta^{1/3}(1 + a_0B\zeta^{1/3})] &= a_0B^2\zeta^{2/3} \\ \implies \zeta^{1/3} + B\zeta^{2/3} + a_0B^2\zeta - a_0B^2 &= 0 , \end{aligned} \quad (45)$$

che è esattamente l'equazione 3.34.

Questa equazione accetta soluzioni analitiche, ma si può considerare anche metodi alternativi (ad esempio iterativi) per arrivare a una soluzione.

## E Equazioni Convettive

In questa appendice si riportano le equazioni convettive necessarie per lo sviluppo del modello della sezione 4.2. Questa trattazione è presa da [2], Appendix A.

Si vuole sviluppare le equazioni dei fluidi in un sistema di riferimento inerziale (come fatto in [9]).

Le variabili saranno decomposte in una parte di “background” e in una parte perturbativa; ad esempio  $P = P_0 + P'$  per quanto riguarda la pressione.

Il procedimento varrà per stelle per cui il background è idrostatico e a simmetria sferica, cioè per cui  $\nabla P_0 = -\rho \vec{g} = -\frac{\vec{g}}{V_0}$ .

L'equazione della conservazione dei barioni è l'equazione 11 dell'appendice A.

L'equazione della conservazione del momento è l'equazione di Navier-Stokes, l'equazione 12 dell'appendice A.

Nella sezione 4.2 è stata trovata una sorta di equazione vettoriale dell'accelerazione (equazione 4.4); in generale essa si scrive come

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \mathcal{B} - \frac{\vec{v}}{\tau}, \quad (46)$$

ove  $\tau = \frac{l_k}{|\vec{v}|}$  e  $l_k$  è la lunghezza di frenamento di Kolmogorov.

Se  $\mathcal{B} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P - \vec{g}$ , con  $P$  pressione e  $\vec{g}$  accelerazione di gravità, l'equazione 46 è una descrizione del fluido su larga scala coerente sia con Navier-Stokes sia con Kolmogorov.

Si può ora proiettare questa equazione lungo la coordinata radiale e lungo la coordinata tangenziale. Per semplicità si supponga che per illustrare come avviene l'inversione di moto della figura 4.6 sia sufficiente considerare il caso più semplice di flussi con lunghezze di scala delle coordinate angolari  $\theta$  e  $\phi$  piccole rispetto alla lunghezza di scala della coordinata radiale  $r$ . Dunque è possibile in questa approssimazione considerare le direzioni  $r$  e  $h$  quasi cartesiane, e le due componenti trasversali simmetriche. Perciò proiettando lungo la coordinata radiale  $r$  si ottiene

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} - g - \frac{v_r}{\tau} \quad (47)$$

e proiettando lungo la coordinata trasversale  $h$  si ottiene ( $\vec{g} \parallel \hat{r}$ )

$$\frac{\partial v_h}{\partial t} + v_h \frac{\partial v_h}{\partial h} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial h} - \frac{v_h}{\tau}. \quad (48)$$

Considerando perturbazioni finite si ha che  $\rho = \rho_0 + \rho'$  e  $P = P_0 + P'$ . Inoltre per l'ipotesi di equilibrio idrostatico  $\frac{\partial P_0}{\partial r} = -\rho_0 g$  e  $\frac{\partial P_0}{\partial h} = 0$ . Sostituendo questi valori nelle equazioni 47 e 48 si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \frac{\partial (P_0 + P')}{\partial r} - \frac{\rho_0 + \rho'}{\rho_0 + \rho'} g - \frac{v_r}{\tau} = \\ &= -\frac{\rho'}{\rho_0 + \rho'} g - \frac{1}{\rho_0 + \rho'} \frac{\partial P'}{\partial r} - \frac{v_r}{\tau}, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\frac{\partial v_h}{\partial t} + v_h \frac{\partial v_h}{\partial h} = -\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \frac{\partial P'}{\partial h} - \frac{v_h}{\tau}. \quad (50)$$

La fluttuazione della pressione in vicinanza dello strato limite convettivo comporta la generazione e la propagazione di onde.

# Bibliografia

- [1] D. Arnett, C. Meakin, P.A. Young (2012), *Convection Theory and sub-photospheric stratification*  
<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0004-637X/710/2/1619>
  
- [2] D. Arnett, C. Meakin, M. Viallet, S.W. Campbell, J.C. Lattanzio, M. Mocák (2015), *Beyond mixing-length theory: a step toward 321D*  
<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0004-637X/809/1/30>
  
- [3] E. Böhm-Vitense (1958), *Über die Wasserstoffkonvektionszone in Sternen verschiedener Effektivtemperaturen und Leuchtkräfte. Mit 5 Textabbildungen*, Zeitschrift für Astrophysik, Vol. 46, p.108  
<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1958ZA....46..108B>
  
- [4] C. Chiosi, *Struttura ed evoluzione delle stelle*
  
- [5] D. V. Hoyt, K. H. Schatten (207), *Sir William Hershel's notebook: abstracts of solar observations*  
[https://articles.adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-iarticle\\_query?1992ApJS...78..301H&defaultprint=YES&filetype=.pdf](https://articles.adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-iarticle_query?1992ApJS...78..301H&defaultprint=YES&filetype=.pdf)
  
- [6] F. Kupka, H. J. Muthsam, *Modelling of Stellar Convection*  
[https://www.researchgate.net/publication/318602164\\_Modelling\\_of\\_stellar\\_convection](https://www.researchgate.net/publication/318602164_Modelling_of_stellar_convection)
  
- [7] C. A. Meakin, D. Arnett (2007), *Turbulent Convection in Stellar Interiors. I. Hydrodynamic Simulation*  
<https://doi.org/10.48550/arXiv.astro-ph/0611315>
  
- [8] D. Gough, *The current state of mixing-length theory*
  
- [9] L. D. Landau, E. M. Lifshits, *Fisica teorica 6. Meccanica dei fluidi*
  
- [10] P. Marigo, *Theoretical Astrophysics, lecture notes*
  
- [11] A. Weiss, W. Hillebrandt, H.-C. Thomas, H. Ritter, *Cox & Giuli's principles of stellar structure*
  
- [12] Wikipedia, *Millennium Prize Problems*  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Millennium\\_Prize\\_Problems](https://en.wikipedia.org/wiki/Millennium_Prize_Problems)