

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Effetto di memoria in elettromagnetismo

Relatore

Prof. Volpato Roberto

Laureando

Matteo Maliqati

Anno Accademico 2022/2023

Abstract

L'effetto di memoria in elettromagnetismo è un fenomeno che mostra che anche a livello classico le trasformazioni di gauge asintotiche, cioè che non si annullano all'infinito, siano simmetrie fisiche del sistema e non semplicemente ridondanze. Lo scopo di questa tesi è di descrivere tale fenomeno da un punto di vista teorico e discuterne poi le conseguenze potenzialmente osservabili.

Indice

| | |
|---|-----------|
| Introduzione | 2 |
| 1 L'infinito conforme | 3 |
| 1.1 Trasformazioni conformi | 3 |
| 1.2 Diagramma di Penrose | 4 |
| 2 Simmetrie di gauge | 6 |
| 3 Gruppo di simmetria asintotico | 7 |
| 3.1 Condizioni al contorno | 7 |
| 3.1.1 Andamento asintotico dei campi | 7 |
| 3.1.2 Andamento asintotico del potenziale | 8 |
| 3.1.3 Corrispondenza antipodale | 9 |
| 3.2 Trasformazioni di gauge non banali | 10 |
| 3.3 Teorema di Noether | 11 |
| 4 Effetto di memoria | 12 |
| 4.1 Stati di vuoto | 13 |
| 4.2 Transizioni tra stati di vuoto | 14 |
| Conclusione | 16 |
| A Bremsstrahlung | 17 |
| A.1 Catastrofe infrarossa | 17 |
| A.2 Dipendenza della radiazione soffice | 19 |

Introduzione

L'effetto di memoria è un fenomeno che ha origine nella teoria della relatività generale e fu per la prima volta teorizzato per le onde gravitazionali. Esso consiste nello spostamento permanente di alcune masse di prova dopo il passaggio di un'onda gravitazionale. Da qui quindi il nome *memoria*, in quanto il passaggio dell'onda modifica in maniera permanente la geometria dello spazio-tempo.

Recenti studi tuttavia hanno mostrato che tale fenomeno ha un analogo per l'elettromagnetismo. In questo caso vi sono delle cariche di prova che vengono investite da un'onda elettromagnetica, e dopo il suo passaggio queste hanno uno spostamento permanente.

Studi recenti hanno mostrato come ci sia un interessante collegamento tra l'effetto di memoria e le simmetrie asintotiche di gauge, ovvero le simmetrie di gauge nel dominio asintotico dello spazio-tempo. Lo scopo di questa tesi è studiare proprio questo legame. In particolare quello che vedremo è che l'effetto di memoria è un fenomeno fisicamente misurabile degli effetti delle trasformazioni di gauge larghe.

Nel primo capitolo andremo a definire il contesto geometrico in cui lavoreremo, introducendo uno strumento utile per tale studio, ovvero il *diagramma di Penrose*. Inoltre definiremo delle nuove coordinate adatte allo studio di una teoria asintotica.

Nel secondo capitolo procederemo brevemente a rivedere la simmetria di gauge per una teoria di campo classica, definendo le trasformazioni di gauge e vedendo che effetto hanno sull'azione dell'elettrodinamica.

Nel terzo capitolo invece procederemo a definire attentamente il *gruppo di simmetria asintotico*, ovvero l'insieme delle simmetrie nel dominio asintotico dello spazio-tempo. In particolare definiremo quali saranno le trasformazioni di gauge possibili, e vedremo essere quelle che preservano determinate condizioni al contorno che imporremo.

Nel quarto e ultimo capitolo andremo a proporre un esperimento mentale per provare a misurare l'effetto di memoria. Procederemo in seguito a studiare il legame tra le trasformazioni di gauge larghe e lo spostamento trovato nell'esperimento, e vedremo che ciò che li lega saranno le *transizioni di vuoto*.

Infine in appendice andremo a vedere una possibile origine della radiazione, ovvero la *bremstrahlung* e in particolare come questa sia legata alla produzione di un numero infinito di fotoni a bassa energia. Il motivo di questo interesse risulterà più chiaro alla fine di questa tesi.

1 L'infinito conforme

Lo spazio-tempo di Minkowski è non compatto e senza bordo, il che significa che ci si può muovere illimitatamente sia lungo la dimensione temporale che lungo le dimensioni spaziali. Tuttavia per capirne meglio la struttura causale e per capire il comportamento di teorie fisiche nel limite di distanze infinite dall'origine, conviene avere una rappresentazione compatta di tale spazio. In particolare a noi interessa studiare la teoria di Maxwell nella regione che le onde elettromagnetiche raggiungono asintoticamente. In questo capitolo presentiamo dunque uno strumento utile a tale scopo: il diagramma di Penrose. Procederemo a definirlo dando prima la definizione di trasformazione conforme.

1.1 Trasformazioni conformi

Iniziamo definendo la metrica di partenza, nello spazio-tempo di Minkowski essa è

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (1.1)$$

Una trasformazione conforme è una trasformazione che riscalda la metrica, e viene scritta come

$$ds^2 \rightarrow \widehat{ds}^2 = \Omega(x)^2 ds^2 \quad (1.2)$$

dove $\Omega(x)$ è chiamato fattore conforme. Il fattore conforme è una funzione delle coordinate spaziotemporali che ci permette di avere una nuova metrica riscalando quella di partenza. Per definire il diagramma di Penrose, l'idea è di considerare un fattore conforme che "restringa" le distanze in maniera sufficientemente rapida affinché ciò che si trova infinitamente lontano arrivi ad una distanza finita dall'origine. Questo dunque ci permette di avere una rappresentazione compatta dello spazio-tempo.

In particolare, richiediamo che la trasformazione conforme soddisfi le seguenti condizioni:

- Deve essere sufficientemente regolare nel suo dominio di definizione.
- L'infinito conforme si trova ad una distanza finita dall'origine

$$\Delta s = \int_0^\infty \widehat{ds} = \int_0^\infty \Omega(r) dr < \infty. \quad (1.3)$$

- La frontiera conforme deve essere compatta, ovvero detta \widehat{M} la nuova varietà, si ha

$$\int_{\partial \widehat{M}} \widehat{d\gamma} < \infty \quad (1.4)$$

dove $\widehat{d\gamma}$ è la metrica indotta sulla frontiera $\partial \widehat{M}$.

- $\Omega(x^\mu) > 0$ per le coordinate originali.
- Dato che possiamo espandere la nostra nuova varietà fino ad includere l'infinito conforme, il fattore conforme deve annullarsi in quella regione: $\Omega(\infty) = 0$. Questo di fatto corrisponde a chiedere che la varietà sia liscia all'infinito e che abbia curvatura finita in ogni punto.

Un'importante proprietà delle trasformazioni conformi è quella di preservare gli angoli tra due vettori, e come conseguenza abbiamo che anche la tipologia di vettore (tipo spazio, luce e tempo) viene preservato. Abbiamo infatti

$$\begin{cases} \widehat{g}_{\mu\nu} V^\mu V^\nu < 0 \iff \Omega^2 g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu < 0 \\ \widehat{g}_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = 0 \iff \Omega^2 g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = 0 \\ \widehat{g}_{\mu\nu} V^\mu V^\nu > 0 \iff \Omega^2 g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu > 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Quindi abbiamo che una curva di tipo tempo, luce o spazio nello spazio-tempo originale rimane di tipo tempo, luce o spazio dopo la trasformazione conforme. Si dice quindi che la trasformazione non cambia la struttura causale dello spazio-tempo.

1.2 Diagramma di Penrose

Il diagramma di Penrose è uno strumento che mette in luce le proprietà di uno spazio-tempo quadridimensionale attraverso un piano bidimensionale, tramite la compattificazione delle tre coordinate spaziali in una. Ciò viene fatto eliminando le coordinate angolari e prendendo in considerazione solo la coordinata radiale, in altre parole mappiamo uno spazio (1,3)-dimensionale in un diagramma (1,1)-dimensionale. In questo modo ogni punto del diagramma (esclusi i bordi) rappresenta di fatto una due-sfera S^2 . Questa operazione viene svolta proprio tramite una trasformazione conforme, e dunque viene preservata la causalità dello spazio-tempo. La caratteristica più importante di questa rappresentazione sta nel fatto che le distanze infinite vengono mappate ad una distanza finita. Proprio per questa proprietà, i diagrammi di Penrose vengono usati per studiare l'andamento asintotico all'infinito.

Introduciamo ora due nuove coordinate, che risulteranno utili allo studio del diagramma di Penrose e successivamente allo studio dei campi elettromagnetici. Esse sono definite come

$$\begin{cases} u = t - r \\ v = t + r \end{cases} \quad (1.6)$$

chiamate rispettivamente tempo ritardato e tempo avanzato, e hanno dominio $-\infty < u, v < +\infty, u < v$. Esse ci permettono di distinguere tra diversi tipi di infiniti, in base a quale coordinata decidiamo di mandare all'infinito. Possiamo riassumerli come segue:

- *Future timelike infinity*, $t \rightarrow +\infty$, è la regione dello spazio-tempo situata nel lontano futuro, e viene denotata come i^+ .
- *Past timelike infinity*, $t \rightarrow -\infty$, è la regione dello spazio-tempo situata nel distante passato, e viene denotata come i^- .
- *Spacelike infinity*, $r \rightarrow +\infty$, è la regione dello spazio-tempo dove ogni interazione svanisce, e viene denotata come i^0 . Questo infinito non può essere raggiunto entro un tempo finito.
- *Future null infinity*, u fissato e $r \rightarrow +\infty$, è l'infinito raggiunto da un raggio di luce dopo un tempo infinito, e viene denotato come \mathcal{J}^+ . Può essere ulteriormente suddiviso, \mathcal{J}^+_{\pm} viene raggiunto nel limite $u \rightarrow \pm\infty$.
- *Past null infinity*, v fissato e $r \rightarrow \infty$, è l'infinito raggiunto da un raggio di luce dopo un tempo infinito nel passato (o analogamente dove il raggio di luce ha avuto origine), e viene denotato come \mathcal{J}^- . Può essere ulteriormente suddiviso, \mathcal{J}^-_{\pm} viene raggiunto nel limite $u \rightarrow \pm\infty$.

Di particolare importanza sono i *null infinities*, infatti per un raggio di luce le coordinate spaziali non sono ben definite nel limite $t \rightarrow \infty$ in quanto anche $r \rightarrow +\infty$, tuttavia u (oppure v) rimane finito. Per analizzare in maniera corretta l'andamento spaziale risulta utile considerare il limite $r \rightarrow +\infty$ mantenendo u costante. L'effetto di memoria viene studiato proprio nel limite $r \rightarrow +\infty$, e il tempo ritardato ed avanzato vengono usati per evitare problemi di definizione delle coordinate. Inoltre nel caso dell'elettromagnetismo la radiazione è composta da fotoni, rendendo necessario un approccio di questo tipo.

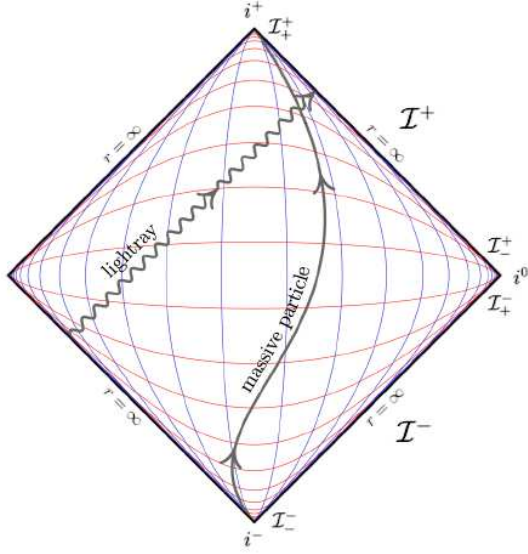


Figura 1: Diagramma di Penrose esteso alla regione $r < 0$.

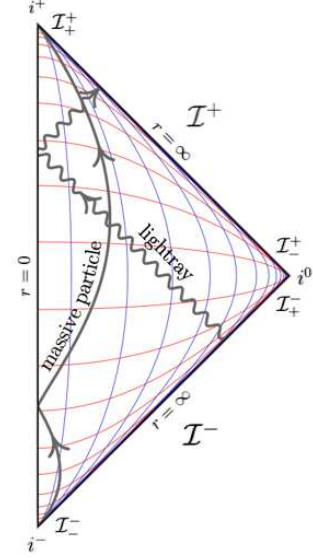


Figura 2: Diagramma di Penrose ottenuto dalla trasformazione conforme.

Come si vede dalle immagini¹ sopra, i raggi di luce iniziano in \mathcal{I}^- , vengono riflesse a $r = 0$ e poi finiscono in \mathcal{I}^+ . Sarà questo il caso delle onde elettromagnetiche.

Concludiamo ora scrivendo la nuova metrica, nello spazio-tempo di Minkowski in coordinate sferiche assume la forma

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 \gamma_{AB} dz^A dz^B \quad (1.7)$$

dove z^A , con $A = 1, 2$, sono le coordinate angolari e γ_{AB} è la metrica della sfera unitaria. Passando alle nuove coordinate troviamo

$$ds^2 = du^2 + 2dudr - r^2 \gamma_{AB} dz^A dz^B \quad (1.8)$$

nelle coordinate (u, r, z^A) con u tempo ritardato e

$$ds^2 = dv^2 - 2dvdr - r^2 \gamma_{AB} dz^A dz^B \quad (1.9)$$

nelle coordinate (v, r, z^A) con v tempo avanzato.

¹Immagini prese da [5].

2 Simmetrie di gauge

In questo capitolo vogliamo rivedere brevemente le simmetrie di gauge per una teoria di campo classica. Iniziamo con lo scrivere l'azione del campo elettromagnetico $F_{\mu\nu}$ accoppiato a una quadricorrente j_μ , essa è

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - j^\mu A_\mu \right) \quad (2.1)$$

dove

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.2)$$

con A_μ quadripotenziale. Inoltre j^μ soddisfa l'equazione di continuità

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (2.3)$$

Una trasformazione di gauge agisce sul campo come

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda \quad (2.4)$$

da cui otteniamo la variazione

$$\delta A_\mu = A'_\mu - A_\mu = \partial_\mu \lambda. \quad (2.5)$$

La lagrangiana sotto questa variazione diventa

$$\delta \mathcal{L} = (-\partial_\mu \lambda) j^\mu = -\partial(\lambda j^\mu) + \lambda \partial_\mu j^\mu \cong \lambda \partial_\mu j^\mu \quad (2.6)$$

sfruttando l'equazione (2.3) troviamo allora $\delta \mathcal{L} = 0$.

Questo prende il nome di *simmetria di gauge*, in quanto dopo una trasformazione di gauge la lagrangiana non varia. Questo significa che le trasformazioni di gauge sono rindodanze di un sistema fisico e non effetti misurabili.

Tuttavia noi studieremo come una determinata classe di trasformazioni di gauge, dette trasformazioni di gauge *larghe*, portano ad effetti fisici misurabili.

3 Gruppo di simmetria asintotico

L'effetto di memoria è un fenomeno che avviene nella regione del future null infinity \mathcal{J}^+ . Esso, come vedremo meglio nel prossimo capitolo, è legato alle simmetrie asintotiche della teoria elettromagnetica, ovvero l'insieme delle simmetrie nel dominio asintotico dello spazio-tempo. Nel nostro caso, le simmetrie asintotiche corrispondono alle *trasformazioni di gauge larghe*, ovvero che non si annullano all'infinito. In questo capitolo vogliamo definire quindi il *gruppo di simmetria asintotico* \mathcal{G}

$$\mathcal{G} = \frac{\text{Trasformazioni di gauge che preservano le condizioni al contorno}}{\text{Trasformazioni di gauge strette}}. \quad (3.1)$$

Con *trasformazioni di gauge strette* intendiamo trasformazioni di gauge con parametro di gauge λ aventi supporto compatto. Esse vanno viste come trasformazioni banali, ovvero ridondanze del formalismo che non vanno a modificare gli stati fisici del potenziale A_μ . Nel prossimo paragrafo andremo a studiare le condizioni al contorno che il campo elettromagnetico $F_{\mu\nu}$ e il potenziale A_μ devono rispettare in maniera tale che \mathcal{G} sia ben definito.

3.1 Condizioni al contorno

Per definire bene \mathcal{G} è necessario imporre delle condizioni al contorno su $F_{\mu\nu}$ e su A_μ . Queste sono l'andamento asintotico ai null infinities in \mathcal{J}^+ e la corrispondenza antipodale al spacelike infinity in i^0 . Tuttavia risulta legittimo chiedersi come sapere a priori quali siano le condizioni al contorno da utilizzare. La risposta in realtà è che non lo sappiamo. Non vi è un criterio generale per la scelta, anche se ne esistono alcuni più comunemente usati (energia finita, flusso di energia finita, etc...). Quello che noi faremo sarà prendere i campi di Lienard-Wiéchert generati da una carica in moto, trovarne l'andamento asintotico, e adottare quello. Dunque il campo elettromagnetico generato da un numero finito di cariche in moto arbitrario seguirà a loro volta quell'andamento asintotico. Quest'ultimo aspetto risulta particolarmente importante, infatti vedremo che la radiazione che arriva al future null infinity è prodotta da un *bulk* di particelle cariche, quindi nonostante non risulti importante il modo in cui esse la producano, risulta fondamentale sapere come si comporta in \mathcal{J}^+ .

3.1.1 Andamento asintotico dei campi

Iniziamo quindi calcolando l'andamento asintotico del campo elettromagnetico generato da una carica in moto in coordinate sferiche. Come sappiamo il campo elettrico e magnetico di una carica in moto in un punto di coordinate (t, \vec{r}) dipendono da posizione, velocità e accelerazione della carica nel cono luce passato di (t, \vec{r}) . Possiamo allora definire

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_{rit} \quad (3.2)$$

ovvero il vettore corrispondente alla distanza tra \vec{r} e la posizione ritardata \vec{r}_{rit} della carica nel cono luce passato. Indichiamo poi con $R = |\vec{R}|$, $\hat{R} = \vec{R}/R$ ed infine $\vec{s} = \hat{R} - \vec{\beta}$, dove con $\vec{\beta}$ indichiamo la velocità della particella carica nella posizione ritardata. Possiamo allora scrivere l'espressione per i campi elettrico e magnetico generati da una particella carica in moto²:

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \frac{e}{4\pi} \frac{R}{(\vec{R} \cdot \vec{s})^3} ((1 - \beta^2)\vec{s} + \vec{R} \times (\vec{s} \times \vec{a})) \quad (3.3)$$

²L'espressione qui utilizzata per i campi è quella fornita da [9].

$$\vec{B}(t, \vec{r}) = \widehat{R} \times \vec{E}(t, \vec{r}) \quad (3.4)$$

dove con \vec{a} si intende l'accelerazione della particella (e non l'accelerazione propria) nella posizione ritardata.

Possiamo ora effettuare cambio coordinate, parametrizzando le coordinate sferiche (t, \vec{r}) con le coordinate ritardate (u, r, z^A) , ovvero

$$x^\mu = (t, \vec{r}) = (u + r, r\hat{n}(z^A)). \quad (3.5)$$

In particolare, a u fissato nel limite di R infinito avremo

$$\vec{R} = r\hat{n} + \mathcal{O}(1) \quad (3.6)$$

dove con $\mathcal{O}(1)$ intendiamo un vettore costante. Usando l'espressione (3.6) possiamo trovare l'andamento asintotico dei campi in due casi, nel caso di campo di radiazione ($\vec{a} \neq 0$) e di campo di Coulomb ($\vec{a} = 0$), in particolare ci interessano le direzioni radiali e tangenziali di \vec{E} e \vec{B} . Definiamo quindi $E_r = \hat{n} \cdot \vec{E}$ e $E_T = \hat{m} \cdot \vec{E}$ (con \hat{m} versore ortogonale a \hat{n}), ed in maniera analoga B_r, B_T . Possiamo scrivere allora per $\vec{a} \neq 0$

$$E_r \sim \mathcal{O}(1/r^2) \quad E_T \sim \mathcal{O}(1/r) \quad B_r \sim \mathcal{O}(1/r^2) \quad B_T \sim \mathcal{O}(1/r) \quad (3.7)$$

mentre per $\vec{a} = 0$ si ha

$$E_r \sim \mathcal{O}(1/r^2) \quad E_T \sim \mathcal{O}(1/r^2) \quad B_r \sim \mathcal{O}(1/r^2) \quad B_T \sim \mathcal{O}(1/r^2). \quad (3.8)$$

Da ultimo possiamo scrivere l'andamento asintotico dei campi in termini di tensore del campo elettromagnetico dopo il cambio di coordinate in coordinate ritardate. Abbiamo per il campo di radiazione (u generico):

$$F_{ur} \sim \mathcal{O}(1/r^2) \quad F_{uA} \sim \mathcal{O}(1) \quad F_{Ar} \sim \mathcal{O}(1/r^2) \quad F_{AB} \sim \mathcal{O}(1) \quad (3.9)$$

e per il campo di Coulomb ($u = \pm\infty$):

$$F_{ur} \sim \mathcal{O}(1/r^2) \quad F_{uA} \sim \mathcal{O}(1/r) \quad F_{Ar} \sim \mathcal{O}(1/r^2) \quad F_{AB} \sim \mathcal{O}(1/r). \quad (3.10)$$

3.1.2 Andamento asintotico del potenziale

Iniziamo scrivendo l'espressione del potenziale di Lienard-Wiéchert per una carica in moto,³ lavorando nella gauge di Lorenz, cioè $\partial_\mu A^\mu = 0$, si ha:

$$A_\mu(x) = \frac{e}{4\pi} \frac{(\dot{x}_{rit})_\mu}{\dot{x}_{rit} \cdot (x - x_{rit})} \quad (3.11)$$

dove x_{ret} è il punto nella traiettoria della particella nel cono luce passato (quello che prima chiamavamo \vec{r}_{rit} , ora indichiamo con x per non confondere la notazione), definito da

$$x^0 > x_{rit}^0 \quad (3.12)$$

$$(x - x_{rit})^2 = 0 \quad (3.13)$$

mentre \dot{x}_{rit} è la quadrivelocità della particella nel punto x_{rit} . Se ora riscriviamo

$$(\dot{x}_{rit})^\mu = \gamma(1, \vec{\beta}) \quad (\dot{x}_{rit})_\mu = \gamma(1, -\vec{\beta}) \quad (3.14)$$

³L'espressione qui utilizzata per il potenziale è quella fornita da [9].

allora

$$A_\mu(x) = \frac{e}{4\pi} \frac{(1, -\vec{\beta})}{(1, \vec{\beta}) \cdot (x - x_{rit})}. \quad (3.15)$$

Come fatto in precedenza, passando alle coordinate ritardate $u = t - r$ e scrivendo $\vec{x} = r\hat{n}$,

$$x^\mu = (u + r, r\hat{n}) \quad (3.16)$$

quindi

$$\begin{aligned} (1, \vec{\beta}) \cdot (x - x_{rit}) &= u + r - (x_{rit})^0 - r\vec{\beta} \cdot \hat{n} + \vec{\beta} \cdot \vec{x}_{rit} \\ &= r(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n}) + \mathcal{O}(1). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Possiamo allora scrivere le componenti del quadripotenziale nelle coordinate ritardate, esse sono

$$A_u = \frac{e}{4\pi r} \frac{1}{1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n}} + \mathcal{O}(1/r^2) \quad (3.18)$$

$$A_r = \frac{e}{4\pi r} + \mathcal{O}(1/r^2) \quad (3.19)$$

$$A_A = -\frac{e}{4\pi} \frac{\partial_A \hat{n} \cdot \vec{\beta}}{1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n}} + \mathcal{O}(1/r). \quad (3.20)$$

Se la particella si muove di velocità costante, allora $\vec{\beta}$ sarà costante, e questo ci permette di scrivere

$$A_A = \frac{e}{4\pi} \partial_A \log(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n}) + \mathcal{O}(1/r). \quad (3.21)$$

A_A è *puro gauge*, ovvero una derivata totale. A partire da questo richiederemo quindi che A_A debba essere *puro gauge* a $u = \pm\infty$ per le nostre condizioni al contorno.

Riassumendo quindi per il potenziale abbiamo gli andamenti asintotici

$$A_u \sim \mathcal{O}(1/r) \quad A_r \sim \mathcal{O}(1/r) \quad A_A \sim \mathcal{O}(1). \quad (3.22)$$

Inoltre, essendo $A_A^{(0)}$ (ovvero il termine noto nell'espansione del potenziale) *puro gauge*, a $u = \pm\infty$, possiamo scrivere

$$A_A^{(0)}(u = \pm\infty) = \partial_A \phi_\pm \quad (3.23)$$

per una qualche funzione $\phi_\pm = \phi_\pm(z^A)$. Notiamo infine che quanto ricavato fin'ora ha un analogo in \mathcal{J}^- usando le coordinate avanzate.

3.1.3 Corrispondenza antipodale

L'ultima condizione che richiediamo è che per il campo di Coulomb valga in i^0

$$F_{\mu\nu}(-t, -\vec{r}) = -F_{\mu\nu}(t, \vec{r}). \quad (3.24)$$

Questa condizione è una conseguenza dell'invarianza di Lorentz. Sappiamo infatti che il campo elettrico e il campo magnetico prodotti da una carica in moto non accelerato nell'origine si annullano quando ad esso sommiamo lo stesso campo ma riflesso rispetto l'origine, quindi per $\vec{r} \mapsto -\vec{r}$. Se ora effettuiamo un boost, come in figura 4, vediamo che i campi si annullano quando $(t, \vec{r}) \mapsto (-t, -\vec{r})$.



Figura 3: Simmetria nell'origine $t = 0$.

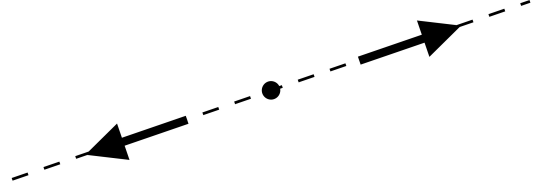


Figura 4: Simmetria nell'origine $t' = \gamma(t - \beta x) = 0$ a seguito di un boost.

La condizione (3.24) è dunque una conseguenza della simmetria per boost.

3.2 Trasformazioni di gauge non banali

Come abbiamo già visto in precedenza, A_μ ha le simmetrie di gauge

$$\delta A_u = \partial_u \lambda \quad \delta A_r = \partial_r \lambda \quad \delta A_A = \partial_A \lambda. \quad (3.25)$$

Per ottenere \mathcal{G} di equazione (3.1) dobbiamo fare in modo che le trasformazioni di gauge che definiamo rispettino le condizioni al contorno definite nel precedente paragrafo. In particolare, vogliamo vedere come queste condizioni si traducono per il parametro di gauge λ , che di fatto regola la trasformazione.

Iniziamo con l'andamento asintotico. Possiamo effettuare un'espansione di λ attorno a \mathcal{J}^+ e \mathcal{J}^-

$$\lambda(u, r, z^A) = \lambda^+(u, z^A) + \frac{\lambda_{(1)}^+(u, z^A)}{r} + \dots \quad \text{in } \mathcal{J}^+ \quad (3.26)$$

$$\lambda(v, r, z^A) = \lambda^-(v, z^A) + \frac{\lambda_{(1)}^-(v, z^A)}{r} + \dots \quad \text{in } \mathcal{J}^-. \quad (3.27)$$

Vediamo quindi che per preservare le condizioni asintotiche sul potenziale il termine noto λ^+ (λ^-) deve essere indipendente da u (v).

$$\lambda^+ = \lambda^+(z^A) \quad (3.28)$$

$$\lambda^- = \lambda^-(z^A) \quad (3.29)$$

Per quanto riguarda la corrispondenza antipodale invece, affinché essa venga rispettata dobbiamo imporre

$$\lambda^+(z^A) = \lambda^-(-z^A). \quad (3.30)$$

Queste due condizioni su λ fanno sì che una qualsiasi trasformazione di gauge con parametro di gauge λ preservi le condizioni al contorno definite in precedenza.

L'ultima cosa su cui dobbiamo porre la nostra attenzione sono le trasformazioni di gauge strette. Come abbiamo già detto, esse sono quelle trasformazioni con parametro di gauge a supporto compatto. Queste, seppur non presentano alcun problema, sono trasformazioni banali. Per definire al meglio \mathcal{G} vogliamo identificare due trasformazioni $\lambda(u, r, z^A)$ e $\lambda'(u, r, z^A)$ che abbiano lo stesso termine noto $\lambda^+(z^A) = \lambda'^+(z^A)$ (analogamente per $\lambda^-(z^A)$), ma differiscano solo per i termini tendenti a zero nel limite $r \rightarrow +\infty$. Questo vuole dire che consideriamo λ e λ' come se fossero lo stesso elemento di \mathcal{G} e non due elementi diversi. In particolare, le trasformazioni a supporto compatto non sono escluse, ma le identifichiamo tutte con la trasformazione $\lambda = 0$. In altre parole, quello che conta per identificare i diversi elementi di \mathcal{G} , è solo il termine noto

λ^+ (analogamente λ^-), e non i termini di ordine superiore in r .

Abbiamo quindi finito di definire il gruppo delle simmetrie asintotiche dell'elettromagnetismo:

$$\mathcal{G} = \left\{ \lambda : \lambda^+ \text{ e } \lambda^- \text{ sono indipendenti da } u, v \text{ in } \mathcal{J}^+ \text{ e } \mathcal{J}^-, \text{ e } \lambda^+(z^A) = \lambda^-(z^A) \right\}. \quad (3.31)$$

Il gruppo di simmetria asintotico consiste quindi nell'insieme di trasformazioni di gauge larghe con λ indipendente da u (v) in \mathcal{J}^+ (\mathcal{J}^-), ovvero λ diverso da zero all'infinito, e vedremo essere trasformazioni fisiche di A_μ .

3.3 Teorema di Noether

Concludiamo questo capitolo facendo un'osservazione. Abbiamo definito quali sono le simmetrie asintotiche dell'elettromagnetismo, e come sappiamo, in una teoria di campo a delle simmetrie corrispondono delle leggi di conservazione, come risultato del *teorema di Noether*. Ci chiediamo quindi se sia possibile utilizzarlo in questa situazione. La risposta è affermativa, e a queste simmetrie, si può far vedere, corrispondono una quantità infinita non numerabile di cariche conservate. Tuttavia questo studio risulta piuttosto complicato ed esula dallo scopo di questa tesi.

4 Effetto di memoria

Vogliamo studiare ora più in dettaglio l'effetto di memoria, e descriviamo a tal proposito un esperimento mentale.

Immaginiamo di avere una carica di prova immersa in una vasca con del liquido viscoso come mostrato in figura 5.⁴

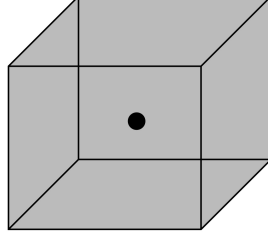


Figura 5: Carica di prova all'interno di una vasca di liquido viscoso.

Supponiamo poi che questo fluido imprima una forza viscosa, in maniera tale che l'equazione del moto sia

$$m \frac{d^2}{dt^2} \vec{x} = \vec{F}_{ext} - b \frac{d}{dt} \vec{x} \quad (4.1)$$

dove \vec{F}_{ext} è la forza esterna agente sulla particella e b è una costante di proporzionalità che regola l'intensità della forza viscosa. Integrando ora entrambi i membri dell'equazione otteniamo

$$m \Delta \vec{v} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}_{ext} dt - b \Delta \vec{x}. \quad (4.2)$$

Assumendo che la particella sia inizialmente a riposo, e che \vec{F}_{ext} sia non nulla per un intervallo di tempo finito, allora per $b > 0$ la particella tornerà di nuovo a riposo. Questo implica quindi che $\Delta \vec{v} = 0$, dunque

$$\Delta \vec{x} = \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}_{ext} dt. \quad (4.3)$$

Immaginiamo ora di avere un grande numero di cariche di prova immerse nel liquido viscoso, aventi tutte cariche e , e posizioniamole in una sfera a distanza r molto grande. Supponiamo poi che tali cariche di prova siano sottoposte all'azione combinata di un campo elettrico e magnetico generati da un *bulk* di particelle cariche accelerate a distanze piccole dall'origine. La forza esterna che agisce su ciascuna carica di prova è la forza di Lorentz, che assume la forma

$$\vec{F}_{ext} = e \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right). \quad (4.4)$$

Se supponiamo che le cariche di prova si muovano molto lentamente ($v/c \ll 1$), il contributo della forza legato al campo magnetico diventa trascurabile. Allora solo il campo elettrico è responsabile della forza esterna. Se scriviamo la componente tangenziale del vettore spostamento, troviamo, utilizzando le coordinate ritardate

$$\Delta x_A = \frac{e}{b} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{uA} du. \quad (4.5)$$

⁴Immagine presa da [1].

Possiamo riscrivere l'integrale come

$$\Delta x_A = \frac{e}{b} \int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_u A_A - \partial_A A_u) du. \quad (4.6)$$

Ricordando l'andamento del potenziale definito dalle (3.22)

$$A_A = A_A^{(0)} + \mathcal{O}(1/r) \quad A_u = \mathcal{O}(1/r) \quad (4.7)$$

il secondo termine nell'integrale è trascurabile per $r \rightarrow +\infty$. Allora otteniamo

$$\Delta x_A = \frac{e}{b} \left(A_A^{(0)}(+\infty) - A_A^{(0)}(-\infty) \right). \quad (4.8)$$

Siamo quindi riusciti a determinare lo spostamento nella direzione tangenziale delle cariche di prova, esso corrisponde a

$$\Delta x_A = \frac{e}{b} \Delta A_A^{(0)}. \quad (4.9)$$

Notiamo che, essendo $\Delta x_A = r \partial_A \hat{n} \cdot \Delta \vec{x}$, lo spostamento totale tra le cariche ha un andamento del tipo $1/r$.

La cosa sorprendente non è tanto il fatto che ci sia uno spostamento delle cariche, ma quanto il fatto che questo dipenda dalla differenza tra il valore asintotico del potenziale ad $u = +\infty$ ed $u = -\infty$. Ricordiamo che abbiamo assunto che il potenziale asintotico $A^{(0)}$ fosse pura gauge nei limiti $u \rightarrow +\infty$ e $u \rightarrow -\infty$, e quindi ci aspetteremmo che i loro valori non abbiano alcun significato fisico misurabile. D'altra parte, abbiamo appena ricavato una quantità effettivamente misurabile che dipende da questi valori. Nel prossimo paragrafo vogliamo capire meglio l'origine matematica di questo fenomeno, e studiarne la relazione con le trasformazioni di gauge larghe.

4.1 Stati di vuoto

A partire da come è stato definito il gruppo di simmetria asintotico, possiamo finalmente cercare il legame tra le trasformazioni di gauge larghe e l'effetto di memoria.

Nella regione \mathcal{J}_{\pm}^{\pm} (ovvero la regione di \mathcal{J}^+ con $u = \pm\infty$), la componente tangente di A_{μ} , che abbiamo denotato con A_A , può essere espressa come derivata totale di una funzione dipendente solamente dalle coordinate angolari z^A . Possiamo quindi scrivere

$$A_A(u = \pm\infty) = \partial_A \phi_{\pm} \quad (4.10)$$

dove abbiamo $\phi_{\pm} = \phi_{\pm}(z^A)$. Quando A_A può essere espressa in questa forma, diciamo che si trova in uno *stato di vuoto*. Si potrebbe pensare che le funzioni ϕ_{\pm} non abbiano significato, in quanto è sempre possibile trasformarle tramite una trasformazione di gauge. Tuttavia, come abbiamo studiato nel precedente capitolo, le trasformazioni di gauge larghe consentite in \mathcal{G} sono indipendenti da u , dunque nonostante si possano cambiare ϕ_+ e ϕ_- insieme come

$$\phi_+(z^A) \mapsto \phi_+(z^A) + \lambda(z^A) \quad (4.11)$$

$$\phi_-(z^A) \mapsto \phi_-(z^A) + \lambda(z^A) \quad (4.12)$$

non può essere cambiata la differenza $\phi_+ - \phi_-$. Questa differenza come vedremo conserverà le informazioni di qualsiasi processo avvenuto alle particelle cariche del bulk. In particolare, questa differenza dipenderà solamente dalle velocità iniziali e finali delle particelle. La radiazione emessa durante l'accelerazione indurrà una *transizione di vuoto*. \mathcal{J}_{\pm}^{\pm} sarà in uno stato di vuoto, \mathcal{J}_{\pm}^{\pm} in un altro stato di vuoto, e questi due stati saranno tra loro diversi.

L'effetto di memoria si basa quindi su questo fenomeno, dopo il passaggio della radiazione elettromagnetica, vi saranno due regioni dello spazio-tempo in due stati di vuoto differenti, e la differenza tra i due stati dipenderà dalle velocità iniziali e finali delle particelle nel bulk che hanno originato la radiazione, in un certo senso quindi la regione dello spazio attraversata dalla radiazione si ricorda del suo passaggio, in quanto essa si trova in uno stato di vuoto diverso. Nel prossimo paragrafi procederemo a descrivere meglio le transizioni tra stati vuoto, e troveremo la relazione con l'effetto di memoria.

4.2 Transizioni tra stati di vuoto

Dall'equazione (3.21), possiamo vedere che nel caso di un bulk di particelle cariche, indicate con $k = 1, \dots, N$ con cariche e_k e velocità costanti $\vec{\beta}_k$, per $r \rightarrow +\infty$ la componente A_A del potenziale assume la forma

$$A_A^{(0)} = \partial_A \sum_k \frac{e_k}{4\pi} \log\left(1 - \vec{\beta}_k \cdot \hat{n}(z^A)\right) \quad (4.13)$$

mentre le componenti A_u e A_r , per via dell'andamento asintotico che abbiamo imposto avere nel precedente capitolo, tendono a zero. Possiamo notare due cose importanti da questa espressione, la prima è che si tratta di puro gauge, quindi essa può essere riscritta come

$$A_A^{(0)} = \partial_A \Phi \quad (4.14)$$

per qualche funzione Φ . La seconda è che Φ dipende solamente dalle velocità delle particelle cariche. Notiamo che l'equazione (4.13) non è gauge invariante, infatti è sempre possibile effettuare una trasformazione di gauge larga $\Phi \mapsto \Phi + \lambda$. Tuttavia, essendo λ indipendente da u , la differenza tra Φ per diversi valori di u sarà gauge invariante.

Se le particelle accelerano e cambiano la loro velocità allora anche Φ cambierà, come mostrato in figura.⁵

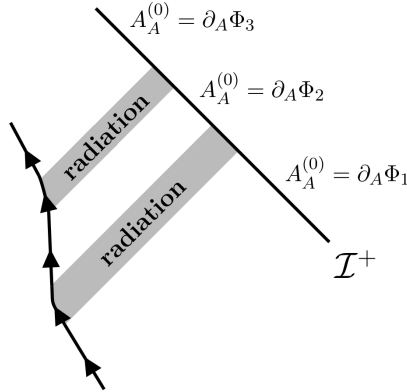


Figura 6: $A_A^{(0)}$ sarà puro gauge prima e dopo il passaggio della radiazione in \mathcal{I}^+ , con $A_A^{(0)} = \partial_A \Phi$ per qualche funzione Φ dipendente solamente dagli angoli. La funzione Φ cambierà e $\Delta\Phi$ dipenderà solamente dalle velocità iniziali e finali delle particelle cariche.

Quando le particelle cariche cambiano la loro velocità emettono radiazione. In \mathcal{I}^+ , questo induce una *transizione di vuoto*. Con questo termine ci riferiamo a una situazione fisica in cui abbiamo due stati di vuoto diversi tra di loro, e riusciamo a distinguerli.

Nel caso dell'elettromagnetismo, possiamo immaginare una situazione come in figura 7,⁶ che

⁵Immagine presa da [1].

⁶Immagine presa da [1].

rappresenta un insieme di particelle diffuse nel passato. Dalla diffusione, quindi dall'accelerazione, viene creato un guscio sferico di radiazione che si propaga alla velocità della luce. In entrambe le regioni delimitate dal guscio i campi sono di Coulomb e A_μ sarà puro gauge, ovvero sarà in uno stato di vuoto. Tuttavia, saranno due stati di vuoto diversi in base alla regione in cui ci si trova. Pertanto la radiazione funge da "muro" che separa stati di vuoto spontaneamente violati.

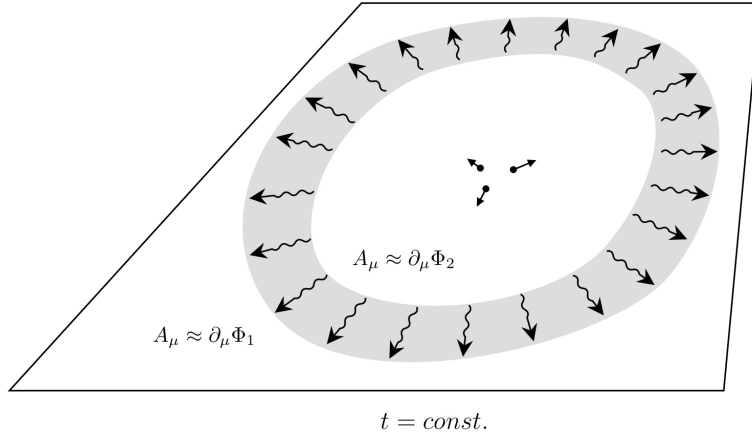


Figura 7: Guscio sferico di radiazione che si espande alla velocità della luce. In entrambe le regioni delimitate, A_μ è puro gauge. Le due regioni si trovano dunque in due stati di vuoto diversi.

È dunque questo il legame tra effetto di memoria e trasformazioni di gauge larghe. Abbiamo trovato che il passaggio della radiazione elettromagnetica definisce due regioni dello spazio-tempo che si trovano in due stati di vuoto differenti. In particolare a $u = -\infty$ avremo $A_A(u = -\infty) = \partial_A \Phi_-$, mentre a $u = +\infty$ avremo $A_A(u = +\infty) = \partial_A \Phi_+$. Nonostante queste due funzioni possano essere cambiate tramite una trasformazione di gauge larga, la loro differenza non dipenderà dalla trasformazione scelta, per via delle condizioni imposte in precedenza. In particolare, tornando all'equazione (4.9), possiamo riscrivere lo spostamento come

$$\Delta x_A = \partial_A(\Phi_+ - \Phi_-). \quad (4.15)$$

Vediamo quindi che, nonostante come detto sia sempre possibile effettuare una trasformazione di gauge larga in maniera tale da porre a pari a zero i potenziali, questo non va a cambiare lo spostamento totale, in quanto la differenza tra gli stati di vuoto è gauge invariante. Questa differenza di vuoto si misura fisicamente proprio tramite lo spostamento Δx_A , il quale dipende da z^A , dunque studiando le cariche di prova a z^A diversi, ottengo valori di spostamento diversi, appunto perché la dipendenza dello spostamento dalle variabili angolari passa attraverso gli stati di vuoto, che come abbiamo precedentemente definito dipendono solamente da z^A .

Abbiamo quindi trovato un fenomeno fisico, lo spostamento delle cariche di prova (diverso per angoli diversi), direttamente legato alla differenza tra due stati di vuoto e quindi alle trasformazioni di gauge larghe. L'effetto di memoria si basa su questo principio, ovvero lo spazio-tempo si *ricorda* della radiazione passata, dividendosi in due regioni in uno stato di vuoto diverso. Questa differenza ha un effetto fisico misurabile, ovvero lo spostamento delle cariche di prova.

Conclusione

In questo lavoro siamo riusciti a trovare una relazione tra l'effetto di memoria in elettromagnetismo e le trasformazioni di gauge larghe. In particolare siamo riusciti a vedere come queste siano fisicamente misurabili e quindi non sono ridondanze come ci si potrebbe aspettare.

Nel primo capitolo abbiamo introdotto le trasformazioni conformi per poter costruire il diagramma di Penrose, in quanto siamo interessati allo studio di questo fenomeno in regioni asintotiche. Successivamente abbiamo introdotto le coordinate ritardate e avanzate, utili per poter lavorare nelle regioni asintotiche.

Nel secondo capitolo abbiamo definito le trasformazioni di gauge e visto che esse, normalmente, non modificano la fisica di un sistema, in quanto la lagrangiana dopo una trasformazione di gauge è equivalente a quella prima della trasformazione.

Nel terzo capitolo invece abbiamo attentamente definito il gruppo di simmetria asintotico, ovvero l'insieme delle simmetrie asintotiche dell'elettromagnetismo. Per fare questo abbiamo considerato le trasformazioni di gauge che preservano delle condizioni al contorno da noi imposte. Esse sono gli andamenti asintotici dei campi e del potenziale e la corrispondenza antipodale. Queste ci dicono che in presenza di radiazione, il campo elettromagnetico rispetterà queste condizioni. Le trasformazioni di gauge che noi possiamo quindi effettuare sono quelle che preservano le condizioni al contorno, escluse quelle banali, ovvero quelle con parametro di gauge aventi supporto compatto.

Infine nel quarto capitolo abbiamo prima descritto un esperimento che ci permetta di osservare questo spostamento delle cariche di prova, in particolare trovando che esso dipende dal valore asintotico del potenziale. Dopodiché abbiamo studiato più nel dettaglio l'origine matematica. Abbiamo trovato che gli stati esprimibili come pura gauge, detti stati di vuoto, sono diversi tra di loro in regioni diverse dello spazio-tempo. Il passaggio della radiazione va a creare queste regioni in stati di vuoto differenti. La differenza tra questi stati di vuoto è una quantità che non può essere annullata, nonostante si effettuino delle trasformazioni di gauge, la differenza rimane costante. Lo spostamento permanente delle cariche di prova dipende proprio da questa differenza, la quale non può mai essere nulla. La trasformazione di gauge che si effettua, che dipende esclusivamente dalle variabili angolari, va a determinare lo spostamento in regioni con angolo diverso. Si trova quindi che la misura dello spostamento, dipendente dalle coordinate angolari, cambia in base alla trasformazione che si effettua. Quello che non cambia è la differenza tra gli stati di vuoto.

Lo scopo di questo studio è quello di mettere in luce le caratteristiche dell'effetto di memoria, allo scopo di poter studiare meglio i fenomeni ad esse collegati. In particolare speriamo che ci aiuti a capire meglio il corrispondente fenomeno nel caso gravitazionale. Inoltre, questo fenomeno può essere approfondito nel campo della meccanica quantistica, introducendo i cosiddetti *soft theorems*.

A Bremsstrahlung

Presentiamo qui in appendice un approfondimento sulla radiazione studiata. Abbiamo considerato fino ad ora fenomeni di diffusione per l'origine di tale radiazione, tuttavia esso non è l'unico. Vediamo qui dunque un'altra possibile origine.

La radiazione emessa da particelle cariche a causa di un'accelerazione momentanea o prolungata nel tempo viene generalmente chiamata *bremssstrahlung*, ovvero *radiazione di frenamento*. Se la particella carica, per esempio un elettrone, si muove di velocità costante, essa produrrà un campo *coulombiano*, tuttavia in presenza di un'accelerazione questo cambia. Infatti, oltre al termine asintotico $1/r^2$, si aggiunge una componente legata all'accelerazione della particella della forma $1/r$ che decrescendo più debolmente diventa il termine prevalente a grandi distanze. Avremo quindi il *campo di velocità*

$$F_v^{\mu\nu} \sim \frac{1}{r^2} \quad (\text{A.1})$$

e il *campo di accelerazione*

$$F_a^{\mu\nu} \sim \frac{1}{r} \quad (\text{A.2})$$

e in totale il campo elettromagnetico sarà

$$F^{\mu\nu} = F_v^{\mu\nu} + F_a^{\mu\nu}. \quad (\text{A.3})$$

Come è noto dalla teoria quantistica, la radiazione elettromagnetica è formata da fotoni, in particolare vogliamo vedere come durante l'accelerazione la particella carica produrrà questi fotoni e le loro caratteristiche.

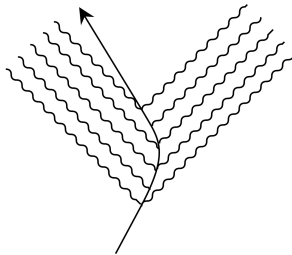


Figura 8: Radiazione emessa dall'accelerazione. Immagine presa da [1].

A.1 Catastrofe infrarossa

Radiazione elettromagnetica di frequenza ω a livello quantistico è composta da fotoni di energia $\hbar\omega$. Si può far vedere che il numero di fotoni *duri*, ovvero ad alta frequenza, è finito, mentre il numero di fotoni *soffici*, ovvero con frequenza tendente a zero, è infinito, nonostante l'energia irradiata sia finita. Questo fenomeno prende il nome di *catastrofe infrarossa*, in quanto legato alla presenza di infiniti fotoni con lunghezze d'onda tendenti a infinito. Tuttavia solo un numero finito di tali fotoni può essere osservato sperimentalmente, poiché qualsiasi apparato di misura, avendo una sensibilità finita, può rivelare solamente fotoni la cui energia superi una certa soglia. Vogliamo ora studiare da un punto di vista semiclassico l'origine della catastrofe infrarossa nella produzione di *bremssstrahlung*. Iniziamo scrivendo la lagrangiana del campo elettromagnetico, essa è

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - j^\mu A_\mu. \quad (\text{A.4})$$

dove j^μ è la quadricorrente, della quale non ci interessa l'origine. Essa deve soddisfare l'equazione di continuità

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (\text{A.5})$$

Possiamo decomporre j^μ tramite la trasformata di Fourier come

$$j^\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4k e^{-ikx} \tilde{j}^\mu(k) \quad (\text{A.6})$$

e tramite l'antitrasformata abbiamo

$$\tilde{j}^\mu(k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4x e^{ikx} j^\mu(x) \quad (\text{A.7})$$

dove abbiamo introdotto il vettore d'onda $k^\mu = (k^0, \vec{k})$ e posto $kx = k^\mu x^\nu \eta_{\mu\nu}$.⁷ Inoltre sappiamo valere $k^2 = 0$ e $k^0 = \omega > 0$. Dall'elettrodinamica si sa che l'energia emessa dal campo elettromagnetico⁸ è

$$d\mathcal{E} = -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k}{2k^0} k^0 \tilde{j}^\mu \tilde{j}_\mu^*. \quad (\text{A.8})$$

Dalla meccanica quantistica invece sappiamo che ogni fotone ha energia pari a $\hbar k^0$ ($= \hbar\omega$). Nonostante la formula (A.8) venga ricavata in maniera classica, possiamo pensare che sia ragionevole che il numero di fotoni emessi con momento k^μ sia

$$dN = \frac{d\mathcal{E}}{k^0} = -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k}{2k^0} \tilde{j}^\mu \tilde{j}_\mu^*. \quad (\text{A.9})$$

Usiamo ora questa formula in una semplice situazione fisica. Immaginiamo di avere una particella carica con quantità di moto iniziale p_i . All'istante $t = 0$ subisce una forza che ne cambia la quantità di moto, diventando p_f . La linea di universo della particella è data da

$$x^\mu(\tau) = \begin{cases} \frac{p_i^\mu}{m} \tau & \tau < 0 \\ \frac{p_f^\mu}{m} \tau & \tau > 0 \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

mentre la quadricorrente da

$$j^\mu(x) = e \int d\tau \frac{dx^\mu}{d\tau} \delta^4(x - x(\tau)) \quad (\text{A.11})$$

dove e è la carica della particella. Possiamo calcolarne la trasformata di Fourier, e troviamo

$$\tilde{j}^\mu(k) = ie \left(\frac{p_f^\mu}{k \cdot p_f} - \frac{p_i^\mu}{k \cdot p_i} \right). \quad (\text{A.12})$$

Usando ora quanto appena trovato possiamo calcolare l'energia emessa corrispondente al momento k^μ

$$d\mathcal{E} = \frac{e^2}{2(2\pi)^3} d^3k \left(2 \frac{p_i \cdot p_f}{(k \cdot p_i)(k \cdot p_f)} - \frac{m}{(k \cdot p_f)^2} - \frac{m}{(k \cdot p_i)^2} \right). \quad (\text{A.13})$$

Possiamo esprimere l'energia emessa in funzione della direzione \hat{n} sostituendo

$$k^\mu = |\vec{k}|(1, \hat{n}) \quad p_i^\mu = m\gamma_i(1, \vec{\beta}_i) \quad p_f^\mu = m\gamma_f(1, \vec{\beta}_f) \quad (\text{A.14})$$

⁷Indichiamo con $\eta_{\mu\nu}$ la metrica nello spazio-tempo di Minkowski

⁸Non riportiamo una derivazione di questa formula. Essa può essere trovata in un qualsiasi testo di elettrodinamica. Nel nostro caso essa è stata presa da [1].

troviamo

$$d\mathcal{E} = \frac{e^2}{2(2\pi)^3} \frac{d^3k}{|\vec{k}|^2} \left(2 \frac{1 - \vec{\beta}_i \cdot \vec{\beta}_f}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}_i)(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}_f)} - \frac{1 - \beta_f^2}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}_f)^2} - \frac{1 - \beta_i^2}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}_i)^2} \right). \quad (\text{A.15})$$

Notiamo che la quantità tra parentesi non dipende dal modulo di \vec{k} , e per questo motivo la possiamo scrivere come $f(\hat{n})$. Abbiamo quindi

$$d\mathcal{E} = \frac{e^2}{2(2\pi)^3} \frac{d^3k}{|\vec{k}|^2} f(\hat{n}). \quad (\text{A.16})$$

Per calcolare l'energia basta integrare

$$\mathcal{E} = \int d\mathcal{E} \quad (\text{A.17})$$

il quale, integrando rispetto al modulo di \vec{k} , diventa

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{k^2} k^2 dk. \quad (\text{A.18})$$

Questo non presenta divergenze per k piccolo, il che significa che l'energia totale emessa è finita. Il numero di fotoni si ottiene da

$$dN = \frac{e^2}{2(2\pi)^3} \frac{d^3k}{|\vec{k}|^3} f(\hat{n}). \quad (\text{A.19})$$

Integrando nuovamente rispetto al modulo di \vec{k} , il calcolo si riduce a

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{k^3} k^2 dk \quad (\text{A.20})$$

il quale come è facile vedere diverge per piccoli valori del momento k .

Abbiamo quindi visto, nel caso particolare di una particella carica in moto, come un numero infinito di fotoni a bassa energia vengano emessi ogni qual volta la particella venga diffusa. Curiosamente, notiamo che questo problema non esiste per uno spazio-tempo di dimensione maggiore di quattro, infatti detta D la dimensione, l'integrale diventa

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{k^3} k^{D-2} dk \quad (\text{A.21})$$

il quale non presenta divergenza infrarossa per $D > 4$.

A.2 Dipendenza della radiazione soffice

Nel precedente paragrafo abbiamo visto come la radiazione emessa dipende solamente dalla trasformata di Fourier $\tilde{j}^\mu(k)$ della quadricorrente. Dunque l'emissione di radiazione soffice dipende solamente dagli andamenti asintotici delle cariche. Questo implica che nei processi di diffusione, dove le particelle vengono dall'infinito con una certa velocità iniziale e vanno verso l'infinito con una certa velocità finale, la radiazione soffice dipende solamente dalle velocità iniziali e finali. Il percorso che compirà sarà ininfluente nel determinarne le caratteristiche.

Il risultato qui ottenuto ci mostra che la radiazione è legata ai fotoni soffici. Questo risultato, seppur apparentemente slegato dal resto della trattazione fatta, è in realtà molto importante. Infatti i soft theorems hanno natura quantistica, e la radiazione soffice è il punto di partenza per studiarli. Si trova che in questo ambito l'effetto di memoria ritorna, e permette una comprensione migliore di questi fenomeni.

Riferimenti bibliografici

- [1] N. Miller, *From Noether's Theorem to Bremsstrahlung: A pedagogical introduction to Large gauge transformations and Classical soft theorems*, Center for the Fundamental Laws of Nature, Harvard University, Cambridge, MA 02138, USA, 10 dicembre 2021.
- [2] L. Susskind, *Electromagnetic Memory*, Stanford Institute for Theoretical Physics and Department of Physics, Stanford University, Stanford, CA 94305-4060, USA, 20 maggio 2019.
- [3] L. Bieri e D. Garfinkle, *An electromagnetic analog of gravitational wave memory*, 10 settembre 2013.
- [4] S. Pasterski, *Asymptotic Symmetries and Electromagnetic Memory*, Center for the Fundamental Laws of Nature, Harvard University, Cambridge, MA 02138, USA, 4 maggio 2015.
- [5] A. Strominger, *Lectures on the Infrared Structure of Gravity and Gauge Theory*, Center for the Fundamental Laws of Nature, Harvard University, Cambridge, MA 02138, USA, 15 febbraio 2018
- [6] Nico Groenenboom, Bachelor Thesis, *Electromagnetic memory in an expanding universe*, 12 giugno 2018.
- [7] Miika Sarkkinen, Master's thesis Theoretical physics, *Memory effect in electromagnetic radiation*, university of Helsinki department of physics, 2018.
- [8] K. Lechner, *Elettrodinamica classica*, Springer, 2014.
- [9] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*, Wiley, 1975.