

Università degli studi di Padova

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo
Galilei”

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Trasformata di Legendre e dualità in fisica

Relatore:
Prof. Marco Matone

Laureando: Antonino Lamia

Anno accademico 2013/2014

Indice

1	Introduzione	4
1.1	Una relazione tra le soluzioni di una EDLSO e la sua variabile indipendente	5
1.2	Osservazioni sulla forma	6
2	La trasformata di Legendre	7
2.1	Definizione	7
2.2	Proprietà	8
2.3	EDLSO associata alla trasformata di Legendre	8
3	Derivata Schwarziana e trasformazioni di Möbius	11
3.1	La derivata Schwarziana	11
3.2	Trasformazione di Möbius	12
3.3	Il potenziale canonico in forma schwarziana	13
4	L'equazione canonica in Meccanica	14
4.1	L'azione di un sistema	14
4.2	Trasformazioni di coordinate	15
4.3	La dualità coordinate-azione	16
4.4	Trasformata di Legendre come trasformata di Möbius	17
5	L'equazione canonica duale	19
5.1	Dualità di Legendre	19
5.1.1	Trasformazioni di momento	19
5.1.2	L'equazione canonica duale	20
5.1.3	Trasformazioni di Möbius nello spazio duale	20
5.2	L'equazione canonica autoduale	21
6	Ciclo canonico	23
6.1	L'equazione canonica connessa	23
6.1.1	Giustificazione differenziale del canonico connesso	24
6.2	Progressione e pregressione	26
6.2.1	Progressione duale e progressione connessa	26
6.2.2	Equazione canonica duale connessa	28
6.2.3	Giustificazione differenziale del canonico duale connesso	29
6.2.4	Progressione duale e pregressione connessa	29
6.3	La Q-area e la P-area	30

7	Legendre in Meccanica Quantistica	32
7.1	Il prepotenziale	32
7.2	Densità di probabilità	34
8	Conclusioni	35
	Bibliografia	35

Capitolo 1

Introduzione

Tramite trasformata di Legendre è possibile definire una nuova variabile rispetto alla quale è definita un'equazione differenziale lineare del secondo ordine [1] (EDLSO). Viceversa, a partire da un'equazione differenziale lineare del secondo ordine è possibile ottenere una relazione tra le sue soluzioni e la variabile indipendente, con tutte le caratteristiche della trasformata di Legendre. Tale proprietà rilevata nell'ambito di molte teorie moderne, quali quelle supersimmetriche, ha validità del tutto generale ed offre un nuovo punto di vista per studiare vari tipi di dualità di importante interesse fisico. Prima tra tutte spicca la meccanica Hamiltoniana [2], il cuore dell'introduzione storica della trasformata di Legendre [3, 4]. Lo studio di questo approccio culmina nell'evidenziare una profonda simmetria tra le coordinate e l'azione [5]. Il coefficiente variabile dell'equazione differenziale che si ottiene in questo caso avrà la forma di una derivata schwarziana [6], dalle cui proprietà si intuisce un forte legame del nostro modello con le trasformazioni di Möbius. Il considerare queste ultime all'interno del nostro quadro permetterà infine di dare una maggiore consistenza alla simmetria sopracitata.

L'equazione differenziale lineare del secondo ordine relativa al problema Hamiltoniano, che chiameremo *equazione canonica meccanica*, avrà infatti un profondo legame con le trasformazioni $GL(2, \mathbb{C})$, e all'interno di questa descrizione si dimostra che l'azione ridotta di un sistema può essere trattata come variabile indipendente per lo studio del moto.

Nel Capitolo 6 mostreremo come le dualità presentate nei capitoli precedenti fanno parte di un *ciclo canonico* che le connette, offrendo ben dodici alternative strutture canoniche per qualsiasi problema che prevede l'utilizzo della trasformata di Legendre. Esistono molti altri sistemi e teorie fisiche in cui questo modello ne permette una descrizione duale, dalle teorie supersimmetriche a i fondamenti della meccanica quantistica [7, 8, 9]. Nei capitoli 7 e 8 si darà un'argomentazione di questi, illustrando la generalità di quanto dedotto.

1.1 Una relazione tra le soluzioni di una EDLSO e la sua variabile indipendente

Cominciamo con derivare la relazione tra le soluzioni e la variabile indipendente di un'EDLSO. Utilizzeremo questa informazione, fondamentale in molte teorie moderne, per spostarci all'interno della meccanica classica dove daremo una caratterizzazione differenziale di un generico problema, punto di partenza per lo studio di una nuova simmetria tra le coordinate di un sistema. [1]

Proposizione 1. *Sia $u \in \mathbb{C}$. Siano $\psi(u), \psi^D(u)$ due soluzioni linearmente indipendenti (eventualmente di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine) definite in un intorno aperto U di \mathbb{C} , ed esista \mathcal{F} sufficientemente regolare tale che $\psi^D = \partial_\psi \mathcal{F}(\psi)$. Allora vale la seguente relazione tra ψ, \mathcal{F} ed il parametro indipendente u :*

$$u = \frac{1}{c}[\psi \partial_\psi \mathcal{F} - 2\mathcal{F}] + k, \quad (1.1)$$

con $c, k \in \mathbb{C}, c \neq 0$.

Proof. L'indipendenza lineare tra ψ e ψ^D può essere tradotta in termini differenziali considerando che il Wronskiano delle due soluzioni è non nullo e costante

$$W(\psi, \psi^D)(u) = \psi \partial_u \psi^D - (\partial_u \psi) \psi^D = c,$$

con $c \in \mathbb{C}, c \neq 0$, e poiché vale la seguente scrittura

$$(\partial_u \psi) \psi^D = \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \psi} = \partial_u \mathcal{F},$$

si verificano le ulteriori uguaglianze

$$c = \psi \partial_u \psi^D - 2(\partial_u \psi) \psi^D + (\partial_u \psi) \psi^D = \partial_u (\psi \psi^D - 2\mathcal{F}),$$

che integrate su u implicano la tesi. □

È importante notare la generalità di quanto appena dimostrato. Non è stata infatti fatta alcuna assunzione particolare sulla forma dell'equazione differenziale lineare del secondo ordine considerata. La vasta arbitrarietà con cui questa si può presentare, è completamente contenuta nelle costanti c, k .

Apportiamo adesso alcune piccole ma utili modifiche sulla forma. Con una semplice ridefinizione di costante $c' \equiv \frac{2}{c}$, si può scrivere:

$$u = c' \left[\frac{1}{2} \psi \partial_\psi \mathcal{F} - \mathcal{F} \right] + k, \quad (1.2)$$

ed osservando che $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \psi^2} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \psi^2} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \psi} \frac{1}{2\psi}$, si ottiene una forma più pratica per la nostra espressione:

$$u = c' \left[\psi^2 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \psi^2} - \mathcal{F} \right] + k. \quad (1.3)$$

Si può ulteriormente generalizzare il punto precedente. Infatti $\forall n \in \mathbb{N}$, vale $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \psi^n} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \psi^n} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \psi} \frac{1}{n\psi^{n-1}}$, da cui segue $u = c' \left[\frac{n}{2} \psi^n \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \psi^n} - \mathcal{F} \right] + k$.

1.2 Osservazioni sulla forma

La nostra prossima trattazione nasce dall'osservazione che la (1.3) può essere interpretata come la trasformazione di Legendre di \mathcal{F} rispetto a ψ^2 nel caso particolare in cui $c' = 1$ e $k = 0$, e poichè \mathcal{F} dipende da ψ che dipende a sua volta da u , il poter considerare la variabile indipendente u come la trasformata di Legendre di \mathcal{F} rispetto a ψ^2 suggerisce una profonda dualità, avvalorata dal fatto che nasce all'interno di una teoria involutiva come quella di Legendre. Questo ci consiglia una nuova relazione duale della (1.3)

$$\mathcal{F} = \psi / \psi_D \partial_{\psi / \psi_D} u - u, \quad (1.4)$$

la cui giustificazione verrà data nel Capitolo 2, in cui si mostra che per $c' = 1$ e $k = 0$ la (1.2) è la forma alternativa di un'equazione differenziale del secondo ordine della forma

$$\left(\partial_u^2 + V(u) \right) \begin{pmatrix} \psi \\ \psi_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

con $V(u) = -\frac{\psi''}{\psi}$.¹ Questo implica che se $\psi(u)$ è invertibile allora otteniamo un metodo analitico per risolvere una equazione differenziale non lineare a coefficienti variabili, infatti considerando la relazione

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \right)^3,$$

abbiamo che la (1.5) si può invertire, ottenendo

$$\partial_\psi^2 u - \psi(u) V(u) (\partial_\psi u)^3 = 0, \quad (1.6)$$

la cui soluzione è proprio la (1.3) con $c' = 1$ e $k = 0$.

¹L'apice indica la derivata rispetto alla variabile u .

Capitolo 2

La trasformata di Legendre

La trasformata di Legendre è comunemente usata in meccanica classica, meccanica statistica e termodinamica. La maggior parte dei problemi fisici che trattano questo argomento nascono dalla meccanica classica, la quale connette il mondo Lagrangiano con quello Hamiltoniano. La trasformata di Legendre è comunque un potente ed elegante strumento matematico, che presenta un approccio sia algebrico che geometrico. Come abbiamo visto dal capitolo precedente, possiamo muoverci in un percorso descrittivo differenziale di questa, dal quale si potranno cogliere nuovi aspetti teorici che conducono a simmetrie di fondo all'interno di tutti i problemi relativi all'utilizzo della trasformata di Legendre.

2.1 Definizione

[5, 4] Sia I un intervallo aperto di \mathbb{R} ed $S : I_x \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow S(x)$ una funzione convessa. Si definisce **trasformata di Legendre** di S la funzione $\Upsilon : I_p \rightarrow \mathbb{R}$ data da:

$$\Upsilon(p) = \sup_{x \in I_x} (px - S(x)), \quad (2.1)$$

$$\text{per } p \in I_p, \quad I_p = \left\{ p : \sup_{x \in I_x} (px - S(x)) < \infty \right\}.$$

La definizione è facilmente generalizzabile in \mathbb{R}^n , considerando

$$\Upsilon(\mathbf{p}) = \sup_{\mathbf{x} \in I_{\mathbf{x}} \subset \mathbb{R}^n} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - S(\mathbf{x})), \quad \mathbf{p} \in I_{\mathbf{p}}, \quad I_{\mathbf{p}} = \left\{ \mathbf{p} : \sup_{\mathbf{x} \in I_{\mathbf{x}}} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - S(\mathbf{x})) < \infty \right\}. \quad (2.2)$$

Tuttavia, con abuso di notazione, nelle prossime sezioni considereremo la scrittura (2.1) anche per il caso vettoriale.

La trasformata di Legendre Υ di S può anche essere definita come la trasformazione tale per cui la sua derivata prima e la derivata della funzione sono una la funzione inversa dell'altra, per cui

$$DS = (D\Upsilon)^{-1}.$$

2.2 Proprietà

Elenchiamo di seguito le principali proprietà della trasformata di Legendre utili nell'approccio differenziale che stiamo per intraprendere.

Sia $S \in C^2$ differenziabile e convessa, allora, per p fissato e x che massimizza $(px - S(x))$ abbiamo che

$$\Upsilon(p) = (px - S(x)), \quad S'(x) = p, \quad (2.3)$$

La derivata di S è ancora differenziabile e dalla convessità di S segue la monotonia e l'invertibilità di S' . Allora esiste una funzione g tale che $x = g(p)$, definita da

$$g \equiv (S')^{-1}, \quad S'(g(p)) = p. \quad (2.4)$$

Notiamo che anche g è differenziabile, infatti:

$$\frac{dg}{dp} = \frac{1}{S''(x)}$$

da cui segue la differenziabilità di Υ . Si verifica inoltre che la trasformata di Legendre

- i*) di una funzione (convessa) è anch'essa convessa;
- ii*) è involutiva, ovvero è l'inversa di se stessa.

L'involutività ci permette di considerare S come la trasformata di Legendre di Υ rispetto a p

$$\Upsilon = x \frac{\partial S}{\partial x} - S, \quad S = p \frac{\partial \Upsilon}{\partial p} - \Upsilon, \quad (2.5)$$

$$p = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad x = \frac{\partial \Upsilon}{\partial p}. \quad (2.6)$$

2.3 EDLSO associata alla trasformata di Legendre

Algebricamente si mostra che ad una generica trasformata di Legendre è associata un'equazione differenziale lineare del secondo ordine. Questa conclusione era già prevedibile dalla precedente trattazione dell'equazione (1.3), che se confrontata con la (2.5), con $c' = 1$ e $k = 0$ e introducendo la notazione hamiltoniana sulla posizione $q = x$ si ha che

$$\psi \longleftrightarrow \sqrt{p}, \quad \mathcal{F}(\psi) \longleftrightarrow \Upsilon(p), \quad u \longleftrightarrow S, \quad \psi_D = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \psi} \longleftrightarrow \frac{\partial \Upsilon(p)}{\partial \sqrt{p}} = 2q\sqrt{p} \quad (2.7)$$

Nello scrivere l'equazione (1.2), abbiamo ridefinito $c' \equiv \frac{c}{2}$, dove c era il Wronskiano costante delle due soluzioni. Per consistenza dobbiamo anche riscalarlo di un fattore due una delle due soluzioni. In maniera molto elegante possiamo scrivere:

$$\psi_D = 2q\sqrt{p} \longrightarrow q\sqrt{p}$$

Allora \sqrt{p} e $q\sqrt{p}$ sono due soluzioni linearmente indipendenti di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine in $s \equiv S(q)$. Procediamo adesso ricavando e verificando algebricamente quanto appena dedotto a priori. Ciò ci porterà ad avere una forma ben definita dell'equazione differenziale in questione, che chiameremo *equazione canonica* associata ad una trasformazione di Legendre. Di particolare rilievo sarà la forma del coefficiente variabile.

Proposizione 2. *Si considerino $S(q)$ e $\Upsilon(p)$ l'una la trasformata di Legendre dell'altra come nella (2.5). Allora, in maniera del tutto generale, ad esse è associata un'equazione differenziale lineare del secondo ordine della forma*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \mathcal{U}(s) \right) \begin{pmatrix} q\sqrt{p} \\ \sqrt{p} \end{pmatrix} = 0, \quad (2.8)$$

con $s = S(q)$ e $\mathcal{U}(s) = -\frac{1}{q\sqrt{p}} \frac{\partial^2(q\sqrt{p})}{\partial s^2} = -\frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\partial^2(\sqrt{p})}{\partial s^2}$, chiamata "equazione canonica".

Proof. Si derivi $S = p \frac{\partial \Upsilon}{\partial p} - \Upsilon$ due volte rispetto a $s \equiv S(q)$

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} s = 0 = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial}{\partial s} (pq - \Upsilon(p)) \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial p}{\partial s} q + \frac{\partial q}{\partial s} p - \frac{\partial \Upsilon}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial s} \right) = 0.$$

Dalle proprietà involutive (2.6) della trasformata di Legendre si ottiene

$$p \frac{\partial^2 q}{\partial s^2} + \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial q}{\partial s} = 0, \quad (2.9)$$

e si verifica che questa equazione si può riscrivere equivalentemente come

$$\frac{1}{q\sqrt{p}} \frac{\partial^2(q\sqrt{p})}{\partial s^2} = \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\partial^2(\sqrt{p})}{\partial s^2}, \quad (2.10)$$

Infatti

$$\begin{aligned} \frac{1}{q\sqrt{p}} \left(\frac{\partial^2 q}{\partial s^2} \sqrt{p} + \frac{\partial^2(\sqrt{p})}{\partial s^2} q + 2 \frac{\partial q}{\partial s} \frac{\partial(\sqrt{p})}{\partial s} \right) &= \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\partial^2(\sqrt{p})}{\partial s^2}, \\ \frac{\partial^2 q}{\partial s^2} \frac{1}{q} + \frac{2}{q\sqrt{p}} \frac{\partial q}{\partial s} \frac{\partial(\sqrt{p})}{\partial s} &= 0. \end{aligned}$$

Tenendo conto che $\frac{\partial(\sqrt{p})}{\partial s} = \frac{1}{2\sqrt{p}} \frac{\partial p}{\partial s}$, l'equivalenza tra la (2.9) e la (2.10) è verificata. A questo punto basta riscrivere la (2.10) in funzione di $q\sqrt{p}$ e \sqrt{p} rispettivamente

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\partial^2(\sqrt{p})}{\partial s^2} \right) q\sqrt{p} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{1}{q\sqrt{p}} \frac{\partial^2(q\sqrt{p})}{\partial s^2} \right) \sqrt{p} = 0,$$

da cui segue la tesi definendo $\mathcal{U}(s) \equiv -\frac{1}{q\sqrt{p}} \frac{\partial^2(q\sqrt{p})}{\partial s^2} = -\frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\partial^2(\sqrt{p})}{\partial s^2}$. \square

Si verifica facilmente che il Wronskiano di $q\sqrt{p}$ e \sqrt{p} è uguale¹ a 1. Soffermiamoci adesso sulla forma della (2.8) ed in particolare su quella del coefficiente variabile, che chiameremo *potenziale canonico*. Il potenziale canonico nasconde la proprietà di essere invariante per trasformazioni di Möbius $GL(2, \mathbb{C})$. Per renderlo evidente si introduce la *derivata Schwarziana* [6], la cui presa in considerazione si intuisce dalla forma stessa dell'equazione canonica.

¹Il calcolo è immediato

$$\sqrt{p}\partial_s q\sqrt{p} - q\sqrt{p}\partial_s\sqrt{p} = \sqrt{p}[(\partial_s q)\sqrt{p} + q\partial_s\sqrt{p}] - q\sqrt{p}\partial_s\sqrt{p} = 1.$$

Capitolo 3

Derivata Schwarziana e trasformazioni di Möbius

Si introducono adesso due strumenti matematici che si integrano perfettamente con quanto discusso e contribuiscono fortemente ad un ampliamento dei campi d'investigazione in gioco: la derivata Schwarziana, applicata nelle più svariate aree della matematica, dall'analisi complessa alle equazioni differenziali, dalla dinamica classica ai sistemi integrabili; le trasformazioni di Möbius che sono funzioni biettive dalla sfera di Riemann in sé. Tramite esse sarà possibile caratterizzare l'equazione canonica e descrivere le simmetrie che presenta, e di conseguenza la trasformazione di Legendre associata.

3.1 La derivata Schwarziana

La derivata Schwarziana di una funzione analitica w rispetto a z parametro complesso, è definita come

$$\{w, z\} = \left(\frac{w''}{w'}\right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{w''}{w'}\right)^2, \quad (3.1)$$

che può essere equivalentemente scritta come

$$\{w, z\} = \frac{d^2}{dz^2} \left(\log \frac{dw}{dz}\right) - \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dz} \left(\log \frac{dw}{dz}\right)\right]^2,$$

oppure

$$\{w, z\} = \left(\frac{w'''}{w'}\right) - \frac{3}{2} \left(\frac{w''}{w'}\right)^2. \quad (3.2)$$

L'apice indica la derivata rispetto a z . Elenchiamo di seguito alcune proprietà della derivata Schwarziana.

Un cambio di variabile indipendente obbedisce alla regola

$$\{w, z\} = \left(\frac{dt}{dz}\right)^2 \{w, t\} + \{t, z\}. \quad (3.3)$$

Cambiando la variabile dipendente con quella indipendente si ha

$$\{w, z\} = - \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 \{z, w\}, \quad (3.4)$$

e quindi, più generalmente abbiamo

$$\{w(z), z(t)\} = \left(\frac{dt}{dz} \right)^2 \{w, t\} - \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 \{z, t\}. \quad (3.5)$$

Essa gioca un ruolo fondamentale nella teoria delle equazioni differenziali del secondo ordine e nella teoria degli spazi proiettivi. Enunciamo di seguito due proposizioni utili al nostro scopo [6].

Proposizione 3. *Siano y_1 e y_2 due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione*

$$y'' + Q(z)y = 0,$$

che sono definite ed olomorfe in un dominio D semplicemente connesso nel piano complesso. Allora

$$w(z) = \frac{y_1(z)}{y_2(z)}$$

soddisfa l'equazione

$$\{w, z\} = 2Q(z) \quad (3.6)$$

in tutto il dominio per cui y_2 non è nullo. Inversamente, se w è una soluzione dell'equazione (3.6), olomorfa in qualche intorno del punto $z_0 \in D$, allora esistono due soluzioni linearmente indipendenti, y_1 e y_2 , dell'equazione $y'' + Q(z)y = 0$ definite in D tale che $\{w, z\} = 2Q(z)$, e se $y_2(z_0) = 1$ le soluzioni sono univocamente definite.

Proposizione 4. *La derivata Schwarziana è invariante sotto una trasformazione lineare fratta del primo argomento*

$$\left\{ \frac{aw + b}{cw + d}, z \right\} = \{w, z\}. \quad (3.7)$$

Inoltre vale che

$$\left\{ \frac{az + b}{cz + d}, z \right\} = 0, \quad (3.8)$$

$$\left\{ w, \frac{az + b}{cz + d} \right\} = \frac{(cz + d)^4}{(ad - bc)^2} \{w, z\}. \quad (3.9)$$

3.2 Trasformazione di Möbius

Una trasformazione di Möbius è una funzione $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ definita sulla sfera di Riemann $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ della forma

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (3.10)$$

con determinante della matrice associata

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

diverso da 0. La matrice A è allora invertibile ed è un elemento del gruppo generale lineare $GL(2, \mathbb{C})$. Inoltre ogni trasformazione di Möbius è una funzione biettiva dalla sfera di Riemann in sé.

3.3 Il potenziale canonico in forma schwarziana

Dalla Proposizione 4 segue che il potenziale canonico può essere scritto nella forma

$$\mathcal{U}(s) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{q\sqrt{p}}{\sqrt{p}}, s \right\} = \frac{1}{2} \{q, s\}, \quad (3.11)$$

e l'equazione canonica (2.8) diventa

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{2} \{q, s\} \right) \begin{pmatrix} q\sqrt{p} \\ \sqrt{p} \end{pmatrix} = 0. \quad (3.12)$$

A questo punto, dalla proprietà (3.7), appare evidente l'invarianza della (3.12) per trasformazioni di Möbius (3.10), a condizione che $S(q)$ rimanga invariato e che le nuove soluzioni $\sqrt{\tilde{p}}$, $\tilde{q}\sqrt{\tilde{p}}$ siano al più combinazione lineare di \sqrt{p} e $q\sqrt{p}$. Questo è quello che accade in Meccanica Lagrangiana ed Hamiltoniana, identificando con q le coordinate spaziali, con $S(q, \dot{q})$ l'azione del sistema e con $s = S_0$ l'azione ridotta.

Capitolo 4

L'equazione canonica in Meccanica

L'azione è definita come un funzionale che agisce sullo spazio delle configurazioni ed è uno strumento che permette di studiare il moto di un sistema dinamico. All'interno della teoria di Hamilton-Jacobi può essere inoltre considerata come la funzione generatrice dei momenti, come nella (2.6). Viene quindi immediato considerarla all'interno dello studio della trasformata di Legendre, nel quale possiamo formulare una descrizione di questa in maniera del tutto parallela a quanto si può fare per le coordinate di un sistema. Inoltre, il fatto che essa è il fulcro della descrizione di ogni sistema meccanico indipendentemente dal sistema di coordinate utilizzato mostrerà come l'equazione canonica presenti nuove simmetrie se calata in un contesto di meccanica classica, nel quale è possibile addirittura scrivere la trasformata di Legendre come una particolare trasformazione di Möbius.

4.1 L'azione di un sistema

[5] Siano M, N due varietà differenziabili n -dim, e \mathcal{G} lo spazio delle funzioni lisce da M ad N . L'azione è un funzionale $S : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ definito localmente da

$$S[\psi] = \int_M L(\psi(x), \dot{\psi}(x), \ddot{\psi}(x), \dots, x) d^n x. \quad (4.1)$$

Si richiama la particolarizzazione ad un sistema meccanico classico [3] e si definisce azione l'integrale

$$S(q, t) = \int_{\gamma} L dt, \quad (4.2)$$

lungo l'estremale γ , che unisce i punti (q_0, t_0) e (q, t) , dove $L(q, \dot{q}, t)$ è la Lagrangiana del sistema considerato. L'azione soddisfa le seguenti uguaglianze

$$dS = p dq - H dt, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H(p, q, t), \quad p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad (4.3)$$

dove $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ e $H = p \cdot \dot{q} - L$ sono definiti rispetto alla velocità finale \dot{q} della traiettoria γ . Dalla seconda delle (4.2) segue che, se l'Hamiltoniana non dipende dal tempo, allora

$$S(q, t) = S_0(q) - Et, \quad (4.4)$$

ed S_0 , chiamata *azione ridotta*, soddisfa l'equazione di Hamilton-Jacobi stazionaria

$$H\left(q, \frac{\partial S_0}{\partial q}\right) = E. \quad (4.5)$$

4.2 Trasformazioni di coordinate

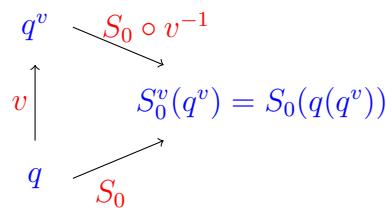


Figura 4.1: Composizione con una mappa di coordinate

Per una generica trasformazione in meccanica classica, deve valere che

$$v : q \longrightarrow q^v, \quad S_0(q) = S_0^v(q^v). \quad (4.6)$$

Dalla terza delle (4.3) e dalle proprietà involutive della trasformata di Legendre segue che

$$p_v = \frac{\partial q}{\partial q^v} p, \quad (4.7)$$

e nel caso di una trasformazione $GL(2, \mathbb{C})$

$$q \longrightarrow q^v = \frac{Aq + B}{Cq + D}, \quad (4.8)$$

con $A, B, C, D \in \mathbb{C}$, il momento coniugato trasformerà come la (4.7)

$$p \longrightarrow p_v = \frac{(Cq + D)^2}{AD - BC} p. \quad (4.9)$$

Prendendo la radice quadrata della (4.9) e definendo $AD - BC \equiv \rho$ otteniamo

$$\sqrt{p_v} = \pm \rho^{-\frac{1}{2}} (Cq\sqrt{p} + D\sqrt{p}), \quad (4.10)$$

che moltiplicata per q^v diventa

$$q^v \sqrt{p_v} = \pm \rho^{-\frac{1}{2}} (Aq\sqrt{p} + B\sqrt{p}), \quad (4.11)$$

da cui è evidente che le nuove soluzioni della (3.12) sono combinazione lineare delle precedenti.

In sintesi, in sistemi in cui vale la (4.6), insieme alle (3.7), (4.10) e (4.11) possiamo concludere che

l'equazione canonica è invariante per trasformazioni di Möbius nelle coordinate q .

In modo del tutto parallelo lo sarà la relativa trasformata di Legendre associata.

4.3 La dualità coordinate-azione

Una conclusione ancora più sorprendente è che anche nello spazio delle azioni, l'equazione canonica è invariante per trasformazioni $GL(2, \mathbb{C})$.

Proposizione 5. *L'equazione canonica è preservata sotto una trasformazione di Möbius di $s = S_0(q)$.*

Proof. Procediamo osservando come trasformano ad uno ad uno tutti i termini della (3.12) per $s \rightarrow \tilde{s} = \frac{As+B}{Cs+D}$, $\tilde{q} = q$. Dalla (3.9) segue che

$$\left\{ q, \frac{As+B}{Cs+D} \right\} = \rho^{-2}(Cs+D)^4 \{q, s\},$$

per cui ad una trasformata di Möbius dell'azione ridotta $s \rightarrow \tilde{s} = \frac{As+B}{Cs+D}$, $\tilde{q} = q$ corrisponde un riscalzo di $\mathcal{U}(s)$

$$\mathcal{U}(\tilde{s}) = \rho^{-2}(Cs+D)^4 \mathcal{U}(s). \quad (4.12)$$

Il nuovo momento coniugato sarà

$$\tilde{p} = \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \tilde{q}} = \frac{\partial \tilde{s}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial q} = \frac{\partial \tilde{s}}{\partial s} p.$$

Consideriamo una soluzione generale dell'equazione canonica

$$\Phi(s) = aq\sqrt{p} + b\sqrt{p}, \quad a, b \in \mathbb{C}$$

che trasformandola assume la forma

$$\tilde{\Phi}(\tilde{s}) = aq\sqrt{\frac{\partial \tilde{s}}{\partial s} p} + b\sqrt{\frac{\partial \tilde{s}}{\partial s} p} = \sqrt{\frac{\partial \tilde{s}}{\partial s}} \Phi(s). \quad (4.13)$$

Il termine $\frac{\partial^2}{\partial s^2}$ trasforma come¹

$$\frac{\partial^2}{\partial \tilde{s}^2} = \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial s} \right)^{-2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial s} \right)^{-3} \left(\frac{\partial \tilde{s}^2}{\partial s^2} \right) \frac{\partial}{\partial s}, \quad (4.14)$$

e per $s \rightarrow \tilde{s} = \frac{As+B}{Cs+D}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{s}}{\partial s} &= \frac{\rho}{(Cs+D)^2}, \\ \frac{\partial^2 \tilde{s}}{\partial s^2} &= -\frac{2\rho C}{(Cs+D)^3}, \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{\partial^2}{\partial \tilde{s}^2} = \rho^{-2}(Cs+D)^4 \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{2C}{Cs+D} \frac{\partial}{\partial s} \right). \quad (4.15)$$

¹ $\frac{\partial^2}{\partial \tilde{s}^2} = \frac{\partial}{\partial \tilde{s}} \frac{\partial}{\partial \tilde{s}} = \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial s} \frac{\partial}{\partial \tilde{s}} \right) \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial s} \frac{\partial}{\partial \tilde{s}} \right) = \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \left(\frac{\partial \tilde{s}^2}{\partial s^2} \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{s}} = \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \left(\frac{\partial \tilde{s}^2}{\partial s^2} \right) \frac{\partial s}{\partial \tilde{s}} \frac{\partial}{\partial s}$

Adesso possiamo trasformare l'intera equazione (3.12)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{s}^2} + \tilde{\mathcal{U}}(\tilde{s})\right) \tilde{\Phi}(\tilde{s}) = \rho^{-2}(Cs + D)^4 \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{2C}{Cs + D} \frac{\partial}{\partial s} + \mathcal{U}(s)\right) \tilde{\Phi}(\tilde{s}),$$

e dalla (4.13) otteniamo

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{s}^2} + \tilde{\mathcal{U}}(\tilde{s})\right) \tilde{\Phi}(\tilde{s}) = \rho^{-\frac{3}{2}}(Cs + D)^3 \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \mathcal{U}(s)\right) \Phi(s) = 0.$$

□

Comparando i risultati ottenuti per trasformazioni di Möbius delle coordinate

$$\begin{cases} q \longrightarrow \frac{Aq+B}{Cq+D}, \\ S_0 \longrightarrow S_0, \\ p \longrightarrow \rho^{-1}(Cq + D)^2 p \end{cases} \quad (4.16)$$

con le rispettive per s

$$\begin{cases} S_0 \longrightarrow \frac{AS_0+B}{CS_0+D}, \\ q \longrightarrow q \\ p \longrightarrow \rho(Cq + D)^{-2} p \end{cases} \quad (4.17)$$

e tenendo conto che l'equazione canonica è preservata in entrambi i casi, si vede che esiste una sorta di dualità tra q ed s . In particolare, le equazioni (4.17) sono l'analogo delle (4.16) con il ruolo di s e q scambiato. Questa forte dualità tra s e q ci suggerisce di considerare un'analogha equazione canonica con il ruolo di s e q invertito. Si ha che

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1}{2}\{S_0, q\}\right) \begin{pmatrix} S_0 p^{-\frac{1}{2}} \\ p^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = 0. \quad (4.18)$$

La relazione (4.18) verrà giustificata e studiata nel Capitolo 6.

4.4 Trasformata di Legendre come trasformata di Möbius

Nel tentativo di fornire una descrizione differenziale della trasformata di Legendre abbiamo delineato un ruolo fondamentale per le trasformazioni $GL(2, \mathbb{C})$. Queste hanno reso possibile evidenziare un principio di dualità tra l'azione ridotta e lo spazio delle configurazioni. Un'altra interessante proprietà che segue dalla possibilità di descrivere qualsiasi sistema meccanico con arbitrarie coordinate (4.6) è che S_0 può essere espresso in termini di trasformata di Möbius di Υ_0 , ovvero l'azione ridotta duale. Come nella (2.5), valgono le seguenti relazioni di involutività:

$$\Upsilon_0 = q \frac{\partial S_0}{\partial q} - S_0, \quad S_0 = p \frac{\partial \Upsilon_0}{\partial p} - \Upsilon_0, \quad (4.19)$$

$$p = \frac{\partial S_0}{\partial q}, \quad q = \frac{\partial \Upsilon_0}{\partial q}. \quad (4.20)$$

Nel caso in cui si considera una mappa generica $q \longrightarrow q^v = v(q)$ si ha che

$$\Upsilon_{0_v} = q^v p_v - S_0^v(q^v) = q^v p_v - S_0(q) = q^v p_v - qp + \Upsilon_0,$$

da cui

$$\Delta_v \Upsilon_0 = \Delta_v(qp), \quad \Upsilon_{0_v}(p_v) - \Upsilon_0(p) = q^v p_v - qp. \quad (4.21)$$

Dalla (4.8), (4.9) e (4.21) segue che la variazione dell'azione ridotta duale per trasformazioni di Möbius è

$$\Delta_v \Upsilon_0 = q^v p_v - qp = \frac{ACq^2 + 2BCq + BD}{AD - BC} p. \quad (4.22)$$

Sia R un'applicazione $GL(2, \mathbb{C})$, caratterizzata da una matrice

$$R = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

tale che

$$R : q \longrightarrow q^v = \frac{\delta}{q}, \quad R : p \longrightarrow p_v = -\frac{q^2 p}{\delta}, \quad R : pq \longrightarrow p_v q^v = -pq, \quad (4.23)$$

avendo definito $\delta \equiv \frac{B}{C}$. Per ogni $B, C \in \mathbb{C}$ t.c. $(B, C) \neq 0$ allora $\Delta_R \Upsilon_0$ non dipende da B e C . Infatti dalla (4.22) segue che

$$\Delta_R \Upsilon_0 = R \circ \Upsilon_0 - \Upsilon_0 = \frac{2BC}{-BC} qp,$$

e quindi

$$R \circ \Upsilon_0 = \Upsilon_0 - 2pq, \quad (4.24)$$

ed S_0 , trasformata di Legendre di Υ_0 , può essere espressa in termini di trasformata di Möbius di Υ_0

$$S_0(q) = -\frac{1}{2} (\Upsilon_0(p) + R \circ \Upsilon_0). \quad (4.25)$$

Come si può vedere dalla (4.23), l'azione di R sul prodotto pq produce soltanto un cambio di segno. R , matrice $GL(2, \mathbb{C})$ con la quale abbiamo dato una scrittura alternativa della trasformata di Legendre, ci suggerisce una sorta di dualità p, q . Il prossimo passo sarà infatti quello di ripercorrere i precedenti risultati ma con particolare attenzione ai momenti.

Capitolo 5

L'equazione canonica duale

Abbiamo visto che l'equazione canonica è invariante sotto una trasformazione di coordinate che lascia immutata l'azione ridotta (come nel caso meccanico). Abbiamo individuato un tipo di trasformazione di Möbius con la quale identificare S e Υ , l'una la trasformata di Legendre dell'altra, e che sotto questa trasformazione il prodotto pq rimane invariato a meno di un segno. Questa corrispondenza poteva già essere intuita dalle (4.19) e poiché le premesse e le ipotesi sono le medesime, niente ci priva di ripercorre in maniera duale quanto fatto per la derivazione dell'equazione canonica e lo studio delle sue proprietà. Inoltre, cercando le soluzioni per cui il nuovo ed il precedente percorso coincidano, si può ottenere un'equazione che descrive l'intersezione tra lo spazio delle azioni ed il suo duale.

5.1 Dualità di Legendre

5.1.1 Trasformazioni di momento

Come prima cosa consideriamo una trasformazione del momento localmente invertibile

$$p \longrightarrow p^u = u(p) \quad (5.1)$$

a cui possiamo associare come nello schema in Figura 4.1 una nuova Υ_0

$$\Upsilon_0 \longrightarrow \Upsilon_0^u = \Upsilon_0 \circ u^{-1},$$

tale che

$$\Upsilon_0^u(p^u) = \Upsilon_0(p(p^u)). \quad (5.2)$$

Similmente a quanto fatto nel Capitolo 4, poiché stiamo lavorando con le stesse ipotesi, la mappa (5.1) implica le seguenti relazioni

$$q_u = (\partial_p p^u)^{-1} q, \quad \Delta_u S_0 = \Delta_u(pq), \quad (5.3)$$

del tutto omologhe al caso di trasformazioni di coordinata q . E' utile notare che

- i)* mentre nel caso di trasformazioni di coordinate q il momento trasformava come $\frac{\partial}{\partial q}$, adesso è q che trasforma come $\frac{\partial}{\partial p}$;

- ii) il ruolo dell'azione ridotta e del suo duale è completamente interscambiato;
- iii) la variazione dell'azione ridotta tramite (5.1) è uguale alla variazione dell'azione ridotta duale tramite (4.6);
- iv) abbiamo tutti gli strumenti per ottenere risultati “duali” a quelli dei capitoli precedenti.

5.1.2 L'equazione canonica duale

Ricordando che nella Proposizione 2 avevamo differenziato la seconda delle (2.5), è intuitivo e quasi banale capire che derivando due volte la prima delle (2.4) e seguendo i medesimi passaggi algebrici otteniamo una nuova equazione differenziale lineare del secondo ordine con i ruoli di p, q e S_0, Υ_0 scambiati tra loro. Allora $p\sqrt{q}$ e \sqrt{q} saranno soluzioni linearmente indipendenti rispetto al parametro $t = \Upsilon_0(p)$ di un'equazione corrispondente alla (3.12)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \{p, t\} \right) \left(\frac{p\sqrt{q}}{\sqrt{q}} \right) = 0, \quad (5.4)$$

che chiameremo *equazione canonica duale*, mentre chiamiamo $V(t) = \frac{1}{2} \{p, t\}$ *potenziale canonico duale*, con tutte le proprietà schwarziane e le conclusioni dedotte nel Capitolo 3.

5.1.3 Trasformazioni di Möbius nello spazio duale

Consideriamo una trasformazione di Möbius $GL(2, \mathbb{C})$

$$p \longrightarrow p^u = \frac{Aq + B}{Cq + D}. \quad (5.5)$$

Dalla prima delle (5.3) abbiamo che l'effetto su q della (5.5) è

$$q \longrightarrow q_u = \sigma^{-1}(Cq + D)^2 p, \quad (5.6)$$

dove $\sigma = AD - BC$. Dalla seconda delle (5.3) segue

$$\Delta_u S_0 = \sigma^{-1}(ACp^2 + 2BCp + BD)q. \quad (5.7)$$

Si ha che la variazione dell'azione per una trasformazione dei momenti è uguale alla variazione dell'azione ridotta per una trasformazione delle coordinate spaziali. Consideriamo adesso una trasformazione $GL(2, \mathbb{C})$ di matrice¹

$$R_u = \begin{pmatrix} 0 & B_u \\ C_u & 0 \end{pmatrix},$$

¹Si ricorda l'importanza di R , per cui si può scrivere la trasformata di Legendre come trasformata di Möbius, all'interno dell'intera simmetria dei capitoli precedenti.

come nel paragrafo 4.4.² Abbiamo che

$$R_u : p \longrightarrow p^u = \frac{\rho_u}{p}, \quad R_u : q \longrightarrow q_u = -\frac{p^2 q}{\rho_u}, \quad (5.8)$$

con $\rho_u = \frac{B_u}{C_u}$. In particolare si vede che la (5.7) sotto una trasformazione di matrice R_u non dipende dal tipo di mappa utilizzata

$$\Delta_v \Upsilon_0 = \Delta_u S_0 = -2pq, \quad (5.9)$$

come conseguenza del fatto che

$$R : pq \longrightarrow p_v q^v = p^u q_u = -pq. \quad (5.10)$$

5.2 L'equazione canonica autoduale

La (5.9) può essere ulteriormente estesa imponendo delle intuitive condizioni di simmetria. Richiediamo che sotto un cambiamento di coordinate spaziali e dei momenti, le scritte risultanti coincidano. Precisamente

$$q^v = q_u, \quad p^u = p_v. \quad (5.11)$$

Le (5.8) e (4.23), insieme alle condizioni appena imposte, implicano

$$\frac{B_v B_u}{C_v C_u} = -p^2 q^2, \quad (5.12)$$

da cui segue

$$pq = \gamma, \quad (5.13)$$

con γ costante e $\gamma \in \mathbb{C}$ se $\frac{B_v B_u}{C_v C_u} > 0$, e quindi

$$\frac{B_v B_u}{C_v C_u} = -\gamma^2, \quad \Delta_v \Upsilon_0 = \Delta_u S_0 = -2\gamma, \quad (5.14)$$

rimangono invariate nello scambio di p e q . Questo diventa evidente osservando la forma delle trasformazioni in gioco:

$$\begin{cases} q \longrightarrow q^v = \frac{1}{\gamma} \frac{B_v}{C_v} p = -\gamma \frac{C_u}{B_u} p = q_u, \\ p \longrightarrow p^u = \frac{1}{\gamma} \frac{B_u}{C_u} q = -\gamma \frac{C_v}{B_v} q = p_v. \end{cases} \quad (5.15)$$

Integrando le (4.20), l'azione ridotta ed il suo duale assumono la forma

$$S_0(q) = \gamma \ln \gamma_q q, \quad \Upsilon_0(p) = \gamma \ln \gamma_p p, \quad (5.16)$$

dove γ_p, γ_q sono costanti d'integrazione che soddisfano³

$$\gamma_p \gamma_q \gamma = e. \quad (5.17)$$

²Aggiungiamo adesso l'apice \mathbf{v} per chiarezza, così da avere $R_v = \begin{pmatrix} 0 & B_v \\ C_v & 0 \end{pmatrix}$, $R_v : q \longrightarrow q^v = \frac{\rho_v}{q}$, $R_v : p \longrightarrow p_v = -\frac{q^2 p}{\rho_v}$ con $\rho_v = \frac{B_v}{C_v}$.

³ $S_0 + \Upsilon_0 = pq$ implica che $\ln \gamma_q q + \ln \gamma_p p = 1$; dalla (5.13) segue la (5.17).

Veniamo al punto cruciale della nostra trattazione: notiamo che le soluzioni dell'equazione canonica e della sua versione duale coincidono per $p = \gamma/q$, precisamente diventano

$$q^{\frac{1}{2}}, \quad q^{-\frac{1}{2}}, \quad (5.18)$$

ed inoltre anche il potenziale canonico coincide con il suo duale⁴

$$\mathcal{U}(s) = V(t) = -\frac{1}{4\gamma^2}, \quad (5.19)$$

entrambi costanti. In conclusione possiamo scrivere un'unica equazione canonica

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{1}{4\gamma^2} \right) \begin{pmatrix} q^{\frac{1}{2}} \\ q^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.20)$$

in cui τ può essere indifferentemente l'azione o il suo duale. Chiamiamo la (5.20)

equazione canonica autoduale.

Questa descrive lo spazio d'intersezione tra una trasformazione di coordinate q ed una trasformazione di momento p . L'equazione canonica e la sua duale corrispondono a due equivalenti descrizioni di un medesimo sistema fisico. L'equazione canonica autoduale descrive invece stati in cui le due descrizioni si sovrappongono. Mostriamo adesso la forma che assumono le due soluzioni della (5.20). Invertendo le (5.16), abbiamo che

$$q = \gamma_q^{-1} e^{\frac{s}{\gamma}}, \quad p = \gamma_p^{-1} e^{\frac{t}{\gamma}}, \quad (5.21)$$

da cui seguono immediatamente le soluzioni

$$\begin{cases} q\sqrt{p} = \gamma\sqrt{\gamma_p} e^{-\frac{t}{2\gamma}}, \\ \sqrt{p} = \sqrt{\gamma_p^{-1}} e^{\frac{t}{2\gamma}}. \end{cases} \quad (5.22)$$

⁴È più immediato calcolare il potenziale canonico dalla forma $\mathcal{U}(s) = -\frac{1}{q\sqrt{p}} \frac{\partial^2(q\sqrt{p})}{\partial s^2} = -\frac{1}{\sqrt{q}} \frac{\partial^2(\sqrt{q})}{\partial s^2} = -\frac{1}{2\gamma\sqrt{q}} \frac{\partial\sqrt{q}}{\partial s} = -\frac{1}{4\gamma^2}$, che da quella Schwarziana, ed allo stesso modo per $V(t)$.

Capitolo 6

Ciclo canonico

6.1 L'equazione canonica connessa

Riprendiamo la (4.18) e ricordiamo che è stata dedotta da argomentazioni puramente teoriche di simmetria, osservando come trasformava l'equazione canonica (3.12) tramite trasformazioni di Möbius e tenendo conto che i risultati (4.16) e (4.17) erano simmetrici a meno di un'inversione della variabile p . Chiamiamo la (4.18) *equazione canonica connessa*. Lo studio di questa non ha referenze o applicazioni in ambito fisico, ed è ancora oggetto di studio. Ci limitiamo in questa sezione a mostrarne la validità all'interno del nostro modello.

Innanzitutto, la sua forma differenziale prevede una relazione tra la variabile indipendente e le soluzioni, come descritto nel Capitolo 1; la forma canonica del potenziale prevede poi che questa relazione sia una trasformata di Legendre rispetto al quadrato di una sua soluzione¹, per cui ²

$$q(s) = p^{-1} \partial_{p^{-1}} Q(p) - Q(p), \quad (6.1)$$

dove $Q(p)$ è una funzione incognita che avrà le stesse dimensioni della variabile q e che chiameremo *funzione di coordinata connessa*. Per determinare la forma di Q consideriamo che la (6.1) eredita le proprietà involutive della trasformata di Legendre con il ruolo di s e Q scambiato. Possiamo quindi riscrivere l'omologa della prima delle (4.19)

$$Q(p) = s \partial_s q - q, \quad (6.2)$$

che, per la validità delle (4.20), implica

$$\begin{cases} \partial_{p^{-1}} Q(p) = s, \\ \partial_s q = p^{-1}. \end{cases} \quad (6.3)$$

¹Vedere Proposizione 1 e Proposizione 2

²Ricordiamo che si richiede un'azione invertibile per cui è possibile anche esplicitare q in funzione di S_0 .

L'espressione della funzione di coordinata connessa si può esplicitare a partire dalle (6.2), (6.3) e (4.19), e vale che³

$$Q(p) = -\frac{\Upsilon_0(p)}{p}, \quad (6.4)$$

infatti

$$\partial_{p^{-1}}Q(p) = \partial_{p^{-1}}\left(-\frac{\Upsilon_0(p)}{p}\right) = \partial_p\left(-\frac{\Upsilon_0(p)}{p}\right)\frac{\partial p}{\partial_{p^{-1}}} = \frac{qp - \Upsilon_0}{p^2}p^2 = s = S_0(q).$$

Inoltre, come fatto per le trasformazioni di momento nella sezione (5.1) possiamo ottenere un'alternativa descrizione data da un'equazione canonica connessa duale⁴

$$\left(\partial_Q^2 + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{p}, Q(p)\right\}\right)\begin{pmatrix} p^{-1}\sqrt{s} \\ \sqrt{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.5)$$

differenziando la (6.2).

6.1.1 Giustificazione differenziale del canonico connesso

L'equazione canonica connessa e la sua duale hanno come primo utilizzo quello di suggerire nuove relazioni all'interno della descrizione differenziale data dalla trasformata di Legendre fra le variabili in gioco, come le (6.3), (6.2). Queste possono essere coerentemente indotte all'interno del modello differenziale proposto nel Capitolo 1 ed in particolare nella Sezione 1.2. Richiamiamo le identificazioni tra le due notazioni esposte nella (2.7)

$$(q, p, s, t) \longleftrightarrow \left(\frac{\psi_D}{2\psi}, \psi^2, u, \mathcal{F}\right), \quad (6.6)$$

che sostituite alle variabili dell'equazione canonica connessa (e canonica connessa duale)

$$\left(s, p^{-1}, q, -\frac{t}{p}\right) \longleftrightarrow \left(u, \psi^{-2}, \frac{\psi_D}{2\psi}, -\frac{\mathcal{F}}{\psi^2}\right), \quad (6.7)$$

restituiscono un sistema di due equazioni involutive fra loro e due equazioni differenziali, che suggeriscono nuove relazioni tra le soluzioni linearmente indipendenti, la variabile indipendente ed il termine $\mathcal{F}(\psi)$. In particolare abbiamo

$$\left(\partial_{\frac{\psi_D}{2\psi}}^2 + \frac{1}{2}\left\{u, \frac{\psi_D}{2\psi}\right\}\right)\begin{pmatrix} u \\ \psi^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.8)$$

³Segue da semplici passaggi algebrici

$$Q = sp^{-1} - q \longrightarrow pQ(p) = s(q) - qp = S_0 - q\partial_q S_0 = -\Upsilon_0.$$

⁴Mentre l'equazione canonica connessa è una scrittura alternativa della (6.1), la sua forma duale nasce differenziando la (6.2).

$$\frac{\psi_D}{2\psi} = \psi^{-2} \partial_{\psi^{-2}} \left(-\frac{\mathcal{F}}{\psi^2} \right) + \frac{\mathcal{F}}{\psi^2}, \quad (6.9)$$

$$\left(\partial_{-\frac{\mathcal{F}}{\psi^2}} + \frac{1}{2} \left\{ \psi^{-2}, -\frac{\mathcal{F}}{\psi^2} \right\} \right) \left(\frac{\sqrt{u}}{\psi} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.10)$$

$$-\frac{\mathcal{F}}{\psi^2} = u \partial_u \left(\frac{\psi_D}{2\psi} \right) - \frac{\psi_D}{2\psi}. \quad (6.11)$$

$$\partial_{\psi^{-2}} \left(-\frac{\mathcal{F}}{\psi^2} \right) = u, \quad (6.12)$$

$$\partial_u \left(\frac{\psi_D}{2\psi} \right) = \psi^{-2}. \quad (6.13)$$

La (6.8) e la (6.10) sono l'espressione differenziale delle relazioni involutive (6.9) e (6.11) rispettivamente. La (6.12) e la (6.13) invece sono l'omologo delle relazioni (2.6) all'interno della teoria di Legendre rispetto alle nuove variabili. Ci proponiamo di dimostrare quest'ultime, le quali garantiscono la correttezza algebrica dell'intera esposizione.

$\partial_{\psi^{-2}} \left(-\frac{\mathcal{F}}{\psi^2} \right) = u$. Valgono le seguenti identità

$$\partial_{\psi^{-2}} \psi^2 = -\psi^4, \quad \partial_{\psi^{-2}} \mathcal{F} = \psi_D \partial_{\psi^{-2}} \psi = -\frac{1}{2} \psi_D \psi^3$$

da cui

$$\partial_{\psi^{-2}} \left(-\frac{\mathcal{F}}{\psi^2} \right) = -\frac{\partial_{\psi^{-2}} \mathcal{F} \psi^2 - \mathcal{F} \partial_{\psi^{-2}} \psi^2}{\psi^4} = \frac{1}{2} \psi \psi_D - \mathcal{F},$$

che per la (1.1) con costanti $c' = 1$, $c = 2$ e $k = 0$, come richiesto nel Capitolo 2 per l'identificazione della trasformata di Legendre e quindi implicitamente contenute in (6.9) e (6.11), risulta essere proprio uguale ad u . \square

$\partial_u \left(\frac{\psi_D}{2\psi} \right) = \psi^{-2}$. Ricordando che $c = 2$ altro non è che il Wronskiano costante delle due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione canonica, abbiamo che

$$\partial_u \left(\frac{\psi_D}{2\psi} \right) = \frac{c}{2\psi^2} = \psi^{-2}. \quad \square$$

Le equazioni (6.8), (6.9), (6.10), (6.11), (6.12), (6.13) oltre che ad essere relazioni utili in problemi di natura differenziale come la (1.6), essendo la rappresentazione in termini di soluzioni linearmente indipendenti del modello connesso ed essendo verificate ed in accordo con la trattazione esposta nei Capitoli 1 e 2, garantiscono una consistenza algebrica dell'equazione (4.18), la quale era stata dedotta da argomentazioni di pura simmetria e studiando l'invarianza dell'equazione canonica (3.12) rispetto a trasformazioni di Möbius di entrambi gli argomenti della derivata Schwarziana del potenziale canonico. Pertanto possiamo concludere che la dualità suggeritaci dalle (4.16) e (4.17) tra le coordinate q e lo spazio delle azioni è valida, e lo scambio di q ed s come variabili dipendenti/indipendenti nello studio di un sistema

partorisce due metodi d'indagine complementari. Ci sono però delle difficoltà da un punto di vista pratico, prima tra tutte la richiesta che la funzione $s : q \longrightarrow s(q)$ sia globalmente invertibile. L'azione per definizione (4.2) è l'integrale della Lagrangiana rispetto al tempo. La possibile inversione di s è difficile in un problema di radice pratica, ma nonostante sia una dualità con riscontri puramente teorici, contribuisce alla costruzione di teorie moderne di più immediata applicazione. Inoltre questa costruzione non è limitata a problemi meccanici, ma è evidentemente estendibile a qualsiasi teoria che prevede l'ausilio della trasformata di Legendre.

6.2 Progressione e pregressione

6.2.1 Progressione duale e progressione connessa

- i)* Nel ricavare la duale di un'equazione canonica, tutte le relazioni in gioco assumono una scrittura omologa che consta di uno scambio tra le variabili indipendenti e le variabili dipendenti. In particolare, le relazioni legendriane che nascono dalla (3.12) rispetto a quelle della sua duale (5.4) sono uguali per scambio di variabili come

$$(q, p, s, t) \longleftrightarrow (p, q, t, s). \quad (6.14)$$

- ii)* Nella Sezione 6.1 abbiamo studiato l'equazione canonica connessa (4.18) che nasce dallo scambio di s e q suggeritaci dalle simmetrie di Möbius, la cui validità è stata dimostrata dalle relazioni differenziali che implica rispetto al modello del Capitolo 1. In particolare, le relazioni legendriane che nascono dalla (3.12) rispetto a quelle della sua versione connessa (4.18) sono uguali per scambio di variabili come

$$(q, p, s, t) \longleftrightarrow \left(s, \frac{1}{p}, q, -\frac{t}{p} \right). \quad (6.15)$$

Chiamiamo la *i)* *progressione duale*, la *ii)* *progressione connessa*. In questi nuovi termini la (6.5) è una progressione duale della (4.18), mentre la (4.18) è una progressione connessa della (3.12). Viene spontaneo chiederci se è possibile eseguire un'ulteriore progressione connessa della (6.5), e fino a che punto possiamo continuare a progredire alternativamente in maniera connessa e duale per ottenere il più grande insieme di simmetrie all'interno della teoria di Legendre.

Questo in linea teorica è possibile. La progressione duale è garantita per ogni equazione canonica, in quanto questa ammette sempre una relazione legendriana come la (4.19), e quindi per involutività prevede una relazione legendriana duale, alla quale, applicando la Proposizione 2, si può ottenere sempre un'equazione canonica duale. La progressione connessa è garantita dal fatto che ogni equazione canonica contiene implicitamente una simmetria rispetto a trasformazioni di Möbius⁵.

In Figura 6.1 è illustrato come cambiano le variabili in una progressione connessa; in

⁵Vedere Proposizione 5, Capitolo 6.1 e la giustificazione algebrico-differenziale 6.1.1.

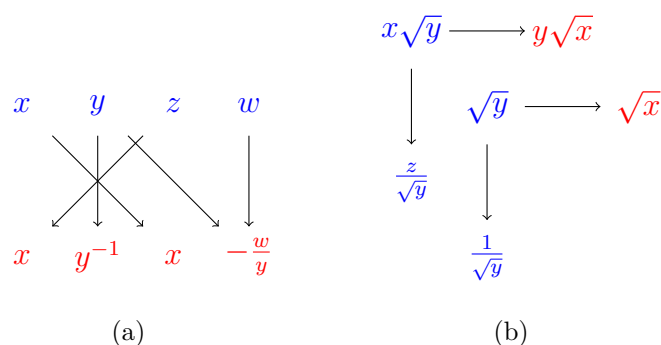


Figura 6.1: (a) Progressione delle variabili in una struttura connessa. (b) Le linee orizzontali indicano una progressione duale delle soluzioni; le linee verticali indicano una progressione connessa delle soluzioni.

Figura 6.2 è invece illustrato come cambiano le soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione canonica in una progressione connessa e duale.

Ovviamente due progressioni connesse consecutive restituiscono l'identità, così come due progressioni duali. Ci proponiamo di studiare il cambiamento delle variabili di una struttura canonica all'alternarsi di progressioni duali e connesse, seguendo gli schemi (6.4), (6.5) e la Figura 6.1 Chiamiamo *livelli* le strutture⁶ connesse/duali in cui si progredisce.

(q, p, s, t) Livello 0

$\left(s, \frac{1}{p}, q, -\frac{t}{p}\right)$ Livello Connesso 1

$\left(\frac{1}{p}, s, -\frac{t}{p}, q\right)$ Livello Connesso Duale 1

$\left(-\frac{t}{p}, \frac{1}{s}, \frac{1}{p}, -\frac{q}{s}\right)$ Livello Connesso 2

$\left(\frac{1}{s}, -\frac{t}{p}, -\frac{q}{s}, \frac{1}{p}\right)$ Livello Connesso Duale 2

$\left(-\frac{q}{s}, -\frac{p}{t}, \frac{1}{s}, \frac{1}{t}\right)$ Livello Connesso 3

$\left(-\frac{p}{t}, -\frac{q}{s}, \frac{1}{t}, \frac{1}{s}\right)$ Livello Connesso Duale 3

$\left(\frac{1}{t}, -\frac{s}{q}, -\frac{p}{t}, \frac{1}{q}\right)$ Livello Connesso 4

⁶Con struttura si intende un vettore di variabili ordinate in maniera tale da poter ricostruire coerentemente per induzione un intero modello.

$$\left(-\frac{s}{q}, \frac{1}{t}, \frac{1}{q}, -\frac{p}{t}\right) \text{ Livello Connesso Duale 4}$$

$$\left(\frac{1}{q}, t, -\frac{s}{q}, p\right) \text{ Livello Connesso 5}$$

$$\left(t, \frac{1}{q}, p, -\frac{s}{q}\right) \text{ Livello Connesso Duale 5}$$

$$(p, q, t, s) \text{ Livello Connesso 6}$$

Nella Sezione 6.1.1 abbiamo dimostrato che una progressione connessa porta ad un'equazione canonica consistente ed a relative relazioni legendriane tra le variabili altrettanto valide. Si può dimostrare che questo vale per ogni Livello, e per ognuno dei quali possiamo ottenere tutte le conclusioni tratte nei capitoli precedenti. Questa descrizione è finalizzata a dare un quadro completo tra tutte le simmetrie all'interno della teoria di Legendre.

Elenchiamo alcune conclusioni:

- 1◊ Dopo dodici progressioni alternate, le variabili tornano a descrivere il sistema iniziale (q, p, s, t) . Le variabili del Livello Proforme 6, che chiameremo alternativamente *Livello Duale*, sono infatti la rappresentazione duale del Livello 0. Le progressioni si muovono quindi tra spazi che sono tasselli di un ciclo chiuso, di cui ogni coppia di livelli descrive un sistema involutivo alla Legendre. Abbiamo quindi ben sei strutture simmetriche involutive che possono descrivere lo stesso sistema. Chiamiamo questo

ciclo canonico.

- 2◊ Ci si aspetterebbe un ulteriore ciclo canonico se progredissimo in una struttura connessa partendo dal Livello Duale piuttosto che dal Livello 0.
- 3◊ Ogni Livello eredita le invarianze per trasformazioni di Möbius.
- 4◊ Ogni coppia di livelli duali prevede uno spazio di intersezione.

6.2.2 Equazione canonica duale connessa

L'equazione canonica connessa del Livello 1 nasce dal considerare le simmetrie dell'equazione canonica (3.12). Allo stesso modo possiamo ricostruire il medesimo modello a partire dall'equazione canonica duale (5.4). Mentre la (3.12) è invariante per trasformazioni di Möbius nello spazio delle q o delle s , la (5.4) è invariante per trasformazioni di Möbius nello spazio delle p o delle t e come fatto nella Sezione 6.1 possiamo riscriverla⁷ con i ruoli di p e t scambiati, evidenziando lo stesso principio di dualità tra p e t che avevamo mostrato per q ed s .⁸

⁷Chiameremo la nuova *equazione canonica duale connessa*.

⁸I passaggi algebrici sono omologhi a quelli per derivare le relazioni canoniche connesse.

Struttura canonica duale connessa	Struttura canonica duale connessa duale
$\left(\partial_p^2 + \frac{1}{2}\{t, p\}\right) \begin{pmatrix} \frac{t}{\sqrt{q}} \\ 1/\sqrt{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $p = \frac{1}{q}\partial_{\frac{1}{q}}\left(-\frac{s}{q}\right) + \frac{s}{q}$ $\partial_{\frac{1}{q}}\left(-\frac{s}{q}\right) = t$	$\left(\partial_{-\frac{s}{q}}^2 + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{q}, -\frac{s}{q}\right\}\right) \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{t}}{p} \\ \sqrt{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $-\frac{s}{q} = t\partial_t p - p$ $\partial_t p = \frac{1}{q}$

Tabella 6.1: L'equazione canonica duale connessa e relazioni affini.

6.2.3 Giustificazione differenziale del canonico duale connesso

Per completezza esponiamo le relazioni in notazione differenziale indotte dall'equazione canonica duale connessa nel problema introdotto nel Capitolo 1, che possono essere tutte verificate a partire dalle relazioni del Capitolo 1.

$$\left(\partial_{\psi^2}^2 + \frac{1}{2}\{\mathcal{F}, \psi^2\}\right) \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{F}\sqrt{2\psi}}{\sqrt{\psi_D}} \\ \sqrt{\frac{2\psi}{\psi_D}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\left(\partial_{-\frac{2u\psi}{\psi_D}}^2 + \frac{1}{2}\left\{\frac{2\psi}{\psi_D}, -\frac{2u\psi}{\psi_D}\right\}\right) \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\mathcal{F}}}{\sqrt{\psi^2}} \\ \sqrt{\mathcal{F}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\psi^2 = \frac{2\psi}{\psi_D}\partial_{\frac{2\psi}{\psi_D}}\left(-\frac{2u\psi}{\psi_D}\right) + \frac{2u\psi}{\psi_D},$$

$$-\frac{2u\psi}{\psi_D} = \mathcal{F}\partial_{\mathcal{F}}\psi^2 - \psi^2,$$

$$\partial_{\frac{2\psi}{\psi_D}}\left(-\frac{2u\psi}{\psi_D}\right) = \mathcal{F},$$

$$\partial_{\mathcal{F}}\psi^2 = \frac{2\psi}{\psi_D}.$$

Tabella 6.2: Relazioni indotte dall'equazione canonica duale connessa nel problema differenziale generale esposto nel Capitolo 1.

6.2.4 Pregressione duale e pregressione connessa

Chiamiamo *pregressione connessa* la nuova forma delle variabili ottenute dalla progressione dell'equazione canonica duale, in Sezione 6.2.2. Osserviamo che le variabili che descrivono la struttura duale connessa derivante dall'equazione canonica duale sono

$$\left(t, \frac{1}{q}, p, -\frac{s}{q}\right)$$

che corrispondono esattamente alle variabili del Livello Connesso Duale 5. Questa elegante sorpresa è più che una semplice coincidenza. Infatti il modello di evoluzione delle variabili descritto in Figura 6.1(a) che prevede lo scambio tra il primo ed il terzo argomento, l'inversione del secondo argomento e la moltiplicazione del quarto argomento per l'antireciproco del secondo, segue uno sviluppo involutivo logico. Possiamo riassumere questi risultati in

Proposizione 6. *Siano A, B due livelli di un ciclo canonico. Se esiste una progressione duale/connessa da A in B allora esiste una progressione duale/connessa da B in A e queste sono una l'involuta dell'altra.*

Ancora una volta ci troviamo di fronte ad una struttura involutiva ed il ciclo canonico risulta essere percorribile in entrambi i sensi in base al tipo di pre/progressione utilizzata.

6.3 La Q-area e la P-area

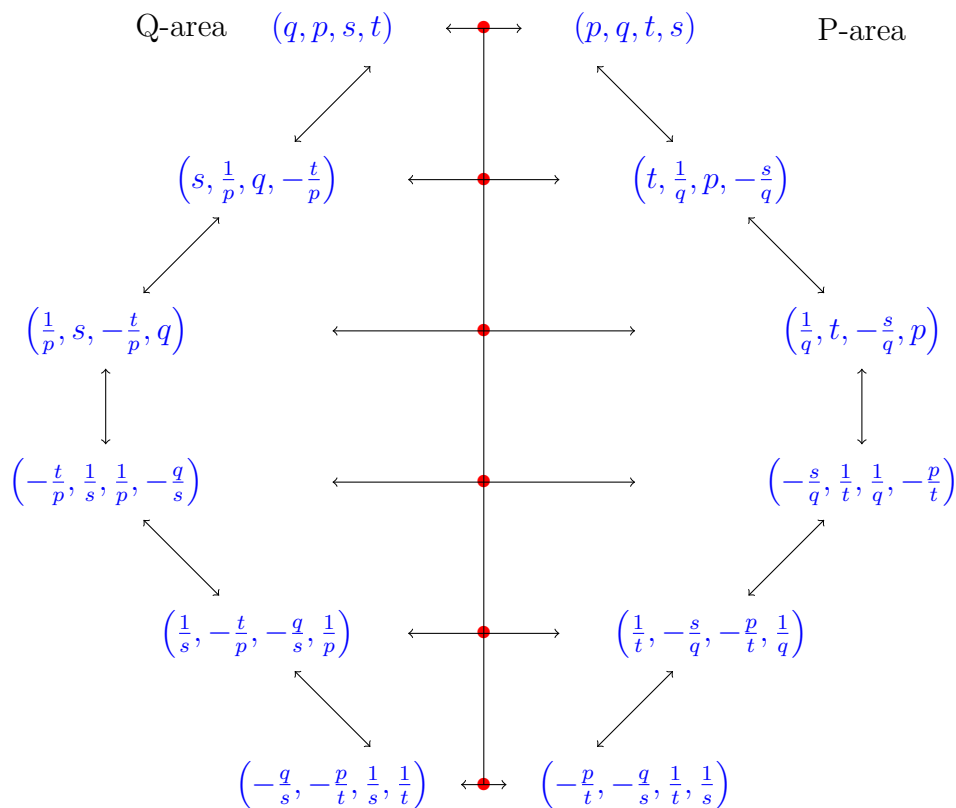


Figura 6.2: Ciclo canonico

Abbiamo completamente descritto come tutti livelli del ciclo canonico sono legati tra loro. Esso presenta dodici livelli a due a due simmetrici in dualità nelle variabili legendriane e a due a due simmetrici nelle variabili del potenziale canonico. Spieghiamo come si comporta la rappresentazione del ciclo canonico in Figura 6.2, facendo alcuni esempi:

- i) Il Livello 0^9 può progredire dualmente nel Livello $(p, q, t, s)^{10}$ o progredire in struttura connessa nel Livello $(s, \frac{1}{p}, q, -\frac{t}{p})^{11}$;
- ii) il Livello $(\frac{1}{t}, -\frac{s}{q}, -\frac{p}{t}, \frac{1}{q})$ può progredire in struttura connessa nel Livello $(-\frac{p}{t}, -\frac{q}{s}, \frac{1}{t}, \frac{1}{s})$, o progredire dualmente nel Livello $(-\frac{s}{q}, \frac{1}{t}, \frac{1}{q}, -\frac{p}{t})$.

Dallo schema¹² in Figura 6.2 notiamo che i livelli contengono una simmetria trasversale tra quelli presenti nella *Q-area* e quelli nella *P-area*, relativa allo scambio tra p e q , s e t . Nella forma canonica di Livello 0 (6.16) e nel Livello Duale, questa simmetria corrisponde allo scambio delle variabili legendriane, in quanto queste sono proprio p e q . Nella trasformata di Legendre di Livello 0 abbiamo infatti che l'azione duale è la trasformata dell'azione tramite q , mentre l'azione è la trasformata dell'azione duale tramite p . Una sovrapposizione simile, ma meno apparente, si ritrova per i livelli Connesso e Connesso Duale 3. In queste due coppie, la pre/progressione coincide con la simmetria $q \longleftrightarrow p, s \longleftrightarrow t$. Per gli altri livelli questa sovrapposizione si perde, ma è immediato vedere che la simmetria $q \longleftrightarrow p, s \longleftrightarrow t$ si mantiene tra livelli opposti nelle P-area e Q-area rispettivamente.

⁹Rappresentato dal vettore (q, p, s, t) , che genera l'equazione canonica e la trasformata di Legendre nelle rispettive forme (3.12) e (2.5);

¹⁰che genera l'equazione duale (5.4) e la relativa forma involutiva della trasformata di Legendre;

¹¹la quale genera l'equazione canonica connessa (4.18), e tutte le relazioni della Sezione 6.1.

¹²Si ricorda che alla notazione (x, y, z, w) corrisponde sempre un'equazione canonica $(\partial_z^2 + \frac{1}{2}\{x, z\}) \begin{pmatrix} x\sqrt{y} \\ \sqrt{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, una relazione legendriana $z = y\partial_y w - w$, e tutte le equazioni all'interno del modello che li lega.

Capitolo 7

Legendre in Meccanica Quantistica

Le simmetrie interne alla teoria di Legendre hanno svariate applicazioni nel mondo della fisica. Ne mostriamo di seguito una delle più immediate. L'introduzione di un prepotenziale in meccanica quantistica permette di interpretare lo spazio come la sua trasformata di Legendre rispetto alla densità di probabilità. Questo oggetto permette inoltre, tramite il modello descritto nei capitoli precedenti, di considerare una dualità tra spazio e funzione d'onda, suggerendo un'interpretazione macroscopica della variabile spaziale ed introducendola in un contesto statistico in cui \hbar gioca il ruolo di parametro di scala.

7.1 Il prepotenziale

La forma dell'equazione canonica (2.8) è quella di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine con un coefficiente variabile. Dalla Proposizione 1 possiamo intuire che molte conclusioni tirate fuori dal nostro modello siano indipendentemente valide dalla forma del potenziale che presenta l'equazione differenziale in questione. Cominciamo con l'osservare che la (2.8) richiama l'equazione di Schrödinger per una particella soggetta ad un generico potenziale \mathcal{U}

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_q^2 + \mathcal{U}(q)\right)\psi = E\psi, \quad (7.1)$$

dove E è un autovalore dello spettro energetico del sistema, m la massa della particella, \hbar è la costante di Planck divisa per 2π , \mathcal{U} è un generico potenziale e ψ è un generico stato del sistema. Effettuiamo adesso un riscalco delle coordinate

$$q \longrightarrow q^* = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar}q, \quad \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2} \longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial q^{*2}}, \quad (7.2)$$

così da poter riscrivere la (7.1)

$$\left(\partial_{q^*}^2 + E - \mathcal{U}(q^*)\right)\psi(q^*) = 0, \quad (7.3)$$

che, con una giusta scelte delle soluzioni linearmente indipendenti, è possibile considerare come un'equazione canonica (5.4) o (4.18) con

$$E - \mathcal{U}(q) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\psi_{E_D}}{\psi_E}, q \right\}, \quad (7.4)$$

potenziale canonico in questione.

Pensando la (7.3) come un'equazione differenziale del secondo ordine, sappiamo che ammette al più due soluzioni fisiche linearmente indipendenti. Siano queste ψ_E e ψ_{E_D} ¹. Definiamo una nuova quantità scalare \mathcal{P}_E che chiamiamo *prepotenziale* dalla seguente relazione

$$\psi_{E_D} = \frac{\partial \mathcal{P}_E(\psi_E)}{\partial \psi_E}, \quad (7.5)$$

e similmente a quanto fatto nel Cap.1² otteniamo la relazione

$$\mathcal{P}_E = \frac{1}{2}\psi_E\psi_{E_D} + \frac{c}{2}q + k, \quad c, k \in \mathbb{R}, \quad (7.6)$$

dove c è la costante relativa all'indipendenza delle soluzioni considerate³, k è la costante alle condizioni iniziali d'integrazione che può essere posta a 0 dall'equazione (7.5). Dobbiamo fissare c in maniera tale che $c \equiv -\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar}$ per consistenza con la (7.3), così da poter riscrivere la (7.6)⁴

$$\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}q(\psi_E) = \psi_E^2 \frac{\partial \mathcal{P}_E}{\partial \psi_E^2} - \mathcal{P}_E,$$

e con una mappa come la (6.2)

$$q^*(\psi_E) = \psi_E^2 \frac{\partial \mathcal{P}_E}{\partial \psi_E^2} - \mathcal{P}_E. \quad (7.7)$$

Possiamo riconoscere nella (6.7)⁵ una trasformata di Legendre a momento fissato. In particolare le coordinate classiche spaziali sono la trasformata di Legendre del prepotenziale rispetto alla variabile ψ_E^2 , di cui l'equazione di Schrödinger ne rappresenta l'equazione canonica. Identicamente a quanto fatto nei Capitoli 4 e 5, dall'involuntività della trasformata in questione seguono le relazioni

$$\begin{cases} \phi_E = \partial_{\psi_E^2} \mathcal{P}_E = \frac{\psi_{E_D}}{2\psi_E}, \\ \partial_{\phi_E} q^* = \psi_E^2, \end{cases} \quad (7.8)$$

e, come per la (1.4), la (7.7) ammette una relazione involutiva

$$\mathcal{P}_E = \phi_E \partial_{\phi_E} q^* - q^*, \quad (7.9)$$

da cui possiamo derivare l'*equazione di Schrödinger duale*

¹L'apice E sottolinea che gli stati sono identificati da un determinato livello energetico. Inoltre si mantengono un linguaggio ed una notazione simili ad i capitoli precedenti ai fini di maggiore chiarezza.

²Vedere Proposizione 1.

³Il Wronskiano di due funzioni linearmente indipendenti è al più una costante.

⁴Utilizziamo l'identità

$$\partial_{\psi_E^2} \mathcal{P} = \partial_{\psi_E} \mathcal{P}_E \frac{1}{2\psi_E}.$$

⁵Ricordiamoci che q è stato riscritto come nella (6.2), quindi in realtà ci sarà sempre un fattore di proporzionalità.

$$\left(\partial_{\mathcal{P}_E}^2 + \frac{1}{2} \{ \psi_E^2, \mathcal{P}_E \} \right) \overline{\Psi}_E = 0, \quad (7.10)$$

con il vettore di stato che risulta essere

$$\overline{\Psi}_E = \begin{pmatrix} \sqrt{\psi_E^3 \psi_{E_D}} \\ \sqrt{\frac{\psi_{E_D}}{\psi_E}} \end{pmatrix}. \quad (7.11)$$

Quindi il prepotenziale è la trasformata di Legendre di q^* tramite ψ_E e viceversa, la cui (7.3) ne rappresenta l'equazione canonica che ne descrive la simmetria, e la (7.10) ne rappresenta la descrizione duale.

7.2 Densità di probabilità

In meccanica quantistica il modulo quadro di una funzione d'onda rappresenta la densità di probabilità della posizione. Esistono due possibilità:

- i)* lo stato del sistema è descritto da una funzione reale. Possiamo definire la densità di probabilità ρ_E a partire dalla seconda equazione delle (7.8)

$$\rho_E \equiv \psi_E^2 = \partial_{\phi_E} q; \quad (7.12)$$

- ii)* lo stato del sistema è descritto da una funzione complessa. In questo caso $\overline{\psi_E} \neq \psi_E$ e possiamo imporre

$$\psi_{E_D} \equiv \overline{\psi_E} \quad (7.13)$$

così da ottenere la densità di probabilità ρ'_E dalla (7.4)

$$\rho_E \equiv |\psi_E|^2 = -Wq + 2\mathcal{P}. \quad (7.14)$$

Si mostra quindi che la probabilità di trovare la particella in una determinata posizione è proporzionale alla posizione stessa più un termine correttivo additivo, costituito dal prepotenziale. Si noti che in questo caso W è un numero immaginario puro⁶.

⁶ $W = \psi \partial_q \overline{\psi} - \overline{\psi} \partial_q \psi = 2ic, c \in \mathbb{R}$

Capitolo 8

Conclusioni

Il Capitolo 7 è solo una delle più immediate applicazioni delle simmetrie di Legendre nel mondo della fisica. Nelle referenze [2, 9] questo modello è ampiamente utilizzato per ottenere nuove descrizioni di fenomeni già conosciuti, implementare nuove teorie o svilupparne meglio i contenuti. In particolare in [2, 8, 9] le simmetrie legendriane contribuiscono allo sviluppo di un'equazione di Hamilton-Jacobi quantistica che si presta a dare una descrizione alternativa dei fondamenti della meccanica quantistica a livello geometrico e ad una nuova interpretazione dei postulati della QM della scuola di Copenaghen. Altre applicazioni si riscontrano all'interno delle teorie supersimmetriche, all'implementazione del principio di equivalenza, allo studio del comportamentamento in analisi complessa degli stati di un sistema. Questo modello è utilizzato anche per proporre nuovi approcci a problemi cardine della fisica quali l'effetto tunnel o la quantizzazione dello spettro energetico, fino a proporre nuovi orizzonti quali la quantizzazione dello spazio, l'esistenza di una funzione di traiettoria quantistica.

Ognuna delle applicazioni delle simmetrie di Legendre consta dell'utilizzo di quelli che abbiamo chiamato Livello 0 e Livello Connesso 6 (o Livello Connesso Duale 0). I restanti livelli del ciclo canonico e il completo incastro di tutte le simmetrie sono stati sviluppati, studiati e verificati nel corso della stesura di questa tesi, di conseguenza non hanno referenze né applicazioni. Lo sviluppo di queste sarà uno dei propositi futuri. Proponiamo per concludere due alternative rappresentazioni del ciclo canonico strutturale in Figura 6.2, con le equazioni canoniche e le relazioni legendriane che implicano ogni Livello, che chiamiamo *ciclo di equazioni canoniche* e *ciclo canonico alla Legendre*.

$$\begin{array}{ccc}
\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{2}\{q, s\}\right) \begin{pmatrix} q\sqrt{p} \\ \sqrt{p} \end{pmatrix} = 0 & \bullet & \left(\partial_t^2 + \frac{1}{2}\{p, t\}\right) \begin{pmatrix} p(q)^{\frac{1}{2}} \\ (q)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = 0 \\
\left(\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1}{2}\{s, q\}\right) \begin{pmatrix} sp^{-\frac{1}{2}} \\ p^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = 0 & \leftarrow \bullet \rightarrow & \left(\partial_p^2 + \frac{1}{2}\{t, p\}\right) \begin{pmatrix} t\left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = 0 \\
\left(\partial_{-\frac{t}{p}}^2 + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{p}, -\frac{t}{p}\right\}\right) \begin{pmatrix} p^{-1}\sqrt{s} \\ \sqrt{s} \end{pmatrix} = 0 & \leftarrow \bullet \rightarrow & \left(\partial_{-\frac{s}{q}}^2 + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{q}, -\frac{s}{q}\right\}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{q}\left(t\right)^{\frac{1}{2}} \\ \left(t\right)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = 0 \\
\left(\partial_{\frac{1}{p}}^2 + \frac{1}{2}\left\{-\frac{t}{p}, \frac{1}{p}\right\}\right) \begin{pmatrix} -\frac{t}{p}\left(\frac{1}{s}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \left(\frac{1}{s}\right)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = 0 & \leftarrow \bullet \rightarrow & \left(\partial_{\frac{1}{q}}^2 + \frac{1}{2}\left\{-\frac{s}{q}, \frac{1}{q}\right\}\right) \begin{pmatrix} -\frac{s}{q}\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = 0 \\
\left(\partial_{-\frac{q}{s}}^2 + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s}, -\frac{q}{s}\right\}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{s}\left(-\frac{t}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \left(-\frac{t}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = 0 & \leftarrow \bullet \rightarrow & \left(\partial_{-\frac{p}{t}}^2 + \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{t}, -\frac{p}{t}\right\}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{t}\left(-\frac{s}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \left(-\frac{s}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = 0 \\
\left(\partial_{\frac{1}{s}}^2 + \frac{1}{2}\left\{-\frac{q}{s}, \frac{1}{s}\right\}\right) \begin{pmatrix} -\frac{q}{s}\left(-\frac{p}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \left(-\frac{p}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = 0 & \bullet & \left(\partial_{\frac{1}{t}}^2 + \frac{1}{2}\left\{-\frac{p}{t}, \frac{1}{t}\right\}\right) \begin{pmatrix} -\frac{p}{t}\left(-\frac{q}{s}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \left(-\frac{q}{s}\right)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = 0
\end{array}$$

Figura 8.1: Ciclo di equazioni canoniche.

$$\begin{array}{ccc}
 s = p\partial_p t - t & \bullet & t = q\partial_q (s) - (s) \\
 \\
 q = \frac{1}{p}\partial_{\frac{1}{p}}\left(-\frac{t}{p}\right) - \left(-\frac{t}{p}\right) & \leftarrow \bullet \rightarrow & p = \frac{1}{q}\partial_{\frac{1}{q}}\left(-\frac{s}{q}\right) - \left(-\frac{s}{q}\right) \\
 \\
 -\frac{t}{p} = s\partial_s\left(-\frac{t}{p}q\right) - (q) & \leftarrow \bullet \rightarrow & -\frac{s}{q} = t\partial_t(p) - (p) \\
 \\
 \frac{1}{p} = \frac{1}{s}\partial_{\frac{1}{s}}\left(-\frac{q}{s}\right) - \left(-\frac{q}{s}\right) & \leftarrow \bullet \rightarrow & \frac{1}{q} = \frac{1}{t}\partial_{\frac{1}{t}}\left(-\frac{p}{t}\right) - \left(-\frac{p}{t}\right) \\
 \\
 -\frac{q}{s} = -\frac{t}{p}\partial_{-\frac{t}{p}}\left(\frac{1}{p}\right) - \left(\frac{1}{p}\right) & \leftarrow \bullet \rightarrow & -\frac{p}{t} = -\frac{s}{q}\partial_{-\frac{s}{q}}\left(\frac{1}{q}\right) - \left(\frac{1}{q}\right) \\
 \\
 \frac{1}{s} = -\frac{p}{t}\partial_{-\frac{p}{t}}\left(\frac{1}{t}\right) - \left(\frac{1}{t}\right) & \bullet & \frac{1}{t} = -\frac{q}{s}\partial_{-\frac{q}{s}}\left(\frac{1}{s}\right) - \left(\frac{1}{s}\right)
 \end{array}$$

Figura 8.2: Ciclo canonico alla Legendre.

Bibliografia

- [1] M. Matone, “*Instantons and recursion relations in $N=2$ SUSY gauge theory,*” Phys. Lett. B **357** (1995) 342 [hep-th/9506102].
- [2] A. E. Faraggi and M. Matone, “*The Equivalence postulate of quantum mechanics,*” Int. J. Mod. Phys. A **15** (2000) 1869 [hep-th/9809127].
- [3] V.I. Arnold, *Metodi Matematici della Meccanica Classica*, Editori riuniti, Edizione Mir 1993.
- [4] Zia, R. K. P.; Redish, E. F.; McKay, S. R. (2009), “*Making sense of the Legendre transform*”. AJP 77 (7): 614. arXiv:0806.1147. doi:10.1119/1.3119512.
- [5] Lev D. Landau, Evgenij M. Lifshits, *Fisica teorica 1 - Meccanica*, Roma, Editori Riuniti Edizioni Mir, 1976, ISBN 88-6473-202-0.
- [6] Ovsienko, Valentin; Tabachnikov, Sergei (2009), “*What Is . . . the Schwarzian Derivative?*”, AMS Notices 56 (01): 34–36.
- [7] A. E. Faraggi and M. Matone, “*Duality of x and ψ and a statistical interpretation of space in quantum mechanics,*” Phys. Rev. Lett. **78** (1997) 163 [hep-th/9606063].
- [8] A. E. Faraggi and M. Matone, “*Equivalence principle, Planck length and quantum Hamilton-Jacobi equation,*” Phys. Lett. B **445** (1998) 77 [hep-th/9809125].
- [9] A. E. Faraggi and M. Matone, “*The Equivalence principle of quantum mechanics: Uniqueness theorem,*” Phys. Lett. B **437** (1998) 369 [hep-th/9711028].