

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Dinamica di background in modelli inflazionari a più campi

Relatore

Prof. Nicola Bartolo

Laureando

Jacopo Salvalaggio

Anno Accademico 2018/2019

Indice

Prefazione	5
1 Introduzione	6
1.1 Generalità sull'inflazione	6
1.2 Due semplici modelli inflazionari	8
2 Analisi della dinamica di background	14
2.1 Equazioni di background	14
2.2 Potenziale a campo singolo	17
2.3 Potenziale a doppio campo	19
3 Conclusioni	25

Prefazione

La teoria del Big Bang (“caldo”), introdotta per la prima volta da Georges Lemaître all’inizio degli anni ’30 e ripresa poi da George Gamow, è ad oggi una tra le più importanti e feconde nella storia della cosmologia. Essa include alcune tra le proprietà più importanti del nostro universo, come l’espansione e l’esistenza della radiazione cosmica di fondo.

Nel corso degli anni sono tuttavia emerse alcune incongruenze, come il problema dell’orizzonte e della piattezza dell’universo, che hanno spinto i cosmologi a cercare un modo di risolvere tali contraddizioni senza però rinunciare a tutti i successi ottenuti dal modello del Big Bang. È in questo contesto che si colloca la teoria dell’inflazione, proposta dal fisico Alan Guth nel 1981 ([1]), secondo cui il cosmo avrebbe attraversato una fase di espansione fortemente accelerata pochi attimi dopo la sua origine. Tale teoria non solo risolve i maggiori problemi riscontrati precedentemente, ma fornisce anche un modo elegante per giustificare la formazione delle strutture nell’universo. Per questo motivo, l’inflazione è un campo di ricerca ad oggi ancora molto attivo, dove vengono studiati modelli basati sull’evoluzione di uno o più campi scalari, chiamati appunto *inflatoni*. L’elaborato si articola in tre sezioni. In §1 verrà introdotto il concetto di inflazione, discutendone le proprietà, le equazioni che la governano e i motivi che hanno spinto a formulare tale teoria; successivamente, si analizzerà la dinamica di background, ovvero sotto l’assunzione di omogeneità ed isotropia dell’universo, di due semplici modelli inflazionari a campo singolo, nello specifico quello a potenziale quadratico e quello della *natural inflation*, cercando per quali valori iniziali dell’inflatone e della sua velocità questi possano dare origine all’inflazione. In §2 verranno ricavate le equazioni di background di un modello caratterizzato da una Lagrangiana più complessa, in cui compaiono due campi scalari ed un termine cinetico non canonico; a seguire, tali equazioni verranno applicate per la risoluzione di un modello con potenziale a campo singolo, detto *T-model*, e di uno con potenziale dipendente da entrambi i campi, analogamente a quanto fatto nella prima sezione. Infine, in §3 si procederà a riassumere il lavoro e si trarranno le conclusioni finali verificando che i modelli scelti siano in grado di portare ad un periodo sufficientemente lungo di inflazione.

1 Introduzione

1.1 Generalità sull'inflazione

La teoria dell'inflazione prevede che l'universo, in una sua fase primordiale molto prima dell'epoca dominata dalla radiazione, abbia attraversato una fase di espansione fortemente accelerata, che lo ha portato ad aumentare le sue dimensioni di almeno $e^{50} - e^{60}$ volte. Prima di poter parlare delle motivazioni che hanno spinto a formulare tale teoria, è opportuno introdurre le due equazioni di Friedmann (1922), che descrivono l'evoluzione del cosmo sotto l'assunzione che valga il principio cosmologico e che furono le prime a mostrare che la relatività generale di Einstein prevedeva un universo non statico, ma in espansione. Si ricavano a partire dalla metrica di Friedmann-Robertson-Walker (FRW), che caratterizza un universo omogeneo e isotropo, data da:

$$ds^2 = (cdt)^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + (\sin \theta)^2 d\phi^2) \right] \quad (1)$$

dove $a(t)$ è il fattore di scala, che esprime l'entità dell'espansione cosmologica e k è la curvatura dello spazio-tempo. La prima equazione di Friedmann fornisce un'espressione per il parametro di Hubble $H = \dot{a}/a$:

$$H^2 = \frac{1}{3 M_{\text{Pl}}^2} \rho - \frac{k}{a^2} \quad (2)$$

con ρ la densità di massa-energia dell'universo e $M_{\text{Pl}} = 1/\sqrt{8\pi G}$ la massa di Planck ridotta (si sono posti $\hbar, c = 1$). La seconda, detta anche "equazione dell'accelerazione", indica come varia \ddot{a} ed è per questo particolarmente importante per individuare quando avviene l'inflazione:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6 M_{\text{Pl}}^2} (\rho + 3p) \quad (3)$$

dove p è la pressione dei costituenti dell'universo. Si noti che le due equazioni non sono indipendenti, in quanto è possibile passare da una all'altra usando la relazione che governa l'evoluzione di ρ :

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad (4)$$

La condizione di forte accelerazione che definisce l'inflazione si traduce quindi, in termini di parametri cosmologici, in $\ddot{a} \gg 0$. Dall'equazione (3) si nota che per avere accelerazione positiva è necessario che $\rho < -3p$, condizione mai verificata in un universo dominato da particelle non relativistiche o dalla radiazione. Per poter spiegare la storia dell'universo primordiale si rende quindi necessaria la presenza di altri tipi di materia. Nel panorama odierno l'inflazione è studiata basandosi sull'ipotesi che questa sia controllata dall'evoluzione di uno o più campi scalari, chiamati *inflaton*, che forniscono un punto di unione tra cosmologia e fisica delle particelle. L'idea di base è che, trovando un'opportuna Lagrangiana per il sistema, la densità e la pressione dei campi possano soddisfare la condizione vista poco sopra, permettendo una sufficiente espansione prima che questi decadano in altre particelle. Prima di analizzare un modello specifico, verrà spiegato brevemente in che modo l'inflazione permetta di risolvere i principali problemi del Big Bang, cioè il problema dell'orizzonte e della *flatness*, a cui si è aggiunto anche quello dei monopoli magnetici, e come permetta di giustificare la nascita delle strutture cosmiche.

Problema dell'orizzonte cosmologico. Osservando la radiazione cosmica di fondo (CMB), si nota che questa risulta straordinariamente omogenea: la temperatura appare infatti approssimativamente costante in qualunque direzione la si misuri, con una variabilità nell'ordine di una parte su 10^5 . In un modello con $\ddot{a} < 0$, la distanza comovente percorribile da un raggio di luce dall'origine dell'universo al momento in cui è stata emessa la CMB è di molto inferiore rispetto a quella che può essere percorsa da tale istante fino ai giorni nostri. Ciò implica che regioni della CMB distanti tra loro più di circa due

gradi dovrebbero essere separate causalmente, per il semplice fatto che un segnale in moto a velocità c non avrebbe potuto percorrere una tale distanza prima dell'emissione della radiazione. In questo modello è quindi impossibile dare una spiegazione del fatto che parti così distanti dell'orizzonte cosmico siano all'equilibrio termico, in quanto ci si aspetterebbe un insieme di molte piccole regioni, ciascuna con una temperatura diversa, a priori, da quella delle altre. Nell'universo inflazionario la situazione si inverte: a causa della rapida ed ingente espansione, l'equilibrio tra le distanze percorribili prima e dopo l'emissione della radiazione di fondo a microonde si inverte, permettendo quindi che porzioni di universo collegate causalmente, e quindi all'equilibrio termico, si espandessero tanto da poter contenere quello che oggi è l'universo osservabile.

Problema della piattezza. Riprendendo le equazioni di Friedmann, la (2) può essere scritta in termini del parametro ρ_c , detto *densità critica*, definito come la densità che dovrebbe avere l'universo perchè la sua curvatura spaziale sia nulla, pari a $3(HM_{\text{Pl}})^2$. Ponendo $\Omega \equiv \rho/\rho_c$ si ottiene:

$$\Omega - 1 = \frac{k}{\dot{a}^2} \quad (5)$$

da cui si può vedere che, in un universo dove $\ddot{a} < 0$, $|\Omega - 1|$ è destinato ad aumentare nel tempo. Recenti dati sperimentali ([5]) mostrano che ad oggi il valore di Ω è molto prossimo all'unità, e quindi l'universo è molto vicino all'essere piatto. Senza ipotizzare l'inflazione, questo comporterebbe che il valore iniziale di $|\Omega - 1|$ fosse estremamente vicino a 0, una coincidenza decisamente improbabile. Tuttavia, nel modello inflazionario, in presenza una fase in cui $\ddot{a} \gg 0$, è ammessa un'ampia gamma di valori iniziali per Ω , che può essere poi portato dalla forte accelerazione in un intorno di 1 abbastanza stretto da essere compatibile con le stime ricavate dalle osservazioni.

Problema dei monopoli magnetici. Le moderne teorie della fisica prevedono l'esistenza, alle scale di energia corrispondenti agli istanti iniziali dell'universo, di oggetti esotici non ancora mai osservati sperimentalmente, come i monopoli magnetici. Mentre in un modello con $\ddot{a} < 0$ ci si aspetterebbe che la loro abbondanza al giorno d'oggi non sia trascurabile, dal momento che la loro concentrazione nell'universo dovrebbe evolvere come quella della materia non relativistica, un approccio inflazionario permette di spiegare la loro scarsità come effetto della forte espansione primordiale dell'universo, che ne ha ridotto la densità di circa $e^{60} \approx 10^{26}$ volte; al termine dell'espansione, a causa della diminuzione della temperatura del cosmo ($T \propto 1/a$), la scala di energia è risultata troppo bassa per la creazione di nuovi monopoli magnetici, cosicchè il decadimento dell'inflatone ha potuto produrre solamente particelle "ordinarie".

Origine delle strutture cosmiche. Così come l'inflazione permette di spiegare l'omogeneità globale della CMB, essa permette anche di dare significato alle sue anisotropie, che si osservano a scale superiori rispetto a quelle entro le quali ci si aspetterebbe che valesse la causalità. La soluzione a tale problema è la stessa fornita per risolvere quello dell'orizzonte. L'inflazione fornisce inoltre una spiegazione per l'origine di tali anisotropie, viste come prodotto di oscillazioni quantistiche che, una volta generate casualmente sono state espanse a scale cosmologiche, trascinate dalla forte accelerazione dell'universo. Queste disomogeneità hanno permesso poi la formazione delle strutture che popolano il cosmo tramite collasso gravitazionale attorno ai centri di densità maggiore. Indubbiamente, l'ambito di ricerca più attivo oggi riguardante l'inflazione è lo studio delle perturbazioni generate da diversi potenziali per gli inflatoni: per ogni modello si possono ricavare stime teoriche confrontabili direttamente con i valori sperimentali relativi alla distribuzione delle anisotropie nella CMB a varie scale.

1.2 Due semplici modelli inflazionari

A titolo di esempio, prima di dedicarsi al problema dell'analisi della dinamica di background in modelli a due inflatoni, in questa sezione verranno trattati due semplici modelli a campo singolo, che differiscono per la scelta del potenziale. La Lagrangiana utilizzata è la più semplice possibile in un modello con potenziale V in cui l'inflatone ϕ interagisce con il campo gravitazionale (da ora in avanti si porrà $M_{\text{Pl}} = 1$):

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2} - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right] \quad (6)$$

Dove g è il determinante della metrica e R è la curvatura scalare. Il campo scalare compare naturalmente nella Lagrangiana quando si trattano modelli di gravità modificata, necessari per tenere conto delle deviazioni dalla relatività generale attese alle scale energetiche a cui avviene l'inflazione. Il campo può essere scritto come la somma di un contributo di background, omogeneo e quindi indipendente dalle coordinate spaziali, e un contributo perturbativo:

$$\phi(t, \mathbf{r}) = \phi_b(t) + \delta\phi(t, \mathbf{r}) \quad (7)$$

Dal momento che in questa trattazione ci si focalizzerà esclusivamente sulla dinamica di background, $\delta\phi$ verrà trascurato e da ora in poi $\phi \equiv \phi_b$. Utilizzando la metrica FRW l'espressione per la densità di Lagrangiana diventa quindi

$$\mathcal{L} = a^3(t) \left[\frac{R}{2} - \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right] \quad (8)$$

da cui, calcolando il tensore energia-impulso, si ricavano la densità e la pressione:

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (9)$$

$$p = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (10)$$

Utilizzando la (4) si ottiene quindi l'equazione che governa l'evoluzione del campo, data da

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \quad (11)$$

dove l'apice indica la derivata rispetto a ϕ .

L'inflazione può avvenire solamente se è soddisfatta la condizione $\ddot{a} \gg 0$. Scrivendo

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2 + \dot{H} \quad (12)$$

e definendo $\varepsilon \equiv -\dot{H}/H^2$, tale condizione corrisponde a richiedere che

$$\varepsilon \ll 1. \quad (13)$$

ε è quello che viene chiamato un parametro di *slow-roll*, in quanto come si vedrà a breve fornisce un'indicazione di quanto lentamente si stiano muovendo i campi. La fine dell'inflazione coincide con l'istante in cui ε supera il valore di 1, rendendo negativa l'accelerazione di a . Nel nostro modello, senza considerare il termine dato dalla curvatura spaziale (che per quanto detto in §1.1 diventa trascurabile quando si innesca l'inflazione) il parametro è dato da

$$\varepsilon = 3 \frac{\dot{\phi}^2}{\dot{\phi}^2 + 2V} \quad (14)$$

ed è molto piccolo quando $V \gg \frac{1}{2} \dot{\phi}^2$, cioè quando l'energia potenziale domina su quella cinetica. Questo è un fatto del tutto generale nelle teorie di campi inflazionari che comparirà anche in seguito. Si noti

che, finchè $V > 0$, il parametro di slow-roll non può mai superare il valore di 3 e ciò avrà un'importanza particolare nell'analisi che verrà svolta in §2.1. Oltre ad ε , viene spesso usato un altro parametro di slow-roll, indicato con η e definito come segue:

$$\eta \equiv -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} = 3\frac{\ddot{\phi}}{V'}. \quad (15)$$

Esso esprime quanto lentamente variano le velocità. Si noti che l'unico criterio che determina direttamente se sta avvenendo l'inflazione è che ε sia minore di 1. Il valore di η ha invece un effetto indiretto sul processo: se diviene troppo grande, le velocità inizieranno ad aumentare e con esse anche ε . Si può quindi dire che un ridotto valore di ε permette che inizi l'inflazione, ma è necessario un $|\eta| \ll 1$ perchè questa continui abbastanza a lungo.

Nel caso siano soddisfatte le condizioni di slow-roll, cioè nel caso in cui le velocità dei campi siano molto ridotte e quindi $\ddot{\phi}$ e $\dot{\phi}^2$ siano trascurabili, si possono semplificare le equazioni della dinamica:

$$H^2 \approx \frac{V}{3} \quad (16)$$

$$3H\dot{\phi} \approx -V' \quad (17)$$

$$\varepsilon \approx \frac{1}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \quad (18)$$

$$\eta \approx \frac{V''}{V} \quad (19)$$

In particolare la (18) fornisce un modo semplice per individuare il valore di ϕ per cui termina l'inflazione. A rigore, le equazioni qui sopra valgono solamente per $\varepsilon \approx 0$ e quindi non potrebbero essere utilizzate per trovare i valori del campo per cui $\varepsilon > 1$; tuttavia, dal momento che in genere le velocità aumentano molto rapidamente al termine dell'inflazione, l'istante in cui ε cessa di essere molto vicina a zero coincide sostanzialmente con quello in cui il parametro di slow roll supera 1. Inoltre, non è in genere possibile abbassare l'ordine di un'equazione differenziale come fatto in (17) in quanto si perderebbe una condizione iniziale del problema; tuttavia, le soluzioni di questo sistema hanno un comportamento da attrattori ([6]), cioè dipendono effettivamente da un numero di condizioni iniziali minore rispetto a quello atteso dal grado dell'equazione, giustificando quindi la approssimazione effettuata.

La condizione fondamentale che devono soddisfare i modelli di inflazione è quella di portare ad una sufficiente espansione dell'universo. Questa è espressa solitamente in *e-folds* N , definiti come

$$N(t) = \log \left(\frac{a(t)}{a(0)} \right) \quad (20)$$

dove $a(0)$ è il fattore di scala all'inizio dell'inflazione, che sarà posto convenzionalmente pari a 1. Si ottiene quindi $N(t) = \log a(t)$ e $dN = Hdt$. Per cui il numero di e-folds totali N_{tot} è dato da

$$N_{\text{tot}} = \int dN = \int_0^{t_{\text{end}}} H dt = \int_{\phi(0)}^{\phi_{\text{end}}} \frac{H(\phi)}{\dot{\phi}} d\phi \quad (21)$$

dove un "end" al pedice indica che il valore è calcolato al termine dell'inflazione. Lo scopo principale dell'analisi della dinamica di background di un modello è quindi di verificare che questo possa portare ad un N_{tot} pari almeno al valore di $N_* \approx 50 - 60$. Usando le approssimazioni di slow-roll, in particolare (17) e (16), si ottiene la pratica formula

$$N_{\text{tot}} \approx - \int_{\phi(0)}^{\phi_{\text{end}}} \frac{V}{V'} d\phi. \quad (22)$$

Vediamo ora più nel dettaglio i modelli di campo singolo massivo e di *natural inflation*. Quest'ultima tornerà utile nell'analisi di un caso particolare nel modello a due campi.

Campo singolo a potenziale quadratico

Il potenziale utilizzato in questo modello è armonico:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (23)$$

Dove m è un parametro solitamente identificato con la “massa” del campo. Tale potenziale quadratico è forse il più semplice possibile in questo ambito ed è in genere associato, insieme al potenziale quartico $\propto \phi^4$, ai modelli di inflazione *caotica* ([7], [8]). In tali modelli si assume che le condizioni iniziali dell’inflazione (cioè il valore di $\phi(0)$) siano distribuite in maniera casuale nell’universo e che quindi l’inflazione evolva diversamente in diverse regioni. Questa premessa permette quindi al campo di assumere un valore iniziale arbitrariamente elevato (dal momento che ogni valore è equiprobabile), condizione che, come si vedrà in seguito, è importante per riuscire ad ottenere una sufficiente inflazione. Il calcolo di ε è immediato e ci indica che l’inflazione avviene fintanto che il campo ϕ è maggiore, in modulo, di $\sqrt{2}$ ^(a). Per semplicità, restringiamoci ora al caso $\phi > 0$. Il numero totale di e-folds è dato da

$$N_{\text{tot}} = - \int_{\phi(0)}^{\sqrt{2}} \frac{1}{2} \phi d\phi = \frac{\phi(0)^2}{4} - \frac{1}{2} \quad (24)$$

ed è indipendente dalla massa del campo. Il numero totale di e-folds in funzione della posizione iniziale è illustrato in figura 1. Come si può notare, per $\phi(0) \approx 15$ il modello permette di raggiungere i 50-60 e-folds totali attesi dall’inflazione.

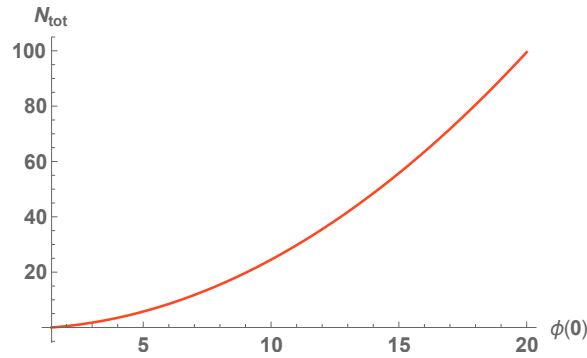


Figura 1: N_{tot} in funzione di $\phi(0)$

Ovviamente l’approccio di slow-roll è inefficace se si è interessati agli effetti della velocità iniziale del campo sul sistema. È quindi necessaria un’analisi numerica, anche se è possibile fornire una stima qualitativa di quello che sarà il risultato. Ci si aspetta infatti che se il campo presenta una velocità di partenza positiva, verrà inizialmente spinto verso valori più grandi portando ad un aumento di N_{tot} e viceversa. Per svolgere il calcolo numerico, le equazioni sono state riscritte utilizzando N anziché t come variabile temporale^(b). In figura 2 è riportato in numero totale di e-folds in funzione della velocità iniziale del campo $\phi'(0) = \frac{d\phi}{dN}(0)$ per tre diversi valori di $\phi(0)$; il risultato ottenuto conferma le previsioni ipotizzate in precedenza.

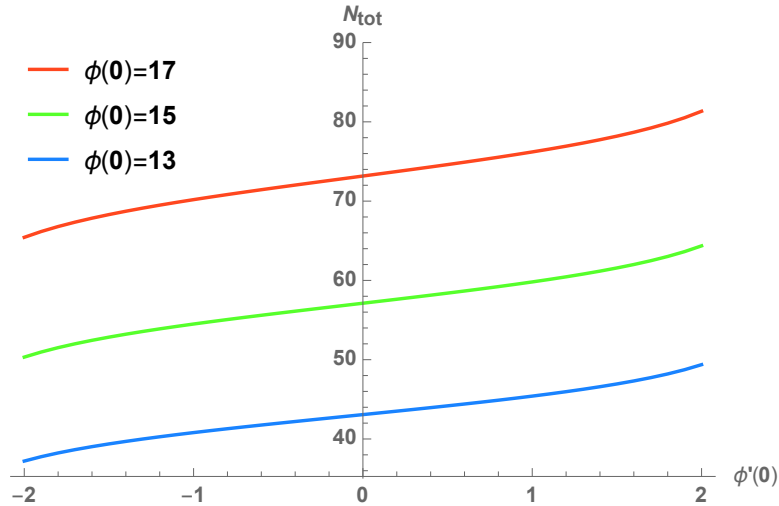
Natural inflation

Il potenziale utilizzato in questo modello è di tipo cosinusoidale:

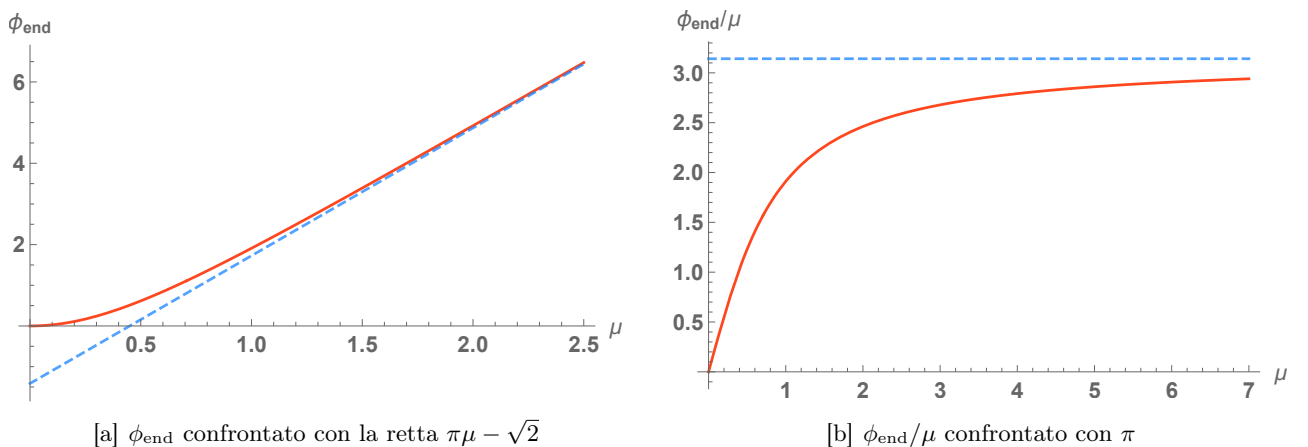
$$V(\phi) = \Lambda^4 \left[1 + \cos \left(\frac{\phi}{\mu} \right) \right] \quad (25)$$

^(a)Il risultato è dato in unità di M_{Pl} in quanto prima era stato posto $M_{\text{Pl}} = 1$. Volendo reintrodurre la massa di Planck ridotta, la condizione diventa $\phi > \sqrt{2}M_{\text{Pl}}$

^(b)Questo approccio verrà illustrato nel dettaglio in §2.1.

Figura 2: N_{tot} in funzione di $\phi'(0)$

dove Λ è una costante che indica la scala di energie a cui avviene l'inflazione e μ determina la curvatura del potenziale. Come si vedrà in seguito, la dinamica è influenzata fortemente dal valore di quest'ultimo parametro ma non dipende da Λ . Questo modello nasce con l'intento di rendere la teoria dell'inflazione più consistente con la fisica delle particelle ([9], [10]), assegnando agli (pseudo) bosoni di Nambu-Goldstone il ruolo di inflatoni. I bosoni di Nambu-Goldston sono ben noti nell'ambito della fisica particellare e compaiono in seguito ad una rottura spontanea di una simmetria globale. Per questo motivo, ci si aspetta la loro esistenza negli istanti successivi al Big Bang, durante i quali tali rotture della simmetria, come ad esempio la separazione delle forze fondamentali a partire da un'unica forza, sono previste dalle moderne teorie come la GUT o la teoria delle stringhe. D'ora in avanti, per semplicità, ci porremo nella regione $0 \leq \phi/\mu \leq \pi$ ^(c). Calcolando ε si trova che il valore del campo per cui termina l'inflazione dipende in maniera crescente da μ e tende a $\pi\mu - \sqrt{2}$ per $\mu \rightarrow \infty$; cioè per μ elevati il modello ricorda quello visto in precedenza, in cui l'inflazione arrivava al termine quando il campo era distante $\sqrt{2}$ dal minimo del potenziale. In figura 3 è rappresentato il valore finale del campo in funzione del parametro di curvatura, confrontato con il suo valore asintotico.

[a] ϕ_{end} confrontato con la retta $\pi\mu - \sqrt{2}$ [b] ϕ_{end}/μ confrontato con π Figura 3: ϕ_{end} in funzione di μ

Ci si aspetta che tanto più alto è il valore di μ tanto maggiore deve essere N_{tot} in quanto il potenziale

^(c)Avendo posto $M_{\text{Pl}} = 1$, sia μ che ϕ sono espressi in unità della massa di Planck ridotta. È quindi utile utilizzare il rapporto ϕ/μ , che risulta essere “invariante di scala”.

si appiattisce e contemporaneamente il valore massimo del campo aumenta. Integrando, si trova che l'espressione per il numero totale di e-folds è data da

$$N_{\text{tot}} = 2\mu^2 \log \left(\frac{\sin \left(\frac{\phi_{\text{end}}}{2\mu} \right)}{\sin \left(\frac{\phi(0)}{2\mu} \right)} \right) \quad (26)$$

e quindi, per ogni $\mu > 0$, si può trovare un valore, per quanto piccolo, di $\phi(0) > 0$ che permetta di ottenere sufficiente inflazione. La presenza del fattore μ^2 in (26) garantisce che, a parità di $\phi(0)/\mu$, il numero di e-folds ottenibili cresca considerevolmente all'aumentare del parametro di curvatura, effetto non imputabile esclusivamente al conseguente aumento di ϕ_{end} . La figura 4 illustra come evolve il valore iniziale del campo ϕ_*/μ necessario per ottenere un $N_{\text{tot}} = N_*$; per μ elevati tale valore tende a π .

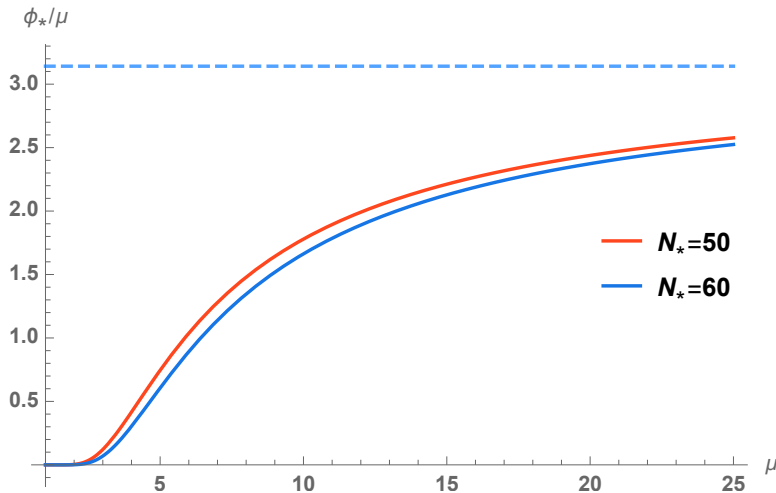
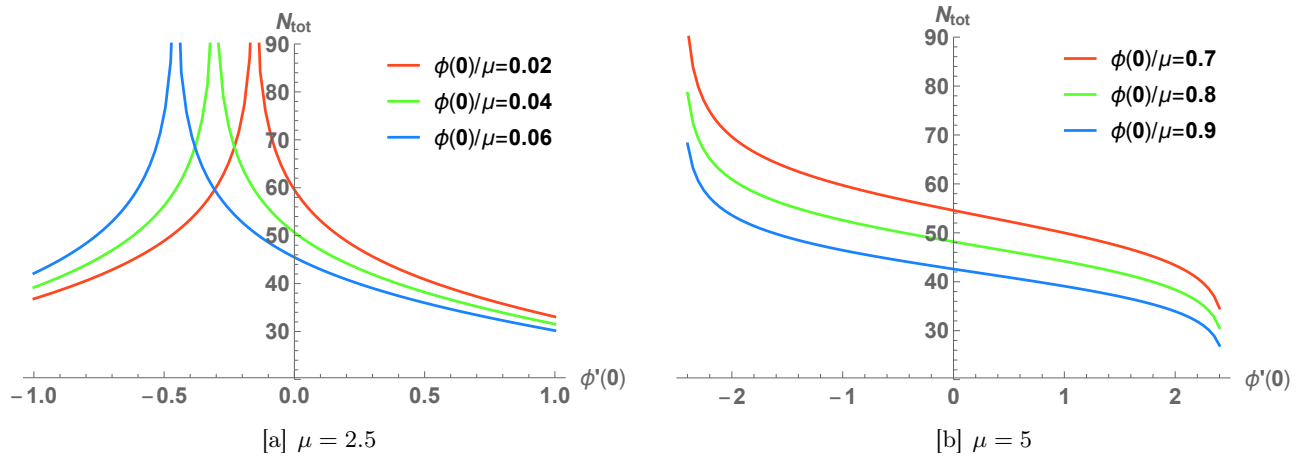


Figura 4: ϕ_*/μ in funzione di μ

Come si può vedere dal grafico, è possibile individuare due diversi regimi inflazionari a seconda del valore di ϕ_*/μ : il primo, detto di *small field*, si ottiene per $\mu \lesssim 2$ ed è caratterizzato da un $\phi_*/\mu \ll 1$, molto vicino a zero; il secondo, detto invece di *large field*, si ottiene per $\mu \gtrsim 2$ e corrisponde a valori di ϕ_*/μ più grandi. Il modello concorda con i dati sperimentali Planck per $\mu \gtrsim 5$ ([11]), cioè in regime di large field.

Come per il modello precedente, è necessaria un'analisi numerica per quantificare il contributo di un'eventuale velocità iniziale del campo. Dal momento che l'inflazione è tanto più prolungata quanto più $\phi(0)$ è prossimo a 0, una piccola velocità iniziale negativa permette di avvicinare il campo all'origine e può far crescere il numero di e-folds finali; una velocità positiva spinge il campo verso ϕ_{end} , producendo l'effetto opposto. D'altra parte, una velocità di partenza negativa troppo intensa fa sì che il campo scavalchi il massimo del potenziale, trovandosi quindi nella regione $\phi < 0$ con $\dot{\phi} < 0$, situazione equivalente per simmetria all'avere una velocità positiva nella regione in cui il campo è positivo, riducendo quindi il numero di e-folds totali. In figura 5 è riportato il valore di N_{tot} al variare di $\phi(0)$ e $\phi'(0)$ per due valori di μ . Si nota che l'effetto della velocità iniziale è meno drastico nel grafico 5[b]: ciò è naturale in quanto, a parità di N_{tot} , aumentando μ aumenta anche la dimensione di $\phi(0)$ e in proporzione $\phi'(0)$ risulta minore. In linea di principio si potrebbe quindi pensare di prendere un valore di $\phi'(0)$ arbitrariamente grande in maniera tale da poter riottenere il picco visto in figura 5[a] anche nel secondo grafico; tuttavia, il valore di ϕ' è vincolato ad essere minore di $\sqrt{6}$ in modulo^(d). Quindi, la diminuzione di N_{tot} in seguito ad una spinta iniziale negativa troppo intensa è un fenomeno osservabile solamente per potenziali a basso μ ; per μ maggiori la velocità iniziale non sarà mai abbastanza alta da permettere al campo di superare la barriera di potenziale.

^(d)Ciò è dovuto al fatto, spiegato in dettaglio in §2.1, che $\frac{1}{2}\phi'^2 = \varepsilon$ deve essere sempre inferiore a 3.

Figura 5: N_{tot} in funzione di $\phi'(0)$

2 Analisi della dinamica di background

2.1 Equazioni di background

Se nella sezione precedente sono state considerate due Lagrangiane per modelli di inflazione standard a campo singolo, ora passeremo ad una teoria più complessa, che vede la presenza di due campi e di un termine cinetico non canonico. In particolare, lavoreremo nell'ambito di quelli che vengono chiamati α -attractors, originati in teorie di supergravità (per esempio [12], ulteriori referenze in [13]). Questi modelli devono il loro nome al parametro α , che ha origine fisica ed è ricavato a partire dalla curvatura della varietà a cui appartengono gli inflatoni. Esso ha particolare importanza in quanto il suo variare influenza, in maniera determinante, il comportamento perturbativo del modello. Tale aspetto non verrà trattato nell'elaborato dal momento che esula dall'analisi della dinamica di background, tuttavia risulta molto rilevante in quanto è confrontabile direttamente con i dati sperimentali, rendendo possibile ricavare quali siano i valori di α favoriti dalle osservazioni: i dati Planck determinano un α compreso tra 10^{-2} e 10^4 ([14]). Il punto di partenza per la costruzione della Lagrangiana è un modello a tre campi caratterizzato da simmetria conforme e dalla simmetria $SO(2, 1)$ ([13], [15], [16]). Il terzo campo, chiamato *conformone*, viene eliminato fissando la gauge. In seguito a questo passaggio, la Lagrangiana studiata risulta essere (come fatto in precedenza, da ora in avanti si porrà $M_{\text{Pl}} = 1$)

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2} - \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} f(\varphi) \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - V(\varphi, \theta) \right] \quad (27)$$

dove la funzione $f = 6 \sinh^2(\varphi/\sqrt{6\alpha})$, originata nel momento in cui viene fissata la gauge, è la causa della non canonicità citata in precedenza e, come si vedrà in seguito, riveste un ruolo chiave nel determinare l'evoluzione del moto. I campi φ e θ , che saranno indicati per ora con $\phi^{i=1,2}$, assumono rispettivamente il ruolo di variabile radiale e angolare. Per questo motivo, si considererà sempre $\varphi \geq 0$. Come fatto in §1.2, verrà analizzata solo la componente di background dei due campi: $\phi^i \equiv \phi_b^i(t)$. Per semplificare la notazione, è opportuno introdurre la metrica nello spazio dei campi G_{ij} , data da

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f(\varphi) \end{pmatrix}, \quad (28)$$

che è invertibile e definita positiva per $\varphi \neq 0$. Utilizzando la metrica di FRW, la densità di Lagrangiana appare scritta come:

$$\mathcal{L} = a^3(t) \left[\frac{R}{2} - \frac{1}{2} G_{ij} \dot{\phi}^i \dot{\phi}^j - V(\phi^i) \right] \quad (29)$$

ed assume quindi una forma molto simile a quella vista in precedenza. Calcolando il tensore energia-impulso è possibile ricavare le espressioni per densità e pressione:

$$\rho = \frac{1}{2} G_{ij} \dot{\phi}^i \dot{\phi}^j + V(\phi^i) \quad (30)$$

$$p = \frac{1}{2} G_{ij} \dot{\phi}^i \dot{\phi}^j - V(\phi^i) \quad (31)$$

Il punto di partenza per ricavare le equazioni del moto è la (4), che governa l'andamento di ρ :

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} G_{ij} \dot{\phi}^i \dot{\phi}^j + V(\phi^i) \right) + 3H G_{ij} \dot{\phi}^i \dot{\phi}^j = 0 \quad (32)$$

da cui si ottiene, sviluppando esplicitamente la derivata rispetto al tempo

$$G_{ij} \dot{\phi}^i \nabla_t \dot{\phi}^j + \dot{\phi}^i \partial_i V + 3H G_{ij} \dot{\phi}^i \dot{\phi}^j = 0 \quad (33)$$

dove ∇_t rappresenta la derivata covariante rispetto al tempo e ∂_i la derivazione rispetto al campo i -esimo. Sviluppando completamente le derivate e semplificando, si ottengono le equazioni del moto:

$$\ddot{\phi}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{\phi}^j \dot{\phi}^k + 3H\dot{\phi}^i + G^{ij}\partial_j V = 0 \quad (34)$$

dove Γ_{jk}^i sono i simboli di Christoffel della connessione definita nello spazio dei campi. Questi risultano tutti nulli tranne $\Gamma_{11}^0 = -\frac{1}{2}f'$ e $\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = \frac{1}{2}f'/f$, dove $f' \equiv df/d\varphi$. Le equazioni del moto risultano quindi:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} - \frac{1}{2}f'\dot{\theta}^2 + \partial_\varphi V = 0 \quad (35)$$

$$\ddot{\theta} + 3H\dot{\theta} + \frac{f'}{f}\dot{\theta}\dot{\varphi} + \frac{\partial_\theta V}{f} = 0 \quad (36)$$

L'espressione per il parametro di slow-roll è

$$\varepsilon = 3 \frac{G_{ij}\dot{\phi}^i \dot{\phi}^j}{G_{ij}\dot{\phi}^i \dot{\phi}^j + 2V} \quad (37)$$

ed ha una forma molto simile a quella vista nell'equazione (14). Il parametro è molto piccolo quando $V \gg \frac{1}{2}G_{ij}\dot{\phi}^i \dot{\phi}^j$, cioè, come già visto nello studio di modelli più semplici, quando l'energia potenziale domina sull'energia cinetica. Anche in questo caso, prendendo potenziali positivi, dal momento che il termine cinetico è sempre maggiore o uguale a zero, ε non può superare 3. In regime di slow-roll, le equazioni della dinamica diventano:

$$3H\dot{\varphi} + \partial_\varphi V \approx 0 \quad (38)$$

$$3H\dot{\theta} + \frac{\partial_\theta V}{f} \approx 0 \quad (39)$$

Per studiare le equazioni di background è opportuno effettuare un cambio di parametrizzazione, passando dal tempo al numero di e-folds N , per il quale vale $dN = H dt$. Indicando con l'apice la derivazione di un campo rispetto ad N (mantenendo però la convenzione che $f' \equiv df/d\varphi$), si ottengono le sostituzioni $\dot{\varphi} \rightarrow H\varphi'$ e $\dot{\theta} \rightarrow H^2\theta'' + \dot{H}\theta' = H^2(\theta'' - \varepsilon\theta')$. In questo nuovo sistema di coordinate si trova che il parametro di slow-roll è dato da:

$$\varepsilon = \frac{G_{ij}\dot{\phi}^i \dot{\phi}^j}{2H^2} = \frac{H^2 G_{ij}\phi'^i \phi'^j}{2H^2} = \frac{1}{2}\varphi'^2 + \frac{f}{2}\theta'^2 \quad (40)$$

e quindi la condizione per cui l'inflazione avvenga è che i due campi varino molto lentamente rispetto ad N . La funzione f dovuta al termine cinetico non canonico svolge un ruolo da protagonista nel determinare la fine dell'inflazione, in quanto per valori elevati di φ essa diverge esponenzialmente, restringendo effettivamente i possibili valori assumibili da θ' . Le equazioni della dinamica complete in funzione di N sono:

$$H^2 = \frac{V}{3 - \varepsilon} \quad (41)$$

$$\varphi'' - \frac{1}{2}f\theta'^2 + (3 - \varepsilon) \left(\varphi' + \frac{\partial_\varphi V}{V} \right) = 0 \quad (42)$$

$$\theta'' + \frac{f'}{f}\theta'\varphi' + (3 - \varepsilon) \left(\theta' + \frac{1}{f} \frac{\partial_\theta V}{V} \right) = 0 \quad (43)$$

Dalla (41) si riottiene la condizione, già ricavata studiando le equazioni (14) e (37), che ε deve essere inferiore a 3. Tale restrizione è necessaria affinché H sia ben definito ed implica una limitazione diretta

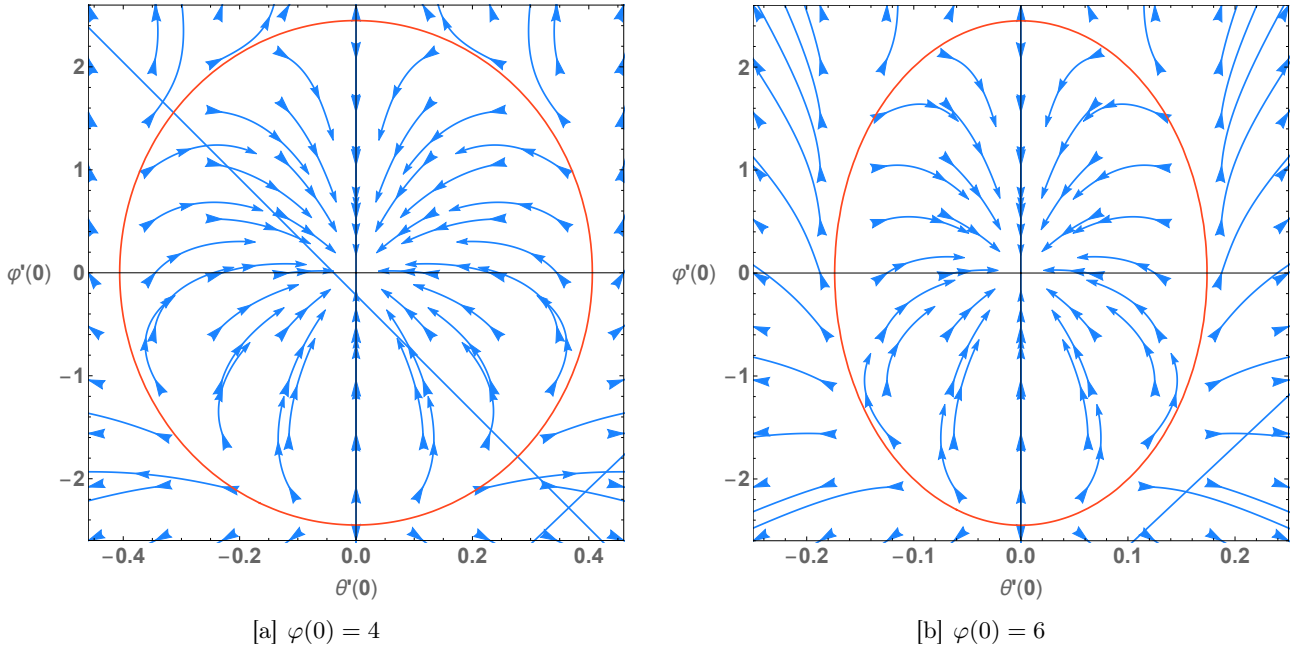


Figura 6: Andamento delle velocità

per la velocità di φ , che in modulo non potrà mai superare $\sqrt{6}$, ma non per θ' , i cui limiti dipendono necessariamente anche dal valore assunto da φ .

Prima di scegliere un particolare potenziale è opportuno verificare quali condizioni iniziali per le velocità dei due campi siano verosimilmente accettabili, cioè vedere in quali casi, supponendo che φ' e θ' siano sufficientemente grandi da poter trascurare il termine di potenziale, le velocità tenderanno ad essere attratte verso 0 (garantendo quindi la condizione di slow-roll) e in quali invece queste tenderanno all'infinito. Le equazioni semplificate sono date da:

$$\varphi'' = \frac{1}{2}f\theta'^2 - (3 - \varepsilon)\varphi' \quad (44)$$

$$\theta'' = - \left(\frac{f'}{f}\varphi' + 3 - \varepsilon \right) \theta' \quad (45)$$

Analizzando l'equazione (44), si vede come la dinamica di φ sia condizionata da due fattori: un termine viscoso $-(3 - \varepsilon)\varphi'$ che fa diminuire in modulo la velocità (in quanto per la condizione vista in precedenza ε deve essere minore di 3) e un termine dipendente da θ' che fa invece crescere φ' , in quanto la funzione f è sempre positiva. Se la velocità di θ è sufficientemente elevata, il contributo dominante sarà il secondo; viceversa, se θ' è ridotta, si entrerà in un regime smorzato che porterà la velocità di φ ad annullarsi. Dall'equazione (45) si vede che quest'ultimo scenario è l'unico a potersi verificare, dal momento che il fattore f'/f è positivo per $\varphi > 0$: infatti anche partendo da grandi valori di $|\theta'|$ si otterrebbe un'elevata velocità $\varphi' > 0$, che ha un'azione smorzante sulla dinamica di θ tramite il termine $-(f'/f)\varphi'\theta'$. Il grafico illustrato in figura 6 mostra l'evoluzione delle velocità dei campi al variare del loro valore iniziale per due valori di $\varphi(0)$, posto $\alpha = 1$. In accordo con quanto detto poco sopra, tutti i punti per cui valga la condizione $\varepsilon < 3$ (delimitati dalla curva rossa in figura) fanno parte del bacino di attrazione dell'origine, mentre per gli altri valori di $(\theta'(0), \varphi'(0))$ le velocità tendono a divergere all'infinito. Si può quindi dire che la dinamica dipende essenzialmente dal termine cinetico non canonico modulato dalla funzione f , che determina l'intervallo massimo di velocità iniziali di θ , e che se le velocità sono abbastanza elevate da poter trascurare i potenziali in genere l'inflazione non potrà verificarsi. Il valore di α influenza il valore "efficace" di φ , in quanto questo compare sempre nel rapporto $\varphi/\sqrt{6\alpha}$ (a maggiori α corrispondono minori valori effettivi del campo e viceversa), e l'espressione di f' , che

a causa della derivazione presenta un fattore $\propto \alpha^{-1/2}$. A parità di $\varphi/\sqrt{6\alpha}$, la dinamica risulta essere molto simile.

2.2 Potenziale a campo singolo

In questa sezione verrà trattato concretamente il problema dell'evoluzione di background in un caso semplice, descritto da un potenziale dipendente unicamente da φ . Tale potenziale, tratto da una classe di modelli detti *T-models* ([13], [16]), è dato da

$$V(\varphi) = \tanh^2\left(\frac{\varphi}{\sqrt{6\alpha}}\right) \quad (46)$$

ed è illustrato in figura 7 per tre valori del parametro α . Come ci si aspetta da un potenziale inflazionario, presenta un ampio plateau per valori sufficientemente elevati di φ che permette di ottenere lo slow-roll. La complicata espressione del potenziale (che ricorda quella della funzione f) emerge naturalmente quando viene utilizzata la Lagrangiana (27) ed è dovuta al *gauge-fixing* citato in precedenza.

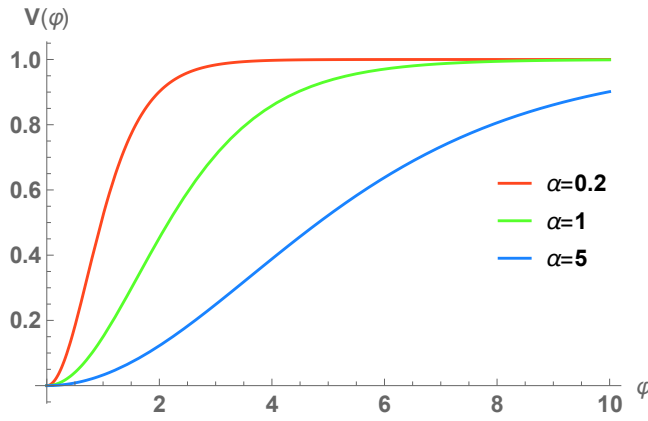


Figura 7: Potenziale nel T-Model al variare di α

Dal momento che $\partial_\theta V = 0$, l'equazione per l'accelerazione di θ è la (45):

$$\theta'' = -\theta' T(\varphi, \varphi', \theta') \quad (47)$$

dove è stata definita la funzione

$$T = 3 - \varepsilon + \varphi' \frac{f'}{f}. \quad (48)$$

Se il valore iniziale di T è negativo, allora il sistema non potrà entrare in regime di slow-roll in quanto la velocità di θ tenderà ad aumentare, e con essa quella di φ . Per velocità iniziali di φ maggiori o uguali a zero, T è sempre positivo per i limiti su ε e quindi il confine della zona dove avviene inflazione sarà dato dalla curva $\varepsilon = 3$. Nel caso in cui $\varphi'(0) < 0$, questo è segnato invece dalla curva $T = 0$, dal momento che la condizione sul parametro di slow-roll non garantisce che T sia positivo. È da notare che, a differenza di ciò che è stato visto analizzando l'equazione (44), la presenza di un termine di potenziale per φ fa sì che la velocità di questo campo possa crescere anche verso valori negativi. In figura 8 è rappresentato il confine nel piano $(\varphi(0), \theta'(0))$ al variare di $\varphi'(0)$, per due valori di α . All'aumentare del valore iniziale di φ , a causa dell'aumento di f , l'ampiezza dell'intervallo di velocità ammissibili per il secondo campo si riduce. Inoltre, la zona che dà origine all'inflazione diviene sempre più stretta all'aumentare di $|\varphi'(0)|$, che contribuisce a fare salire il valore iniziale di ε , avvicinandolo a 3. All'aumentare di α , le condizioni iniziali per l'inflazione divengono più permissive e viceversa, a causa della variazione del valore efficace di φ discussa in precedenza.

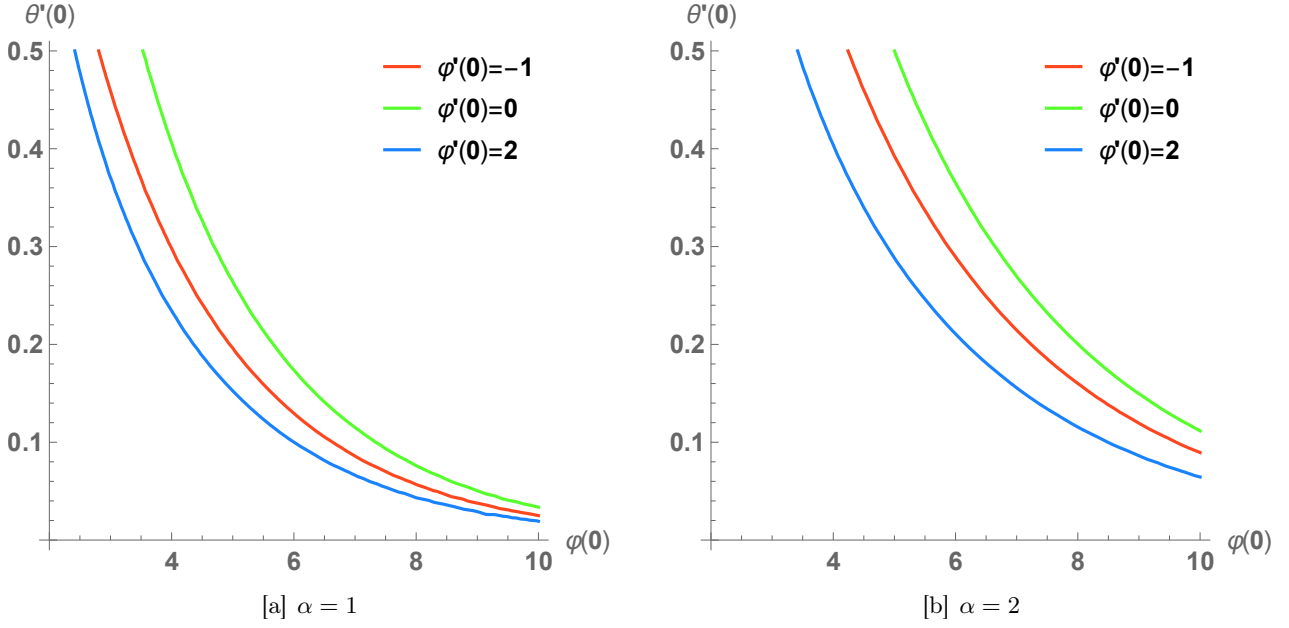


Figura 8: Confine della zona in cui è permessa l'inflazione

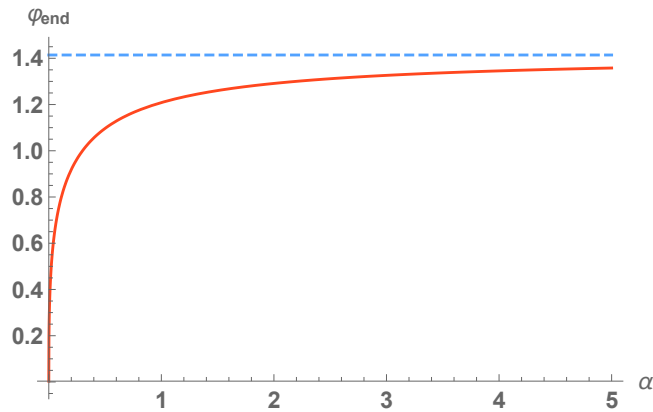
Nell'ipotesi in cui le velocità iniziali dei campi siano nulle, è possibile risolvere il sistema analiticamente usando l'approssimazione di slow-roll. Dall'equazione (36) si vede come in questo caso la dinamica si riduca a quella di un sistema a campo singolo, con $\theta(t) = \theta(0)$ costante. Calcolando ε , si ricava il valore del campo per cui termina l'inflazione, che è dato da

$$\varphi_{\text{end}} = \sqrt{\frac{3\alpha}{2}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{4}{3\alpha}\right) \quad (49)$$

e per $\alpha \rightarrow \infty$ tende a $\sqrt{2}$: il risultato coincide con quello visto per il modello a campo singolo massivo in quanto per alti valori del parametro il potenziale è approssimabile nell'origine con una parabola. In figura 9 è illustrato l'andamento di φ_{end} in funzione di α , confrontato con il suo valore asintotico. Il numero di e-folds totali ottenibili in funzione del valore iniziale del campo è dato da

$$N_{\text{tot}} = \frac{3\alpha}{4} \left(\cosh\left(2\frac{\varphi(0)}{\sqrt{6\alpha}}\right) - \sqrt{1 + \frac{4}{3\alpha}} \right) \quad (50)$$

ed è illustrato in figura 10 per tre valori di α . Naturalmente, N_{tot} cresce all'aumentare del valore iniziale del campo, dal momento che più lontano esso si trova dall'origine, maggiore è la porzione del plateau


 Figura 9: φ_{end} in funzione di α

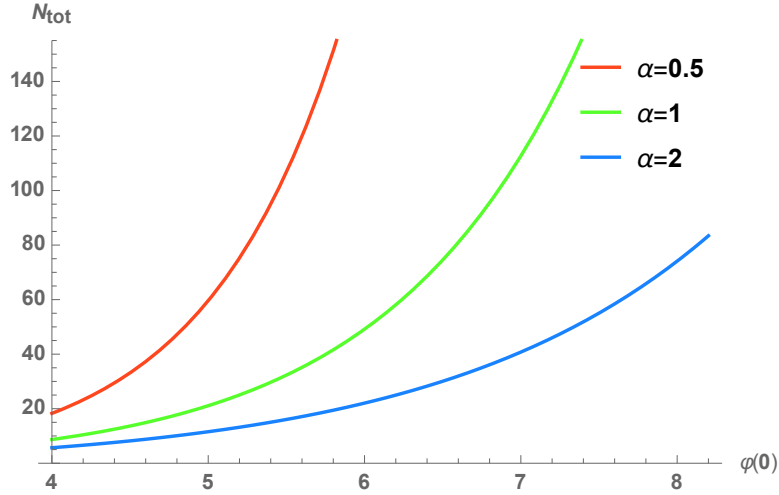


Figura 10: N_{tot} al variare di $\varphi(0)$

che può percorrere prima di cadere nella buca; per lo stesso motivo, il numero totale di e-folds si riduce per α grandi in seguito alla diminuzione del valore efficace di $\varphi(0)$.

Per calcolare N_{tot} nel caso di velocità iniziali non nulle, si è proceduto a risolvere numericamente il sistema di equazioni differenziali. Fissate le condizioni iniziali entro i limiti trovati in precedenza, l'inflazione è dovuta principalmente alla dinamica del campo φ , in quanto la velocità θ' è soppressa e rimane prossima a zero finché è valido lo slow-roll. Aumentando la velocità iniziale di φ il numero di e-folds totale crescerà in quanto il sistema a $N = 0$ verrà spinto più in profondità nel plateau, come se partisse da una posizione più lontana dal minimo del potenziale, e ovviamente accadrà l'opposto diminuendo $\varphi'(0)$. Una velocità iniziale $\theta'(0) \neq 0$ fa aumentare φ' (si veda l'equazione (42)) e porta quindi ad un aumento di N_{tot} . Il parametro α influenza la dimensione della regione in cui avviene l'inflazione e la sua durata nella maniera descritta poco sopra. In figura 11 nella pagina seguente sono illustrati i valori del numero di e-folds totale in funzione di $\varphi(0)$ e $\theta'(0)$ per tre diversi valori $\varphi'(0)$, posto $\alpha = 1$; in figura 12 è invece mostrato il grafico con velocità iniziale nulla per due diversi valori di α . I grafici vengono riportati soltanto per valori positivi di $\theta'(0)$, dal momento che N_{tot} risulta sostanzialmente indipendente dal segno di quest'ultima.

2.3 Potenziale a doppio campo

In questa sezione verrà trattato un caso più complesso, in cui il potenziale dipende sia da φ che da θ . Il potenziale scelto è dato da

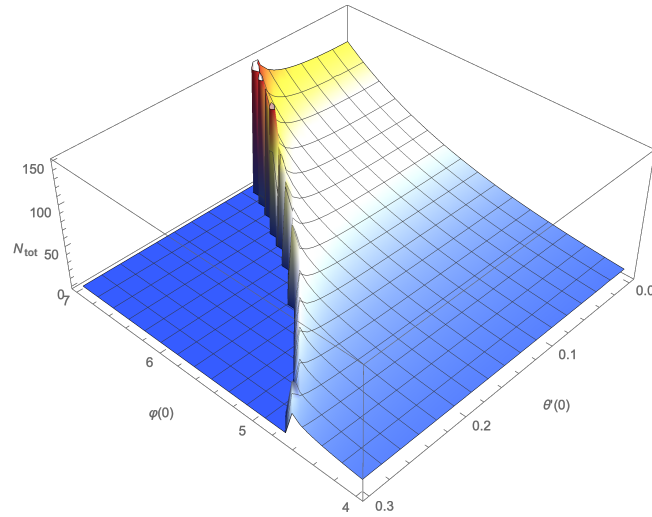
$$V(\varphi, \theta) = \mathcal{V}(\varphi) + \mathcal{U}(\theta) \quad (51)$$

$$\mathcal{V}(\varphi) = \frac{1}{4} - \tanh^2\left(\frac{\varphi}{\sqrt{6\alpha}}\right) + \tanh^4\left(\frac{\varphi}{\sqrt{6\alpha}}\right) \quad (52)$$

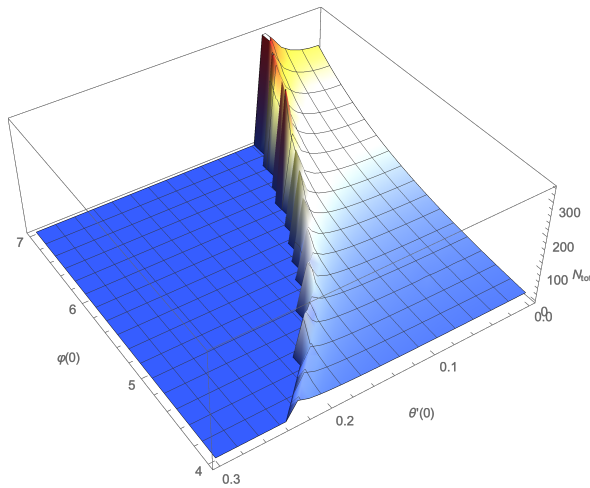
$$\mathcal{U}(\theta) = 1 + \cos\left(\frac{\theta}{\mu}\right) \quad (53)$$

ed è rappresentato in figura 13 per $\alpha = 1$. Il potenziale radiale è stato leggermente modificato rispetto al caso precedente in maniera tale che il minimo verso cui evolve il primo campo si trovi in una posizione positiva^(e), cioè in $\varphi_{\text{min}} = \sqrt{6\alpha} \operatorname{arctanh}(1/\sqrt{2})$; si noti che d'ora in avanti si tratterà esclusivamente il

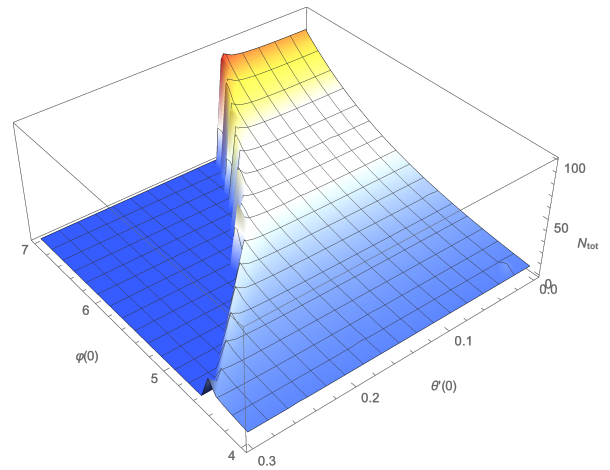
^(e)Tale scelta è dettata dal fatto che, dal momento che qui la dinamica è regolata da due campi, utilizzando il potenziale usato per il T-model il campo φ avrebbe potuto raggiungere l'origine prima della fine dell'inflazione, con conseguente degenerazione della metrica G_{ij} .



[a] $\varphi'(0) = 0$

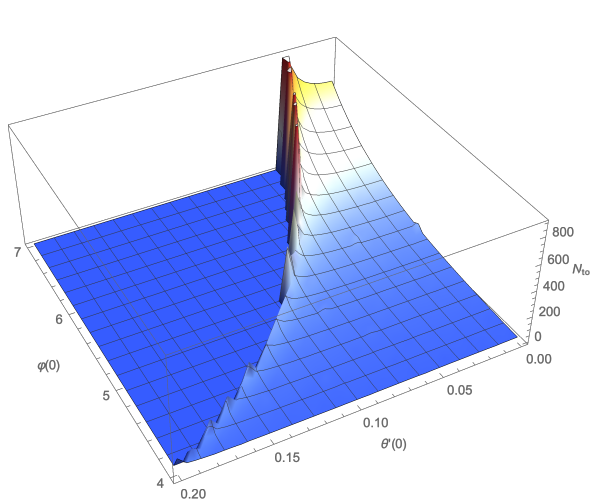


[b] $\varphi'(0) = 2$

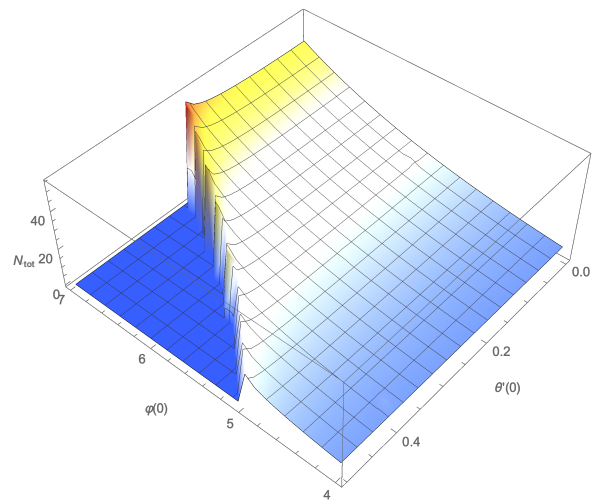


[c] $\varphi'(0) = -1$

Figura 11: Numero totale di e-folds N_{tot} al variare di $\varphi'(0)$



[a] $\alpha = 0.5$



[b] $\alpha = 2$

Figura 12: Numero totale di e-folds N_{tot} al variare di α

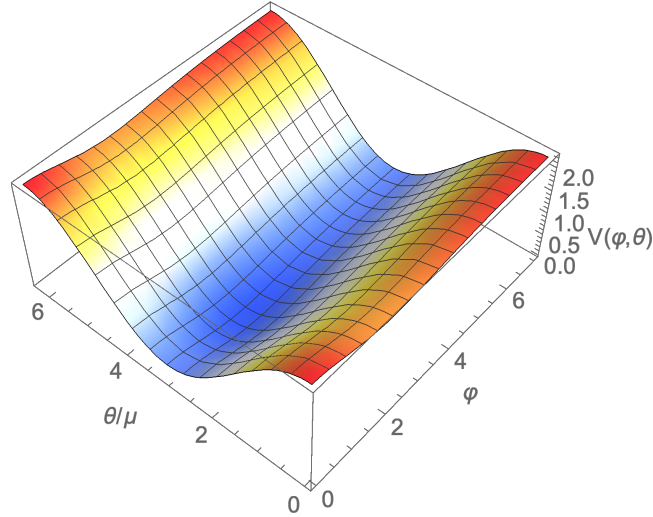


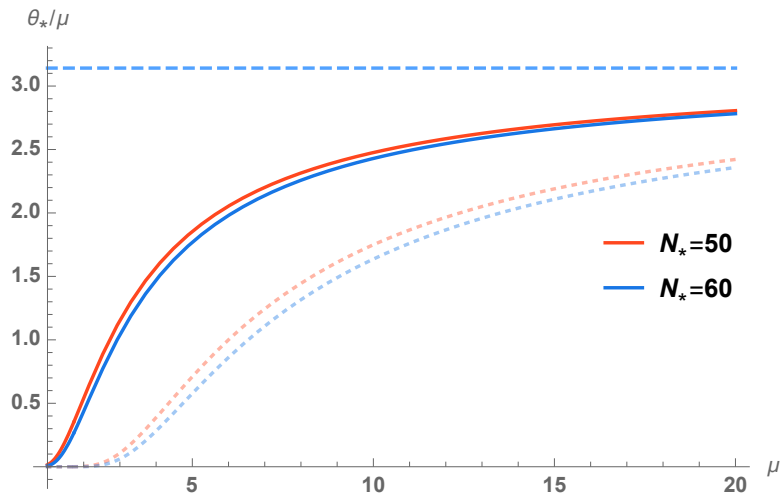
Figura 13: Potenziale a doppio campo

caso $\varphi(0) > \varphi_{\min}$, concentrandosi cioè sulla dinamica del plateau. Il potenziale angolare è invece quello già visto in precedenza nei modelli di natural inflation.

Come primo passo per lo studio del potenziale si procederà ad analizzare il caso in cui il campo φ è confinato nel suo minimo e la dinamica dipende esclusivamente da θ . Trascurando quindi tutti i termini dipendenti dal primo campo l'equazione del moto diviene:

$$\theta'' + (3 - \varepsilon) \left(\theta' - \frac{1}{f(\varphi_{\min}) \mu} \frac{\sin(\theta/\mu)}{1 + \cos(\theta/\mu)} \right) = 0. \quad (54)$$

La dinamica è molto simile a quella della natural inflation con le uniche differenze dovute al termine cinetico non canonico, tramite il fattore $f(\varphi_{\min}) = 6$ che compare sia nelle equazioni del moto sia nella definizione di ε . L'effetto complessivo di tali modifiche provoca un aumento del numero totale di e-folds ottenibili, che per μ elevati ammontano a circa 6 volte quelle ottenibili nella natural inflation. Per questo motivo l'intervallo di valori di μ per cui il sistema si trova nel regime di small field è di molto ridotto rispetto al caso standard, come è possibile vedere in figura 14: le due curve punteggiate, inserite per confronto, sono quelle già riportate in figura 4 a pagina 12 (ci si riferisca a tale grafico anche per la notazione utilizzata).

Figura 14: θ_*/μ in funzione di μ

L'effetto di una velocità iniziale su θ è analogo a quello già visto in §1.2. Tuttavia, è da notare che in questo caso, a causa del fattore $f(\varphi_{\min})$, la velocità θ' deve essere sempre compresa tra -1 e 1 : dinamiche come quella illustrata in figura 5[b] a pagina 13, cioè caratterizzate dall'assenza di un valore di $\theta'(0)$ per cui il numero di e-folds finali tende all'infinito, saranno visibili anche per valori di μ più bassi rispetto al caso standard.

La situazione speculare, cioè in cui solo il campo φ evolve, è molto simile a quella trattata in §2.2. Il numero di e-folds totali ottenibili dall'inflazione è ovviamente minore rispetto al T-model per il semplice fatto che la buca di potenziale non è posta in zero, e quindi il valore di φ_{end} , che per $\alpha \rightarrow \infty$ tende a $\varphi_{\min} + \sqrt{2}$, è maggiore. In figura 15 è illustrato il numero di e-folds totali ottenibili per tre valori di α , confrontato con i dati relativi al T-model (punteggiati) tratti dal grafico 10 a pagina 19.

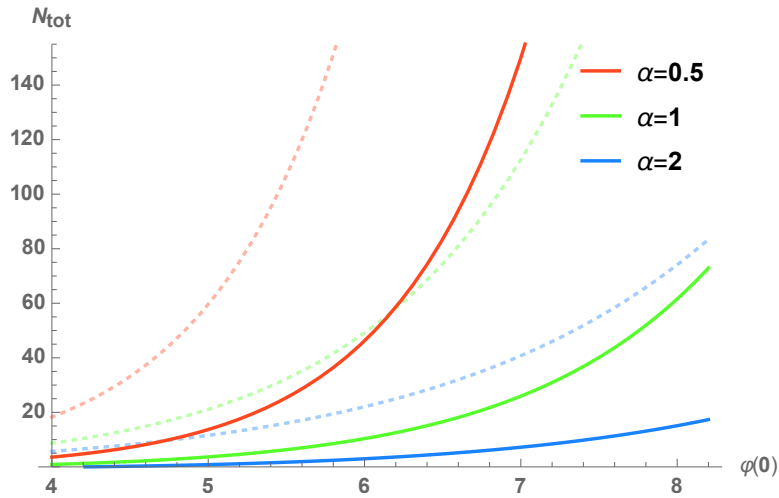


Figura 15: N_{tot} al variare di $\varphi(0)$

Passiamo ora a considerare l'evoluzione completa del sistema a due campi, partendo per semplicità dal caso in cui le velocità di entrambi siano nulle all'istante iniziale. Il termine $1/f$ che moltiplica il potenziale nell'equazione (43) fa sì che, per alti valori di φ , questa si possa scrivere nella forma semplificata già vista nell'equazione (47). Perciò inizialmente il campo θ procederà con velocità molto ridotte, mentre φ , spinto dalla discesa del potenziale \mathcal{V} , dominerà le prime fasi del moto. Una volta raggiunto l'intorno del suo minimo, il campo φ si stabilizzerà inaugurando la seconda fase dell'evoluzione del sistema, in cui la discesa di θ nella buca di potenziale permetterà un'ulteriore aumento del valore di N . In figura 16 la linea nera illustra, a titolo di esempio, il percorso compiuto dai campi lungo il potenziale per $\varphi(0) = 5.5$, $\theta(0) = 0.1$ e $\alpha, \mu = 1$. Si potrebbe quindi pensare che, in virtù di questa dinamica, si possa ricavare per via analitica un valore approssimato di N_{tot} suddividendo l'evoluzione del sistema in due momenti in cui un campo evolve in regime di slow-roll mentre l'altro rimane costante; il numero totale di e-folds sarebbe quindi pari alla somma degli N ottenuti durante ognuna della due fasi: $N_{\text{tot}}(\varphi(0), \theta(0)) = N_{\varphi}(\varphi(0)) + N_{\theta}(\theta(0))$. Tuttavia, come già visto in §2.2, una velocità su θ , seppur piccola, può rallentare la discesa di φ e quindi far crescere il numero totale di e-folds ottenibili dall'inflazione. Per questo motivo, il metodo analitico approssimato fornisce una sottostima di N_{tot} , come illustrato in figura 17 dove i risultati ottenuti a partire da questo (riportati in linea punteggiata) sono confrontati con quelli ricavati per via numerica. In accordo con i risultati visti in precedenza, il numero totale di e-folds aumenta avvicinando θ a zero e aumentando il valore iniziale di φ , allontanandolo dal minimo, così come cresce all'aumentare di μ ed al diminuire di α .

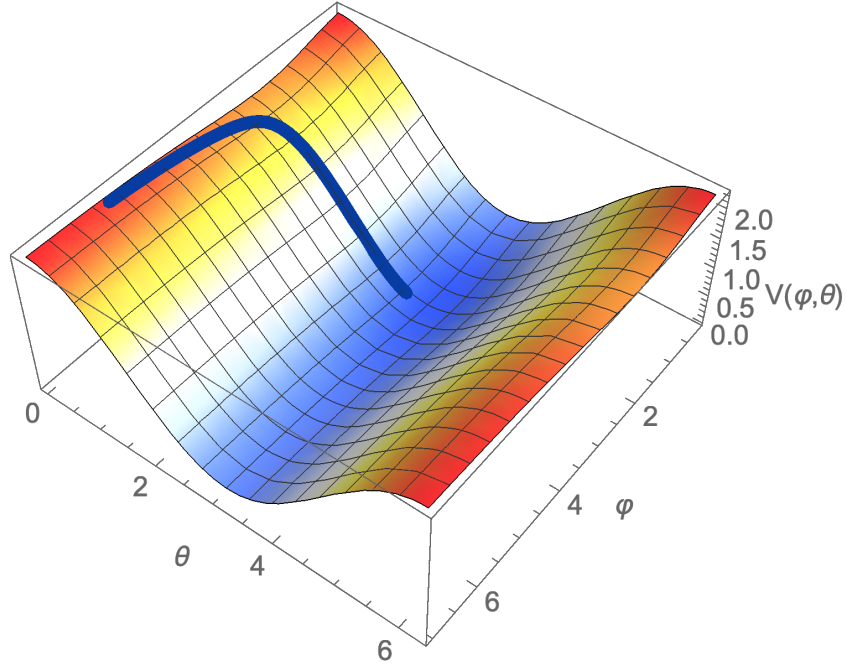
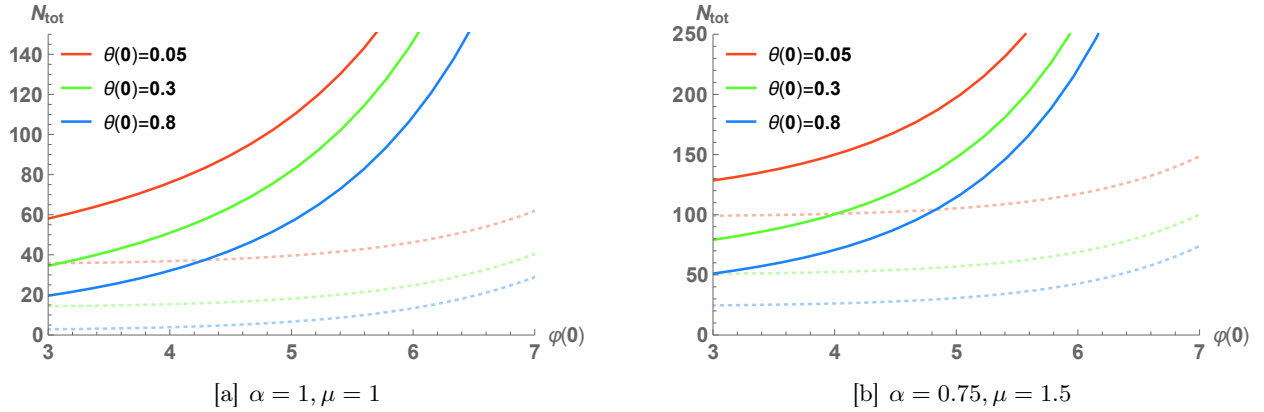


Figura 16: Sentiero percorso dai due campi

Figura 17: N_{tot} per velocità iniziali nulle

L'effetto delle velocità iniziali sul sistema ricalca ciò che è stato già visto in precedenza. Una velocità positiva per φ porterà ad un aumento di N_{tot} e viceversa; la velocità del secondo campo ha un effetto analogo a quello visto analizzando i grafici in figura 5 a pagina 13. Inoltre, in corrispondenza di una $\theta' \neq 0$ si ha un'aumento del numero totale di e-folds per quanto detto poco sopra. In figura 18 è riportato tale andamento fissato $\varphi(0) = 3$ per due valori di $\theta(0) = 0.1$ e $\theta(0) = 0.5$, posti $\alpha = 1, \mu = 1$. Nel primo caso, il valore iniziale del campo è sufficientemente ridotto da poter osservare il comportamento “piccato” come in 5[a]; nel secondo invece la situazione rassomiglia di più a quella visibile in 5[b], con alcune differenze. Per prima cosa, il range di valori in cui può avvenire inflazione è differente per le tre curve (l'intervallo di valori visibili in figura corrisponde approssimativamente alle velocità per cui avviene l'inflazione nel caso $\varphi'(0) = \pm 1$). Inoltre, per la curva $\varphi'(0) = -1$ si nota un'inattesa discesa di N_{tot} verso valori positivi di $\theta'(0)$: ciò è dovuto al secondo termine dell'equazione (43) che, per $\theta' > 0$ e $\varphi' < 0$ tende a far crescere la velocità di θ facendo terminare l'inflazione più velocemente.

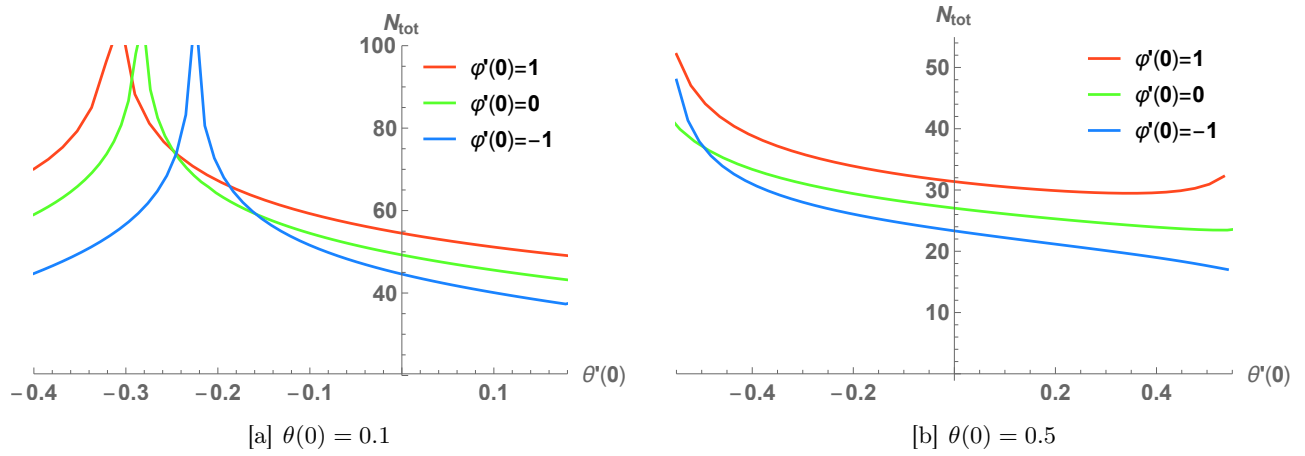


Figura 18: N_{tot} al variare delle velocità iniziali

3 Conclusioni

Dall'analisi presentata nell'elaborato si evince che a partire dalla Lagrangiana (27), nonostante il termine cinetico non canonico che porta naturalmente ad un aumento di ε e quindi ostacola il raggiungimento del regime di slow-roll, si possono ricavare vari modelli adatti per lo scenario dell'inflazione. Il potenziale (46) tratto dal T-model, il cui profilo caratterizzato dal plateau costituisce un ottimo esempio del tipico potenziale inflazionario, permette di raggiungere un numero sufficiente di e-folds per un'ampia gamma di valori del parametro α . Anche il secondo modello studiato ((51)) si è dimostrato essere molto versatile, in quanto sfruttando l'evoluzione combinata dei due campi è risultato in grado di ottenere un N_{tot} molto elevato al variare di α e μ anche per bassi valori di φ e per grandi θ . Inoltre da esso è possibile ottenere, fissando uno dei due campi nel suo minimo, uno scenario vicino a quello del primo modello oppure un comportamento simile a quello della natural inflation. Lo studio della dinamica di background rappresenta tuttavia solo il primo passo nell'analisi dell'inflatone. Per determinare quale sia il modello più adatto sarà necessario analizzare le perturbazioni cosmologiche predette da tali modelli e confrontare i risultati ottenuti con i vari dati sperimentali a disposizione, come ad esempio quelli relativi alla distribuzione delle anisotropie a diverse scale angolari nella radiazione cosmica di fondo (si veda ad esempio [13]).

Bibliografia

- [1] A. H. Guth, “Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems,” *Physical Review D*, vol. 23, pp. 347–356, Jan 1981.
- [2] A. Liddle, *An Introduction to Modern Cosmology*. John Wiley & Sons, 2015.
- [3] F. Lucchin, *Introduzione alla cosmologia*. Zanichelli, 1998.
- [4] P. Coles and F. Lucchin, *Cosmology, the Origin and Evolution of Cosmic Structure*. John Wiley & Sons, 2002.
- [5] N. Suzuki, D. Rubin, C. Lidman, G. Aldering, R. Amanullah, K. Barbary, L. F. Barrientos, J. Botyanszki, M. Brodwin, and N. Connolly, “The Hubble Space Telescope Cluster Supernova Survey. V. Improving the Dark-energy Constraints above $z > 1$ and Building an Early-type-hosted Supernova Sample,” *The Astrophysical Journal*, vol. 746, p. 85, Feb 2012.
- [6] A. Liddle, *An Introduction to Cosmological Inflation*.
- [7] A. D. Linde, “The inflationary universe,” *Reports on Progress in Physics*, vol. 47, pp. 925–986, Feb 1984.
- [8] S. Tsujikawa, “Introductory review of cosmic inflation,” Apr 2003, [arXiv:hep-ph/0304257v1].
- [9] K. Freese and W. H. Kinney, “On natural inflation,” *Physical Review D*, vol. 47, Feb 2004.
- [10] K. Freese, J. A. Frieman, and A. V. Olinto, “Natural Inflation with Pseudo Nambu-Goldstone Bosons,” *Physical Review Letters*, vol. 65, Dec 1990.
- [11] Planck Collaboration, P. A. R. Ade, N. Aghanim, C. Armitage-Caplan, M. Arnaud, M. Ashdown, F. Atrio-Barandela, J. Aumont, C. Baccigalupi, A. J. Banday, *et al.*, “Planck 2013 results. XXII. Constraints on inflation,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 571, p. A22, Nov 2014.
- [12] R. Kallosh, A. D. Linde, and D. Roest, “Superconformal inflationary α -attractors,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2013, p. 198, Nov 2013.
- [13] N. Bartolo, D. Matteo Bianco, R. Jimenez, S. Matarrese, and L. Verde, “Supergravity, α -attractors and primordial non-Gaussianity,” *Journal of Cosmology and Astro-Particle Physics*, vol. 2018, p. 017, Oct 2018.
- [14] Planck Collaboration, Y. Akrami, F. Arroja, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini, A. J. Banday, R. B. Barreiro, N. Bartolo, *et al.*, “Planck 2018 results. X. Constraints on inflation,” Jul 2018, [arXiv:1807.06211].
- [15] R. Kallosh and A. D. Linde, “Universality class in conformal inflation,” *Journal of Cosmology and Astro-Particle Physics*, vol. 2013, p. 002, Jul 2013.
- [16] R. Kallosh and A. D. Linde, “Multi-field conformal cosmological attractors,” *Journal of Cosmology and Astro-Particle Physics*, vol. 2013, p. 006, Dec 2013.