



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Ingegneria Industriale DII

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

OMOGENEIZZAZIONE E INDENTAZIONE IN HONEYCOMB AUXETICI

Relatore: Prof. Mirco Zaccariotto

Co-relatore: Prof. Ugo Galvanetto

Laureando: Marco Zecchetto 1013161

Anno Accademico 2012/2013

Ringraziamenti

Vorrei esprimere particolari ringraziamenti al Professor M. Zaccariotto per l'aiuto tempestivo e sempre puntuale per tutto il periodo della mia ricerca e dello svolgimento delle simulazioni numeriche. Ringrazio inoltre i miei familiari per il supporto, l'affetto e la pazienza di questi anni. Altrettanto calorosamente ringrazio i miei amici conosciuti in questi anni di università e tutti i miei amici più cari che conosco da sempre.

A Stefano, Annamaria e Marianna

SOMMARIO

1. INTRODUZIONE	15
1.1. Presentazione	15
2. MATERIALI AUXETICI	17
2.2. Tipologie di Materiali	19
2.3. Descrizione Generale	30
2.4. Caratteristiche Notevoli	31
2.4.2. Assorbimento Energetico	32
2.4.3. Proprietà Viscoelastiche	32
2.4.4. Proprietà Meccaniche	32
2.4.5. Resistenza Indentazione	33
2.5. Applicazioni	34
3. HONEYCOMB AUXETICI STUDIATI.....	37
3.1. Esagonale Chirale	38
3.1.1. Descrizione Teorica	38
4. OMOGENEIZZAZIONE.....	41
4.1. Introduzione	41
4.2. Teoria Micropolare per Reticoli Chirali	43
5. OMOGENEIZZAZIONE CON LA TECNICA DELL'ENERGIA DI DEFORMAZIONE	49
5.1. Reticolo Esagonale Chirale	49
6. SIMULAZIONI E RISULTATI	57
6.1. Esagonale Chirale.....	57
7. PROVE INDENTAZIONE	69
7.2. Simulazioni Numeriche	72

7.2.1. <i>Esagonale Chirale</i>	75
7.2.2. <i>Confronto con Reticolo Triangolare</i>	89
8. CONCLUSIONI E COMMENTI	95
9. SVILUPPI FUTURI	97
BIBLIOGRAFIA	99

ELENCO FIGURE

Fig. 2-1 Comportamento a trazione e a flessione per materiale (a) non auxetico (b) auxetico.	18
Fig. 2-2 (a) Struttura interna e asse di rotazione e (b)comportamento deformativo supposto dell' α -cristobalite polimorfa di silice cristallina.	19
Fig. 2-3 Schematizzazione della struttura dei polimeri auxetici. Dove a e b sono le lunghezze maggiore e minore dei noduli rappresentati tramite triangoli, l è la lunghezza delle fibrille e α è l'angolo tra le fibrille e l'asse r.	21
Fig. 2-4 Schemi della risposta strutturale in relazione ad una tensione applicata nella direzione x di (a) PTFE (b) polimeri liquido-cristallini a catena principale.	21
Fig. 2-5 Fotografie SEM a vari ingrandimenti di UHMWE.	22
Fig. 2-6 Cella unitaria teorica del reticolo molecolare di un materiale auxetico costituito da esameri.	23
Fig. 2-7 Fotografie stereo di una schiuma (a) a celle aperte, (b) a celle rientranti con indicatore di scala di 2mm. (c) Schematizzazione idealizzata di una cella unitaria rientrante. Microimmagini ottenute tramite microscopio elettronico a scansione ambientale di una schiuma polimerica (d) convenzionale, (e) auxetica.	24
Fig. 2-8 Composito auxetico (a) struttura (b) modello.	26
Fig. 2-9 Laminato composto da lamine alternate di alluminio ed auxetico.	27
Fig. 2-10 Meccanismo deformativo tessuto auxetico.	27
Fig. 2-11 Strutture cellulari auxetiche; (a) esagonale rientrante, (b) meccanismo deformativo esagonale rientrante , (c) a doppia punta di freccia, (d) con celle a losanghe, (e) a stella, (f) a griglia quadrata, (g) esagonale rientrante multipla, (h) rientrante con legamenti sinusoidali.	28
Fig. 2-12 Struttura esagonale rientrante ottenuta per ablazione laser con dimensione della cella di circa 1 millimetro.	29
Fig. 2-13 Schematizzazione della trazione per honeycomb a struttura (a) esagonale (b) esagonale rientrante.	30
Fig. 2-14 Variazione del modulo di taglio e di quello di comprimibilità in funzione della variazione del modulo di Poisson.	31
Fig. 2-15 Applicazione dei materiali auxetici all'interno di un proiettile.	35
Fig. 2-16 Confronto tra il comportamento in risposta ad esplosione in un tessuto auxetico e uno convenzionale usato comunemente in ambito militare.	35
Fig. 2-17 Profilo alare Eppler 420 con struttura interna costituita da un honeycomb auxetico in fibra di carbonio e deformazione rispetto la configurazione iniziale.	36

Fig. 3-1 Esempio di realizzazione di honeycomb a struttura esagonale chirale col taglio ad acqua.....	37
Fig. 3-2 (a) Geometria della singola cella (b) Honeycomb con geometria chirale esagonale con evidenziato un nodo.....	39
Fig. 3-3 Deformazione del singolo legamento; con e , e_1 , e_2 , si indicano gli spostamenti lungo le varie direzioni.	40
Fig. 4-1 Trasformazione di un reticolo periodico (a) con un continuo equivalente (b) tramite omogeneizzazione e rispettive celle elementari.....	41
Fig. 4-2 Rappresentazione del modello cinematico e statico micropolare nel caso 2D.....	44
Fig. 5-1 Parte irriducibile del reticolo necessaria per studiarne il comportamento globale: (a) geometria delle barre che legano i nodi rigidi, (b) cinematica dei nodi rigidi, (c) schema equivalente.	50
Fig. 5-2 Gradi di libertà degli elementi trave.....	51
Fig. 5-3 Spostamenti e deformazioni tipiche delle travi della cella.....	51
Fig. 6-1 Deformata a trazione per (a) honeycomb e (b) piastra.....	59
Fig. 6-2 Deformata a compressione per (a) honeycomb e (b) piastra.....	60
Fig. 6-3 Ampiezza degli spostamenti a trazione per (a) honeycomb e (b) piastra.....	61
Fig. 6-4 Spostamenti a trazione per honeycomb (a) nella direzione x e (b) nella direzione y ; e per la piastra omogena (c) nella direzione x e (d) nella direzione y	62
Fig. 6-5 Grafici dell'ampiezza degli spostamenti dei nodi della decima cella della piastra omogenea (rosso) e dell'honeycomb (blu) in Patran.....	63
Fig. 6-6 Sovrapposizione grafici dell'ampiezza degli spostamenti dei nodi della decima cella della piastra omogenea (rosso) e dell'honeycomb (blu) in Matlab.....	64
Fig. 6-7 Interpolazione dei dati dell'ampiezza degli spostamenti dei nodi della decima cella (a) dell'honeycomb della (b) piastra omogenea in Matlab.	65
Fig. 6-8 Rapporto tra le ampiezze degli spostamenti in y tra piastra omogenea ed honeycomb.	67
Fig. 7-1 Comportamento schematizzato di un materiale (a) convenzionale (b) auxetico.....	69
Fig. 7-2 Rappresentazione teorica del contatto.....	71
Fig. 7-3 Modello FEM costruito per simulare il contatto di Hertz.....	72
Fig. 7-4 Stress di Von Mises per il caso di una piastra di alluminio classica [MPa].....	74
Fig. 7-5 Deformata piastra auxetica con una forza su unità di lunghezza di 5000 N/mm.	75

Fig. 7-6 Distribuzione degli stress ottenuta per l'indentazione del materiale auxetico equivalente [MPa].	76
Fig. 7-7 Spostamenti in direzione y nel caso di indentazione della piastra auxetica [mm].	77
Fig. 7-8 Ampiezza degli spostamenti nel caso di indentazione della piastra auxetica [mm].	77
Fig. 7-9 Spostamenti in direzione x nel caso di indentazione della piastra auxetica (a) fringe [mm] (b) vettori	78
Fig. 7-10 Spostamenti nel caso di una piastra equivalente non auxetica (a) ampiezza (b) in direzione y [mm].	79
Fig. 7-11 Spostamenti nel caso di una piastra equivalente non auxetica in direzione x [mm].	80
Fig. 7-12 Alcuni vettori spostamento in direzione x nel caso di una piastra equivalente non auxetica.	80
Fig. 7-13 Andamento degli stress di von Mises per piastra equivalente non auxetica [MPa].	81
Fig. 7-14 Grafici spostamenti (a) ampiezza, (b) spostamenti in Y, (c) rapporto tra gli spostamenti in Y del non auxetico rispetto l'auxetico.	82
Fig. 7-15 Grafico degli spostamenti in direzione X.	83
Fig. 7-16 Grafico degli spostamenti in direzione X per nodi di una sezione centrale a 171 mm dall'incastro.	84
Fig. 7-17 Grafici per la sezione intermedia (a) dello spostamento in Y nei due casi, (b) del rapporto di ampiezza degli spostamenti, (c) del rapporto degli spostamenti in y.	85
Fig. 7-18 Stress di Von Mises nella sezione di mezzeria nei due casi.	86
Fig. 7-19 Rapporto tra le tensioni nella sezione di mezzeria del materiale auxetico col materiale non auxetico calcolate con Von Mises.	87
Fig. 7-20 (a) Andamento e (b) rapporto delle componenti x della tensione.	88
Fig. 7-21 Ampiezza spostamenti bordo superiore.	89
Fig. 7-22 Andamenti degli spostamenti: (a) ampiezza, (b) spostamenti in x, (c) spostamenti in y.	90
Fig. 7-23 Grafici degli spostamenti e dei rapporti tra honeycomb triangolare ed auxetico (a) in ampiezza, (b) in direzione x, (c) in direzione y.	91
Fig. 7-24 Stress calcolati con Von Mises nel reticolo triangolare.	92
Fig. 7-26 Rapporto degli stress di Von Mises nella sezione centrale.	93
Fig. 7-25 Stress nella sezione (a) di bordo e (b) a 161 mm dall'incastro	93

ELENCO TABELLE

Tab. 6-1 Caratteristiche geometriche scelte per l'honeycomb nel caso esagonale chirale.	57
Tab. 6-2 Parametri Calcolati per il caso esagonale chirale.	57
Tab. 6-3 Valutazione delle differenze degli spostamenti nei punti omologhi della piastra e dell'honeycomb.....	66
Tab. 6-4 Confronto risultati ottenuti con l'omogeneizzazione asintotica.....	68

1. INTRODUZIONE

1.1. Presentazione

Nella presente tesi si sono studiate le proprietà di resistenza ad indentazione di materiali con modulo di Poisson negativo, detti materiali auxetici. In particolare ci si è focalizzati su materiali auxetici reticolari costituiti dalla ripetizione periodica di una singola cella elementare. Di fatto quindi si sono studiate delle strutture periodiche, chiamate comunemente honeycomb, che hanno comportamento auxetico legato alla forma particolare delle celle elementari che lo compongono. Scelta una particolare configurazione, esagonale chirale, si sono presentate la descrizione teorica prevista e le caratteristiche peculiari, ma, prima di effettuarne un'analisi FEM per studiarne la risposta ad indentazione, si è compiuta l'omogeneizzazione del reticolo in modo da poter successivamente sostituire all'honeycomb un materiale equivalente che sia continuo ed omogeneo.

L'omogeneizzazione è effettuata basandosi sulla tecnica della densità dell'energia di deformazione. Il comportamento del materiale equivalente così ottenuto è confrontato con quello dell'honeycomb. Per il confronto si sono costruiti dei modelli FEM bidimensionali, tramite l'utilizzo dei software MSC Patran e MSC Nastran, sia per l'honeycomb che per il materiale equivalente sottoponendole alle stesse condizioni al contorno per poter successivamente valutarne variazioni nella risposta. I dati dell'analisi FEM sono stati esportati ed analizzati in ambiente Matlab per avere un paragone accurato delle due risposte.

Verificata la validità del processo di omogeneizzazione, si sono effettuate ulteriori simulazioni numeriche agli elementi finiti sul materiale equivalente omogeneizzato sul quale si costruisce un modello di contatto di Hertz al fine di simulare il comportamento ad indentazione.

Le risposte ottenute sono confrontate con quelle di un materiale non auxetico e quindi si è completata l'analisi confrontando tra i valori ricavati dalle due simulazioni al fine di provare la maggior resistenza teorica di questi materiali ad indentazione.

Il lavoro presenta nel seguente capitolo un'introduzione generale a quelle che sono le caratteristiche generali e quelle più singolari dei materiali auxetici. Vengono ricapitolate anche molte tipologie di materiali che hanno la caratteristica di avere modulo di Poisson negativo, il meccanismo deformativo e la struttura interna collegati a questa proprietà, il processo produttivo, la loro attuale o possibile applicazione; in sostanza un'ampia panoramica dell'attuale stato dell'arte in questo campo.

In seguito, nel capitolo 3, si è presentato lo studio teorico della particolare struttura cellulare scelta, i parametri che la definiscono e le caratteristiche che la contraddistinguono.

In seguito, nel capitolo 4, ci si è concentrati sugli aspetti teorici dell'omogeneizzazione in generale e sulla spiegazione della tipologia di omogeneizzazione scelta. Una piccola digressione sulla teoria del continuo micropolare si è resa necessaria in quanto immediatamente utilizzata, oltre ad essere molto aderente, per la trattazione dell'honeycomb chirale scelto. Nel capitolo 5 si sono applicati i concetti teorici spiegati illustrando l'applicazione del procedimento di omogeneizzazione nei vari passi effettuati. Nel capitolo 6 si sono compiute delle simulazioni numeriche per confrontare tramite due modelli FEM i risultati derivanti dell'omogeneizzazione rispetto la struttura chirale vera e propria.

Infine, nel capitolo 7, ci si è concentrati sulla parte riguardante l'indentazione. Dopo una breve introduzione teorica si è proceduto con l'illustrazione delle analisi FEM effettuate per la simulazione dell'indentazione in materiale auxetico. Le simulazioni sono precedute da un confronto tra i risultati numerici e quelli derivanti dalle formule teoriche del contatto di Hertz in modo da verificare la concordanza delle due trattazioni.

Nel caso dell'indentazione si sono messe a confronto le risposte ottenute per l'honeycomb chirale omogeneizzato, prima con quelle di un materiale convenzionale con le stesse proprietà elastiche tranne il modulo di Poisson che si pone positivo, e ,in seguito, con quelle di una struttura reticolare convenzionale con celle triangolari.

I capitoli finali racchiudo le conclusioni, gli aspetti particolari emersi e i possibili sviluppi futuri.

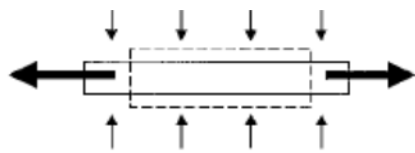
2. MATERIALI AUXETICI

La nostra esperienza quotidiana ci dice che quando sottoponiamo un materiale ad uno stato tensionale di trazione monoassiale, questo non solo si allunga nella direzione di stiramento ma ha anche un assottigliamento nella sezione trasversale. Analogamente, un materiale sottoposto a compressione solitamente si contrae nella direzione della compressione e si espande lateralmente, mentre a flessione pura nel piano presenta una curvatura anticlastica (Fig. 2-1(a)). Per descrivere lo stato di tensione e di deformazione dei materiali, la meccanica dei solidi fa tipicamente riferimento a quattro parametri fondamentali: il modulo di Young (E), e il modulo di Poisson (ν). Il modulo di Poisson per uno stato di sollecitazione monodirezionale è definito come il rapporto tra la deformazione trasversale (ε_j) e quella longitudinale (ε_i) rispetto la direzione di applicazione della forza al materiale:

$$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i} \quad (2.1)$$

Per materiali convenzionali, ν_{ij} è positivo, tuttavia la teoria classica dell'elasticità, basandosi su considerazioni energetiche, afferma che un materiale isotropo può avere $-1 < \nu_{ij} \leq 0.5$ dove il limite superiore rappresenta un materiale con modulo di comprimibilità infinito, mentre il limite inferiore rappresenta un materiale con infinito modulo a taglio. Storicamente il modulo di Poisson è la costante elastica meno studiata e non è raro che sia assunto positivo in molti casi sia per quanto riguarda studi teorici che per quanto riguarda la programmazione di software numerici (es. MSC Marc). Tuttavia, la possibilità che ν possa essere anche negativo è perfettamente accettata della teoria classica dell'elasticità da oltre 150 anni. In questi casi il materiale si dice auxetico e, a differenza dei comuni materiali con ν positivo, presenta un'espansione laterale quando è posto in trazione, una contrazione laterale se compresso e una curvatura sinclastica se sottoposto a pura flessione nel piano (Fig. 2-1 (b)).

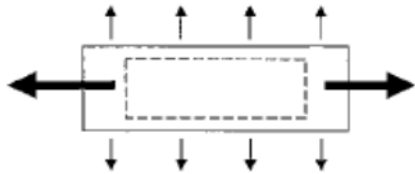
Lo sviluppo tecnologico moderno richiede nuovi materiali di proprietà speciali e quindi, in quest'ottica, lo studio dei materiali auxetici e l'interesse per le loro inusuali proprietà meccaniche risultano essere del tutto giustificati dalla necessità di soddisfare nuove esigenze.



(a) Non Auxetico



Anticlastica



(b) Auxetico



Sinclastica

Fig. 2-1 Comportamento a trazione e a flessione per materiale (a) non auxetico (b) auxetico.

2.2. Tipologie di Materiali

Lo studio di questi materiali è relativamente recente, anche se già nella prima parte del secolo si erano scoperti materiali presenti in natura che sembravano manifestare un comportamento auxetico in particolari direzioni [1]. In natura i monocristalli di arsenico [2] e cadmio [3], l' α -cristobalite polimorfa di silice cristallina [4], una famiglia di minerali, denominata zeoliti, con una struttura cristallina regolare e microporosa caratterizzati da un'enorme quantità di volumi vuoti interni ai cristalli [5], la grafite usata nei reattori nucleari [6], ma anche materiali biomolecolari come la pelle dei gatti [7], manifestano comportamento auxetico. I meccanismi che danno una caratterizzazione auxetica a questi materiali sono stati studiati. Ad esempio l' α -cristobalite polimorfa di silice cristallina ha una struttura costituita da tetraedri di SiO_4 con al centro un atomo di silicio e attorno, quattro vertici di ossigeno ognuno dei quali è condiviso come vertice di un altro tetraedro. L'applicazione di una tensione esterna causa un meccanismo rotativo dei tetraedri attorno ad un asse passante per due punti intermedi di due lati opposti. La rotazione cooperante di tutti i tetraedri causa un complessivo effetto auxetico [8]. Il meccanismo non è ancora noto nei dettagli, anche se si è riusciti a riprodurre con modelli molecolari e quantistici i risultati ottenuti sperimentalmente [9]. Infine da notare che è stato scoperto che il 69% dei materiali metalli con struttura semplicemente cubica e alcuni solidi di gas nobili con struttura cubica a facce centrate sono auxetici quando allungati in una particolare direzione [10].

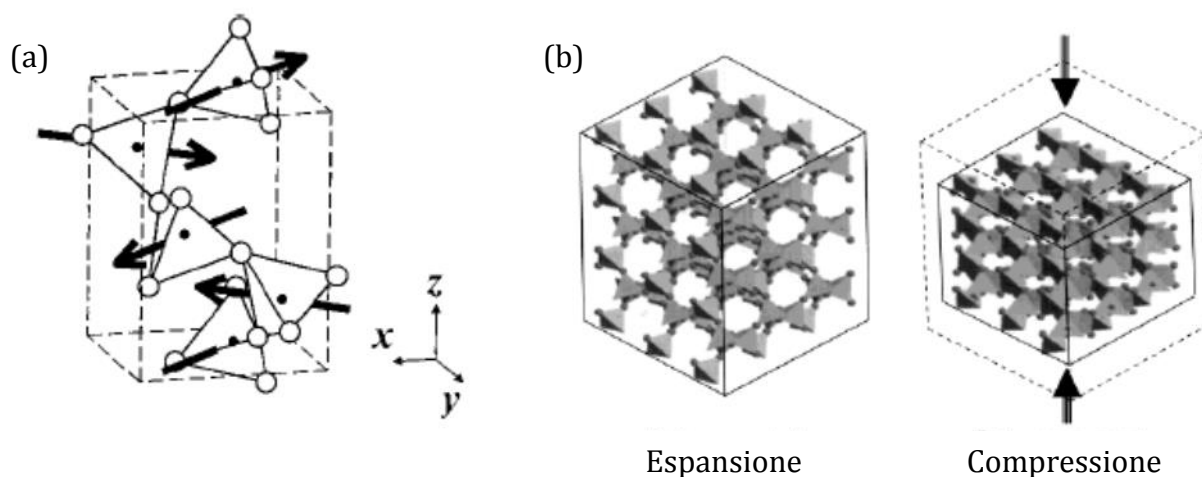


Fig. 2-2 (a) Struttura interna e asse di rotazione e (b) comportamento deformativo supposto dell' α -cristobalite polimorfa di silice cristallina.

Per quanto riguarda i materiali auxetici fabbricati dall'uomo, sono stati molteplici soprattutto nell'ultimo ventennio, ad esempio tra i polimeri alcune tipologie di poliuretano espanso (PU) [11], politetrafluoroetilene (PTFE) microporoso [12], polietilene microporoso ad altissimo peso molecolare (UHMWPE) [13]. Much attention è stata rivolta soprattutto recentemente a quest'ultimo polimero dato l'ampio campo di valori che il modulo di Poisson può assumere in relazione a come si organizza la microstruttura e quindi legato anche al processo produttivo. La forma auxetica dell'UHMWPE è stata realizzata mutuando i passi produttivi dalla tecnica della metallurgia delle polveri, compattazione, sinterizzazione, estrusione. La compattazione della polvere di materiale avviene all'interno di un tubo cieco riscaldato, in seguito si raffredda il compattato prima di sinterizzarlo ed estruderlo immediatamente dopo l'estrusione. Si ottiene un materiale con modulo di Young comparabile a quello dei convenzionali polimeri termoplastici ($\sim 0.2 \text{ GPa}$) e modulo di Poisson attorno a -0.4 . Immagini della microstruttura del polimero ottenute tramite microscopio elettronico a scansione (Fig. 2-5) mettono in luce il meccanismo deformativo auxetico, che caratterizza non solo l'UHMWPE ma molti polimeri, che è basato sull'interconnessione di particelle continue, dette noduli, tramite fibrille. La dimensione tipica è dell'ordine dei $20 \mu\text{m}$. Considerando la schematizzazione di Fig. 2-3 il meccanismo può essere spiegato considerando che le fibrille ruotano attorno alle giunzioni che le connettono ai nodi e che si allungano in risposta ad una tensione applicata. Il comportamento delle fibrille allontana tra loro i noduli dando un complessivo effetto auxetico. Le dimensioni dei nodi e delle fibrille influiscono significativamente sul valore del modulo di Poisson [14]. Inoltre anche le modalità produttive influenzano il risultato finale, comunque si riescono ad ottenere polimeri con modulo di Poisson anche pari a -4 [15].

Leggermente diverso è invece il meccanismo che conferisce comportamento auxetico al PTFE microporoso, e ai polimeri liquido-cristallini a catena principale. Ad una tensione applicata le fibrille, o la catena principale nei polimeri liquido cristallini, causano una rotazione dei noduli, a seconda dei punti d'attacco. I noduli ruotando dispongono il lato maggiore lungo la direzione ortogonale alle fibrille in tensione allargando la sezione e creando un effetto auxetico (Fig. 2-4).

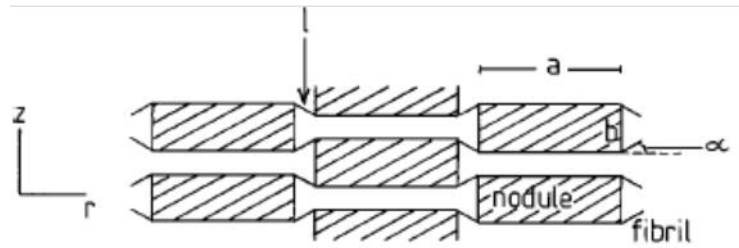


Fig. 2-3 Schematizzazione della struttura dei polimeri auxetici. Dove a e b sono le lunghezze maggiore e minore dei noduli rappresentati tramite triangoli, l è la lunghezza delle fibrille e α è l'angolo tra le fibrille e l'asse r.

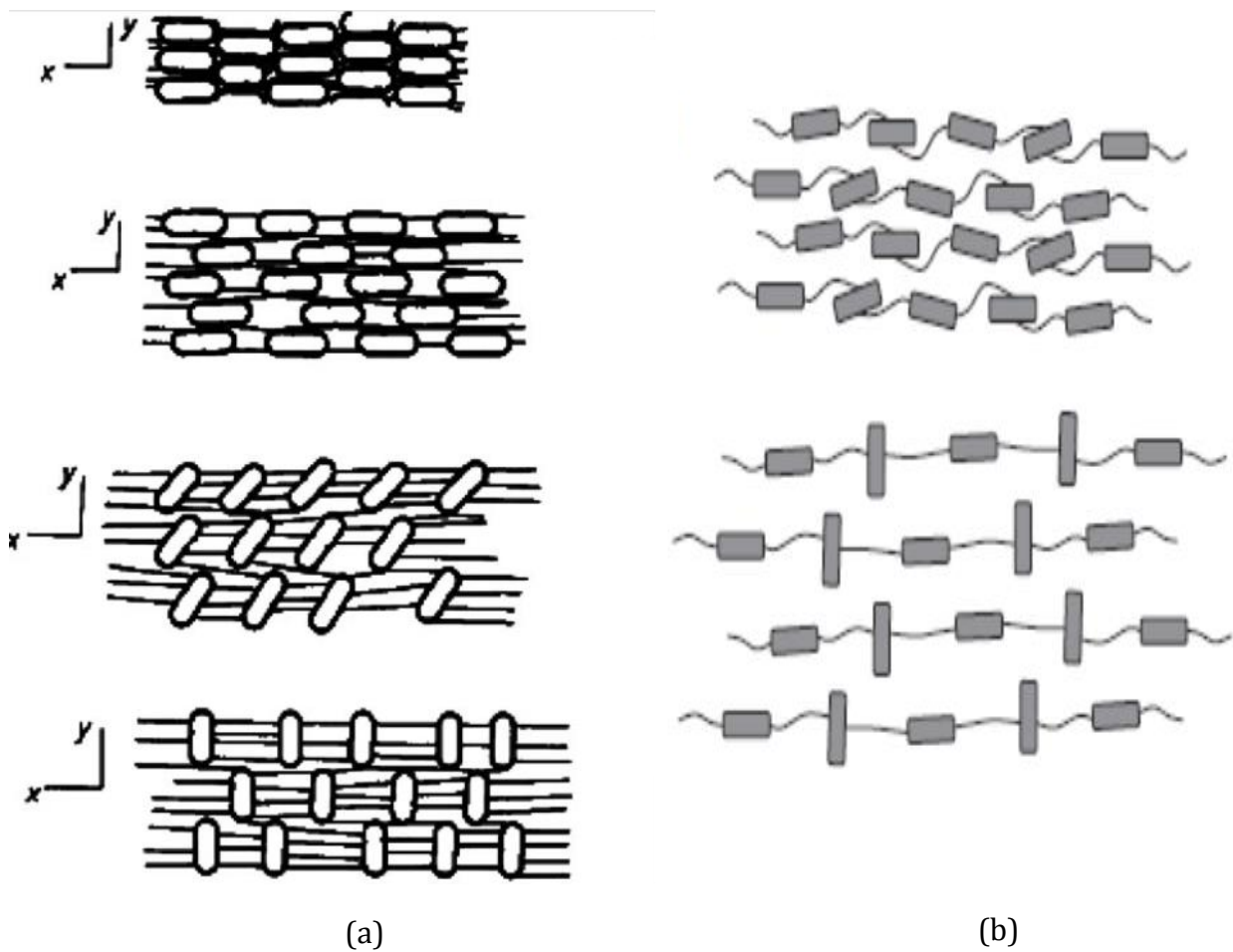


Fig. 2-4 Schemi della risposta strutturale in relazione ad una tensione applicata nella direzione x di (a) PTFE (b) polimeri liquido-cristallini a catena principale.

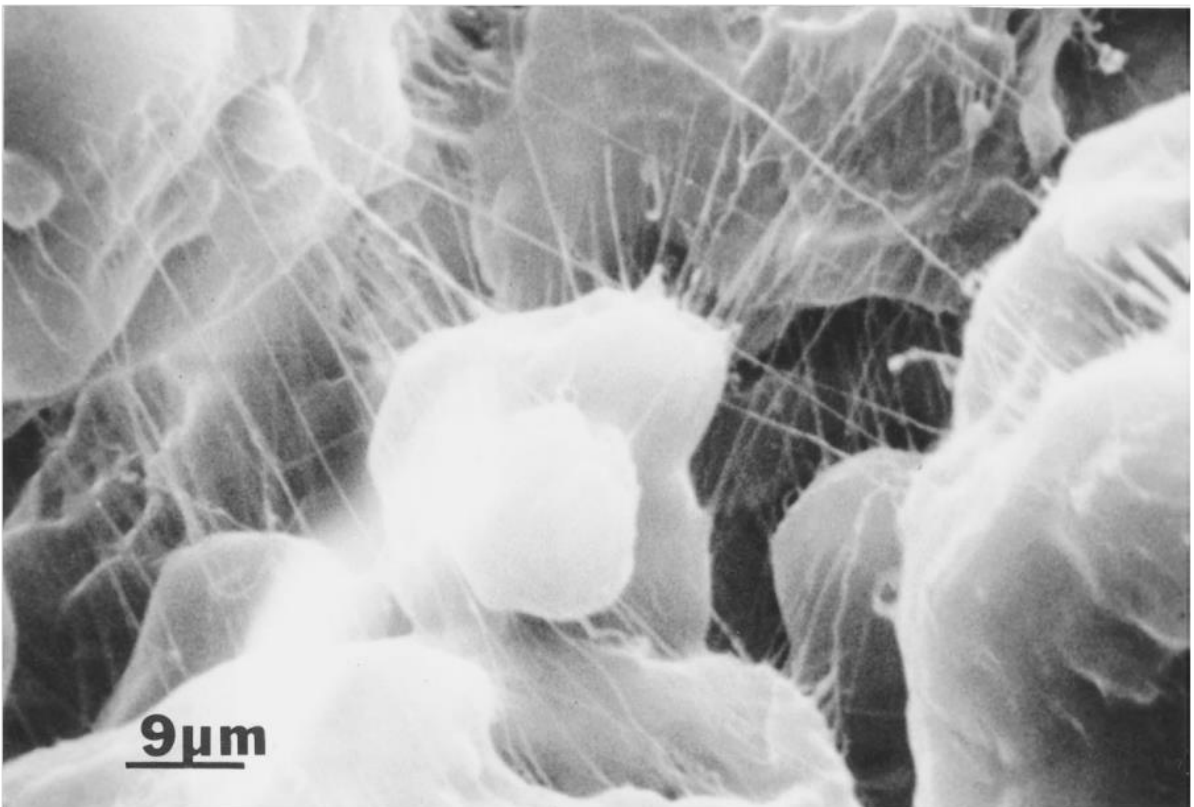
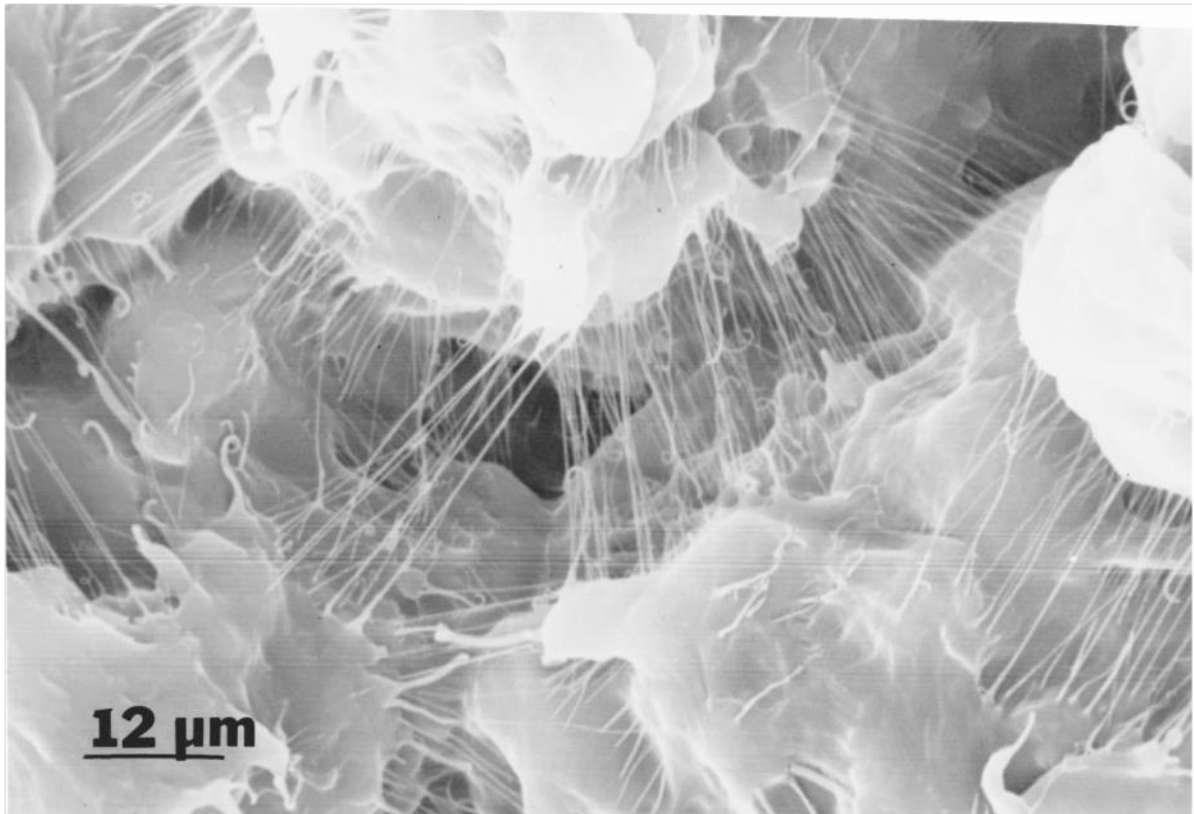


Fig. 2-5 Fotografie SEM a vari ingrandimenti di UHMWE.

In aggiunta ai polimeri sono stati creati altri materiali auxetici molecolari. Essi rappresentano al momento una delle maggiori direzioni di sviluppo in questo campo giacché è possibile caratterizzare le proprietà meccaniche del materiale forzandolo ad avere una struttura molecolare costituita da rientranze e cavità. Il primo tentativo di progettazione di un materiale auxetico a livello molecolare è stato fatto per un sistema bidimensionale costituito da una distribuzione periodica di esameri. La struttura è stata studiata schematizzandola come la classica cella esagonale rientrante degli honeycomb [16] (Fig. 2-6). In seguito altri materiali basati su diversi schemi come ad esempio quelli a catena intrecciata che sono risultati essere molto innovativi in quanto presentano anche espansione termica e comprimibilità negative, trasformazione da semiconduttore a metallo se esposti a drogaggio e altre proprietà singolari che sembra li rendano adatti, in via teorica, ad avere un comportamento a memoria di forma [17] [18].

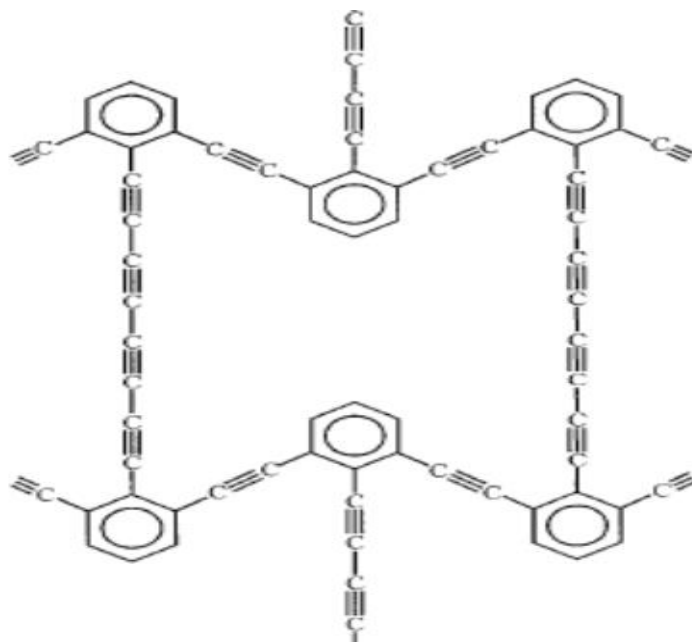
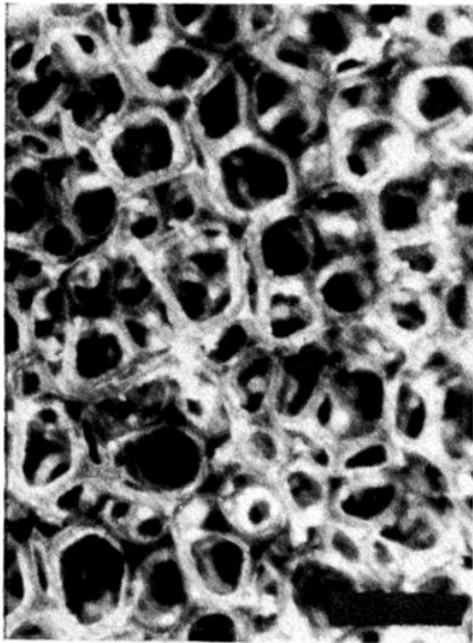


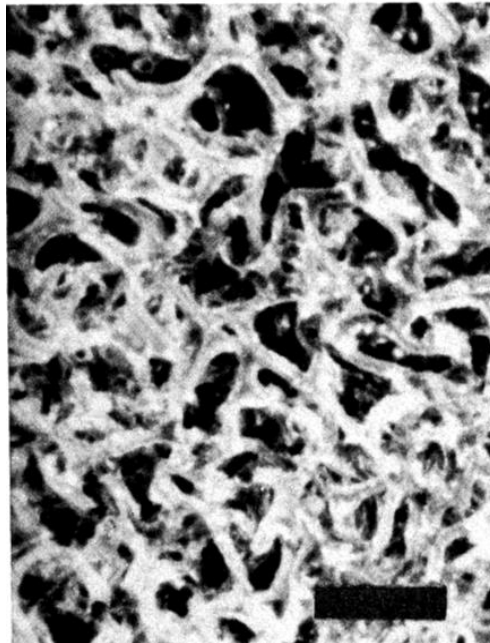
Fig. 2-6 Cella unitaria teorica del reticolo molecolare di un materiale auxetico costituito da esameri.

Andando su una dimensione di cella unitaria maggiore un'altra categoria di materiali auxetici fabbricati sono le schiume, come ad esempio quella di rame [19], o quella di poliestere [20].

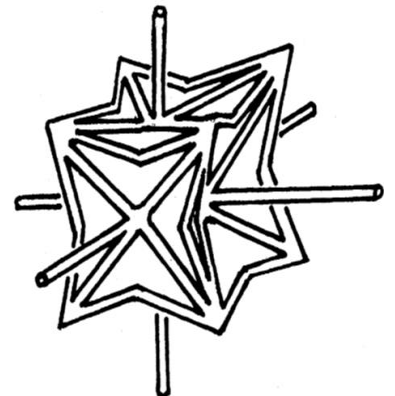
Le schiume polimeriche termoplastiche possono essere prodotte dalle comuni schiume polimeriche a bassa densità a cella aperta (cioè che contiene porosità) facendo rientrare i lati della cella verso l'interno in modo permanente trasformando la cella in rientrante. Ad esempio partendo da una normale schiuma di poliestere a celle aperte (Fig. 2-7 (a)) con



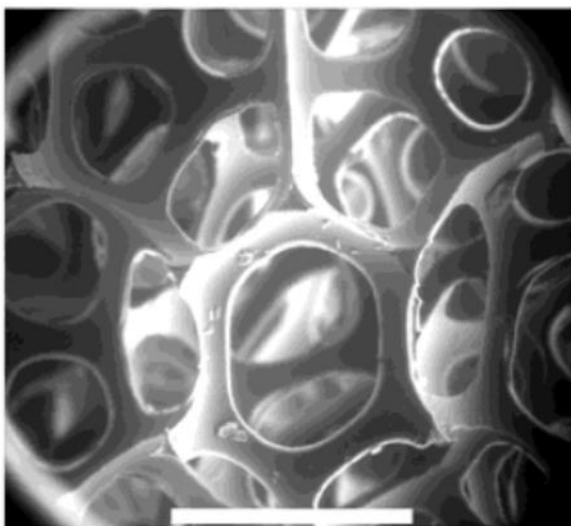
(a)



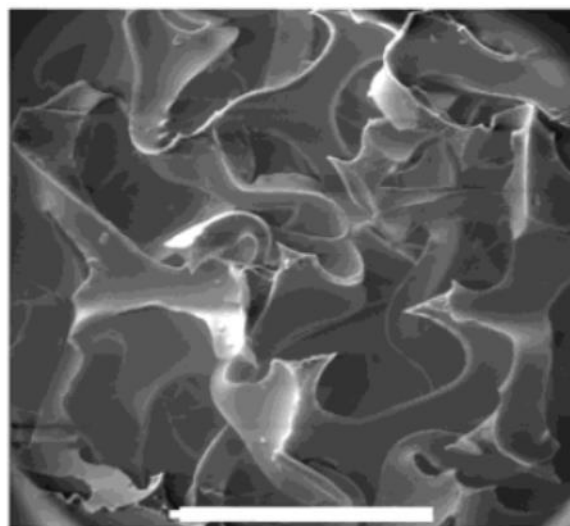
(b)



(c)



(d)



(e)

Fig. 2-7 Fotografie stereo di una schiuma (a) a celle aperte, (b) a celle rientranti con indicatore di scala di 2mm. (c) Schematizzazione idealizzata di una cella unitaria rientrante. Microimmagini ottenute tramite microscopio elettronico a scansione ambientale di una schiuma polimerica (d) convenzionale, (e) auxetica.

densità di 0.03 g/cm^3 , modulo di Young di 0.71 MPa , modulo di Poisson 0.4 e dimensione di cella di 1.2 mm , si è ricavata una struttura rientrante sottoponendola ad una compressione triassiale e ponendola in uno stampo prima riscaldato ad una temperatura leggermente superiore a quella di rammollimento ($163 \div 171 \text{ }^\circ\text{C}$ per il poliestere) e in seguito lasciato raffreddare a temperatura ambiente estraendo a quel punto la schiuma. Il risultato ottenuto per un fattore di compressione 2 è una schiuma con modulo di Young di 0.72 MPa e modulo di Poisson di -0.7 [20]. Per le schiume polimeriche termoindurenti si procede inizialmente come per le schiume convenzionali miscelando due parti di elastomero base e una di catalizzatore. Si lascia trasformare in schiuma che poi subisce una compressione tri-assiale durante la reticolazione causando la conformazione rientrante della cella.

Le schiume reticolari metalliche sono invece trasformate in auxetiche deformando il materiale in modo plastico a temperatura ambiente in applicando una compressione maniera uniassiale in varie direzioni successive fino a ridurre il volume della schiuma di un fattore compreso tra 2 e 4 , il punto di ottimo dipende dalla densità iniziale della schiuma. La struttura interna della schiuma conferisce comportamento auxetico allo stesso modo di quelle polimeriche [21].

Anche compositi e laminati possono essere fabbricati con una struttura tale da dare un comportamento macroscopico auxetico. Il grande numero di possibilità di assetti interni, la varietà di tipologia e distribuzione dei rinforzi, permettono ai compositi di essere una categoria di materiali molto allettante per lo sviluppo dei materiali auxetici. Per i compositi polimerici ciò è possibile, principalmente, progettando in modo adeguato la struttura interna composta da materiali convenzionali o inserendo fibre auxetiche al suo interno. Nel primo caso la strada è quella di organizzare la disposizione degli strati che compongono il laminato e la loro costituzione interna in modo da ottenere un comportamento auxetico macroscopico. In questo modo si può creare un effetto auxetico sia in piano sia in direzione trasversale. Per fare ciò è comunque necessario basare ogni strato su un materiale che abbia comportamento fortemente anisotropo [22] e quindi la combinazione fibra/matrice del tipo carbonio/epossidica è preferibile alla combinazione Kevlar/epossidica. I moduli di Poisson ottenuti sono però relativamente modesti ($\nu = -0.17$) e per incrementarli, oltre ad utilizzare software dedicati per la progettazione, si è pensato di inserire all'interno della lamina inclusioni speciali a forma di stella (ma non solo), la cui geometria contribuisca alla massimizzazione del comportamento auxetico [23]. Nel secondo caso la strada percorsa è quella di introdurre dei rinforzi auxetici direttamente nel composito. Il vantaggio di utilizzare rinforzi con modulo di Poisson negativo sono evidenti per quanto riguarda la resistenza a

pull-out delle fibre. Infatti una fibra auxetica espandendosi lateralmente attua un fenomeno di auto-vincolo aggiuntivo che porta il composito ad aumentare di più di due volte il carico massimo applicabile [24]. Le linee guida del processo di fabbricazione di fibre auxetiche di polipropilene sono le seguenti. Come primo passo si divide finemente il materiale compatto formando particelle di dimensione compresa tra $50 \div 300 \mu m$, in seguito si esegue una compattazione dei grani all'interno di un tubo cieco, con diametro attorno alla decina di millimetri. La fibra così ottenuta viene fatta raffreddare mentre si riscalda la matrice dell'estrusore. Infine si sinterizza la fibra raffreddata e completata la sinterizzazione si estrude immediatamente riducendo il diametro della fibra a pochi millimetri [25] [15].

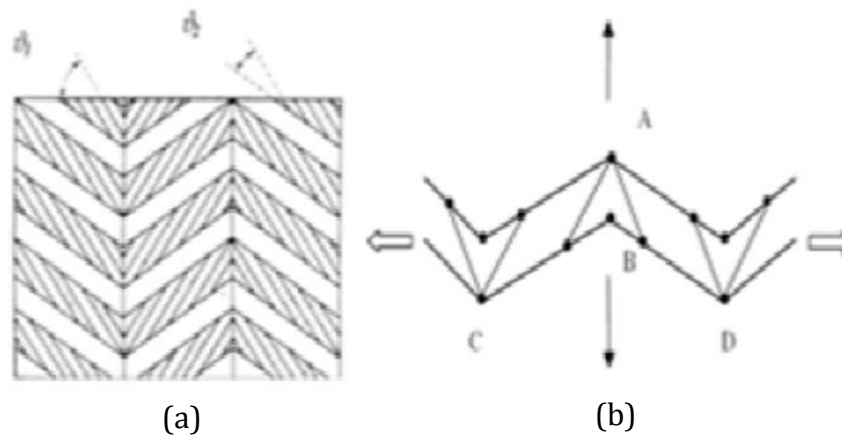


Fig. 2-8 Composito auxetico (a) struttura (b) modello.

Nel caso dei laminati si sono studiate due soluzioni principali. La prima è utilizzare lamine fortemente anisotrope in modo da dare un comportamento auxetico complessivo in relazione alla frazione volumica delle fibre, anisotropia ed orientazione [26], la seconda è quella di alternare in modo opportuno un materiale convenzionale ed un auxetico non solo per dare Poisson negativo complessivo, ma per migliorare le proprietà meccaniche del composito. Infatti sono stati studiati in forma numerica laminati costituiti da una successione di lamine alluminio-auxetico (Fig. 2-9). I risultati ottenuti evidenziano l'aumento complessivo del modulo di Young, della resistenza a taglio e dello smorzamento delle vibrazioni [27].

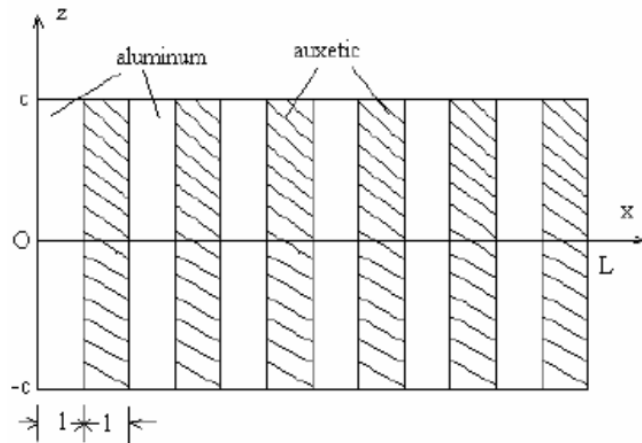


Fig. 2-9 Laminato composto da lamine alternate di alluminio ed auxetico.

Dalla produzione di filamenti polimerici è possibile anche ricavare tessuti auxetici ottenuti intrecciando i fili, come in una lavorazione a maglia o come tessuti veri e propri, secondo schemi ben determinati che permettono di ottenere un effetto auxetico anche utilizzando filamenti che non lo sono [28]. Lo studio in questo campo ha prodotto una serie di configurazioni geometriche per i tessuti con molteplici meccanismi deformativi. In particolare un tessuto denominato Zetix® in cui ogni singolo filo è composto da uno centrale auxetico più spesso su cui si avvolge un altro più sottile ad alta resistenza in modo elicoidale. Quando viene posto in tensione si aprono migliaia di piccoli pori che allargano la struttura in direzione ortogonale allo sforzo.



Fig. 2-10 Meccanismo deformativo tessuto auxetico.

Infine come materiali auxetici sono stati costruiti numerosi honeycomb con svariate forme delle celle unitarie (Fig. 2-11). In realtà più correttamente si parla di strutture cellulari a comportamento auxetico piuttosto che di materiali veri e propri. La prima tipologia sviluppata è quella esagonale rientrante. Questo tipo di struttura, così come tutte quelle a geometria rientrante, si dovrebbe deformare teoricamente solamente allineando orizzontalmente i lati

diagonali e spostando quindi verticalmente l'incernieramento tra i due lati obliqui, in risposta ad uno sforzo orizzontale monoassiale (Fig. 2-11 (a)(b)) di fatto in realtà si deforma principalmente con la flessione delle parti diagonali col simultaneo allungamento assiale e deformazione all'incernieramento dovuta alla rotazione. Le tecniche di produzione di questo tipo di strutture sono ancora poco sviluppate nel caso di dimensione di cella ridotta per essere inserite in vero e proprio processo produttivo. Tra le tecniche finora utilizzate si cita l'ablazione laser che permette di ottenere celle di dimensione di millimetri [29] (Fig. 2-12). Per dimensioni maggiori della cella, soprattutto per il caso esagonale rientrante, si può usare la tecnologia già sviluppata per i normali honeycomb cambiando l'inclinazione del legamento diagonale. Honeycomb ceramici auxetici possono essere prodotti estrudendo le paste ceramiche attraverso una matrice polimerica prodotta con la tecnica della sinterizzazione laser e disegnata tramite tecnologia CAD [30]. Pannelli sandwich sono stati fabbricati utilizzando come struttura interna honeycomb auxetici, ad esempio quella esagonale rientrante o a stella (Fig. 2-11 (a)(e)), di solito di alluminio o resina, circondati da una pelle fatta di un laminato composito con fibre di rinforzo [31]. Tali pannelli possono essere formati in forme doppiamente curve oppure a cupola sfruttando quelle che sono le particolari proprietà di curvatura sinclastica dei materiali auxetici. Questo elimina la necessità di tecniche di lavorazione costose e attenua i rischi di danno che si possono incontrare nei processi utilizzati modellare pannelli non auxetici.

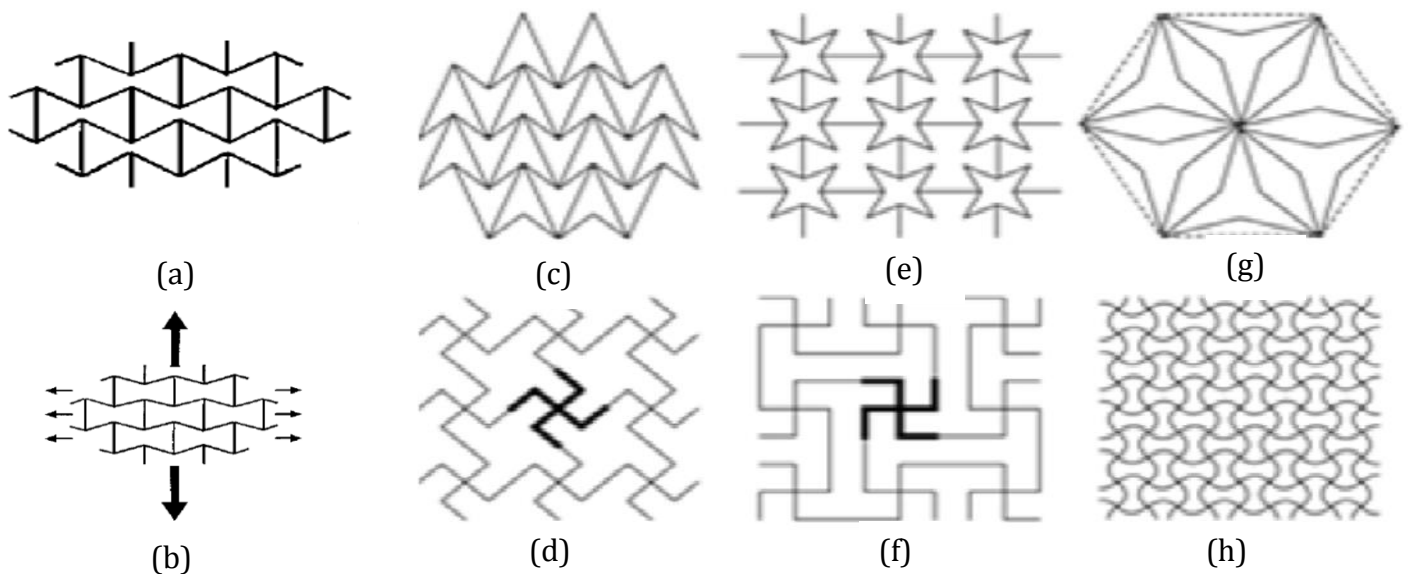


Fig. 2-11 Strutture cellulari auxetiche; (a) esagonale rientrante, (b) meccanismo deformativo esagonale rientrante, (c) a doppia punta di freccia, (d) con celle a losanghe, (e) a stella, (f) a griglia quadrata, (g) esagonale rientrante multipla, (h) rientrante con legamenti sinusoidali.

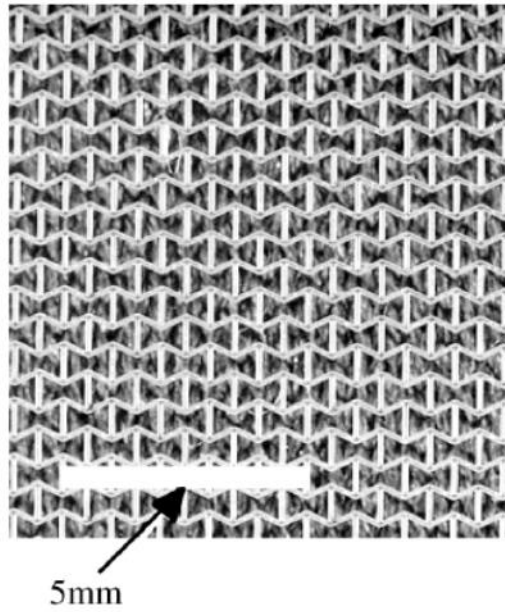


Fig. 2-12 Struttura esagonale rientrante ottenuta per ablazione laser con dimensione della cella di circa 1 millimetro.

2.3. Descrizione Generale

Il comportamento auxetico è determinato dalla geometria e dal meccanismo di deformazione della struttura interna del materiale. Un tipico esempio è dato dai reticoli di Fig. 2-13. Qui la struttura è simile nei due casi, cambia solamente l'inclinazione degli elementi superiori ed inferiori di ogni singola cella. Il comportamento a trazione cambia però in maniera drastica, infatti per singole celle aventi la convenzionale geometria esagonale (Fig. 2-2(a)) si ha che in risposta allo stiramento della rete nella direzione y si ha un allungamento lungo l'asse y e un restringimento lungo l'asse x dando un modulo di Poisson positivo. Al contrario nella struttura a nido d'ape rientrante (Fig. 2-13(b)), pur mantenendo lo stesso meccanismo di deformazione e lo stesso stato tensionale, all'allungamento nella direzione di trazione y corrisponde un allargamento in direzione x dando un modulo di Poisson negativo. Inoltre la struttura esagonale rientrante risulta essere anisotropa, cioè quando è caricato lungo l'asse x il valore del modulo di Poisson ν_{xy} , differisce da ν_{yx} ottenuto caricando l'honeycomb lungo la direzione y .

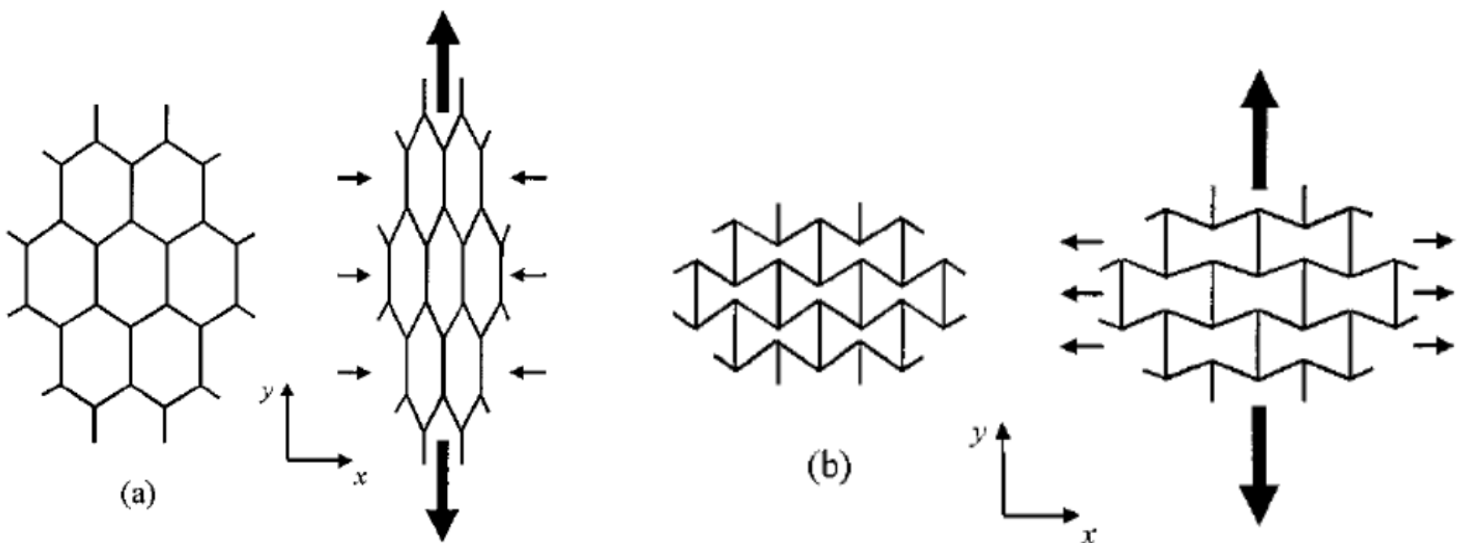


Fig. 2-13 Schematizzazione della trazione per honeycomb a struttura (a) esagonale (b) esagonale rientrante.

La caratteristica auxetica dei materiali è molto interessante, ed anche se è un campo di studio relativamente recente, sono già state messi in evidenza diversi aspetti peculiari del comportamento meccanico e non solo.

2.4. Caratteristiche Notevoli

È importante indagare e comprendere le interazioni all'interno della struttura del materiale che danno luogo al comportamento auxetico, in quanto il cambiamento significativo del rapporto di Poisson si riflette sulle prestazioni meccaniche dei materiali. I materiali auxetici presentano alcune proprietà che sono differenti rispetto ai materiali comuni. A carattere generale si nota che, facendo riferimento alla teoria classica dell'elasticità, la negatività del modulo di Poisson nei materiali dovrebbe portare a miglioramenti di alcune proprietà meccaniche, come ad esempio un aumento del modulo di taglio rispetto a quelli tradizionali. Infatti facendo riferimento alla formula classica si ha che:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.2)$$

Risulta quindi evidente che avere un modulo di Poisson negativo, a parità di modulo di Young, fa aumentare il modulo a taglio. Per controparte il modulo di comprimibilità $K = E/(3(1 - 2\nu))$ cala, anche se in modo meno significativo (Fig. 2-14), in altre parole il materiale diventa più resistente al taglio e meno alla deformazione di massa. Per alcune applicazioni strutturali inoltre si è generalmente portati a preferire alti G rispetto ad alti .

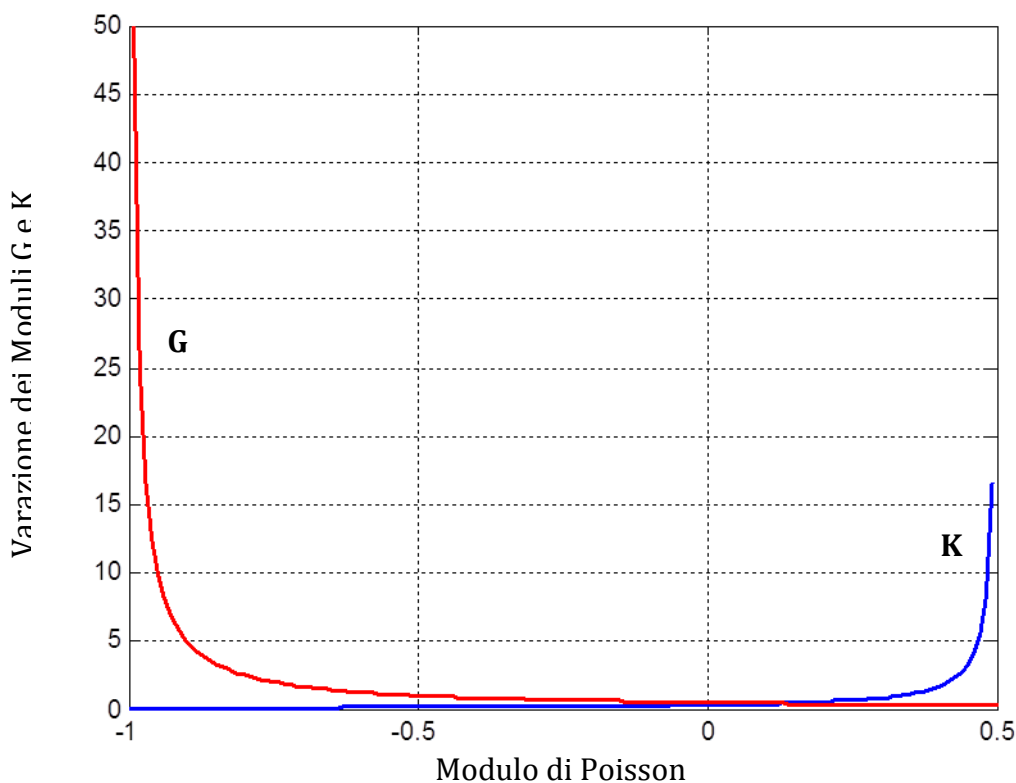


Fig. 2-14 Variazione del modulo di taglio e di quello di comprimibilità in funzione della variazione del modulo di Poisson.

Dall'eq. (2.2) emerge anche che, mentre di norma nei materiali comuni il modulo di Young è 2÷3 volte superiore al modulo di taglio, al contrario negli auxetici è il modulo a taglio ad essere superiore [32].

Oltre all'aumento del modulo a taglio altre proprietà caratteristiche degli auxetici sono state indagate nel tempo.

2.4.2. Assorbimento Energetico

I materiali auxetici mostrano, come una delle caratteristiche principali, una superiore capacità di assorbimento dell'energia sia dal punto di vista acustico che ultrasonico ed anche per lo smorzamento classico. In particolare le schiume auxetiche sono state individuate come migliori assorbitori sonori alle basse frequenze [33] e di vibrazioni d'impatto in generale rispetto le schiume convenzionali [34]. In particolare s'individua che le schiume auxetiche con porosità di dimensione inferiore hanno caratteristiche di assorbimento migliori rispetto a quelle con porosità maggiori per frequenze inferiori ai 630 Hz [35].

Anche le qualità di resistenza agli urti, studiate con un test di compressione ad alta velocità, imponendo una velocità di deformazione compressiva costante con valore di 1.5 m/s, sono risultate essere notevolmente migliorate per una schiuma di poliuretano auxetico rispetto a quello normale espanso con celle aperte [34].

2.4.3. Proprietà Viscoelastiche

Le proprietà viscoelastiche sono state indagate sperimentalmente in una particolare tipologia di composito che è composto di una matrice di schiuma di rame auxetica come matrice riempita da un elastomero viscoelastico oppure da indio. Dalle prove sperimentali emerge che la tangente di perdita (che fornisce una misura dello smorzamento del materiale) e la rigidità, per l'accoppiamento, sia con l'elastomero sia con l'indio, della schiuma auxetica è migliore rispetto a quello di una schiuma non auxetica [36].

2.4.4. Proprietà Meccaniche

Per quanto riguarda le proprietà meccaniche si riscontra un miglioramento del modulo di taglio elastico, teoricamente e sperimentalmente, nelle schiume auxetiche, legate alla diversa geometria della microstruttura e quindi le caratteristiche di deformazione [37] [38]. Un'analisi combinata delle caratteristiche meccaniche e dielettriche di honeycomb con celle a forma esagonale rientrante, rispetto quella esagonale classica (mantenendo la stessa densità relativa), evidenziano un aumento del modulo di Young trasversale [39]. Nei compositi con

spiccato comportamento auxetico si riesce ad aumentare notevolmente il modulo trasversale senza alterare quello longitudinale. Per esempio, cambiando il rapporto di Poisson di matrice da 0,3 a -0,9 e mantenendo tutte le altre proprietà costanti si produce un incremento di quasi quattro volte del modulo trasversale nel composito. Teoricamente si è anche mostrato che il comportamento auxetico si tradurrebbe nei materiali in un miglioramento della tenacità per la frattura (la maggiore resistenza alla frattura è stata evidenziata nei laminati non bilanciati con rapporto di Poisson negativo in uno studio sui carichi di punta nella frattura e sul fattore d'intensificazione degli stress) [40]. La tenacità frattura è stata indagata sperimentalmente in funzione del rapporto di compressione volumetrica, che è una variabile legata al processo produttivo, ed è risultato un aumento della tenacità all'aumento del rapporto [32]. Inoltre anche la resistenza alla propagazione delle cricche è migliorata poiché, pur essendo sottoposto a tensione, il materiale tenderà ad aumentare la densità in quella zona in cui lo stato tensionale è più gravoso rendendo più difficoltosa la propagazione della cricca [41].

2.4.5. Resistenza Indentazione

Prove sperimentali della resistenza ad indentazione dei materiali auxetici sono state eseguite sulle schiume di rame hanno mostrato una superiore tensione di snervamento ma modulo di Young inferiore rispetto alle tradizionali schiume aventi la stessa densità relativa [42]. Quando sperimentalmente si è studiato l'aumento della densità locale nella zona d'indentazione, dipendente dalla deformazione è emersa una maggiore resistenza ad indentazione indipendente dal modulo di comprimibilità. Questa è stata, quindi, associata all'addensamento del materiale nella zona d'indentazione, dove il campo di deformazione, sotto il penetratore, è molto più grande, probabilmente a causa di una maggiore rigidità a taglio. La resistenza ad indentazione è stata provata anche sul microporoso UHMWPE (ultra high molecular weight polyethylene) dove è emersa la dipendenza dal campo di spostamento, la durezza invece è risultata essere circa raddoppiata rispetto ad un UHMWPE convenzionale [43].

2.5. Applicazioni

Le peculiarità del comportamento auxetico hanno portato allo sviluppo della ricerca su questo tipo di materiali portando ad un numero sempre maggiore di tipologie, processi di fabbricazione, e metodi d'indagine e ampliando le possibilità di applicazioni specifiche. Schiume con struttura a celle curve o contorte sono state studiate per favorire la dispersione di onde acustiche e ottimizzare le frequenze di taglio in applicazioni che riguardano lo smorzamento sonoro [44]. Auxetici ceramici con struttura a nido d'ape sono stati prodotti dall'estrusione di paste ceramiche mediante stampi polimerici e trovano applicazione come substrato nei convertitori catalitici per le emissioni dei motori a combustione interna. In tali dispositivi la struttura deve fornire un'elevata resistenza allo shock termico prodotto dalle forti variazioni di temperatura. È possibile migliorare quest'aspetto incorporando nella struttura del catalizzatore materiali auxetici che siano in grado di assorbire o compensare le sollecitazioni di compressione e di trazione generate nel corpo dalla variazione termica in maniera opportuna; inoltre si sono migliorate le proprietà di disincrostazione del particolato nel catalizzatore [45]. Strutture auxetiche di larga scala in grafite sono già in uso nelle parti che formano i nuclei reattori nucleari [46]. Già utilizzata da anni, è la grafite pirolitica per la protezione termica in applicazioni aerospaziali [47], e anche i mono-cristalli di Ni_3Al sono da tempo impiegati come materiale per le palette delle turbine a gas dei motori degli aerei [10], anche se per questi ultimi tre casi il loro comportamento auxetico non è primario nelle funzioni rispetto le quali sono stati adottati.

Per quanto riguarda sviluppi più recenti, in campo medico è stato brevettato un dilatatore per allargare la cavità di un'arteria che trova applicazione nell'ambito della chirurgia cardiaca (angioplastica) [48].

Toyota ha recentemente brevettato un ciclo produttivo per compositi auxetici che andranno a costituire la struttura per un'unità di guida per l'alimentazione della rotazione del cambio [49]. Un altro composito auxetico formato da fibre di rinforzo utilizzato per la costruzione di scii è stato brevettato da Yamaha ed offre una minore resistenza al moto, facendo scivolare meglio gli scii [50]. Mitsubishi ha brevettato un 'narrow passage moving body with highly efficient movement', in sostanza un proiettile con una parte interna auxetica in modo che nel complesso il proiettile abbia modulo di Poisson nullo [51]. In questo caso il movimento del proiettile all'interno di un corpo è facilitato dalla riduzione dell'espansione laterale derivante dalla forza di spinta radiale. Inoltre il proiettile può essere sparato da un lanciatore elettromagnetico costruito in materiale auxetico e, per la protezione, si potrebbe beneficiare

di un giubbotto antiproiettile e di altri dispositivi di protezione individuale formati da materiale auxetico dato la loro migliore risposta ad impatto della loro proprietà impatto.

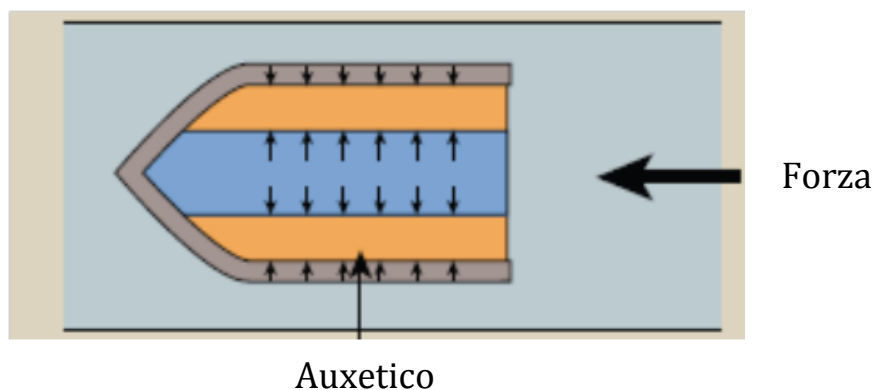


Fig. 2-15 Applicazione dei materiali auxetici all'interno di un proiettile.

In effetti la Defence Clothing and Textile Agency (DCTA) che si occupa di abbigliamento militare a Colchester sta compiendo degli studi in questo senso [52]. Questo campo, allettante economicamente, è oggetto d'interesse anche da parte di un'importante azienda che si occupa di materiali auxetici (Auxetix Ltd) che dichiara apertamente di compiere sforzi per lo sviluppo di tessuti auxetici (tra cui il già citato Zetix®) per la difesa. Infatti la mitigazione dell'impatto dovuto a schegge di mortaio o altre particelle, sembra poter migliorare ed quindi aumentare la protezione delle persone coinvolte. Inoltre se colorate adeguatamente si possono costruire reti che mimetizzano e danno una protezione maggiore rispetto a quelle convenzionalmente usate. Gli sviluppi sembrano interessanti ma c'è da rilevare che manca una vera e propria trattazione scientifica o comunque non divulgata in tutti i suoi aspetti e le considerazioni sono sempre espresse in modo qualitativo.



Fig. 2-16 Confronto tra il comportamento in risposta ad esplosione in un tessuto auxetico e uno convenzionale usato comunemente in ambito militare.

Sempre in ambito militare si è verificato essere utile l'uso di una matrice auxetica per la costruzione di compositi piezoelettrici (che convertono uno stress meccanico in un segnale termico e viceversa). Essi sono ampiamente usati per i ricevitori dei sonar navali (ma anche come componente delle macchine di acquisizione d'immagini ultrasoniche (ecografie) in ambito medico) e consistono in aste di una ceramica piezoelettrica rivestite da una matrice polimerica. Sostituendo alla matrice di materiale convenzionale, un'auxetica si è ottenuto un miglioramento della sensibilità di ricezione del sonar anche di un ordine di grandezza [53].

Un altro campo di applicazione è comunque quello aerospaziale. Infatti, oltre agli esempi sopracitati, si è riscontrato un forte interesse nell'applicazione di honeycomb auxetici nella struttura interna delle morphing wings. Le morphing wings sono un campo di ricerca molto attivo in ambito aerospaziale; col termine morphing si definiscono la serie di tecnologie che puntano a innalzare le prestazioni di un aereo modificandone certe caratteristiche per migliorare l'iterazione con l'ambiente esterno. In questo senso si vede l'immediata utilità dell'applicazione di questo concetto alle ali che si pensano non più rigide ma deformabili per generare, sia nel senso dell'apertura alare che la direzione della corda variazioni di camber un migliore adattamento al flusso d'aria a quelle condizioni di volo senza alcun dispositivo o attuatore aggiuntivo. In alcune soluzioni proposte si è alloggiata, all'interno del profilo aerodinamico, una struttura chirale cellulare che permetta una variazione continua del camber cambiando la forma geometrica del profilo alare inducendo una flessione rispetto alla direzione della corda combinata con la capacità di trasportare carichi torsionali pur mantenendo contenuti i pesi (Fig. 2-17). Gli studi fatti finora, sia numerici sia sperimentali sembrano essere incoraggianti in questo senso [54] [55] [56].

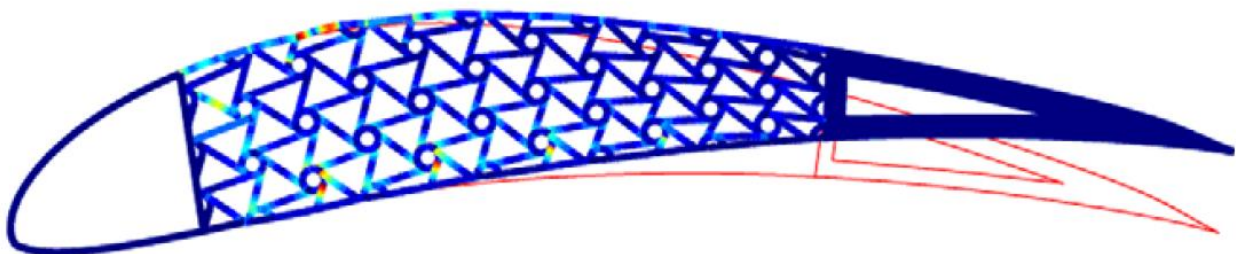


Fig. 2-17 Profilo alare Eppler 420 con struttura interna costituita da un honeycomb auxetico in fibra di carbonio e deformazione rispetto la configurazione iniziale.

3. HONEYCOMB AUXETICI STUDIATI

Le strutture auxetiche qui studiate sono quelle formate dalla ripetizione continua di una cella singola unità elementare che complessivamente va a costituire il reticolo del materiale ('honeycomb'). Questa tipologia è molto usata per molteplici ragioni, buon rapporto tra rigidità e peso, elevato assorbimento energetico, e la possibilità di progettare il comportamento macroscopico complessivo andando a modificare quelle che sono le caratteristiche geometriche della cella. Per la loro produzione si usano svariate tecniche tra cui, l'ablazione laser per fabbricare membrane polimeriche a nido d'ape auxetiche con dimensioni della cella di ~ 1 mm. In particolare ci si è occupati delle strutture cosiddette chirali. La chiralità è in senso generale la proprietà di avere un'immagine speculare non sovrapponibile a sé come avviene nel caso di una mano. Un oggetto con questa proprietà è detto chirale. In questa tipologia di strutture si forma per prima la cella unitaria di base connettendo le parti rettilinee al nodo centrale e quindi l'intera struttura viene assemblata collegando tra loro le varie celle unitarie. L'effetto auxetico è causato dall'impaccamento o dalla distensione dei tratti rettilinei attorno agli anelli in relazione all'applicazione di una forzante [57].

Reticoli con struttura di questo tipo sono stati prodotti per vari studi usando la tecnica del taglio ad acqua su pannelli di alluminio spessi circa 2 cm, che quindi sarà il valore della profondità della struttura, e con celle di dimensioni anche attorno ai 5 cm [55]. In alternativa si sono costruite celle di composito laminato tramite piegatura e unione successiva delle varie parti dell'unità elementare realizzando però dimensioni di cella maggiori (~ 20 cm) [54]. Infine anche strutture in plastica ABS sono state realizzate per vari test poiché è molto utilizzata e immediata nel campo della prototipazione rapida [56].

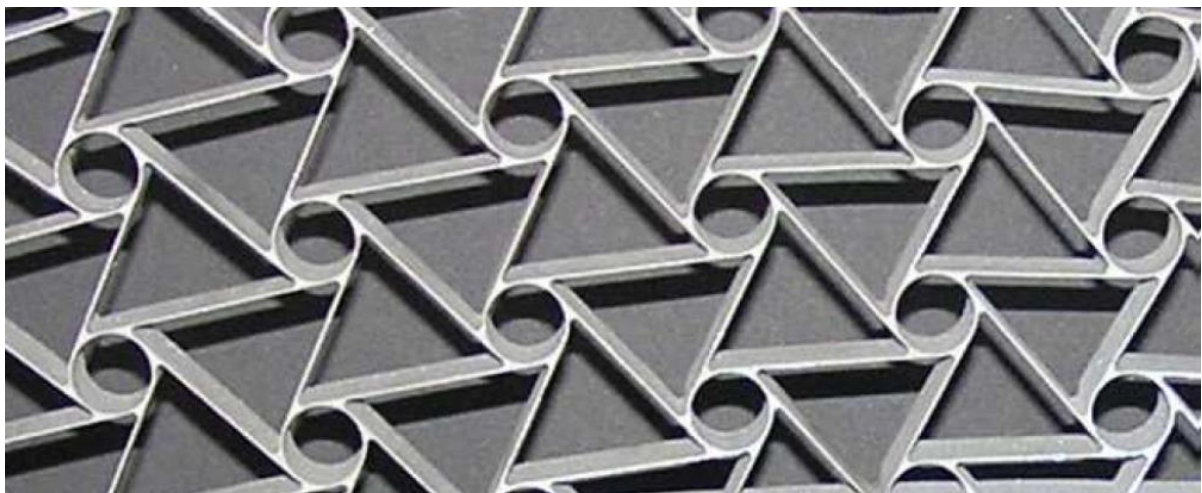


Fig. 3-1 Esempio di realizzazione di honeycomb a struttura esagonale chirale col taglio ad acqua.

3.1. Esagonale Chirale

3.1.1. Descrizione Teorica

Un tipo di struttura auxetica è quella esagonale chirale. Le celle sono formate connettendo dei legamenti rettilinei ad un nodo centrale. Nel caso in esame il nodo è circolare e raccorda sei legamenti, di uguale lunghezza, con punti di raccordo posti ad un angolo di 60° creando una struttura a geometria esagonale (Fig. 3-2(a)). L'effetto auxetico è dato da un meccanismo deformativo che, in relazione ad un carico nel piano, causa la rotazione del nodo centrale e della curvatura conseguente dei legamenti rettilinei. La struttura è composta da anelli di raggio r e spessore t_c connessi da legamenti di lunghezza L e spessore t_b . La distanza tra due nodi è individuata dal parametro R mentre β è l'angolo tra il legamento e la linea immaginaria che collega i centri di due anelli. Infine l'angolo tra due legamenti adiacenti è dato da 2θ . Dai teoremi della geometria e della trigonometria si possono trovare le seguenti relazioni:

$$\sin \beta = \frac{2r}{R} \quad (3.1)$$

$$\tan \beta = \frac{2r}{L} \quad (3.2)$$

$$\cos \beta = \frac{L}{R} \quad (3.3)$$

$$\sin \theta = \frac{R/2}{R} \quad (3.4)$$

Di conseguenza i vettori \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 che definiscono le direzioni di ripetizione della cella elementare per la definizione del reticolo sono dati da:

$$\mathbf{e}_1 = \{R \cos \theta, R \sin \theta\}^T \quad (3.5)$$

$$\mathbf{e}_2 = \{-R \cos \theta, R \sin \theta\}^T \quad (3.6)$$

Considerando come stato di partenza quello indeformato, si applica un carico di compressione uniassiale lungo la direzione X_1 , o X_2 (Fig. 3-2(b)).

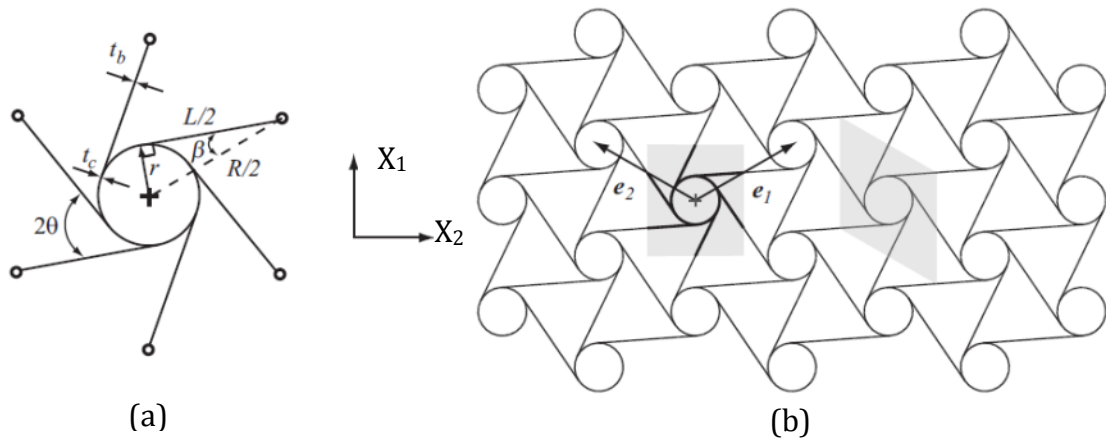


Fig. 3-2 (a) Geometria della singola cella (b) Honeycomb con geometria chirale esagonale con evidenziato un nodo.

I legamenti sono vincolati a rimanere attaccati ai nodi centrali, che ruotano in relazione alla sollecitazione applicata, e quindi si fletteranno in modo da conservare l'orientazione nei punti di contatto. Si possono trascurare le deformazioni dei legamenti legate alla compressione assiale e al taglio, dagli studi fatti da Gibson and Ashby [58] ciò è ammissibile fino a che il valore della densità relativa ρ/ρ_s , con ρ densità della struttura a nido d'ape e ρ_s densità del materiale di cui è fatta, non supera un valore critico di 0.29.

La densità relativa di un solido cellulare è definita come il volume occupato dalla fase solida, in questo caso le pareti della cella, normalizzata dalla somma dei volumi di tutte le fasi. Essendo che la seconda fase per il nostro caso è semplicemente il vuoto e non influenza la risposta statica o dinamica della struttura. Se si assume che le pareti della cella siano sottili si calcola la densità relativa come:

$$\bar{\rho} = \frac{\rho^*}{\rho_s} = \frac{2\pi r t_c + 6L t_b / 2}{R^2 \cos \theta} \quad (3.7)$$

Chiamando ϕ la rotazione angolare dei nodi centrali, si ha che la deflessione angolare del legamento misurata nel punto di contatto è proprio pari a ϕ dato che si deve conservare la tangenza in quel punto.

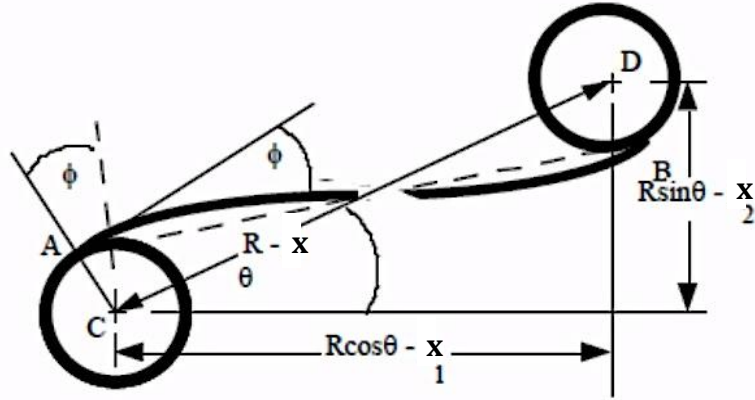


Fig. 3-3 Deformazione del singolo legamento; con e , e_1 , e_2 , si indicano gli spostamenti lungo le varie direzioni.

Supponendo che i nodi centrali siano rigidi, si ha che tutti gli spostamenti sono legati al comportamento deformativo dei legamenti; quindi dalle formule classiche si ricava che gli spostamenti sono dati da [57]:

$$\varepsilon_1 = \frac{2r \sin \phi \cos \theta}{R \cos \theta} \quad (3.8)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{2r \sin \phi \sin \theta}{R \sin \theta} \quad (3.9)$$

dove $\theta = 30^\circ$ è l'angolo definito in Fig. 3-2, che si suppone rimanga costante, r è il raggio della circonferenza e R è la lunghezza del legamento rettilineo; se assumiamo piccole deformazioni si ha che $r \sin \phi \approx r\phi$ e quindi risulta che :

$$\varepsilon_1 = 2\phi \frac{r}{R} \quad (3.10)$$

$$\varepsilon_2 = 2\phi \frac{r}{R} \quad (3.11)$$

e di conseguenza i moduli di Poisson nelle due direzioni risultano essere:

$$\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = -1 \quad (3.12)$$

$$\nu_{21} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = -1 \quad (3.13)$$

e quindi si hanno moduli di Poisson teorici unitari e negativi.

4. OMOGENEIZZAZIONE

4.1. Introduzione

Molti metodi per lo studio dei materiali auxetici costituiti da honeycomb sono stati sviluppati nel tempo.

Lo studio con l'utilizzo degli elementi finiti direttamente sul materiale cellulare, è l'approccio più immediato utilizzato, anche se, soprattutto per strutture grandi, è preferibile evitarlo in quanto sono richieste potenze e tempi di calcolo elevati e ridurre il numero di elementi FEM comporta un peggioramento dell'accuratezza delle soluzioni.

Un'altra tipologia di approccio è quella dei campi discreti in cui si scrivono le equazioni di equilibrio e della trave ai nodi di ciascun elemento della cella unitaria. In seguito s'introduce un operatore differenziale dipendente dagli spostamenti di un nodo di una cella al nodo omologo della cella successiva, e si sostituiscono a queste equazioni alle differenze finite delle espressioni differenziali sviluppate in serie di Taylor troncate ad un determinato ordine.

Infine si sono sviluppati anche numerosi metodi di omogeneizzazione che sostituiscono all'honeycomb reale un materiale continuo equivalente. In questo modo è possibile analizzare grandi strutture senza la necessità di elevati numeri di elementi finiti. Tale approccio permette inoltre di confrontare caratteristiche diverse (dinamiche, strutturali,...) modificando i parametri del materiale e geometrici costituenti la cella elementare, e di valutarne l'impatto globale all'interno di un sistema più complesso.

Il principio generale dell'omogeneizzazione è rappresentato in Fig. 4-1 nella quale il materiale discreto viene omogeneizzato con uno continuo equivalente.

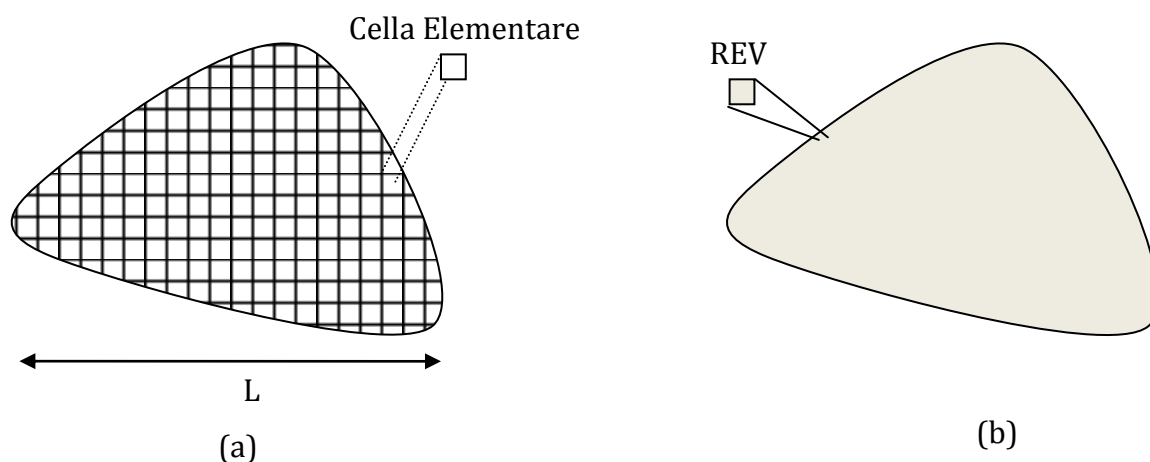


Fig. 4-1 Trasformazione di un reticolo periodico (a) con un continuo equivalente (b) tramite omogeneizzazione e rispettive celle elementari.

Il termine omogeneizzazione è utilizzato in analogia a quanto sviluppato per l'analisi di materiali eterogenei. Il significato è molto simile in quanto si sostituisce ad un materiale eterogeneo o discontinuo uno continuo equivalente, però in una struttura periodica si può fare basandosi delle ipotesi di partenza che definiscono già inizialmente che poi portano alla definizione di un materiale continuo. Inoltre mentre una grossa problematica dell'omogeneizzazione dei materiali eterogenei è la definizione del RVE (Representative Volume Element) qui è facilmente definito dalla cella elementare del reticolo, cioè dalla parte ripetitiva più piccola della struttura.

Tra i metodi più utilizzati per l'omogeneizzazione si possono citare:

1. La costruzione di un mezzo continuo tramite i campi medi;
2. L'omogeneizzazione asintotica discreta;
3. Omogeneizzazione tramite approccio energetico.

La costruzione di un mezzo continuo tramite i campi medi della deformazione e della tensione è basata sulle equazioni:

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \int_{\Gamma_{REV}} \frac{1}{2} (u_i n_j + u_j n_i) d\Gamma = \frac{1}{V} \int_{\Omega_{REV}} \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} d\Omega_{REV} \quad (4.1)$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \int_{\Gamma_{REV}} t_i x_j d\Gamma = \frac{1}{V} \int_{\Omega_{REV}} \sigma_{ij} d\Omega_{REV} \quad (4.2)$$

dove i, j sono le direzioni della terna di riferimento, $\bar{\varepsilon}_{ij}$ è la deformazione media, $\bar{\sigma}_{ij}$ la tensione media, n_i sono le componenti del vettore normale uscente dal contorno del REV (detto Γ_{REV} , mentre il volume è Ω_{REV}), t_i sono le componenti della tensione al contorno. Si ricavano le caratteristiche cercate ipotizzando che la deformazione nel REV sia uniforme e quindi praticamente si considera che tutti i nodi della cella unitaria siano sulla frontiera e che gli eventuali nodi interni vengano condensati tramite tecniche appropriate in essa [59] [60].

L'omogeneizzazione asintotica discreta si basa sulla tecnica dell'espansione asintotica basata sulla forma:

$$u(x, y) = u^0(x, y) + \zeta u^1(x, y) + \zeta^2 u^2(x, y) + \dots \quad (4.3)$$

dove ζ è un parametro rappresentativo del rapporto tra la lunghezza dell'intero reticolo e quella della cella unitaria e u è il campo degli spostamenti. Come primo passo si sviluppano le equazioni dell'equilibrio discreto all'interno della cella e si definiscono il comportamento macroscopico del mezzo discreto. Al passo successivo si formulano le equazioni di equilibrio

del mezzo continuo omogeneizzato studiando la cella elementare con i campi cinematici sviluppati in modo asintotico e quindi si ottiene il mezzo continuo omogeneizzato [61].

La costituzione di un mezzo continuo equivalente tramite un approccio energetico è quello utilizzato nelle sezioni di seguito. In linea generale consiste nell'isolare una cella elementare e definirne all'interno una distribuzione continua approssimata in serie di Taylor di un particolare campo cinematico per poi calcolare la densità di energia della singola cella e ricavare le proprietà desiderate. La singola cella diventerà parte di un mezzo continuo definendo così le proprietà di tutto il materiale equivalente.

4.2. Teoria Micropolare per Reticoli Chirali

Per descrivere il comportamento di strutture reticolari periodiche si può utilizzare la teoria micropolare (o di Cosserat) invece che della classica teoria della meccanica dei solidi.

Ci si riferisce a tale modello anche con il nome teoria diretta delle travi. I fratelli Eugène e François Cosserat introdussero nel 1909 un modello di corpi continui, detti micropolari, i cui punti materiali hanno i sei gradi di libertà del corpo rigido, ovvero sono capaci di una rotazione rigida locale indipendente dalla deformazione macroscopica del corpo.

Definito con Ω un generico corpo continuo di dimensione bidimensionale o tridimensionale, e chiamato $\partial\Omega$ il suo contorno sul quale sono imposte condizioni statiche o cinematiche. La definizione rigorosa del problema elastico lineare richiede l'individuazione dei campi che soddisfano contemporaneamente l'equilibrio, la compatibilità cinematica e le equazioni costitutive.

La cinematica di un continuo micropolare è caratterizzata dall'introduzione di un campo di deformazione aggiuntivo prodotto dal campo di microrotazione. Le microrotazioni sono indipendenti dal campo degli spostamenti.

Essendo ϕ il vettore delle microrotazioni nel punto il tensore di deformazione micropolare ε_{ij} è espresso come:

$$\varepsilon_{ij} = u_{j,i} - e_{kij}\phi_k \quad (4.4)$$

in $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, dove u_i è il vettore spostamento, ϕ_k è il vettore microrotazione e e_{kij} è il simbolo della permutazione di Levi-Civita e il pedice $()_{,i}$ indica la derivata parziale della quantità rispetto i . Già si nota la presenza del termine microrotazionale che fa differire l'equazione (4.4) da quella classica.

Inoltre si deve anche considerare la microrotazione della particella infinitesima di materiale [62]; il tensore delle microcurvature o tensore del gradiente delle microrotazioni, e definito come:

$$\kappa_{kl} = \phi_{l,k} \quad (4.5)$$

in $\bar{\Omega}$. Il campo di microrotazione è dovuto alla rotazione relativa delle particelle all'interno dell'elemento infinitesimo. Micro-curvature sono prodotte dai gradienti di microrotazione, cioè alla rotazione relativa tra le particelle materiali dell'elemento infinitesimo (in Fig. 4-2 si è riportata una schematizzazione nel caso 2D).

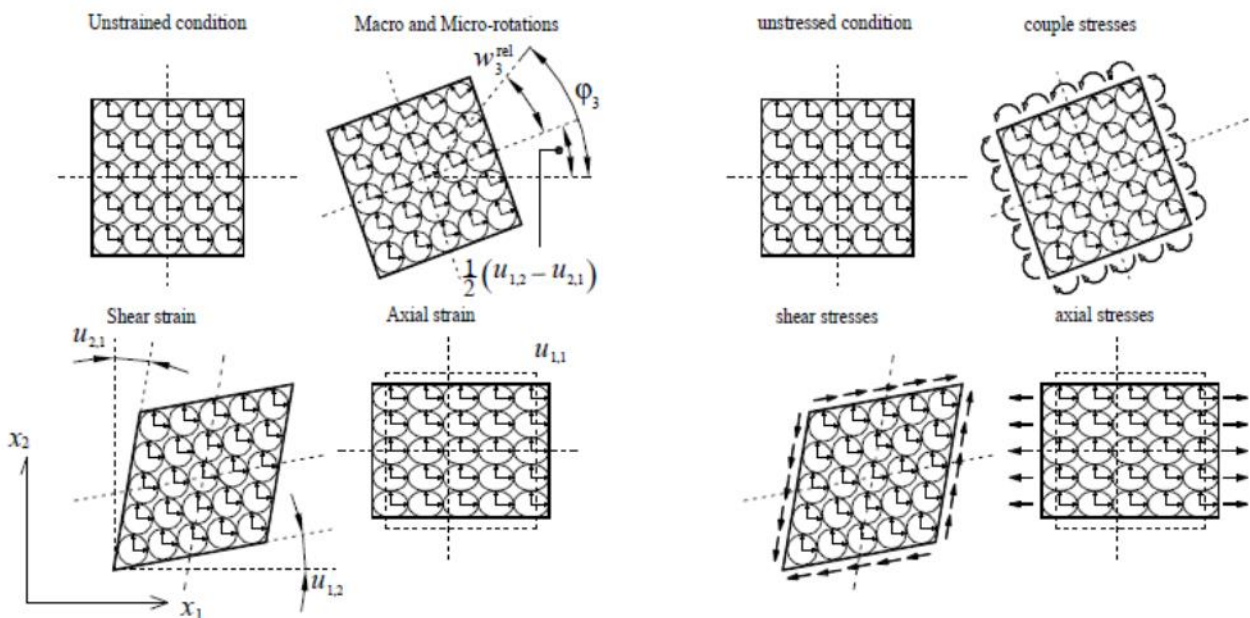


Fig. 4-2 Rappresentazione del modello cinematico e statico micropolare nel caso 2D.

Vediamo ora le equazioni di equilibrio. In una descrizione di continuo alla Cauchy i campi richiesti sono il vettore degli spostamenti \mathbf{u} , il tensore simmetrico delle deformazioni $\boldsymbol{\varepsilon}$ il tensore simmetrico della tensione $\boldsymbol{\sigma}$. Nel caso del modello di Cosserat i campi sono gli stessi ma i due tensori di tensioni e di deformazioni non sono più simmetrici. Inoltre tra i campi da determinare si devono aggiungere il tensore delle coppie di tensione m_{ij} oltre ai già presentati tensore di coppia-deformazione κ_{kl} e il tensore ϕ rappresentante la microrotazione nel punto. Le condizioni di equilibrio sono dunque definite come segue:

$$\sigma_{ji,j} + f_i = 0 \quad (4.6)$$

$$m_{ji,j} + e_{ilk}\sigma_{lk} + g_i = 0 \quad (4.7)$$

in Ω . La prima equazione rappresenta il bilancio del momento lineare, cioè l'equazione del moto di Cauchy, sotto l'azione delle forze di volume, f_i (a meno delle forze d'inerzia). La seconda è il bilancio del momento angolare sotto l'azione delle coppie di volume, g_i . Nel caso di continuo alla Cauchy le coppie di volume g_i e il tensore di delle coppie di tensione sono assenti e quindi l'equazione (4.7) diventa semplicemente la condizione di simmetria del tensore di tensione σ . Mancano però le condizioni di equilibrio al contorno. Considerando la porzione di bordo $\partial\Omega_{(t,c)} = \partial\Omega_t \cup \partial\Omega_c$, in cui agiscono le coppie \bar{c}_i e le forze \bar{t}_i (con $\partial\Omega_t \cap \partial\Omega_c$ che può essere diverso da zero), e la porzione di bordo $\partial\Omega_{(u,\phi)} = \partial\Omega_u \cup \partial\Omega_\phi$, in cui s'impongono gli spostamenti \bar{u}_i e le microrotazioni $\bar{\phi}_i$ (con $\partial\Omega_u \cap \partial\Omega_\phi$ che può essere diverso da zero) si hanno le seguenti condizioni al contorno cinematiche e tensionali:

$$\sigma_{ji}n_j = \bar{t}_i \quad (4.8)$$

$$m_{ji}n_j = \bar{c}_i \quad (4.9)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad (4.10)$$

$$\phi_i = \bar{\phi}_i \quad (4.11)$$

con n_j che definisce la direzione esterna normale al bordo.

La densità di energia di deformazione per un mezzo micropolare lineare elastico è esprimibile per mezzo i tensori asimmetrici di microcurvatura e di deformazione in forma quadratica come:

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} A_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} \kappa_{ij} C_{ijkl} \kappa_{kl} + \varepsilon_{ij} B_{ijkl} \kappa_{kl} \quad (4.12)$$

in $\bar{\Omega}$. Dove \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} sono tensori di rigidità del quarto ordine; A_{ijkl} associa tensioni e deformazioni convenzionali, C_{ijkl} associa coppie di tensione con le microcurvature, e il tensore B_{ijkl} , chiamato 'pseudo-tensore', esso assume valore nullo in tutte le sue componenti,

nel caso in cui il materiale sia micropolare isotropo; questo tensore è responsabile dell'accoppiamento tra coppie di tensione e deformazioni e tra tensioni e microcurvature. I tensori A_{jikl} e C_{jikl} godono delle proprietà di simmetria maggiore $A_{ijkl} = A_{klij}$ e $C_{ijkl} = C_{klij}$, le simmetrie minori non sono garantite a causa della presenza di una parte antisimmetrica del tensore di deformazione totale (o deformazione micropolare) e del tensore di microcurvatura.

Di conseguenza essendo che:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (4.13)$$

$$m_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon \kappa_{ij}} \quad (4.14)$$

è possibile ricavare le equazioni costitutive per un solido elastico lineare micropolare (anisotropo) come:

$$\sigma_{ji} = A_{ijkl} \varepsilon_{kl} + B_{ijkl} \kappa_{kl} \quad (4.15)$$

$$m_{ji} = B_{ijkl} \varepsilon_{kl} + C_{ijkl} \kappa_{kl} \quad (4.16)$$

in $\bar{\Omega}$. Il pseudo-tensore B_{jikl} è quello che rappresenta il comportamento chirale. Nel caso 2D però si ha che $u_3 = \phi_1 = \phi_2 = \frac{\partial}{\partial x_3} = 0$ con direzione 3 uscente dal piano. Questo porta all'annullamento del tensore isotropo e quindi della componente chirale del sistema. Per evitare la perdita della parte chirale del problema nel caso 2D si divide in due parti il tensore A_{ijkl} tramite l'utilizzo del delta di Kronecker $\delta_{\alpha\beta}$ e il tensore di Levi-Civita $e_{\alpha\beta\gamma\rho}$ come segue (62):

$$\bar{C}_{\alpha\beta\gamma\rho} = \bar{C}_1 \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\rho} + \bar{C}_2 \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\rho} + \bar{C}_3 \delta_{\alpha\rho} \delta_{\beta\gamma} \quad (4.17)$$

$$\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma\rho} = \tilde{C}_1 \delta_{\alpha\beta} e_{3\gamma\rho} + \tilde{C}_2 \delta_{\gamma\rho} e_{3\alpha\beta} + \tilde{C}_3 \delta_{\alpha\gamma} e_{3\beta\rho} + \tilde{C}_4 \delta_{\beta\rho} e_{3\alpha\gamma} + \tilde{C}_5 \delta_{\alpha\rho} e_{3\beta\gamma} + \tilde{C}_6 \delta_{\beta\gamma} e_{3\alpha\rho} \quad (4.18)$$

$$C_{\alpha\beta\gamma\rho} = \tilde{C}_{\alpha\beta\gamma\rho} + \bar{C}_{\alpha\beta\gamma\rho} \quad (4.19)$$

Dove $(\alpha, \beta, \gamma, \rho) \in (1,2)$. E dunque è possibile riscrivere la densità di energia di deformazione:

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} \bar{C}_{\alpha\beta\gamma\rho} \varepsilon_{\gamma\rho} + (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2) \varepsilon_{\alpha\alpha} e_{3\gamma\rho} \varepsilon_{\gamma\rho} + \frac{1}{2} D_1 \phi_{3,\alpha} \delta_{\alpha\beta} \phi_{3,\beta} \quad (4.20)$$

con $D_{\alpha\beta} = D_1 \delta_{\alpha\beta}$. Ed introducendo le costanti di Lamé λ, μ , il modulo a taglio antisimmetrico κ , il modulo di ordine superiore γ , e il parametro chirale $2A = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2$ si può riscrivere il tensore $C_{\alpha\beta\gamma\rho}$ che contiene la componente chirale come:

$$\bar{C}_{\alpha\beta\gamma\rho} = \lambda \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\rho} + (\mu + \kappa) \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\rho} + (\mu - \kappa) \delta_{\alpha\rho} \delta_{\beta\gamma} \quad (4.21)$$

$$\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma\rho} = A(\delta_{\alpha\beta} e_{3\gamma\rho} + \delta_{\gamma\rho} e_{3\alpha\beta}) \quad (4.22)$$

$$\bar{D}_{\alpha\beta} = \gamma \phi_{3,\alpha} \quad (4.23)$$

E quindi le equazioni costitutive diventano:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \lambda \delta_{\alpha\beta} \varepsilon_{\rho\rho} + (\mu + \kappa) \varepsilon_{\alpha\beta} + (\mu - \kappa) \varepsilon_{\beta\alpha} + A \delta_{\alpha\beta} e_{3\gamma\rho} \varepsilon_{\gamma\rho} + A e_{3\alpha\beta} \varepsilon_{\rho\rho} \quad (4.24)$$

$$m_{\alpha 3} = \gamma \phi_{3,\alpha} \quad (4.25)$$

Il pseudo-tensore che rappresenta la chiralità in 2D $\tilde{C}_{\alpha\beta\gamma\rho}$ collega gli stress normali con le deformazioni normali, differentemente da B_{ijkl} in 3D. Considerando quindi il secondo termine della (4.20) si può scrivere che:

$$(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2) \varepsilon_{\alpha\alpha} e_{3\gamma\rho} \varepsilon_{\gamma\rho} = 2A \varepsilon_{\alpha\alpha} e_{3\gamma\rho} \varepsilon_{\gamma\rho} \quad (4.26)$$

dove $\varepsilon_{\alpha\alpha}$ è la deformazione sferica che rappresenta la deformazione di massa del punto materiale e il termine $e_{3\gamma\rho} \varepsilon_{\gamma\rho} = -2(\phi_3 - \psi_3)$ è la rotazione pura del punto dove $\psi_3 = e_{3\alpha\beta} e_{\beta,\alpha} / 2$ è la macrorotazione rigida e quindi diventa chiaro che una rotazione pura può produrre contrazione o dilatazione del materiale, e viceversa, e questo spiega il meccanismo deformativo del reticolo chirale e la sua capacità di avere Poisson negativo.

Concludendo è possibile riorganizzare le equazioni costitutive in forma matriciale come:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{21} \\ m_{13} \\ m_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & -A & A & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & -A & A & 0 & 0 \\ -A & -A & \mu + \kappa & \mu - \kappa & 0 & 0 \\ A & A & \mu - \kappa & \mu + \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} \\ \kappa_{13} \\ \kappa_{23} \end{Bmatrix} \quad (4.27)$$

Tenendo conto che essendo nel caso 2D riscrivendo le relazioni cinematiche si ottengono le deformazioni in funzione degli spostamenti come:

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1}; \varepsilon_{22} = u_{2,2}; \varepsilon_{12} = u_{2,1} - \phi_3; \varepsilon_{21} = u_{1,2} + \phi_3 \quad (4.28)$$

$$\kappa_{13} = \phi_{3,1}; \kappa_{23} = \phi_{3,2} \quad (4.29)$$

Alle classiche costanti micropolari si è aggiunta quindi la chiarezza della struttura tramite il coefficiente A che però deve essere preso negativo se la “handedness” del modello del materiale è antioraria.

Assumendo che tutti gli sforzi siano nulli tranne σ_{11} dalla (4.27) si può scrivere che:

$$\begin{cases} \lambda \varepsilon_{11} + (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{22} - A(\varepsilon_{12} - \varepsilon_{21}) = 0 \\ -A(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + (\mu + \kappa) \varepsilon_{12} + (\mu - \kappa) \varepsilon_{21} = 0 \\ A(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + (\mu - \kappa) \varepsilon_{12} + (\mu + \kappa) \varepsilon_{21} = 0 \end{cases} \quad (4.30)$$

E quindi si può ricavare il modulo di Poisson come:

$$\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = \frac{\lambda - A^2/\kappa}{\lambda + 2\mu - A^2/\kappa} \quad (4.31)$$

Se ora si assumono tutti nulli gli sforzi tranne σ_{22} ottengo che:

$$\nu_{21} = -\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}} = \frac{\lambda - A^2/\kappa}{\lambda + 2\mu - A^2/\kappa} \quad (4.32)$$

Il risultato è lo stesso quindi il materiale chirale esagonale rimane isotropo come già previsto da teorie precedenti (57). Ricavando anche il modulo di Young risulta essere:

$$E = -\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}} = \frac{(\lambda + 2\mu - A^2/\kappa) - (\lambda - A^2/\kappa)^2}{\lambda + 2\mu - A^2/\kappa} \quad (4.33)$$

5. OMOGENEIZZAZIONE CON LA TECNICA DELL'ENERGIA DI DEFORMAZIONE

La teoria micropolare per reticoli chirali da le basi per calcolare la densità dell'energia di deformazione della cella e quindi ricavare le proprietà del materiale cercate. Nella tecnica dell'energia di deformazione si calcola la densità di energia di deformazione della cella elementare studiando la conformazione strutturale della cella. Il calcolo delle caratteristiche omogenee viene effettuato imponendo un campo di spostamenti continuo basato sullo sviluppo in serie di Taylor all'ordine scelto degli spostamenti e delle microrotazioni. Le ipotesi preliminari fatte sono le seguenti:

1. Gli anelli sono considerati perfettamente rigidi;
2. Le forze interne e la loro distribuzione sono forzate dal comportamento cinematico delle celle;
3. Le deformazioni sono piccole.

5.1. Reticolo Esagonale Chirale

Il comportamento dominante della cella esagonale chirale è stato osservato essere una deformazione dei legamenti che tendono ad avvolgersi attorno agli anelli, e di conseguenza si avrà una rotazione degli anelli [57]. Per il presente studio si è scelto di utilizzare un modello perfettamente rigido per descrivere gli anelli. Data la simmetria rotazionale della cella unitaria il set irriducibile di distinte entità meccaniche di Fig. 5-1(a) dovrebbe produrre il comportamento elasto-statico dell'intero reticolo. Andando a scrivere quindi le equazioni di vincolo che legano la cinematica del centro di ciascun anello a quelle di punti materiali sugli anelli stessi si ha che:

$$\mathbf{x}_{OA} = \mathbf{x}_{OB} + \mathbf{x}_{BA} = \mathbf{x}_{OB} + r(\cos \psi \vec{\mathbf{i}}_1 + \sin \psi \vec{\mathbf{i}}_2) \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{OA'} &= \mathbf{x}_{OB} + (u_B \vec{\mathbf{i}}_1 + v_B \vec{\mathbf{i}}_2) + \mathbf{x}_{BA'} = \\ &= \mathbf{x}_{OB} + (u_B \vec{\mathbf{i}}_1 + v_B \vec{\mathbf{i}}_2) + r[\cos(\psi + \phi) - \cos \psi] \vec{\mathbf{i}}_1 + r[\sin(\psi + \phi) - \sin \psi] \vec{\mathbf{i}}_2 \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} (u_A \vec{\mathbf{i}}_1 + v_A \vec{\mathbf{i}}_2) &= \mathbf{x}_{OA'} - \mathbf{x}_{OA} = \\ &= (u_B \vec{\mathbf{i}}_1 + v_B \vec{\mathbf{i}}_2) + r[\cos(\psi + \phi) - \cos \psi] \vec{\mathbf{i}}_1 + r[\sin(\psi + \phi) - \sin \psi] \vec{\mathbf{i}}_2 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Linearizzando per piccole deformazioni e piccoli spostamenti si ha che:

$$(u_A \vec{i}_1 + v_A \vec{i}_2) \approx (u_B \vec{i}_1 + v_B \vec{i}_2) - r\phi \sin \psi \vec{i}_1 + r\phi \cos \psi \vec{i}_2 \quad (5.4)$$

Dalla Fig. 5-1(b) si vede che (u_A, v_A) sono le componenti dello spostamento del punto A rispettivamente lungo \vec{i}_1 e lungo \vec{i}_2 , mentre (u_B, v_B) sono quelle del punto B, ϕ è la rotazione dell'anello e x è il vettore posizione. Esprimendo in forma matriciale si ottiene che:

$$\begin{pmatrix} u_A \\ v_A \\ \phi_A \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -r \sin \psi \\ 0 & 1 & r \cos \psi \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_B \\ v_B \\ \phi_B \end{pmatrix} = \mathbf{T}(\psi) \begin{pmatrix} u_B \\ v_B \\ \phi_B \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

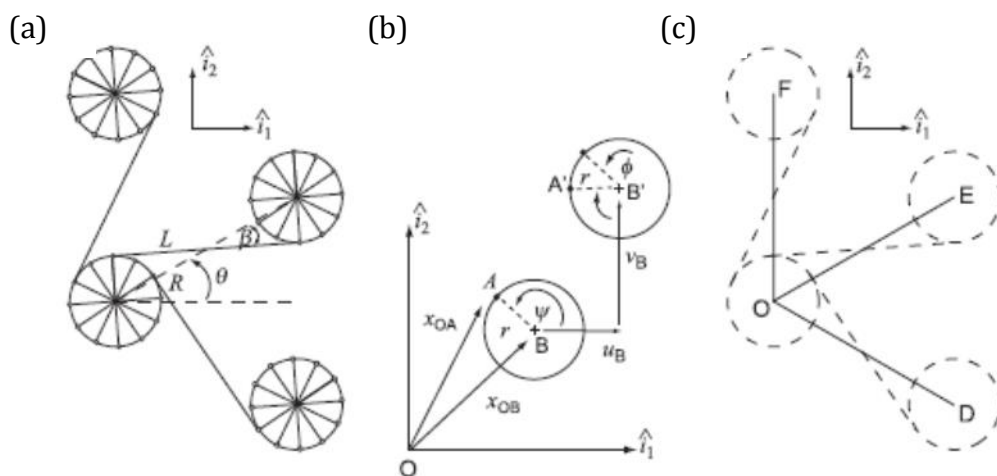


Fig. 5-1 Parte irriducibile del reticolo necessaria per studiarne il comportamento globale: (a) geometria delle barre che legano i nodi rigidi, (b) cinematica dei nodi rigidi, (c) schema equivalente.

Legati gli spostamenti dei centri degli anelli a quelli dei nodi delle travi ad essi collegati si procede esprimendo le relazioni forze-spostamenti. Come già evidenziato gli anelli sono supposti rigidi, mentre gli elementi rettilinei sono schematizzati come travi considerandone la deformazione assiale, trasversale e flessionale (con i gradi di libertà di Fig. 5-2) si ha che:

$$\mathbf{f}_{el} = \mathbf{K}_{el} \mathbf{u}_{el} \quad (5.6)$$

dove \mathbf{f}_{el} , \mathbf{u}_{el} , \mathbf{K}_{el} , sono, rispettivamente, i vettori forza, spostamento, e la matrice di rigidità del singolo elemento nel sistema di coordinate locale.

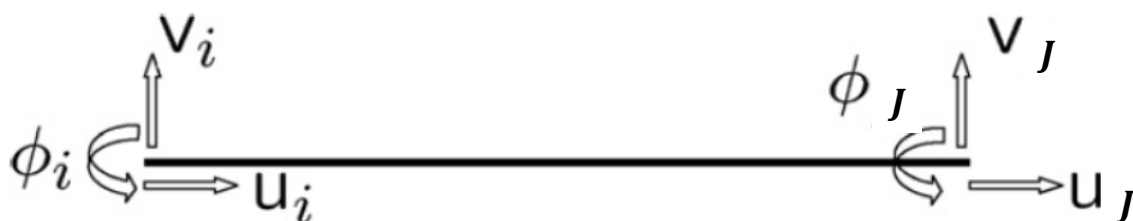


Fig. 5-2 Gradi di libertà degli elementi trave.

Sviluppandola in forma matriciale si ha:

$$\mathbf{K}_{el} \mathbf{u}_{el} = E_s \begin{bmatrix} \frac{A}{L} & 0 & 0 & -\frac{A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12I}{L^3} & \frac{6I}{L^2} & 0 & -\frac{12I}{L^3} & \frac{6I}{L^2} \\ 0 & \frac{6I}{L^2} & \frac{4I}{L} & 0 & -\frac{A}{L} & \frac{2I}{L} \\ -\frac{A}{L} & 0 & 0 & \frac{A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12I}{L^3} & -\frac{6I}{L^2} & 0 & \frac{12I}{L^3} & -\frac{6I}{L^2} \\ 0 & \frac{6I}{L^2} & \frac{2I}{L} & 0 & -\frac{6I}{L^2} & \frac{4I}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \alpha_i \\ u_j \\ v_j \\ \alpha_j \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

dove E_s è il modulo di Young del materiale costituente, A è l'area della sezione della trave e I è la sua inerzia e L la sua lunghezza.

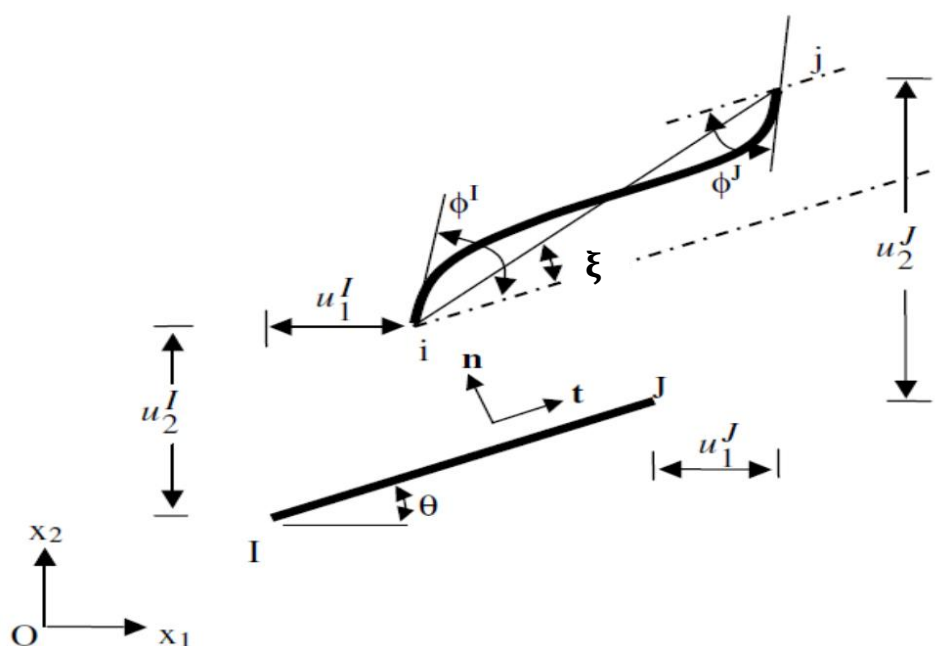


Fig. 5-3 Spostamenti e deformazioni tipiche delle travi della cella.

Note le varie quantità nel sistema di riferimento locale ci si riporta a quello globale per ogni trave tramite la classica matrice di rotazione:

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

E quindi si ha che:

$$[\mathbf{K}_g] = [\mathbf{R}]^T [\mathbf{K}_{el}] [\mathbf{R}] \quad (5.9)$$

e analogamente la forza:

$$\{\mathbf{f}_g\} = [\mathbf{R}] \{\mathbf{f}_{el}\} \quad (5.10)$$

Esprese tutte le matrici e i vettori in coordinate globali si utilizza la matrice $\mathbf{T}(\psi)$ per riportarsi al modello semplificato di Fig. 5-1(c):

$$\mathbf{K}_{OD} = \mathbf{T}(\psi_{OD})^T \mathbf{K}_{OD,g} \mathbf{T}(\psi_{OD}) \quad (5.11)$$

$$\mathbf{K}_{OE} = \mathbf{T}(\psi_{OE})^T \mathbf{K}_{OE,g} \mathbf{T}(\psi_{OE}) \quad (5.12)$$

$$\mathbf{K}_{OF} = \mathbf{T}(\psi_{OF})^T \mathbf{K}_{OF,g} \mathbf{T}(\psi_{OF}) \quad (5.13)$$

Assemblando le singole matrici (6 x 6) si ottiene un'unica matrice di rigidezza globale \mathbf{K} (12 x 12) formata come:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{OD}(1:3,1:3) + \mathbf{K}_{OE}(1:3,1:3) + \mathbf{K}_{OF}(1:3,1:3) & \mathbf{K}_{OD}(1:3,4:6) & \mathbf{K}_{OE}(1:3,4:6) & \mathbf{K}_{OF}(1:3,4:6) \\ & \mathbf{K}_{OD}(4:6,4:6) & 0(1:3,1:3) & 0(1:3,1:3) \\ & \mathbf{K}_{OE}(4:6,1:3) & \mathbf{K}_{OE}(4:6,4:6) & 0(1:3,1:3) \\ & \mathbf{K}_{OF}(4:6,1:3) & 0(1:3,1:3) & \mathbf{K}_{OF}(4:6,4:6) \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Dove il vettore degli spostamenti $\mathbf{u} = \{u_O, v_O, \alpha_O, u_D, v_D, \alpha_D, u_E, v_E, \alpha_E, u_F, v_F, \alpha_F\}^T$ è quello necessario per poter calcolare le forze \mathbf{f} nel sistema di riferimento semplificato. A questo punto è possibile calcolare la densità energia di deformazione come:

$$\Psi = \frac{2}{2V} \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (5.15)$$

dove il fattore 2 è dovuto al fatto che in Fig. 5-1(a) è rappresentata metà della cella unitaria completa e dove $V = bR^2 \cos \theta$ è il volume della cella unitaria che ha le parti rettilinee lunghe $L/2$. Nota l'espressione della densità di energia di deformazione è possibile costruire la matrice di rigidezza derivando i vari termini come spiegato in precedenza. Per ricavare l'espressione della densità di energia di deformazione della cella è necessario conoscere gli spostamenti \mathbf{u} . È a questo punto che si effettua l'omogeneizzazione assumendo un campo di spostamenti continuo espandendo i termini di \mathbf{u} in serie di Taylor troncata al secondo ordine. Di conseguenza il campo assunto è pari a:

$$u_{oi}(x, y) = u_o(x_o, y_o) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial u}{\partial y} + O(\Delta x^2, \Delta y^2) \quad (5.16)$$

$$v_{oi}(x, y) = v_o(x_o, y_o) + \Delta x \frac{\partial v}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial v}{\partial y} + O(\Delta x^2, \Delta y^2) \quad (5.17)$$

$$\phi_{oi}(x, y) = \phi_o(x_o, y_o) + \Delta x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial \phi}{\partial y} + O(\Delta x^2, \Delta y^2) \quad (5.18)$$

E quindi dall'eq. (4.4) si ottiene che:

$$u_{oi}(x, y) = u_o(x_o, y_o) + \Delta x \varepsilon_{11} + \Delta y (\varepsilon_{21} - \phi) + O(\Delta x^2, \Delta y^2) \quad (5.19)$$

$$v_{oi}(x, y) = v_o(x_o, y_o) + \Delta x (\varepsilon_{12} + \phi) + \Delta y \varepsilon_{22} + O(\Delta x^2, \Delta y^2) \quad (5.20)$$

$$\phi_{oi}(x, y) = \phi_o(x_o, y_o) + \Delta x \phi_{,1} + \Delta y \phi_{,2} + O(\Delta x^2, \Delta y^2) \quad (5.21)$$

dove dalla geometria della cella si ha che $|\Delta x| = R \cos \theta$ e $|\Delta y| = R \sin \theta$ in cui si prende $\phi = \phi_3$.

Da notare che il grado di libertà α in eq. (5.7) è la rotazione finita dell'anello rigido ed è associata alla deformazione globale del legamento, ma è differente dalla microrotazione ϕ . Per il campo di spostamenti assunto α non è nota a priori ma può essere ottenuta supponendo che tutti gli anelli della porzione di cella di Fig. 5-1(a) ruotino di una stessa quantità per uno stato deformativo uniforme, in quanto porzione di un reticolo infinito. Riorganizzando la matrice \mathbf{K}

e il vettore \mathbf{u} tramite una matrice booleana \mathbf{T}_B si può riscrivere il legame sforzo deformazione dividendo le quantità ignote da quelle note come segue:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{T}_B^T \mathbf{K} \mathbf{T}_B, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{T}_B \mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{kk} & \tilde{\mathbf{K}}_{ku} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{uk} & \tilde{\mathbf{K}}_{uu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_k \\ \tilde{\mathbf{u}}_u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_u \\ \tilde{\mathbf{f}}_k \end{Bmatrix} \quad (5.22)$$

E dunque si ricava la rotazione dei nodi come:

$$\tilde{\mathbf{u}}_u = \tilde{\mathbf{K}}_{uu}^{-1} (\tilde{\mathbf{K}}_{uk} \tilde{\mathbf{u}}_k) \quad (5.23)$$

assumendo come $\tilde{\mathbf{u}}_k$ il campo di spostamenti definito nelle equazioni (5.19)-(5.21).

A questo punto si può determinare la legge costitutiva come in matrice (4.27).

Per fare ciò si è costruito un programma simbolico in Matlab che calcola i coefficienti desiderati senza inserire valori numerici. Per il caso esagonale chirale si ottengono coefficienti di Lamè, modulo a taglio antisimmetrico, e parametro chirale pari a:

$$\lambda = \frac{\sqrt{3}E_s t}{4L^3} \cos(2\beta) (L^2 - t^2) \quad (5.24)$$

$$\mu = \frac{\sqrt{3}E_s t}{4L^3} (L^2 + t^2) \quad (5.25)$$

$$A = \frac{\sqrt{3}E_s t}{4L^3} \sin(2\beta) (t^2 - L^2) \quad (5.26)$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{3}E_s t}{2L^3} (t^2 \cos^2 \beta + L^2 \sin^2 \beta) \quad (5.27)$$

Da notare che per β che tende a zero (cioè il caso in cui i cerchi vengano ad avere raggio interno r nullo) si ottiene che:

$$\lambda = \frac{\sqrt{3}E_s t}{4L^3} (L^2 - t^2) \quad (5.28)$$

$$\mu = \frac{\sqrt{3}E_s t}{4L^3} (L^2 + t^2) \quad (5.29)$$

$$A = 0 \quad (5.30)$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{3}E_s t^3}{2L^3} \quad (5.31)$$

Che sono proprio i coefficienti trovati per reticolo formato da triangoli equilateri (62).

A questo punto si è arrivati al termine dell'analisi in quanto ora è possibile ricavare il coefficiente di Poisson e il modulo di Young tramite le eq. (4.32), (4.33) ottenendo le seguenti espressioni per il mezzo continuo micropolare per il caso esagonale chirale:

$$\nu = \left(\frac{4L^2 t^2}{t^4 \cos^2 \beta + L^4 \sin^2 \beta + 3L^2 t^2} \right) - 1 \quad (5.32)$$

$$E = 2\sqrt{3}E_s \frac{t^3(L^2 + t^2)}{L^5 \sin^2 \beta + 3L^3 t^2 + Lt^4 \cos^2 \beta} \quad (5.33)$$

6. SIMULAZIONI E RISULTATI

Tramite le costanti elastiche ottenute dall'analisi teorica si è costruito un modello FEM in Patran che permetta di paragonare il comportamento dell'honeycomb con quello del materiale equivalente omogeneizzato, sottoposti alla stessa tipologia di carichi.

6.1. Esagonale Chirale

Per il caso di honeycomb esagonale chirale si sono utilizzati i seguenti parametri geometrici:

t [mm]	L [mm]	r [mm]	b [mm]	β [deg]
1	20	5	1	26.56

Tab. 6-1 Caratteristiche geometriche scelte per l'honeycomb nel caso esagonale chirale.

Come materiale costituente si è scelto un unico materiale isotropo, una lega di alluminio (AA6061-T6) con proprietà pari a $E = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 0.33$, $\rho = 2750 \text{ kg/m}^3$.

Dalle eq. (5.24)-(5.27) si ottengono coefficienti di Lamè, modulo a taglio antisimmetrico, e parametro chirale pari ai valori di Tab. 6-2 .

λ [MPa]	μ [MPa]	A [MPa]	κ [MPa]
907.05	-1.21e+03	1.52e+03	612.28

Tab. 6-2 Parametri Calcolati per il caso esagonale chirale.

Da questi dati è possibile calcolare il modulo di Poisson, il modulo di Young, e densità equivalenti con le formule ottenute in precedenza:

$$\nu = -0.95$$

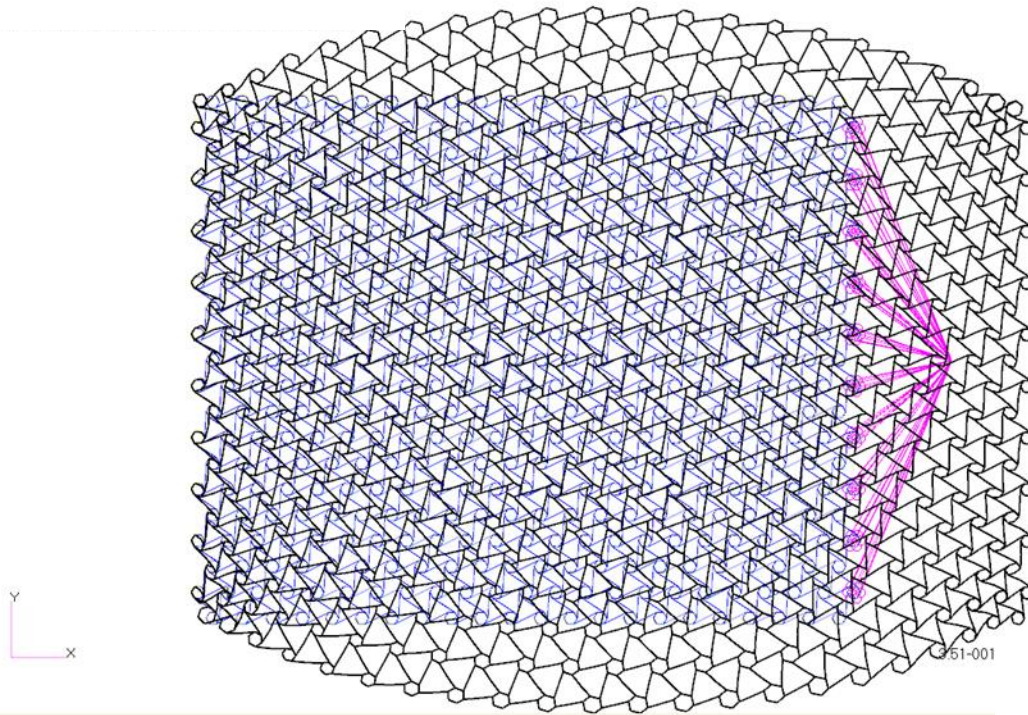
$$E = 146.44 \text{ MPa}$$

$$\rho = 476 \text{ kg/m}^3$$

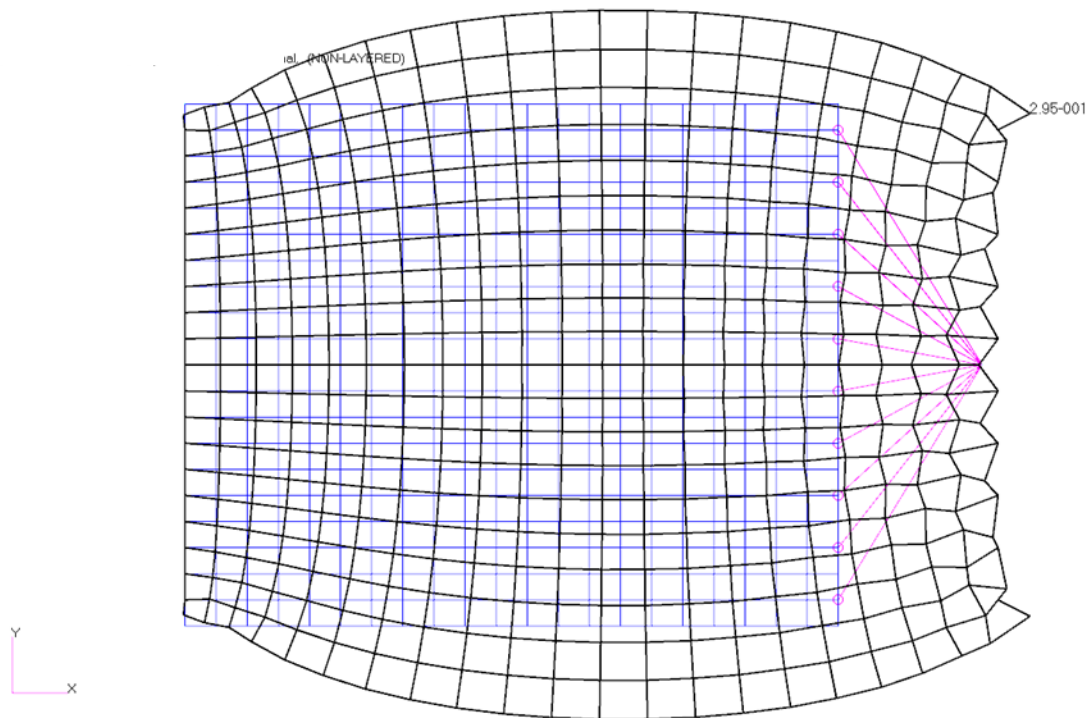
Si sono costruiti due modelli FEM bidimensionali, uno per l'honeycomb, costituito da elementi beam, in cui si hanno 21x20 celle elementari complete e uno per il materiale omogeneizzato, costituito da elementi shell, generando così due strutture rettangolari di dimensioni assolute vicine. Le sezioni delle beam sono state scelte quadrate piene con lato di 1 mm. Una volta costruito il modello si è incastrato un lato e nell'opposto è stata applicata una forza di 50N in trazione e compressione tramite l'utilizzo di un MPC della tipologia RBE2. Il numero

complessivo di elementi FEM utilizzato nel modello reticolare è attorno ai 5500. Contando che i cerchi sono praticamente visti dalla mesh come esagoni e che le aste sono costituite da due soli elementi risulta difficile immaginare un'ulteriore riduzione del numero di elementi. Per la piastra invece bastano 500 elementi piani per dividerla in celle con dimensioni simili a quella unitaria del reticolo. Notevole è la riduzione del numero di elementi finiti utilizzati nel caso omogeneizzato e anche se questi sono bidimensionali, e non monodimensionali come nel caso del reticolo, certamente questo porta ad una riduzione della gravosità del calcolo per l'hardware. I risultati ottenuti dalle simulazioni FEM sono visualizzabili nelle figure sottostanti. Le analisi e i confronti numerici successivi sono sviluppati per la trazione. Qualitativamente il comportamento auxetico è ben visibile riportando le deformate nei vari casi in Fig. 6-1, Fig. 6-2, sia per la piastra omogenea che per l'honeycomb. La forma delle deformate non è riportata nella scala reale ma si è cambiata in modo da migliorarne la visualizzazione. A trazione il meccanismo rotatorio degli anelli, orientata secondo la direzione positiva dell'asse z, fa svolgere i legamenti ad esso collegato espandendo la cella in tutte le direzioni. In questo modo all'allungamento longitudinale corrisponde un aumento anche della sezione trasversale. Gli anelli, supposti rigidi nel modello teorico, che si deformano maggiormente sono quelli alle estremità della struttura reticolare. Di fatto si tratta degli anelli nei quali è stato collegato il multi point constraint (gli anelli a destra in Fig. 6-1), e dove quindi viene trasportata la forza, e quelli incastrati che sono sottoposti alle forze di reazione vincolare (a sinistra). La piastra invece ha una deformata legata al semplice fatto che si è impostato un modulo di Poisson negativo e il solutore trova quella come posizione di equilibrio. La soluzione numerica riflette perfettamente il comportamento auxetico anche se, ai bordi dove si è applicato il MPC, il profilo risulta essere frastagliato giacché si è alternata all'applicazione del vincolo ad un nodo, uno libero per rispecchiare meglio l'applicazione della forza effettuata nella struttura reticolare.

Analoghe considerazioni sono esprimibili per il caso a compressione rilevando comunque che in questo caso, al contrario della trazione, la rotazione degli anelli è orientata nel verso negativo delle z e quindi tende ad avvolgere attorno ad ognuno le aste creando una contrazione della singola cella in tutte le direzioni e quindi anche dell'intera struttura. Anche la piastra dà lo stesso effetto complessivo e la stessa deformata con contrazione delle varie sezioni. Inoltre in Fig. 6-3, Fig. 6-4 sono riportati i risultati degli spostamenti ottenuti nel caso della trazione.

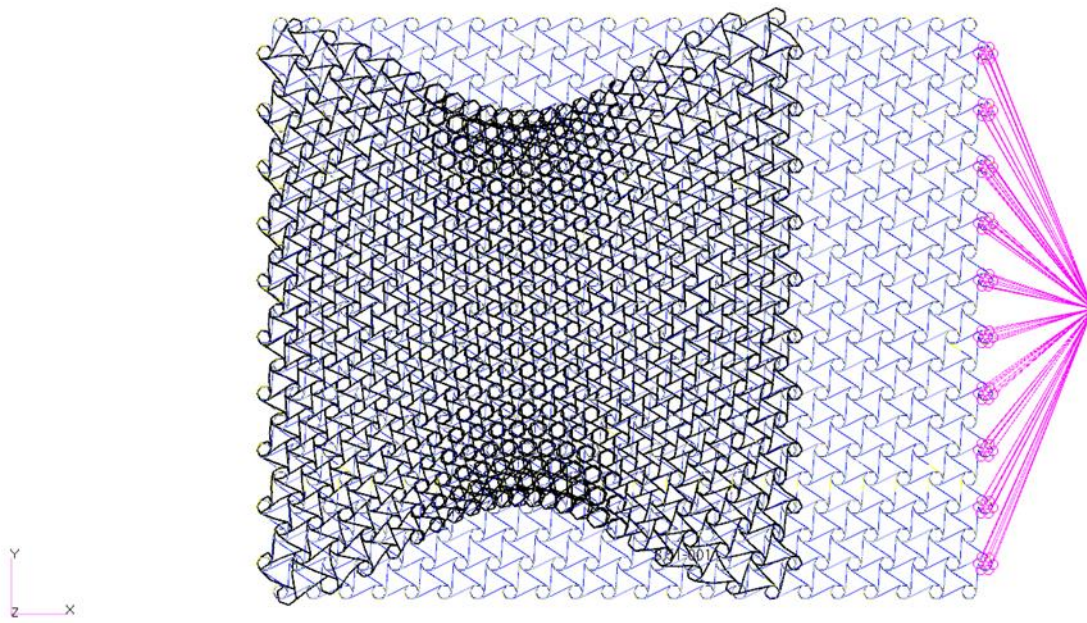


(a)

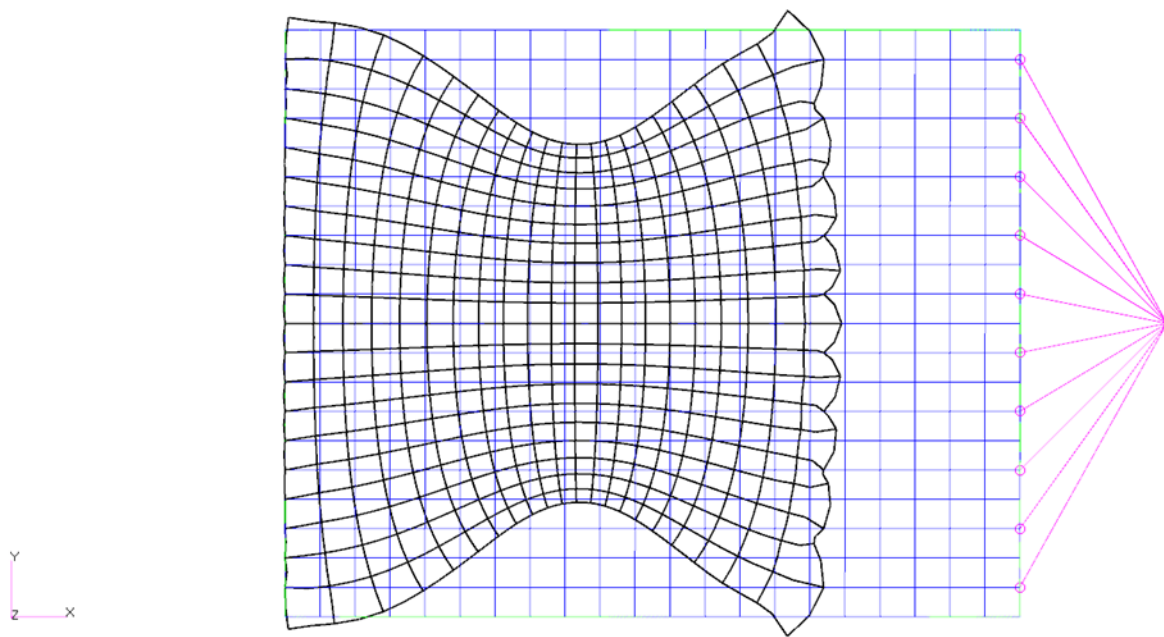


(b)

Fig. 6-1 Deformata a trazione per (a) honeycomb e (b) piastra.

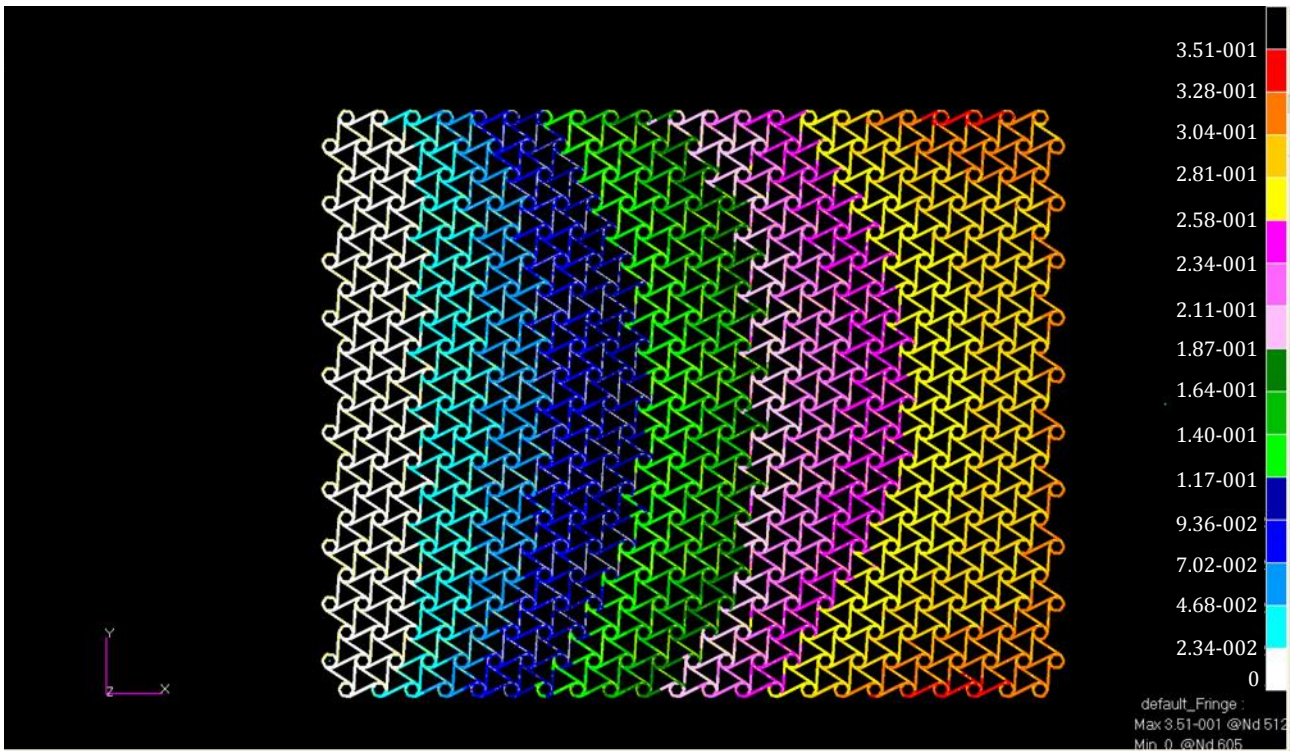


(a)

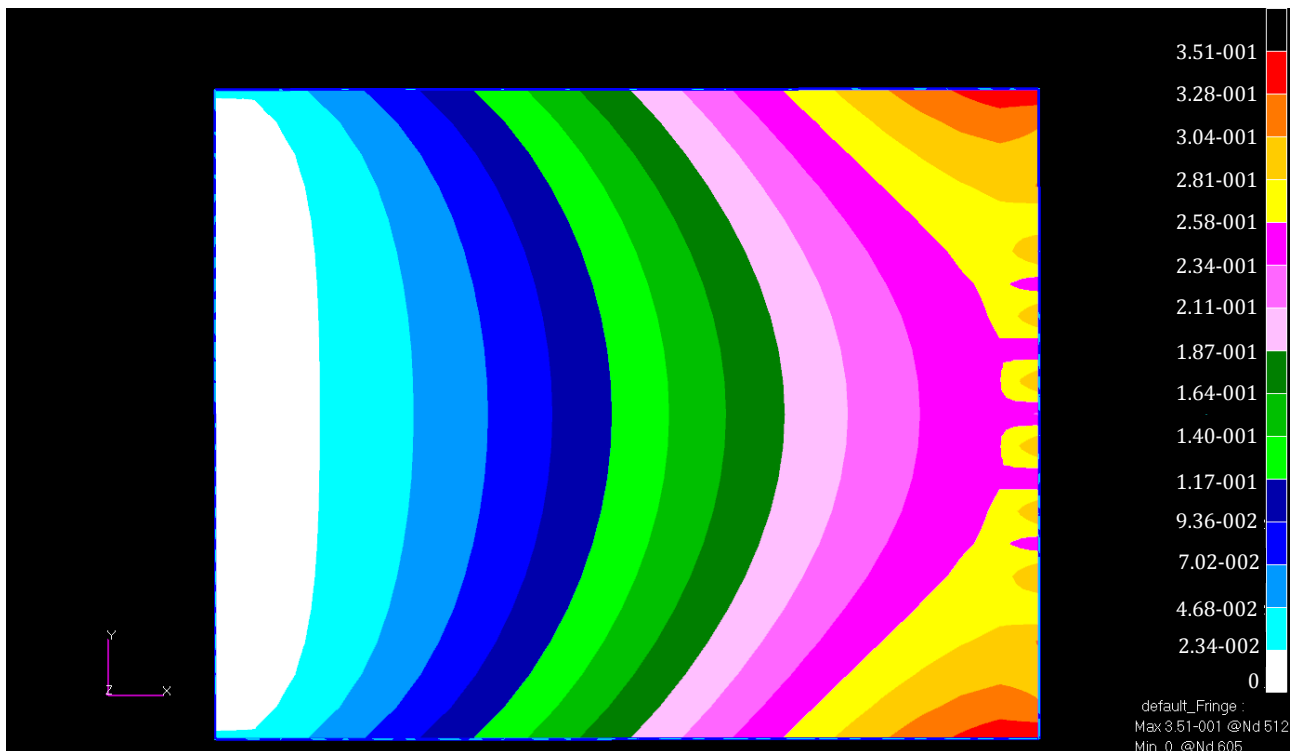


(b)

Fig. 6-2 Deformata a compressione per (a) honeycomb e (b) piastra.

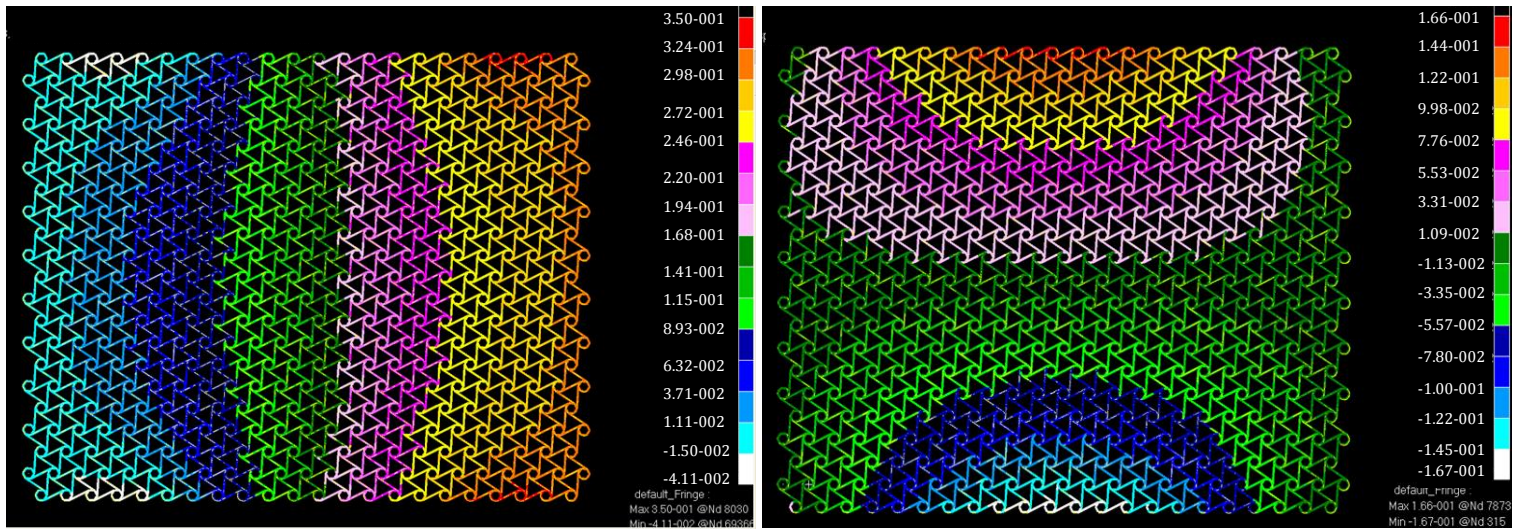


(a)



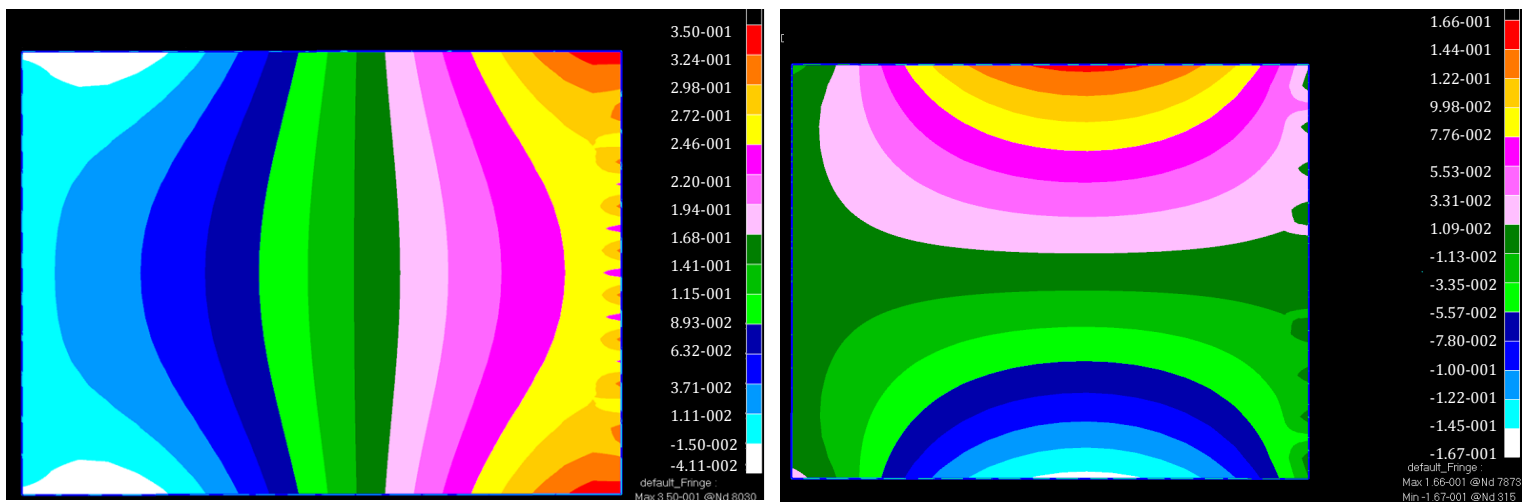
(b)

Fig. 6-3 Ampiezza degli spostamenti a trazione per (a) honeycomb e (b) piastra.



(a)

(b)



(c)

(d)

Fig. 6-4 Spostamenti a trazione per honeycomb (a) nella direzione x e (b) nella direzione y; e per la piastra omogena (c) nella direzione x e (d) nella direzione y.

Dai risultati ottenuti emerge che gli spostamenti della piastra e dell'honeycomb sono molto simili in tutti i casi per le celle delle sezioni trasversali centrali lontane dai lati nei quali sono imposte le condizioni esterne. Infatti le celle più vicine all'incastro o ai punti di applicazione della forzante sono influenzate in maniera evidente dagli effetti di bordo e dunque in queste zone si hanno delle differenze tra gli spostamenti ottenuti nei due casi. Per definire quantitativamente le differenze si è presa la stessa sezione sia per l'honeycomb sia

nell'omogeneo. La sezione scelta è individuata dalla decima cella in direzione x (orizzontale) partendo dall'incastro in entrambi i casi. In questo modo si riesce ad avere un confronto diretto tra i due casi poiché, se l'omogeneizzazione è andata a buon fine, si dovrebbero ottenere risultati vicini in quanti le due sezioni dovrebbero essere omologhe. La distanza x dall'incastro per l'honeycomb è di circa 217 mm mentre per la piastra di circa 220 mm.

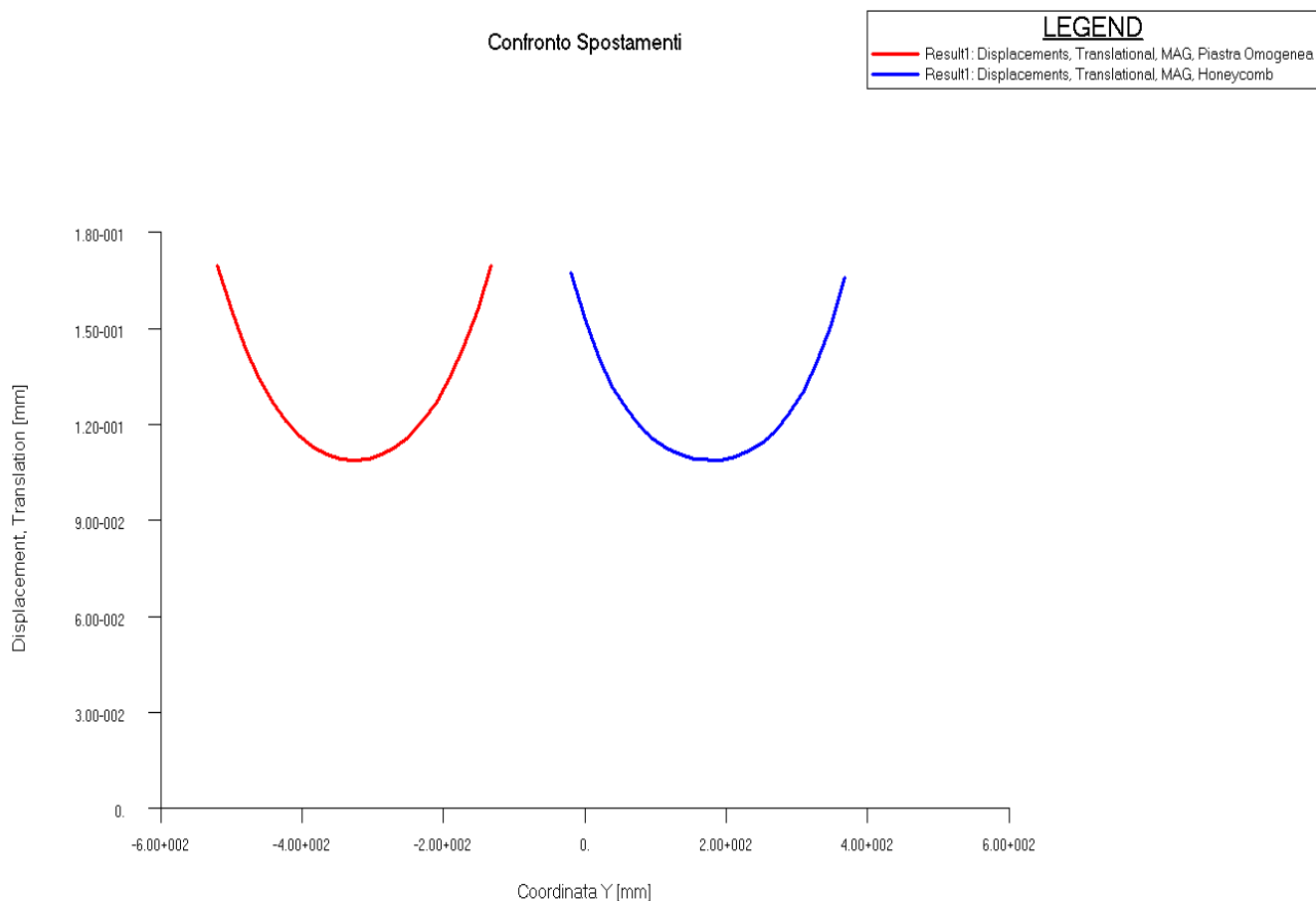


Fig. 6-5 Grafici dell'ampiezza degli spostamenti dei nodi della decima cella della piastra omogenea (rosso) e dell'honeycomb (blu) in Patran.

Andando a fare il grafico in Patran degli spostamenti dei nodi corrispondenti in quella sezione si ottiene il grafico in Fig. 6-5.

Si nota che l'ampiezza degli spostamenti è molto simile, ma per quantificare meglio numericamente i risultati si sono esportati i dati degli spostamenti dei nodi delle sezioni d'interesse e sono stati elaborati in Matlab.

Per una migliore visualizzazione grafica si sono sovrapposte le due curve parametrizzando la coordinata x del grafico, cioè la posizione assoluta del nodo in y, in funzione della distanza del nodo dal bordo inferiore. Non avendo preso alcun nodo sul bordo estremo dell'honeycomb la

curva corrispondente risulta essere leggermente meno estesa in x. Come si vede in Fig. 6-6 le due curve sono molto simili, soprattutto per gli spostamenti ottenuti nei nodi centrali, mentre differenze maggiori si hanno procedendo per gli spostamenti dei nodi che si avvicinano ai bordi esterni.

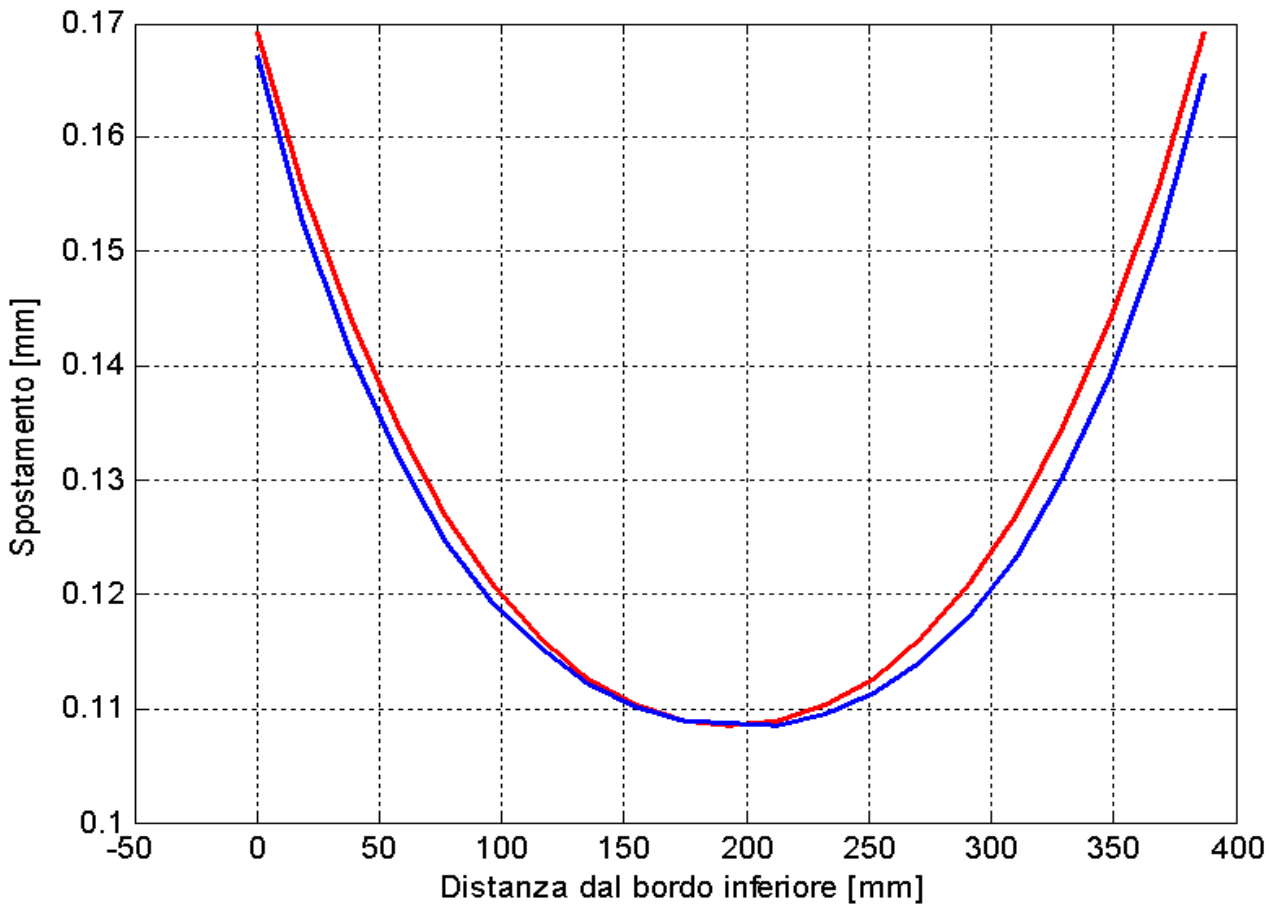


Fig. 6-6 Sovrapposizione grafici dell'ampiezza degli spostamenti dei nodi della decima cella della piastra omogenea (rosso) e dell'honeycomb (blu) in Matlab.

Per confrontare i valori numerici degli spostamenti si sono ottenute le curve che interpolano i dati importati da Patran con un'interpolazione polinomiale del sesto grado. Questo è necessario in quanto non è detto che i nodi, acquisiti per la piastra e quelli per l'honeycomb, siano stesse distanze dal bordo inferiore, e dunque per confrontare valori di punti omologhi si rende necessario eseguire l'interpolazione. Ci si è basati sulla funzione di Matlab *polyfit* e utilizzando il grado 6 del polinomio interpolante si ottenendo residui d'interpolazione di 3 ordini di grandezza inferiori rispetto ai valori degli spostamenti (Fig. 6-7). Ottenendo le

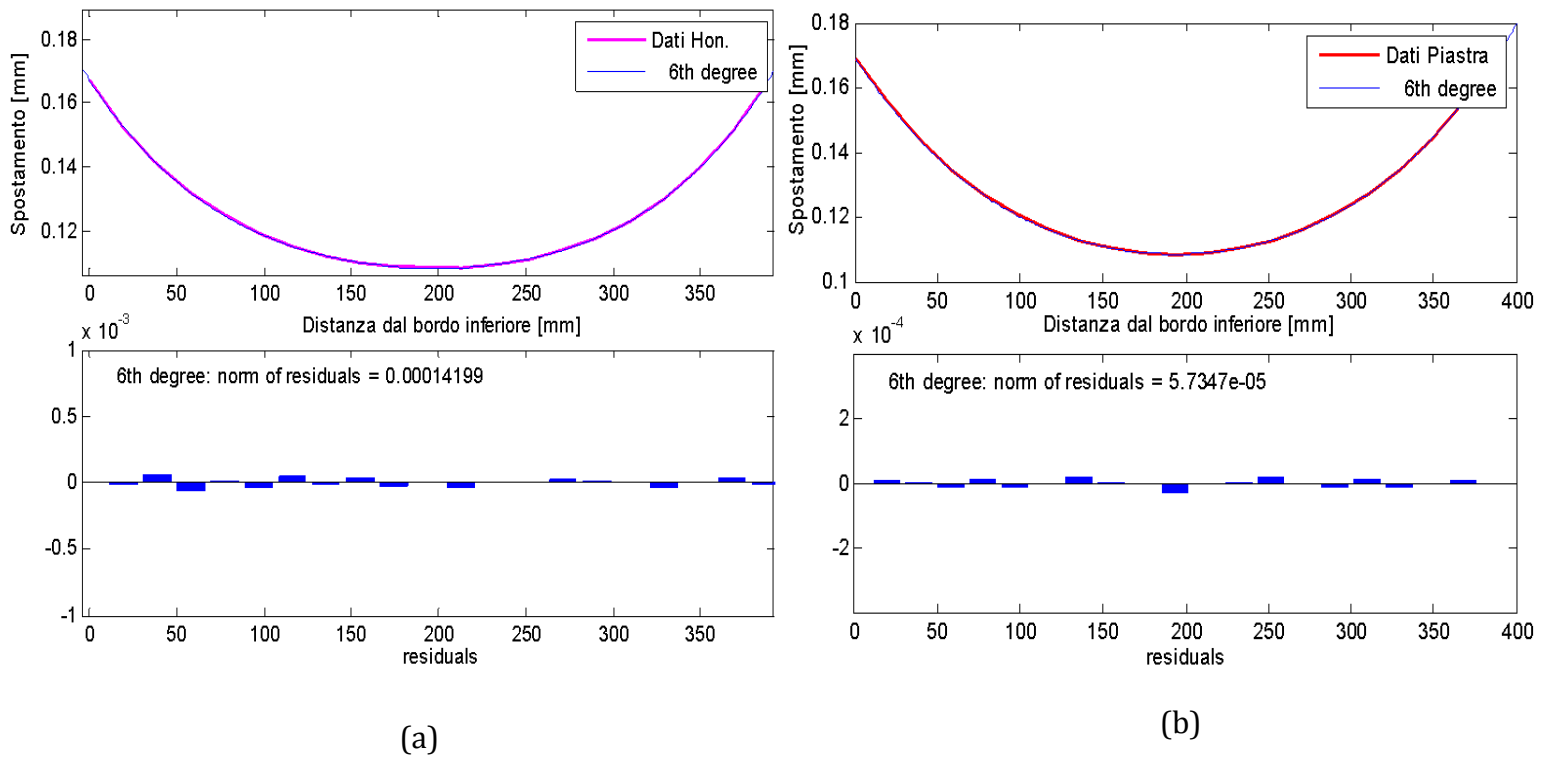


Fig. 6-7 Interpolazione dei dati dell'ampiezza degli spostamenti dei nodi della decima cella (a) dell'honeycomb della (b) piastra omogenea in Matlab.

equazioni delle curve interpolanti si sono assegnati 36 valori della distanza dal bordo inferiore (da 0 a 350 con un passo di 10) e valutati i valori degli spostamenti in quei punti, nei due casi, tramite la funzione polyval di Matlab. Ora è stato possibile calcolare le differenze in questi punti come la differenza tra i risultati ottenuti nella piastra omogenea e quelli ottenuti nel reticolo. Come si può vedere in Fig. 6-8 i valori così calcolati, riportati in Tab. 6-3, danno una differenza di spostamento dell'ordine di 10^{-3} mm e dunque due ordini di grandezza inferiori della ampiezza degli spostamenti, dando una differenza massima del 3.5% tra i due casi.

Distanza dal Bordo Inferiore [mm]	Ampiezza Spostamento Omogeneo [mm]	Ampiezza Spostamento Honeycomb [mm]	Differenze Spostamento [mm]
0	1.69E-01	1,67E-01	2.12E-03
10	1.62E-01	1.59E-01	2.69E-03
20	1.55E-01	1.52E-01	3.00E-03
30	1.49E-01	1.46E-01	3.12E-03
40	1.43E-01	1.40E-01	3.08E-03
50	1.38E-01	1.35E-01	2.93E-03

60	1.34E-01	1.31E-01	2.70E-03
70	1.30E-01	1.27E-01	2.41E-03
80	1.26E-01	1.24E-01	2.09E-03
90	1.23E-01	1.21E-01	1.77E-03
100	1.20E-01	1.19E-01	1.44E-03
110	1.17E-01	1.16E-01	1.14E-03
120	1.15E-01	1.14E-01	8.57E-04
130	1.14E-01	1.13E-01	6.12E-04
140	1.12E-01	1.12E-01	4.06E-04
150	1.11E-01	1.11E-01	2.45E-04
160	1.10E-01	1.10E-01	1.30E-04
170	1.09E-01	1.09E-01	6.44E-05
180	1.09E-01	1.09E-01	4.92E-05
190	1.08E-01	1.08E-01	8.49E-05
200	1.08E-01	1.08E-01	1.71E-04
210	1.09E-01	1.08E-01	3.08E-04
220	1.09E-01	1.09E-01	4.94E-04
230	1.10E-01	1.09E-01	7.27E-04
240	1.11E-01	1.10E-01	1.00E-03
250	1.12E-01	1.11E-01	1.32E-03
260	1.14E-01	1.12E-01	1.68E-03
270	1.16E-01	1.14E-01	2.07E-03
280	1.18E-01	1.16E-01	2.48E-03
290	1.21E-01	1.18E-01	2.90E-03
300	1.24E-01	1.20E-01	3.32E-03
310	1.27E-01	1.23E-01	3.73E-03
320	1.31E-01	1.27E-01	4.11E-03
330	1.35E-01	1.30E-01	4.43E-03
340	1.40E-01	1.35E-01	4.68E-03
350	1.45E-01	1.40E-01	4.81E-03

Tab. 6-3 Valutazione delle differenze degli spostamenti nei punti omologhi della piastra e dell'honeycomb.

La procedura di omogeneizzazione sviluppata permette quindi di rappresentare bene il comportamento dell'honeycomb tramite un materiale omogeneo equivalente con le proprietà

calcolate in precedenza. Il comportamento del reticolo esagonale chirale nel piano può quindi essere studiato tramite modelli FEM in maniera più agevole e conveniente in termini di tempo e potenze di calcolo utilizzando la piastra.

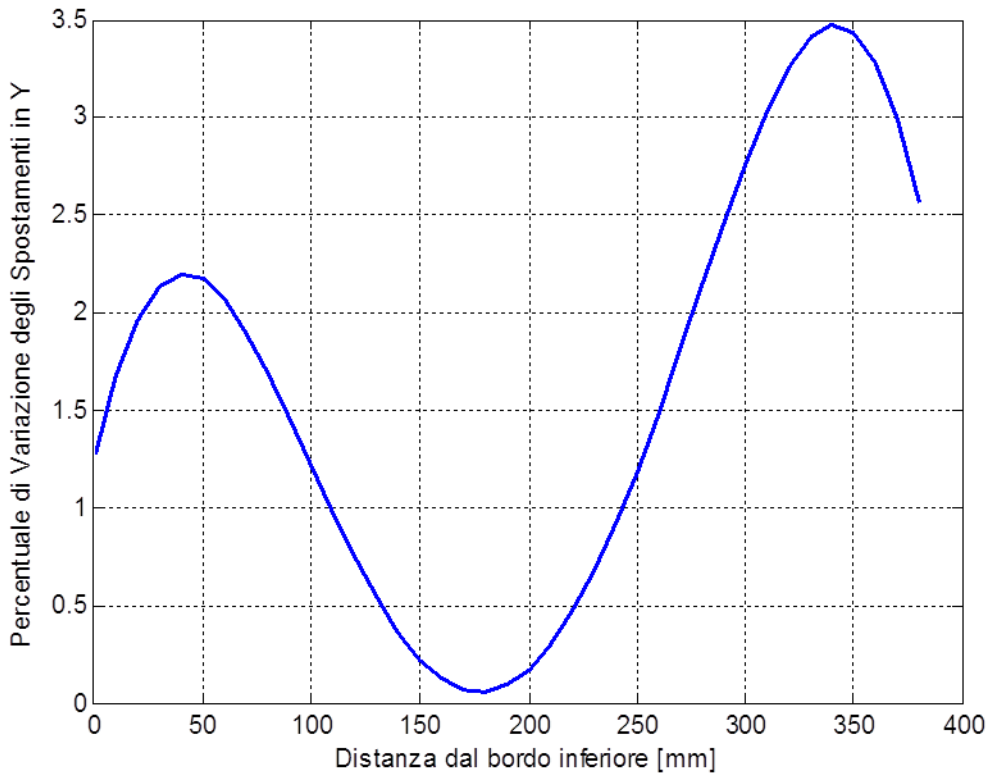


Fig. 6-8 Rapporto tra le ampiezze degli spostamenti in y tra piastra omogenea ed honeycomb.

In letteratura l'omogeneizzazione di questo reticolo è stata effettuata presentata nel 2012 da Dos Reis e Ganghoffer [61] i quali però hanno utilizzato la tecnica dell'omogeneizzazione discreta asintotica. Le formule del modulo di Poisson e del modulo di Young alle quali sono arrivati per questa particolare geometria sono:

$$v = \frac{1}{647} \frac{(74\sqrt{3} - 617)(-20689 + 76300\eta^2 + 11932\sqrt{3}\eta^2 - 62112\eta^4 + 1257\sqrt{3})}{-19729 - 224148\eta^2 + 16906\sqrt{3}\eta^2 - 54048\eta^4 + 2973\sqrt{3}} \quad (6.1)$$

$$E = \frac{96}{47} \frac{(139\sqrt{3} - 71)E_s(-575 - 564\eta^2 + 44\sqrt{3}\eta^2)\eta^3}{-19729 - 224148\eta^2 + 16906\sqrt{3}\eta^2 - 54048\eta^4 + 2973\sqrt{3}} \quad (6.2)$$

dove il parametro adimensionale $\eta = t/L$ è il rapporto di snellezza delle aste (supponendo che lo spessore dei legamenti sia lo stesso degli' anelli) ed E_s è di nuovo il modulo di Young del materiale costituente. Nella trattazione di Ganghoffer però si è supposto che l'angolo β sia di 30° . Si modificano allora i nostri valori per riportarsi al caso studiato e fare un confronto. In questo modo si ha che, mantenendo $L = 20 \text{ mm}$, il raggio delle circonferenze è $r = 5.77 \text{ mm}$, e come materiale si è tenuto l'alluminio qui utilizzato. Nel nostro caso si ha $\eta = 0.05$ e quindi risulta che:

Proprietà	Dos Reis e Ganghoffer	En. Deformazione
ν	-0.92	-0.95
$E_x = E_y \text{ [MPa]}$	101	118

Tab. 6-4 Confronto risultati ottenuti con l'omogeneizzazione asintotica.

I risultati ottenuti sono vicini a quelli calcolati con l'energia di deformazione. In particolare il modulo di Poisson risulta essere in ottimo accordo nei due casi. Più discostati sono i valori del modulo di Young che hanno una differenza di circa 17 MPa (14%) , e sembra che il metodo qui utilizzato lo sovrastimi leggermente.

7. PROVE INDENTAZIONE

La resistenza ad indentazione in materiale auxetico dovrebbe essere superiore proprio a causa della negatività del modulo di Poisson. Il comportamento di un materiale auxetico è illustrato schematicamente in Fig. 7-1. In caso di un materiale non auxetico, la zona del materiale immediatamente al di sotto dell'area di contatto risponde alla forzante applicata scorrendo via nella direzione laterale, portando ad una riduzione della densità e della resistenza in quella zona del materiale.

Al contrario, nel caso auxetico, il materiale fluisce nella zona d'impatto a seguito di una contrazione sia laterale sia longitudinale in risposta alla forzante compressiva applicata. Quindi il materiale auxetico si addensa sotto la zona di compressione sia in senso longitudinale che nelle direzioni trasversali comportando una maggiore resistenza all'indentazione. Lo studio dell'indentazione è stato modellato basandosi sullo schema del contatto di Hertz. Il contatto non adesivo tra due solidi continui elastici non conformi è inizialmente un punto nel caso di studio bidimensionale del problema (nel caso tridimensionale sarà una linea).

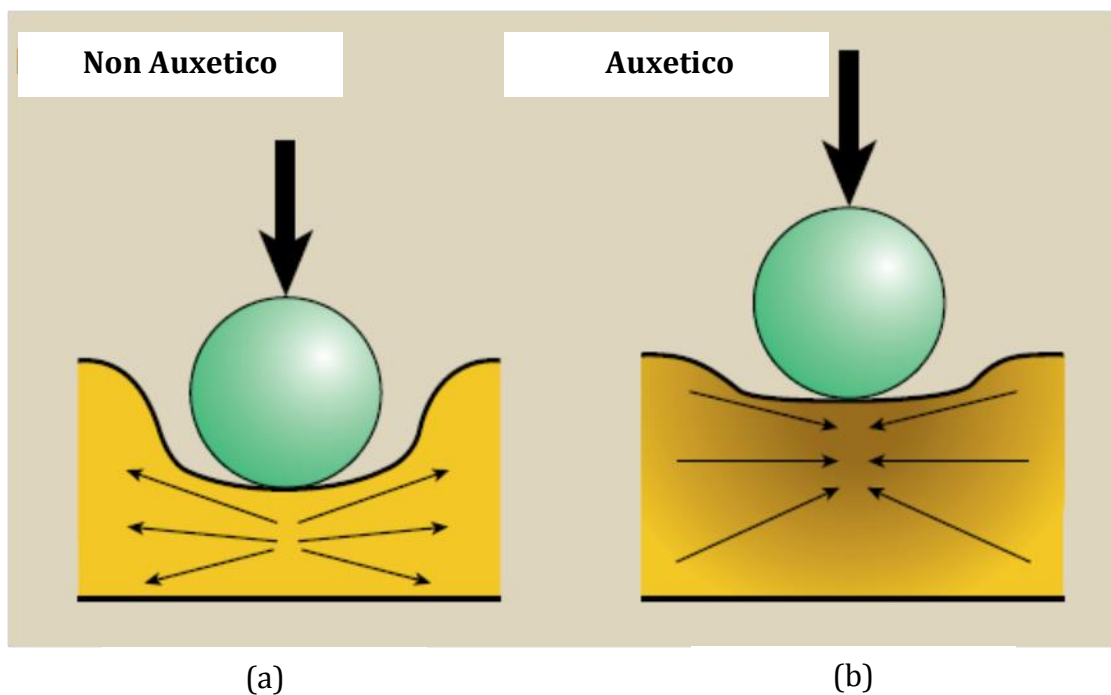


Fig. 7-1 Comportamento schematizzato di un materiale (a) convenzionale (b) auxetico.

Le ipotesi fondamentali della teoria di Hertz sono:

1. Superfici continue e non conformi;
2. Piccole deformazioni;
3. Corpi elastici ed infiniti;
4. Superfici prive di attrito.

Il fatto che si assumano superfici prive di attrito significa che il raggio di contatto sia molto inferiore al raggio effettivo di curvatura dell'indentatore, cioè con riferimento alla Fig. 7-2 $a \ll R$.

Numerose formule sono derivate basandosi su questa teoria adattandole a quelli che sono i vari casi e geometrie che vengono ad essere affrontati nella realtà.

Le formule derivate da questa teoria nel caso di materiale isotropo con un indentatore cilindrico, su cui si assume un'uniforme distribuzione di pressione, che incide un piano danno una resistenza all'indentazione $\propto E/(1 - \nu^2)$. Questo significa che quando il modulo di Poisson si avvicina a -1 la resistenza aumenta teoricamente all'infinito.

Facendo riferimento alla Fig. 7-2 si hanno le seguenti formule teoriche [62]:

$$b = 1.60\sqrt{pDC_E} \quad (7.1)$$

$$(\sigma_c)_{Max} = 0.798\sqrt{p/DC_E} \quad (7.2)$$

dove

$$C_E = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \quad (7.3)$$

dove E_1, E_2, ν_1, ν_2 sono i moduli di Young e di Poisson dei materiali che costituiscono il cilindro e il piano e p è la forza per unità di lunghezza del cilindro, D è il diametro del cilindro e b è la larghezza dell'area rettangolare di contatto. Si vede che l'influenza del modulo di Poisson si ha nel coefficiente C_E .

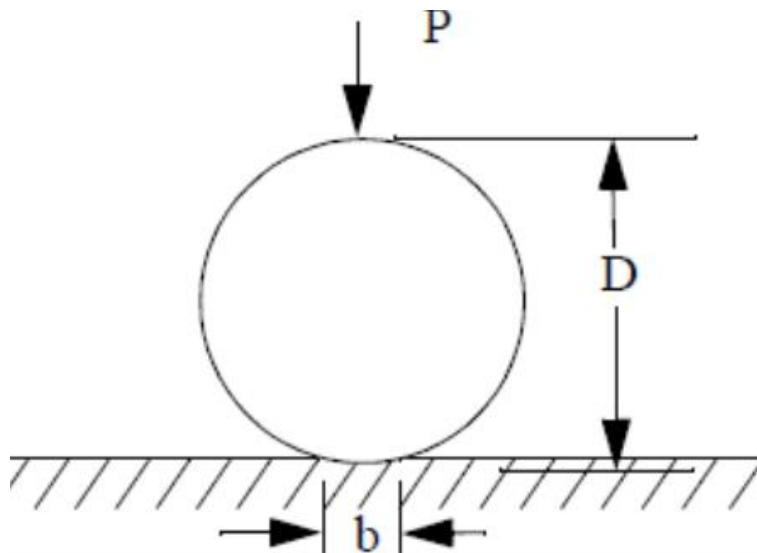


Fig. 7-2 Rappresentazione teorica del contatto.

La resistenza ad indentazione per gli auxetici è stata investigata nelle schiume auxetiche di rame ed è stato evidenziato che queste presentano una maggiore tensione di snervamento ma un minore modulo di Young delle rispettive schiume non auxetiche con la stessa densità relativa [42] e si è spiegato questo fenomeno come legato alla forma concava della struttura delle celle. Quando inoltre si è cercato di verificare dipendenza della densificazione del materiale auxetico al di sotto della zona di contatto in funzione della deformazione è emerso che i campioni di schiuma auxetica hanno un aumento della resistenza d'indentazione indipendente dalla densità apparente e dal modulo di compressione [44]. Altre prove sono state condotte sull'UHMWPE auxetico, confrontandolo con quello sinterizzato e quello stampato non auxetico [43]. Lo studio ha dimostrato una superiore resistenza ad indentazione per i bassi carichi (10-100 N) per l'auxetico rispetto sia lo stampato che il sinterizzato. Il meccanismo di densificazione del materiale auxetico è stato evidenziato e le cause non solo da imputare alla chiusura delle porosità ma anche dal trasporto in quella zona di noduli e fibrille.

7.2. Simulazioni Numeriche

Per verificare numericamente le proprietà ad indentazione dei materiali auxetici si sono condotte delle simulazioni FEM con l'utilizzo dei software MSC Patran e MSC Nastran. Il materiale auxetico utilizzato ha le caratteristiche derivanti dall'omogeneizzazione della struttura chirale esposta nel capitolo precedente.

Il modello FEM è stato costruito in modo da simulare un contatto di Hertz per un cilindro che incide su una piastra. Supponendo che il cilindro e la piastra siano infiniti e che la pressione sul cilindro sia uniforme lungo tutta la sua lunghezza si è scelto di analizzare una sezione qualsiasi trasversale all'asse del cilindro e perpendicolare al piano in modo da poter ridurre l'analisi da tridimensionale a bidimensionale. Questo permette di ridurre il numero di FEM da utilizzare e la loro complessità, e di conseguenza di snellire i tempi di calcolo e le risorse richieste all'hardware. Con questa filosofia anche la sezione circolare del cilindro è stata dimezzata orizzontalmente lungo il diametro così da diventare una semicirconferenza. Le dimensioni scelte per il modello sono dell'ordine di centimetri.

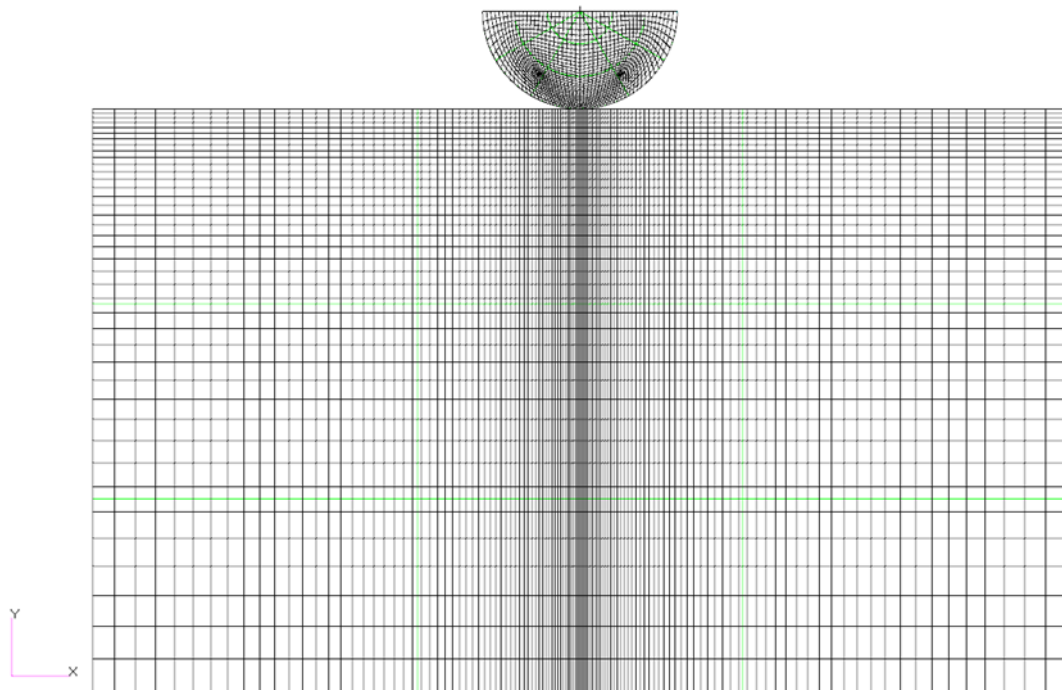


Fig. 7-3 Modello FEM costruito per simulare il contatto di Hertz.

La sezione della piastra è stata scelta di forma rettangolare ed ha dimensioni 50x30 cm, mentre il raggio della sezione del cilindro è di 5 centimetri. Modellata la geometria piana si sono create le proprietà delle sezioni associandole in Patran come 2D solid, in modo che il campo delle deformazioni risulti piano, e si è creata una mesh costituita da elementi quadrangolari a quattro nodi QUAD4. La mesh è stata costruita in modo da essere più fitta nelle zone più prossime al contatto rispetto che nelle zone ai bordi dove l'effetto va scemando (Fig. 7-3), realizzando ad un totale di circa 5500 elementi. In seguito, una volta definite le due regioni di contatto semicirconferenza e piastra, si è vincolata la sfera a poter solamente traslare verticalmente, mentre si è incastrato il nodo al centro del bordo inferiore della piastra e per gli altri nodi alla base si è inserito un vincolo che ne blocca la traslazione lungo la direzione y. Il contatto è stato impostato in modo da definire i due corpi come deformabili e associando un valore nullo dell'attrito di contatto, così come nulli sono i parametri termici. Una pressione uniforme agente nella direzione delle y negative è stata applicata sul diametro della semicirconferenza in modo da creare il contatto.

L'analisi è svolta utilizzando il solutore lineare di Nastran (sol 101) essendo che l'unica non linearità presente nel modello è il contatto. Per risolvere il problema del contatto il solutore utilizza un algoritmo non lineare (basato su quello del sol 400), mentre mantiene le ipotesi lineari per il resto della struttura. All'inizio sono state incontrate delle difficoltà in quanto il cilindro veniva visto come non vincolato dal software che non accetta elementi liberi di traslare. Per aggirare questa problematica si è inserita una piccola molla in direzione parallela ad y tra i punti più vicini del cilindro e della piastra, ovviamente prima del contatto. In questo modo si vincola il cilindro alla piastra ma si altera la struttura creando dei risultati che potrebbero non essere corretti. Per far sì che l'effetto della molla elastica sia il meno influente possibile, si è scelta una molla molto cedevole, priva di massa e con valore della costante elastica di $K = 0.5 \text{ N/mm}$.

Per verificare l'adesione tra la teoria e l'analisi numerica si è scelto di confrontare un caso standard di un indentatore cilindrico di acciaio AISI E 52100 con le seguenti proprietà $E = 210 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$. Per la piastra omogenea si è scelta una lega di alluminio (AA6061-T6) con $E = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 0.33$, $\rho = 2750 \text{ kg/m}^3$. Unendo questi dati a quelli già citati della geometria e imponendo una forza su unità di lunghezza di 10000 N/mm tramite le equazioni (7.1)-(7.3) si trova che:

$$(\sigma_c)_{Max} = 19.3 \text{ GPa}$$

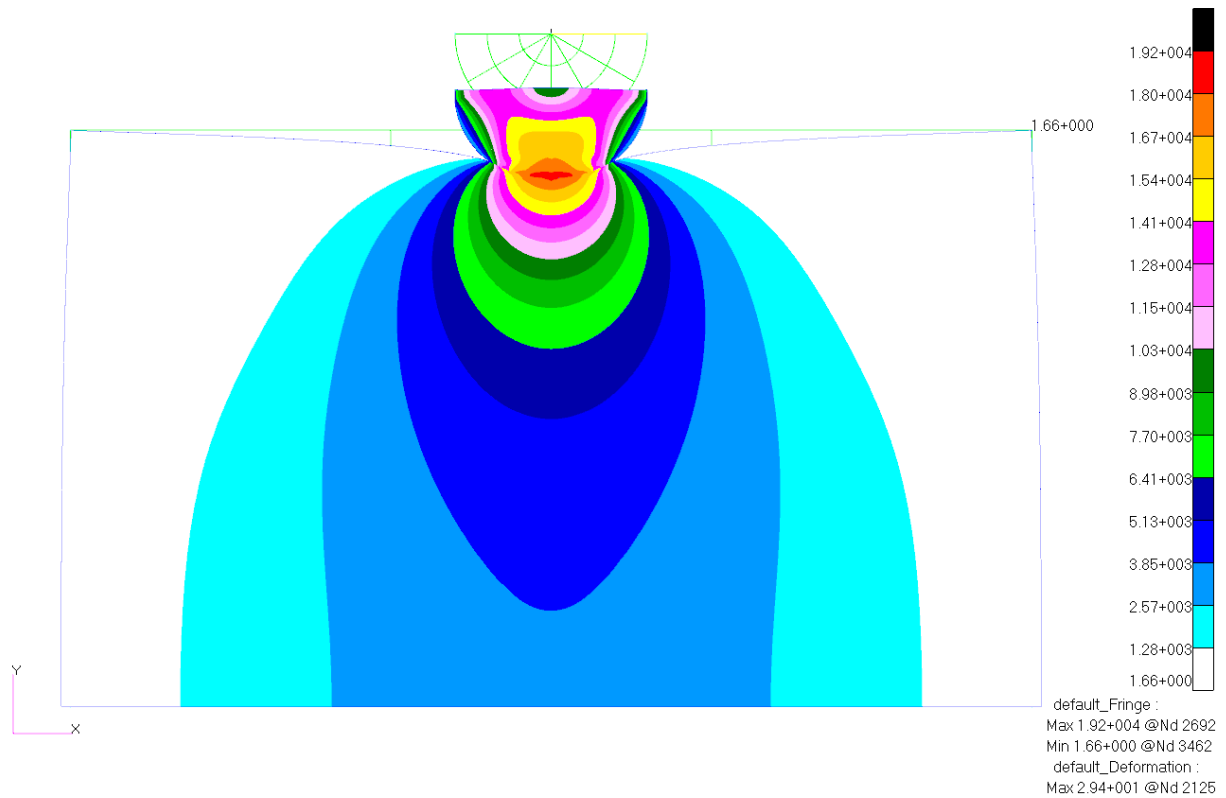


Fig. 7-4 Stress di Von Mises per il caso di una piastra di alluminio classica [MPa].

Parallelamente si è eseguita una simulazione numerica e, confrontando i risultati ottenuti nei due casi, emerge che la teoria e la simulazione sono in ottimo accordo. Infatti creando un report con le tensioni calcolate con Von Mises nelle celle attorno al contatto, si hanno valori che oscillano tra i 19.2 *GPa* e i 18 *GPa* (Fig. 7-4).

In questo caso si ha una discrepanza tra i valori massimi calcolati del risultato numerico e quello teorico che è di circa lo 0.5%.

Per valutare l'effetto della molla si sono selezionati i nodi ai suoi capi. Il nodo attaccato alla semicirconferenza ha uno spostamento nella direzione delle *y* di -25,1 mm, quello collegato alla piastra di -25. Essendo la molla scelta lunga 0.1 mm, e trascurando le cifre superiori alla terza è come se i due nodi si sovrapponessero. Con queste assunzioni si ricava facilmente che la forza elastica è di 0.05 N. Considerando che quella applicata al diametro ha risultante pari a 1 MN si può tranquillamente trascurarne l'effetto. Vista quindi l'ottima adesione dei risultati ottenuti col FEM si è proceduto con le analisi numeriche sugli honeycomb auxetici analizzati in precedenza. Le prove non verranno compiute su un modello FEM delle strutture reticolari ma si utilizzeranno i valori delle costanti elastiche della piastra omogenea isotropa in modo da poter immediatamente riutilizzare la costruzione di Fig. 7-3 e potendo anche sfruttare i

risultati dell'omogeneizzazione per ridurre di molto in numero di elementi altrimenti necessario all'analisi.

7.2.1. Esagonale Chirale

Richiamando i dati ottenuti in precedenza dall'omogeneizzazione, si è creata una piastra omogenea con $\nu = -0.952$, $E = 146.44 \text{ MPa}$ e densità $\rho = 495 \text{ kg/m}^3$. Il materiale dell'indentatore è invece mantenuto lo stesso del caso precedente. Per evidenziare al meglio il comportamento auxetico si è effettuata una prima simulazione con una forza su unità di lunghezza di 5000 N/mm. Il risultato grafico è evidenziato in Fig. 7-5.

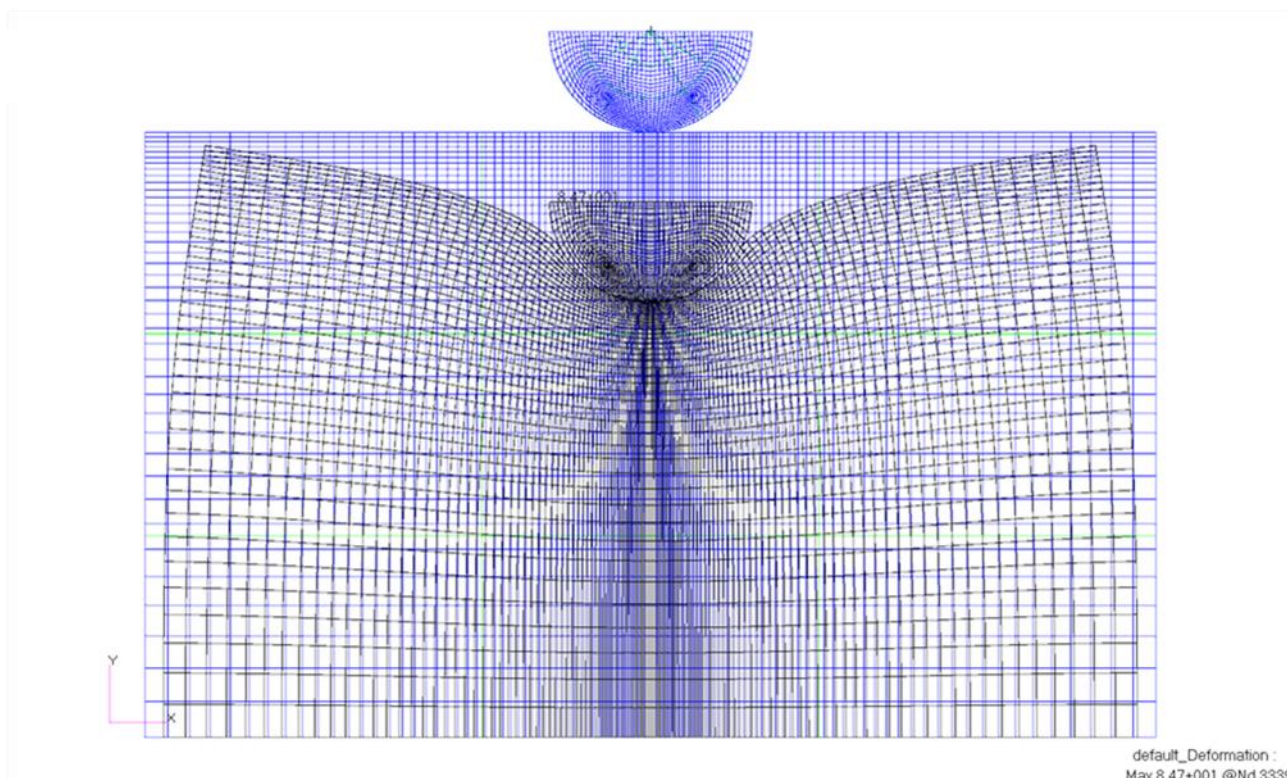


Fig. 7-5 Deformata piastra auxetica con una forza su unità di lunghezza di 5000 N/mm.

Si nota chiaramente la caratteristica auxetica della piastra poiché, pur essendo sottoposta a compressione, si ha una contrazione laterale ben visibile, con il corrispondente effetto di densificazione nella zona centrale e in particolare in quella di contatto come previsto dalla teoria e rilevato sperimentalmente.

Per lo studio numerico effettivo però si è abbassato il valore della forza su unità di lunghezza agente sul diametro in quanto il modulo elastico è minore rispetto a quello del caso di Fig. 7-4 e quindi per restare dentro le ipotesi di piccole deformazioni è necessario abbassare il valore del carico imposto a 50 N/mm. Inoltre è prassi nelle prove ad indentazione di usare carichi entro certi valori ben normati e quindi anche per questo si è preferito abbassarne il valore ad uno più conforme. Il valore della forza elastica della molla è al massimo di 0.05 N e, dunque, si

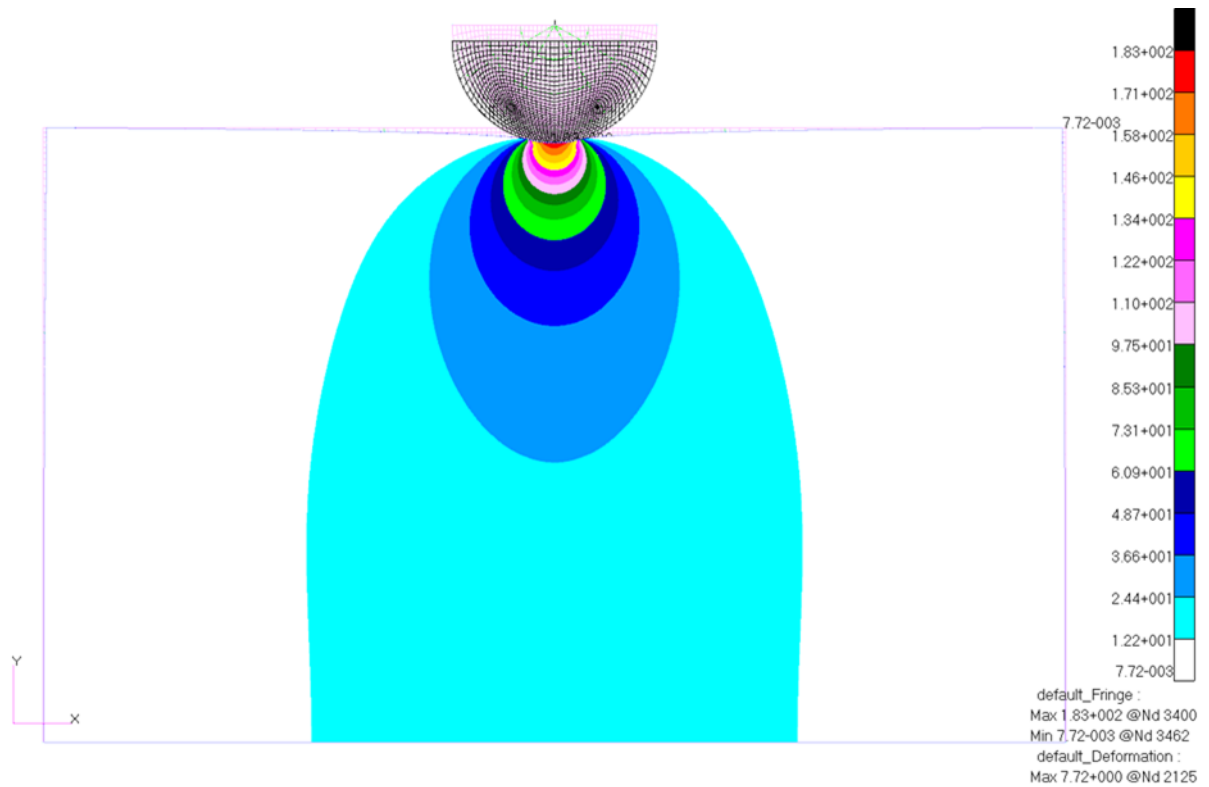


Fig. 7-6 Distribuzione degli stress ottenuta per l'indentazione del materiale auxetico equivalente [MPa].

può ancora trascurarne l'effetto. La distribuzione degli stress calcolati con Von Mises ottenuti è riportata in Fig. 7-6. I valori massimi di stress ottenuti dalla simulazione numerica sono attorno ai 183 MPa. La zona più sollecitata è sempre quella vicino al contatto. Molto significativi sono i risultati ottenuti per gli spostamenti che hanno valore massimo attorno ai 7.6 mm. Studiando l'ampiezza degli spostamenti (Fig. 7-8) e la loro componente lungo y (Fig. 7-7) non si ravvisano grandi differenze rispetto ad un materiale normale. Al contrario se ci si concentra sugli spostamenti in direzione x si nota subito la particolarità del comportamento auxetico (Fig. 7-9). Dividendo a metà la piastra passando per mezzzeria della coordinata x si ha che gli spostamenti a sinistra sono positivi e quelli a destra negativi. Questo significa che il materiale fluisce verso la mezzzeria della piastra e di conseguenza verso la zona di contatto (Fig. 7-9).

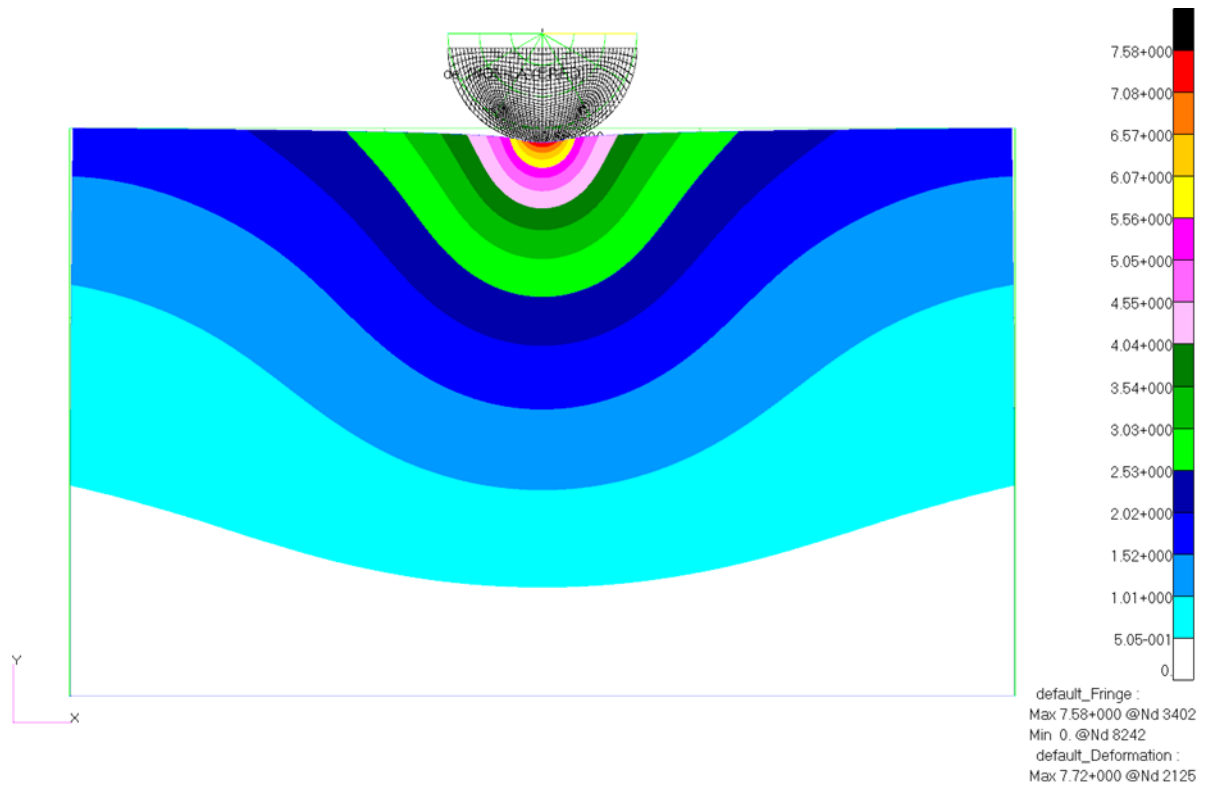


Fig. 7-8 Ampiezza degli spostamenti nel caso di indentazione della piastra auxetica [mm].

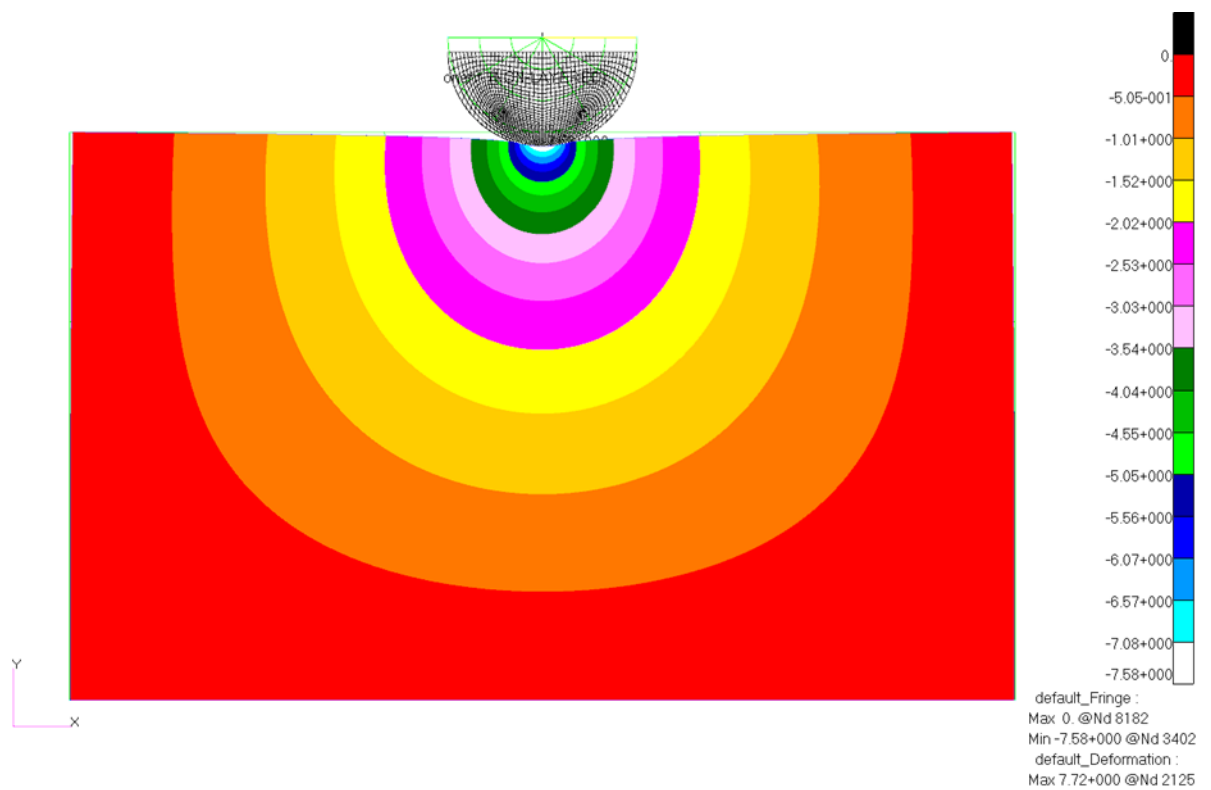


Fig. 7-7 Spostamenti in direzione y nel caso di indentazione della piastra auxetica [mm].

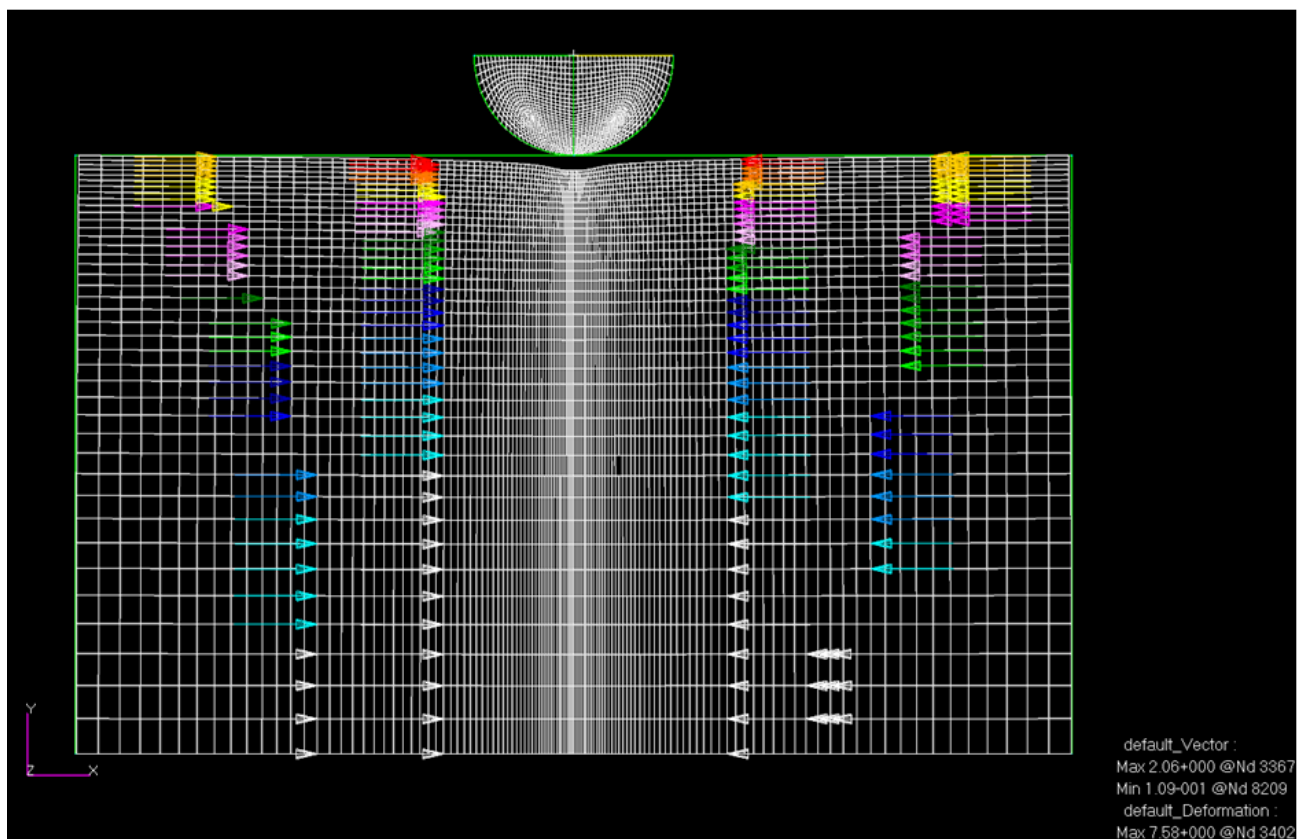
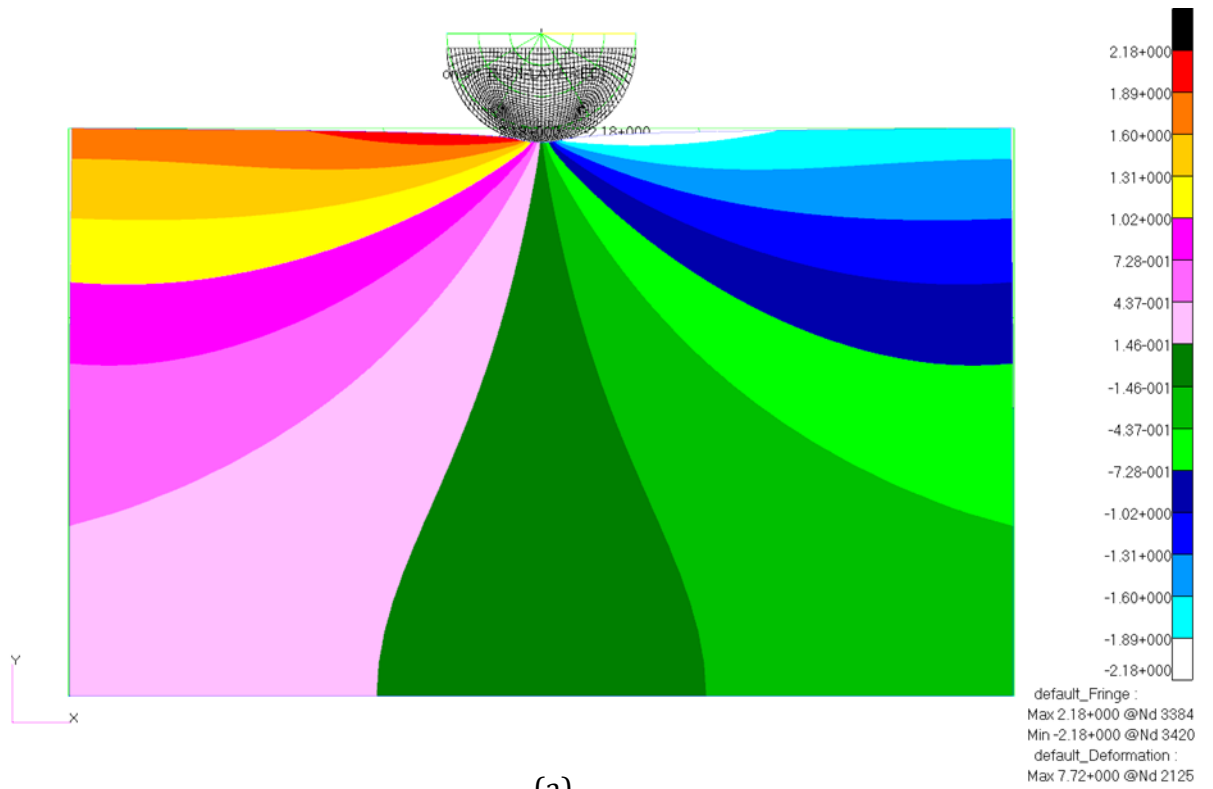


Fig. 7-9 Spostamenti in direzione x nel caso di indentazione della piastra auxetica (a) fringe [mm] (b) vettori .

Per un primo confronto si è pensato di ripetere la precedente simulazione con un materiale con lo stesso modulo di Young e con la stessa densità ma con modulo di Poisson positivo pari a $\nu = 0.35$. In questo modo emerge immediatamente l'influenza del modulo di Poisson. I risultati ottenuti sono riportati nelle Fig. 7-10, Fig. 7-11, Fig. 7-12, Fig. 7-13.

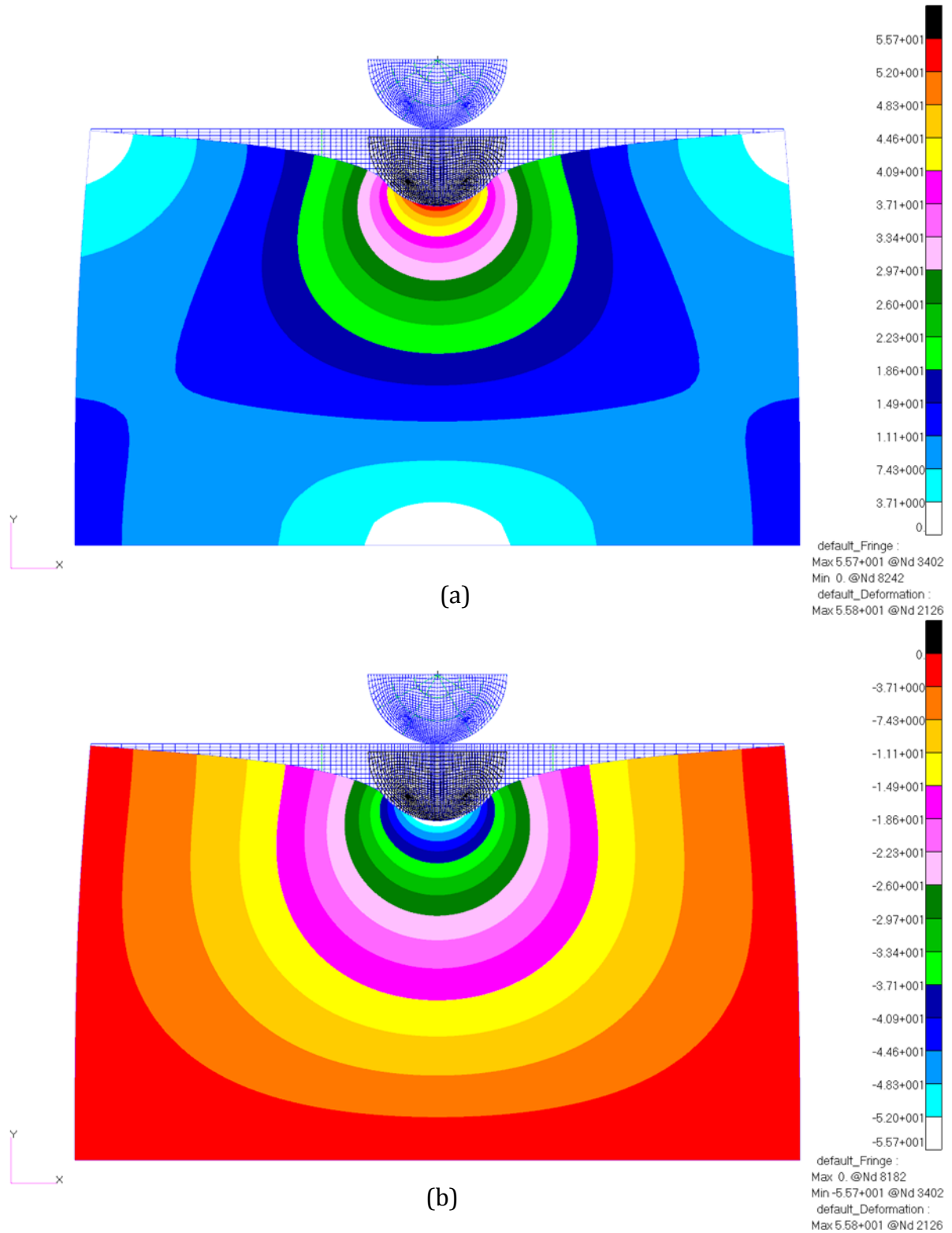


Fig. 7-10 Spostamenti nel caso di una piastra equivalente non auxetica (a) ampiezza (b) in direzione y [mm].

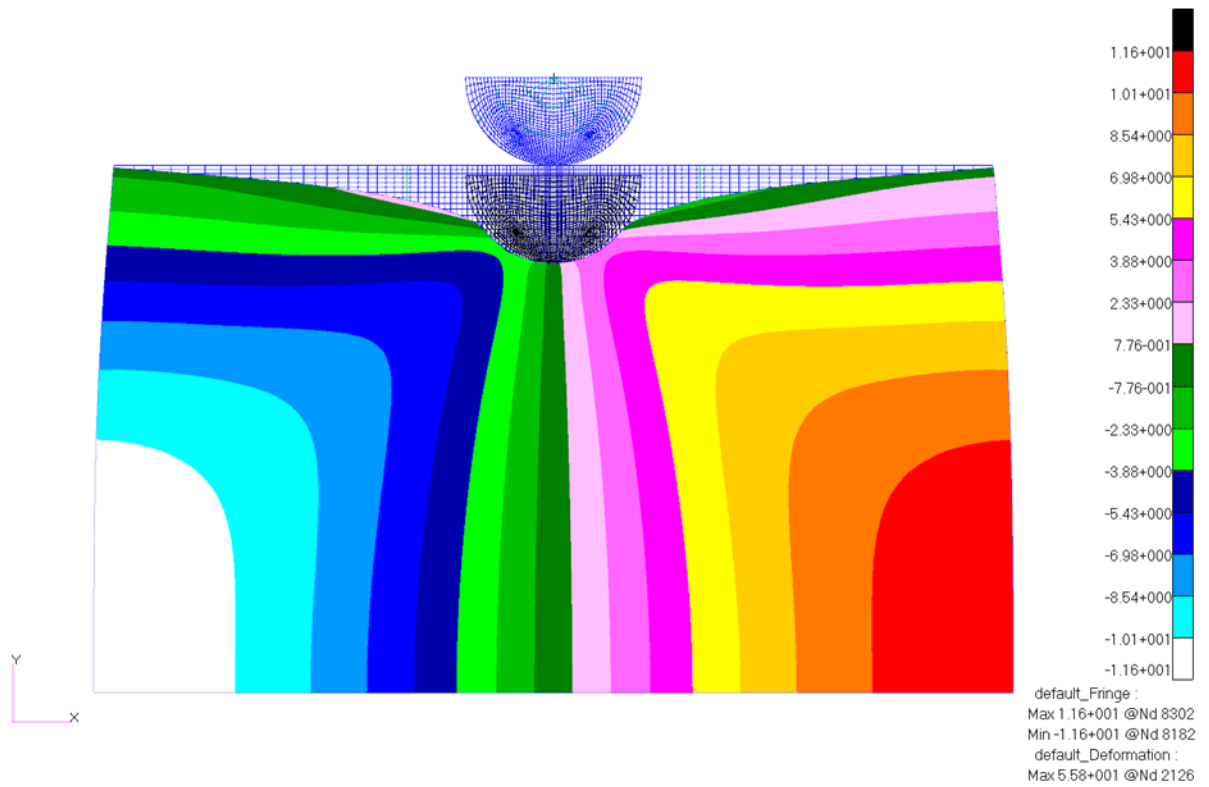


Fig. 7-11 Spostamenti nel caso di una piastra equivalente non auxetica in direzione x [mm].

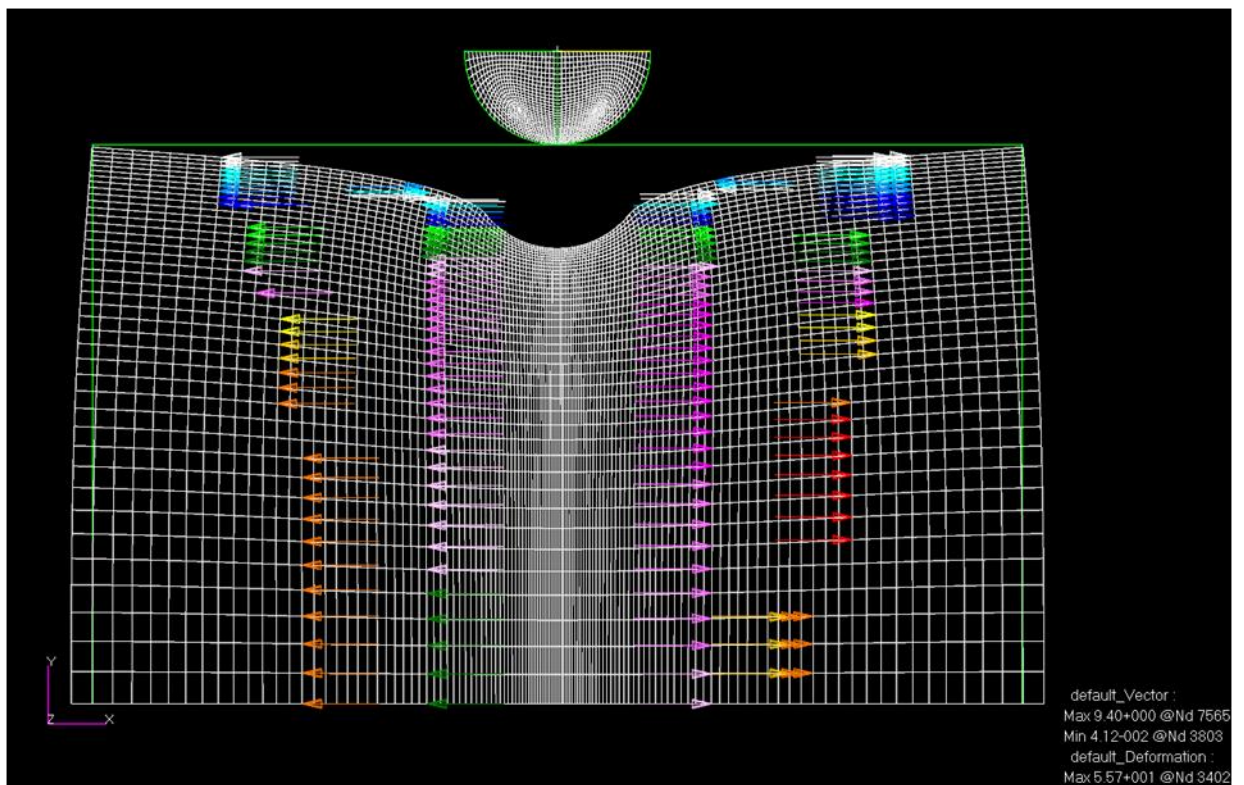


Fig. 7-12 Alcuni vettori spostamento in direzione x nel caso di una piastra equivalente non auxetica.

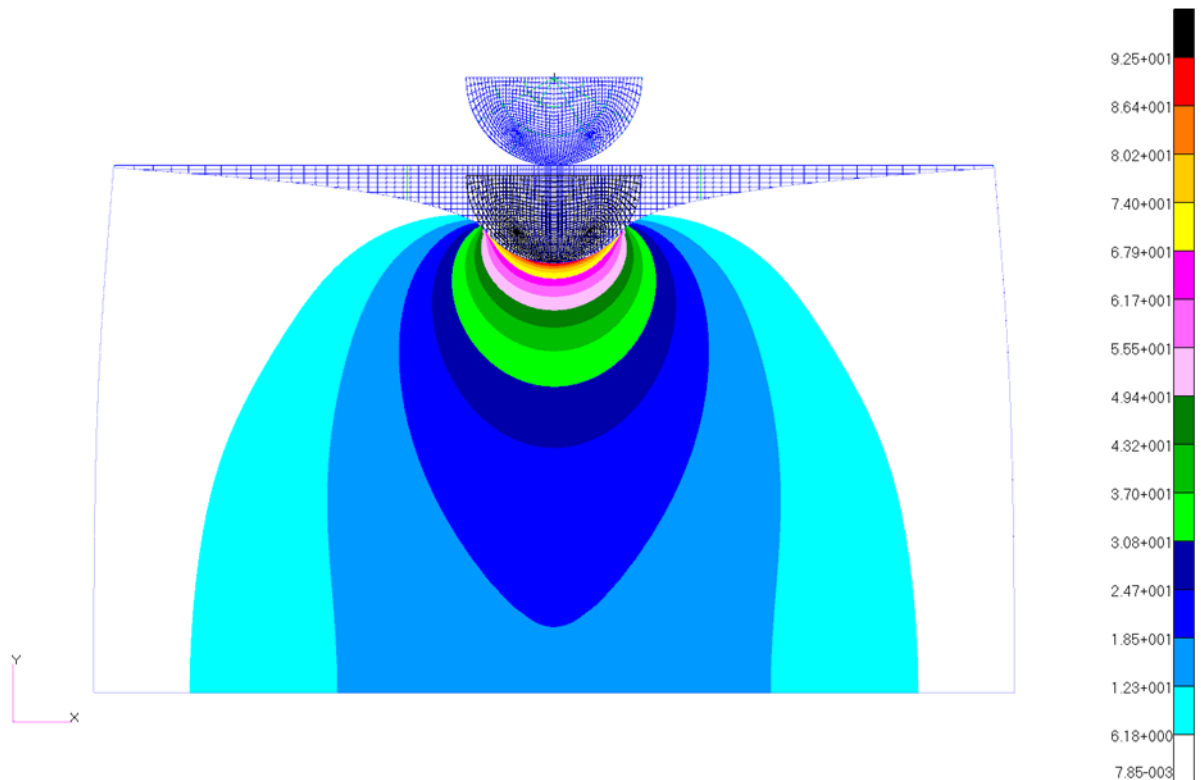
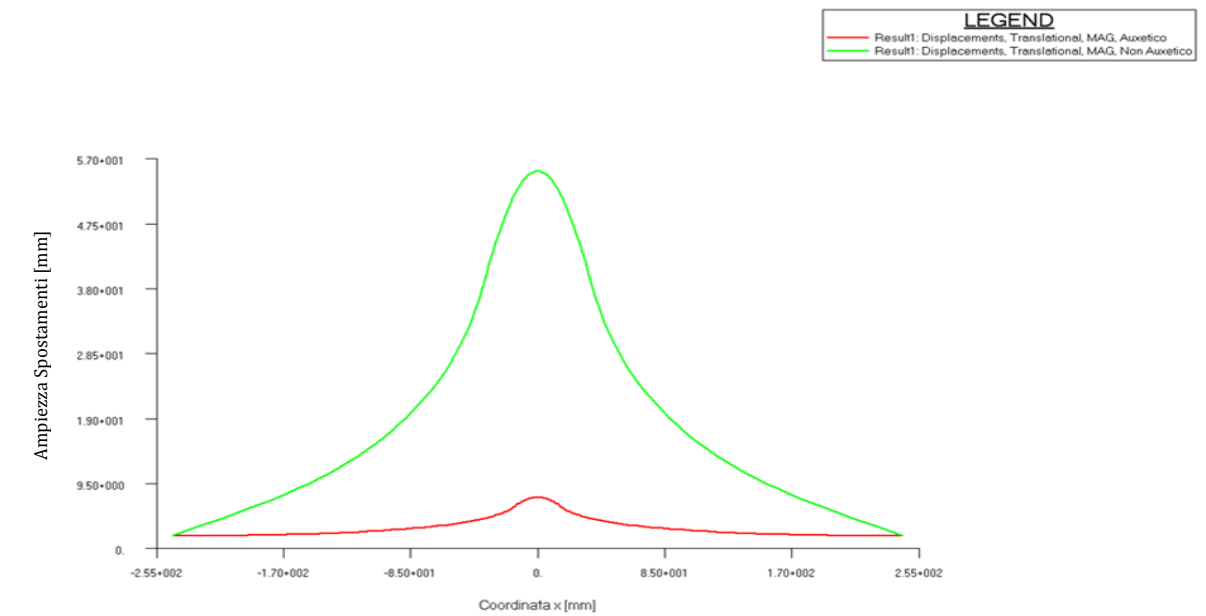


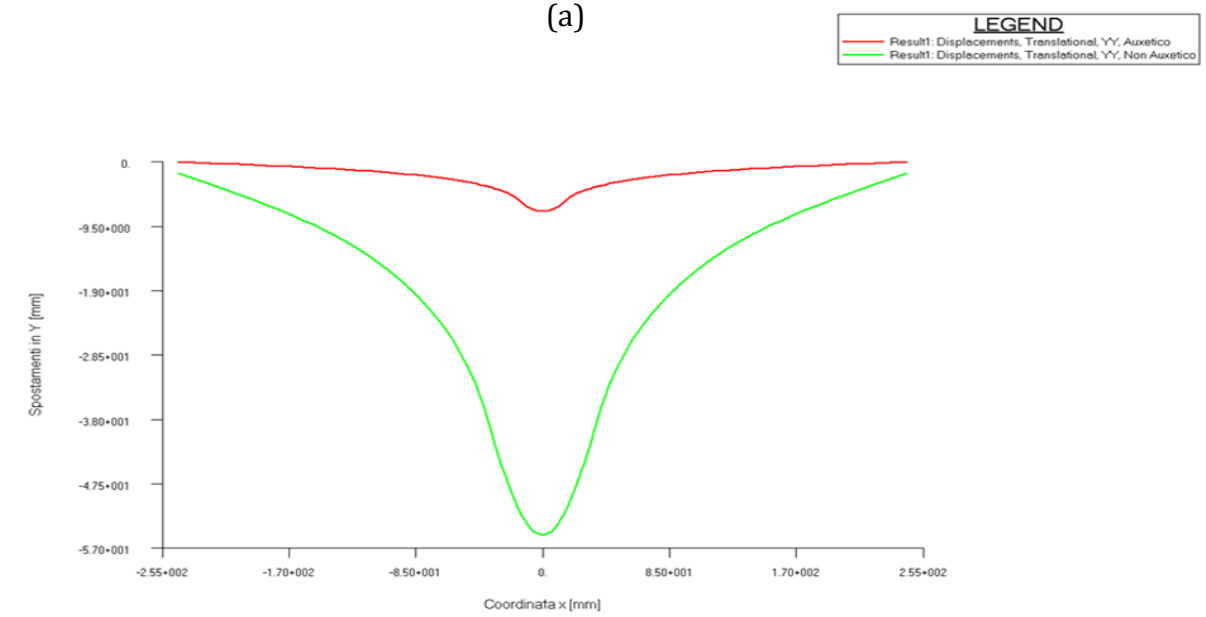
Fig. 7-13 Andamento degli stress di von Mises per piastra equivalente non auxetica [MPa].

Qualitativamente si vede che gli spostamenti lungo y hanno lo stesso andamento del caso auxetico in quanto ovviamente l'indentatore da uno spostamento verso il basso. Cambiano invece gli spostamenti in x dai quali si vede che in questo caso il materiale fluisce in direzione opposta a quella del contatto. Infatti dividendo nuovamente la piastra a metà si ha che il materiale a sinistra della mezzeria tende a spostarsi in direzione delle x negative, al contrario quelle a destra sono in direzione di quelle positive. Per questo motivo cambia anche l'andamento dell'ampiezza degli spostamenti. Per quanto riguarda gli stress nella piastra si hanno dei valori di stress inferiori ma distribuiti su un'area maggiore.

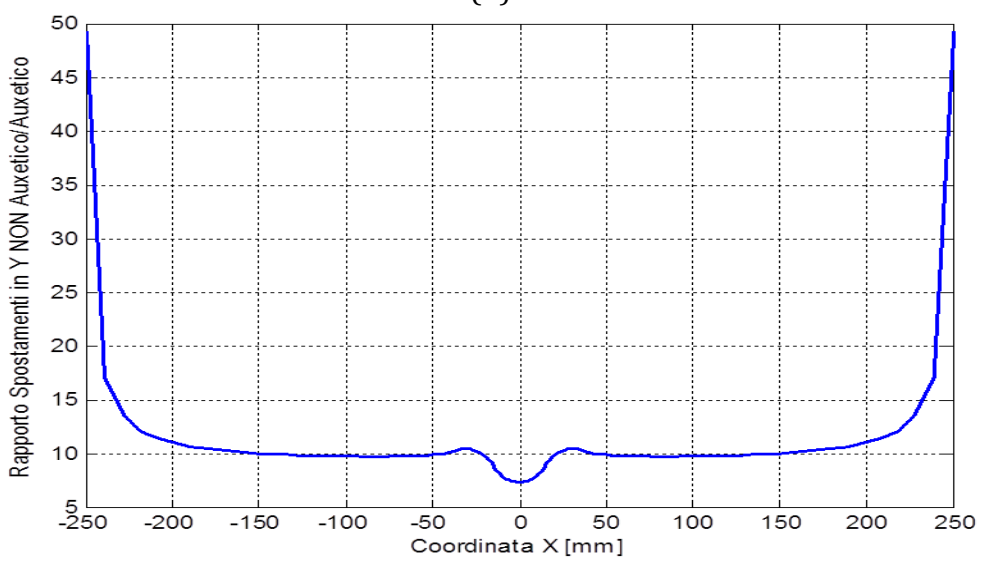
Per confrontare numericamente gli spostamenti si selezionano gli elementi del bordo superiore tra la piastra auxetica e non auxetica e si ottengono i grafici di Fig. 7-14. Esportando i dati in Matlab si trovano degli spostamenti del materiale auxetico che sono al massimo di 7.6 mm sia in ampiezza sia lungo y (i massimi spostamenti si hanno nella zona a metà piastra nella quale in cilindro forza gli elementi a spostarsi solo verticalmente), mentre per il materiale non auxetico si trova un massimo di spostamento pari a 55 mm. L'aumento è netto risulta che lo spostamento nell'auxetico non arriva nemmeno al 14% di quello del materiale con modulo di Poisson positivo.



(a)



(b)



(c)

Fig. 7-14 Grafici spostamenti (a) ampiezza, (b) spostamenti in Y, (c) rapporto tra gli spostamenti in Y del non auxetico rispetto l'auxetico.

Riportando in forma grafica anche il rapporto dei valori degli spostamenti lungo y (Fig. 7-14(c)) si vede che la differenza è massima ai bordi e minima in mezzeria, dove però si hanno le massime variazioni assolute spostamenti (di circa 48 mm).

Molto interessante è vedere gli spostamenti in direzione x nei due casi (Fig. 7-15).

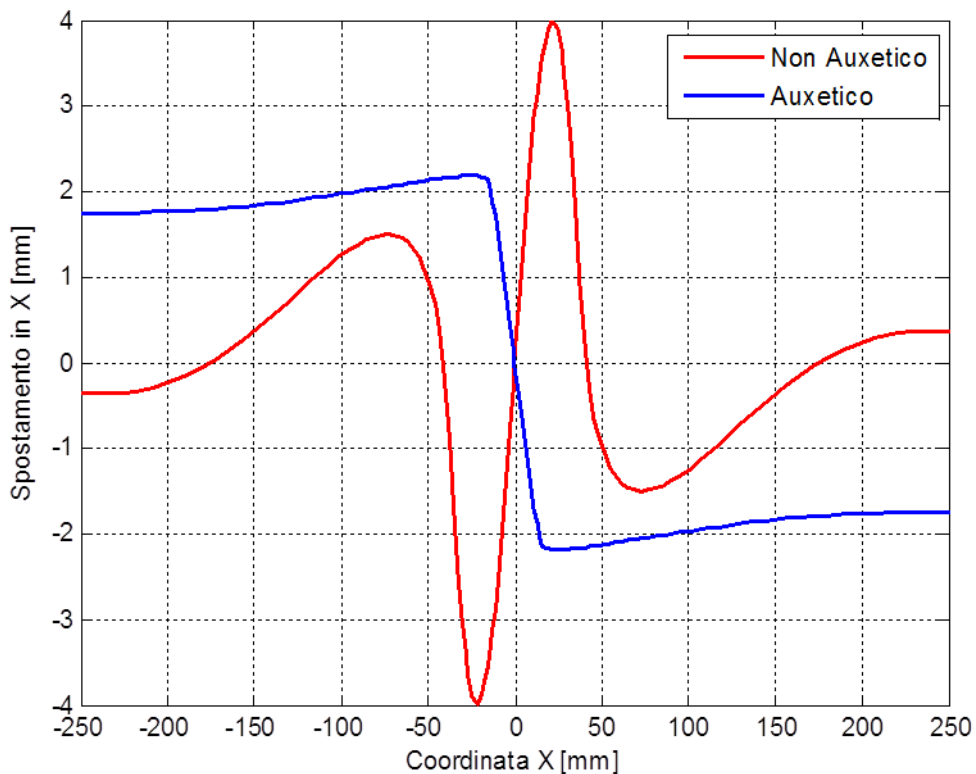


Fig. 7-15 Grafico degli spostamenti in direzione X.

Per il materiale auxetico in questo caso si ottiene un grafico degli spostamenti simmetrico rispetto l'origine. I nodi degli elementi con coordinata x negativa hanno uno spostamento di due circa 2 mm, quelli con x positiva di circa -2 mm per tutti gli elementi del bordo superiore della piastra ad esclusione di quelli più prossimi al contatto il cui movimento viene limitato dall'indentatore. Complessivamente ogni nodo tende a convergere nella zona indentata.

Per il materiale non auxetico gli spostamenti sono nella direzione delle x positive per i nodi vicini alla zona indentata con coordinata positiva e negative per i nodi con coordinata negativa. I valori assoluti in questa zona hanno un massimo di 4 mm. Procedendo verso l'esterno si ha una variazione della direzione di spostamento del materiale. Questo non è legato al fatto che ci sia una zona di materiale che tenda a scorrere verso il contatto, ma è legato al fatto che l'avanzare dell'indentatore crea nel materiale una tendenza ad accartocciarsi attorno allo stesso, e quindi entrano in gioco delle rotazioni che causano uno

spostamento complessivo per questa zona che tende verso l'indentatore (visibile anche in Fig. 7-11, Fig. 7-12). La zona più esterna della piastra riprende il comportamento della zona centrale tendendo ad allontanarsi nuovamente dal contatto. Questa zona risulta essere perturbata dalla presenza dell'indentatore e dagli effetti di bordo. Selezionando una sezione

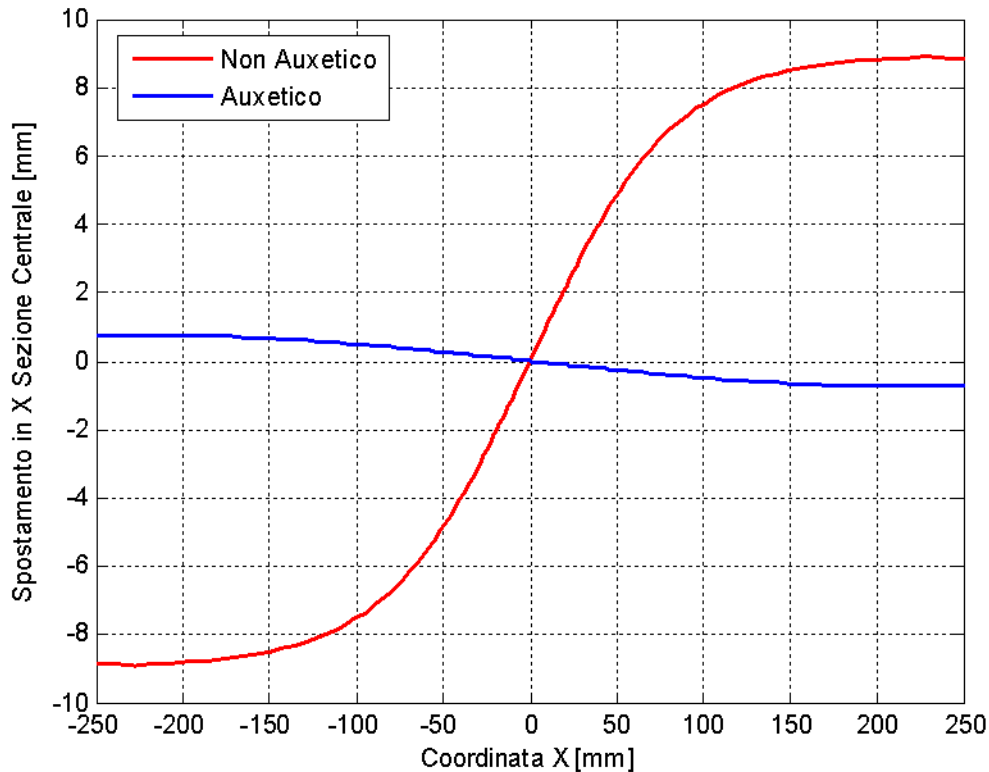
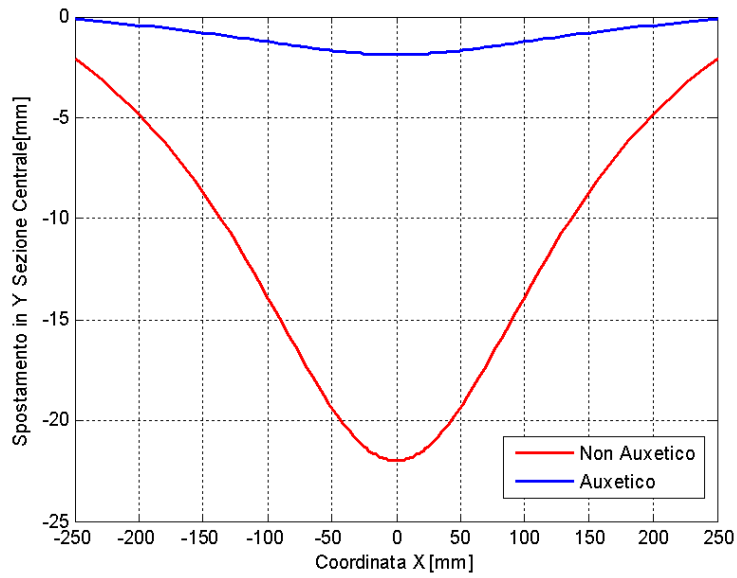
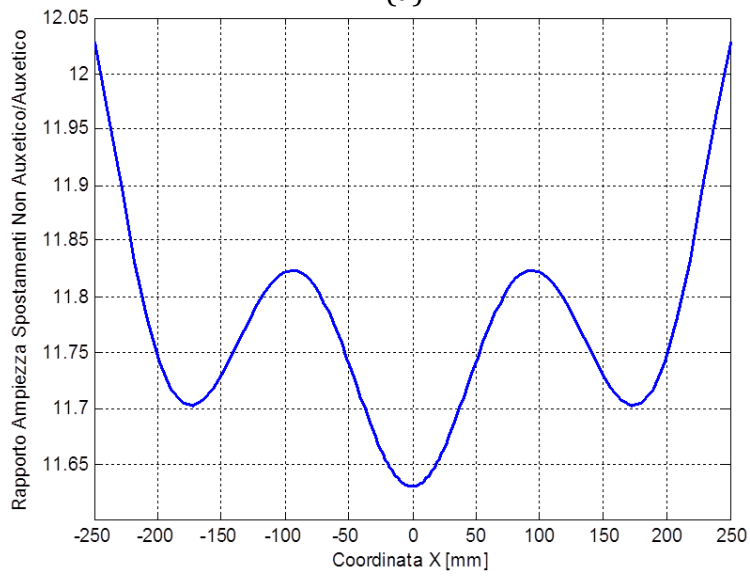


Fig. 7-16 Grafico degli spostamenti in direzione X per nodi di una sezione centrale a 171 mm dall'incastro.

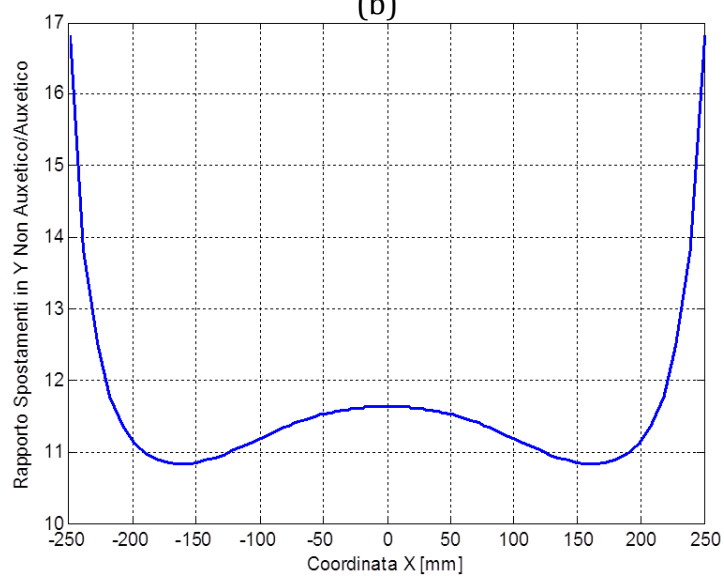
intermedia della piastra si possono ripetere le stesse considerazioni senza questi effetti di disturbo. In questa sezione, posta a 171 mm dall'incastro (quindi circa in corrispondenza alla mezzeria del lato verticale) tutti i nodi hanno spostamento che si allontana dal centro per il materiale non auxetico e si avvicinano per materiale auxetico definendo meglio il comportamento nei due casi senza che siano sporcati da effetti di bordo. Per quanto riguarda i rapporti delle ampiezze e delle componenti Y degli spostamenti hanno ovviamente altri valori ma l'andamento è simile a quello già visto per il bordo superiore, con una maggiore differenza verso l'esterno e minore al centro, tranne per il fatto che i profili non presentano più la concavità centrale verso il basso, ma verso l'alto in quanto si risente meno della presenza del cilindro. Le differenze sono minori rispetto alla sezione di bordo.



(a)



(b)



(c)

Fig. 7-17 Grafici per la sezione intermedia (a) dello spostamento in Y nei due casi, (b) del rapporto di ampiezza degli spostamenti, (c) del rapporto degli spostamenti in y.

In relazione alle minori ampiezze degli spostamenti si trovano, nel materiale auxetico, tensioni massime circa doppie rispetto al caso non auxetico. Per andare a vedere come variano le tensioni lungo i nodi posti nella mezzeria della piastra che è quella più direttamente influenzata dal contatto si esportano i dati ottenuti dalle simulazioni in una tabella Excel poi importata in Matlab per le operazioni di calcolo. Andando a riportare i valori delle tensioni calcolate con Von Mises, si ottengono i risultati di Fig. 7-18.

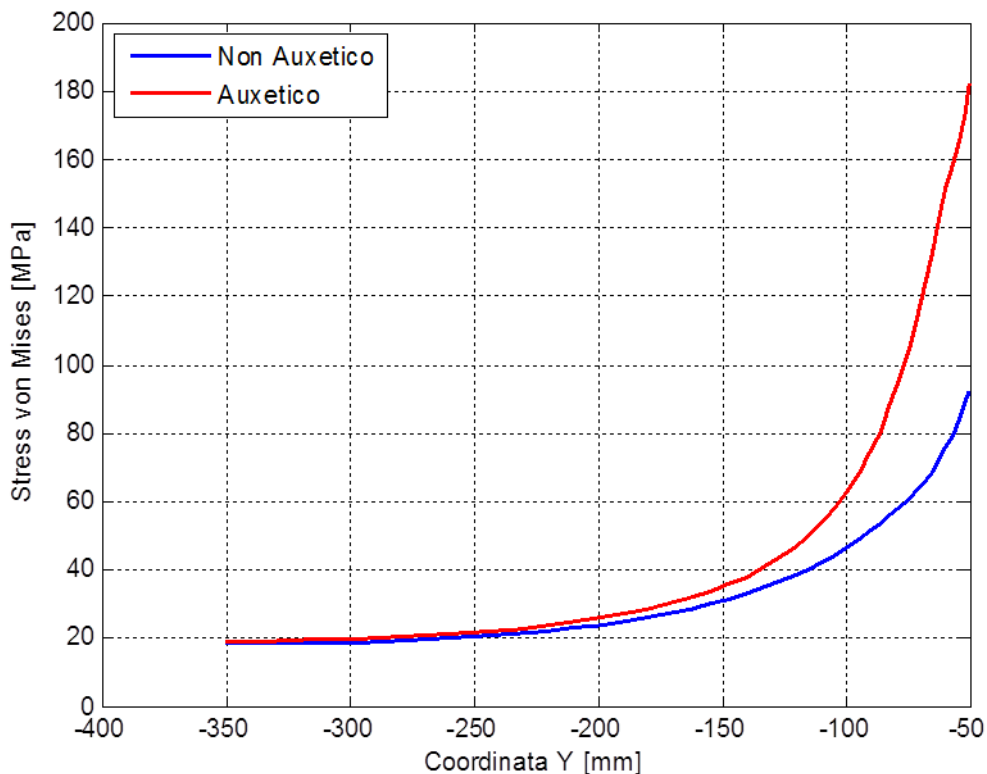


Fig. 7-18 Stress di Von Mises nella sezione di mezzeria nei due casi.

La coordinata $y = -350 \text{ mm}$ è quella del nodo alla base della piastra dove cioè c'è l'incastro, quella $y = -50 \text{ mm}$ è del nodo alla sommità cioè dove di fatto avviene il contatto. La differenza dei valori assoluti è maggiore nei nodi più prossimi al contatto rispetto a quelli più lontani passando da un valore di 203 MPa ad uno di 16 MPa per l'auxetico e da 94 MPa a 15 MPa per il non auxetico. Per sottolineare in modo più appropriato quest'aspetto si è calcolato il rapporto tra le tensioni ottenute nel caso auxetico rispetto a quello non auxetico (Fig. 7-19(a)).

I risultati definiscono chiaramente che è nel primo tratto, cioè nella zona del contatto, che il comportamento è radicalmente diverso, infatti le tensioni che si trovano nell'auxetico sono anche più del doppio rispetto al materiale convenzionale. Questo permette al materiale auxetico di rispondere con più prontezza al carico che viene applicato e sopportare meglio il carico applicato pur avendo lo stesso identico modulo elastico del materiale convenzionale.

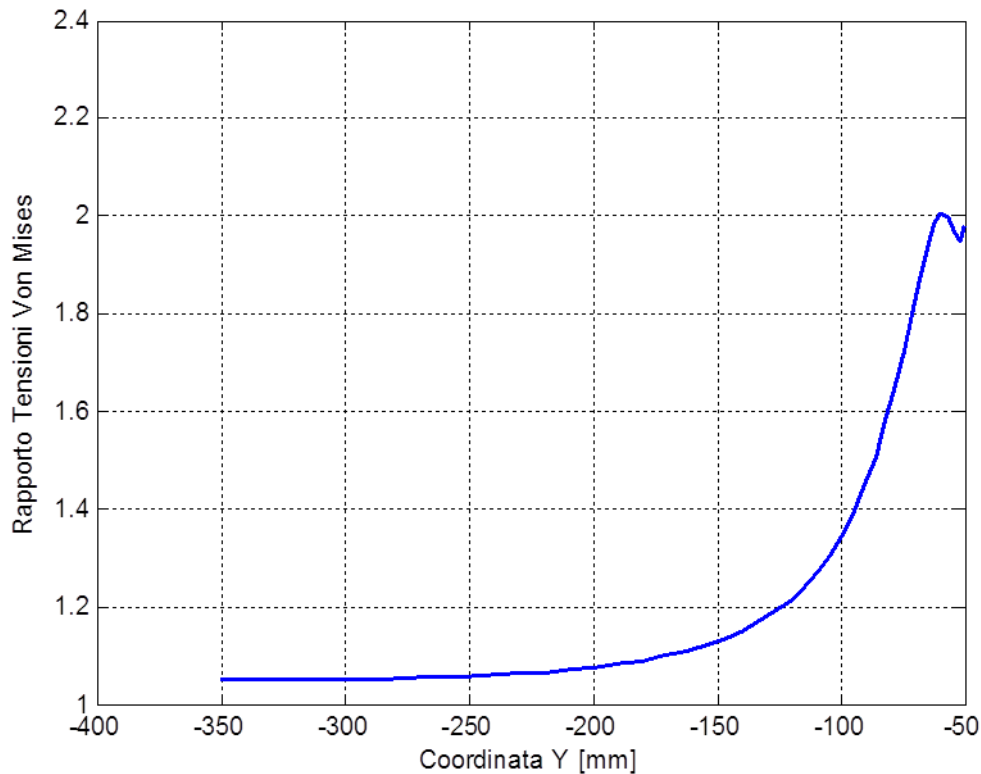
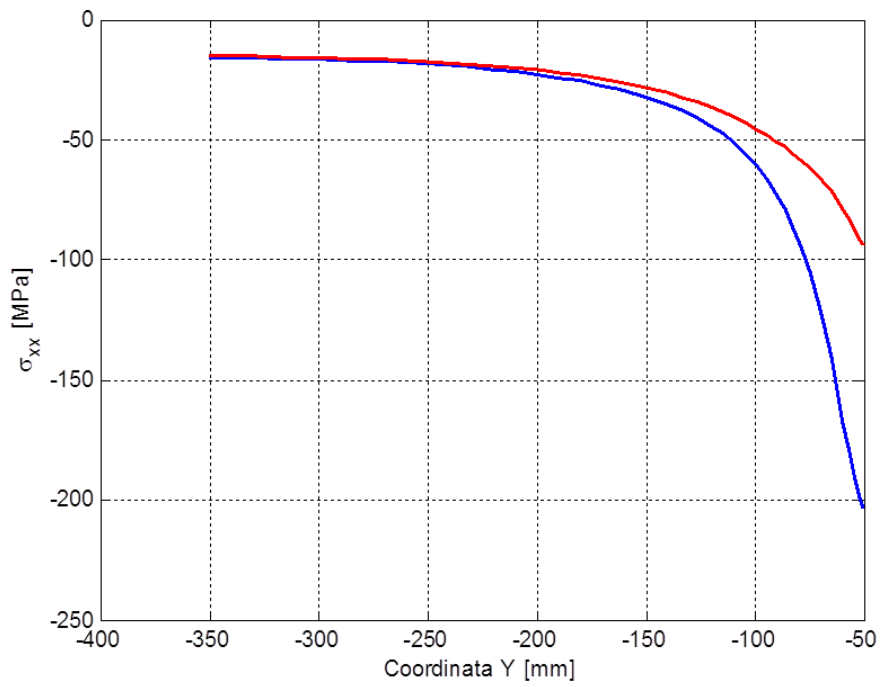
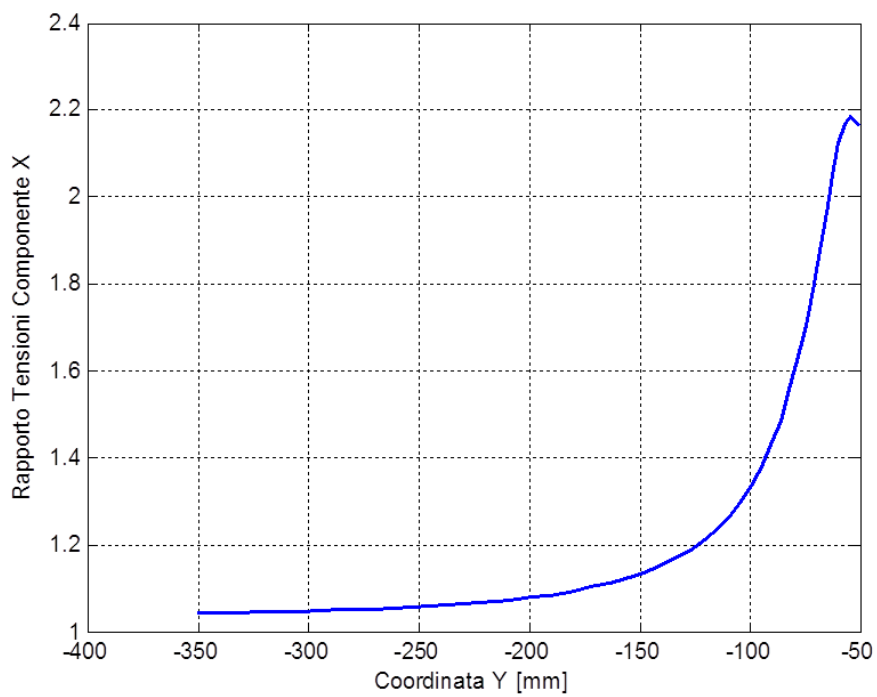


Fig. 7-19 Rapporto tra le tensioni nella sezione di mezzeria del materiale auxetico col materiale non auxetico calcolate con Von Mises.

Analizzando solamente la componente x della tensione si vede che la differenza è ampia nell'ultimo terzo della piastra partendo dall'incastro. In questa zona il materiale auxetico aumenta la densità e quindi contrasta in maniera più efficace l'avanzare dell'indentatore.



(a)



(b)

Fig. 7-20 (a) Andamento e (b) rapporto delle componenti x della tensione.

7.2.2. Confronto con Reticolo Triangolare

Infine si è confrontato il reticolo esagonale chirale con un comune reticolo triangolare avente la stessa densità. Le formule per calcolare le caratteristiche del materiale equivalente sono [64]:

$$\rho = 2\sqrt{3}\frac{t}{L}\rho_s \quad (7.4)$$

$$E = \frac{2t}{L\sqrt{3}}E_s \quad (7.5)$$

$$\nu = \frac{1}{3} \quad (7.6)$$

Scegliendo un rapporto $t/L = 4.3 \cdot 10^{-2}$ si ottiene $\rho = 414 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0.33$, $E = 3.51 \text{ GPa}$. La densità è volutamente mantenuta vicina a quella dell'honeycomb auxetico studiato in precedenza in modo che il confronto sia immediato. I risultati ottenuti sono riportati nelle figure seguenti.

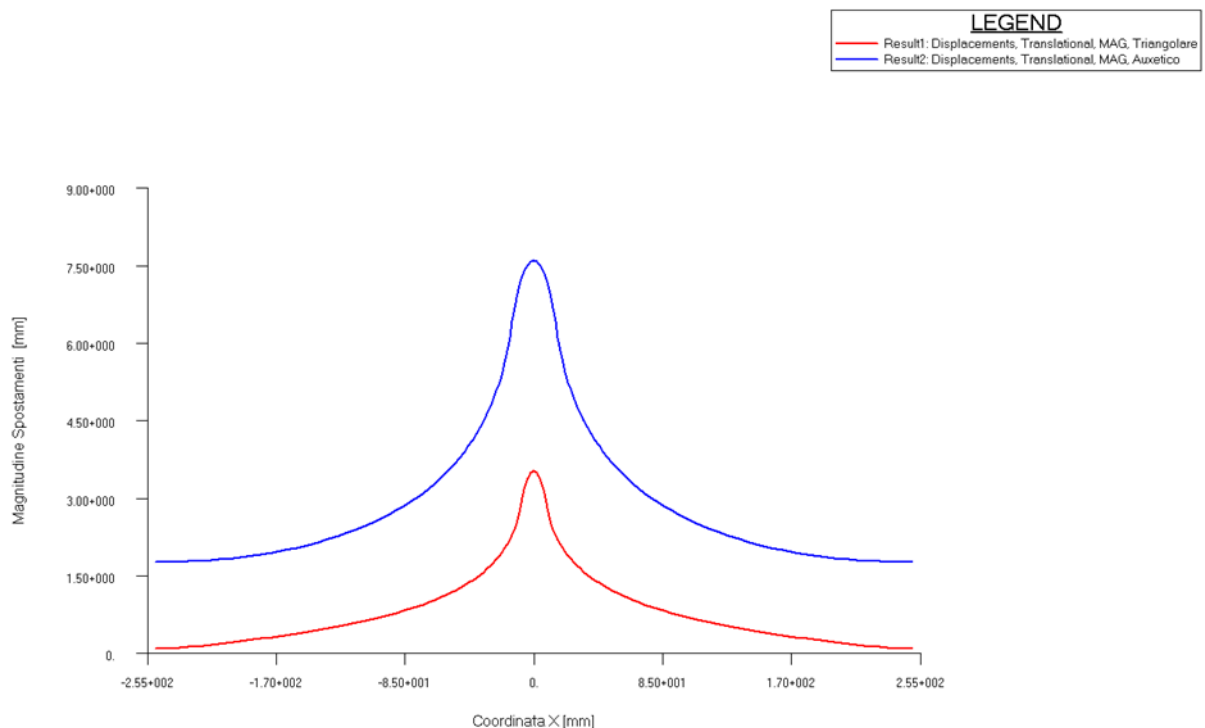


Fig. 7-21 Ampiezza spostamenti bordo superiore.

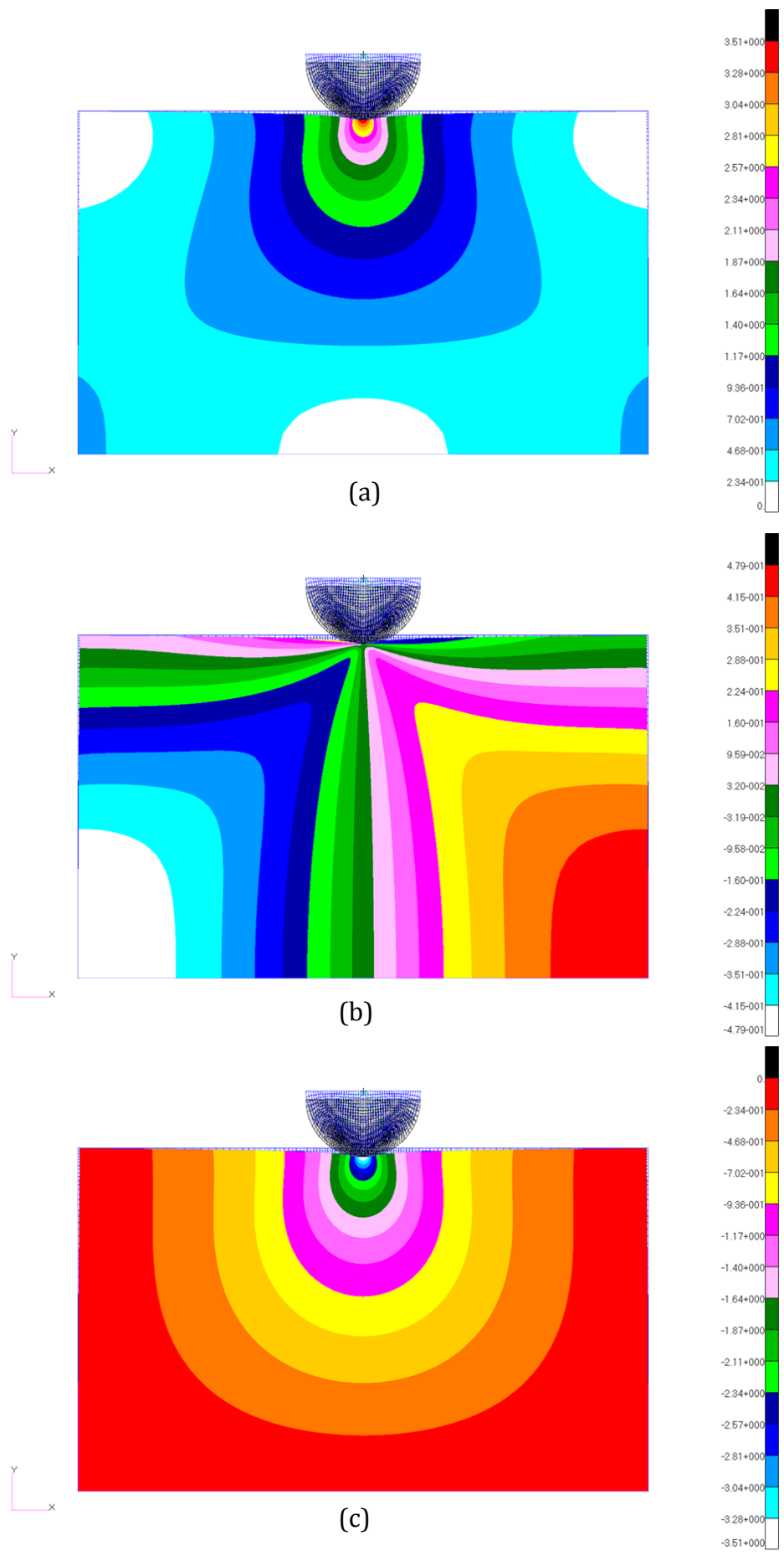
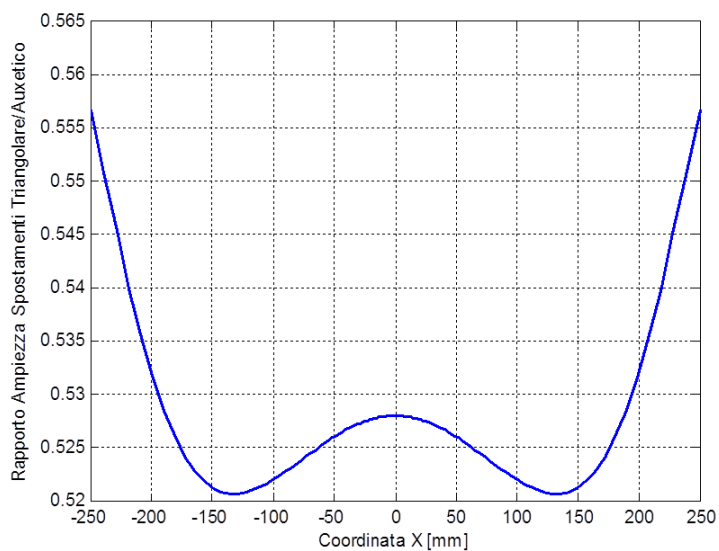
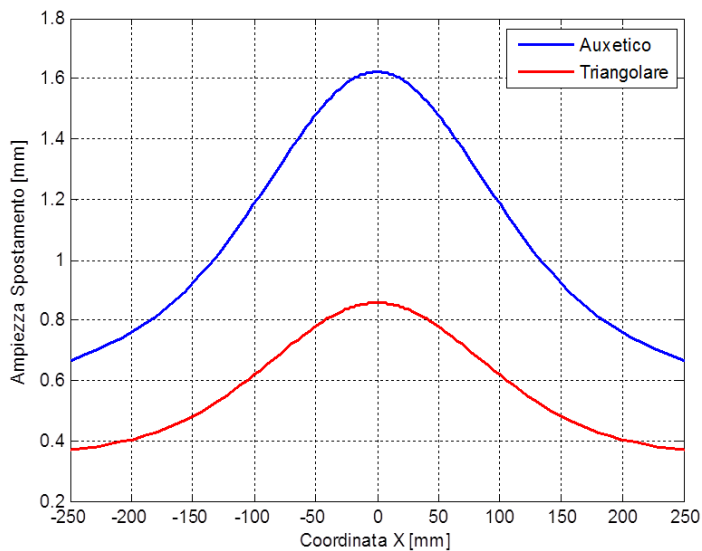
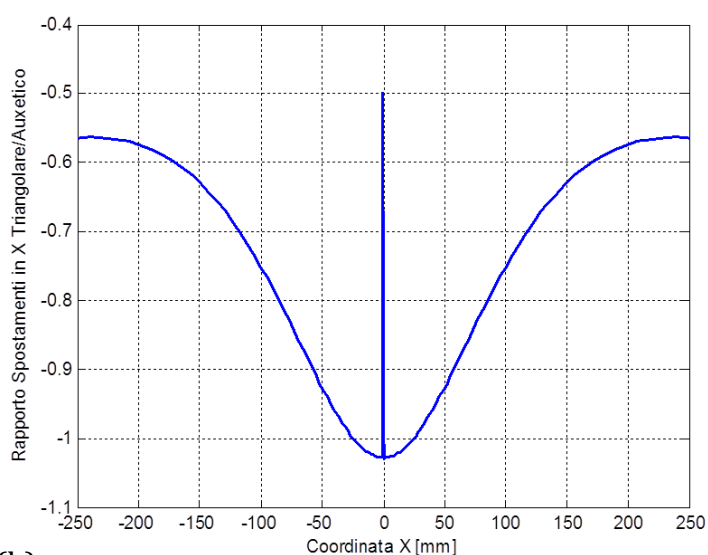
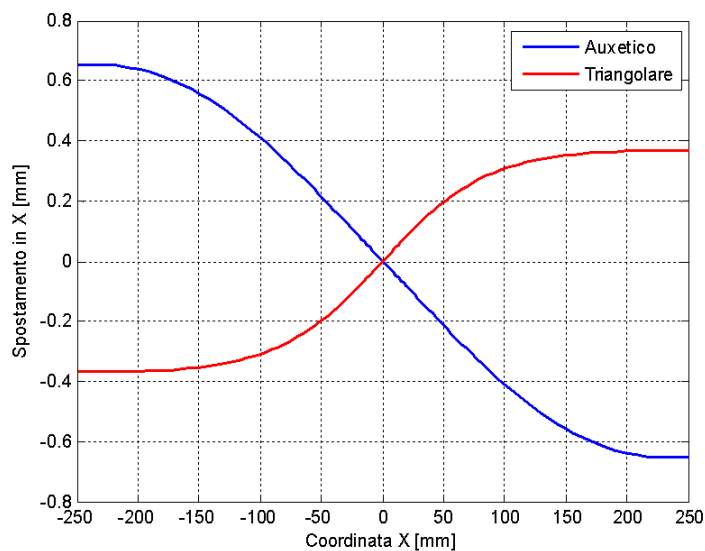


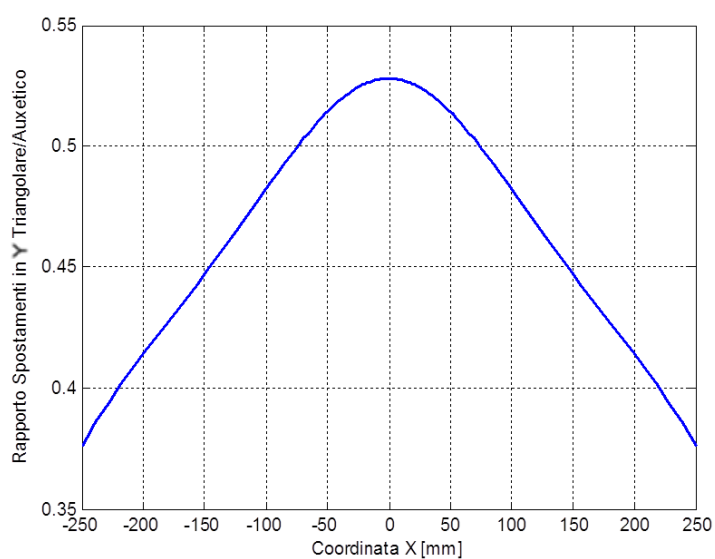
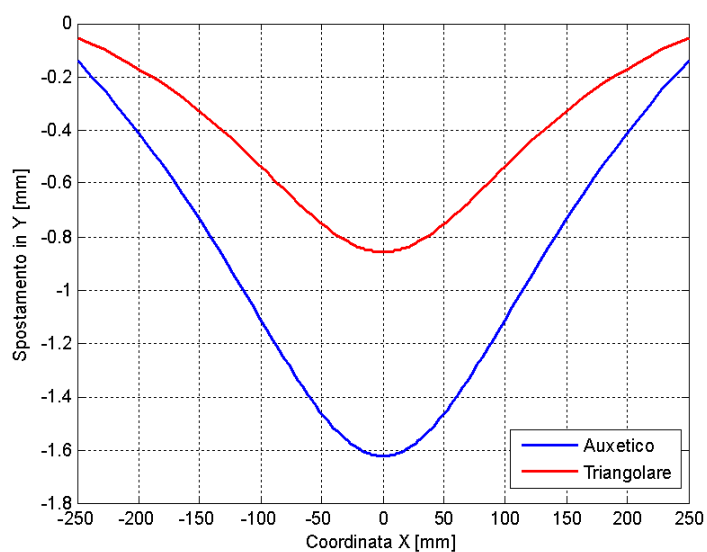
Fig. 7-22 Andamenti degli spostamenti: (a) ampiezza, (b) spostamenti in x, (c) spostamenti in y.



(a)



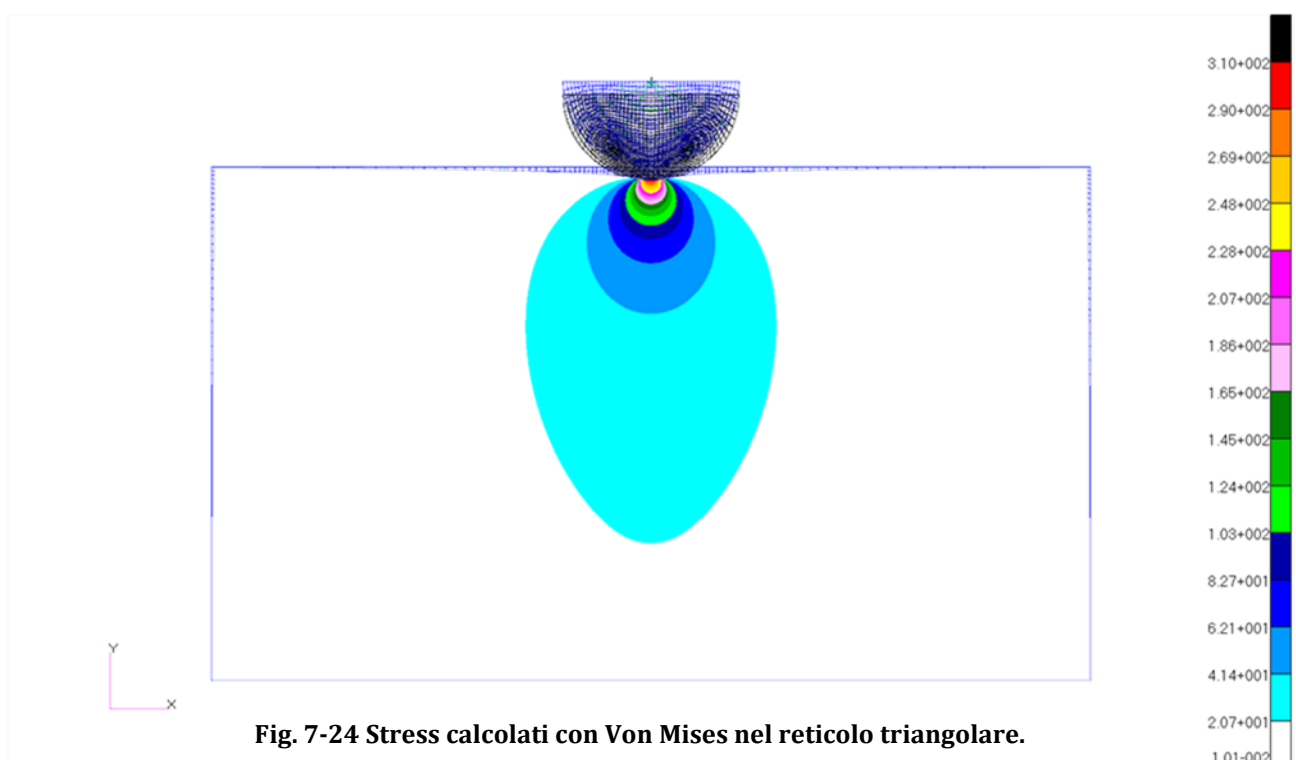
(b)

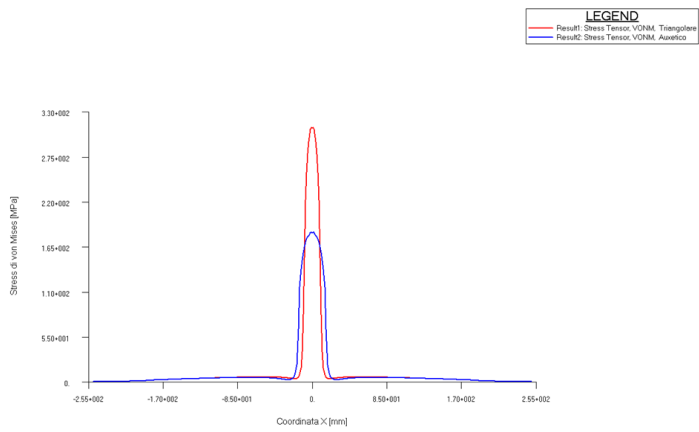


(c)

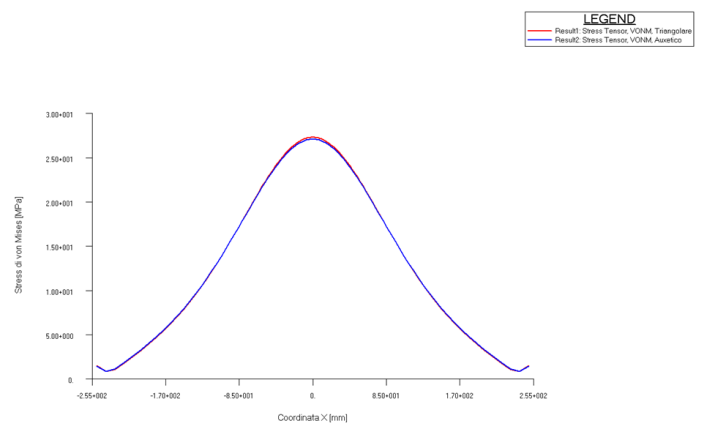
Fig. 7-23 Grafici degli spostamenti e dei rapporti tra honeycomb triangolare ed auxetico (a) in ampiezza, (b) in direzione x, (c) in direzione y.

L'elevato modulo di Young, se confrontato con quello dell'honeycomb esagonale chirale è maggiore di oltre 23 volte, permette alla struttura triangolare di comportarsi meglio di quella auxetica. Il comportamento qualitativo dell'honeycomb triangolare è uguale a quello del materiale con modulo di Poisson positivo analizzato in precedenza. La differenza degli spostamenti nella sezione di bordo è di circa 4 mm (Fig. 7-21). Andando ad analizzare una sezione intermedia distante 161 mm dalla base si ottengono i risultati di Fig. 7-23. Qui le differenze sono inferiori al millimetro, quindi allontanandosi dall'incastro i due reticoli si avvicinano come comportamento. Da notare in Fig. 7-23(b) che il picco improvviso nel rapporto degli spostamenti in x tra il triangolare e l'auxetico è legato al fatto che gli spostamenti in quella direzione per i nodi centrali sono molto piccoli e questo crea complicazioni numeriche. Per quanto riguarda gli stress questi sono circa raddoppiati nella sezione di bordo superiore (Fig. 7-26). Si passa da un valore di circa 170 MPa per l'auxetico ad uno di 330 MPa. Se invece si considera una sezione intermedia (la stessa del caso precedente a 161 mm dall'incastro) gli stress quasi si eguagliano. Se si fa il rapporto tra gli stress nel reticolo triangolare rispetto quelli nell'auxetico (Fig. 7-25), si nota che il triangolare ha stress maggiori nei nodi vicini ai bordi estremi e alla mezzeria. Questo è legato al fatto che essendo indotto a convergere al centro il materiale auxetico coinvolge maggiormente tutta la larghezza della sezione per contrastare gli sforzi. Al contrario, nel caso triangolare, la risposta si concentra maggiormente nella sezione centrale che risulta essere più sollecitata.





(a)



(b)

Fig. 7-26 Stress nella sezione (a) di bordo e (b) a 161 mm dall'incastro

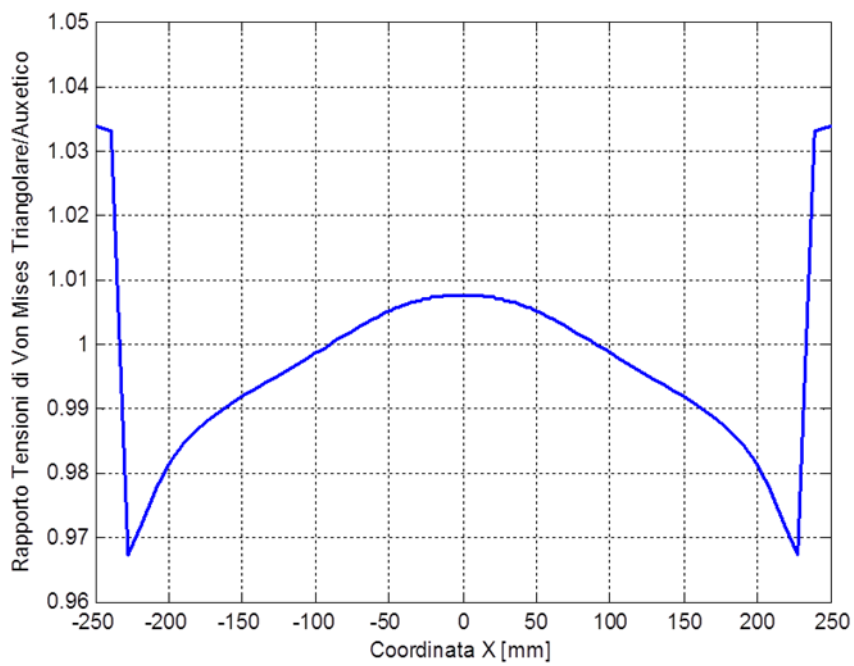


Fig. 7-25 Rapporto degli stress di Von Mises nella sezione centrale.

8. CONCLUSIONI E COMMENTI

Dall'analisi effettuata in questa tesi, emergono molte delle particolarità che caratterizzano i materiali auxetici. Nella prima fase si è studiata l'omogeneizzazione effettuata con il metodo dell'energia di deformazione. Per l'applicazione di questa metodologia si è scelta una struttura auxetica reticolare con cella elementare esagonale chirale. I confronti FEM impostati in Patran evidenziano un'ottima adesione tra il modello reticolare e quello omogeneo ricavato in precedenza basato sui valori del modulo di Young $E = 146 \text{ MPa}$ e il modulo di Poisson $\nu = -0.95$, ovviamente negativo. Le simulazioni di trazione monoassiale in campo lineare danno delle discrepanze tra i due casi che incidono sulla terza cifra significativa per quanto riguarda gli spostamenti dei punti della sezione individuata dalla decima cella unitaria. Il comportamento auxetico è immediatamente individuabile giacché si ha la classica espansione laterale in risposta ad una sollecitazione di trazione (invece che una contrazione come si ha nei materiali convenzionali). L'omogeneizzazione è una procedura che porta molti vantaggi per le analisi da compiere in seguito. Infatti, il vantaggio di ridursi ad un materiale omogeneo, e nel presente caso anche isotropo, è decisivo sia per quanto riguarda i tempi di calcolo e di creazione di geometrie e mesh nei calcolatori sia per poi potersi avvalere di teorie già sviluppate, o magari di svilupparne di nuove, senza doversi poi preoccupare delle eterogeneità e delle peculiarità del materiale di base.

Gli ottimi risultati ottenuti dal processo di omogeneizzazione sono stati immediatamente utilizzati per studiare il comportamento della piastra omogenea quando sottoposta a contatto forzato con un cilindro simulando l'indentazione come un contatto di Hertz.

Le simulazioni d'indentazione danno risultati perfettamente compatibili con la trattazione teorica generale del contatto di Hertz, infatti il caso generale analizzato (contatto acciaio-alluminio) da una differenza tra le formule teoriche e la soluzione numerica di solo lo 0.5%. In seguito si è compiuta la medesima simulazione sostituendo il materiale auxetico per valutarne la risposta. Il miglioramento evidenziato è significativo. Gli spostamenti in verticale dei punti della piastra sottostanti l'indentatore, cui è stata applicata una forza su unità di lunghezza in corrispondenza del diametro pari a 50 N/mm, sono al massimo di 7.58 mm mentre per un materiale non auxetico con il medesimo modulo di Young ma modulo Poisson di 0.35 si ha uno spostamento massimo pari a 55 mm; quindi nell'auxetico si ha una riduzione dello spostamento di circa l'86% rispetto al non auxetico. Questo dato, assieme a quelli esposti nella sezione precedente, sottolinea quanto influente sia il modulo di Poisson nella risposta del materiale.

In seguito si è confrontato l'honeycomb esagonale chirale con una convenzionale struttura avente reticolo triangolare. Si sono mantenute densità molto vicine in modo da avere risultati paragonabili. Si è trovato un modulo di Young superiore a quello chirale di oltre 23 volte. Questo ha permesso al reticolo triangolare di avere una migliore risposta ad indentazione. Gli spostamenti nella zona del contatto dimezzati, mentre il valore degli stress è circa raddoppiato. Da questi dati emergono diversi aspetti.

Il primo è che, pur avendo un modulo elastico nettamente superiore, il reticolo triangolare risponde ad indentazione con valori paragonabili a quelli dell'honeycomb chirale e, quindi, si può pensare ad un loro utilizzo in applicazioni in cui finora si sono usati solo reticoli convenzionali.

Per controparte, è pur vero che gli honeycomb auxetici hanno risposte ad indentazione simili al reticolo triangolare, ma è anche vero che la complessità geometrica interna è nettamente superiore e quindi si necessita di un attento bilancio prima di pensarne un effettivo impiego in termini non solo di efficienza e prestazioni, ma anche di quelli che potrebbero essere i costi produttivi.

9. SVILUPPI FUTURI

Nell'ampia revisione svolta si sono messe in luce molte delle caratteristiche fin ora individuate nei materiali auxetici. Anche le simulazioni qui effettuate pongono l'accento sulle straordinarie possibilità di questi materiali. A questo punto però per uno sviluppo più deciso di questo campo si necessita di una maggiore trattazione sperimentale. I risultati qui mostrati dovrebbero essere confrontati con vere e proprie prove di laboratorio in modo da quantificare al meglio l'adesione tra i modelli teorici e numerici e i casi reali.

In questo modo si valuterebbero bene i limiti dell'analisi lineare qui svolta e come passo successivo studi delle non linearità e delle limitazioni dei modelli teorici finora sviluppati porterebbero ad una migliore conoscenza dei materiali auxetici.

In studi futuri lo studio del comportamento plastico dei materiali auxetici potrebbe portare ad altri passi in avanti in questo campo. Inoltre viste le possibili e già presenti applicazioni si rende necessario uno studio per la definizione dei processi produttivi che possano portare ad una produzione su larga scala degli auxetici. Come esempio si cita infatti che molto interesse è stato evidenziato negli ultimi anni per i tessuti auxetici, soprattutto in ambito militare, e questo è stato agevolato anche dal fatto che si è riusciti ad integrare bene la produzione di tessuti auxetici nei già consolidati processi tessili esistenti all'interno delle industrie.

BIBLIOGRAFIA

1. **Alderson K.L., Alderson A, Evans K.E.** The interpretation of the strain-dependent Poisson's ratio in auxetic polyethylene. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*. 1997, Vol. 32, 3, p. 201-212.
2. **Webber R.S., Alderson K.L., Evans K.E.** Novel variations in the microstructure of the auxetic microporous ultra-high molecular weight polyethylene. Part 1: Processing and. *Polymer Engineering & Science*. 2000, Vol. 40, 8, p. 1894-1905.
3. **Wojciechowski, K. W.** Constant thermodynamic tension Monte Carlo studies of elastic properties of a two-dimensional systems of hard cyclic hexamers. *Molecular Physics*. 1987, Vol. 61, p. 1247-1258.
4. **Galvão, R.H. Baughman and D.S.** Crystalline Networks with Unusual Predicted Mechanical and Thermal. *Nature*. 1993, Vol. 365, p. 735-737.
5. **Baughman, R.H., et al., et al.** Hinged and Chiral Polydiacetylene Carbon Crystals. *Chemical Physics Letters*. 1997, Vol. 269, p. 356-364.
6. **Friis E. A., Lakes R. S., Park J. B.** Negative Poisson's ratio polymeric and metallic materials. *Journal of Materials Science*. 1988, 23, p. 4406-4414.
7. **Lakes, R.S.** Foam structures with a negative Poisson's ratio. *Science*. 1987, Vol. 235, p. 1038-1040.
8. **Evans K.E., Alderson A.** Auxetic Materials: Functional Materials and Structures from Lateral Thinking! *Advanced Materials*. 2000, Vol. 12, 9.
9. **Alderson K.L., Simkins V.R., Coenen V.L., Davies P.J., Alderson A., Evans K.E.** How to make auxetic fibre reinforced composites. *Physica Status Solidi*. 2005, p. 509-518.
10. **Theocaris P.S., Stavroulakis G.E., Panagiotopoulos P.D.** Negative Poisson's ratio in materials with a star-shaped microstructure. *Archive of Applied Mechanics*. 1997, Vol. 67, p. 274-286.
11. **Alderson A., Alderson K.L.** Auxetic materials. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*. Vol. 221, p. 565-575.

12. **Alderson K.L., Alderson A., Smart G., Simkins V.R., Davies P.J.** Auxetic polypropylene fibres: Part 1 – Manufacture and characterisation . *Plastics, Rubber and Composites*. 2002, Vol. 31, 8, p. 344-349.
13. **Herakovich, C. T.** Composite Laminates with Negative Through the Thickness Poisson's Ratios. *Journal of Composite Materials*. 1984, Vol. 18, p. 447-455.
14. **Munteanu L., Chiroiu V., Dumitriu D., Beldiman N.** On the characterization of auxetic composites. *Proc. Rom. Academy*. 2008, Vol. 9.
15. **Alderson A., Alderson K.** Expanding materials and applications: exploiting auxetic textiles. *Technical Textiles International* . 2005, Vol. 777, p. 29-34.
16. **Alderson A., Rasburn J., Ameer-Beg S. M., Mullarkey P.G., Perrie W., Evans K. E.** An auxetic filter: A tuneable filter displaying enhanced size selectivity or defouling properties. *Industrial & Engineering Chemistry Research*. 2000, 39, p. 654-665.
17. **Huang X., Blackburn S.** Developing a new processing route to manufacture honeycomb ceramics with negative Poisson's ratio. *Key Engineering Materials*. 2001, p. 201-204.
18. **Evans, K.E.** Design of doubly-curved sandwich panels with honeycomb cores. *Composite Structures - Journal - Elsevier*. 1991, Vol. 17, p. 95-111.
19. **Choi J. B. and Lakes R. S.** Nonlinear properties of polymer cellular materials with a negative Poisson's. *Journal of Materials Science*. 1992, Vol. 27, p. 4678-4684 .
20. **Scarpa F., Ciffo L. G. and Yates J. R.** Dynamic properties of high structural integrity auxetic open cell foam. *Smart Materials and Structures*. 2004, Vol. 13, 1, p. 49-56.
21. **Scarpa F., Yates J.R., Ciffo L.G., Patsias S.** Dynamic crushing of auxetic open-cell polyurethane foam. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*. 2002, Vol. 216, p. 1153-1156.
22. **Howell B., Prendergast P. and Hansen L.** Examination of negative Poisson's ratio materials. *Applied Acoustics*. 1994, Vol. 43, 2, p. 141-148.
23. **Chen C. P., Lakes R. S.** Holographic study of conventional and negative Poisson's ratio metallic foams: elasticity, yield, and micro-deformation. *Journal of Materials Science*. 1991, Vol. 26, p. 5397-5402.

24. **Chan N., Evans K.E.** Mechanical properties of conventional and auxetic foams. Part II: Shear. *Journal of Cellular Plastics*. 1999, Vol. 35, 2, p. 166-183.
25. —. Microscopic examination of the microstructure and deformation of conventional and auxetic foams. 1997. Vol. 32, 21, p. 5725-5736.
26. **Smith F.C., Scarpa F. and Burriesci G.** Simultaneous optimization of the electromagnetic and mechanical properties of honeycomb materials. *P. SPIE Inter. Soc. Optical Eng.* 2002, Vol. 582, p. 4701.
27. **Nkansah M.A., Evans K.E., Hutchinson I.J.** Modelling the effects of negative Poisson's ratios in continuous-fibre composites. *Journal of Materials Science*. 1993, Vol. 28, 10, p. 2687-2692.
28. **Wang L., Jiang B.J.** *Acta Materiae Compositae Sinica* . 1996, Vol. 13, p. 111.
29. **Lakes, R. S. and Elms, K.** "Indentability of conventional and negative Poisson's ratio foams. *J. Composite Materials*. 1993, Vol. 27, p. 1193-1202.
30. **Alderson K.L., Fitzgerlad A., Evans K.E.** The strain dependent indentation resilience of auxetic microporous polyethylene. *Journal of Materials Science*. 2000, Vol. 35, p. 4039 – 4047.
31. **Alderson, K. L., Webber, R. S. and Evans, K. E.** Novel variations in the microstructure of auxetic ultra-high molecular weight polyethylene. Part 2: Mechanical properties. *Polym. Eng. Sci.* 2000, Vol. 40, 8.
32. **Alderson A., Rasburn J., Evans K.E, Grima J.N.** Auxetic polymeric filters display enhanced de-fouling and pressure compensation properties. *Membrane Technology*. 2001, Vol. 137, p. 6-8.
33. **Muto K., Bailey R.W., Mitchell K.J.** Special requirements for the design of nuclear power stations to withstand earthquakes. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*. 1963, Vol. 177, p. 155-203.
34. **Garber, A.M.** Pyrolytic materials for thermal protection systems. *Journal of Aerospace Engineering*. 1963, Vol. 22, p. 126-137.
35. **Baughman R.H., Shacklette J.M., Zakhidov A.A., Stafstrom S.** Negative Poisson's ratios as a common feature of cubic metals. *Nature*. Vol. 392, p. 362-365.

36. **R.E., Moyers.** *Dilator for Opening the Lumen of a Tubular Organ.* 5108413 United States of America, 1992.
37. **K.K., Toyota Chuo Kenkyusho.** 10134102 Japan, 1998.
38. **Corp., Yamaha.** 8019634 Japan, 1996.
39. **KK, Mitsubishi Jukogyo.** 6137799 Japan, 1994.
40. **M., Burke.** A stretch of the imagination. *New Scientist.* 1997, Vol. 154, 2085, p. 36-39.
41. *Optimizing electromechanical coupling in piezocomposites using polymers with negative Poisson's ratio.* **Smith, W.A.** [a cura di] IEEE. 1991. p. 661-666.
42. **Bettini P., Airoidi A., Sala G., Di Landro L., Ruzzene M., Spadoni A.** Composite chiral structures for morphing airfoils: Numerical analyses. *Composites: Part B.* 2009.
43. **Spadoni A., Ruzzene M.** Numerical and experimental analysis of chiral truss-core airfoils. *Journal of Mechanics of Materials and Structures.* 2007, Vol. 2, 5, p. 965-981.
44. **Bornengo D., Scarpa F. and Remillat C.** Evaluation of hexagonal chiral structure for morphing airfoil concept. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering.* 2005, Vol. 219, p. 185-192.
45. **Prall D., Lakes R.S.** Properties of a chiral honeycomb with a Poisson's ratio -1. *International Journal of Mechanical Sciences.* 1996, 39, p. 305-314.
46. **M.F., Gibson L.J. and Ashby.** *Cellular Solids: Structure and Properties.* Oxford : Pergamon Press, 1988.
47. **Alvermann, S.** Effective Viscoelastic Behaviour of Cellular Auxetic Materials. Die Deutsche Bibliothek, 2007.
48. **Mohr, D.** Mechanism-based multi-surface plasticity model for idea truss lattice materials. *International Journal of Solids and Structures.* 2005, 42, p. 3235-3260.
49. **Dos Reis F., Ganghoffer J.F.** Equivalent mechanical properties of auxetic lattices from discrete homogenization. 2012, 51, p. 314-321.

50. **Liu X.N., Huang G.L., Hua G.K.** Chiral effect in plane isotropic micropolar elasticity and its application to chiral lattices. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2012, Vol. 60, p. 1907–1921.
51. **Kumar R.S., McDowell D.L.** Generalized continuum modeling of 2-D periodic cellular solids. *International Journal of Solids Structures*. 2004, 41, p. 7399–7422.
52. **Young W.C., Budynas R.G.** *Roark's Formulas for Stress and Strain*. 7th. s.l. : McGraw-Hill.
53. **Wang A.J., McDowell D.L.** In-plane stiffness and yield strength of periodic metal honeycombs. *Journal of Engineering Materials and Technology*. 2004, Vol. 126, p. 137-156.
54. **Gunton DJ, Saunders GA.** The Young's modulus and Poisson's ratio of arsenic, antimony and bismuth. *Journal of Materials Science*. 1972, Vol. 7, p. 1061–1068.
55. **Li, Y.** The anisotropic behavior of Poisson's ratio, Young's modulus, and shear modulus in hexagonal materials. *Physica Status Solidi*. 1976, Vol. 38, p. 171–175.
56. **Caddock B.D., Evans K.E.** Microporous materials with negative Poisson's ratios. I. Microstructure and mechanical properties. *Journal of Physics D: Applied Physics*. 1989, Vol. 22, 12, p. 1877-1882.
57. **Love, A. E. H.** *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. 4. New York : Dover, 1944.
58. **Alderson K.L., Pickles A.P., Neale P.J., Evans, K.E.** Auxetic polyethylene: The effect of a negative Poisson's ratio on hardness. *Acta Metallurgica et Materialia*. 1994, Vol. 42, p. 2261-2266.
59. **Veronda D.R., Westmann R.A.** Mechanical characterizations of skin-finite deformations. *Journal of Biomechanics*. 1970, Vol. 3, p. 111-124.
60. **Grima J.N., Jackson R., Anderson A. and Evans K.E.** Do zeolites have negative Poisson's ratios? *Advanced Materials*. 2000, 12, p. 1912-1918.
61. **Lakes, R.S.** Foam structures with a negative Poisson's ratio. *Science*. 1987, 235, p. 1038-1040.
62. **Yeganeh-Haeri Y., Weidner D.J., Parise J. B.** Elasticity of α -cristobalite: A silicon dioxide with a negative Poisson's ratio. *Science*. 1992, 257, p. 650-652.

63. **Spadoni, A. e Ruzzene, M.** Elasto-static micropolar behavior of a chiral auxetic lattice. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 60, 2012, p. 156-171.
64. **Gonnella, S. e Ruzzene, M.** Homogenization and equivalent in-plane properties. *International Journal of Solids and Structures*. 2008, 45, p. 2897–2915.
65. **Poulter, D.R.** The design of gas-cooled graphite-moderated reactors. *London: Oxford University Press*. 1963.
66. **Keskar N. R., Chelikowsky J. R.** Negative Poisson Ratios in Crystalline SiO₂ from First-Principles Calculations. *Nature*. 1992, Vol. 358, p. 222-224.
67. **Alderson A., Evans K.E.** Molecular origin of auxetic behavior in tetrahedral framework silicates. *Physical Review Letters*. 2002, Vol. 89.
68. **Yang W., Li Z.M., Shi W., Xie B.H., Yang M.B.** Review on auxetic materials. *Journal of materials science*. 2004, Vol. 39 , p. 3269 – 3279.
69. **Liu Y., Hu H.** A review on auxetic structures and polymeric materials. *Scientific Research and Essays*. 2010, Vol. 5, 10, p. 1052-1063.