UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTÁ DI SCIENZE MM.FF.NN.

Corso di Laurea in Matematica
Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata

TESI DI LAUREA

Un'estensione del teorema di Frobenius per campi vettoriali localmente lipschitziani

Relatore: Ch.mo Prof. Franco Rampazzo

Laureando: Daniel Gessuti

ANNO ACCADEMICO 2003-2004

Alla mia famiglia.

Indice

Introduzione

Uno dei teoremi che stanno alla base della *teoria delle foliazioni* è il teorema di Frobenius dovuto al matematico tedesco Ferdinand George Frobenius (1849-1917).
Il teorema di Frobenius è utilizzato in vari campi della matematica perchè caratterizza l'esistenza di *foliazioni locali.*

Data una varietà M $d-$dimensionale, una *foliazione locale* di dimensione c è una famiglia di sottovarietà $c-$dimensionali $\left\{\Sigma_\Gamma\right\}_{\Gamma\in I}$, con I intervallo aperto[1] di $\mathbb{R}^{d-c}$ tale che:

i) $\cup_{\Gamma\in I}\Sigma_\Gamma = U$, dove U è un intorno aperto di un fissato $m \in M$,

ii) $\Sigma_\Gamma \cap \Sigma_{\Gamma'} = \emptyset$ se e solo se $\Gamma \neq \Gamma'$.

Pertanto se $\left\{\Sigma_\Gamma\right\}_{\Gamma\in I}$ è una foliazione locale di un intorno aperto U di un punto $m \in M$ allora per ogni $p \in U$ esiste ed è unico $\overline{\Gamma} \in I$ tale che $p \in \Sigma_{\overline{\Gamma}}$, cioè p appartiene ad un'unica foglia.
Prima di enunciare il teorema di Frobenius dobbiamo introdurre il concetto (che sarà ripreso in seguito) di *distribuzione* ed in particolare di *distribuzione involutiva.*
Una *distribuzione* $\mathcal{D}$ su M è una mappa che ad ogni $m \in M$ associa un sottospazio dello spazio tangente ad M nel punto m, cioè

$$m \mapsto \mathcal{D}(m) \subseteq T_m M.$$

Una distribuzione $\mathcal{D}$ è *involutiva* se è chiusa per le parentesi di Lie, cioè se dati due campi vettoriali $X,\ Y \in \mathcal{D}$ (cioè se per ogni $m \in M$ si ha che $mX,\ mY \in \mathcal{D}(m)$) si ha che $[X, Y] \in \mathcal{D}$[2].
A questo punto possiamo enunciare il teorema di Frobenius.

Siano M una varietà $d-$dimensionale e sia $\mathcal{D}$ una distribuzione $c-$dimensionale involutiva su M. Allora per ogni $m \in M$ esiste un intorno aperto U di m

[1] Cioè il prodotto di $d - c$ intervalli aperti in $\mathbb{R}$.
[2] La notazione mX indica il valore di X in m e la parentesi di Lie è definita in coordinate da $[X, Y] = X(Y) - Y(X)$ vedi paragrafo 1.14.

ed una foliazione $\left\{\Sigma_\Gamma\right\}_{\Gamma\in I}$ *di* U*, con* I *intervallo aperto di* $\mathbb{R}^{d-c}$ *tale che per ogni* $p \in U$ *si ha che*

$$\mathcal{D}(p) = T_p\Sigma_\Gamma.$$

Un esempio classico di utilizzo di questo teorema lo si ritrova nella *Meccanica Lagrangiana.*

Consideriamo un sistema costituito da N punti materiali $P_1, ..., P_N$ di massa rispettivamente $m_1, ..., m_2$ in un sistema di riferimento Σ. Siano x_h il vettore posizione e $\dot{x}_h$ il vettore velocità del punto P_h nel sistema di riferimento scelto. Il vettore

$$X = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^{3N}$$

prende in nome di *configurazione* del sistema, il vettore

$$\dot{X} = (\dot{x}_1, ..., \dot{x}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$$

prende il nome di *velocità* del sistema, mentre il vettore

$$(X, \dot{X}) \in \mathbb{R}^{6N}$$

prende il nome di *atto di moto* del sistema.

Un *vincolo* è una restrizione sugli atti di moto $(x_h, \dot{x}_h)$ consentiti ai singoli punti. Un *vincolo olonomo* è una limitazione sulla configurazione X. Un *vincolo anolonomo* è una limitazione sull'atto di moto $(X, \dot{X})$.
Poichè la teoria dei vincoli olonomi è ovviamente più sviluppata di quella dei vincoli anolonomi, risulta interessante avere uno strumento che permetta di scoprire la natura olonoma di un vincolo apparentemente anolonomo.
Il teorema di Frobenius da una condizione necessaria e sufficiente sui campi vettoriali affinchè un vincolo sia olonomo. Poichè tale condizione coinvolge le derivate prime dei campi vettoriali nella versione classica di tale teorema si assume che questi campi siamo di classe $\mathcal{C}^1$.
L'argomento principale di questa tesi è il teorema di Frobenius. In particolare l'obbiettivo che ci prefiggiamo di raggiungere è di estendere il teorema di Frobenius ai campi vettoriali localmente lipschitziani.
I campi vettoriali lipschitziani sono particolarmente significativi in quanto rappresentano una classe standard per cui c'è unicità della soluzione per il problema di Cauchy.
Inoltre l'argomento di questa tesi si inserisce in un più vasto programma di estensione ai campi lipschitziani di risultati classici, quali il teorema i Chow e il teorema della commutatività dei flussi.
Per raggiungere il nostro obbiettivo utilizzeremo un'estensione multivoca delle parentesi di Lie introdotta recentemente da F. Rampazzo ed H. Sussmann tratta da [R-S]. Per non confondere tra loro le due parentesi di Lie utilizzeremo il grassetto per le parentesi di Lie multivoche cioè $[\cdot, \cdot]$, mentre per indicare le

parentesi di Lie classiche utilizzeremo la normale simbologia $[\cdot,\cdot]$.

Dati due campi vettoriali localmente lipschitziani X ed Y su una varietà M definiamo la loro *parentesi di Lie* come segue:
per ogni $m \in M$ sia

$$m[X,Y] = co\left\{\lim_{s\to+\infty} m_s[X,Y]\right\},$$

dove la successione $\{m_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ soddisfa alle seguenti proprietà:

1. $m_s \in \mathrm{DIFF}(X) \cap \mathrm{DIFF}(Y)$, per ogni s;
2. $\lim_{s\to+\infty} m_s = m$;
3. $\lim_{s\to+\infty} m_s[X,Y]$ esiste;

dove il simbolo $\mathrm{DIFF}(X)$ denota l'insieme dei punti di M in cui X è differenziabile e coA indica l'inviluppo convesso[3] dell'insieme A.

Prima di dimostrare l'estensione del teorema di Frobenius ai campi vettoriali localmente lipschitziani, che per semplicità chiameremo *teorema di Frobenius multivoco*, daremo una nuova definizione di *involutività in senso multivoco* adattata alle nuove parentesi di Lie.

Data una distribuzione localmente lipschitziana $\mathcal{D}$ su una varietà M diremo che $\mathcal{D}$ è *involutiva in senso multivoco* o *multi-involutiva* se presi due campi vettoriali localmente lipschitziani X ed Y appartenenti a $\mathcal{D}$ allora la loro parentesi di Lie $m[X,Y]$ è inclusa in $\mathcal{D}(m)$ per ogni $m \in M$, cioè

$$m[X,Y] \subseteq \mathcal{D}(m), \qquad \forall\, m \in M.$$

Teorema di Frobenius multivoco. *Siano d, c due interi positivi con $c \leq d$ e sia $\mathcal{D}$ una distribuzione $c-$dimensionale, lipschitziana e multi-involutiva su una varietà M di classe $\mathcal{C}^\infty$ e di dimensione d.*
Allora per ogni $m \in M$ esiste una carta (U,φ) con $\varphi(m) = 0$ e coordinate locali lipschitziane $x_1, ..., x_d$ tali che gli insiemi di equazioni

$$x_i = costante, \qquad i = c+1, ..., d,$$

sono varietà integrali di $\mathcal{D}$.

La dimostrazione di questo teorema richiede alcune nozioni della teoria delle *inclusioni differenziali.*

[3] Vedi la definizione in Appendice A.

Se da un lato esistono nella teoria delle inclusioni differenziali numerosi risultati che garantiscono l'esistenza della soluzione, il problema dell'unicità quasi non si pone, in quanto, com'è intuitivo, l'unicità si ha solo in situazioni molto particolari. Un punto cruciale della dimostrazione del teorema di Frobenius multivoco in effetti richiede il riconoscimento di un caso di questo tipo.

Oltre alla versione classica ed alla versione multivoca del teorema di Frobenius questa tesi contiene anche un'estensione del teorema di Frobenius ai campi vettoriali localmente lipschitziani dovuta a Slobodan Simić, che chiameremo *teorema di Frobenius-Simić*.
In [S] Simić definisce le parentesi di Lie classiche *quasi ovunque* e da un concetto di *involutività quasi ovunque*.

Questa tesi è organizzata nel seguente modo:

Il **CAPITOLO 1** contiene le definizioni delle principali strutture utilizzate, quali *varietà differenziabili, sottovarietà, fibrato tangente, campi vettoriali, flusso di campi vettoriali, distribuzioni, parentesi di Lie, distribuzioni involutive, distribuzioni involutive quasi ovunque e varietà integrali.*

Il **CAPITOLO 2** a differenza del capitolo precedente, contiene una descrizione di varietà differenziabili di classe $\mathcal{C}^{1,1}$ cioè in cui le mappe di transizione sono differenziabili con derivata prima lipschitziana.

Il **CAPITOLO 3** contiene le dimostrazioni dettagliate ed ampliate del teorema di Frobenius classico e del teorema di Frobenius-Simić.

Nel **CAPITOLO 4** è riportato l'enunciato del teorema di rettificabilità per campi vettoriali lipschitziani e la dimostrazione che ciò implica il teorema di Frobenius nel caso di distribuzioni uno-dimensionali.

Il **CAPITOLO 5** contiene la definizione e alcune proprietà delle *parentesi di Lie multivoche*, la definizione di *involutività in senso multivoco* e la dimostrazione del *teorema di Frobenius multivoco.* Inoltre è dimostrato che le definizioni di involutività quasi ovunque ed involutività in senso multivoco sono equivalenti.

Capitolo 1

Note sulle varietà

1.1 Varietà differenziabili

1.1.1 Carte

Sia M un insieme.
Una *carta* è una coppia (U, φ) dove U è un sottoinsieme di M e φ è un'applicazione biunivoca

$$\varphi : U \to W \subset \mathbb{R}^d.$$

Diremo che φ è *un sistema di funzioni coordinate su* U, e chiameremo le componenti di φ

$$x_i = r_i \circ \varphi, \qquad i = 1, ..., d,$$

coordinate locali, dove r_i rappresenta la proiezione $i-$esima.

Siano (U_i, φ_i) e (U_j, φ_j) due carte tali che

$$\varphi_i : U_i \to W_i \subset \mathbb{R}^d,$$

$$\varphi_j : U_j \to W_j \subset \mathbb{R}^d$$

e $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.
In queste ipotesi consideriamo le restrizioni

$$\varphi_i|_{U_i \cap U_j}$$

e

$$\varphi_j|_{U_i \cap U_j},$$

aventi come immagini rispettivamente gli insiemi

$$W_{ij} = \varphi_i(U_i \cap U_j) \qquad \text{e} \qquad W_{ji} = \varphi_j(U_i \cap U_j),$$

e le funzioni

$$\varphi_{ij} : W_{ij} \to W_{ji}$$

$$\varphi_{ji} : W_{ji} \to W_{ij}$$

così definite

$$\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}, \qquad \varphi_{ji} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}.$$

Sia $k \geq 0$ un intero.
Due carte (U_i, φ_i) e (U_j, φ_j) tali che

$$\varphi_i : U_i \to W_i \subset \mathbb{R}^d$$

e

$$\varphi_j : U_j \to W_j \subset \mathbb{R}^d$$

sono *compatibili di classe* $\mathcal{C}^k$ se

i) gli insiemi W_{ij} e W_{ji} sono aperti (eventualmente vuoti) in $\mathbb{R}^d$, e

ii) le applicazioni φ_{ij} e φ_{ji} (definite se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$) sono diffeomorfismi di classe $\mathcal{C}^k$.

(Vedi Appendice A per la definizione di diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^k$).

Chiameremo le applicazioni della forma φ_{ij} e φ_{ji} *cambiamenti di coordinate.*

1.1.2 Atlanti di classe $\mathcal{C}^k$

Siano M un insieme, $k \geq 0$ un intero, ed I un insieme di indici.
Un *atlante di classe* $\mathcal{C}^k$ *su* M o più brevemente, qualora sia chiara la classe di differenziabilità, un *atlante su* M, è una collezione $\mathcal{A}$ di carte locali su M del tipo

$$\mathcal{A} = \Big\{(U_i, \varphi_i),\ i \in I\Big\}$$

tale che

i) le carte sono a due a due compatibili di classe $\mathcal{C}^k$, e

ii) $\bigcup_{i \in I} U_i = M$.

Due atlanti su M sono *equivalenti di classe* $\mathcal{C}^k$ se la loro unione è ancora un atlante di classe $\mathcal{C}^k$, cioè se ogni carta del primo atlante è compatibile con qualsiasi carta del secondo.

Questa definizione induce una relazione di equivalenza su $\mathcal{A}$.

Una *struttura di varietà differenziabile di classe* $\mathcal{C}^k$ su M è una classe di equivalenza di atlanti di classe $\mathcal{C}^k$ su M.

Un insieme dotato di una struttura di varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ si dice *varietà differenziabile di classe* $\mathcal{C}^k$.

Le varietà differenziabili di classe $\mathcal{C}^0$ si dicono *varietà topologiche*.

1.2 Applicazioni differenziabili

Siano M_1 ed M_2 due varietà differenziabili di classe $\mathcal{C}^1$.
Una mappa $\psi : M_1 \to M_2$ si dice *differenziabile* se è differenziabile nelle carte locali, cioè se per ogni $m \in M_1$ e per ogni coppia di carte (U, φ) e (V, τ), rispettivamente di M_1 ed M_2, tali che $m \in U$ e $\psi(U) \subseteq V$ la composizione $\tau \circ \psi \circ \varphi^{-1}$ risulta differenziabile.

Si osservi che questa definizione è indipendente dalla scelta delle carte.

Siano M_1 ed M_2 due varietà differenziabili di classe rispettivamente $\mathcal{C}^{k_1}$ e $\mathcal{C}^{k_2}$, con $1 \leq k_1, k_2 \leq \infty$ interi, e sia k è un intero tale che $1 \leq k \leq \min\{k_1, k_2\}$.
Una mappa $\psi : M_1 \to M_2$ si dice *differenziabile di classe* $\mathcal{C}^k$ se per ogni $m \in M_1$ e per ogni coppia di carte (U, φ) e (V, τ) tali che $m \in U$ e $\psi(U) \subseteq V$ la composizione $\tau \circ \psi \circ \varphi^{-1}$ è di classe $\mathcal{C}^k$.

1.2.1 Diffeomorfismi di varietà

Siano M_1 ed M_2 due varietà differenziabili di classe $\mathcal{C}^1$.
L'applicazione $\psi : M_1 \to M_2$ è un *diffeomorfismo di varietà* se ψ è differenziabile, invertibile e ψ^{-1} è differenziabile.

In tal caso M_1 ed M_2 sono *diffeomorfe*.

Siano M_1 ed M_2 due varietà differenziabili di classe rispettivamente $\mathcal{C}^{k_1}$ e $\mathcal{C}^{k_2}$, con $1 \leq k_1, k_2 \leq \infty$ interi, e sia k è un intero tale che $1 \leq k \leq \min\{k_1, k_2\}$.
Una mappa $\psi : M_1 \to M_2$ è un *diffeomorfismo di classe* $\mathcal{C}^k$ *di varietà* se per ogni $m \in M_1$ e per ogni coppia di carte (U, φ) e (V, τ) tali che $m \in U$ e $\psi(U) \subseteq V$ la composizione $\tau \circ \psi \circ \varphi^{-1}$ è di classe $\mathcal{C}^k$, l'inversa esiste, ed è di classe $\mathcal{C}^k$.

In tal caso M_1 ed M_2 sono *diffeomorfe di classe* $\mathcal{C}^k$.

1.3 Applicazioni lipschitziane

Siano M_1 ed M_2 due varietà differenziabili di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \geq 0$ intero, ed m un punto di M_1.

Una mappa $F : M_1 \to M_2$ è *lipschitziana in* m se è lipschitziana nelle carte locali cioè se per ogni coppia di carte (U, φ) e (V, ψ), rispettivamente di M_1 ed M_2, tali che $m \in U$ ed $F(U) \subseteq V$, la mappa composta

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

è lipschitziana in $\varphi(U)$ in senso usuale.

F è *lipschitziana* se è lipschitziana in m per ogni $m \in M$.

1.3.1 Applicazioni localmente lipschitziane

Siano M_1 ed M_2 due varietà differenziabili di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \geq 0$ intero.
Un'applicazione $F : M_1 \to M_2$ si dice *localmente lipschitziana* se per ogni $m \in M_1$ esiste un intorno di m in cui F lipschitziana.

1.3.2 Lipeomorfismi di varietà

Siano M_1 ed M_2 due varietà differenziabili di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \geq 0$ intero.
Un'applicazione $F : M_1 \to M_2$ si dice *lipeomorfismo di varietà* se F è lipschitziana, invertibile e F^{-1} è lipschitziana.

In tal caso M_1 ed M_2 si dicono *lipeomorfe*.

1.4 Topologia indotta dalla struttura di varietà

Sia M un insieme dotato di una struttura di varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \geq 0$ intero.
La struttura di varietà induce sull'insieme M una topologia che chiameremo *topologia indotta dalla struttura di varietà*.
Consideriamo su M la più piccola topologia per cui ogni carta (U, φ) di ogni atlante della struttura di varietà risulta continua.
In altri termini $G \subset M$ è aperto se $\varphi(U \cap G)$ è aperto per ognuna delle suddette carte.

Usualmente si fanno le seguenti ipotesi aggiuntive sulla topologia indotta dalla struttura di varietà:

1) M è uno spazio di Hausdorff, ed

2) M è uno spazio separabile.

Cioè:

1) per ogni m_1, $m_2 \in M$ esistono due aperti N_1 ed $N_2 \subset M$ tali che $m_1 \in N_1$, $m_2 \in N_2$ e $N_1 \cap N_2 = \emptyset$.

2) esiste un sottoinsieme di M finito o numerabile denso in M, cioè esiste $N \subseteq M$ finito o numerabile tale che $chN = M$, dove chN indica l'insieme dei punti di chiusura per N.

Le ipotesi aggiuntive servono per poter definire una metrica Riemanniana, cioè per introdurre norme nei T_mM che dipendono con regolarità da $m \in M$.

Si veda il paragrafo 1.9 per la costruzione di una metrica Riemanniana.

1.5 Connessione e dimensione

Sia M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \geq 0$ intero.
M si dice *connessa* se dati $m_1, m_2 \in M$ esiste un numero finito di carte (U_i, φ_i), $i = 1, ..., n$, tali che $m_1 \in U_1$, $m_2 \in U_n$ e $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ per ogni $i = 1, ..., n-1$.
Si dimostra che rispetto alla topologia indotta dalla struttura di varietà su M questa è la solita definizione di *connessione per archi* e che questa coincide con la connessione usuale.

Si dimostra inoltre che vale il seguente risultato.

Teorema. Siano I un insieme di indici, M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \geq 0$ intero, ed

$$\mathcal{A} = \left\{ (U_i, \varphi_i),\ i \in I \right\}$$

un atlante di classe $\mathcal{C}^k$ su M, dove per ogni $i \in I$ $\varphi_i : U_i \to W_i \subset \mathbb{R}^{d_i}$ e $d_i \in \mathbb{N}$. Allora tutti gli W_i sono aperti dello stesso spazio vettoriale $\mathbb{R}^d$, cioè $d_i = d$ per ogni $i \in I$.

Nel teorema appena riportato d si dice *dimensione di* M e si indica con

$$d = \dim M.$$

1.6 Sottovarietà

Siano M ed N due varietà differenziabili di classe almeno $\mathcal{C}^1$ e sia $\psi : N \to M$ un'applicazione differenziabile.
ψ è *non singolare in* $n \in N$ se per ogni coppia di carte (V, τ) e (U, φ) tali che $n \in V$ e $\psi(V) \subseteq U$ la matrice jacobiana di $d(\varphi \circ \psi \circ \tau^{-1})$ è non singolare in

$\tau(n)$, cioè $\ker\big(d(\varphi \circ \psi \circ \tau^{-1})\big) = \{0\}$.

Diremo che ψ è un'*immersione* se ψ è non singolare per ogni $n \in N$.

Diremo che la coppia (N, ψ) è una *sottovarietà* di M se ψ è un'immersione biiettiva.

1.6.1 Sottovarietà trasverse

Siano M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \geq 0$ intero, e (N_1, ψ_1) ed (N_2, ψ_2) due sottovarietà chiuse di M.
Diremo che N_1 ed N_2 sono *trasverse* se per ogni $m \in N_1 \cap N_2$

$$T_m N_1 \oplus T_m N_2 = T_m M.$$

Si dimostra che se N_1 ed N_2 sono trasverse allora $N_1 \cap N_2$ è una sottovarietà di M di dimensione

$$\dim(N_1 \cap N_2) = \dim N_1 + \dim N_2 - \dim M,$$

e che per ogni $m \in N_1 \cap N_2$

$$T_m(N_1 \cap N_2) = T_m N_1 \cap T_m N_2.$$

1.7 Fibrato tangente

1.7.1 Curva differenziabile

Sia M una varietà differenziabile di classe almeno $\mathcal{C}^0$ ed m un suo punto.
Una *curva differenziabile passante per m* è una qualsiasi funzione differenziabile del tipo $\gamma : I \to M,\ \lambda \mapsto \gamma(\lambda)$ tale che $\gamma(0) = m$, con $I \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto contenente l'origine dotato dell'usuale struttura differenziale.

1.7.2 Spazio tangente in un punto ad una varietà

Caso $\mathcal{C}^\infty$

Sia M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$ ed m un suo punto. Sia inoltre Γ_m l'insieme di tutte le curve differenziabili passanti per m, cioè

$$\Gamma_m = \Big\{\gamma : \gamma \text{ è una curva differenziabile passante per } m\Big\}.$$

Sull'insieme Γ_m è possibile definire la relazione di equivalenza $\sim$ in questo modo

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \qquad \text{se e solo se} \qquad \frac{d}{d\lambda}\Big(\varphi \circ \gamma_1\Big)\Big|_0 = \frac{d}{d\lambda}\Big(\varphi \circ \gamma_2\Big)\Big|_0,$$

per ogni carta (U, φ) con $m \in U$.
Si verifica che la relazione di equivalenza $\sim$ non dipende dalla particolare carta scelta.
Lo *spazio tangente a M nel punto m*, che denoteremo con T_mM, è l'insieme quoziente

$$T_mM = \Gamma_m/\sim = \left\{ [\gamma],\ \gamma \in \Gamma_m \right\}$$

delle classi di equivalenza di curve differenziabili passanti per m.
Lo spazio tangente T_mM può essere definito equivalentemente anche come insieme di operatori di derivazione su $\mathcal{F}^\infty_m(M, \mathbb{R})$ cioè sull'*anello dei germi delle funzioni $\mathcal{C}^\infty$ in m*.
Siano U_1, $U_2 \subset M$, $f_1 : U_1 \to \mathbb{R}$ ed $f_2 : U_2 \to \mathbb{R}$ due funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$.
Diremo che f_1 ed f_2 *hanno lo stesso germe in m* se esiste un insieme U contenuto in $U_1 \cap U_2$, con m interno ad U e tale che $f_1|_U = f_2|_U$, cioè se f_1 ed f_2 coincidono in un sotto-dominio del quale m è un punto interno.
Consideriamo la relazione $\sim_m$ così definita

$$f_1 \sim_m f_2 \qquad \text{se e solo se} \qquad f_1 \text{ ed } f_2 \text{ hanno lo stesso germe in } m.$$

Non è difficile provare che $\sim_m$ è una relazione di equivalenza.
Si definisce

$$\mathcal{F}^\infty_m(M, \mathbb{R}) = \mathcal{C}^\infty / \sim_m,$$

cioè l'anello dei germi delle funzioni $\mathcal{C}^\infty$ in m è il quoziente dell'insieme delle funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ e la relazione di equivalenza $\sim_m$.
Possiamo allora dare la seguente definizione alternativa di spazio tangente a M nel punto m, diremo cioè che

$$v \in T_mM \text{ è un operatore di derivazione} \Leftrightarrow v : \mathcal{F}^\infty_m(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \text{ è tale che}$$

$$\begin{array}{ll} \textbf{i)}\ v(\alpha f + \beta g) = \alpha v(f) + \beta v(g), & \text{Linearità;} \\ \textbf{ii)}\ v(fg) = v(f)g(m) + f(m)v(g), & \text{Leibnitz;} \end{array}$$

per ogni f, $g \in \mathcal{F}^\infty_m(M, \mathbb{R})$ ed α, $\beta \in \mathbb{R}$.

Dimostriamo ora che le due definizioni sono equivalenti.

- Data una classe di equivalenza $[\gamma]$, rimane associato uno ed uno solo operatore di derivazione v.
  Infatti è sufficiente considerare

  $$v(f) = \frac{d}{d\lambda}\Big(f \circ \gamma \Big)\Big|_0 .$$

  Verifichiamo che l'operatore di derivazione v, appena definito, è lineare e soddisfa la proprietà di Leibnitz.

Siano α, $\beta \in \mathbb{R}$ ed f, $g \in \mathcal{F}^{\infty}_{m}(M, \mathbb{R})$.
Linearità:

$$\begin{aligned} v(\alpha f + \beta g) &= \frac{d}{d\lambda}\Big((\alpha f + \beta g) \circ \gamma\Big)\Big|_0 = \\ &= \frac{d}{d\lambda}\Big(\alpha(f \circ \gamma) + \beta(g \circ \gamma)\Big)\Big|_0 = \\ &= \alpha\frac{d}{d\lambda}\Big(f \circ \gamma\Big)\Big|_0 + \beta\frac{d}{d\lambda}\Big(g \circ \gamma\Big)\Big|_0 = \\ &= \alpha v(f) + \beta v(g). \end{aligned}$$

Leibnitz:

$$\begin{aligned} v(fg) &= \frac{d}{d\lambda}\Big(fg \circ \gamma\Big)\Big|_0 = \\ &= \frac{d}{d\lambda}\Big((f \circ \gamma) \cdot (g \circ \gamma)\Big)\Big|_0 = \\ &= \frac{d}{d\lambda}\Big(f \circ \gamma\Big)\Big|_0 \cdot g(\gamma(0)) + f(\gamma(0)) \cdot \frac{d}{d\lambda}\Big(g \circ \gamma\Big)\Big|_0 = \\ &= v(f)g(m) + f(m)v(g). \end{aligned}$$

- Viceversa, dato un operatore di derivazione v e fissata una carta (U, φ), è possibile definire una curva differenziabile γ che in quella carta si rappresenta come

  $$\lambda \mapsto (\varphi \circ \gamma)(\lambda) = \Big(..., (r_i \circ \varphi \circ \gamma)(\lambda), ...\Big)_{i=1,\dots,d}$$

  dove per ogni $i = 1, ..., d$

  $$(r_i \circ \varphi \circ \gamma)(\lambda) = (r_i \circ \varphi)(m) + v(r_i \circ \varphi)\lambda.$$

  Quindi possiamo asserire che la curva differenziabile γ è l'applicazione

  $$\lambda \mapsto \gamma(\lambda) = \varphi^{-1}\Big(..., (r_i \circ \varphi \circ \gamma)(\lambda), ...\Big)_{i=1,\dots,d}.$$

  Dunque data una funzione f calcoliamo

  $$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}\Big(f \circ \gamma\Big)\Big|_0 &= \frac{d}{d\lambda}\bigg(f \circ \varphi^{-1}\Big(..., (r_i \circ \varphi \circ \gamma)(\lambda), ...\Big)_{i=1,\dots,d}\bigg)\bigg|_0 = \\ &= \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} f(0) v(x_i). \end{aligned}$$

Osserviamo che in una carta locale f può essere scritta usando la *formula di Taylor con il resto nella forma integrale*, cioè

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{d} x_i G_i(x),$$

ove

$$G_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} f(tx) dt$$

e dunque

$$G_i(0) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(0).$$

Se f è di classe $\mathcal{C}^\infty$ allora pure G_i sono di classe $\mathcal{C}^\infty$ quindi usando **i**) e **ii**) otteniamo

$$v(f) = f(0)v(1) + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} f(0) v(x_i) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} f(0) v(x_i).$$

Quindi

$$\frac{d}{d\lambda}\left(f \circ \gamma\right)\Big|_0 = v(f).$$

Siamo quindi riusciti a dimostrare che lo spazio tangente in un punto ad una varietà di classe $\mathcal{C}^\infty$ ha una duplice definizione: da un lato lo si può vedere come insieme di classi di equivalenza di curve differenziabili, dall'altro può essere interpretato come insieme di operatori di derivazione su $\mathcal{F}_m^\infty(M, \mathbb{R})$. Di conseguenza, di volta in volta, useremo la definizione più appropriata allo scopo.

Caso $\mathcal{C}^k$

Siano M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$, con $0 \leq k < \infty$ intero, ed m un suo punto.
Sotto queste ipotesi, a differenza del caso precedente, non è possibile dare una duplice definizione di spazio tangente in un punto ad una varietà. Per costruire $T_m M$ come insieme di classi di equivalenza di curve differenziabili passanti per m, si procede esattamente come nel caso precedente. Non è possibile invece definire $T_m M$ come insieme di operatori di derivazione su $\mathcal{F}_m^\infty(M, \mathbb{R})$.
Infatti in una carta locale una funzione f, scritta usando la *formula di Taylor con il resto nella forma integrale* diviene

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{d} x_i G_i(x),$$

ove

$$G_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} f(tx)dt$$

e dunque

$$G_i(0) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(0).$$

Se f è di classe $\mathcal{C}^\infty$ allora pure G_i sono di classe $\mathcal{C}^\infty$ quindi possiamo usare **i**) e **ii**) ed ottenere

$$v(f) = f(0)v(1) + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} f(0)v(x_i) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} f(0)v(x_i),$$

questa formula ci avverte che v è un oggetto di dimensione d definito localmente dai $v(x_i)$. Questo modo di osservare il carattere vettoriale dell'insieme delle classi di equivalenza di curve differenziabili compare in [Ch]. Successivamente Newns e Walker notarono, in [N-W], che questo modo di vedere le cose è limitato solo al caso $\mathcal{C}^\infty$ in quanto l'insieme degli operatori di derivazione su $\mathcal{F}_m^\infty(M, \mathbb{R})$ soddisfacenti **i**) e **ii**) ha, nel caso $\mathcal{C}^k$, la cardinalità del continuo.

In generale

Data una carta (U, φ) si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra T_mM ed $\mathbb{R}^d$ in questo modo

$$D_\varphi : [\gamma] \mapsto w = \left(..., \frac{d}{d\lambda}\left(r_i \circ \varphi \circ \gamma \right)\Big|_0, ... \right), \qquad \forall\, i = 1, ..., d.$$

Quindi è possibile trasportare su T_mM la struttura di spazio vettoriale di $\mathbb{R}^d$. Si verifica che la struttura di spazio vettoriale così indotta è indipendente dalla scelta della carta.
L'applicazione D_φ prende il nome di *derivazione* e si verifica facilmente che essa è lineare e soddisfa alla proprietà di Leibnitz.
Dunque abbiamo dimostrato che lo spazio tangente ad una varietà in un punto è uno spazio vettoriale e una sua rappresentazione, data una carta (U, φ), è data da

$$w = D_\varphi\big([\gamma]\big) = \left(..., \frac{d}{d\lambda}\left(r_i \circ \varphi \circ \gamma \right)\Big|_0, ... \right), \qquad \forall\, i = 1, ..., d.$$

Gli elementi di T_mM si dicono *vettori tangenti ad M nel punto m.*

Consideriamo una carta (U, φ) su M con U intorno di m e coordinate locali $(x_1, ..., x_d)$ e sia $\big(x_1(\lambda), ..., x_d(\lambda)\big) = \varphi\big(\gamma(\lambda)\big)$ la rappresentazione della curva

differenziabile γ in questo sistema di coordinate.
Definiamo il vettore tangente

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \in T_mM, \qquad i = 1, ..., d,$$

come la classe di equivalenza della curva

$$\gamma(\lambda) = \varphi^{-1}\Big(..., \varphi(m) + \lambda e_i, ...\Big), \qquad i = 1, ..., d,$$

dove e_i è i-esimo vettore della base standard di $\mathbb{R}^d$.
Si osservi che la notazione è giustificata dal fatto che f è una funzione definita in un intorno di m e a valori in $\mathbb{R}$,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(f\Big) = \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i}\Big(\varphi(m)\Big), \qquad i = 1, ..., d.$$

Se D_φ è la derivazione tra T_mM e $\mathbb{R}^d$ determinata dalla carta (U, φ), allora

$$D_\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = e_i, \qquad i = 1, ..., d.$$

Ne segue, in particolare, che i vettori tangenti

$$\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad i = 1, ..., d,$$

sono una base di T_mM e di conseguenza la dimensione di T_mM è uguale alla dimensione di M.

Sia $X \in T_mM$ associato ad una curva differenzibile γ. Una volta fissata una carta (U, φ) il vettore X può essere scritto in questo modo

$$X = \sum_{i=1}^{d} X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

dove

$$X^i = \frac{d}{d\lambda}\Big(r_i \circ \varphi \circ \gamma\Big)\Big|_0, \qquad \forall\, i = 1, ..., d.$$

1.7.3 Fibrato tangente

Sia M una varietà di classe almeno $\mathcal{C}^0$.
Consideriamo l'insieme

$$TM = \bigcup_{m \in M}\Big(\{m\} \times T_mM\Big).$$

La struttura di varietà su M induce una struttura di varietà su TM nel seguente modo.
Siano A un insieme di indici ed $\mathcal{A} = \Big\{(U_\alpha, \varphi_\alpha),\ \alpha \in A\Big\}$ un atlante su M, allora per ogni carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ su M possiamo definire la corrispondente carta fibrata su TM così

$$\left(\bigcup_{m\in U_\alpha}\Big(\{m\}\times T_mM\Big), \Phi_\alpha\right),$$

con

$$\Phi_\alpha : \bigcup_{m\in U_\alpha}\Big(\{m\}\times T_mM\Big) \to \varphi_\alpha\big(U_\alpha\big)\times\mathbb{R}^d$$

dove

$$\Phi_\alpha\big(m,[\gamma]\big) = \Big(\varphi_\alpha(m), D_{\varphi_\alpha}\big([\gamma]\big)\Big) = \\ = \left(\varphi_\alpha(m), \frac{d}{d\lambda}\Big(\varphi_\alpha\circ\gamma\Big)\Big|_0\right),$$

per ogni $m \in U_\alpha$ e per ogni $[\gamma] \in T_mM$.
Si dimostra che tali carte definiscono una struttura di varietà su TM e, di conseguenza, che TM è una varietà di dimensione doppia rispetto alla dimensione di M.
Chiaramente se M è una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \geq 1$ intero, allora TM è una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^{k-1}$ (in particolare TM è di classe $\mathcal{C}^\infty$ se e solo se M lo è).

TM viene detto *fibrato tangente*.

L'applicazione

$$i : M \to TM \\ m \mapsto i(m) = (m,0), \qquad \forall\, m\in M,$$

è detta la *sezione nulla di* TM.

L'applicazione

$$p : TM \to M \\ \big(m,[\gamma]\big) \mapsto p\big(m,[\gamma]\big) = m, \qquad \forall\, m\in M,\ \forall\, [\gamma]\in T_mM,$$

è detta la *proiezione di* TM *su* M.
Ovviamente $p\circ i = \mathrm{id}|_M$.

Le antiimmagini $p^{-1}(m)$ sono dette *fibre di* TM ($p^{-1}(m) = \{m\}\times T_mM$), ogni fibra ha una struttura di spazio vettoriale.

M è anche detta *base* del fibrato TM.

1.8 Applicazioni tangenti

Siano M ed N due varietà differenziabili di classe almeno $\mathcal{C}^2$ e sia Ψ una mappa di classe almeno $\mathcal{C}^2$ tra di esse.
Allora per ogni $m \in M$ è definita l'applicazione

$$d_m\Psi : T_mM \to T_{\Psi(m)}N$$

$$[\gamma] \mapsto [\Psi \circ \gamma].$$

Cioè la classe di equivalenza della curva differenziabile γ passante per m (con $\gamma : I \to M$ dove $I \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto contenente l'origine dotato dell'usuale struttura differenziabile) che rappresenta un vettore in T_mM viene mandata nella classe di equivalenza della curva differenziabile $\Psi \circ \gamma$ passante per $\Psi(m)$ (con $\Psi \circ \gamma : I \to N$), che rappresenta un vettore in $T_{\Psi(m)}N$.
In coordinate: se (U, φ) è una carta su M con $\gamma(I) \subseteq U$ e coordinate locali $(x_1, ..., x_d)$, e se (V, τ) è una carta su N con $\Psi(U) \in V$ e coordinate locali $(y_1, ..., y_d)$, e se per brevità di notazione si indica con $x(y)$ l'applicazione composta $\tau \circ \Psi \circ \varphi^{-1}$, posto che $[\gamma]$ sia rappresentato da

$$v = \sum_{i=1}^{d} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

nella base $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_d}\right)$, allora $d_m\Psi\big([\gamma]\big)$ è rappresentato da

$$w = \sum_{i=1}^{d} w_i \frac{\partial}{\partial y_i},$$

nella base $\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial}{\partial y_d}\right)$, dove

$$w_i = \sum_{j=1}^{d} v_j \frac{\partial y_i}{\partial x_j}, \qquad i = 1, ..., d.$$

L'applicazione $d_m\Psi$ si dice *differenziale di* Ψ *in* m.

L'applicazione

$$d\Psi : TM \to TN$$

definita per ogni $m \in M$ e per ogni $[\gamma] \in T_mM$, con γ curva differenziabile passante per m, da

$$d\Psi(m, [\gamma]) = \Big(\Psi(m), d_m\Psi([\gamma])\Big)$$

si dice l'*applicazione tangente di* Ψ.

Osserviamo che vale il teorema di differenziazione delle mappe composte. Cioè siano M, N, K tre varietà di classe almeno $\mathcal{C}^3$,

$$\Psi : M \to N$$

e

$$\Phi : N \to K$$

due applicazioni di classe almeno $\mathcal{C}^3$ tra varietà allora

$$d(\Phi \circ \Psi) = \big(d\Phi\big) \circ \big(d\Psi\big).$$

1.9 Una metrica su T_mM

Siano $\{B_i\}_{i\in I}$ ed $\{A_j\}_{j\in J}$ due *ricoprimenti aperti* di M, cioè

$$\bigcup_{i\in I} B_i = \bigcup_{j\in J} A_j = M$$

dove I e J sono due insiemi di indici.
Diremo che $\{B_i\}_{i\in I}$ è un *raffinamento* di $\{A_j\}_{j\in J}$ se esiste una mappa

$$\alpha : I \to J$$

$$i \mapsto \alpha(i)$$

tale che per ogni $i \in I$

$$B_i \subseteq A_{\alpha(i)}.$$

Uno spazio topologico di Hausdorff si dice *paracompatto* se ogni suo ricoprimento ammette un raffinamento aperto localmente finito, cioè tale che un intorno di un punto qualsiasi intersechi al più un numero finito di insiemi di tale ricoprimento.
Si dimostra che vale il seguente risultato.

Teorema. *Ogni spazio topologico di Hausdorff localmente compatto e separabile è paracompatto.*

Si dicono *partizioni dell'unità* di M una famiglia $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ finita o numerabile di funzioni reali differenziabili su M tali che:

i) $\forall\, i \in I,\ \varphi_i \geq 0$ e suppφ_i è compatto,

ii) la famiglia $\big\{\mathrm{Int}(\mathrm{supp}\varphi_i),\ i \in I\big\}$ è un ricoprimento aperto localmente finito di M,

iii) $\sum_{i\in I}\varphi_i(m) = 1, \qquad \forall\, m \in M.$

Per la definizione di suppφ_i si veda l'Appendice A.
Si noti che in **ii**) Int(suppφ_i) rappresenta l'*interno* dell'insieme suppφ_i.
Si dimostra inoltre la validità del seguente risultato.

Teorema. *Sia M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ paracompatta. Allora esiste una partizione dell'unità tale che $\big\{Int(supp\varphi_i),\ i \in I\big\}$ risulta essere un raffinamento del ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ dei domini di carte dell'atlante.*

Nelle ipotesi del teorema appena citato si dice che la partizione dell'unità è relativa all'atlante.
Inoltre si dimostra che vale il seguente risultato.

Teorema di Whitney. *Ogni varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ paracompatta ammette una metrica Riemanniana.*

Per la definizione di una metrica Riemanniana si veda l'Appendice D.
La metrica Riemanniana di cui si parla nel teorema di Whitney ha carattere globale come si evince dalla dimostrazione riportata ad esempio in [C].

Risulta quindi evidente perchè nella topologia indotta dalla struttura di varietà si fanno le ipotesi aggiuntive di Hausdorff e separabilità.

1.10 Il teorema di Rademacher applicato alle varietà

Consideriamo ora il teorema di Rademacher nella forma riportata in [Ck].

Teorema di Rademacher. *Sia $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana su un insieme $U \subseteq \mathbb{R}^d$, allora f è derivabile quasi ovunque su U rispetto alla misura di Lebesgue.*

Diamo ora una versione di questo teorema applicato al caso delle varietà.

Teorema di Rademacher applicato alle vartietà. *Siano M ed N due varietà differenziabili e Ψ un'applicazione localmente lipschitziana tra di esse. Allora esiste un sottoinsieme E di M di misura nulla secondo Lebesgue tale che Ψ è differenziabile in ogni punto di $M\backslash E$.*

Cioè Ψ è differenziabile *quasi ovunque* (abbreviato con q.o.) su M. Risulta evidente che la derivata di tale applicazione è localmente limitata dove è definita.

1.11 Campi vettoriali

1.11.1 Campi vettoriali di classe $\mathcal{C}^k$

Sia $k \geq 0$ un intero e sia M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^{k+1}$.
Un *campo vettoriale* X su M è un'applicazione

$$X : M \to TM$$

tale che $p \circ X = \mathrm{id}_M$, dove p è la proiezione di TM su M precedentemente definita.

Notazione: Da qui in avanti scriveremo mX anzichè $X(m)$ per indicare il vettore in T_mM; qualora sia possibile interpretare tale vettore come operatore di derivazione su una funzione $f \in \mathcal{F}_m^\infty(M, \mathbb{R})$ scriveremo semplicemente $mX(f)$.

Osserviamo che se M è una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^{k+1}$ allora X si dice di classe $\mathcal{C}^k$ se esso è un'applicazione differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ tra M e TM.

Data una qualsiasi carta (U, φ) su M con coordinate locali $(x_1, ..., x_d)$, ogni campo vettoriale X, su U, in coordinate si può scrivere

$$X = \sum_{i=1}^{d} a_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

dove a_i, con $i = 1, ..., d$, sono funzioni differenziabili di classe $\mathcal{C}^k$ da M in $\mathbb{R}$.
Dunque per ogni $m \in M$ il vettore mX, può essere scritto coordinate locali

$$mX = \sum_{i=1}^{d} a_i(m) \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_m .$$

Se M è una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$ anche T_mM, con $m \in M$, è una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$ e dunque il vettore mX può essere interpretato come operatore di derivazione su $\mathcal{F}_m^\infty(M, \mathbb{R})$.
Dunque se M è una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$ ed $f \in \mathcal{F}_m^\infty(M, \mathbb{R})$, con $m \in M$, allora si ha che

$$mX(f) = \sum_{i=1}^{d} a_i(m) \frac{\partial}{\partial x_i} f\bigg|_m .$$

1.11.2 Campi vettoriali lipschitziani e localmente lipschitziani

Data una varietà differenziabile M di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \geq 0$ intero.
Un *campo vettoriale (localmente) lipschitziano* su M un'applicazione (localmente) lipschitziana

$$X : M \to TM$$

tale che $p \circ X = \mathrm{id}_M$, dove p è la proiezione di TM su M precedentemente definita.

Notazione: Anche in questo caso useremo la notazione precedentemente adottata cioè scriveremo mX anzichè $X(m)$ per indicare il vettore in T_mM; qualora sia possibile interpretare tale vettore come operatore di derivazione su una funzione $f \in \mathcal{F}_m^\infty(M, \mathbb{R})$ scriveremo semplicemente $mX(f)$.

Data una qualsiasi carta (U, φ) su M con coordinate locali $(x_1, ..., x_d)$, ogni campo vettoriale (localmente) lipschitziano X, su M, in coordinate si può scrivere

$$X = \sum_{i=1}^{d} a_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

dove a_i, con $i = 1, ..., d$, sono funzioni (localmente) lipschitziane da M in $\mathbb{R}$.
Dunque per ogni $m \in M$ il vettore mX, in coordinate locali si può scrivere

$$mX = \sum_{i=1}^{d} a_i(m) \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_m .$$

Se M è una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$ anche T_mM, con $m \in M$, è una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$ e dunque il vettore mX può essere interpretato come operatore di derivazione su $\mathcal{F}_m^\infty(M, \mathbb{R})$.
Dunque se M è una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$ ed $f \in \mathcal{F}_m^\infty(M, \mathbb{R})$, con $m \in M$, allora si ha che

$$mX(f) = \sum_{i=1}^{d} a_i(m) \frac{\partial}{\partial x_i} f\bigg|_m .$$

1.12 Flusso dei campi vettoriali

1.12.1 Curva integrale

Siano $k \geq 0$ un intero, M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^{k+1}$ ed X un campo vettoriale di classe $\mathcal{C}^k$ su M oppure un campo vettoriale lipschitziano

su M oppure un campo vettoriale localmente lipschitziano su M.
Una *curva integrale di X passante per m* è una mappa differenziabile

$$\xi_{X,m} :]a,b[\to M$$

tale che:

- $]a,b[$ è un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ contenente l'origine dotato dell'usuale struttura differenziale,
- $\frac{d}{dt}\xi_{X,m}(t) = \dot{\xi_{X,m}}(t) = X\big(\xi_{X,m}(t)\big), \qquad \forall\, t \in]a,b[,$
- $\xi_{X,m}(0) = m.$

Dai teoremi classici sulle equazioni differenziali, si dimostra che dato un campo vettoriale X su M allora per ogni $m \in M$ esiste un'unica curva integrale di X passante per m.
Inoltre risulta evidente che se il campo vettoriale X è di classe $\mathcal{C}^k$ allora la curva integrale di X è di classe $\mathcal{C}^{k+1}$, mentre se il campo vettoriale X è lipschitziano allora la curva integrale di X è un'applicazione di classe $\mathcal{C}^{1,1}$, cioè un'applicazione differenziabile con derivata prima lipschitziana.

1.12.2 Flusso

Siano $k \geq 0$ un intero, M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^{k+1}$, X un campo vettoriale di classe $\mathcal{C}^k$ su M oppure un campo vettoriale lipschitziano su M oppure un campo vettoriale localmente lipschitziano su M ed $\xi_{X,m}$ la curva integrale di X passante per m.
Denotiamo con $\cdot\exp(\cdot X)$ la mappa flusso associata al campo vettoriale X, così definita

$$\begin{gathered}\cdot\exp(\cdot X) : \mathbb{R}\times M \to M \\ (t,m) \mapsto m\exp(tX) = \xi_{X,m}(t).\end{gathered}$$

La mappa flusso soddisfa il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Big(\xi_{X,m}(t))\Big) = X\big(\xi_{X,m}(t)\big) \\ \xi_{X,m}(0) = m \end{cases}$$

che, in modo equivalente può essere scritto

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Big(m\exp(tX)\Big) = m\exp(tX)X \\ m\exp(0X) = m \end{cases}$$

e questo giustifica ampiamente la scelta della notazione esponenziale.

1.13 Distribuzioni

Siano c e d due interi tali che $1 \leq c \leq d$, $k \geq 0$ un intero e sia M una varietà differenzibile di classe $\mathcal{C}^k$ e di dimensione d.
Una *distribuzione* $\mathcal{D}$ di dimensione c su M è una mappa multivoca che ad ogni $m \in M$ associa un sottospazio vettoriale di dimensione c dello spazio tangente ad M nel punto m, cioè

$$m \mapsto \mathcal{D}(m) \subseteq T_m M, \qquad \forall\, m \in M.$$

Dato un campo vettoriale X su M, diremo che X *appartiene alla* (oppure *giace sulla*) *distribuzione* $\mathcal{D}$ ($X \in \mathcal{D}$) se $mX \in \mathcal{D}(m)$ per ogni $m \in M$.

1.13.1 Distribuzioni di classe $\mathcal{C}^k$

Siano $k \geq 0$ un intero, M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^{k+1}$ ed U un sottoinsieme di M.
Una distribuzione $\mathcal{D}$ di dimensione c si dice *di classe* $\mathcal{C}^k$ *su* U se su U esistono c campi vettoriali $X_1, ..., X_c$ di classe $\mathcal{C}^k$ che generano $\mathcal{D}(m)$ per ogni $m \in U$, cioè tali che

$$\mathcal{D}(m) = Span\Big\{mX_1, ..., mX_c\Big\}, \qquad \forall\, m \in U.$$

La distribuzione $\mathcal{D}$ si dice *di classe* $\mathcal{C}^k$ se è di classe $\mathcal{C}^k$ su M.

1.13.2 Distribuzioni lipschitziane

Siano M una varietà di classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 0$ intero.
Una distribuzione $\mathcal{D}$ di dimensione c si dice *lipschitziana su* U se esistono c campi vettoriali lipschitziani $X_1, ..., X_c$, definiti su U, tali da generare $\mathcal{D}(m)$ per ogni $m \in U$, cioè tali che

$$\mathcal{D}(m) = Span\Big\{mX_1, ..., mX_c\Big\}, \qquad \forall\, m \in U.$$

La distribuzione $\mathcal{D}$ si dice *localmente lipschitziana su* V se per ogni $m \in V$ esiste un insieme U contenente m tale che $\mathcal{D}$ è lipschitziana su U.

1.14 Parentesi di Lie

1.14.1 Parentesi di Lie di campi vettoriali di classe $\mathcal{C}^k$

Siano M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^{k+1}$, con $k \geq 1$ intero, ed X, Y due campi vettoriali, di classe almeno $\mathcal{C}^1$ su M.
Definiamo l'operatore *parentesi di Lie* ponendo

$$[\cdot,\cdot] : (X, Y) \mapsto [X, Y] = X(Y) - Y(X).$$

In un sistema di coordinate locali, diciamole $(x_1, ..., x_d)$, i campi vettoriali X ed Y possono essere scritti così

$$X = \sum_{i=1}^{d} a_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

ed

$$Y = \sum_{j=1}^{d} b_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

dove a_i ed b_j sono funzioni reali di classe almeno $\mathcal{C}^1$ per ogni i, $j \in \{1, ..., d\}$. Nello stesso sistema di coordinate locali $[X, Y]$ diventa

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^{d} \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Si verifica che l'operatore parentesi di Lie è una derivazione in quanto è un'applicazione bilineare e soddisfa alla proprietà di Leibnitz.
Dunque, per ogni $m \in M$, $m[X, Y]$ può essere pensato come un elemento di $T_m M$ e quindi l'operatore parentesi di Lie può essere identificato con un campo vettoriale.

In particolare se M è una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$ allora per ogni $m \in M$ e per ogni $f \in \mathcal{F}_m^\infty(M, \mathbb{R})$ si ha che

$$m[X, Y](f) = mX(Y(f)) - mY(X(f)).$$

Si verifica inoltre che valgono le seguenti proprietà:

(a) se f e g sono due funzioni a valori in $\mathbb{R}$ di classe almeno $\mathcal{C}^1$ ed X, Y sono due campi vettoriali di classe almeno $\mathcal{C}^1$ allora

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X,$$

(b) $[X, Y] = -[Y, X]$ per ogni coppia di campi vettoriali X, Y di classe almeno $\mathcal{C}^1$,

(c) $\big[[X, Y], Z\big] + \big[[Y, Z], X\big] + \big[[Z, X], Y\big] = 0$ per ogni terna X, Y, Z di campi vettoriali di classe almeno $\mathcal{C}^2$ su M.

La proprietà (c) è nota come *identità di Jacobi.*

Uno spazio vettoriale con un'operazione bilineare che gode delle proprietà (b) e (c) è detto *algebra di Lie.* Parleremo dunque dell'algebra di Lie dei campi vettoriali.

1.15 Parentesi di Lie di campi vettoriali localmente lipschitziani

Siano M una varietà di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \geq 1$ intero, ed X, Y due campi vettoriali localmente lipschitziani su M.
Definiamo l'operatore *parentesi di Lie* ponendo

$$[\cdot, \cdot] : (X, Y) \mapsto [X, Y] = X(Y) - Y(X) \qquad \text{quasi ovunque.}$$

In un sistema di coordinate locali, diciamole $(x_1, ..., x_d)$, i campi vettoriali X ed Y possono essere scritti così

$$X = \sum_{i=1}^{d} a_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

ed

$$Y = \sum_{j=1}^{d} b_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

dove a_i ed b_j sono funzioni localmente lipschitziane a valori reali per ogni i, $j \in \{1, ..., d\}$. Nello stesso sistema di coordinate locali e in base al teorema di Rademacher riportato al paragrafo 1.10 $[X, Y]$ diventa

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^{d} \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad \text{q.o.}$$

Si verifica che l'operatore parentesi di Lie, dove è definito, è una derivazione in quanto è un'applicazione bilineare e soddisfa alla proprietà di Leibnitz.
Dunque $m[X, Y]$, dove definito, può essere pensato come un elemento di $T_m M$ e quindi l'operatore parentesi di Lie può essere identificato con un campo vettoriale.

Si verifica inoltre che valgono le seguenti proprietà:

(a) se f e g sono due funzioni in $\mathbb{R}$ di classe almeno $\mathcal{C}^1$ ed X, Y sono due campi vettoriali localmente lipschitziani allora

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X, \qquad \text{q.o. su } M,$$

(b) $[X, Y] = -[Y, X]$ quasi ovunque su M per ogni coppia di campi vettoriali localmente lipschitziani X ed Y.

1.16 Involutività

1.16.1 Distribuzioni involutive di classe $\mathcal{C}^k$

Siano M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ di dimensione d e $\mathcal{D}$ una distribuzione di classe $\mathcal{C}^k$ su M $c-$dimensionale, con $k \geq 1$ e $1 \leq c \leq d$.
La distribuzione $\mathcal{D}$ si dice *involutiva di classe* $\mathcal{C}^k$ se per ogni coppia di campi vettoriali di classe $\mathcal{C}^k$ appartenenti a $\mathcal{D}$, X ed Y, (cioè tali che mX, $mY \in \mathcal{D}(m)$ per ogni $m \in M$) si ha che $[X,Y] \in \mathcal{D}$ (cioè $m[X,Y] \in \mathcal{D}(M)$ per ogni $m \in M$).

Siano $X_1, ..., X_c$ campi vettoriali di classe $\mathcal{C}^k$ su M tali da generare una distribuzione $c-$dimensionale $\mathcal{D}$ di classe $\mathcal{C}^k$ su qualche aperto U di M, cioè tali che

$$\mathcal{D}(m) = Span\left\{mX_1, ..., mX_c\right\}, \qquad \forall\, m \in U,$$

allora $\mathcal{D}$ è involutiva di classe $\mathcal{C}^k$ se e solo se esistono delle funzioni di classe $\mathcal{C}^k$, c_{ij}^h con $h = 1, ..., c$, univocamente determinate e tali che

$$m[X_i, X_j] = \sum_{h=1}^{c} c_{ij}^h(m) mX_h, \qquad \forall\, m \in U,\ i,\ j \in \{1, ..., c\}.$$

Infatti: se $\mathcal{D}$ è una distribuzione involutiva di classe $\mathcal{C}^k$ allora per ogni i, $j \in \{1, ..., c\}$ segue che $[X_i, X_j] \in \mathcal{D}$. Essendo $\mathcal{D}$ generata da $X_1, ..., X_c$ allora $m[X_i, X_j]$ può essere scritto come una combinazione lineare dei coefficienti $c_{ij}^h(m)$ e dei vettori mX_h, $h = 1, ..., c$, per ogni $m \in U$. In particolare, al variare di $m \in U$, le funzioni $m \mapsto c_{ij}^h(m)$ sono unicamente determinate (perchè i campi vettoriali sono linearmente indipendenti) e di classe $\mathcal{C}^k$ (in quanto abbiamo supposto di avere campi vettoriali di classe $\mathcal{C}^k$).
Viceversa: se esistono delle funzioni di classe $\mathcal{C}^k$ $m \mapsto c_{ij}^h(m)$, con $h = 1, ..., c$ e tali che

$$m[X_i, X_j] = \sum_{h=1}^{c} c_{ij}^h(m) mX_h, \qquad \forall\, m \in U,$$

allora essendo $\mathcal{D}$ generata dai campi vettoriali di classe $\mathcal{C}^k$ $X_1, ..., X_c$ possiamo concludere che $m[X_i, X_j] \in \mathcal{D}(m)$ per ogni $m \in U$ cioè che la distribuzione $\mathcal{D}$ è involutiva di classe $\mathcal{C}^k$.

Dato che nelle pagine seguenti useremo, in modo particolare, il concetto di *distribuzione involutiva di classe* $\mathcal{C}^\infty$ anzichè quello di distribuzione involutiva di classe $\mathcal{C}^k$ andiamo, per completezza, ad esplicitarne il significato.

1.16.2 Distribuzioni involutive

Siano M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$ e di dimensione d e $\mathcal{D}$ una distribuzione di classe $\mathcal{C}^\infty$ su M $c-$dimensionale con $1 \le c \le d$.
La distribuzione $\mathcal{D}$ si dice *involutiva di classe* $\mathcal{C}^\infty$ o più semplicemente *involutiva* se per ogni coppia di campi vettoriali di classe $\mathcal{C}^\infty$ appartenenti a $\mathcal{D}$, X ed Y, (cioè tali che mX, $mY \in \mathcal{D}(m)$ per ogni $m \in M$) si ha che $[X, Y] \in \mathcal{D}$ (cioè $m[X, Y] \in \mathcal{D}(m)$ per ogni $m \in M$).

Siano $X_1, ..., X_c$ campi vettoriali di classe $\mathcal{C}^\infty$ su M tali da generare una distribuzione $c-$dimensionale $\mathcal{D}$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ su qualche aperto U di M, cioè tali che

$$\mathcal{D}(m) = Span\Big\{mX_1, ..., mX_c\Big\}, \qquad \forall\, m \in U,$$

allora $\mathcal{D}$ è involutiva se e solo se esistono delle funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$, c_{ij}^k con $k = 1, ..., c$, univocamente determinate e tali che

$$m[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{c} c_{ij}^k(m) mX_k, \qquad \forall\, m \in U,\ i,\ j \in \{1, ..., c\}.$$

1.16.3 Distribuzioni involutive *quasi ovunque*

Siano M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ $d-$dimensionale, con $k \ge 1$ intero, e sia $\mathcal{D}$ una distribuzione lipschitziana su M $c-$dimensionale, con $1 \le c \le d$.
La distribuzione $\mathcal{D}$ si dice *involutiva quasi ovunque*[1] se per ogni coppia di campi vettoriali localmente lipschitziani appartenenti a $\mathcal{D}$, X ed Y, si ha che $m[X, Y] \in \mathcal{D}$ per quasi ogni $m \in M$.
Nel caso di campi vettoriali localmente lipschitziani il concetto di involutività assume significato quasi ovunque su M in quanto, dal teorema di Rademacher riportato al paragrafo 1.10, la parentesi di Lie di due campi vettoriali localmente lipschitziani X ed Y è definita quasi ovunque su M cioè

$$m[X, Y] = mX(Y) - mY(X), \qquad \text{q.o. } m \in M.$$

Siano $X_1, ..., X_c$ campi vettoriali localmente lipschitziani su M tali da generare una distribuzione $c-$dimensionale $\mathcal{D}$ su qualche aperto U di M, cioè tali che

$$\mathcal{D}(m) = Span\{mX_1, ..., mX_c\}, \qquad \forall\, m \in U,$$

allora $\mathcal{D}$ è involutiva quasi ovunque se e solo se esistono delle funzioni, c_{ij}^k con $k = 1, ..., c$, localmente limitate e univocamente determinate tali che

$$m[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{c} c_{ij}^k(m) mX_k, \qquad \text{q.o. } m \in U,\ i,\ j \in \{1, ..., c\}.$$

[1] Questa è la notazione che compare in [S].

Infatti: se $\mathcal{D}$ è involutiva quasi ovunque allora $m[X_i, X_j] \in \mathcal{D}(m)$ per quasi ogni $m \in U$ e per ogni $i, j \in \{1, ..., c\}$. Essendo $\mathcal{D}$ generata dai campi vettoriali $X_1, ..., X_c$ allora $m[X_i, X_j]$ può essere scritto come una combinazione lineare dei coefficienti $c_{ij}^k(m)$ e dei campi vettoriali X_k, con $k = 1, ..., c$. Si noti che le $m \mapsto c_{ij}^k(m)$ non sono in generale lipschitziane ma solo localmente limitate grazie al teorema di Rademacher, inoltre i coefficienti $c_{ij}^k(m)$ sono univocamente determinati perchè i campi vettoriali sono linearmente indipendenti.
Viceversa: se esistono delle funzioni localmente limitate $m \mapsto c_{ij}^k(m)$, con $k = 1, ..., c$ e tali che

$$m[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{c} c_{ij}^k(m) m X_k, \qquad \text{q.o. } m \in U, \ i, \ j \in \{1, ..., c\},$$

allora essendo $\mathcal{D}$ generata da $X_1, ..., X_c$ possiamo concludere che $m[X_i, X_j] \in \mathcal{D}(m)$ per quasi ogni $m \in U$, cioè che la distribuzione $\mathcal{D}$ è involutiva quasi ovunque.

1.17 Varietà integrali

Siano M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \geq 1$ intero, (N, ψ) una sottovarietà di M e $\mathcal{D}$ una distribuzione su M.
Una sottovarietà (N, ψ) di M si dice *varietà integrale* di $\mathcal{D}$ se

$$d_n\psi(T_nN) = \mathcal{D}\big(\psi(n)\big), \qquad \forall\, n \in N.$$

Se anzichè considerare una generica ψ consideriamo l'applicazione identica allora (N, id) è una varietà integrale di $\mathcal{D}$ se

$$T_nN = \mathcal{D}(n), \qquad \forall\, n \in N.$$

Capitolo 2

Il caso $\mathcal{C}^{1,1}$

2.1 Varietà lipschitziane e varietà di classe $\mathcal{C}^{1,1}$

2.1.1 Carte

Sia M un insieme.
Una *carta* è una coppia (U, φ) dove U è un sottoinsieme di M e φ è un'applicazione biunivoca

$$\varphi : U \to W \subset \mathbb{R}^d.$$

Diremo che φ è *un sistema di funzioni coordinate su* U, e chiameremo le componenti di φ

$$x_i = r_i \circ \varphi, \qquad i = 1, ..., d$$

coordinate locali (dove r_i è la proiezione i-esima).

Siano (U_i, φ_i) e (U_j, φ_j) due carte tali che

$$\varphi_i : U_i \to W_i \subset \mathbb{R}^d,$$

$$\varphi_j : U_j \to W_j \subset \mathbb{R}^d$$

e $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.
In queste ipotesi si possono considerare le restrizioni

$$\varphi_i|_{U_i \cap U_j}$$

e

$$\varphi_j|_{U_i \cap U_j}$$

aventi come immagini rispettivamente gli insiemi

$$W_{ij} = \varphi_i(U_i \cap U_j) \qquad \text{e} \qquad W_{ji} = \varphi_j(U_i \cap U_j),$$

e le funzioni

$$\varphi_{ij} : W_{ij} \to W_{ji}$$

$$\varphi_{ji} : W_{ji} \to W_{ij}$$

così definite

$$\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}, \qquad \varphi_{ji} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}.$$

Due carte (U_i, φ_i) e (U_j, φ_j) tali che

$$\varphi_i : U_i \to W_i \subset \mathbb{R}^d$$

e

$$\varphi_j : U_j \to W_j \subset \mathbb{R}^d$$

si dicono *Lipschitz-compatibili* se

i) gli insiemi W_{ij} e W_{ji} sono aperti (eventualmente vuoti) in $\mathbb{R}^d$, e

ii) le applicazioni φ_{ij} e φ_{ji} (definite se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$) sono lipeomorfismi (vedi Appendice A).

Due carte (U_i, φ_i) e (U_j, φ_j) tali che

$$\varphi_i : U_i \to W_i \subset \mathbb{R}^d$$

e

$$\varphi_j : U_j \to W_j \subset \mathbb{R}^d$$

si dicono *compatibili di classe* $\mathcal{C}^{1,1}$ se

i) gli insiemi W_{ij} e W_{ji} sono aperti (eventualmente vuoti) in $\mathbb{R}^d$, e

ii) le applicazioni φ_{ij} e φ_{ji} (definite se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$) sono diffeomorfismi di classe $\mathcal{C}^1$ e le loro derivate sono lipschitziane in $\mathbb{R}^d$.

Chiameremo le applicazioni della forma φ_{ij} e φ_{ji} *cambiamenti di coordinate.*

2.1.2 Atlanti lipschitziani ed atlanti di classe $\mathcal{C}^{1,1}$

Atlanti lipschitziani

Siano M un insieme ed I un insieme di indici.
Un *atlante lipschitziano su* M è una collezione $\mathcal{A}$ di carte locali su M del tipo

$$\mathcal{A} = \Big\{ (U_i, \varphi_i), \ i \in I \Big\}$$

tale che

i) le carte sono a due a due Lipschitz-compatibili, e

ii) $\bigcup_{i \in I} U_i = M$.

Due atlanti su M sono *Lipschitz-equivalenti* se la loro unione è ancora un atlante lipschitziano, cioè se ogni carta del primo atlante è Lipschitz-compatibile con qualsiasi carta del secondo.

Questa definizione induce una relazione di equivalenza su $\mathcal{A}$.

Una *struttura di varietà lipschitziana* su M è una classe di equivalenza di atlanti lipschitziani su M.

Un insieme dotato di una struttura di varietà lipschitziana si dice *varietà lipschitziana*.

Atlanti di classe $\mathcal{C}^{1,1}$

Un *atlante di classe $\mathcal{C}^{1,1}$ su M* è una collezione $\mathcal{A}$ di carte locali su M del tipo

$$\mathcal{A} = \Big\{(U_i, \varphi_i),\ i \in I\Big\}$$

tale che

i) le carte sono a due a due compatibili di classe $\mathcal{C}^{1,1}$, e

ii) $\bigcup_{i\in I} U_i = M$.

Due atlanti su M sono *equivalenti di classe $\mathcal{C}^{1,1}$* se la loro unione è ancora un atlante di classe $\mathcal{C}^{1,1}$, cioè se ogni carta del primo atlante è compatibile di classe $\mathcal{C}^{1,1}$ con qualsiasi carta del secondo.

Anche questa definizione induce una relazione di equivalenza su $\mathcal{A}$.

Una *struttura di varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^{1,1}$* su M è una classe di equivalenza di atlanti di classe $\mathcal{C}^{1,1}$ su M.

Un insieme dotato di una struttura di varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^{1,1}$ si dice *varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^{1,1}$*.

2.2 Applicazioni differenziabili

Siano M_1 ed M_2 due varietà differenziabili di classe $\mathcal{C}^{1,1}$.
Una mappa $\psi : M_1 \to M_2$ si dice *differenziabile* se è differenziabile nelle carte locali, cioè se per ogni $m \in M_1$ e per ogni coppia di carte (U, φ) e (V, τ), rispettivamente di M_1 ed M_2, tali che $m \in U$ e $\psi(U) \subset V$ la composizione

$\tau \circ \psi \circ \varphi^{-1}$ risulta differenziabile.

Si osservi che questa definizione è indipendente dalle dalla scelta delle carte.

2.2.1 Diffeomorfismi di varietà

Siano M_1 ed M_2 due varietà differenziabili di classe $\mathcal{C}^{1,1}$.
L'applicazione $\psi : M_1 \to M_2$ è un *diffeomorfismo di varietà* se ψ è differenziabile, ψ è invertibile e ψ^{-1} è differenziabile.

In tal caso M_1 ed M_2 si dicono *diffeomorfe*.

2.3 Applicazioni lipschitziane

Siano M_1 ed M_2 due varietà differenziabili di classe $\mathcal{C}^{1,1}$ ed m un punto di M_1.
Una mappa $F : M_1 \to M_2$ è *lipschitziana in m* se è lipschitziana nelle carte locali, cioè se pre ogni coppia di carte (U, φ) e (V, ψ), rispettivamente di M_1 ed M_2, tali che $m \in U$ e $F(U) \subseteq V$, la mappa composta

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

è lipschitziana in $\varphi(U)$ in senso usuale.

F è *lipschitziana* se è lipschitziana in m per ogni $m \in M$.

2.3.1 Applicazioni localmente lipschitziane

Siano M_1 ed M_2 due varietà differenziabili di classe $\mathcal{C}^{1,1}$.
Un'applicazione $F : M_1 \to M_2$ si dice *localmente lipschitziana* se per ogni $m \in M_1$ esiste un intorno di m in cui F lipschitziana.

2.3.2 Lipeomorfismi di varietà

Siano M_1 ed M_2 due varietà differenziabili di classe $\mathcal{C}^{1,1}$.
L'applicazione $F : M_1 \to M_2$ è un *lipeomorfismo di varietà* se F è lipschitziana, invertibile e F^{-1} è lipschitziana.

In tal caso M_1 ed M_2 si dicono *lipeomorfe*.

2.4 Topologia indotta dalla struttura di varietà

Sia M un insieme dotato di una struttura di varietà di classe $\mathcal{C}^{1,1}$.
La struttura di varietà induce sull'insieme M una topologia che chiameremo *topologia indotta dalla struttura di varietà.*
Consideriamo su M la più piccola topologia per cui ogni carta (U, φ) di ogni atlante della struttura di varietà risulta continua.
In altri termini $G \subset M$ è aperto se $\varphi(U \cap G)$ è aperto per ognuna delle suddette carte.

Usualmente si fanno le seguenti ipotesi aggiuntive sulla topologia indotta dalla struttura di varietà:

1) M è uno spazio di Hausdorff, ed

2) M è uno spazio separabile.

Cioè:

1) per ogni m_1, $m_2 \in M$ esistono due aperti N_1 ed $N_2 \subset M$ tali che $m_1 \in N_1$, $m_2 \in N_2$ e $N_1 \cap N_2 = \emptyset$.

2) esiste un sottoinsieme di M finito o numerabile denso in M, cioè esiste $N \subseteq M$ finito o numerabile tale che $chN = M$, dove chN indica l'insieme dei punti di chiusura per N.

Le ipotesi aggiuntive servono per poter definire una metrica Riemanniana, cioè per introdurre norme nei T_mM che dipendono con regolarità da $m \in M$.

Si veda il paragrafo 1.9 per la costruzione di una metrica Riemanniana.

2.5 Connessione e dimensione

Una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^{1,1}$, M, si dice *connessa* se dati m_1, $m_2 \in M$ esiste un numero finito di carte (U_i, φ_i), $i = 1, ..., n$ tali che $m_1 \in U_1$, $m_2 \in U_n$ e $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ per ogni $i = 1, ..., n-1$.
Si dimostra che rispetto alla topologia indotta dalla struttura di varietà su M questa è la solita definizione di *connessione per archi* e che questa coincide con la connessione usuale.

Si dimostra inoltre che vale il seguente risultato.

Teorema. Siano I un insieme di indici, M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^{1,1}$ connessa ed

$$\mathcal{A} = \Big\{(U_i, \varphi_i),\ i \in I\Big\}$$

un atlante di classe $\mathcal{C}^{1,1}$ su M, dove per ogni $i \in I$, $\varphi_i : U_i \to W_i \subset \mathbb{R}^{d_i}$, e $d_i \in \mathbb{N}$.
Allora tutti gli U_i sono aperti dello stesso spazio vettoriale $\mathbb{R}^d$, cioè $d = d_i$ per ogni $i \in I$.

Nel teorema appena riportato d si dice *dimensione* di M e si indica con

$$d = \dim M.$$

2.6 Sottovarietà

Siano M ed N due varietà differenziabili di classe $\mathcal{C}^{1,1}$ e sia $\psi : N \to M$ un'applicazione differenziabile.
ψ è *non singolare in* $n \in N$ se per ogni coppia di carte (V, τ) e (U, φ) tali che $n \in V$ e $\psi(V) \subseteq U$ la matrice jacobiana di $d(\varphi \circ \psi \circ \tau^{-1})$ è non singolare in $\tau(n)$, cioè $\ker\big(d(\varphi \circ \psi \circ \tau^{-1})\big) = \{0\}$.

Diremo che ψ è un'*immersione* se ψ è non singolare per ogni $n \in N$.

Diremo che la coppia (N, ψ) è una *sottovarietà* di M se ψ è un'immersione biiettiva.

2.7 Fibrato tangente

2.7.1 Curva differenziabile

Sia M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \geq 1$ intero, oppure una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^{1,1}$ ed m un suo punto.
Una *curva differenziabile passante per* m è una qualsiasi funzione differenziabile del tipo $\gamma : I \to M,\ \lambda \mapsto \gamma(\lambda)$ tale che $\gamma(0) = m$, con $I \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto contenente l'origine dotato dell'usuale struttura differenziale.

2.7.2 Spazio tangente in un punto ad una varietà

Caso $\mathcal{C}^\infty$

Sia M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$ ed m un suo punto.

Per la costruzione dello spazio tangente alla varietà M nel punto m, si procede come già fatto al paragrafo 1.7.2 (caso $\mathcal{C}^\infty$).

Ribadiamo solo che, nel caso $\mathcal{C}^\infty$, lo spazio T_mM ha una duplice definizione: da un lato lo si può vedere come insieme di classi di equivalenza di curve differenziabili passanti per m, dall'altro lo si può vedere come insieme di operatori di derivazione su $\mathcal{F}^\infty_m(M,\mathbb{R})$.

Caso $\mathcal{C}^k$, $1 \leq k < \infty$, e caso $\mathcal{C}^{1,1}$

Siano $1 \leq k < \infty$ intero, M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ oppure una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^{1,1}$ ed m un suo punto.
Sia inoltre Γ_m l'insieme di tutte le curve differenziabili passanti per m, cioè

$$\Gamma_m = \Big\{ \gamma : \gamma \text{ è una curva differenziabile passante per } m \Big\}.$$

Sull'insieme Γ_m è possibile definire la relazione di equivalenza $\sim$ in questo modo

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \qquad \text{se e solo se} \qquad \frac{d}{d\lambda}\Big(\varphi \circ \gamma_1\Big)\Big|_0 = \frac{d}{d\lambda}\Big(\varphi \circ \gamma_2\Big)\Big|_0,$$

per ogni carta (U,φ) con $m \in U$.
Si verifica che la relazione di equivalenza $\sim$ non dipende dalla particolare carta scelta.
Lo *spazio tangente a M nel punto m*, che denoteremo con T_mM, è l'insieme quoziente

$$T_mM = \Gamma_m/\sim = \Big\{[\gamma],\ \gamma \in \Gamma_m\Big\}$$

delle classi di equivalenza di curve differenziabili passanti per m.

A differenza del caso $\mathcal{C}^\infty$, per i casi $\mathcal{C}^k$ e $\mathcal{C}^{1,1}$ non possiamo dare una duplice definizione di T_mM cioè non possiamo definirlo in maniera equivalente come insieme di classi di equivalenza di curve differenziabili passanti per m e come insieme di operatori di derivazione su $\mathcal{F}^\infty_m(M,\mathbb{R})$.
Nel caso $\mathcal{C}^k$ e $\mathcal{C}^{1,1}$ lo spazio T_mM è definito solamente come insieme di classi di equivalenza di curve differenziabili. Il motivo per cui non vale la duplice definizione è identico a quello già discusso al paragrafo 1.7.2 (caso $\mathcal{C}^k$).

In generale

Data una carta (U,φ), si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra T_mM ed $\mathbb{R}^d$ in questo modo

$$D_\varphi : [\gamma] \mapsto w = \left(..., \frac{d}{d\lambda}\Big(r_i \circ \varphi \circ \gamma\Big)\Big|_0, ...\right), \qquad \forall\ i = 1,...,d.$$

Quindi è possibile trasportare su T_mM la struttura di spazio vettoriale di $\mathbb{R}^d$.
Si verifica che la struttura di spazio vettoriale così indotta è indipendente dalla scelta della carta.
L'applicazione D_φ prende il nome di *derivazione* e si verifica facilmente che essa è lineare e soddisfa alla proprietà di Leibnitz.
Dunque abbiamo dimostrato che lo spazio tangente ad una varietà in un punto è uno spazio vettoriale e una sua rappresentazione, data una carta (U, φ), è data da

$$w = D_\varphi\big([\gamma]\big) = \left(..., \frac{d}{d\lambda}\left(r_i \circ \varphi \circ \gamma\right)\bigg|_0, ...\right), \qquad \forall\, i = 1, ..., d.$$

Gli elementi di T_mM si dicono *vettori tangenti ad M nel punto m.*

Consideriamo una carta (U, φ) su M con U intorno di m e coordinate locali $(x_1, ..., x_d)$ e sia $\big(x_1(\lambda), ..., x_d(\lambda)\big) = \varphi\big(\gamma(\lambda)\big)$ la rappresentazione della curva differenziabile γ in questo sistema di coordinate.
Definiamo il vettore tangente

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \in T_mM, \qquad i = 1, ..., d,$$

come la classe di equivalenza della curva

$$\gamma(\lambda) = \varphi^{-1}\Big(..., \varphi(m) + \lambda e_i, ...\Big), \qquad i = 1, ..., d,$$

dove e_i è i-esimo vettore della base standard di $\mathbb{R}^d$.
Si osservi che la notazione è giustificata dal fatto che f è una funzione definita in un intorno di m e a valori in $\mathbb{R}$,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(f\Big) = \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i}\Big(\varphi(m)\Big), \qquad i = 1, ..., d.$$

Se D_φ è la derivazione tra T_mM e $\mathbb{R}^d$ determinata dalla carta (U, φ), allora

$$D_\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = e_i, \qquad i = 1, ..., d.$$

Ne segue, in particolare, che i vettori tangenti

$$\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad i = 1, ..., d,$$

sono una base di T_mM, di conseguenza la dimensione di T_mM è uguale alla dimensione di M.

Sia $X \in T_mM$ associato ad una curva differenzibile γ. Una volta fissata una carta (U, φ) il vettore X può essere scritto in questo modo

$$X = \sum_{i=1}^{d} X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

dove

$$X^i = \frac{d}{d\lambda}\Big(r_i \circ \varphi \circ \gamma \Big)\Big|_0, \qquad \forall\, i = 1, ..., d.$$

2.7.3 Fibrato tangente

La definizione dello spazio tangente segue in maniere fedele il caso già trattato al capitolo precedente, per completezza e facilità di letture ne riportiamo ugualmente la costruzione.

Sia M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^{1,1}$.
Consideriamo l'insieme

$$TM = \bigcup_{m \in M} \Big(\{m\} \times T_mM \Big).$$

La struttura di varietà su M induce una struttura di varietà su TM nel seguente modo.
Siano A un insieme di indici ed $\mathcal{A} = \Big\{ (U_\alpha, \varphi_\alpha),\ \alpha \in A \Big\}$ un atlante su M, allora per ogni carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ su M possiamo definire la corrispondente carta fibrata su TM così

$$\left(\bigcup_{m \in U_\alpha} \Big(\{m\} \times T_mM \Big), \Phi_\alpha \right),$$

con

$$\Phi_\alpha : \bigcup_{m \in U_\alpha} \Big(\{m\} \times T_mM \Big) \to \varphi_\alpha\big(U_\alpha\big) \times \mathbb{R}^d$$

dove

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha\big(m, [\gamma]\big) &= \Big(\varphi_\alpha(m), D_{\varphi_\alpha}\big([\gamma]\big) \Big) = \\ &= \Big(\varphi_\alpha(m), \frac{d}{d\lambda}\Big(\varphi_\alpha \circ \gamma \Big)\Big|_0 \Big), \end{aligned}$$

per ogni $m \in U_\alpha$ e per ogni $[\gamma] \in T_mM$.
Si dimostra che tali carte definiscono una struttura di varietà su TM e, di conseguenza, che TM è una varietà di dimensione doppia rispetto alla dimensione di M.

Chiaramente se M è una varietà di classe $\mathcal{C}^{1,1}$, allora TM è una varietà lipschitziana.

TM viene detto *fibrato tangente*.

L'applicazione

$$i : M \to TM$$
$$m \mapsto i(m) = (m, 0), \qquad \forall\, m \in M,$$

è detta la *sezione nulla di* TM.

L'applicazione

$$p : TM \to M$$
$$\big(m, [\gamma]\big) \mapsto p\big(m, [\gamma]\big) = m, \qquad \forall\, m \in M,\ \forall\, [\gamma] \in T_m M,$$

è detta la *proiezione di* TM *su* M.
Ovviamente $p \circ i = \mathrm{id}|_M$.

Le antiimmagini $p^{-1}(m)$ sono dette *fibre di* TM ($p^{-1}(m) = \{m\} \times T_m M$), ogni fibra ha una struttura di spazio vettoriale.

M è anche detta *base* del fibrato TM.

2.8 Applicazioni tangenti

Siano M ed N due varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^{1,1}$ e sia Ψ una mappa differenziabile tra di esse.
Allora per ogni $m \in M$ è definita l'applicazione

$$d_m\Psi : T_m M \to T_{\Psi(m)} N$$
$$[\gamma] \mapsto [\Psi \circ \gamma].$$

Cioè la classe di equivalenza della curva differenziabile γ passante per m (con $\gamma : I \to M$ dove $I \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto contenente l'origine dotato dell'usuale struttura differenziabile) che rappresenta un vettore in $T_m M$ viene mandata nella classe di equivalenza della curva differenziabile $\Psi \circ \gamma$ passante per $\Psi(m)$ (con $\Psi \circ \gamma : I \to N$), che rappresenta un vettore in $T_{\Psi(m)} N$.
In coordinate: se (U, φ) è una carta su M con $\gamma(I) \subseteq U$ e coordinate locali $(x_1, ..., x_d)$, e se (V, τ) è una carta su N con $\Psi(U) \in V$ e coordinate locali $(y_1, ..., y_d)$, e se per brevità di notazione si indica con $x(y)$ l'applicazione composta $\tau \circ \Psi \circ \varphi^{-1}$, posto che $[\gamma]$ sia rappresentato da

$$v = \sum_{i=1}^{d} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

nella base $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_d}\right)$, allora $d_m\Psi\big([\gamma]\big)$ è rappresentato da

$$w = \sum_{i=1}^{d} w_i \frac{\partial}{\partial y_i},$$

nella base $\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial}{\partial y_d}\right)$, dove

$$w_i = \sum_{j=1}^{d} v_j \frac{\partial y_i}{\partial x_j}, \qquad i = 1, ..., d.$$

L'applicazione $d_m\Psi$ si dice *differenziale di* Ψ *in* m.

L'applicazione

$$d\Psi : TM \to TN$$

definita per ogni $m \in M$ e per ogni $[\gamma] \in T_mM$, con γ curva differenziabile passante per m, da

$$d\Psi(m, [\gamma]) = \Big(\Psi(m), d_m\Psi([\gamma])\Big)$$

si dice l'*applicazione tangente di* Ψ.

2.9 Campi vettoriali sulle varietà di classe $\mathcal{C}^{1,1}$

Sia M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^{1,1}$.
Un *campo vettoriale* X su M è un'applicazione

$$X : M \to TM$$

tale che $p \circ X = \mathrm{id}_M$, dove p è la proiezione di TM su M precedentemente definita.

Notazione: Da qui in avanti scriveremo mX anzichè $X(m)$ per indicare che mX è un vettore in T_mM.

X è *campo vettoriale (localmente) lipschitziano* se esso è un'applicazione (localmente) lipschitziana da M a TM.

2.9.1 Campi vettoriali lipschitziani e campi vettoriali localmente lipschitziani

Data una qualsiasi carta (U, φ) su M con coordinate locali $(x_1, ..., x_d)$, ogni campo vettoriale (localmente) lipschitziano X, su U, in coordinate si può scrivere

$$X = \sum_{i=1}^{d} a_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

dove a_i, con $i = 1, ..., d$, sono funzioni (localmente) lipschitziane da M in $\mathbb{R}$.
Dunque per ogni $m \in M$ il vettore mX si può scrivere

$$mX = \sum_{i=1}^{d} a_i(m) \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_m .$$

Se M è una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$ allora anche $T_m M$ è una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$ per ogni $m \in M$ e dunque il vettore mX può essere interpretato anche come operatore di derivazione su $\mathcal{F}^\infty_m(M, \mathbb{R})$.
Dunque se M è una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$ ed $f \in \mathcal{F}^\infty_m(M, \mathbb{R})$, con $m \in M$, allora si ha che

$$mX(f) = \sum_{i=1}^{d} a_i(m) \frac{\partial}{\partial x_i} f\bigg|_m .$$

2.10 Flusso dei campi vettoriali lipschitziani

2.10.1 Curva integrale

Siano M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^{1,1}$ ed X un campo vettoriale lipschitziano su M oppure un campo vettoriale localmente lipschitziano su M.
Una *curva integrale di X passante per m* è una mappa differenziabile

$$\xi_{X,m} :]a, b[\to M$$

tale che:

- $]a, b[$ è un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ contenente l'origine dotato dell'usuale struttura differenziale,
- $\frac{d}{dt}\xi_{X,m}(t) = \dot{\xi}_{X,m}(t) = X\big(\xi_{X,m}(t)\big), \qquad \forall\, t \in]a, b[,$
- $\xi_{X,m}(0) = m.$

Dai teoremi classici sulle equazioni differenziali, si dimostra che dato un campo vettoriale X su M allora per ogni $m \in M$ esiste un'unica curva integrale di X passante per m.
Inoltre risulta evidente che se il campo vettoriale X è lipschitziano allora la curva integrale di X è di classe $\mathcal{C}^{1,1}$, cioè differenziabile con derivata lipschitziana.

2.10.2 Flusso

Siano M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^{1,1}$, X un campo vettoriale lipschitziano su M oppure un campo vettoriale localmente lipschitziano su M e $\xi_{X,m}$ la curva integrale di X passante per m.
Denotiamo con $\cdot \exp(\cdot X)$ la mappa flusso associata al campo vettoriale X, così definita

$$\begin{aligned} \cdot \exp(\cdot X) : \mathbb{R} \times M &\to M \\ (t, m) &\mapsto m \exp(tX) = \xi_{X,m}(t). \end{aligned}$$

La mappa flusso soddisfa il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Big(\xi_{X,m}(t))\Big) = X\big(\xi_{X,m}(t)\big) \\ \xi_{X,m}(0) = m \end{cases}.$$

che, in modo equivalente può essere scritto

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Big(m \exp(tX)\Big) = m \exp(tX)X \\ m \exp(0X) = m \end{cases}$$

e questo giustifica ampiamente la scelta della notazione esponenziale.

2.11 Distribuzioni

Siano c e d due interi tali che $1 \leq c \leq d$ e sia M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^{1,1}$ e di dimensione d.
Una *distribuzione* $\mathcal{D}$ di dimensione c su M è una mappa multivoca che ad ogni $m \in M$ associa sottospazio vettoriale di dimensione c dello spazio tangente ad M nel punto m, cioè

$$m \mapsto \mathcal{D}(m) \subset T_m M, \qquad \forall\, m \in M.$$

Dato un campo vettoriale X su M, diremo che X *appartiene alla* (oppure *giace sulla*) *distribuzione* $\mathcal{D}$ ($X \in \mathcal{D}$) se $mX \in \mathcal{D}(m)$ per ogni $m \in M$.

2.11.1 Distribuzioni lipschitziane

Siano M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^{1,1}$.
Una distribuzione $\mathcal{D}$ di dimensione c si dice *lipschitziana su* U se esistono c campi vettoriali lipschitziani $X_1, ..., X_c$, definiti su U, tali da generare $\mathcal{D}(m)$ per ogni $m \in U$, cioè tali che

$$\mathcal{D}(m) = Span\Big\{mX_1, ..., mX_c\Big\}, \qquad \forall\, m \in U.$$

La distribuzione $\mathcal{D}$ si dice *localmente lipschitziana su* V se per ogni $m \in V$ esiste un insieme U contenente m tale che $\mathcal{D}$ è lipschitziana su U.

2.12 Parentesi di Lie di campi vettoriali localmente lipschitziani sulle varietà di classe $\mathcal{C}^{1,1}$

Sia M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^{1,1}$ ed X, Y due campi vettoriali localmente lipschitziani su M.
Definiamo l'operatore *parentesi di Lie* ponendo

$$[\cdot,\cdot] : (X,Y) \mapsto [X,Y] = X(Y) - Y(X) \qquad \text{quasi ovunque.}$$

In un sistema di coordinate locali, diciamole $(x_1, ..., x_d)$, i campi vettoriali X ed Y possono essere scritti così

$$X = \sum_{i=1}^{d} a_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

ed

$$Y = \sum_{j=1}^{d} b_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

dove a_i ed b_j sono funzioni localmente lipschitziane a valori reali per ogni i, $j \in \{1, ..., d\}$. Nello stesso sistema di coordinate locali e in base al teorema di Rademacher riportato al paragrafo 1.10 $[X,Y]$ diventa

$$[X,Y] = \sum_{i,j=1}^{d} \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad \text{q.o.}$$

Si verifica che l'operatore parentesi di Lie, dove è definito, è una derivazione in quanto è un'applicazione bilineare e soddisfa alla proprietà di Leibnitz.
Dunque $m[X,Y]$, dove definito, può essere pensato come un elemento di $T_m M$ e quindi l'operatore parentesi di Lie può essere identificato con un campo vettoriale.

Si verifica inoltre che valgono le seguenti proprietà:

(a) se f e g sono due funzioni in $\mathbb{R}$ di classe almeno $\mathcal{C}^1$ ed X, Y sono due campi vettoriali localmente lipschitziani allora

$$[fX, gY] = fg[X,Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X, \qquad \text{q.o. su } M,$$

(b) $[X,Y] = -[Y,X]$ quasi ovunque su M per ogni coppia di campi vettoriali localmente lipschitziani X ed Y.

2.13 Involutività

2.13.1 Distribuzioni involutive *quasi ovunque*

Siano M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^{1,1}$ $d-$dimensionale e $\mathcal{D}$ una distribuzione lipschitziana su M $c-$dimensionale, con $1 \leq c \leq d$.
La distribuzione $\mathcal{D}$ si dice *involutiva quasi ovunque* se per ogni coppia di campi vettoriali localmente lipschitziani appartenenti a $\mathcal{D}$, X ed Y, si ha che $m[X,Y] \in \mathcal{D}$ per quasi ogni $m \in M$.
Nel caso di campi vettoriali localmente lipschitziani il concetto di involutività assume significato quasi ovunque su M in quanto, dal teorema di Rademacher riportato al paragrafo 1.10, la parentesi di Lie di due campi vettoriali localmente lipschitziani X ed Y è definita quasi ovunque su M cioè

$$m[X,Y] = mX(Y) - mY(X), \qquad \text{q.o. } m \in M.$$

Siano $X_1, ..., X_c$ campi vettoriali localmente lipschitziani su M tali da generare una distribuzione $c-$dimensionale $\mathcal{D}$ su qualche aperto U di M, cioè tali che

$$\mathcal{D}(m) = Span\{mX_1, ..., mX_c\}, \qquad \forall\, m \in U,$$

allora $\mathcal{D}$ è involutiva quasi ovunque se e solo se esistono delle funzioni, c_{ij}^k con $k = 1, ..., c$, localmente limitate e univocamente determinate tali che

$$m[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{c} c_{ij}^k(m) mX_k, \qquad \text{q.o. } m \in U,\ i,\ j \in \{1, ..., c\}.$$

Infatti: se $\mathcal{D}$ è involutiva quasi ovunque allora $m[X_i, X_j] \in \mathcal{D}(m)$ per quasi ogni $m \in U$ e per ogni $i, j \in \{1, ..., c\}$. Essendo $\mathcal{D}$ generata dai campi vettoriali $X_1, ..., X_c$ allora $m[X_i, X_j]$ può essere scritto come una combinazione lineare dei coefficienti $c_{ij}^k(m)$ e dei campi vettoriali X_k, con $k = 1, ..., c$. Si noti che le $m \mapsto c_{ij}^k(m)$ non sono in generale lipschitziane ma solo localmente limitate grazie al teorema di Rademacher, inoltre i coefficienti $c_{ij}^k(m)$ sono univocamente determinati perchè i campi vettoriali sono linearmente indipendenti.
Viceversa: se esistono delle funzioni localmente limitate $m \mapsto c_{ij}^k(m)$, con $k = 1, ..., c$ e tali che

$$m[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{c} c_{ij}^k(m) mX_k, \qquad \text{q.o. } m \in U,\ i,\ j \in \{1, ..., c\},$$

allora essendo $\mathcal{D}$ generata da $X_1, ..., X_c$ possiamo concludere che $m[X_i, X_j]$ appartiene a $\mathcal{D}(m)$ per quasi ogni $m \in U$, cioè che la distribuzione $\mathcal{D}$ è involutiva quasi ovunque.

2.14 Varietà integrali

Siano M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^{1,1}$, (N,ψ) una sottovarietà di M e $\mathcal{D}$ una distribuzione su M.
Una sottovarietà (N,ψ) di M si dice *varietà integrale* di $\mathcal{D}$ se

$$d_n\psi(T_nN) = \mathcal{D}\big(\psi(n)\big), \qquad \forall\, n \in N.$$

Se anzichè considerare una generica ψ consideriamo l'applicazione identica allora (N, id) è una varietà integrale di $\mathcal{D}$ se

$$T_nN = \mathcal{D}(n), \qquad \forall\, n \in N.$$

Capitolo 3

Il teorema di Frobenius

3.1 Il teorema di Frobenius classico

Teorema 3.1. *Siano d, c due interi positivi con $c \leq d$ e sia $\mathcal{D}$ una distribuzione $c-$dimensionale, di classe $\mathcal{C}^\infty$ ed involutiva su una varietà differenziabile M di classe $\mathcal{C}^\infty$ e di dimensione d.*
Allora per ogni $m \in M$ esiste una carta (U, φ) con $\varphi(m) = 0$ e coordinate locali di classe $\mathcal{C}^\infty$ $(x_1, ..., x_d)$ tali che gli insiemi di equazioni

$$x_i = costante, \qquad i = c+1, ..., d, \tag{3.1}$$

sono varietà integrali di $\mathcal{D}$. Chiameremo slice *tali insiemi.*
Inoltre se (N, ψ) è una varietà integrale connessa di $\mathcal{D}$ tale che $\psi(N) \subset U$, allora $\psi(N)$ è contenuta in una di queste slices.

Quanto segue è una trattazione dettagliata ed ampliata, della dimostrazione riportata in [W].

Dimostrazione. Procediamo per induzione su c.

Il caso $c = 1$ In questo caso il teorema è una conseguenza diretta del teorema di rettificabilità dei campi vettoriali per cui rimandiamo al capitolo 4.

Il caso $c > 1$ Supponiamo vero il teorema per $c - 1$.
Se $\mathcal{D}$ è una distribuzione $c-$dimensionale, involutiva e di classe $\mathcal{C}^\infty$ su M, allora esistono c campi vettoriali di classe $\mathcal{C}^\infty$, diciamoli $X_1, ..., X_c$, tali che preso $m \in M$ essi generano $\mathcal{D}$ in un intorno $\widetilde{V}$ di m.
Dal teorema di rettificabilità dei campi vettoriali (vedi paragrafo 4.2) esiste una carta (V, τ) con $\tau(m) = 0$, $m \in V \subset \widetilde{V}$ e coordinate locali di classe $\mathcal{C}^\infty$, che chiameremo $(y_1, ..., y_d)$, tali che

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y_1}, \qquad \text{su } V. \tag{3.2}$$

Su V definiamo i nuovi campi vettoriali:

$$\begin{aligned} &Y_1 = X_1, \\ &Y_i = X_i - X_i(y_1)X_1, \qquad i = 2, ..., c. \end{aligned} \tag{3.3}$$

I campi vettoriali $Y_1, ..., Y_c$ sono indipendenti, di classe $\mathcal{C}^\infty$ e generano $\mathcal{D}$ su V.
In V sia S la slice $\{y_1 = 0\}$.
Iniziamo con l'osservare che da (3.2) e (3.3) segue

$$Y_i(y_1) = 0, \qquad i = 2, ..., c. \tag{3.4}$$

Infatti

$$\begin{aligned} Y_i(y_1) &= X_i(y_1) - X_i(y_1)X_1(y_1) = \\ &= X_i(y_1)\big(1 - X_1(y_1)\big) = \\ &= X_i(y_1)\left(1 - \frac{\partial}{\partial y_1}y_1\right) = \\ &= 0. \end{aligned}$$

In particolare l'equazione (3.4) significa che i campi vettoriali $Y_2, ..., Y_c$ sono tangenti ad S.
Sia

$$\theta : S \hookrightarrow V$$

la mappa inclusione.
La relazione

$$d_q\theta(Z_i) = \theta(q)Y_i, \qquad \forall\, q \in S, \qquad i = 2, ..., c, \tag{3.5}$$

individua perciò $c-1$ campi vettoriali Z_i su S che risultano di classe $\mathcal{C}^\infty$ e linearmente indipendenti in ogni punto. I campi $Z_2, ..., Z_c$ generano una distribuzione di dimensione $c-1$ su S che chiameremo $\mathcal{D}'$.
Il prossimo passo sarà quello di dimostrare l'involutività di $\mathcal{D}'$.
Dato che la distribuzione generata dai campi vettoriali $Y_1, ..., Y_c$ è involutiva per ipotesi, allora possiamo dire che esistono delle funzioni c_{ij}^k, $k = 1, ..., c$, di classe $\mathcal{C}^\infty$ tali che

$$[Y_i, Y_j] = \sum_{k=1}^{c} c_{ij}^k Y_k, \qquad \text{su } V, \qquad i,\ j \in \{1, ..., c\}. \tag{3.6}$$

Mostriamo ora che per ogni $i,\ j \in \{2, ..., c\}$ si ha $c_{ij}^1 \equiv 0$.
Da (3.6), (3.4), (3.3) e (3.2) segue

$$[Y_i, Y_j](y_1) = c_{ij}^1, \qquad i,\ j \in \{2, ..., c\}.$$

Infatti

$$\begin{aligned}[][Y_i, Y_j](y_1) &= \sum_{k=1}^{c} c_{ij}^k Y_k(y_1) = \\ &= c_{ij}^1 Y_1(y_1) = \\ &= c_{ij}^1 \frac{\partial}{\partial y_1} y_1 = \\ &= c_{ij}^1.\end{aligned}$$

D'altra parte da (3.4) segue

$$\begin{aligned}[][Y_i, Y_j](y_1) &= Y_i\big(Y_j(y_1)\big) - Y_j\big(Y_i(y_1)\big) = \\ &= 0,\end{aligned} \qquad i,\ j \in \{2, ..., c\},$$

quindi

$$c_{ij}^1 \equiv 0, \qquad i,\ j \in \{2, ..., c\}.$$

Di conseguenza (3.6) diventa

$$[Y_i, Y_j] = \sum_{k=2}^{c} c_{ij}^k Y_k, \qquad i,\ j \in \{2, ..., c\}. \tag{3.7}$$

Vogliamo ora provare che:

$$d_q\theta\bigg([Z_i, Z_j]\bigg) = \theta(q)[Y_i, Y_j], \qquad \forall\, q \in S, \qquad i,\ j \in \{2, ..., c\}.$$

Pertanto siano $i,\ j \in \{2, ..., c\}$ fissati e q un punto qualsiasi in S

$$\begin{aligned} d_q\theta\bigg([Z_i, Z_j]\bigg) &= d_q\theta\bigg(Z_i(Z_j) - Z_j(Z_i)\bigg) = \\ &= d_q\theta\bigg(Z_i(Z_j)\bigg) - d_q\theta\bigg(Z_j(Z_i)\bigg) = \\ &= \theta(q)Y_i(Y_j) - \theta(q)Y_j(Y_i) = \\ &= \theta(q)[Y_i, Y_j].\end{aligned}$$

Da quanto appena detto, da (3.7) e da (3.5) possiamo concludere che esistono delle funzioni $c_{ij}^k|_S$, $k = 2, ..., c$, di classe $\mathcal{C}^\infty$ tali che

$$[Z_i, Z_j] = \sum_{k=2}^{c} c_{ij}^k\big|_S Z_k, \qquad i,\ j \in \{2, ..., c\}.$$

Quindi abbiamo dimostrato che la distribuzione $\mathcal{D}'$ è involutiva.
Per l'ipotesi induttiva possiamo affermare che esiste un sistema di coordinate locali di classe $\mathcal{C}^\infty$, diciamole $(w_2, ..., w_d)$, definito in qualche

intorno di m in S con $w_i(m) = 0$, per ogni $i = 2, ..., d$, e tale che le slices definite dalle equazioni $w_i = \textit{costante}$, per $i = c+1, ..., d$, sono varietà integrali della distribuzione $\mathcal{D}'$.
Sia π la proiezione

$$(u_1, ..., u_d) \mapsto \pi(u_1, ..., u_d) = (0, u_2, ..., u_d).$$

Consideriamo le funzioni così definite:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1, \\ x_j &= w_j \circ \pi, \qquad j = 2, ..., d. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Le funzioni (3.8) sono definite in qualche intorno U di m e tutte si annullano in m, quindi una volta posto $\varphi = (x_1, ..., x_d)$ riusciamo a costruire una carta (U, φ), con $\varphi(m) = 0$ e coordinate locali di classe $\mathcal{C}^\infty$ $(x_1, ..., x_d)$.
Il prossimo passo sarà quello di provare che le slices definite dalle equazioni $x_i = \textit{costante}$, per $i = c+1, ..., d$, sono varietà integrali di $\mathcal{D}$; per fare ciò mostriamo che

$$Y_i(x_{c+r}) \equiv 0, \qquad \text{su } U, \qquad \begin{aligned} i &= 1, ..., c, \\ r &= 1, ..., d-c. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Infatti in tal caso

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_c}$$

formano una base di $\mathcal{D}$ per ogni punto di U, quindi le slices definite dalle equazioni $x_i = \textit{costante}$, per $i = c+1, ..., d$, sono varietà integrali di $\mathcal{D}$.
Quindi per arrivare alla conclusione non resta che provare (3.9).
Iniziamo dal caso $i = 1$.
Da (3.2), (3.3) e (3.8) abbiamo

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad \text{su } U,$$

quindi

$$\begin{aligned} Y_1(x_{c+r}) &= \frac{\partial}{\partial x_1} x_{c+r} = \\ &= \delta_{c+r,1}, \end{aligned} \qquad r = 1, ..., d-c,$$

(vedi Appendice A per la definizione di $\delta_{c+r,1}$).
Siccome $c \geq 2$ ed $r = 1, ..., d-c$ allora

$$Y_1(x_{c+r}) \equiv 0, \qquad \text{su } U, \qquad r = 1, ..., d-c. \tag{3.10}$$

Questo dimostra la (3.9) nel caso $i = 1$.
Da (3.10) possiamo dedurre che

$$\begin{aligned}[Y_1, Y_i](x_{c+r}) &= Y_1\big(Y_i(x_{c+r})\big) - Y_i\big(Y_1(x_{c+r})\big) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}\big(Y_i(x_{c+r})\big).\end{aligned} \qquad \begin{aligned} &i = 2, ..., c, \\ &r = 1, ..., d - c.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Dall'involutività di $\mathcal{D}$ e da (3.7) segue che esistono delle funzioni c_{1i}^k di classe $\mathcal{C}^\infty$, per $k = 2, ..., c$, tali che

$$[Y_1, Y_i](x_{c+r}) = \sum_{k=2}^{c} c_{1i}^k Y_k(x_{c+r}), \qquad \begin{aligned} &i = 2, ..., c, \\ &r = 1, ..., d - c.\end{aligned} \tag{3.12}$$

La relazione (3.11) assieme alla (3.12) implica

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Bigg(Y_i(x_{c+r})\Bigg) = \sum_{k=2}^{c} c_{1i}^k Y_k(x_{c+r}), \qquad \begin{aligned} &i = 2, ..., c, \\ &r = 1, ..., d - c.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Fissiamo $\overline{x}_2, ..., \overline{x}_d$ e consideriamo

$$\overline{S} = \Bigg\{x_1, ..., x_d \in U : \ x_2 = \overline{x}_2, ..., x_d = \overline{x}_d\Bigg\}.$$

$\overline{S}$ risulta trasversale a S, di conseguenza $\overline{S}$ ed S si intersecano in un unico punto: lo 0.
Si noti che lungo $\overline{S}$ le $Y_i(x_{c+r})$ sono funzioni della sola variabile x_1.
Operiamo ora una momentanea semplificazione della notazione, scrivendo, per un fissato $\overline{r} \in \{1, ..., d - c\}$

$$\begin{aligned} &x_1 = t, \\ &tY_i(x_{c+\overline{r}}) = f_i(t), \qquad \forall\, t \in \overline{S}, \qquad i = 2, ..., c,\end{aligned}$$

(dove $f_i(t)$ ha l'usuale significato di f_i calcolata in t).
Quindi (3.13) diventa

$$\dot{f}_i(t) = \sum_{k=2}^{c} c_{1i}^k(t) f_k(t), \qquad \forall\, t \in \overline{S}, \qquad i = 2, ..., c. \tag{3.14}$$

In questo modo (3.14) diviene un sistema di $c - 1$ equazioni differenziali omogenee, del primo ordine nella sola variabile t.
Consideriamo il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{f}_i(t) = \displaystyle\sum_{k=2}^{c} c_{1i}^k(t) f_k(t), \qquad \forall\, t \in \overline{S}, \qquad i = 2, ..., c, \\ f(0) = f_0. \end{cases} \tag{3.15}$$

Da risultati classici sulle equazioni differenziali sappiamo che tale sistema ammette una ed una sola soluzione.
Se mostriamo che $f_0 = 0$ allora la funzione identicamente nulla certamente risolve il problema di Cauchy (3.15).
Dunque non ci rimane che provare che $f_0 = 0$.
Da (3.5) e (3.8) abbiamo subito che:

$$0Y_i(x_{c+r}) = 0Z_i(w_{c+r}), \qquad \begin{array}{l} i = 2, ..., c, \\ r = 1, ..., d-c. \end{array}$$

Siccome le varietà integrali di $\mathcal{D}'$ hanno equazione $w_j = \textit{costante}$, per $j = c+1, ..., d$, allora:

$$0Z_i(w_{c+r}) = 0, \qquad \begin{array}{l} i = 2, ..., c, \\ r = 1, ..., d-c. \end{array}$$

Dunque

$$\begin{aligned} f_0 &= f(0) = \\ &= \big(f_2(0), ..., f_d(0)\big) = \\ &= \big(0Y_2(x_{c+r}), ..., 0Y_d(x_{c+r})\big) = \\ &= (0, ..., 0) \end{aligned} \qquad r = 1, ..., d-c. \tag{3.16}$$

Da (3.16) assieme a quanto più sopra ricordato abbiamo che la funzione identicamente nulla risolve certamente il problema di Cauchy (3.15).
Dunque possiamo scrivere

$$f_i(t) = 0, \qquad \forall\, t \in \overline{S}; \qquad i = 2, ..., c. \tag{3.17}$$

Quindi da (3.10) e (3.17) possiamo dedurre (3.9), di conseguenza abbiamo concluso la prima parte della dimostrazione.

Per concludere la dimostrazione rimane da provare la seconda parte del teorema.
Sia (N, ψ) una varietà integrale connessa di $\mathcal{D}$ in U. Consideriamo la proiezione pr da R^d in $\mathbb{R}^{d-c}$ che ad $a = (a_1, ..., a_d) \in \mathbb{R}^d$ associa $\mathrm{pr}(a) = (a_{c+1}, ..., a_d)$. Se $x_1, ..., x_d$ sono le coordinate locali della carta (U, φ), definita come sopra, allora

$$d_n(\mathrm{pr} \circ \varphi \circ \psi) \equiv 0, \qquad \text{q.o } n \in N.$$

Dato che N è connessa allora $\mathrm{pr} \circ \varphi = \textit{costante}$ quasi ovunque su N. Per continuità possiamo estendere quest'uguaglianza su tutto N, quindi N è contenuto in una slice di equazioni (3.1).
Questo conclude la dimostrazione. □

Il teorema appena dimostrato può essere scritto anche nella seguente forma.

Teorema 3.2. *Siano M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$ $d-$dimensionale e $\mathcal{D}$ una distribuzione di classe $\mathcal{C}^\infty$ su M.*
$\mathcal{D}$ è una distribuzione di classe $\mathcal{C}^\infty$, involutiva e di dimensione $c \leq d$ se e solo se per ogni $m \in M$ esiste una carta (U, φ) con $\varphi(m) = 0$ e coordinate locali di classe $\mathcal{C}^\infty$ $x_1, ..., x_d$ tali che gli insiemi di equazioni

$$x_i = costante, \qquad i = c+1, ..., d,$$

sono varietà integrali di $\mathcal{D}$.

Dimostrazione. Dato che stiamo operando in carte locali possiamo supporre, senza perdita di generalità, di identificare M con $\mathbb{R}^d$.
Per ogni $m \in M$ consideriamo, in un intorno di m, un sistema di coordinate locali di classe $\mathcal{C}^\infty$ $(x_1, ..., x_d)$ tali che m abbia coordinata nulla.
Fissiamo $\overline{x}_{c+1}, ..., \overline{x}_d$ e consideriamo la slice

$$H = \left\{ x_1, ..., x_d : \ x_{c+1} = \overline{x}_{c+1}, ..., x_d = \overline{x}_d \right\}.$$

Di conseguenza a ciò sia H che $T_m H$ hanno dimensione c, inoltre ogni vettore $v = (v^1, ..., v^d) \in T_m H$ nelle coordinate $x_1, ..., x_d$ si scrive

$$v = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^c \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

cioè $v^{c+1} = 0, ..., v^d = 0$.
Dato che H è una varietà integrale di $\mathcal{D}$ allora

$$T_m H = \mathcal{D}(m), \qquad \forall\, m \in H. \tag{3.18}$$

Dunque esistono c campi vettoriali di classe $\mathcal{C}^\infty$ su H, chiamiamoli $X_1, ..., X_c$, tali che

$$\mathcal{D}(m) = Span\left\{ mX_1, ..., mX_d \right\}, \qquad \forall\, m \in H.$$

Fissiamo $i,\ j \in \{1, ..., c\}$ e calcoliamo $m[X_i, X_j]$

$$
\begin{aligned}
m[X_i, X_j] &= m\left[\begin{pmatrix} X_i^1 \\ \vdots \\ X_i^c \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_j^1 \\ \vdots \\ X_j^c \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \\
&= \sum_{l,k=1}^{d} \left(mX_i^l \frac{\partial X_j^k}{\partial x_l}\bigg|_m - mX_j^l \frac{\partial X_i^k}{\partial x_l}\bigg|_m \right) \frac{\partial}{\partial x_k}\bigg|_m = \\
&= \sum_{l,k=1}^{c} \left(mX_i^l \frac{\partial X_j^k}{\partial x_l}\bigg|_m - mX_j^l \frac{\partial X_i^k}{\partial x_l}\bigg|_m \right) \frac{\partial}{\partial x_k}\bigg|_m = \\
&= \begin{pmatrix} m\left[\begin{pmatrix} X_i^1 \\ \vdots \\ X_i^c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_j^1 \\ \vdots \\ X_j^c \end{pmatrix}\right] \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Dunque $m[X_i, X_j] \in T_m H$ per ogni $i,\ j \in \{1, ..., c\}$ e per ogni $m \in H$ inoltre da (3.18) segue che

$$
m[X_i, X_j] \in \mathcal{D}(m), \qquad \forall\, m \in H, \qquad i,\ j \in \{1, ..., c\}.
$$

Quindi $\mathcal{D}$ è una distribuzione involutiva, di dimensione c e di classe $\mathcal{C}^\infty$. □

3.2 Il teorema di Frobenius-Simić

Teorema 3.3. *Siano d, c due interi positivi con $c \leq d$ e sia $\mathcal{D}$ una distribuzione $c-$dimensionale, lipschitziana ed involutiva quasi ovunque su una varietà M di classe $\mathcal{C}^\infty$ e di dimensione d.*
Allora per ogni $m \in M$ esiste una carta (U, φ) con $\varphi(m) = 0$ e coordinate locali lipschitziane $(x_1, ..., x_d)$ tali che gli insiemi di equazione

$$x_i = costante, \qquad i = c+1, ..., d, \tag{3.19}$$

sono varietà integrali di $\mathcal{D}$. Chiameremo slice *tali insiemi.*
Inoltre se (N, ψ) è una varietà integrale connessa di $\mathcal{D}$ tale che $\psi(N) \subset U$ allora, $\psi(N)$ è contenuta in una di queste slices.

La dimostrazione di questo teorema compare nell'articolo di Slobodan Simić dal titolo *"Lipschitz Distributions and Anosov Flows"*. La dimostrazione piuttosto basata sulla versione del teorema del caso classico riportata in [W], contiene un punto in cui a nostro avviso è necessaria qualche integrazione esplicita rispetto alla quale cogliamo qui l'occasione per fornire alcuni dettagli omessi nella dimostrazione originale.

Dimostrazione. Procediamo per induzione su c.

Il caso $c = 1$ In questo caso il teorema è una conseguenza diretta del teorema di rettificabilità dei campi vettoriali per cui rimandiamo al capitolo 4.

Il caso $c > 1$ Supponiamo vero il teorema per $c-1$.
Se $\mathcal{D}$ è una distribuzione di dimensione c lipschitziana ed involutiva quasi ovunque su M, allora esistono c campi vettoriali lipschitziani, diciamoli $X_1, ..., X_c$, tali che preso $m \in M$ essi generano $\mathcal{D}$ in un intorno $\widetilde{V}$ di m. Sia (V, τ) una carta tale che $\tau(m) = 0$, $m \in V \subset \widetilde{V}$ e coordinate locali $(y_1, ..., y_d)$ di classe $\mathcal{C}^\infty$.
Senza perdita di generalità possiamo assumere

$$X_1(y_1) \geq 1, \qquad \text{su } V. \tag{3.20}$$

Definiamo su V i nuovi campi vettoriali:

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1, \\ Y_i &= X_i - \frac{X_i(y_1)}{X_1(y_1)} X_1, \qquad i = 2, ..., c. \end{aligned} \tag{3.21}$$

I campi vettoriali $Y_1, ..., Y_c$ sono indipendenti, lipschitziani e generano $\mathcal{D}$ su V.
Sia S la slice $\{y_1 = 0\}$.
Iniziamo con l'osservare che da (3.21) e (3.20) segue

$$Y_i(y_1) = 0, \qquad i = 2, ..., c. \tag{3.22}$$

Infatti

$$\begin{aligned} Y_i(y_1) &= X_i(y_1) - \frac{X_i(y_1)}{X_1(y_1)} X_1(y_1) = \\ &= X_i(y_1) - X_i(y_1) = \\ &= 0. \end{aligned}$$

In particolare l'equazione (3.22) significa che i campi vettoriali $Y_2, ..., Y_c$ sono tangenti ad S.
Sia

$$\theta : S \hookrightarrow V$$

la mappa inclusione.
La relazione

$$d_q\theta(Z_i) = \theta(q)Y_i, \qquad \forall\, q \in S, \qquad i = 2, ..., c, \tag{3.23}$$

individua perciò $c-1$ campi vettoriali Z_i su S che risultano lipschitziani e linearmente indipendenti in ogni punto. I campi $Z_2, ..., Z_c$ generano una distribuzione di dimensione $c-1$ su S che chiameremo $\mathcal{D}'$.
Il prossimo passo sarà quello di dimostrare che $\mathcal{D}'$ è involutiva quasi ovunque.
Dato che la distribuzione generata dai campi vettoriali $Y_1, ..., Y_c$ è involutiva quasi ovunque per ipotesi, allora possiamo dire che esistono delle funzioni c_{ij}^k, $k = 1, ..., c$, localmente limitate tali che

$$[Y_i, Y_j] = \sum_{k=1}^{c} c_{ij}^k Y_k, \qquad \text{q.o. su } V, \qquad i,\ j \in \{1, ..., c\}. \tag{3.24}$$

Mostriamo ora che per ogni $i,\ j \in \{2, ..., c\}$ si ha $c_{ij}^1 \equiv 0$
Da (3.24) e (3.22) segue

$$[Y_i, Y_j](y_1) = c_{ij}^1 Y_1(y_1), \qquad \text{q.o. su } V, \qquad i,\ j \in \{2, ..., c\}.$$

Infatti

$$\begin{aligned} [Y_i, Y_j](y_1) &= \sum_{k=1}^{c} c_{ij}^k Y_k(y_1) = \\ &= c_{ij}^1 Y_1(y_1), \end{aligned} \qquad \text{q.o. su } V.$$

D'altra parte da (3.22) segue

$$\begin{aligned} [Y_i, Y_j](y_1) &= Y_i\big(Y_j(y_1)\big) - Y_j\big(Y_i(y_1)\big) = \\ &= 0, \end{aligned} \qquad i,\ j \in \{2, ..., c\},$$

quindi

$$c_{ij}^1 \equiv 0, \qquad i,\ j \in \{2, ..., c\}.$$

Di conseguenza (3.24) diventa

$$[Y_i, Y_j] = \sum_{k=2}^{c} c_{ij}^k Y_k, \qquad \text{q.o. su } V, \qquad i,\ j \in \{2, ..., c\}. \tag{3.25}$$

Vogliamo ora provare che

$$d_q\theta\Big([Z_i, Z_j]\Big) = \theta(q)[Y_i, Y_j], \qquad \forall\, q \in S, \qquad i,\ j \in \{2, ..., c\}.$$

Pertanto siano $i,\ j \in \{2, ..., c\}$ fissati e q un punto qualsiasi in S

$$\begin{aligned} d_q\theta\Big([Z_i, Z_j]\Big) &= d_q\theta\Big(Z_i(Z_j) - Z_j(Z_i)\Big) = \\ &= d_q\theta\Big(Z_i(Z_j)\Big) - d_q\theta\Big(Z_j(Z_i)\Big) = \\ &= \theta(q)Y_i(Y_j) - \theta(q)Y_j(Y_i) = \\ &= \theta(q)[Y_i, Y_j]. \end{aligned}$$

Da quanto appena detto, da (3.25) e da (3.23) possiamo concludere che esistono delle funzioni $c_{ij}^k|_S$, $k = 2, ..., c$, localmente limitate tali che rispetto alla misura $(d-1)-$dimensionale secondo Lebesgue si ha che

$$[Z_i, Z_j] = \sum_{k=2}^{c} c_{ij}^k\big|_S Z_k, \qquad \text{q.o. su } \Omega, \qquad i,\ j \in \{2, ..., c\},$$

dove con Ω indichiamo il sottoinsieme di S, di misura $(d-1)-$dimensionale piena secondo Lebesgue in cui (3.25) è definita.
Quindi abbiamo dimostrato che la distribuzione $\mathcal{D}'$ è involutiva quasi ovunque.
Per l'ipotesi induttiva possiamo affermare che esiste un sistema di coordinate locali lipschitziane, diciamole $(w_2, ..., w_d)$, definito in un intorno U di m in S con $w_i(m) = 0$, per ogni $i = 2, ..., d$, e tale che le slices di equazioni $w_i = costante$, per $i = c+1, ..., d$, sono varietà integrali della distribuzione $\mathcal{D}'$.
Sia $\cdot \exp(tY_1)$ il flusso locale al tempo t relativo al campo vettoriale Y_1 in U. Esiste un intorno di m in V, che per non appesantire troppo la notazione chiameremo ancora U, tale che la proiezione $\pi : U \to S \cap U$ lungo le linee di flusso $\cdot \exp(tY_1)$ è ben definita e lipschitziana.
Definiamo ora le mappe da U in $\mathbb{R}$ come segue:

$$\begin{aligned} &x_1(q) = t, && \text{se e solo se } q\exp(-tY_1) \in U \cap S; \\ &x_j = w_j \circ \pi, && j = 2, ..., d; \end{aligned} \tag{3.26}$$

Da quanto fin ora detto risulta che le funzioni definite in (3.26) sono lipschitziane.

Pertanto, posto $\varphi = (x_1, ..., x_d)$, riusciamo ad esibire una carta (U, φ) con $\varphi(m) = 0$ e coordinate locali lipschitziane $(x_1, ..., x_d)$.

Osserviamo che se $q \in S \cap U$ e $t_1,\ t_2 \in \mathbb{R}$, con $t_1,\ t_2$ tali che posto

$$q_1 = q \exp(t_1 Y_1),$$
$$q_2 = q \exp(t_2 Y_1);$$

allora q_1 e q_2 rappresentano gli evoluti in U del punto q rispettivamente ai tempi t_1 e t_2.
Dunque lungo una stessa linea di flusso la proiezione π è costante cioè

$$\pi(q_1) = q = \pi(q_2).$$

Allora anche le x_j, $j = 2, ..., d$ sono costanti quindi possiamo concludere che il campo vettoriale Y_1 calcolato lungo $x_2, ..., x_d$ e sui punti che appartengono ad una stessa linea di flusso è una costante. Anzi dato che $\varphi(m) = 0$ allora per $j = 2, ..., d$, questa costante è lo 0, cioè

$$Y_1(x_j) = 0, \qquad j = 2, ..., d. \tag{3.27}$$

Quindi

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad \text{su } U.$$

Il prossimo passo sarà quello di provare che le slices definite dalle equazioni $x_i = \textit{costante}$, per $i = c+1, ..., d$, sono varietà integrali di $\mathcal{D}$; per fare ciò mostriamo che

$$Y_i(x_{c+r}) \equiv 0, \qquad \text{q.o. su } U, \qquad \begin{array}{l} i = 1, ..., c; \\ r = 1, ..., d-c. \end{array} \tag{3.28}$$

Osserviamo che per $i = 1$ la (3.28) è già stata dimostrata in (3.27).
Non resta che procedere con il caso $i = 2, ..., c$.
Per iniziare approssimiamo le coordinate locali lipschitziane x_{c+r} con funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ per ogni $r = 1, ..., d-c$.
Dato che stiamo operando in carte locali possiamo assumere, senza perdita di generalità, di lavorare in $\mathbb{R}^d$, dove abbiamo a disposizione i mollificatori standard (vedi Appendice C per la definizione dei mollificatori standard).
Siano η_ε i mollificatori standard.
Definiamo le funzioni

$$x^\varepsilon_{c+r} = x_{c+r} * \eta_\varepsilon, \qquad r = 1, ..., d-c. \tag{3.29}$$

Dalle proprietà dei mollificatori e della convoluzione riportate in Appendice C si ha che

(i) Ogni x^ε_{c+r} è di classe $\mathcal{C}^\infty$, $r = 1, ..., d - c$.

(ii) Per $\varepsilon \to 0$, allora x^ε_{c+r} converge uniformemente a x_{c+r} sui sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}^d$, $r = 1, ..., d - c$.

(iii) Per $\varepsilon \to 0$, allora $D^\alpha x^\varepsilon_{c+r}$ converge a $D^\alpha x_{c+r}$ in L^1_{loc} e puntualmente quasi ovunque, per ogni multiindice α, $|\alpha| = 1$, $r = 1, ..., d - c$.

Da (3.27), (3.29) e dalle proprietà della convoluzione riportate in Appendice C segue che per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo si ha

$$Y_1(x^\varepsilon_{c+r}) = 0, \qquad r = 1, ..., d - c. \tag{3.30}$$

Infatti

$$\begin{aligned} Y_1(x^\varepsilon_{c+r}) &= Y_1(x_{c+r} * \eta_\varepsilon) = \\ &= \big(Y_1(x_{c+r})\big) * \eta_\varepsilon = \\ &= 0, \end{aligned}$$

per ogni $r = 1, ..., d - c$ ed $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo.
Da (3.30)

$$\begin{aligned} [Y_1, Y_j](x^\varepsilon_{c+r}) &= Y_1\big(Y_j(x^\varepsilon_{c+r})\big) - Y_j\big(Y_1(x^\varepsilon_i)\big) = \\ &= Y_1\big(Y_j(x^\varepsilon_{c+r})\big), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\text{q.o. su } U, \\ &j = 2, ..., c, \\ &r = 1, ..., d - c, \end{aligned} \tag{3.31}$$

Dunque da (3.31) e (3.25) si ha che

$$Y_1\big(Y_j(x^\varepsilon_{c+r})\big) = \sum_{k=2}^{c} c^k_{1j} Y_k(x^\varepsilon_{c+r}), \qquad \text{q.o. su } U, \qquad \begin{aligned} &j = 2, ..., c, \\ &r = 1, ..., d - c. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Dato che Y_1 è un campo vettoriale lipschitziano allora la foliazione di U lungo le linee del flusso al tempo t, $\cdot \exp(tY_1)$, è assolutamente continua e ciò implica che per quasi ogni $q \in S$, rispetto alla misura $(d-1)-$dimensionale secondo Lebesgue su S, le linee del flusso $q \exp(tY_1)$ intersecano ogni insieme di misura $d-$dimensionale nulla secondo Lebesgue lungo un insieme di misura $1-$dimensionale nulla secondo Lebesgue. Dunque integrando l'equazione (3.32) lungo $q \exp(sY_1)$, $0 \leq s \leq t$, otteniamo

$$\begin{aligned} &\big(q \exp(tY_1)\big) Y_j(x^\varepsilon_{c+r}) - q Y_j(x^\varepsilon_{c+r}) = \\ &= \int_0^t \sum_{k=2}^{c} c^k_{1j}\big(q \exp(sY_1)\big)\big(q \exp(sY_1)\big) Y_k(x^\varepsilon_{c+r}) ds, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\text{per q.o. } q \in S, \\ &\text{per q.o. } t \in J(q), \\ &j = 2, ..., c, \\ &r = 1, ..., d - c, \end{aligned} \tag{3.33}$$

dove $J(q)$ è un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ dipendente da q.
Come ricordato in **(i)** le coordinate locali x^ε_{c+r} sono di classe $\mathcal{C}^\infty$, per

$r = 1, ..., d-c$, quindi le funzioni $Y_j(x^\varepsilon_{c+r})$, $j = 2, ..., c$, sono lipschitziane e di conseguenza anche continue.
Dunque se in (3.33) passiamo al limite per $\varepsilon \to 0$, dalle proprietà **(ii)** e **(iii)** si ha che

$$\begin{aligned}&\big(q\exp(tY_1)\big)Y_j(x_{c+r}) - qY_j(x_{c+r}) = && \text{per q.o. } q \in S,\\ &= \int_0^t \sum_{k=2}^{c} c^k_{1j}\big(q\exp(sY_1)\big)\big(q\exp(sY_1)\big)Y_k(x_{c+r})ds, && \text{per q.o. } t \in J(q),\ j = 2, ..., c,\ r = 1, ..., d-c.\end{aligned} \tag{3.34}$$

Da (3.23) e (3.26) abbiamo subito che

$$qY_i(x_{c+r}) = qZ_i(w_{c+r}), \qquad \text{q.o. } q \in S, \qquad \begin{array}{l} i = 2, ..., c, \\ r = 1, ..., d-c. \end{array}$$

Siccome le varietà integrali di $\mathcal{D}'$ hanno equazione $w_j = costante$, per $j = c+1, ..., d$, allora

$$qZ_i(w_{c+r}) = 0, \qquad \text{q.o. } q \in S, \qquad \begin{array}{l} i = 2, ..., c, \\ r = 1, ..., d-c. \end{array}$$

Dunque

$$qY_i(x_{c+r}) = 0, \qquad \text{q.o. } q \in S, \qquad \begin{array}{l} i = 2, ..., c, \\ r = 1, ..., d-c. \end{array}$$

Dunque fissato q in S allora (3.34) è soddisfatta per quasi ogni $t \in J(q)$. Inoltre il membro di destra di (3.34) è una funzione continua in t; quindi fissato $r = 1, ..., d-c$ le funzioni $t \mapsto \big(q\exp(tY_1)\big)Y_j(x_{c+r})$ sono continue quasi ovunque e soddisfano i seguenti $(c-1) \times (c-1)$ sistemi omogenei di equazioni differenziali lineari (lungo il flusso di q) con coefficienti in L^∞

$$Y_j(x_{c+r}) = \int_0^t \sum_{k=2}^{c} c^k_{1j} Y_k(x_{c+r})ds. \tag{3.35}$$

Per semplificare la notazione operiamo le seguenti posizioni: sia $C(t)$ la matrice dei coefficienti $c^k_{1j}(q\exp(tY_1))$ e sia

$$f(t) = \Big(\big(q\exp(tY_1)\big)Y_2(x_{c+r}), ..., \big(q\exp(tY_1)\big)Y_c(x_{c+r})\Big).$$

Allora (3.35) diventa

$$f(t) = \int_0^t C(s)f(s)ds.$$

Così
$$||f(t)|| \leq \int_0^t ||C(s)|| \cdot ||f(s)||ds.$$
Come ricordato sopra f è continua quasi ovunque e $||C|| \in L^\infty$. Dal lemma di Gronwall, che riportiamo di seguito per completezza, possiamo dedurre che $f(t) = 0$ quasi ovunque.

Lemma di Gronwall. *Sia $z(t)$ una funzione assolutamente continua e non negativa tale che*

$$\begin{aligned} &\dot{z}(t) \leq \xi(t)z(t) + \beta(t), \qquad \textit{per q.o. } t \in [t_0, T], \\ &z(t_0) \leq \gamma, \end{aligned} \tag{3.36}$$

dove ξ e β sono funzioni integrabili e γ è una costante con $\gamma \geq 0$. Allora z soddisfa la condizione

$$z(t) \leq \gamma \exp\left(\int_{t_0}^t \xi(s)ds\right) + \int_{t_0}^t \beta(s) \exp\left(\int_s^t \xi(\sigma)d\sigma\right)ds \qquad \forall\, t \in [t_0, T]. \tag{3.37}$$

Quindi abbiamo ottenuto (3.29).
Rimane da provare solo che le slices di equazioni

$$x_{c+1} = costante, ..., x_d = costante$$

sono le varietà integrali di $\mathcal{D}$.
Sia H una slice determinata da equazioni del tipo

$$x_{c+1} = costante, ..., x_d = costante.$$

Lo spazio tangente ad H, che denoteremo con TH, lo possiamo rappresentare come

$$TH = \bigcap_{l=c+1}^{d} \ker(dx_l|_H).$$

TH definito in questo modo contiene, quasi ovunque, i campi vettoriali $d\theta(Z_2), ..., d\theta(Z_d)$. Dunque

$$T_qH = \mathcal{D}(q), \qquad \text{q.o. su } H.$$

Dato che $\mathcal{D}$ è una distribuzione definita su un compatto, possiamo estendere questa relazione su tutto H. In questo modo H è una varietà integrale di $\mathcal{D}$.
Infine osserviamo che essendo lo spazio tangente alla varietà H una varietà lipschitziana allora H è una varietà di classe $\mathcal{C}^{1,1}$.
Questo completa la prima parte della dimostrazione.

Per concludere la dimostrazione rimane da provare la seconda parte del teorema.
Sia (N, ψ) una varietà integrale connessa di $\mathcal{D}$ in U. Consideriamo la proiezione pr da R^d in $\mathbb{R}^{d-c}$ che ad $a = (a_1, ..., a_d) \in \mathbb{R}^d$ associa $\mathrm{pr}(a) = (a_{c+1}, ..., a_d)$. Se $x_1, ..., x_d$ sono le coordinate locali della carta (U, φ), definita come sopra, allora

$$d_n(\mathrm{pr} \circ \varphi \circ \psi) \equiv 0, \qquad \text{q.o } n \in N.$$

Dato che N è connessa allora $\mathrm{pr} \circ \varphi = \textit{costante}$ quasi ovunque su N. Per continuità possiamo estendere quest'uguaglianza su tutto N, quindi N è contenuto in una slice di equazioni (3.19).
Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Capitolo 4

Il teorema di Frobenius per distribuzioni uno-dimensionali ossia il teorema di rettificabilità

4.1 Il teorema di Frobenius nel caso di distribuzioni uno-dimensionali

Teorema di Frobenius per distribuzioni uno-dimensionali. *Siano M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$ di dimensione d, $\mathcal{D}$ una distribuzione lipschitziana uno-dimensionale su M.*
Allora per ogni $m \in M$ esiste una carta (U, φ) con $\varphi(m) = 0$ e coordinate locali lipschitziane $x_1, ..., x_d$ gli insiemi di equazioni

$$x_i = costante, \qquad i = 2, ..., d$$

sono varietà integrali di $\mathcal{D}$. Chiameremo slice *tali insiemi.*

E' immediato provare che teorema di Frobenius per distribuzioni uno-dimensionali è equivalente al teorema di rettificabilità per campi vettoriali lipschitziani. Riportiamo di seguito la dimostrazione della parte che più ci sarà utile.

Se vale il teorema di rettificabilità per campi vettoriali lipschitziani allora data una distribuzione lipschitziana uno-dimensionale, $\mathcal{D}$ su M, e detto H l'insieme definito dalle equazioni $x_2 = costante, ..., x_d = costante$ allora vale la seguente catena di uguaglianze

$$
\begin{aligned}
T_nH &= \left\{ \lambda \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_n, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \\
&= \left\{ nX \cdot \lambda, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \\
&= Span \left\{ nX \right\} = \\
&= \mathcal{D}(n),
\end{aligned}
$$

per ogni $n \in H$.
Dunque possiamo concludere che esiste una carta con coordinate locali lipschitziane $(x_1, ..., x_d)$ tale che gli insiemi di equazioni

$$x_i = costante, \qquad i = 2, ..., d,$$

sono varietà integrali di $\mathcal{D}$.

4.2 Il teorema di rettificabilià per campi vettoriali lipschitziani

In ambito classico, il teorema di rettificabilità dei campi vettoriali è il seguente.

Teorema *Siano M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$ e di dimensione d, m un punto di M ed X un campo vettoriale di classe almeno $\mathcal{C}^1$ su M tale che $mX \neq 0$. Allora esiste una carta (U, φ) con $m \in M$ e coordinate locali $(x_1, ..., x_d)$ tali che*

$$X|_U = \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_U .$$

Questa versione del teorema non tratta il caso di campi vettoriali lipschitziani. Esiste tuttavia un articolo di Craig Calcaterra ed Axel Boldt dal titolo *"Flow-box Theorem for Lipschitz Vector Fields"* che estende il teorema di rettificabilità dei campi vettoriali al caso di campi vettoriali lipschitziani in ogni spazio di Banach.
Riportiamo di seguito l'enunciato di questo teorema, per la dimostrazione si veda [C-B].

Teorema di rettificabilità per campi vettoriali lipschitziani *Siano M uno spazio di Banach ed $X : M \to M$ una campo vettoriale localmente lipschitziano. Per ogni $m \in M$ tale che $mX \neq 0$ e per ogni $n \neq 0$ in M esiste un intorno aperto U di m, un aperto $N \subset M$ ed un lipeomorfismo $\phi : U \to N$ tale che*

$$\phi_*(X)(w) = n, \qquad \forall\, w \in N.$$

Capitolo 5

Parentesi di Lie e teorema di Frobenius multivoci

In questo capitolo tratteremo un'estensione multivoca delle parentesi di Lie prima definite. La definizione e le proprietà che seguono sono state tratte da [R-S].

Per non confondere i due operatori useremo il simbolo $[\cdot, \cdot]$ per indicare le parentesi di Lie multivoche, mentre per le parentesi di Lie "classiche" continueremo ad utilizzare la notazione $[\cdot, \cdot]$.

5.1 Definizione e proprietà

Siano X ed Y due campi vettoriali localmente lipschitziani su una varietà M. Definiamo le *parentesi di Lie multivoche* come segue:
per ogni $m \in M$ sia

$$m[X, Y] = co\left\{\lim_{s \to +\infty} m_s[X, Y]\right\},$$

dove la successione $\{m_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ soddisfa alle seguenti proprietà:

1. $m_s \in \mathrm{DIFF}(X) \cap \mathrm{DIFF}(Y)$, per ogni s,
2. $\lim_{s \to +\infty} m_s = m$,
3. $\lim_{s \to +\infty} m_s[X, Y]$ esiste.

Dove il simbolo $\mathrm{DIFF}(X)$ denota l'insieme dei punti di M in cui X è differenziabile, mentre per la definizione dell'inviluppo convesso $co\{\lim_{s \to +\infty} m_s[X, Y]\}$ si veda l'Appendice A.
Si osservi che dal teorema di Rademacher riportato al paragrafo 1.10 si ha che

l'insieme $M \setminus \mathrm{DIFF}(X)$ ha misura nulla secondo Lebesgue.

Prima di procedere oltre vediamo alcune proprietà dell'operatore $[\cdot,\cdot]$.

1) Per ogni $m \in M$, si verifica che $m[X,Y]$ è un sottoinsieme convesso (vedi Appendice A), compatto e non vuoto dello spazio tangente $T_m M$.

2) Le parentesi di Lie multivoche sono antisimmetriche, cioè

$$m[X,Y] = -m[Y,X]$$

per ogni $m \in M$. Ciò significa che

$$m[X,Y] = \Big\{ v: \; -v \in m[Y,X] \Big\}.$$

3) Ogni campo vettoriale localmente lipschitziano X soddisfa alla seguente identità

$$m[X,X] = \{0\}, \qquad \forall\, m \in M.$$

Questa identità segue facilmente dalla definizione di parentesi di Lie multivoche in quanto $m[X,X] = 0$, per ogni $m \in \mathrm{DIFF}(X)$.

4) Se $m \in \mathrm{DIFF}(X) \cap \mathrm{DIFF}(Y)$ la parentesi di Lie $m[X,Y]$ non coincide, in generale, con $\big\{m[X,Y]\big\}$, anche se contiene sempre il vettore $m[X,Y]$.

Esempio. Sia $M = \mathbb{R}$ e consideriamo i campi vettoriali:

$$xX = \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{e} \quad xY = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \dfrac{\partial}{\partial x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Per $x = 0$ risulta

$$x[X,Y] = 0, \qquad \text{mentre} \qquad x[X,Y] = \left\{ a\frac{\partial}{\partial x} \; : \; a \in [-1,1] \right\}.$$

5) Per ogni numero naturale $q \geq 1$, diremo che un campo vettoriale X è di classe $\mathcal{C}^{q-1,1}$ se X è di classe $\mathcal{C}^{q-1}$ e la sua derivata di ordine $q-1$ è localmente lipschitziana.

Identità di Jacobi. Se X_1, X_2, X_3 sono tre campi vettoriali di classe $\mathcal{C}^{q-1,1}$, con $q \geq 2$, estendendo l'identità di Jacobi standard lungo la successione $\{m_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ soddisfacente 1., 2. e 3. e dove i campi vettoriali X_1, X_2, X_3 sono due volte differenziabili, si può provare la seguente versione estesa dell'identità di Jacobi

$$m[[X_1,X_2],X_3] + m[[X_3,X_1],X_2] + m[[X_2,X_3],X_1] \supseteq \big\{0\big\}, \quad \forall\, m \in M.$$

5.2 Involutività in senso multivoco

Sia $\mathcal{D}$ una distribuzione localmente lipschitziana su una varietà M.
La distribuzione $\mathcal{D}$ si dice *involutiva in senso multivoco* o *multi-involutiva* se per ogni coppia di campi vettoriali localmente lipschitziani, X ed Y, appartenenti a $\mathcal{D}$ si ha che $m[X, Y] \subseteq \mathcal{D}(m)$ per ogni $m \in M$.

Siano $X_1, ..., X_c$ campi vettoriali localmente lipschitziani su una varietà M tali da generare una distribuzione $c-$dimensionale $\mathcal{D}$ su qualche aperto U di M, cioè tali che

$$\mathcal{D}(m) = Span\{mX_1, ..., mX_c\}, \qquad \forall\, m \in U,$$

allora $\mathcal{D}$ è multi-involutiva se e solo se

$$\forall\, m \in U,\ \forall\, i,\ j \in \{1, ..., c\} \text{ e } \forall\, v \in m[X_i, X_j]$$

esistono dei coefficienti, $c_k^v(m)$ $k = 1, ..., c$, tali che

$$v = \sum_{k=1}^{c} c_k^v(m) m X_k$$

e le funzioni $(m, v) \mapsto c_k^v(m)$ sono localmente limitate.

Infatti: se $\mathcal{D}$ è multi-involutiva su U allora $m[X_i, X_j] \subseteq \mathcal{D}(m)$, per ogni $m \in U$ e per ogni $i,\ j \in \{1, ..., c\}$, dunque essendo $\mathcal{D}(m)$ generata da $mX_1, ..., mX_c$ allora $m[X_i, X_j]$ può essere scritto come una combinazione lineare dei coefficienti $c_k^v(m)$ e dei vettori mX_k, con $k = 1, ..., c$. In particolare le funzioni $(m, v) \mapsto c_k^v(m)$ sono univocamente determinate, perchè i campi vettoriali sono linearmente indipendenti inoltre, dal teorema di Rademacher, le funzioni $(m, v) \mapsto c_k^v(m)$ sono localmente limitate.
Viceversa se esistono delle funzioni localmente limitate, $(m, v) \mapsto c_k^v(m)$ con $k = 1, ..., c$, tali che

$$\forall\, m \in U,\ \forall\, i,\ j \in \{1, ..., c\} \text{ e } \forall\, v \in m[X_i, X_j]$$

$$v = \sum_{k=1}^{c} c_k^v(m) m X_k.$$

allora essendo $\mathcal{D}(m)$ generata da $mX_1, ..., mX_c$ possiamo concludere che

$$m[X_i, X_j] \subseteq \mathcal{D}(m)$$

per ogni $m \in U$, cioè che la distribuzione $\mathcal{D}$ è multi-involutiva.

5.3 Il teorema di Frobenius multivoco

Teorema 5.1. *Siano d, c due interi positivi con $c \leq d$ e sia $\mathcal{D}$ una distribuzione $c-$dimensionale, lipschitziana e multi-involutiva su una varietà M di classe $\mathcal{C}^\infty$ e di dimensione d.*
Allora per ogni $m \in M$ esiste una carta (U, φ) con $\varphi(m) = 0$ e coordinate locali lipschitziane $x_1, ..., x_d$ tali che gli insiemi di equazioni

$$x_i = \textit{costante}, \qquad i = c+1, ..., d, \tag{5.1}$$

sono varietà integrali di $\mathcal{D}$. Chiameremo slice *tali insiemi.*
Inoltre se (N, ψ) è una varietà integrale connessa di $\mathcal{D}$ tale che $\psi(N) \subset U$ allora, $\psi(N)$ è contenuta in una di queste slices.

Per comodità di lettura preferiamo scrivere per esteso la dimostrazione anche laddove essa ricalca il caso classico.

Dimostrazione. Procediamo per induzione su c.

Il caso $c = 1$ In questo caso il teorema è una conseguenza diretta del teorema di rettificabilità dei campi vettoriali per cui rimandiamo al capitolo 4.

Il caso $c > 1$ Dato che stiamo operando in carte locali possiamo supporre, senza perdita di generalità, di identificare M con $\mathbb{R}^d$.
Supponiamo vero il teorema per $c - 1$.
Se $\mathcal{D}$ è una distribuzione di dimensione c lipschitziana e multi-involutiva su M, allora esistono c campi vettoriali localmente lipschitziani, diciamoli $X_1, ..., X_c$, tali che preso $m \in M$ essi generano $\mathcal{D}$ in un intorno $\widetilde{V}$ di m.
A meno di una trasformazione lipschitziana di coordinate e in base al teorema di rettificabilità per campi vettoriali lipschitziani (vedi paragrafo 4.2) possiamo supporre che in un intorno $V \subseteq \widetilde{V}$ di m esistono coordinate $(y_1, ..., y_d)$ tali che m ha coordinata nulla e

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y_1}, \qquad \text{su } V. \tag{5.2}$$

Definiamo su V i nuovi campi vettoriali:

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1, \\ Y_i &= X_i - X_i(y_1)X_1, \qquad i = 2, ..., c. \end{aligned} \tag{5.3}$$

I campi vettoriali $Y_1, ..., Y_c$ sono indipendenti, localmente lipschitziani e generano $\mathcal{D}$ su V.
Sia S la slice $\{y_1 = 0\}$.
Iniziamo con l'osservare che da (5.3) e (5.2) segue

$$Y_i(y_1) = 0, \qquad i = 2, ..., c. \tag{5.4}$$

Infatti

$$\begin{aligned} Y_i(y_1) &= X_i(y_1) - X_i(y_1)X_1(y_1) = \\ &= X_i(y_1)\big(1 - X_1(y_1)\big) = \\ &= X_i(y_1)\left(1 - \frac{\partial}{\partial y_1} y_1\right) = \\ &= 0. \end{aligned}$$

In particolare l'equazione (5.4) significa che i campi vettoriali $Y_2, ..., Y_c$ sono tangenti ad S.
Sia

$$\theta : S \hookrightarrow V$$

la mappa inclusione.
La relazione

$$d_q\theta(Z_i) = \theta(q)Y_i, \qquad \forall\, q \in S, \qquad i = 2, ..., c, \tag{5.5}$$

individua perciò $c-1$ campi vettoriali Z_i su S che risultano localmente lipschitziani e linearmente indipendenti in ogni punto. I campi $Z_2, ..., Z_c$ generano una distribuzione di dimensione $c-1$ su S che chiameremo $\mathcal{D}'$.
Il prossimo passo sarà quello di dimostrare che $\mathcal{D}'$ è multi-involutiva.
Dato che la distribuzione generata dai campi vettoriali $Y_1, ..., Y_c$ è multi-involutiva per ipotesi, allora possiamo dire che

$$\begin{gathered} \forall\, p \in V,\ \forall\, i,\ j \in \{1, ..., c\} \text{ e } \forall\, v \in p[Y_i, Y_j] \\ \text{esistono dei coefficienti, } c_k^v(p)\ k = 1, ..., c, \text{ tali che} \\ v = \sum_{k=1}^{c} c_k^v(p) p Y_k \\ \text{e le funzioni } (p, v) \mapsto c_k^v(p) \text{ sono localmente limitate.} \end{gathered} \tag{5.6}$$

Mostriamo ora che per ogni $p \in V$, per ogni $i,\ j \in \{2, ..., c\}$ e per ogni $v \in p[Y_i, Y_j]$ si ha $c_1^v \equiv 0$.
Da come abbiamo definito le parentesi di Lie multivoche di due campi vettoriali localmente lipschitziani (vedi definizione al paragrafo 5.1) possiamo dire che

$$\begin{gathered} \forall\, p \in V,\ \forall\, i,\ j \in \{1, ..., c\} \\ \text{si ha} \\ p[Y_i, Y_j] = co\Big\{ \lim_{s \to +\infty} p_s[Y_i, Y_j] \Big\} \end{gathered} \tag{5.7}$$

ove $\{p_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ sono successioni che soddisfano le seguenti proprietà:

(i) $p_s \in \mathrm{DIFF}(Y_i) \cap \mathrm{DIFF}(Y_j)$ per ogni $s \in \mathbb{N}$;

(ii) $\lim_{s\to+\infty} p_s = p$;

(iii) $\lim_{s\to+\infty} p_s[Y_i, Y_j]$ esiste.

Fissiamo $i,\ j \in \{2, ..., c\}$, p in V, e sia $\{p_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ una successione che verifica (**i**),...,(**iii**).
Da (5.4) si ha

$$\begin{aligned}\lim_{s\to+\infty} p_s[Y_i, Y_j](y_1) &= \lim_{s\to+\infty}\Big(p_sY_i\big(Y_j(y_1)\big) - p_sY_j\big(Y_i(y_1)\big)\Big) = \\ &= 0.\end{aligned} \tag{5.8}$$

Da (5.7) per ogni $p \in V$, per ogni $i,\ j \in \{1, ..., c\}$ e per ogni vettore $v = (v_1, ..., v_d)$ in $p[Y_i, Y_j]$ esistono dei coefficienti non negativi $\lambda_1, ..., \lambda_A$ tali che $\sum_{\alpha=1}^{A} \lambda_\alpha = 1$ e

$$v = \sum_{\alpha=1}^{A} \lambda_\alpha \lim_{s\to+\infty} p_s^\alpha[Y_i, Y_j], \tag{5.9}$$

per opportune successioni $\{p_s^1\}_{s\in\mathbb{N}}, ..., \{p_s^A\}_{s\in\mathbb{N}}$ soddisfacenti (**i**),...,(**iii**).
Da (5.9) si ha

$$v_1 = v(y_1) = \sum_{\alpha=1}^{A} \lambda_\alpha \lim_{s\to+\infty} p_s^\alpha[Y_i, Y_j](y_1). \tag{5.10}$$

Dunque da (5.10) e (5.8) possiamo dedurre

$$v_1 = v(y_1) = 0. \tag{5.11}$$

D'altra parte per (5.6)

esistono dei coefficienti, $c_k^v(p)$ $k = 1, ..., c$, tali che

$$v(y_1) = \sum_{k=1}^{c} c_k^v(p) pY_k(y_1). \tag{5.12}$$

Da quanto fin ora riportato in (5.12), (5.11), (5.4), (5.3) e (5.2), per ogni $p \in V$ si ha la seguente catena di uguaglianze

$$\begin{aligned} 0 &= v_1 = \\ &= v(y_1) = \\ &= \sum_{k=1}^{c} c_k^v(p) pY_k(y_1) = \\ &= c_1^v(p) pY_1(y_1) = \\ &= c_1^v(p) \frac{\partial}{\partial y_1} y_1\Big|_p = \\ &= c_1^v(p). \end{aligned}$$

Quindi

$$c_1^v \equiv 0, \qquad \text{su } V.$$

Di conseguenza (5.6) implica

$$\forall\, p \in V,\ \forall\, i,\ j \in \{2, ..., c\} \text{ e } \forall\, v \in p[Y_i, Y_j]$$

$$v = \sum_{k=2}^{c} c_k^v(p) p Y_k. \tag{5.13}$$

Per brevità di notazione indichiamo con $D_{ij}S$ il sottoinsieme di S così definito

$$D_{ij}S = S \cap \mathrm{DIFF}(Y_i) \cap \mathrm{DIFF}(Y_j), \qquad i,\ j \in \{2, ..., c\}.$$

Vogliamo ora provare che

$$d_q\theta\Big([Z_i, Z_j] \Big) = \theta(q)[Y_i, Y_j], \qquad \forall\, q \in D_{ij}S, \qquad i,\ j \in \{2, ..., c\}.$$

Pertanto siano $i,\ j \in \{2, ..., c\}$ fissati e q un punto qualsiasi in $D_{ij}S$

$$\begin{aligned} d_q\theta\Big([Z_i, Z_j] \Big) &= d_q\theta\Big(Z_i(Z_j) - Z_j(Z_i) \Big) = \\ &= d_q\theta\Big(Z_i(Z_j) \Big) - d_q\theta\Big(Z_j(Z_i) \Big) = \\ &= \theta(q)Y_i(Y_j) - \theta(q)Y_j(Y_i) = \\ &= \theta(q)[Y_i, Y_j]. \end{aligned}$$

Di conseguenza abbiamo che

$$d_q\theta\Big([Z_i, Z_j] \Big) = \theta(q)[Y_i, Y_j], \qquad \forall\, q \in S, \qquad i,\ j \in \{2, ..., c\}, \tag{5.14}$$

infatti

$$\begin{aligned} d_q\theta\Big([Z_i, Z_j] \Big) &= d_q\theta\Big(co\Big\{ \lim_{s\to+\infty} q_s[Z_i, Z_j] \Big\} \Big) = \\ &= co\Big\{ \lim_{s\to+\infty} \theta(q_s)[Y_i, Y_j] \Big\} = \\ &= \theta(q)[Y_i, Y_j], \end{aligned}$$

dove $\{q_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ rappresenta una successione in $D_{ij}S$ soddisfacente le proprietà (**i**),...,(**iii**).
Da (5.13) e (5.14) possiamo concludere che

$$\forall\, q \in S,\ \forall\, i,\ j \in \{2, ..., c\} \text{ e } \forall\, v \in q[Z_i, Z_j]$$

esistono dei coefficienti, $c_k^v|_S(q)$ $k = 2, ..., c$, tali che

$$v = \sum_{k=2}^{c} c_k^v|_S(q) q Z_k.$$

Quindi siamo riusciti a dimostrare che la distribuzione $\mathcal{D}'$ è multi-involutiva.
Per l'ipotesi induttiva esiste in un intorno di m in S e un sistema di coordinate locali lipschitziane $(w_2, ..., w_d)$, con $w_i(m) = 0$, per $i = 2, ..., c$, tale che le slices di equazione $w_i = costante$, per $i = c + 1, ..., d$, sono varietà integrali della distribuzione $\mathcal{D}'$.
Sia π la proiezione

$$(a_1, ..., a_d) \mapsto \pi(a_1, ..., a_d) = (0, a_2, ..., a_d)$$

e sia

$$\begin{aligned} & x_1(y) = y_1, \\ & x_j(y) = \big(w_j \circ \pi\big)(y), \qquad j = 2, ..., d. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Da quanto fin ora detto risulta evidente che le funzioni definite in (5.15) sono lipschitziane e definite in un intorno U di 0.
Il prossimo passo sarà quello di provare che le slices definite dalle equazioni $x_i = costante$, per $i = c + 1, ..., d$, sono varietà integrali di $\mathcal{D}$.
Per fare ciò mostriamo che

$$Y_i(x_{c+r}) \equiv 0, \qquad \text{q.o su } U, \qquad \begin{aligned} & i = 1, ..., c, \\ & r = 1, ..., d - c. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Infatti in tal caso

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_c}$$

formano una base di $\mathcal{D}$ per ogni punto di U; quindi le slices di equazione $x_i = costante$, per $i = c + 1, ..., d$, sono varietà integrali di $\mathcal{D}$. Dunque per giungere alla conclusione non resta che provare (5.16).
Iniziamo dal caso $i = 1$.
Da (5.15), (5.3) e (5.2) otteniamo

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad \text{su } U,$$

quindi

$$\begin{aligned} Y_1(x_{c+r}) &= \frac{\partial}{\partial x_1} x_{c+r} = \\ &= \delta_{c+r,1}, \end{aligned} \qquad r = 1, ..., d - c,$$

(vedi Appendice A per la definizione di $\delta_{c+r,1}$).
Siccome $c \geq 2$ ed $r = 1, ..., d - c$ allora

$$Y_1(x_{c+r}) \equiv 0, \qquad \text{su } U, \qquad r = 1, ..., d - c. \tag{5.17}$$

Questo dimostra la (5.16) nel caso $i = 1$.
Non resta che procedere con il caso $i = 2, ..., c$.

Da (5.17) otteniamo

$$\begin{aligned}[Y_1, Y_i](x_{c+r}) &= Y_1(Y_i(x_{c+r})) - Y_i(Y_1(x_{c+r})) = \\ &= Y_1\big(Y_i(x_{c+r})\big),\end{aligned} \qquad \begin{array}{l}\text{q.o su } U,\\ i = 2, ..., c,\\ r = 1, ..., d-c,\end{array}$$

cioè

$$[Y_1, Y_i](x_{c+r}) = \frac{\partial}{\partial x_1} Y_i(x_{c+r}), \qquad \text{q.o su } U, \qquad \begin{array}{l} i = 2, ..., c,\\ r = 1, ..., d-c.\end{array} \tag{5.18}$$

Siccome

$$p[Y_1, Y_i](x_{c+r}) \in p[Y_1, Y_i](x_{c+r}), \qquad \forall\, p \in U \qquad \begin{array}{l} i = 2, ..., c,\\ r = 1, ..., d-c,\end{array}$$

allora da (5.18) otteniamo

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_1} Y_i(x_{c+r})\right|_p \in p[Y_1, Y_i](x_{c+r}), \qquad \text{per q.o. } p \in U, \quad \begin{array}{l} i = 2, ..., c,\\ r = 1, ..., d-c.\end{array} \tag{5.19}$$

Fissiamo $\overline{x}_2, ..., \overline{x}_d$ e consideriamo

$$\overline{S} = \left\{ x_1, ..., x_d \in U : \; x_2 = \overline{x}_2, ..., x_d = \overline{x}_d \right\}.$$

$\overline{S}$ risulta trasversale a S, di conseguenza $\overline{S}$ ed S si intersecano in un unico punto: lo 0.
Si noti che lungo $\overline{S}$ le $Y_i(x_{c+r})$ sono funzioni della sola variabile x_1.
Operiamo ora una momentanea semplificazione della notazione, scrivendo, per un fissato $\overline{r} \in \{1, ..., d-c\}$

$$\begin{aligned} &x_1 = t,\\ &tY_i(x_{c+\overline{r}}) = f_i(t), \qquad \forall\, t \in \overline{S}, \qquad i = 2, ..., c,\end{aligned}$$

(dove $f_i(t)$ ha l'usuale significato di f_i calcolata in t).
Per (5.13), (5.19) diventa

$$\dot{f}_i(t) \in \left\{ \sum_{k=2}^{c} c_k^v(t) f_k(t), \; v \in t[Y_1, Y_i](x_{c+\overline{r}}) \right\}, \qquad \begin{array}{l}\text{per q.o. } t \in \overline{S},\\ i = 2, ..., c.\end{array} \tag{5.20}$$

In questo modo (5.20) diviene un sistema di $c-1$ inclusioni differenziali. Consideriamo il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{f}_i(t) \in \left\{ \sum_{k=2}^{c} c_k^v(t) f_k(t),\ v \in t[Y_1, Y_i](x_{c+\bar{r}}) \right\}, & \text{per q.o. } t \in \overline{S}, \\ & i = 2, ..., c. \\ f(0) = f_0 \end{cases} \tag{5.21}$$

Se mostriamo che $f_0 = 0$ allora la funzione identicamente nulla certamente risolve il problema di Cauchy (5.21).
Dunque per avere l'esistenza di almeno una soluzione (la soluzione identicamente nulla) non ci rimane che provare che $f_0 = 0$.
Da (5.5) e (5.15) abbiamo subito che

$$0Y_i(x_{c+r}) = 0Z_i(w_{c+r}), \qquad \begin{array}{l} i = 2, ..., c, \\ r = 1, ..., d-c. \end{array}$$

Siccome le varietà integrali di $\mathcal{D}'$ hanno equazione $w_j = \textit{costante}$, per $j = c+1, ..., d$, allora

$$0Z_i(w_{c+r}) = 0, \qquad \begin{array}{l} i = 2, ..., c, \\ r = 1, ..., d-c. \end{array}$$

Dunque

$$\begin{aligned} f_0 &= f(0) = \\ &= \Big(f_2(0), ..., f_d(0)\Big) = \\ &= \Big(0Y_2(x_{c+r}), ..., 0Y_d(x_{c+r})\Big) = \\ &= (0, ..., 0). \end{aligned} \qquad r = 1, ..., d-c. \tag{5.22}$$

Da (5.22) il problema di Cauchy (5.21) diventa

$$\begin{cases} \dot{f}_i(t) \in \left\{ \sum_{k=2}^{c} c_k^v(t) f_k(t),\ v \in t[Y_1, Y_i](x_{c+\bar{r}}) \right\}, & \text{per q.o. } t \in \overline{S}, \\ & i = 2, ..., c. \\ (f_2(0), ..., f_d(0)) = 0 \end{cases} \tag{5.23}$$

Dunque $(f_2, ..., f_d)(t) = (0, ..., 0)$ è una soluzione di (5.23). Dimostriamo che essa è unica.
Siccome le funzioni $(t, v) \mapsto c_k^v(t)$, $k = 2, ...c$, sono localmente limitate esiste $C \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall\, t \in \overline{S},\ \forall\, i,\ k \in \{2, ..., c\} \text{ e } \forall\, v \in t[Y_1, Y_i](x_{c+\bar{r}})$$
$$\left|c_k^v(t)\right| < C.$$

Da ciò segue subito che

$$\big|\dot{f}(t)\big| \leq C(c-1)^{3/2}\big|f(t)\big|. \tag{5.24}$$

Per procedere abbiamo bisogno del lemma di Gronwall, di cui riportiamo, per comodità la seguente versione.

Lemma di Gronwall. *Sia $z(t)$ una funzione assolutamente continua e non negativa tale che*

$$\begin{aligned} &\dot{z}(t) \leq \xi(t)z(t) + \beta(t), \qquad \textit{per q.o. } t \in [t_0, T],\\ &z(t_0) \leq \gamma, \end{aligned} \tag{5.25}$$

dove ξ e β sono funzioni integrabili e γ è una costante con $\gamma \geq 0$.
Allora z soddisfa la condizione

$$z(t) \leq \gamma \exp\bigg(\int_{t_0}^{t} \xi(s)ds\bigg) + \int_{t_0}^{t} \beta(s) \exp\bigg(\int_{s}^{t} \xi(\sigma)d\sigma\bigg)ds \qquad \forall\, t \in [t_0, T]. \tag{5.26}$$

Dato che (5.24) soddisfa la condizione (5.25), allora da (5.26) segue che

$$f(t) = 0, \qquad \text{per q.o. } t \in \overline{S}.$$

Questo implica che in problema di Cauchy (5.23) ammette solo la soluzione identicamente nulla cioè prova la (5.16).
Questo completa la prima parte della dimostrazione.

Osservazione 1. *Osserviamo infine che se H rappresenta una varietà integrale di $\mathcal{D}$ definita dalle equazioni* (5.1) *allora essendo lo spazio tangente ad H, TH, una varietà lipschitziana allora H è una varietà di classe $\mathcal{C}^{1,1}$.*

Per concludere la dimostrazione rimane da provare la seconda parte del teorema.
Sia N una varietà integrale connessa di $\mathcal{D}$ in U. Consideriamo la proiezione pr da $\mathbb{R}^d$ in $\mathbb{R}^{d-c}$ che ad $a = (a_1, ..., a_d) \in \mathbb{R}^d$ associa $\mathrm{pr}(a) = (a_{c+1}, ..., a_d)$. Se $x_1, ..., x_d$ sono le coordinate su U definite come sopra allora

$$d_n(\mathrm{pr} \circ x) \equiv 0, \qquad \text{q.o } n \in N.$$

Dato che N è connessa allora $\mathrm{pr} \circ x = \textit{costante}$ quasi ovunque su N. Per continuità possiamo estendere quest'uguaglianza su tutto N, quindi N è contenuto in una slice di equazioni (5.1).
Questo conclude la dimostrazione. □

Anche in questo caso il teorema di Frobenius multivoco può essere scritto come segue.

Teorema 5.2. *Siano M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^\infty$ $d-$dimensionale e $\mathcal{D}$ una distribuzione di classe $\mathcal{C}^\infty$ su M.*
$\mathcal{D}$ è una distribuzione lipschitziana, multi-involutiva e di dimensione $c \leq d$ se e solo se per ogni $m \in M$ esiste una carta (U, φ) con $\varphi(m) = 0$ e coordinate locali lipschitziane $x_1, ..., x_d$ tali che gli insiemi di equazioni

$$x_i = costante, \qquad i = c+1, ..., d,$$

sono varietà integrali di $\mathcal{D}$.

Dimostrazione. Dato che stiamo operando in carte locali possiamo supporre, senza perdita di generalità, di identificare M con $\mathbb{R}^d$.
Per ogni $m \in M$ consideriamo, in un intorno di m, un sistema di coordinate locali lipschitziane $(x_1, ..., x_d)$ tali che m abbia coordinata nulla.
Fissiamo $\overline{x}_{c+1}, ..., \overline{x}_d$ e consideriamo la slice

$$H = \Big\{ x_1, ..., x_d : \ x_{c+1} = \overline{x}_{c+1}, ..., x_d = \overline{x}_d \Big\}.$$

Di conseguenza a ciò sia H che $T_m H$ hanno dimensione c, inoltre ogni vettore $v = (v^1, ..., v^d) \in T_m H$ nelle coordinate $x_1, ..., x_d$ si scrive

$$v = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^c \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

cioè $v^{c+1} = 0, ..., v^d = 0$.
Dato che H è una varietà integrale di $\mathcal{D}$ allora

$$T_m H = \mathcal{D}(m), \qquad \forall\, m \in H. \tag{5.27}$$

Dunque esistono c campi vettoriali localmente lipschitziani su H, chiamiamoli $X_1, ..., X_c$, tali che

$$\mathcal{D}(m) = Span\Big\{ mX_1, ..., mX_d \Big\}, \qquad \forall\, m \in H.$$

Fissiamo $i,\ j \in \{1, ..., c\}$ e consideriamo una successione $\{m_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ che soddisfi le seguenti proprietà:

(i) $m_s \in \mathrm{DIFF}(Y_i) \cap \mathrm{DIFF}(Y_j)$ per ogni $s \in \mathbb{N}$;

(ii) $\lim_{s\to+\infty} m_s = m$;

(iii) $\lim_{s\to+\infty} m_s[Y_i, Y_j]$ esiste.

Calcoliamo ora $m[X_i, X_j]$

$$
\begin{aligned}
m[X_i, X_j] &= co\Big\{\lim_{s\to\infty} m_s[X_i, X_j]\Big\} = \\
&= co\left\{\lim_{s\to\infty} m_s \left[\begin{pmatrix} X_i^1 \\ \vdots \\ X_i^c \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_j^1 \\ \vdots \\ X_j^c \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right]\right\} = \\
&= co\left\{\lim_{s\to\infty}\left(\sum_{l,k=1}^{d}\left(m_s X_i^l \frac{\partial X_j^k}{\partial x_l}\Big|_{m_s} - m_s X_j^l \frac{\partial X_i^k}{\partial x_l}\Big|_{m_s}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_{m_s}\right)\right\} = \\
&= co\left\{\lim_{s\to\infty}\left(\sum_{l,k=1}^{c}\left(m_s X_i^l \frac{\partial X_j^k}{\partial x_l}\Big|_{m_s} - m_s X_j^l \frac{\partial X_i^k}{\partial x_l}\Big|_{m_s}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_{m_s}\right)\right\} = \\
&= co\left\{\begin{pmatrix} \lim_{s\to\infty} m_s \left[\begin{pmatrix} X_i^1 \\ \vdots \\ X_i^c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_j^1 \\ \vdots \\ X_j^c \end{pmatrix}\right] \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \\
&= \left\{\begin{pmatrix} w \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} : \quad w \in co\left\{\lim_{s\to\infty} m_s \left[\begin{pmatrix} X_i^1 \\ \vdots \\ X_i^c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_j^1 \\ \vdots \\ X_j^c \end{pmatrix}\right]\right\}\right\} = \\
&= \left\{\begin{pmatrix} w \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} : \quad w \in m[\begin{pmatrix} X_i^1 \\ \vdots \\ X_i^c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_j^1 \\ \vdots \\ X_j^c \end{pmatrix}]\right\}.
\end{aligned}
$$

Si osservi che nell'ultimo insieme le parentesi di Lie sono multivoche.
Dunque $m[X_i, X_j] \subset T_m H$ per ogni $i,\ j \in \{1, ..., c\}$ e per ogni $m \in H$ inoltre da (5.27) segue che

$$m[X_i, X_j] \subset \mathcal{D}(m), \qquad \forall\, m \in H, \qquad i,\ j \in \{1, ..., c\}.$$

Quindi $\mathcal{D}$ è una distribuzione multi-involutiva, di dimensione c e lipschitziana.
$\square$

Come conseguenza del teorema di Frobenius-Simić (capitolo 3) e del teorema di Frobenius multivoco otteniamo il seguente risultato:

Corollario 5.1. *Le due seguenti condizioni di involutività sono equivalenti:*

- *involutività multivoca, e*
- *involutività quasi ovunque.*

Appendice A

Notazione di base e terminologia

Diffeomorfismo
Siano X ed Y due spazi normati, D ed E sottospazi aperti rispettivamente di X ed Y. Una funzione $f : D \to E$ si dice *diffeomorfismo* se è biiettiva, differenziabile, ed $f^{-1} : E \to D$ è pure differenzibile.

Sia $k \geq 0$ intero. $f : D \to E$ è un *diffeomorfismo di classe* $\mathcal{C}^k$ se è biiettiva, differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$, ed $f^{-1} : E \to D$ è pure differenzibile di classe $\mathcal{C}^k$.

Proiezione i-esima
Sia $d \geq 1$ un intero, la funzione

$$r_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \qquad i = 1, ..., d,$$

definita da

$$\mathbb{R}^d \ni a = (a_1, ..., a_d) \mapsto r_i(a) = a_i, \qquad i = 1, ..., d,$$

si dice *proiezione i-esima*.

Se $d = 1$ allora la proiezione r_1 si denoterà semplicemente con r e ad ogni punto associa se stesso; cioè r(a)=a per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Se $f : X \to \mathbb{R}^d$ allora per ogni $i = 1, ..., d$ definiamo la funzione $f_i : X \to \mathbb{R}$ in questo modo

$$f_i = r_i \circ f \qquad i = 1, ..., d,$$

e la chiameremo *componente i-esima* di f.

Simbolo di Kronecker
Sia $d \geq 1$ un intero e siano i, j due interi tali che $1 \leq i,\ j \leq d$.
Il simbolo δ_{ij} si chiama *simbolo di Kronecker* ed è così definito

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Insieme di diffrenziabilità
Data una qualsiasi funzione f indicheremo con $\mathrm{DIFF}(f)$ l'*insieme di differenziabilità di* f, cioè l'insieme dei punti in cui f è differenziabile.

Insiemi convessi
Un insieme A si dice *convesso* se dati x_1, $x_2 \in A$ e λ_1, λ_2 reali positivi tali che $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ allora anche $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in A$.

Se A è convesso si verifica facilmente, per induzione, che

$$x_1, ..., x_n \in A, \text{ e } \lambda_1, ..., \lambda_n \text{ reali positivi tali che } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \ \Rightarrow \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in A.$$

Inviluppo convesso
Da quanto appena detto si verifica facilmente che l'intersezione di insiemi convessi è un insieme convesso.
Dato un insieme B diremo *inviluppo convesso di* B l'intersezione di tutti i convessi contenti B e lo indicheremo con coB.
Ovviamente coB è un insieme convesso.

Sussiste le seguente caratterizzazione dell'inviluppo convesso di B:

$$coB = \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i x_i : \ x_i \in B, \ \lambda_i \in \mathbb{R}^+ \text{ con } \sum_{i \in I} \lambda_i = 1, \ I \text{ insieme di indici} \right\},$$

dove $\mathbb{R}^+$ rappresenta l'insieme dei reali positivi più l'elemento 0.

Supporto di una funzione
Da una funzione f da uno spazio topologico in $\mathbb{R}^d$ si dice *supporto* di f l'insieme

$$\mathrm{supp} f = \mathrm{cl} f^{-1}\big(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}\big)$$

dove $\mathrm{cl} f^{-1}\big(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}\big)$ indica la chiusura dell'insieme $f^{-1}\big(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}\big)$.

Appendice B

Funzioni lipschitziane

Consideriamo due spazi metrici (M_1, d_1) e (M_2, d_2) ed una funzione f tra di essi.
Diremo che f è *lipschitziana* se esiste una costante $L > 0$ tale che

$$d_2(f(x), f(y)) \leq L d_1(x, y), \qquad \forall\, x,\ y \in M_1$$

Ogni tale L si dice *costante di Lipschitz* per f.
Se c'è una costante di Lipschitz per f ce n'è anche una minima detta *la* costante di Lipschitz per f (oppure la migliore costante di Lipschitz per f) che indicheremo con $\mathrm{lip}(f)$.
Vediamo ora alcune proprietà delle funzioni lipschitziane che ci saranno utili in seguito.

i) Siano X uno spazio metrico ed Y uno spazio vettoriale normato.
Se $f,\ g : X \to Y$ sono due funzioni lipschitziane con costanti di Lipschitz rispettivamente $\mathrm{lip}(f)$ ed $\mathrm{lip}(g)$ allora si dimostra che $f + g : X \to Y$ è lipschitziana con costante di Lipschitz $\mathrm{lip}(f + g) \leq \mathrm{lip}(f) + \mathrm{lip}(g)$.

ii) Se X, Y, e Z sono spazi metrici ed $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ sono lipschitziane con costanti di Lipschitz rispettivamente $\mathrm{lip}(f)$ ed $\mathrm{lip}(g)$, allora la composizione $g \circ f : X \to Z$ è lipschitziana con costante di Lipschitz $\mathrm{lip}(g \circ f) \leq \mathrm{lip}(g)\mathrm{lip}(f)$.

iii) Una funzione $f : X \to Y$ è costante se e solo se è lipschitziana con costante di Lipschitz 0.

iv) Se $f : X \to Y$ è lipschitziana allora f è continua.

Lipeomorfismo
Si dice *lipeomorfismo* una mappa lipschitziana invertibile tra due spazi metrici la cui inversa è ancora lipschitziana.

Appendice C

Prodotto di convoluzione e sue proprietà

Notazione
Siano $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e p un intero tale che $1 \leq p \leq \infty$.

$$L^p(U) = \left\{ f : U \to \mathbb{R} \text{ tale che } \left(\int_U |f(x)|^p dx \right) < \infty,\ f \text{ Lebesgue misurabile} \right\}$$

$$L^p_{loc}(U) = \left\{ f : U \to \mathbb{R} \text{ tale che } f \in L^p(V),\ \text{per qualche } V \subset\subset U \right\}$$

dove $V \subset\subset U$ significa che chV è compatto e $chV \subset U$.

Definiamo ora lo *spazio di Sobolev* $W^{1,p}(U)$.

1. La funzione f appartiene allo spazio di Sobolev $W^{1,p}(U)$ se $f \in L^p(U)$ e $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ esiste ed appartiene a $L^p(U)$ per ogni $i = 1, ..., n$.

2. La funzione $f \in W^{1,p}_{loc}(U)$ se $f \in W^{1,p}(V)$ per qualche sottoinsieme aperto $V \subset\subset U$.

3. f è una *funzione di Sobolev* se $f \in W^{1,p}_{loc}(U)$.

Mollificatori standard
Consideriamo le funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ così definite

$$\eta(x) = \begin{cases} Cexp\left(\dfrac{1}{|x|^2 - 1}\right), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

dove C è una costante tale che $\int_{\mathbb{R}^d} \eta(x)dx = 1$.
Sia $\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, con $\varepsilon > 0$ e $x \in \mathbb{R}$.
La funzione η_ε si dice *mollificatore standard*.

Prodotto di convoluzione
Siano $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ con $1 \leq p, q \leq \infty$ e definiamo il prodotto di convoluzione $f * g$ in questo modo

$$f * g(x) \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy.$$

Sia $U \subset \mathbb{R}^n$, denotiamo con ∂U l'insieme dei punti di frontiera di U cioè l'insieme degli $x \in \mathbb{R}^n$ tali che per ogni intorno aperto V di x si ha che $V \cap U$ contiene almeno un elemento di U e uno del complementare di U.
Consideriamo la mappa

$$d : U \times U \to \mathbb{R}$$

tale che

1. $d(x, y) \geq 0$ per ogni $x, \ y \in U$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. per ogni $x, \ y, \ z \in U$ si ha che $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

La mappa d si dice una metrica su U.
Dati $A \subset \mathbb{R}^n$ ed $x_0 \in \mathbb{R}^n$ indichiamo con $dist(x_0, A)$ la distanza tra il punto x_0 e l'insieme A, dove

$$dist(x_0, A) = \inf_{a \in A} \left\{ d(x_0, a) \right\}.$$

Siano $\varepsilon > 0$ ed U_ε l'insieme così definito

$$U_\varepsilon \equiv \left\{ x \in U \text{ tali che } dist(x, \partial U) > \varepsilon \right\}.$$

Sia $f \in L^1_{loc}(U)$ poniamo

$$f^\varepsilon = \eta_\varepsilon * f$$

cioè

$$f^\varepsilon(x) = \int_U \eta_\varepsilon(x-y)f(y)dy \qquad \forall x \in U_\varepsilon.$$

Proprieta:

1. per ogni $\varepsilon > 0$, $f^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(U_\varepsilon)$,
2. se $f \in \mathcal{C}(U)$ allora $\left\{ f^\varepsilon \right\}_{\varepsilon > 0}$ converge uniformemente a f sui sottoinsiemi compatti di U,
3. se $f \in L^p_{loc}(U)$ per qualche $1 \leq p \leq \infty$ allora $\left\{ f^\varepsilon \right\}_{\varepsilon > 0}$ converge a f in $L^p_{loc}(U)$.

4. se $f \in W^{1,p}_{loc}(U)$ per qualche $1 \leq p < \infty$ allora

$$\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_i} = \eta_\varepsilon * \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad i = 1, ..., n,$$

5. in particolare, se $f \in W^{1,p}_{loc}(U)$ per qualche $1 \leq p < \infty$ allora $\{f^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ converge a f in $W^{1,p}_{loc}(U)$.

Appendice D

Metrica Riemanniana

Applicazioni bilineari
Siano V e W due spazi vettoriali sul campo C.
Un'applicazione

$$g : V \times W \to C$$

tale che

i) $\forall\, v,\ w \in V$ e $\forall\, t,\ z \in W$

$$\begin{aligned} g(v+w,z) &= g(v,z) + g(w,z), \\ g(v,t+z) &= g(v,t) + g(v,z), \end{aligned}$$

ii) $\forall\, v \in V$ e $\forall\, w \in W$, $\forall\, \alpha \in C$

$$\begin{aligned} g(\alpha v, w) &= \alpha g(v,w), \\ g(v, \alpha w) &= \alpha g(v,w), \end{aligned}$$

si dice un'*applicazione bilineare.*

Applicazioni bilineari simmetriche ed alternanti
Sia V uno spazio vettoriale su un campo C.
Un'applicazione bilineare

$$g : V \times V \to C$$

si dice *simmetrica* se per ogni coppia di vettori $v, w \in V$ si ha che

$$g(v,w) = g(w,v).$$

Si dice *alternante* se per ogni vettore $v \in V$ si ha che

$$g(v,v) = 0.$$

In particolare nel caso che andremo a trattare il campo C, sopra citato, è il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ quindi essendo $\mathbb{R}$ di caratteristica diversa da 2 possiamo dire che
$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$
è *alternante* se, e solo se, per ogni coppia di vettori $v, w \in V$ si ha che
$$g(v, w) = -g(w, v).$$

2-Forme
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{R}$ e sia $e_1, ..., e_n$ una sua base, cioè $V = Span\{e_1, ..., e_n\}$. Sia V^* il *duale* di V cioè lo spazio delle forme lineari da V in $\mathbb{R}$. Indichiamo con $e_1^*, ..., e_n^*$ una base di V^* dove e_i^* è una funzione lineare da V in $\mathbb{R}$ tale che $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$, $i, j \in \{1, ..., n\}$, dove δ_{ij} è definito in Appendice (A).

Siano f ed $g \in V^*$. Definiamo operativamente il prodotto tensoriale $f \otimes g$ in questo modo
$$f \otimes g : V \times V \to \mathbb{R}$$
$$(v, w) \mapsto f \otimes g(v, w) = f(v)g(w).$$
Sia $V^* \otimes V^*$ lo spazio generato da $Span\{e_i^* \otimes e_j^*\}_{i,j=1,...,n}$. Questo è lo spazio delle forme bilineari a valori in $\mathbb{R}$ e la sua dimensione è n^2.
Consideriamo il sottospazio $\bigwedge^2(V)$ di $V^* \otimes V^*$ costituito dalle forme bilineari alternanti. Gli elementi di $\bigwedge^2(V)$ si dicono *2-forme*, la dimensione di tale sottospazio è $\binom{n}{2}$.

Metriche Riemanniane
Sia M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$, con $k \geq 0$ intero.
Le sezioni di $T^*M \otimes_M T^*M \to M$ simmetriche e definite positive sono dette *Metriche Riemanniane.*

Varietà Riemanniane
Si dice *varietà Riemanniana* una varietà differenziabile su cui è definita una metrica Riemanniana.

Sia $k \geq 0$ un intero.
Si dice *varietà Riemanniana di classe* $\mathcal{C}^k$ una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^k$ su cui è definita una metrica Riemanniana.

Bibliografia

[H] HUREWICZ W., *Lectures on Ordinary Differential Equation*, Technology Press of the Massachusetts Institute of Technology and John Wiley & Sons, inc. New York c1958

[W] WARNER F. W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Glenview, Illinois, London, Scott, Foresman and Company, c1971

[Sh] SHARPE R. W., *Differential Geometry: Cartans Generalization of Kleins Erlangen Program*

[A-C] AUBIN J. P., CELLINA, A., *Differential Inclusion*, Springer-Verlang, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984

[B] BRESSAN A., *Lecture Notes on The Mathematical Theory of Control*, S.I.S.S.A, Trieste, 1994

[S] SIMIĆ S., *Lipschitz Ditributions and Anosov Flows*, Proceeding of the AMS, 124, no. 6, 1996, pp 1869-1877

[C-B] CALCATERRA C., BOLDT A., *Folw-box Theorem for Lipschitz Vector Fields*, arXiv:math.DS/0305207 v2, 2003

[B-F] BENETTIN G., FASSÒ, F., *Introduzione alla Teoria delle Perturbazioni per Sistemi Hamiltoniani*, 2001/02

[C] CARDIN F., *Note in Geometria Differenziale e Sistemi Dinamici Meccanici*, 2002/03

[C1] CARDIN F., *Note sui Sistemi Dinamici Meccanici*, 2000/01

[F] FOLLAND G. B., *Real Analysis: Modern Techniques and their Applications*, A Whiley-interscence pubblication John Wiley & sons New York, Chichester, Brisbune, Toronto, Singapore

[N] NABER G. L., *Topology Geometry and Gauge Fields: Foundations*, New York, Springer, 1997

[Cr] CORNALBA M., *Note in Geometria Differenziale*

[R-S] Rampazzo F. Sussmann H., *Set-valued differentials and a nonsmooth version of Chow's theorem*,Published in the Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control; Orlando, Florida, December 4 to 7, 2001 (IEEE Publications, New York, 2001), Volume 3, pp. 2613-2618.

[R-S1] Rampazzo F. Sussmann H., *Comunicazione personale*

[Ck] Clarke F. H., Ledyyaev Yu. S., Stern R. J., Wolenski P.R., *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, Springer, New York, Berlin, Heidelberg, Barcelona Budapest, Hong Kong, London, Milan Paris, Santa Clara, Singapore, Tokyo, 1998

[Ch] Chevalley C., *Theory of Lie groups, vol. 1*, Princeton, University Press, 1946

[N-W] Newns, Walker, *Tangent planes to a differentiable manifold*, J. London Math. Soc. 31, 1956

[S] Spivak M., *A comprensive Introduction to Differential Geometry Volume 1*,Publisch or Perisch, Inc. Berkeley, 1979

[E] Evans L. C., Gariepy R. F., *Measure theory and fine properties of functions*, RCR Press Boca Raton, Ann Arbor London, 1949

[Z] Ziemer W. P., *Weakly differentiable functions*, Springer-Verlang New York, Berlin, Heidelberg, Londra, Paris, Tokio, Hong Kong, 1989

[B-G-G] Benettin G., Galgani, L.,Giorgilli A., *Appunti di Meccanica Razionale*, 1998/99

[V] Valent T., *Appunti di Istituzioni di Analisi Superiore*

[Br] Bratti G., *Breviario di Analisi Matematica*, Edizioni libreria Progetto Padova, 1997

[Ca] Candilera M., *Algebra lineare e Geometria II edizione*, Edizioni libreria Progetto Padova, 1992

[DM] De Marco G., *Analisi Due secondo corso di analisi matematica -teoria ed esercizi- seconda edizione*, Decibel Zanichelli 1999