



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA DELLE TELECOMUNICAZIONI
TESI DI LAUREA TRIENNALE

MODEM GMSK A 300 kbps

RELATORE: Prof. Nevio Benvenuto

LAUREANDO: *Giulio Turetta*

Padova, 30 settembre 2010

ANNO ACCADEMICO 2009-2010

Indice

1	Introduzione	1
2	Modulatore	3
2.1	Introduzione	3
2.2	La modulazione MSK	3
2.3	La modulazione GMSK	6
2.4	Implementazione del modulatore GMSK	8
2.4.1	Configurazione I	8
2.4.2	Configurazione II	8
2.4.3	Configurazione III	9
3	Canale trasmissivo	13
3.1	Introduzione	13
3.2	Multipath	13
3.3	Descrizione statistica di ampiezza del <i>fading</i>	15
4	Equalizzazione	19
4.1	Introduzione	19
4.2	Struttura del DFE	20
4.3	DFE con numero finito di coefficienti: metodo diretto	23
5	Algoritmi di equalizzazione	27
5.1	Introduzione	27
5.2	Determinazione dei filtri di <i>feedback</i> e di <i>feedforward</i> ottimi	28
5.2.1	Analisi	29
5.3	Matrici <i>strutturate</i>	32
5.4	Algoritmo di fattorizzazione di Cholesky	33

INDICE

5.4.1	Calcolo del filtro di <i>feedback</i>	33
5.4.2	Calcolo del filtro di <i>feedforward</i>	35
5.4.3	Analisi della complessità computazionale	35
6	Conclusioni	39
	Bibliografia	41

Elenco delle figure

2.1	Modulatore CPFSK.	4
2.2	Confronto tra segnali FSK e MSK.	5
2.3	Modulatore GMSK.	6
2.4	Impulso di trasmissione $g(t)$, di ampiezza normalizzata, al variare di B_tT	7
2.5	Prima realizzazione del modulatore GMSK.	8
2.6	Seconda realizzazione del modulatore GMSK.	9
2.7	Terza realizzazione del modulatore GMSK.	9
2.8	Modulatore GMSK con VCO complesso di tipo numerico.	11
2.9	Stima della densità spettrale di potenza per diversi valori di B_tT	11
3.1	Densità di probabilità di Rice per alcuni valori di K_i	16
4.1	Schema del ricevitore nel dominio del tempo.	20
4.2	Risposta impulsiva del sistema all'ingresso del filtro di <i>feedforward</i> FF.	21
4.3	Schema semplificato di un ricevitore DFE (solo filtro di <i>feedback</i>).	22
4.4	Schema generale del ricevitore DFE.	22
4.5	Risposta impulsiva equivalente all'uscita del filtro di <i>feedforward</i> FF.	23
5.1	Schema del ricevitore MMSE-DFE	28
5.2	Diagramma di flusso per la determinazione del filtro di <i>feedback</i>	34
5.3	Diagramma di flusso per la determinazione del filtro di <i>feedforward</i>	36
5.4	Comparazione della complessità computazionale tra l'algoritmo di fattorizzazione di Cholesky e l'algoritmo adattativo RLS.	38

Elenco delle tabelle

2.1	Coefficienti del filtro numerico ottenuto per troncamento di $g(t)$, $T_Q = T/8$	10
3.1	Modello del canale a 5 raggi nel caso tipico (TY).	17
3.2	Modello del canale a 5 raggi nel caso peggiore (WC).	17
5.1	Complessità computazionale dell'algoritmo per la determinazione del filtro di <i>feedback</i> : moltiplicazioni complesse.	37
5.2	Complessità computazionale dell'algoritmo per la determinazione del filtro di <i>feedback</i> : addizioni complesse.	37
5.3	Complessità computazionale dell'algoritmo per la determinazione del filtro di <i>feedforward</i> con metodo BSM: moltiplicazioni complesse.	37
5.4	Complessità computazionale dell'algoritmo per la determinazione del filtro di <i>feedforward</i> con metodo BSM: addizioni complesse.	38

Capitolo 1

Introduzione

Il presente documento concerne la descrizione di un modem GMSK impiegabile per trasmissioni su canali radio in sistemi *wireless* di seconda generazione. Come verrà esposto nel Capitolo 2, il modulatore utilizza la modulazione GMSK, ossia una modulazione di fase con impulso di trasmissione gaussiano la cui larghezza, dipendente dal prodotto B_iT , determina da un lato l'occupazione di banda del segnale modulato e dall'altro l'interferenza di intersimbolo sul segnale stesso. Il segnale d'informazione modulato è trasmesso attraverso un canale radio dispersivo di tipo *multipath* il cui modello è descritto nel Capitolo 3. Per contrastare l'effetto del canale sul segnale modulato, in ricezione si utilizza un *Decision Feedback Equalizer*, un equalizzatore non lineare di tipo *data aided*, che sarà esposto nel Capitolo 4. La progettazione dell'equalizzatore mediante un efficiente algoritmo che fa uso della fattorizzazione di Cholesky è riportata nel Capitolo 5.

Capitolo 2

Modulatore

2.1 Introduzione

La modulazione GMSK (*Gaussian Minimum Shift Keying*) è una modulazione frequentemente utilizzata nei sistemi *wireless* di seconda generazione, come ad esempio il sistema GSM. Oltre al pregio di poter reperire con facilità la componentistica preassemblata per poter implementare l'*hardware* necessario, tale modulazione gode di altri punti di forza tra i quali si annoverano:

- involuppo costante del segnale modulato a beneficio degli stadi di potenza del trasmettitore e dell'incidenza della distorsione introdotta dal mezzo trasmissivo;
- tra le modulazioni di frequenza è quella a minore occupazione spettrale;
- alle alte frequenze lo spettro decade come $1/f^4$.

Tali caratteristiche denotano un'ottima efficienza spettrale della modulazione GMSK. Di contro, l'introduzione di un filtro gaussiano nel premodulatore porta ad un aumento dell'interferenza di intersimbolo (ISI) rispetto al caso di semplice *Minimum Shift Keying* (MSK).

2.2 La modulazione MSK

La modulazione MSK è un caso particolare di modulazione di frequenza (FSK) in cui, per contenere l'occupazione di banda del segnale, si impone alla modulazione FSK di soddisfare le seguenti condizioni:

2. MODULATORE

- continuità della fase del segnale modulato in modo tale da limitare l'ampiezza delle componenti spurie ad alta frequenza dovute ai salti di fase;
- ortogonalità dei segnali associati ai diversi valori del simbolo;
- separazione minima tra le frequenze associate ai diversi valori di simbolo per ridurre l'occupazione di banda.

L'imposizione di queste condizioni fornisce la struttura generale di una modulazione di tipo *Continuous Phase FSK* (CPFSK) il cui modulatore è schematizzato in Figura 2.1.

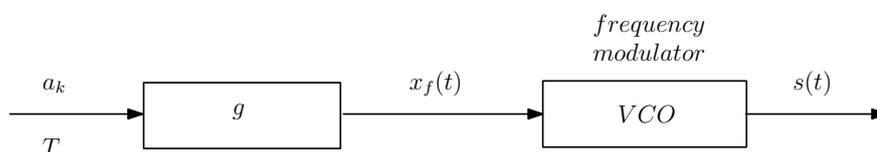


Figura 2.1: Modulatore CPFSK.

La sequenza di dati in ingresso $\{a_k\}$ con a_k appartenente all'alfabeto bipolare e bilanciato $\{-1, 1\}$ è filtrata tramite un filtro interpolatore avente risposta impulsiva $g(t)$ per produrre il segnale PAM x_f dato da:

$$x_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k g(t - kT) \quad (2.1)$$

dove T è il periodo di simbolo. Se R è il *bit rate* del sistema pari a 300 kbit/s, T assume il valore di $3.33 \mu\text{s}$. Nella modulazione MSK

$$g(t) = \frac{1}{2T} w_T(t) \quad (2.2)$$

dove

$$w_T(t) = \text{rect} \left(\frac{t - T/2}{T} \right) \quad (2.3)$$

è la finestra rettangolare di durata T . Il segnale x_f pilota l'ingresso di un *Voltage Controlled Oscillator* (VCO) la cui uscita $s(t)$ è data da:

$$s(t) = A \cos \left(2\pi f_0 t + 2\pi h \int_{-\infty}^t x_f(\tau) d\tau \right) \quad (2.4)$$

dove f_0 è la frequenza della portante e h è l'indice di modulazione. L'ampiezza dell'involucro del segnale di uscita è pari a $A = \sqrt{2E_s/T}$ con E_s energia media

del sistema. Senza perdita di generalità nel prosieguo della trattazione si porrà $A = 1$. Nella (2.4) il termine

$$\phi(t) = 2\pi f_0 t + 2\pi h \int_{-\infty}^t x_f(\tau) d\tau \quad (2.5)$$

rappresenta la fase del segnale modulato che risulta essere continua e composta dalla somma di una parte proporzionale al tempo e di una deviazione di fase $\Delta\phi(t)$.

La modulazione MSK si ottiene da una modulazione binaria CPMSK imponendo l'indice di modulazione $h = 0.5$ e una deviazione di frequenza $f_d = 1/(4T)$.

In Figura 2.2 si illustra la sostanziale differenza tra il segnale in uscita da un modulatore FSK e il corrispettivo ottenuto mediante modulazione MSK. Si nota con evidenza la continuità della fase che si riflette nella continuità della derivata prima del segnale stesso.

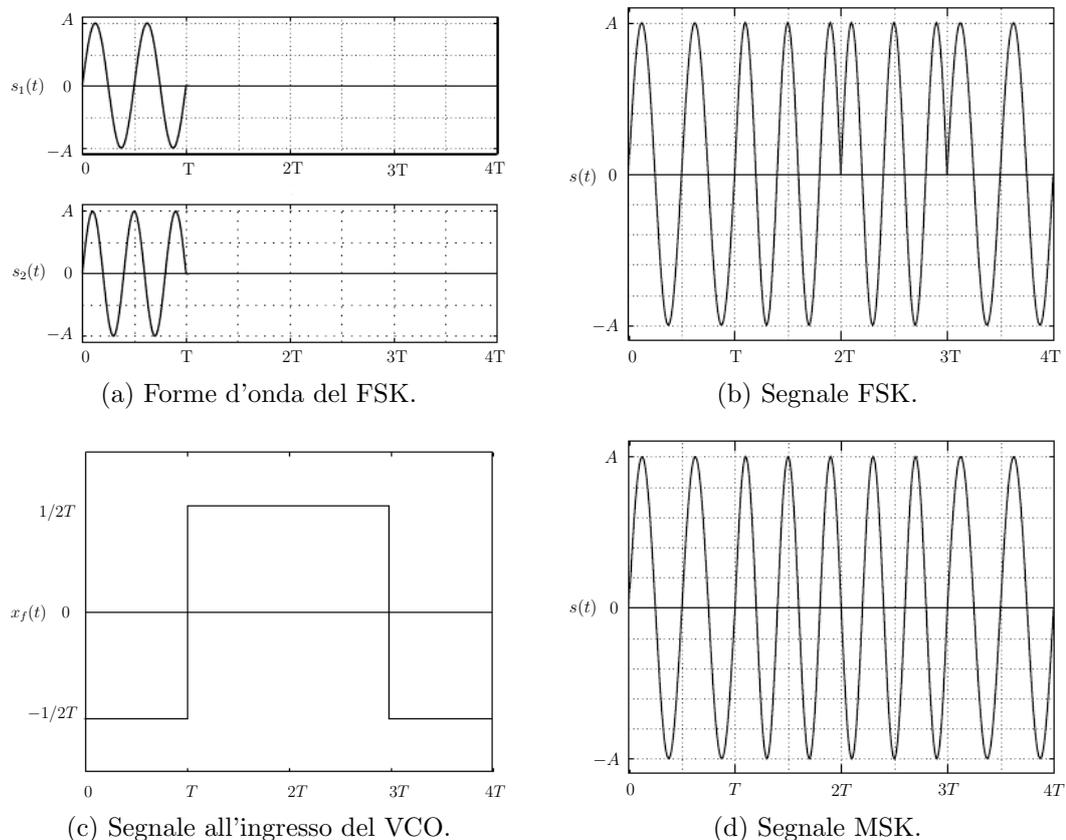


Figura 2.2: Confronto tra segnali FSK e MSK.

2.3 La modulazione GMSK

La GMSK è una variazione della modulazione MSK dove, per ridurre l'occupazione di banda del segnale modulato s , il segnale PAM x_f è filtrato da un filtro gaussiano prima di pilotare il VCO. Lo schema del modulatore è illustrato in Figura 2.3. La sequenza dei simboli $\{a_k\}$ è interpolata per mezzo del filtro

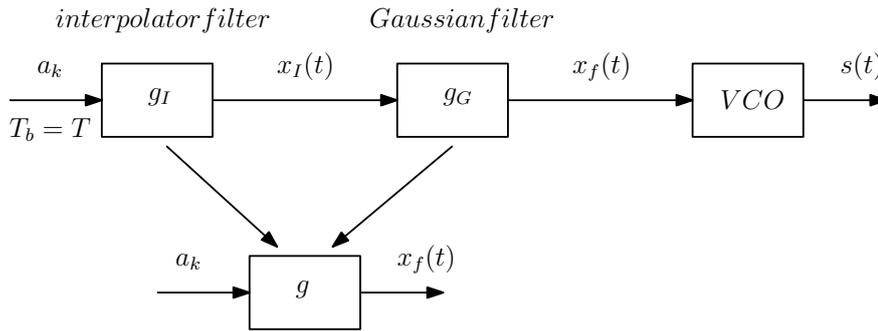


Figura 2.3: Modulatore GMSK.

interpolatore g_I avente risposta impulsiva:

$$g_I(t) = \frac{1}{2T} w_T(t) \quad (2.6)$$

producendo il segnale PAM x_f . Il segnale ottenuto viene filtrato con il filtro a forma gaussiana

$$g_G(t) = \frac{K}{\sqrt{2\pi}} e^{-K^2 t^2 / 2} \quad K = \frac{2\pi B_t}{\sqrt{\ln 2}} \quad (2.7)$$

Il parametro B_t identifica la banda a 3 dB del filtro gaussiano. Il segnale all'ingresso del VCO è ancora un segnale PAM del tipo (2.1) dove ($*$ denota convoluzione)

$$g(t) = g_I * g_G(t) \quad (2.8)$$

La banda B_t del filtro gaussiano deve essere scelta come *trade-off* tra la restrizione della larghezza della spettro in uscita dal modulatore e l'incremento dell'interferenza di intersimbolo risultante. In Figura 2.4 si possono osservare gli andamenti della risposta complessiva del filtro g al variare del parametro $B_t T$: non appena $B_t T$ risulta inferiore a $+\infty$ si ha un allargamento dell'impulso con un conseguente aumento dell'ISI. Il caso $B_t T = +\infty$, cioè in assenza del filtro gaussiano, corrisponde alla modulazione MSK.

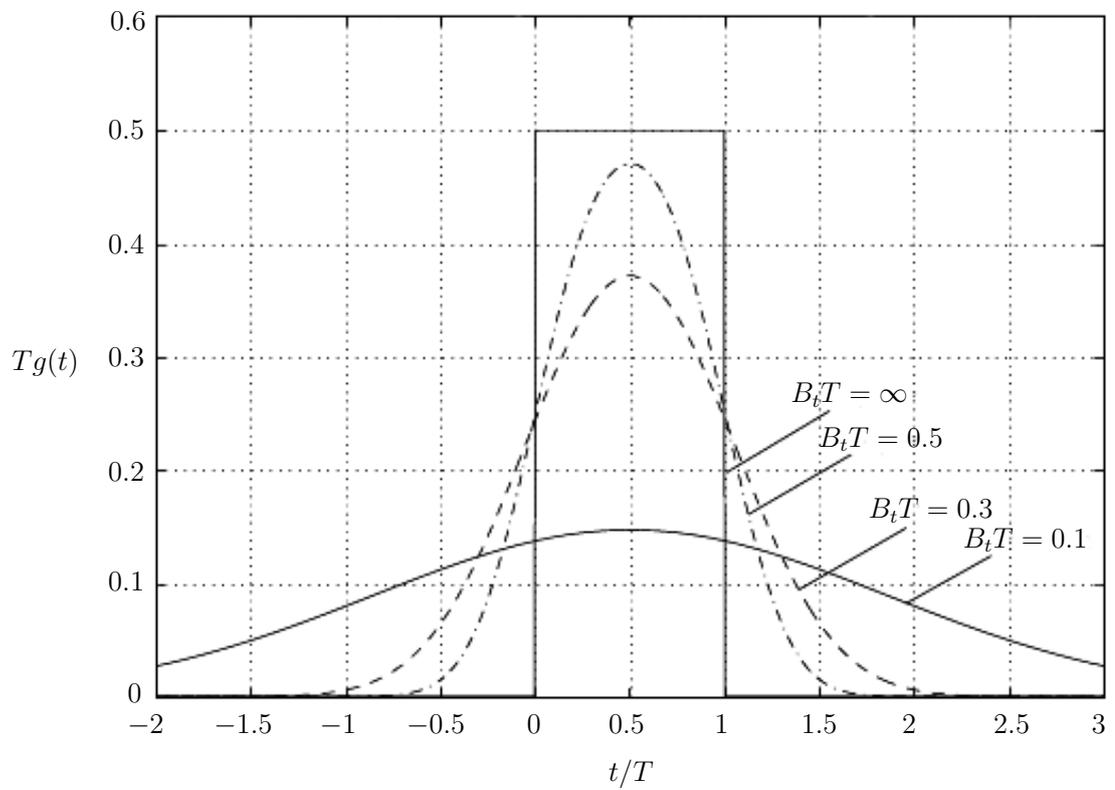


Figura 2.4: Impulso di trasmissione $g(t)$, di ampiezza normalizzata, al variare di $B_t T$.

2.4 Implementazione del modulatore GMSK

Sono possibili tre diverse configurazioni dello schema del modulatore GMSK che differiscono sostanzialmente per la posizione dello stadio di conversione digitale/analogico (DAC).

2.4.1 Configurazione I

Nella prima configurazione il filtro gaussiano g_G lavora nella sezione analogica del modulatore e può essere realizzato mediante un filtro a traliccio LC. In Figura 2.5 è illustrata la prima realizzazione del modulatore in cui si osserva come la sequenza di dati $\{a_k\}$ entri direttamente nel DAC provvisto di interpolatore a tenuta in uscita. Il convertitore può essere realizzato mediante un selettore pilotato dai simboli a_k che seleziona due diversi livelli di tensione da proporre agli stadi successivi. Da qui il segnale x_I passa attraverso il filtro g_G per ottenere x_f il quale pilota il VCO.

Il punto debole di questa struttura è proprio l'oscillatore controllato in tensione in quanto, operando in una configurazione ad anello aperto, richiede una caratteristica tensione/frequenza estremamente lineare per non alterare l'indice di modulazione h del sistema, ciò comportando un incremento di costo di questo componente.

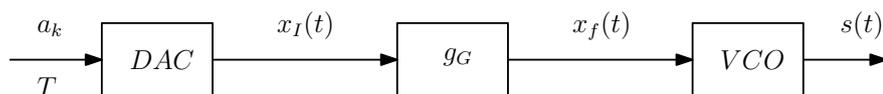


Figura 2.5: Prima realizzazione del modulatore GMSK.

2.4.2 Configurazione II

Nella seconda configurazione, rappresentata in Figura 2.6, il filtro complessivo g è realizzato in forma numerica per mezzo di una RAM o *look-up table* contenente l'uscita del filtro campionata e indirizzata da una sottosequenza in ingresso. Una scelta ottima risulta campionando a $T_Q = T/8$ la risposta impulsiva $g(t)$ sull'intervallo $(-3T/2, 5T/2)$ simmetrico rispetto al picco a $T/2 = 4T_Q$, ottenendo un filtro FIR a 31 coefficienti. Nella Tabella 2.1 sono riportati i coefficienti di tale



Figura 2.6: Seconda realizzazione del modulatore GMSK.

filtro per l'intervallo $(T/2, 5T/2)$ considerando che la risposta impulsiva risulta pari rispetto al picco.

Come si può osservare dalla Figura 2.4 il troncamento della risposta impulsiva di durata infinita di g in un intervallo di estensione $4T$ non comporta approssimazione rilevante dato che l'energia del filtro è quasi interamente contenuta in $(-T, 2T)$. Si può inoltre affermare che l'analisi dell'interferenza di intersimbolo non si estende oltre tre periodi di simbolo. Il filtro g risulta essere un filtro interpolatore da T a $T/8$ e può essere efficientemente realizzato mediante decomposizione polifase [1]. Anche questa configurazione risente delle medesime problematiche della configurazione I avendosi come ultimo stadio del modulatore il VCO operante ad anello aperto.

2.4.3 Configurazione III

Nella terza configurazione del modulatore il DAC è posto a monte dello stadio a radiofrequenza, come si può osservare in Figura 2.7. Tale stadio a radiofrequenza

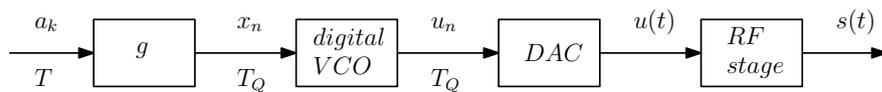


Figura 2.7: Terza realizzazione del modulatore GMSK.

si occupa solamente di traslare attorno alla frequenza della portante il segnale di ingresso. Le restanti funzioni dello stadio di uscita, che nelle configurazioni precedenti erano assolte dall'oscillatore controllato in tensione, sono ora svolte da un VCO numerico in cui il processamento del segnale avviene interamente in digitale e in banda base: allo stadio a radiofrequenza si richiede solamente la corretta stabilità dell'oscillatore locale e la pulizia del segnale, in termini di spurie, dopo la traslazione a f_0 . In Figura 2.8 è riportata la realizzazione di questa configurazione nella quale il segnale x_n in uscita dal filtro interpolatore g subisce un'integrazione numerica per ottenere la variazione di fase $\Delta\phi_n$. Da

2. MODULATORE

Tabella 2.1: Coefficienti del filtro numerico ottenuto per troncamento di $g(t)$, $T_Q = T/8$.

$g(nT_Q)$	<i>value</i>
$g(4T_Q)$	0.37119
$g(5T_Q)$	0.36177
$g(6T_Q)$	0.33478
$g(7T_Q)$	0.29381
$g(8T_Q)$	0.24411
$g(9T_Q)$	0.19158
$g(10T_Q)$	0.14168
$g(11T_Q)$	0.09850
$g(12T_Q)$	0.06423
$g(13T_Q)$	0.03921
$g(14T_Q)$	0.02236
$g(15T_Q)$	0.01189
$g(16T_Q)$	0.00589
$g(17T_Q)$	0.00271
$g(18T_Q)$	0.00116
$g(19T_Q)$	0.00046

questo segnale si calcola l'equivalente complesso in banda base dato da:

$$s^{(bb)}(nT_Q) = Ae^{j\Delta\phi(nT_Q)} = s_I^{(bb)}(nT_Q) + js_Q^{(bb)}(nT_Q) \quad (2.9)$$

in cui le componenti in fase e in quadratura sono:

$$\begin{aligned} s_I^{(bb)}(nT_Q) &= A \cos(\Delta\phi_n) \\ s_Q^{(bb)}(nT_Q) &= A \sin(\Delta\phi_n) = A \cos\left(\frac{\pi}{2} - \Delta\phi_n\right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Una volta che le due componenti sono state interpolate dai due DAC il segnale di uscita può essere ricostruito come:

$$s(t) = s_I^{(bb)}(t) \cos(2\pi f_0 t) - s_Q^{(bb)}(t) \sin(2\pi f_0 t) \quad (2.11)$$

La stima della densità spettrale di potenza del segnale GMSK $s(t)$ per diversi valori di $B_t T$ è riportata in Figura 2.9. Si noti che il lobo centrale non si estende oltre circa $0.75/T$.

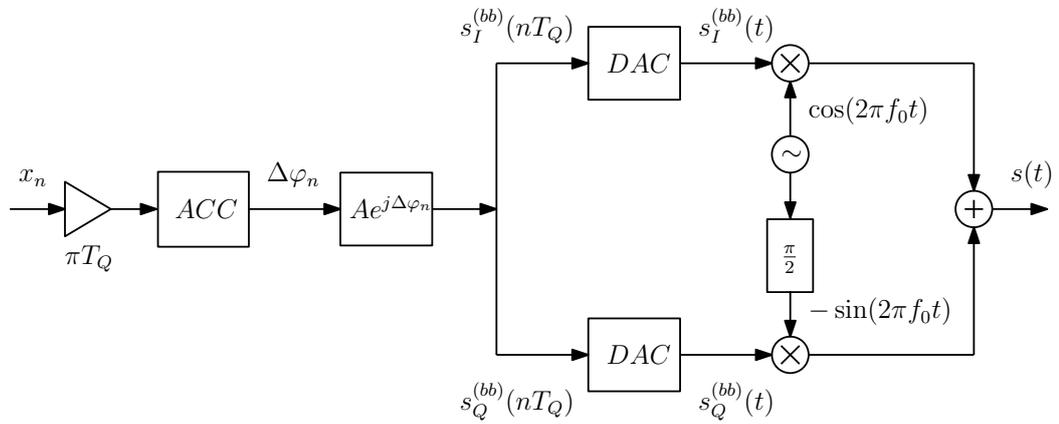


Figura 2.8: Modulatore GMSK con VCO complesso di tipo numerico.

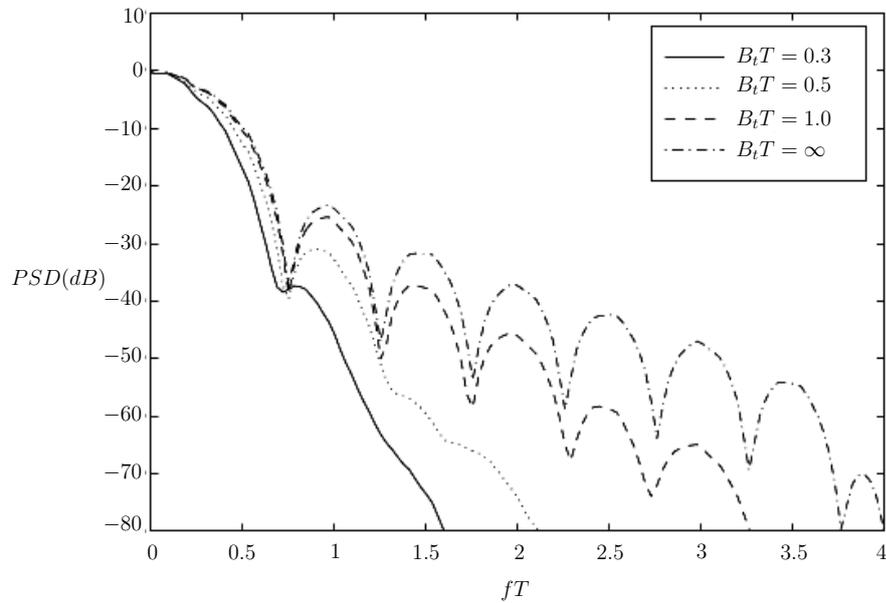


Figura 2.9: Stima della densità spettrale di potenza per diversi valori di B_tT .

Capitolo 3

Canale trasmissivo

3.1 Introduzione

Il canale trasmissivo che si considera nella trattazione è il canale radio. Si ricorda che con il termine *radio* ci si riferisce alla trasmissione di un campo elettromagnetico nello spazio libero. Alcuni esempi di trasmissioni radio sono:

- trasmissioni terrestri punto–punto;
- trasmissioni terrestri mobili;
- connessioni terra–satellite;
- trasmissioni terra–spazio profondo (collegamenti con sonde collocate nello spazio a grande distanza dalla terra).

L'oggetto della discussione è un modello di canale radio in cui si considerano cinque possibili cammini tra trasmettitore e ricevitore in cui la casistica del comportamento del canale é limitata ad un caso tipico (TY) e ad un caso pessimo (WC) di funzionamento.

3.2 Multipath

Il fenomeno del multipath prende in considerazione gli effetti delle diffusionsi e riflessioni del campo elettromagnetico dovute alla presenza di ostacoli nello spazio circostante al trasmettitore e al ricevitore. Si consideri la propagazione di un segnale a banda stretta in presenza di riflessioni. Qualora un cammino subisca

3. CANALE TRASMISSIVO

una riflessione per la presenza di una superficie, una parte della sua potenza viene assorbita dalla superficie mentre il resto viene trasmesso in un'altra direzione. Se l' i -esimo cammino ha subito K_i riflessioni prima di giungere al ricevitore e se a_{ij} è il coefficiente di riflessione (in generale complesso) della j -esima riflessione dell' i -esimo cammino, il fattore di riflessione complessivo risulta

$$a_i = \prod_{j=1}^{K_i} a_{ij} \quad (3.1)$$

Si ha dunque che, in generale, le ampiezze dei segnali, corrispondenti a cammini diversi del cammino diretto, subiscono un'attenuazione dovuta alle riflessioni che si aggiunge all'attenuazione dovuta alla distanza tra trasmettitore e ricevitore. La fase complessiva di ciascun cammino si può pertanto ottenere sommando la fase introdotta dalle varie riflessioni alla fase dovuta alla distanza percorsa; se N_c è il numero dei cammini e d_i è la distanza percorsa dall' i -esimo di questi, la risposta impulsiva del canale risulta

$$g_{Ch}(\tau) = Re \left[\frac{A_0}{A_{Tx}} \sum_{i=1}^{N_c} \frac{a_i}{d_i} h^{(a)}(\tau - \tau_i) \right] \quad (3.2)$$

dove A_0 è l'ampiezza del segnale ricevuto a 1 m dal trasmettitore, A_{Tx} è l'ampiezza del segnale trasmesso e $\tau_i = d_i/c$ è il ritardo dall' i -esimo cammino. L'involuppo complesso di (3.2) attorno alla frequenza della portante f_0 è dato da

$$g_{Ch}^{(bb)}(\tau) = \frac{2A_0}{A_{Tx}} \sum_{i=1}^{N_c} \frac{a_i}{d_i} e^{-j2\pi f_0 \tau_i} \delta(\tau - \tau_i) \quad (3.3)$$

Si noti che l'unica differenza tra il modello in banda passante e quello in banda base è costituito dal termine di fase addizionale $e^{-j2\pi f_0 \tau_i}$ per il cammino i -esimo.

Limitatamente a segnali trasmessi a banda stretta, il segnale ricevuto è sempre del tipo

$$s_{Rc}(t) = Re [A_{Rc} e^{j\varphi_{Rc}} e^{j2\pi f_0 t}] \quad (3.4)$$

dove ampiezza e fase risultano date da

$$A_{Rc} e^{j\varphi_{Rc}} = A_0 \sum_{i=1}^{N_c} \frac{a_i}{d_i} e^{j\varphi_i} \quad (3.5)$$

con $\varphi_i = -2\pi f_0 \tau_i$.

Per segnali a larga banda, con spettro centrato attorno alla frequenza f_0 , il modello del canale (3.3) riscritto come funzione sia della variabile temporale t che del ritardo τ per un dato t porge

$$g_{Ch}^{(bb)}(t, \tau) = \sum_{i=1}^{N_c} g_i(t) \delta(\tau - \tau_i(t)) \quad (3.6)$$

dove g_i rappresenta l'ampiezza complessa dell' i -esimo cammino che arriva con il ritardo τ_i . La (3.6) modella il canale come un filtro lineare avente risposta impulsiva tempo-variante in cui la variabilità temporale è dovuta al movimento reciproco di trasmettitore e ricevitore oppure a cambiamenti nell'ambiente circostante, o ad entrambe le concause. Il segnale trasmesso subisce il fenomeno del *fading*, ossia l'evanescenza di alcuni coefficienti g_i dovuta a cammini multipli tra trasmettitore e ricevitore che comporta rapidi cambiamenti del segnale ricevuto su piccole distanze (paragonabili alla lunghezza d'onda della portante) e brevi intervalli di tempo. Si ha inoltre il fenomeno della *dispersione temporale* della risposta impulsiva causata dai diversi ritardi di propagazione dei cammini multipli.

3.3 Descrizione statistica di ampiezza del *fading*

La statistica che si utilizza in questo contesto per descrivere i coefficienti $\{g_i\}$ è del tipo

$$g_i = c_i e^{j\varphi_i} + \tilde{g}_i, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (3.7)$$

con c_i costante reale, φ_i fase dell' i -esimo coefficiente uniformemente distribuita tra 0 e 2π , $\varphi_i \sim \mathcal{U}[0, 2\pi)$ e \tilde{g}_i variabile aleatoria complessa a media nulla di tipo gaussiano, $\tilde{g}_i \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_{\tilde{g}_i}^2)$ dove $\sigma_{\tilde{g}_i}^2$ indica la varianza della variabile aleatoria \tilde{g}_i .

Analizzando la (3.7) si evince che la statistica di $|g_i|$ ha una densità di probabilità del tipo Rice [2] di parametro K_i data da

$$f_{|g_i|}(a) = 2(1 + K_i) a e^{-K_i - (1+K_i)a^2} I_0[2a\sqrt{K_i(1 + K_i)}] 1_0(a) \quad (3.8)$$

dove I_0 è la funzione di Bessel.¹

Il parametro K_i è detto *fattore di Rice* ed esprime il rapporto tra la componente diretta c_i^2 e la potenza statistica della componente riflessa e/o diffusa

¹Funzione di Bessel: $I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x \cos \alpha} d\alpha$

3. CANALE TRASMISSIVO

$M_{\tilde{g}_i} = \sigma_{\tilde{g}_i}^2$, ovvero

$$K_i = \frac{c_i^2}{\sigma_{\tilde{g}_i}^2} \quad (3.9)$$

L'andamento di (3.8) per alcuni valori di K_i è riportato in Figura 3.1. La potenza

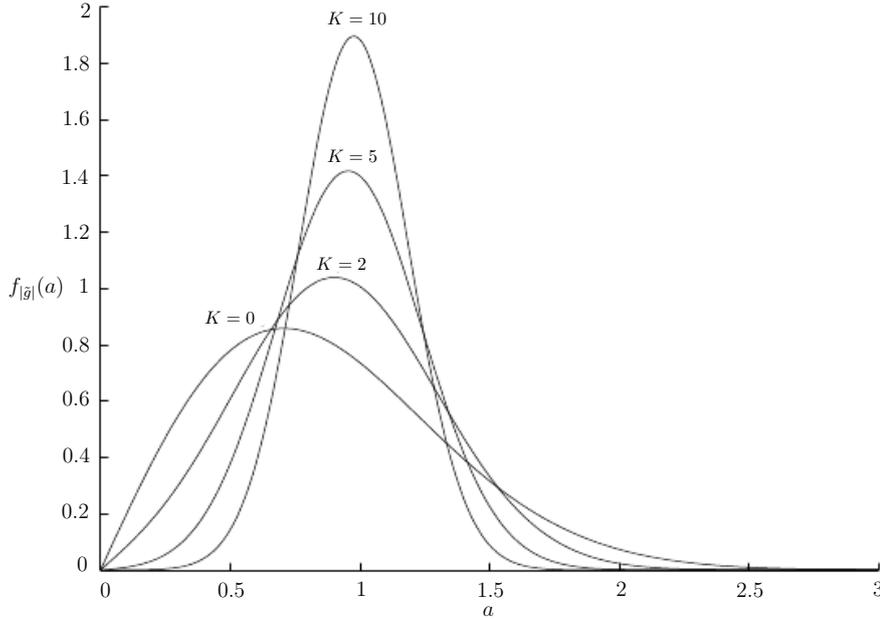


Figura 3.1: Densità di probabilità di Rice per alcuni valori di K_i .

statistica dell' i -esimo coefficiente g_i è data da

$$M_{g_i} = c_i^2 + \sigma_{\tilde{g}_i}^2 \quad (3.10)$$

Assumendo che il *power delay profile*, definito come l'aspettazione modulo quadrato della risposta impulsiva del canale, $E[|g_i|^2]$, in funzione del ritardo τ_i dal primo raggio, sia normalizzato in modo da avere area unitaria, ossia

$$\sum_{i=1}^{N_c} M_{g_i} = 1 \quad (3.11)$$

per un periodo $T_s = 1 \mu\text{s}$, si riporta in Tabella 3.1 e 3.2 la caratteristica del canale per i 5 cammini considerati per il caso di comportamento tipico (TY) e peggiore (WC) rispettivamente, in funzione del ritardo dal primo raggio τ_i , della potenza statistica M_{g_i} , e del fattore di Rice K_i .

Tabella 3.1: Modello del canale a 5 raggi nel caso tipico (TY).

TY	Raggio 0	Raggio 1	Raggio 2	Raggio 3	Raggio 4
τ_i [μs]	0	$\mathcal{U}(T_s, 4T_s)$	$\mathcal{U}(2T_s, 8T_s)$	$\mathcal{U}(4T_s, 12T_s)$	$\mathcal{U}(6T_s, 12T_s)$
M_{g_i} [dB]	0	-6	-9	-12	-15
K_i [dB]	9	9	9	9	9

Tabella 3.2: Modello del canale a 5 raggi nel caso peggiore (WC).

WC	Raggio 0	Raggio 1	Raggio 2	Raggio 3	Raggio 4
τ_i [μs]	0	$\mathcal{U}(T_s, 4T_s)$	$\mathcal{U}(2T_s, 8T_s)$	$\mathcal{U}(4T_s, 12T_s)$	$\mathcal{U}(6T_s, 12T_s)$
M_{g_i} [dB]	0	+2	-3	-4	-4
K_i [dB]	12	12	12	12	12

Capitolo 4

Equalizzazione

4.1 Introduzione

Per implementare la funzione di equalizzazione del canale nella struttura del ricevitore GMSK illustrata in Figura 4.1, si utilizza un *Decision Feedback Equalizer* (DFE). Il DFE è un equalizzatore non lineare di tipo *data aided*, cioè basato sulla conoscenza della sequenza dei dati in ingresso, o almeno di una sua parte, detta sequenza di *training*, usualmente contenuta nel preambolo del pacchetto d'informazione da equalizzare. Nota la risposta impulsiva del canale e dato un numero sufficiente di simboli correttamente rivelato, il DFE ricostruisce l'ISI prodotta rispetto al simbolo da rivelare e la cancella dal campione associato. Le prestazioni ottenibili con il DFE sono superiori a quelle offerte da un semplice equalizzatore lineare: si ha infatti che nei casi di elevata distorsione introdotta dal canale, l'equalizzatore lineare tende ad amplificare il rumore per portare l'impulso alla forma desiderata, mentre il DFE, essendo *data aided*, non soffre di tale lacuna poiché la cancellazione dell'ISI non modifica il rumore all'uscita dell'equalizzatore. La peculiarità di essere *data aided* tuttavia rende il DFE sensibile ai simboli non correttamente rivelati in quanto l'errata rivelazione di un simbolo produce un errato calcolo dell'ISI sui simboli successivi con la possibilità di incorrere in un effetto propagativo dell'errore potenzialmente catastrofico per le prestazioni del sistema. Nella pratica però questa circostanza non è mai verificata e l'errata stima di un simbolo ha effetto solo su pochi simboli successivi riducendo le prestazioni globali, in termini di rapporto segnale/rumore Γ , di 2, 3 dB.

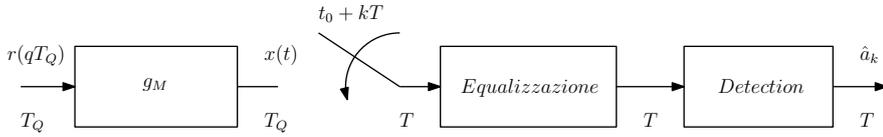


Figura 4.1: Schema del ricevitore nel dominio del tempo.

4.2 Struttura del DFE

La struttura generale del DFE si compone di due filtri: il primo è denominato *feedforward filter* (FF), mentre il secondo è detto *feedback filter* (FB). Consideriamo il segnale campionato all'uscita del filtro di ricezione analogico g_M dato da

$$s_k = s_R(t_0 + kT) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i h_{k-i} \quad (4.1)$$

dove la sequenza impulsiva $\{h_n\}$ è definita come la risposta impulsiva equivalente che si ottiene nel punto di decisione. Il segnale complessivo vale:

$$x_k = s_k + \tilde{w}_k \quad (4.2)$$

dove il termine \tilde{w}_k è dovuto al rumore additivo che si suppone gaussiano bianco.

Assumendo che, come illustrato in Figura 4.2, $\{h_n\}$ sia a durata finita con supporto $\{-N_1, -N_1 + 1, \dots, N_2 - 1, N_2\}$ si definiscono *postcursori* i campioni a destra dell'origine, mentre quelli a sinistra della stessa vengono detti *precursori*. La (4.2) può dunque essere riscritta come:

$$x_k = (h_{-N_1} a_{k+N_1} + \dots + h_{-1} a_{k+1}) + h_0 a_k + (h_1 a_{k-1} + \dots + h_{N_2} a_{k-N_2}) + \tilde{w}_k \quad (4.3)$$

Oltre al simbolo presente a_k che si desidera stimare in base a x_k nella (4.3) si individuano due termini in parentesi: uno che dipende solamente dai simboli passati, $a_{k-1}, \dots, a_{k-N_2}$, e un secondo che dipende solo dai simboli futuri, $a_{k+1}, \dots, a_{k+N_1}$. Se i simboli passati e la risposta impulsiva fossero perfettamente noti, si potrebbe utilizzare uno schema di cancellazione dell'ISI limitatamente ai soli postcursori.

Sostituendo i simboli passati con la loro stima $\hat{a}_{k-1}, \dots, \hat{a}_{k-N_2}$, uno schema per cancellare in parte l'ISI è riportato in Figura 4.3 dove, genericamente, il filtro di feedback (FB) ha risposta impulsiva $\{b_n\}$, $n = 1, \dots, M_2$ e uscita:

$$x_{FB,k} = b_1 \hat{a}_{k-1} + \dots + b_{M_2} \hat{a}_{k-N_2} \quad (4.4)$$

Se $M_2 \geq N_2$, $b_n = -h_n$, per $n = 1, \dots, N_2$, $b_n = 0$ per $n = N_2 + 1, \dots, M_2$ e $\hat{a}_{k-i} = a_{k-i}$ per $i = 1, \dots, N_2$, allora effettivamente lo schema DFE cancella l'ISI dovuta ai postcursori. Si noti inoltre che ciò viene effettuato senza alterare il rumore \tilde{w}_k presente in x_k .

La struttura generale di un DFE è riportata in Figura 4.4, in cui si possono individuare i due filtri e un ritardo nella decisione:

1. Filtro di *feedforward* (FF) c , costituito da M_1 coefficienti,

$$z_k = x_{FF,k} = \sum_{i=0}^{M_1-1} c_i x_{k-i} \quad (4.5)$$

2. Filtro di *feedback* (FB) b , costituito da M_2 coefficienti,

$$x_{FB,k} = \sum_{i=1}^{M_2} b_i x_{k-i-D} \quad (4.6)$$

Inoltre:

$$y_k = x_{FF,k} + x_{FB,k} \quad (4.7)$$

L'obiettivo del filtro di *feedforward* FF è quello di rendere a fase minima la

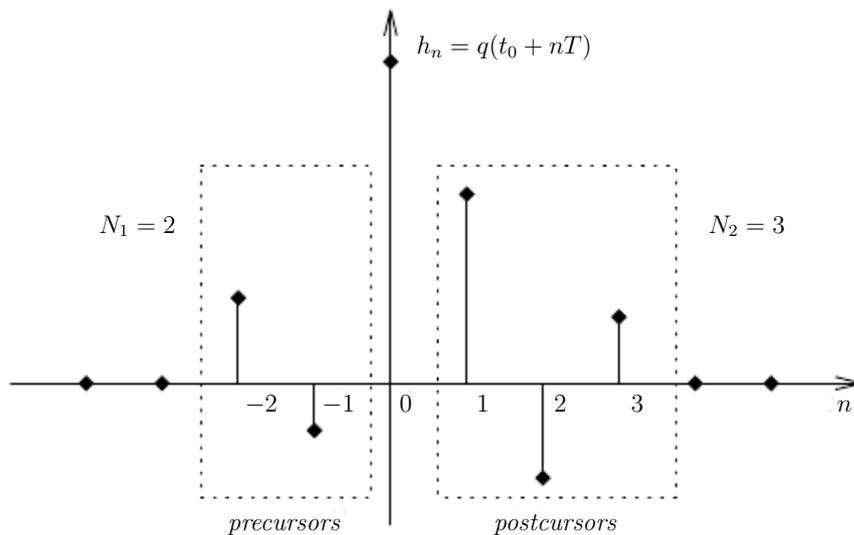


Figura 4.2: Risposta impulsiva del sistema all'ingresso del filtro di *feedforward* FF.

funzione di trasferimento del sistema globale. Ne consegue che la risposta impulsiva globale $\{\psi_n = h * c_n\}$ esibisce precursori molto piccoli, come esemplificato in

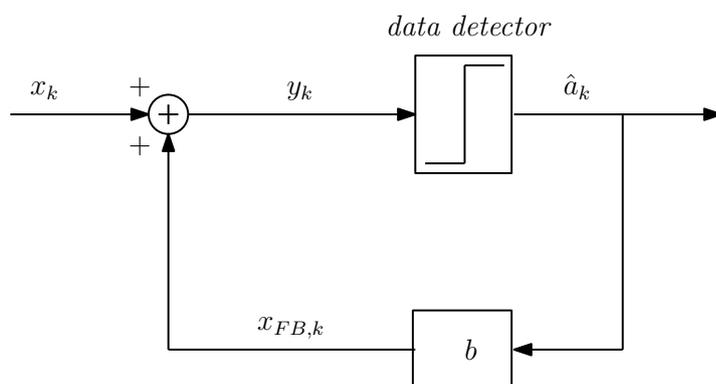


Figura 4.3: Schema semplificato di un ricevitore DFE (solo filtro di *feedback*).

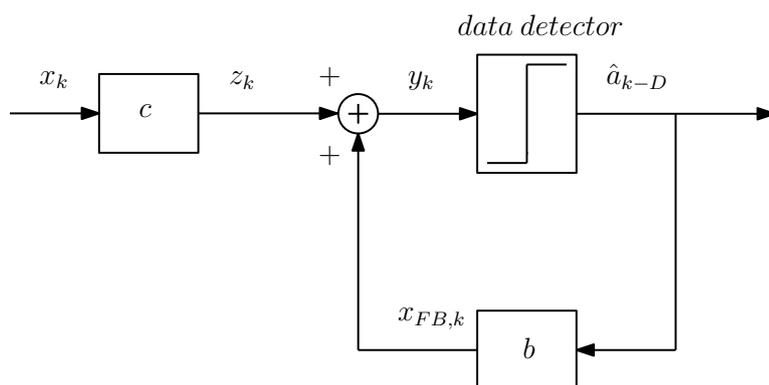


Figura 4.4: Schema generale del ricevitore DFE.

4.3 DFE CON NUMERO FINITO DI COEFFICIENTI: METODO DIRETTO

Figura 4.5, per cui quasi tutta l'ISI viene cancellata dal filtro di *feedback* FB. Inoltre, mentre il filtro di *feedforward* può lavorare a frazioni di T , quello di *feedback* può operare solo a multipli di T .

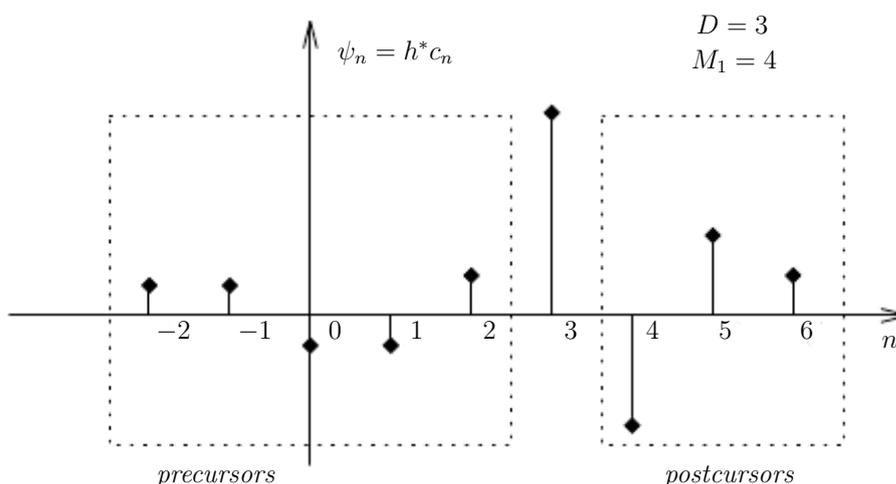


Figura 4.5: Risposta impulsiva equivalente all'uscita del filtro di *feedforward* FF.

4.3 DFE con numero finito di coefficienti: metodo diretto

Noto il canale, in termini di risposta impulsiva $\{h_i\}$ e autocorrelazione del rumore $r_{\tilde{w}}(n)$, per un funzionale J indicante l'errore quadratico medio sul simbolo rivelato (MSE),

$$J = E [|a_{k-D} - y_k|^2] \quad (4.8)$$

la teoria di Wiener [1] permette di determinare i coefficienti del filtro DFE nel caso in cui $\hat{a}_k = a_k$ e nelle ipotesi di simboli indipendenti identicamente distribuiti (i.i.d.) e statisticamente indipendenti dal rumore.

Per una generica sequenza $\{h_i\}$ si richiamano:

1. la *correlazione mutua* tra a_k e x_k :

$$r_{ax}(n) = \sigma_a^2 h_{-n}^* \quad (4.9)$$

2. l'autocorrelazione di x_k

$$r_x(n) = \sigma_a^2 r_h(n) + r_{\tilde{w}}(n) \quad (4.10)$$

4. EQUALIZZAZIONE

dove

$$r_h(n) = \sum_{j=-N_1}^{N_2} h_j h_{j-n}^* \quad r_{\bar{w}}(n) = N_0 r_{g_M}(nT) \quad (4.11)$$

Posto

$$\psi_p = h * c_p = \sum_{\ell=0}^{M_1-1} c_\ell h_{p-\ell} \quad (4.12)$$

e ricordando che

$$y_k = \sum_{i=0}^{M_1-1} c_i x_{k-i} + \sum_{j=1}^{M_2} b_j a_{k-D-j} \quad (4.13)$$

utilizzando (4.1) e (4.2) si ottiene

$$y_k = \sum_{p=-N_1}^{N_2+M_1-1} \psi_p a_{k-p} + \sum_{i=0}^{M_1-1} c_i \tilde{w}_{k-i} + \sum_{j=1}^{M_2} b_j a_{k-D-j} \quad (4.14)$$

In base alla (4.14), la scelta più opportuna per i coefficienti del filtro di *feedback* è data da

$$b_i = -\psi_{i+D}, \quad i = 1, \dots, M_2 \quad (4.15)$$

La sostituzione della (4.15) nella (4.13) porge

$$y_k = \sum_{i=0}^{M_1-1} c_i \left(x_{k-i} - \sum_{j=1}^{M_2} h_{j+D-i} a_{k-j-D} \right) \quad (4.16)$$

La soluzione di Wiener-Hopf [1] richiede le seguenti correlazioni:

$$[\mathbf{p}]_p = E \left[a_{k-D} \left(x_{k-p} - \sum_{j=1}^{M_2} h_{j+D-p} a_{k-D-j} \right)^* \right] = \sigma_a^2 h_{D-p}^* \quad (4.17)$$

per $p = 0, 1, \dots, M_1 - 1$,

$$\begin{aligned} [\mathbf{R}]_{p,q} &= E \left[\left(x_{k-q} - \sum_{j_1=1}^{M_2} h_{j_1+D-q} a_{k-D-j_1} \right) \left(x_{k-p} - \sum_{j_2=1}^{M_2} h_{j_2+D-p} a_{k-D-j_2} \right)^* \right] \\ &= \sigma_a^2 \left(\sum_{j=-N_1}^{N_2} h_j h_{j-(p-q)}^* - \sum_{j=1}^{M_2} h_{j+D-q} h_{j+D-p}^* \right) + r_{\bar{w}}(p-q) \end{aligned} \quad (4.18)$$

per $p, q = 0, 1, \dots, M_1 - 1$.

Per la determinazione del filtro di *feedforward* $\mathbf{c} = [c_0, c_1, \dots, c_{M_1-1}]^T$ si ha

$$\mathbf{c}_{opt} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p} \quad (4.19)$$

4.3 DFE CON NUMERO FINITO DI COEFFICIENTI: METODO DIRETTO

mentre dalla (4.15) il filtro di *feedback* è dato da

$$b_i = - \sum_{\ell=0}^{M_1-1} c_{opt,\ell} h_{i+D-\ell} \quad i = 1, 2, \dots, M_2 \quad (4.20)$$

Infine, usando la (4.17), si giunge a

$$\begin{aligned} J_{min} &= \sigma_a^2 - \sum_{\ell=0}^{M_1-1} c_{opt,\ell} [\mathbf{p}]_{\ell}^* \\ &= \sigma_a^2 \left(1 - \sum_{\ell=0}^{M_1-1} c_{opt,\ell} h_{D-\ell} \right) \end{aligned} \quad (4.21)$$

La progettazione del DFE con il metodo diretto esposto in questo paragrafo presuppone quindi la conoscenza, o almeno la stima, del vettore delle correlazioni mutue \mathbf{p} tra l'uscita desiderata e l'ingresso dell'equalizzatore e della matrice di autocorrelazione dell'ingresso \mathbf{R} , la quale deve essere invertita affinché si possa giungere alla soluzione ottima per il vettore dei coefficienti del filtro di *feedforward* \mathbf{c}_{opt} . Essendo la matrice \mathbf{R} una matrice solamente hermitiana, tale inversione analitica presenta una complessità computazionale $O(N^3)$ che rende inefficiente e complesso da implementare il metodo sopra esposto.

Capitolo 5

Algoritmi di equalizzazione

5.1 Introduzione

Si è visto nel capitolo precedente come la soluzione ottima di Wiener-Hopf per la progettazione dell'equalizzatore DFE con metodo diretto richieda la conoscenza dell'inversa della matrice delle autocorrelazioni \mathbf{R} del segnale di ingresso. Tale inversione richiede una elevata complessità computazionale ed è difficilmente implementabile nella pratica. Risulta quindi indispensabile lo sviluppo di procedure alternative con bassa complessità computazionale al fine di ottenere una corretta approssimazione alla soluzione ottima. Si deve inoltre considerare che l'ottimizzazione dei coefficienti dell'equalizzatore DFE deve essere svolta in tempo reale in quanto la trasmissione avviene sotto forma di pacchetti di lunghezza finita e dunque l'algoritmo da implementare deve essere caratterizzato da una rapida convergenza. Non è quindi possibile impiegare algoritmi iterativi, come ad esempio l'algoritmo LMS (*Least Mean Square*) [1], a causa delle scarse prestazioni, in termini di lenta convergenza alla soluzione ottimale, per trasmissioni a pacchetto. La tecnica da utilizzare considera un approccio basato sulla fattorizzazione, detta fattorizzazione di Cholesky, della matrice delle autocorrelazioni \mathbf{R} in (4.19), che riduce la complessità di calcolo nella computazione del vettore dei coefficienti ottimi per l'equalizzatore DFE.

5.2 Determinazione dei filtri di *feedback* e di *feedforward* ottimi

Si consideri il diagramma a blocchi dell'equalizzatore DFE riportato in Figura 5.1. Si indica con $\{a_k\}$ la sequenza dei dati in ingresso al canale, con $\{h_k\}$ la

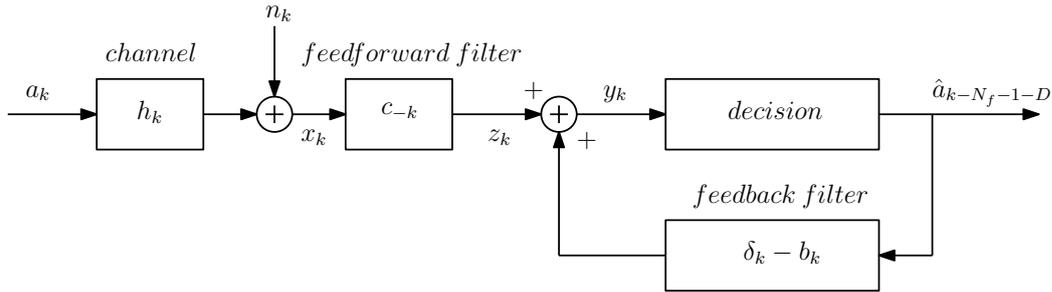


Figura 5.1: Schema del ricevitore MMSE-DFE

risposta impulsiva equivalente del canale e con $\{n_k\}$ il rumore additivo che si suppone essere gaussiano bianco. Il filtro di *feedforward* e il filtro di *feedback* si indicano con \mathbf{c}_{-k} e \mathbf{b}_k rispettivamente. L'uscita del canale è campionata ad un multiplo intero positivo Q del periodo di simbolo T . Raggruppando Q campioni successivi del vettore \mathbf{x}_k all'uscita del canale, della risposta impulsiva del canale \mathbf{h}_m e del rumore \mathbf{n}_k , si può scrivere l'ingresso del DFE come

$$\mathbf{x}_k = \sum_{m=0}^{\nu} \mathbf{h}_m a_{k-m} + \mathbf{n}_k \quad (5.1)$$

dove ν è la memoria del canale. La rappresentazione esplicita delle grandezze vettoriali è

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} x((k + \frac{l-1}{l})T) \\ \vdots \\ x(kT) \end{bmatrix} \quad \mathbf{h}_m = \begin{bmatrix} h((m + \frac{l-1}{l})T) \\ \vdots \\ h(mT) \end{bmatrix} \quad \mathbf{n}_k = \begin{bmatrix} n((k + \frac{l-1}{l})T) \\ \vdots \\ n(kT) \end{bmatrix}$$

Se si considerano N_f vettori dell'ingresso, ognuno contenente Q campioni, la (5.1) si può riscrivere come

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+N_f-1} \\ \mathbf{x}_{k+N_f-2} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_0 & \mathbf{h}_1 & \dots & \mathbf{h}_\nu & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{h}_0 & \mathbf{h}_1 & \dots & \mathbf{h}_\nu & \mathbf{0} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{h}_0 & \mathbf{h}_1 & \dots & \mathbf{h}_\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{k+N_f-1} \\ a_{k+N_f-2} \\ \vdots \\ a_{k-\nu} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{k+N_f-1} \\ \mathbf{n}_{k+N_f-2} \\ \vdots \\ \mathbf{n}_k \end{bmatrix}$$

esprimibile in forma compatta come

$$\mathbf{x}_{k+N_f-1:k} = \mathbf{H}\mathbf{a}_{k+N_f-1:k-\nu} + \mathbf{n}_{k+N_f-1:k} \quad (5.2)$$

Per l'analisi a seguire si suppone che, entro la trasmissione di un pacchetto dati:

- il canale sia lineare e tempo-invariante con memoria finita ν , $\mathbf{h}(D) = \mathbf{h}_0 + \mathbf{h}_1D + \mathbf{h}_2D^2 + \dots + \mathbf{h}_\nu D^\nu$.
- $\{a_k\}$ sia una sequenza di simboli indipendenti e identicamente distribuiti avente varianza σ_a^2 ;
- il rumore additivo sia gaussiano bianco con densità spettrale di potenza QN_0 ;
- il filtro di *feedforward* \mathbf{c} sia lineare e anti-causale, con N_f coefficienti, $\mathbf{c}^* = [c_{-(N_f-1)}^*, c_{-(N_f-2)}^*, \dots, c_0^*]$;
- il filtro di *feedback* \mathbf{b} sia lineare e strettamente causale, con N_b coefficienti, $\mathbf{b}^* = [-b_1^*, -b_2^*, \dots, -b_{N_b}^*]$. Al fine di migliorare le prestazioni e semplificare l'analisi [4], si pone $N_b = \nu$;
- i simboli decodificati precedenti il simbolo attuale siano stati rivelati correttamente ovvero $\hat{a}_{k-D} = a_{k-D}$, dove con D si indica il ritardo nella decisione dovuto alla presenza del filtro di *feedforward*. Come spiegato in [4] si ottengono le migliori prestazioni ponendo $D = N_f - 1$. L'assunzione concernente la correttezza delle passate decisioni è necessaria per effettuare un'analisi lineare dell'equalizzatore DFE, in quanto esso presenta caratteristiche di non linearità dovute al decisore a soglia.

5.2.1 Analisi

Dalla Figura 5.1 si ha anche che la sequenza di errore è data da (* denota il trasposto coniugato)

$$e_k = a_k - \left(\sum_{i=0}^{N_f-1} \mathbf{c}_{-i}^* \mathbf{x}_{k+i} + \sum_{j=1}^{\nu} b_j^* a_{k-j} \right) \quad (5.3)$$

$$= \mathbf{b}^* \mathbf{a}_{k:k-\nu} - \mathbf{c}^* \mathbf{x}_{k+N_f-1:k} \quad (5.4)$$

5. ALGORITMI DI EQUALIZZAZIONE

La matrice delle correlazioni mutue tra l'ingresso e l'uscita del canale è

$$\mathbf{R}_{ax} = E \left[\mathbf{a}_{k:k-\nu} \mathbf{x}_{k+N_f-1:k}^* \right] = \sigma_a^2 \left[\mathbf{0}_{(\nu+1) \times (N_f-1)} \mathbf{I}_{\nu+1} \right] \mathbf{H}^* \quad (5.5)$$

dove $\mathbf{I}_{\nu+1}$ è la matrice identità di ordine $\nu + 1$. La matrice delle autocorrelazioni in ingresso all'equalizzatore è data da

$$\mathbf{R}_{xx} = E \left[\mathbf{x}_{k+N_f-1:k} \mathbf{x}_{k+N_f-1:k}^* \right] = \sigma_a^2 \mathbf{H} \mathbf{H}^* + Q N_0 \mathbf{I}_{Q N_f} \quad (5.6)$$

Al fine di minimizzare l'MSE si applica il *principio di ortogonalità* il quale asserisce che la sequenza di errore ottima è incorrelata con i dati osservati, cioè

$$E \left[e_k \mathbf{x}_{k+N_f-1:k}^* \right] = \mathbf{0} \quad (5.7)$$

da cui si ottiene la relazione

$$\mathbf{b}^* \mathbf{R}_{ax} = \mathbf{c}^* \mathbf{R}_{xx} \quad (5.8)$$

che lega i coefficienti dei due filtri alle correlazioni. Da (5.4) e (5.8) si trova che l'errore quadratico medio (MSE) è dato da

$$\begin{aligned} MSE &= E [|e_k|^2] \\ &= \mathbf{b}^* \mathbf{R}_{a/x}^\perp \mathbf{b} \end{aligned} \quad (5.9)$$

dove con $\mathbf{R}_{a/x}^\perp$ si indica la matrice correlazione del vettore dell'errore stimato [1] data da

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{a/x}^\perp &= \mathbf{R}_{aa} - \mathbf{R}_{ax} \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{R}_{xa} \\ &= \sigma_a^2 \left(\mathbf{I}_{\nu+1} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{\nu+1} \end{bmatrix} \mathbf{H}^* \left(\mathbf{H} \mathbf{H}^* + \frac{1}{SNR'} \mathbf{I}_{Q N_f} \right)^{-1} \mathbf{H} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{\nu+1} \end{bmatrix} \right) \\ &= \sigma_a^2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{\nu+1} \end{bmatrix} \left(\mathbf{I}_{N_f+\nu} - \mathbf{H}^* \left(\mathbf{H} \mathbf{H}^* + \frac{1}{SNR'} \mathbf{I}_{Q N_f} \right)^{-1} \mathbf{H} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{\nu+1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.10)$$

e $SNR' = \frac{SNR}{Q} = \frac{\sigma_a^2}{\sigma_n^2 Q}$ è il rapporto segnale rumore normalizzato.

Utilizzando il lemma della matrice inversa

$$\mathbf{H}^* \left(\mathbf{H} \mathbf{H}^* + \frac{1}{SNR'} \mathbf{I}_{Q N_f} \right)^{-1} \mathbf{H} = \left(\mathbf{H}^* \mathbf{H} + \frac{1}{SNR'} \mathbf{I}_{N_f+\nu} \right)^{-1} \mathbf{H}^* \mathbf{H} \quad (5.11)$$

la (5.10) porge

$$\mathbf{R}_{a/x}^\perp = Q N_0 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{\nu+1} \end{bmatrix} \left(\mathbf{H}^* \mathbf{H} + \frac{1}{SNR'} \mathbf{I}_{N_f+\nu} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{\nu+1} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Si giunge allora a definire la *fattorizzazione di Cholesky*

$$\mathbf{R} = \mathbf{H}^* \mathbf{H} + \frac{1}{SNR'} \mathbf{I}_{N_f + \nu} = \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^* \quad (5.13)$$

dove \mathbf{L} è una matrice triangolare inferiore avente tutti 1 sulla diagonale principale, e \mathbf{D} è una matrice diagonale. Esse sono date in forma esplicita da

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_0 & \dots & \mathbf{l}_{N_f + \nu - 1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{L}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0^* \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{N_f + \nu - 1}^* \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_0 & & \\ & \ddots & \\ & & d_{N_f + \nu - 1} \end{bmatrix}$$

Sostituendo (5.12) e (5.13) in (5.9) si ottiene

$$\begin{aligned} MSE &= \mathbf{b}^* (\mathbf{L}^{-1})^* \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{b} \\ &= QN_0 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{b}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 & \dots & \mathbf{u}_{N_f + \nu - 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & d_{N_f + \nu - 1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0^* \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{N_f + \nu - 1}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Dall'analisi dell'MSE [3] con le nuove imposizioni si trova

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_{opt} \end{bmatrix} = \mathbf{l}_{N_f - 1} \quad (5.15)$$

Ovvero la soluzione ottima per i coefficienti del filtro di *feedback* è data dalla N_f -esima colonna della matrice \mathbf{L} . L'MSE ottimo [3] è dato da

$$MSE_{opt} = \frac{QN_0}{d_{N_f - 1}} \quad (5.16)$$

e risulta dipendente solo dal numero di campioni Q , dalla densità spettrale di potenza del rumore N_0 e dal coefficiente $(N_f - 1)$ -esimo della matrice diagonale \mathbf{D} .

Per ricavare il vettore ottimo dei coefficienti del filtro di *feedforward* \mathbf{c} si utilizza l'equazione (5.8) che porge

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{opt}^* &= \mathbf{b}_{opt}^* \mathbf{R}_{ax} \mathbf{R}_{xx}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{b}_{opt}^* \end{bmatrix} \mathbf{H}^* \left(\mathbf{H} \mathbf{H}^* + \frac{1}{SNR'} \mathbf{I}_{QN_f} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Tale vettore dei coefficienti del filtro di *feedforward* è ricavabile tramite l'efficiente algoritmo *Back Substitution Method* (BSM) che sarà esposto nel Paragrafo 5.4.2.

5.3 Matrici *strutturate*

Si é visto nel paragrafo precedente come con la fattorizzazione di Cholesky sia possibile ricavare analiticamente i coefficienti dei filtri dell'equalizzatore DFE a partire dalla matrice $\mathbf{R} = \mathbf{LDL}^*$. L'efficienza di tale fattorizzazione è data dalle particolari proprietà della matrice che si dice essere una matrice *strutturata* [5][6] di cui si richiama la definizione generale:

Definizione 5.1 *Una matrice hermitiana semi infinita $\mathbf{R} = [R_{ij}, 0 \leq i, j < \infty]$ si dice strutturata se la sua funzione generatrice*

$$\begin{aligned} R(D, w) &= \begin{bmatrix} 1 & D & D^2 & \dots \end{bmatrix} \mathbf{R} \begin{bmatrix} 1 & w & w^2 & \dots \end{bmatrix}^* \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} R_{ij} D^i (w^*)^j \end{aligned} \quad (5.18)$$

può essere scritta come

$$R(D, w) = \frac{\mathbf{G}(D)\mathbf{J}\mathbf{G}^*(w)}{d(D, w)} \quad (5.19)$$

dove \mathbf{J} , matrice diagonale di dimensione $(p + q)$, ha un numero p di 1 e un numero q di -1 sulla diagonale principale, $d(D, w)$ è un polinomio della forma $\alpha(D)\alpha^*(w) - \beta(D)\beta^*(w)$ e $\mathbf{G}(D)$ è un vettore riga composto da ρ elementi; ρ è detto *displacement rank* di \mathbf{R} e $\mathbf{G}(D)$ è un generatore per \mathbf{R} .

Come esposto in [3], la determinazione della funzione generatrice della matrice *strutturata* da fattorizzare \mathbf{R} nella (5.13) porge

$$R(D, w) = \frac{\mathbf{G}(D)\mathbf{J}\mathbf{G}^*(w)}{1 - Dw^*} \quad (5.20)$$

in cui il vettore generatore $\mathbf{G}(D)$ è dato da

$$\mathbf{G}(D) = \left[\frac{1}{\sqrt{SNR}} \quad h^*(D^*) \quad D^{N_f} \tilde{h}^*(D^*) \right] \quad (5.21)$$

il quale, essendo composto da 3 elementi, permette di attribuire alla matrice \mathbf{R} un *displacement rank* pari a 3. Tale basso valore del *displacement rank*, che si riduce ulteriormente a 2 per le prime N_f iterazioni dell'algorithmo che sarà esposto nel prossimo paragrafo, semplifica la determinazione dei coefficienti del filtro di *feedback*.

5.4 Algoritmo di fattorizzazione di Cholesky

L'algoritmo iterativo si basa sull'utilizzo del vettore generatore $\mathbf{G}(D)$ della matrice strutturata \mathbf{R} e calcola all' i -esima ricorsione l' i -esimo elemento d_i della matrice diagonale \mathbf{D} e l' i -esima colonna della matrice \mathbf{L} , l_i , della fattorizzazione di Cholesky $\mathbf{R} = \mathbf{LDL}^*$. Nella determinazione dei filtri ottimi si considera il caso di fattore di sovracampionamento unitario, $Q = 1$.

5.4.1 Calcolo del filtro di *feedback*

Definendo il polinomio

$$l_i(D) = \begin{bmatrix} 1 & D & D^2 & \dots \end{bmatrix} \mathbf{l}_i : i = 0, 1, \dots \quad (5.22)$$

associato alle colonne \mathbf{l}_i della matrice triangolare inferiore \mathbf{L} , l'algoritmo richiede N_f iterazioni per calcolare la N_f -esima colonna di \mathbf{L} , $l_{N_f-1}(D)$ i cui elementi coincidono con i coefficienti del filtro di *feedback* che si intende progettare.

Condizione iniziale:

$$\mathbf{G}_0(D) = \mathbf{G}(D) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{SNR}} & h^*(D^*) \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Iterazioni:

Per $i = 0, 1, \dots, N_f - 1$

$$d_i = |\mathbf{G}_i(0)|^2 \quad (5.24)$$

$$l_i(D) = D^i \mathbf{G}_i(D) \mathbf{G}_i^*(0) d_i^{-1} \quad (5.25)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \end{bmatrix} = d_i^{-\frac{1}{2}} \mathbf{G}_i(0) \quad (5.26)$$

$$\mathbf{G}_{i+1}(D) = \frac{1}{D} \mathbf{G}_i(D) \begin{bmatrix} \alpha_i D & -\beta_i \\ \beta_i^* D & \alpha_i \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Uscita:

$$b_{opt}(D) = l_{N_f-1}(D) \quad (5.28)$$

Gli elementi α_i reale positivo per $i = 0, 1, \dots, N_f - 1$ e β_i complesso, sono legati dalla relazione $|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2 = 1$. Il diagramma di flusso dell'algoritmo è illustrato in Figura 5.2.

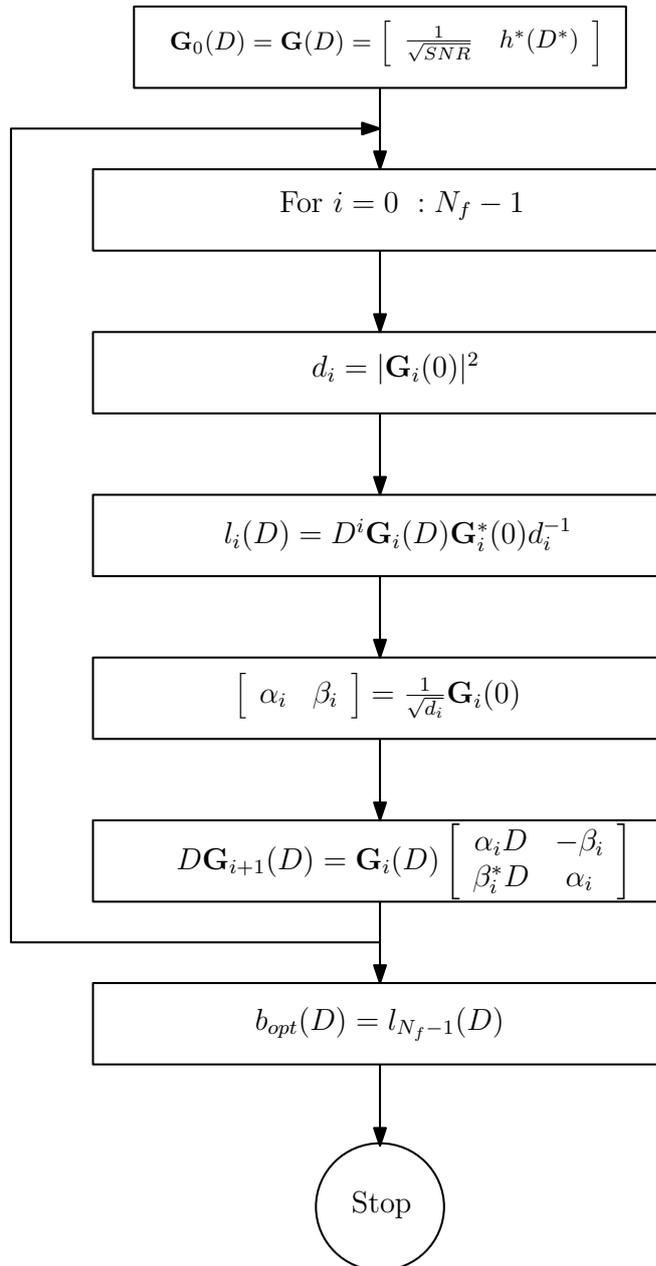


Figura 5.2: Diagramma di flusso per la determinazione del filtro di *feedback*.

5.4.2 Calcolo del filtro di *feedforward*

Una volta ottenuto il vettore dei coefficienti del filtro di *feedback*, il filtro di *feedforward* può essere calcolato da (5.17) impiegando il metodo BSM (*Back Substitution Method*). Si definiscono il vettore

$$\mathbf{v}_{N_f-1}^* = \begin{bmatrix} v^*(0) & v^*(1) & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

e la sottomatrice di dimensione $N_f \times N_f$ della matrice triangolare inferiore \mathbf{L} precedentemente calcolata mediante la fattorizzazione di Cholesky

$$\mathbf{L}_{N_f \times N_f} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{L}(1,0) & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{L}(N_f-1,0) & \mathbf{L}(N_f-1,1) & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

Gli elementi del vettore $\mathbf{v}_{N_f-1}^*$ risultano dall'equazione

$$v^*(k) = - \sum_{j=k+1}^{N_f-1} \mathbf{L}(j,k) v^*(j) : k = N_f-2, N_f-3, \dots, 0 \quad (5.31)$$

Si noti che $\mathbf{v}_{N_f-1}^* = 1$, presentando \mathbf{L} il valore 1 su tutta la diagonale principale. Una volta determinato $\mathbf{v}_{N_f-1}^*$, i coefficienti c_i^* del filtro di *feedforward* \mathbf{c}_{opt}^* si determinano da

$$c_i^* = d_{N_f-1}^{-1} \sum_{k=0}^{\min(\nu, N_f-1-i)} v^*(k+i) h_k^* : i = 0, 1, \dots, N_f-1 \quad (5.32)$$

In Figura 5.3 è illustrato il diagramma di flusso dell'algoritmo per la determinazione del filtro di *feedforward* mediante il metodo BSM sopra esposto.

5.4.3 Analisi della complessità computazionale

L'algoritmo che fornisce la fattorizzazione di Cholesky per la determinazione del filtro di *feedback* richiede $(6N_f\nu + 12N_f - 4\nu - 8)$ moltiplicazioni complesse e $(3N_f\nu + 4N_f - 2\nu - 3)$ addizioni complesse. Esso presenta pertanto una complessità $O(N^2)$ come si riporta in dettaglio per ciascuna delle fasi dell'algoritmo in Tabella 5.1 e 5.2. L'algoritmo che impiega il metodo BSM per la computazione del filtro di *feedforward* è caratterizzato anch'esso da una complessità $O(N^2)$

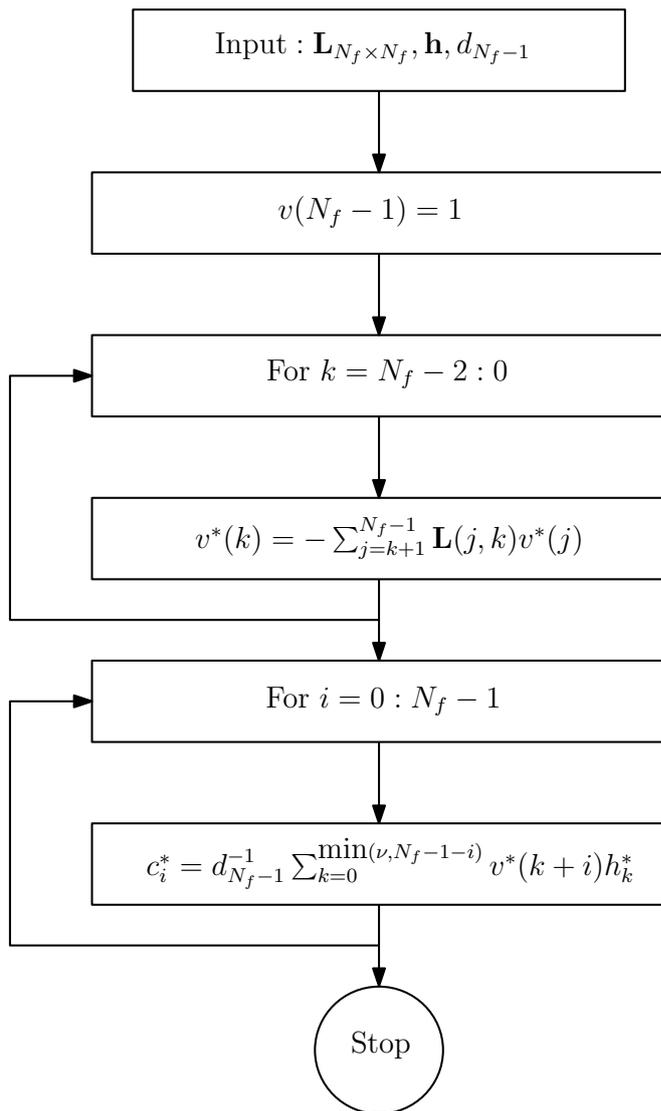


Figura 5.3: Diagramma di flusso per la determinazione del filtro di *feedforward*.

Tabella 5.1: Complessità computazionale dell'algoritmo per la determinazione del filtro di *feedback*: moltiplicazioni complesse.

Passi dell'algoritmo	Moltiplicazioni complesse
$d_i = \mathbf{G}_i(0) ^2$	$2(N_f - 1)$
$l_i(D) = D^i \mathbf{G}_i(D) \mathbf{G}_i^*(0) d_i^{-1}$	$4N_f + 2N_f \nu$
$\begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \end{bmatrix} = d_i^{-\frac{1}{2}} \mathbf{G}_i(0)$	$2(N_f - 1)$
$D\mathbf{G}_{i+1}(D) = \mathbf{G}_i(D) \begin{bmatrix} \alpha_i D & -\beta_i \\ \beta_i^* D & \alpha_i \end{bmatrix}$	$4(N_f - 1)(\nu + 1)$
Totale	$6N_f \nu + 12N_f - 4\nu - 8$

 Tabella 5.2: Complessità computazionale dell'algoritmo per la determinazione del filtro di *feedback*: addizioni complesse.

Passi dell'algoritmo	Addizioni complesse
$d_i = \mathbf{G}_i(0) ^2$	$N_f - 1$
$l_i(D) = D^i \mathbf{G}_i(D) \mathbf{G}_i^*(0) d_i^{-1}$	$N_f(\nu + 1)$
$\begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \end{bmatrix} = d_i^{-\frac{1}{2}} \mathbf{G}_i(0)$	0
$D\mathbf{G}_{i+1}(D) = \mathbf{G}_i(D) \begin{bmatrix} \alpha_i D & -\beta_i \\ \beta_i^* D & \alpha_i \end{bmatrix}$	$2(N_f - 1)(\nu + 1)$
Totale	$3N_f \nu + 4N_f - 2\nu - 3$

 Tabella 5.3: Complessità computazionale dell'algoritmo per la determinazione del filtro di *feedforward* con metodo BSM: moltiplicazioni complesse.

	Moltiplicazioni complesse
Back Substitution for $N_f \geq \nu + 1$	$(N_f^2 + 3N_f + 2N_f \nu - \nu^2 - 3\nu)/2$
Back Substitution for $N_f < \nu + 1$	N_f^2

5. ALGORITMI DI EQUALIZZAZIONE

Tabella 5.4: Complessità computazionale dell'algoritmo per la determinazione del filtro di *feedforward* con metodo BSM: addizioni complesse.

Addizioni complesse	
Back Substitution	$(N_f^2 - 3N_f + 2N_f\nu - \nu^2 - 3\nu + 2)/2$
for $N_f \geq \nu + 1$	
Back Substitution	$(N_f - 1)^2$
for $N_f < \nu + 1$	

come risulta in Tabella 5.3 e 5.4. La complessità globale per il progetto ottimale dell'equalizzatore DFE è dunque $O(N^2)$ nel caso peggiore. In Figura 5.4 è illustrato il raffronto, in termini di complessità computazionale globale espressa in MIPS (*Million Instructions Per Second*), tra l'algoritmo oggetto di analisi e l'algoritmo iterativo RLS [1] per diverse scelte del numero di coefficienti dei filtri di *feedforward* e di *feedback*. L'algoritmo che utilizza la fattorizzazione di Cholesky risulta nettamente migliore esibendo una complessità che, in particolar modo per un elevato numero dei coefficienti dei due filtri, ne manifesta la superiorità.

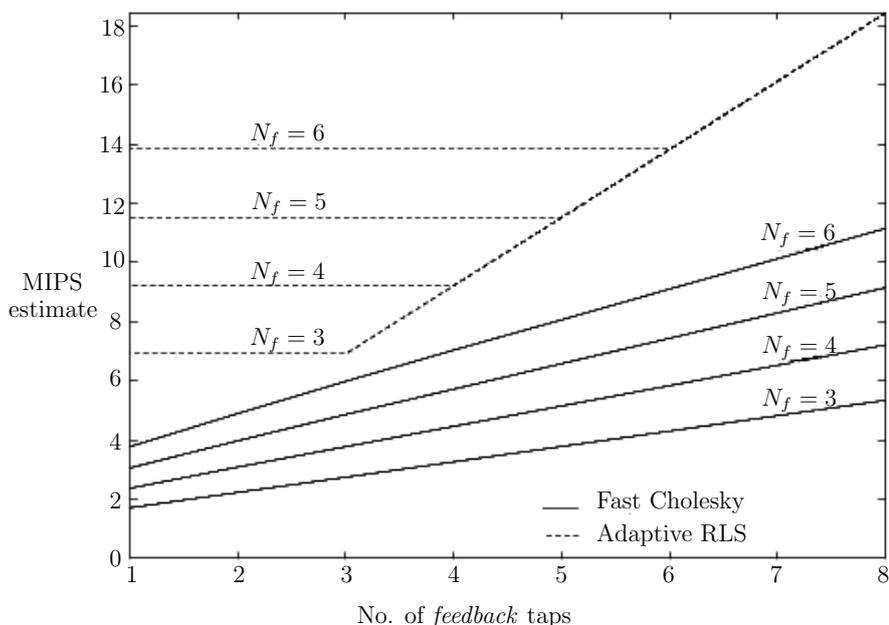


Figura 5.4: Comparazione della complessità computazionale tra l'algoritmo di fattorizzazione di Cholesky e l'algoritmo adattativo RLS.

Capitolo 6

Conclusioni

In questo documento si è presentato un sistema basato su un modem GMSK nelle sue parti fondamentali: modulatore, modello del canale ed equalizzatore. Si è visto come l'impiego della modulazione GMSK consenta di ottenere un risparmio nell'occupazione di banda del segnale modulato, a discapito di un aumento dell'interferenza di intersimbolo sul segnale stesso. Per il prodotto $B_t T = 0.5$ si è trovato che la larghezza della risposta impulsiva dell'impulso di trasmissione può essere approssimata ad un intervallo di estensione $4T$ e che l'ISI non si estende oltre tre periodi di simbolo. Tre possibili schemi del modulatore sono stati forniti per l'implementazione. Il canale trasmissivo è stato modellato come un canale radio *multipath* costituito da 5 cammini tra trasmettitore e ricevitore la cui descrizione statistica del *fading* è di tipo Rice. Si è osservato come un'ottima equalizzazione di tale canale sia ottenibile mediante un equalizzatore DFE che, usufruendo della sequenza di *training* contenuta nel preambolo dei pacchetti d'informazione, ricostruisce l'ISI prodotta rispetto al simbolo da rivelare e la elimina dal campione associato. La progettazione del DFE con metodo diretto, cioè tramite la stima del canale trasmissivo e il calcolo dell'inversa della matrice di autocorrelazione del segnale in ingresso al DFE, porge una soluzione analitica ottima ma, nella sua implementazione, inefficiente dal punto di vista computazionale richiedendo una complessità nel caso peggiore pari a $O(N^3)$. Si è quindi analizzato un metodo alternativo per la determinazione dei coefficienti dei filtri di *feedforward* e *feedback* che fa uso della fattorizzazione di Cholesky di una matrice strutturata trovando che il filtro di *feedback* è dato da una delle colonne della matrice triangolare inferiore che fattorizza la suddetta matrice. La computazione del filtro di *feedforward*

6. CONCLUSIONI

segue poi utilizzando un metodo di sostituzioni successive. Un buon compromesso tra velocità di convergenza dell'algoritmo ed eliminazione dell'ISI per la corretta rivelazione dei simboli trasmessi conduce alla scelta progettuale di utilizzare 6 o 7 coefficienti per ciascuno dei filtri di *feedforward* e *feedback*. L'algoritmo analizzato è caratterizzato da una complessità computazionale $O(N^2)$ e risulta quindi meno costoso del metodo diretto e implementabile tramite un'architettura *hardware* e *software* semplificata.

Bibliografia

- [1] N. Benvenuto, G. Cherubini, *Algorithms for Communications Systems and their Applications*. Chichester: John Wiley & Sons, 2002.
- [2] G. Cariolaro, G. Pierobon, *Processi Aleatori*. Padova: Libreria Progetto, 1993.
- [3] N. Al-Dhahir, J. Cioffi, "Fast Computation of Channel Estimate Based Equalizers in Packet Data Transmission", *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 43, pp. 2462-2473, Nov. 1991.
- [4] N. Al-Dhahir, J. Cioffi, "MMSE Decision Feedback Equalizers: Finite Length Results", *IEEE Trans. on Information Theory*, vol. 41, pp. 961-975, July 1995.
- [5] V. Olshevsky, *Structured Matrices in Mathematics, Computer Science, and Engineering I*. Atlanta: American Mathematical Society, 2001.
- [6] T. Kailath, S. Y. Kung, M. Morf, "Displacement Rank of a Matrix", *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1(5): 769-773, Sept. 1979.