

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Modelli di Inflazione Cosmica: eliminazione di coincidenze nella dinamica di Slow-Roll

Relatore

Prof. Nicola Bartolo

Laureando

Stefano Gozzo

Anno Accademico 2017/2018

Introduzione

‘Nulla è speciale’: questo è il mantra della Fisica e della Scienza moderna, formalizzato nel principio cosmologico. Quest’idea ha radici antiche nel pensiero umano, ma non ha mai trovato, nel corso di millenni di storia, un terreno tanto fertile nel quale prosperare quanto quello della cosmologia moderna: superate le ultime remore di inizio XX secolo, eredità filosofica di Einstein, fondatore delle basi di questa nuova branca della fisica a seguito della sua Teoria della Relatività Generale, l’idea della non specialità poté essere portata alle sue conseguenze totali. La scoperta di nuovi pianeti, la comparsa di nuove galassie, la dimostrazione di un universo in espansione grazie al loro redshift, l’imbattersi casuale nella radiazione cosmica di fondo omogenea ed isotropa, furono tutti eventi che contribuirono ad indicare che quella che si stava seguendo era la strada giusta e che per l’uomo era giunta al termine anche l’era dell’importanza cosmica, rimasta inattaccabile persino a seguito delle rivoluzioni kepleriane e darwiniane. In ambito scientifico, inoltre, l’idea ebbe sviluppi rigogliosi, il più notevole dei quali è senz’altro la teoria dell’inflazione cosmica che porta tutti i possibili stati cosmologici iniziali a convergere verso un’unica soluzione attrattrice, l’universo mediamente omogeneo e isotropo a grandi scale, prossimo alla piatezza ma caratterizzato da anisotropie e disomogeneità dovute a fluttuazioni di natura quantistica.

Questo lavoro intende percorrere lo stesso sentiero che ha portato a tanti successi negli ultimi decenni negli studi cosmologici. L’individuazione di una coincidenza tra parametri inflazionari, allora, desta immediatamente un campanello d’allarme: è così improbabile che essa sia osservata solo per via della nostra fortuita posizione spazio-temporale da spingerci ad ipotizzare che una tale relazione debba essere una caratteristica intrinseca della maggiorparte dei modelli dell’inflazione. Si presenterà, quindi, nella prima parte una breve panoramica sulle motivazioni per l’introduzione della teoria dell’inflazione cosmica all’inizio degli anni ‘80 e sulle equazioni principali necessarie a descriverla, mentre nella seconda parte si svilupperanno al second’ordine nell’espansione di slow-roll i conti e le considerazioni esplicitate nell’articolo “Implications of the Scalar Tilt for the Tensor-to-Scalar Ratio” di P. Creminelli et al. [1], nel quale si ipotizza come fondamentale la relazione $n_s - 1 = -\frac{\alpha}{N}$ per $\alpha \simeq |1|$, che sembrerebbe emergere dalle più recenti osservazioni della missione Planck. Considerazioni simili a quella indicata sono state fatte in precedenza anche negli articoli [2] e [3]. Quest’operazione non intende avere un fine puramente didattico, ma si propone di fornire un miglioramento significativo nel criterio di selezione di potenziali inflazionari opportuni a riprodurre le osservazioni alla luce delle future missioni di osservazione della radiazione cosmica di fondo.

Indice

Introduzione	i
I Inflazione ed Approssimazioni di Slow-Roll: Presentazione introduttiva	1
1 Equazioni fondamentali della cosmologia	3
1.1 Equazione di Friedmann	3
1.2 Equazione del fluido	4
1.3 Commenti sulle equazioni cosmologiche	4
1.4 Equazione dell'accelerazione	5
2 Problemi nel modello dell'Hot Big Bang	6
2.1 Il problema della piattezza	6
2.2 Il problema dell'orizzonte	8
2.3 Abbondanza di particelle indesiderate	8
3 L'inflazione cosmica	10
3.1 Soluzione dei problemi dell'Hot Big Bang	10
3.1.1 Problema della piattezza	10
3.1.2 Problema dell'orizzonte	11
3.1.3 Abbondanza indesiderata di particelle	11
4 Potenziali inflazionari	13
4.1 Campi scalari	13
4.2 Equazioni del moto	14
4.3 Forma alternativa delle equazioni del moto	14
4.4 Parametri inflazionari	15
5 Espansioni e parametri di Slow-Roll	17
5.1 La gerarchia dei parametri HSR	17
5.2 La gerarchia dei parametri PSR	18
5.3 Collegamento tra i due approcci	19
5.4 Sviluppo di un'espansione HSR	21
II Correlazioni fra parametri inflazionari: Studio al second'ordine nell'espansione di Slow-Roll	22
6 Correlazioni fra parametri inflazionari	24
6.1 Contesto osservativo attuale ed ipotesi di correlazione	25
6.2 Implicazioni nella dinamica del parametro ϵ_H	25
6.2.1 Espansione HSR al prim'ordine	25
6.2.2 Espansione HSR al second'ordine	27
6.3 Studio dei regimi di evoluzione di ϵ_H	28

6.3.1	Regime $AN^\alpha \gg 2(\alpha - 1)^{-1}N$	28
6.3.2	Regime $AN^\alpha \ll 2(\alpha - 1)^{-1}N$	31
6.4	Sommario delle correzioni al second'ordine	32
7	Potenziali compatibili con i regimi analizzati	35
7.1	Classificazione dei modelli con $n_s - 1 \propto 1/N$	35
7.2	Regime $AN^\alpha \gg 2(\alpha - 1)^{-1}N$: caso $\alpha > 1$	36
7.3	Regime $AN^\alpha \gg 2(\alpha - 1)^{-1}N$: caso $\alpha < 1$	38
7.4	Regime $AN^\alpha \ll 2(\alpha - 1)^{-1}N$	38
8	Conclusioni	40

Parte I

Inflazione ed Approssimazioni di Slow-Roll: Presentazione introduttiva

Capitolo 1

Equazioni fondamentali della cosmologia

Al fine di riuscire ad affrontare il problema dell'apparente fine-tuning delle quantità $n_s - 1$ e N^{-1} , è necessario introdurre le equazioni fondamentali della cosmologia. Esse sono solamente due, eventualmente unite in un'unica equazione che rende conto di entrambe, e possono essere agevolmente ricavate con il solo utilizzo di nozioni di fisica classica unite a considerazioni relativistiche¹. Nel ricavare le seguenti equazioni si darà per dimostrato il teorema di Gauss per il campo gravitazionale: esso afferma che il potenziale gravitazionale presente all'esterno di una qualsiasi superficie chiusa dipende solo dalla quantità di massa, o equivalentemente energia in relatività generale, presente all'interno di essa ma non dalla sua distribuzione spaziale; inoltre tutti i contributi da parte di sorgenti esterne ad una generica superficie sferica si elideranno a vicenda.

1.1 Equazione di Friedmann

L'equazione di Friedmann descrive l'espansione dell'universo ed è dunque l'equazione più importante della cosmologia. Per derivarla sarà sufficiente esprimere l'energia potenziale gravitazionale e cinetica di una particella di test situata in un universo omogeneo (di densità di massa ρ) ed isotropo e successivamente utilizzare le leggi di conservazione dell'energia. Costruiamo dunque la Lagrangiana per una particella di test a distanza r dal centro dell'universo, che potrà essere posto equivalentemente ogni suo punto, essendo esso omogeneo:

$$U = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho r^2 m. \quad (1.1)$$

I due termini che contribuiscono all'energia totale U della porzione di universo considerata sono, nell'ordine, l'energia cinetica della particella di test e l'energia potenziale associata alla distribuzione di massa della regione sferica. Come già ribadito l'universo è considerato omogeneo, dunque tale equazione descrive a tutti gli effetti come evolve la separazione spaziale r tra due particelle qualsiasi, essendo ciò che le separa indipendente dai punti in cui si trovano. Ciò ci permette di fare un cambio di coordinate spaziali, di fondamentale importanza in cosmologia, dalle coordinate fisiche alle coordinate comoventi, ovvero delle coordinate "attaccate" all'universo in espansione. Definiremo tale cambio di coordinate come:

$$\vec{r} = a(t)\vec{x}.$$

Il parametro $a(t)$, detto *fattore di scala dell'universo*, rende conto delle dimensioni relative del raggio dell'universo al tempo t rispetto al suo valore all'istante attuale. L'ipotesi di omogeneità ci assicura che $a(t)$ sia funzione solo del tempo. Riscrivendo la 1.1 in funzione delle nuove coordinate e ricordando che, per definizione, le posizioni degli oggetti sono fissate nel sistema di riferimento comovente, dunque $\dot{x} = 0$, si ottiene:

$$U = \frac{1}{2}m\dot{a}^2 x^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho a^2 x^2 m. \quad (1.2)$$

Moltiplicando da entrambe le parti per $2/(ma^2x^2)$ e riarrangiando i termini ($kc^2 = -2U/(mx^2)$) si ottiene:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2}, \quad (1.3)$$

¹Per un'impostazione rigorosa è necessario però partire dalle equazioni della relatività generale. La derivazione delle equazioni di Friedmann esposta nel corso di questo capitolo, invece, è tratta dal libro di testo di A. Liddle [4], mentre all'interno dei successivi capitoli di questa prima parte si utilizzeranno anche informazioni presenti nel libro di F. Lucchin [5]

che è la forma più comune dell'equazione di Friedmann. Si può notare come k debba essere indipendente da x per conservare l'ipotesi di omogeneità, dunque sarà una costante. Per questo motivo ed essendo x fissata per definizione, si vede come la quantità U sia costante per una data particella, ma vari come x^2 andando ad analizzare porzioni di universo di diverse dimensioni. Nello specifico, si può dimostrare come la costante k , che non cambia nel corso dell'evoluzione dell'universo, sia proprio il suo valore di curvatura.

1.2 Equazione del fluido

Ora che si è costruita un'equazione che descrive l'evoluzione delle distanze in funzione della densità, per completare la descrizione dell'universo è necessario costruire una seconda equazione che ci dica come evolva tale densità nel corso dell'espansione. Per conseguire tale obiettivo bisognerà tenere conto della pressione p del materiale che riempie l'universo, e vedremo come la presenza di diversi materiali andrà ad alterare la legge di stato complessiva che ci descrive l'evoluzione della pressione.

Per ricavare l'equazione di fluido si parte dalla prima legge della termodinamica applicata ad una porzione di universo in espansione di volume V di raggio comovente unitario:

$$dE + pdV = TdS. \quad (1.4)$$

Il volume ha raggio fisico pari ad a , dunque posso esprimere l'energia contenuta nella porzione di universo omogeneo utilizzando la formula relativistica:

$$E = mc^2 = \frac{4\pi}{3}a^3\rho c^2. \quad (1.5)$$

Si calcola in seguito la variazione di energia e volume utilizzando la regola di derivazione a catena:

$$\frac{dE}{dt} = 4\pi a^2 \rho c^2 \frac{da}{dt} + \frac{4\pi}{3} a^3 \frac{d\rho}{dt} c^2, \quad (1.6)$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi a^2 \frac{da}{dt}. \quad (1.7)$$

Se si reinseriscono tali espressioni nella 1.4, considerando l'espansione dell'universo come reversibile ($dS = 0$), si ottiene:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0, \quad (1.8)$$

che è la forma standard dell'equazione del fluido. Si noti come ci siano due termini che contribuiscono alla variazione di densità: il primo è la diluizione della densità in conseguenza dell'espansione, il secondo corrisponde alla perdita di energia dovuta al lavoro compiuto dalla pressione del materiale mentre l'universo si espande, energia che non scompare, bensì si trasforma in energia potenziale gravitazionale.

1.3 Commenti sulle equazioni cosmologiche

Nonostante queste siano le due equazioni corrette da usare in cosmologia per lo studio delle prime fasi di vita dell'universo, per descrivere il suo stato attuale è necessario aggiungere il termine della costante cosmologica λ nell'equazione di Friedmann, che si pensa, appunto, possa descrivere la forza che guida l'espansione accelerata dello spazio-tempo.

Si noti oltretutto che il rapporto a sinistra nell'equazione di Friedmann viene ridefinito comunemente nella legge di Hubble, $\vec{v} = H\vec{r}$, che indica la velocità di recessione di una galassia in funzione della sua distanza dalla nostra, come:

$$H = \frac{\dot{a}}{a}$$

dove H è chiamata *costante di Hubble*. Essa sarà una costante in tutto lo spazio, avendo ipotizzato un universo omogeneo, ma non c'è nessun motivo per cui essa debba essere costante nel tempo. Inoltre è convenzione diffusa in cosmologia porre $c = 1$, riesprimendo così le equazioni in unità naturali, nelle quali è possibile intercambiare

densità di massa e di energia grazie alla nota relazione $E = mc^2$. In tali unità l'equazione di Friedmann prende la seguente forma:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}. \quad (1.9)$$

Se si vuole, infine, completare la descrizione dell'universo andando a chiudere il sistema di due equazioni qui costruito, è necessario specificare un'equazione di stato che associ al materiale che riempie l'universo con densità ρ la pressione da esso esercitata. Trascurando, come detto, il contributo della dark energy, le uniche due specie che popolano l'universo rimangono:

- **Materia:** sotto il quale termine i cosmologi raggruppano tutta quella materia non relativistica che esercita una pressione trascurabile ($p = 0$)
- **Radiazione:** con tale termine i cosmologi intendono sia i fotoni, che viaggiano costantemente alla velocità della luce, sia i neutrini e le altre particelle che viaggiano a velocità prossime a c . Si può dimostrare, con semplici considerazioni di elettromagnetismo classico, che la pressione di tale materiale è $p = \rho c^2/3$.

1.4 Equazione dell'accelerazione

E' possibile utilizzare le due equazioni fondamentali della cosmologia per ricavarne una terza, chiaramente dipendente dalle prime, ma molto utile per analizzare le varie fasi di espansione e in particolare per capire quale sia il significato e quali siano le implicazioni dell'inflazione cosmica. In essa viene, infatti, esplicitata l'evoluzione temporale della derivata seconda del fattore di scala dell'universo, che quantifica l'accelerazione dell'espansione cosmica.

Per ricavarla è sufficiente derivare rispetto al tempo cosmico l'equazione di Friedmann:

$$2\frac{\dot{a}}{a}\frac{a\ddot{a} - \dot{a}^2}{a^2} = -\frac{8\pi G}{3}\dot{\rho} + 2\frac{kc^2\dot{a}}{a^3}, \quad (1.10)$$

e sostituire in essa l'espressione di $\dot{\rho}$ ricavata dall'equazione del fluido 1.8. Si raccoglie, inoltre, il fattore $2\dot{a}/a$ che compare in ambo i membri, ottenendo:

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -4\pi G\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) + \frac{kc^2}{a^2}. \quad (1.11)$$

Utilizzando ancora una volta l'equazione di Friedmann per riesprimere la somma dei termini di curvatura e di velocità relativa di espansione al quadrato, si giunge alla forma definitiva dell'equazione dell'accelerazione:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right). \quad (1.12)$$

Si può notare in quest'espressione come, nonostante non ci siano forze di pressione in un universo omogeneo ed isotropo, non essendoci gradienti di pressione, qualsiasi materiale presente nell'universo eserciti una pressione, dunque sia dotato di un'energia non trascurabile, contribuisca al termine di attrazione gravitazionale e decelerati l'espansione.

Capitolo 2

Problemi nel modello dell'Hot Big Bang

Con l'aiuto delle equazioni presentate nel precedente capitolo è ora possibile introdurre nella descrizione dell'universo primordiale l'idea dell'inflazione, definendola opportunamente. Prima di approfondirne gli aspetti più tecnici è però utile fare una breve panoramica dei principali problemi che il modello standard dell'Hot Big Bang lasciava irrisolti, per comprendere il motivo dell'introduzione del periodo inflativo precedente all'evoluzione nota, finalizzato a completare la teoria preesistente.

2.1 Il problema della piattezza

Grazie all'esperienza quotidiana e alle osservazioni astronomiche più sofisticate su larga scala, possiamo concludere che la geometria del nostro Universo, allo stato attuale, è con ottima approssimazione euclidea. Le più recenti osservazioni effettuate dal satellite Planck [6], ci permettono di affermare che il valore della curvatura dell'universo sia $k = 1.001 \pm 0.002$. Questo dato non costituirebbe alcun tipo di problema se l'universo fosse perfettamente piatto sin dal primo istante, poiché sappiamo che in tal caso il valore della curvatura sarebbe fissato nel corso di tutta la sua evoluzione. Purtroppo la probabilità che l'universo sia realmente piatto è a tutti gli effetti nulla, essendo solo uno il valore di k che lo renderebbe tale in confronto alle infinite possibilità di avere $k \neq 0$. Se $k \neq 0$, però, il suo valore cambia nel corso dell'evoluzione dell'universo, e possiamo studiarne la dipendenza dal tempo andando a riscrivere l'equazione di Friedmann completa 1.9 come:

$$\Omega + \Omega_\Lambda - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}, \quad (2.1)$$

dove si è definito i parametri di densità di energia della materia ordinaria e di energia oscura come:

$$\Omega = \frac{\rho_c}{\rho},$$
$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2},$$

nelle quali ρ_c è la densità critica di materia ordinaria dell'universo, ovvero il valore di densità che, in assenza di contributi energetici di dark matter o dark energy, garantirebbe la perfetta piattezza dell'universo. Per ricavarla è sufficiente imporre un valore di curvatura nullo nell'equazione di Friedmann 1.9 ed invertire il tutto:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (2.2)$$

Si noti che la dipendenza dal parametro di Hubble la rende una quantità che varia nel tempo; oltretutto, a partire dalle stime più recenti effettuate sulla costante di Hubble [6], è possibile fornire un valore per la densità critica attuale:

$$\rho_c = 8.40 \pm 0.23 \text{ Kg m}^{-3}.$$

Questo valore può sembrare molto piccolo se confrontato con le densità a cui siamo abituati nell'esperienza quotidiana e nelle nostre osservazioni "locali". Quando si analizza l'universo a scale maggiori, però, ci si rende

conto che tale valore di densità ha una maggiore attinenza con le evidenze osservative. Riesprimendolo, infatti, in termini di masse solari M_{\odot} e di distanze in Megaparsec, si ottiene:

$$\rho_c = (1.24 \pm 0.34) \times 10^{11} M_{\odot} \text{ Mpc}^{-3}.$$

Dal momento che $10^{11/12}$ masse solari è la tipica dimensione di una galassia e il megaparsec è la distanza media che le separa nella nostra regione di universo, il valore della densità critica dell'universo è confrontabile con quello della densità media di materia. Ad essere precisi, il valore realmente osservato di densità di materia ordinaria è più basso di quello richiesto dalle predizioni teoriche: oltre al fatto che nel computo della densità di energia di materia va inserito anche il contributo della Dark Matter¹, circa il 90% della materia ordinaria pensiamo si trovi sottoforma di plasma nei "filamenti" che collegano una galassia all'altra e i gruppi di galassie fra loro, per questo motivo non siamo in grado di osservarla.

A questo punto richiedere che k risieda in un intorno di 0 è equivalente a richiedere che la densità di energia totale $\Omega_{\text{tot}} = \Omega_{\Lambda} + \Omega$ risieda in un intorno di 1². Studiamo dunque l'evoluzione di tale parametro all'interno di modelli semplificati di Universo per capire quale doveva essere il suo valore iniziale che ci consenta di riprodurre i limiti osservativi attuali. Supponiamo che il nostro universo sia popolato esclusivamente di radiazione o materia barionica, considerando trascurabili i contributi di curvatura e della costante cosmologica. La materia barionica, essendo un fluido non relativistico, esercita una pressione nulla, e inserendo tale informazione nell'equazione di fluido si ottiene:

$$\dot{(\rho)} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0. \quad (2.3)$$

A questo punto si può notare come, raccogliendo a^{-3} , si ottenga l'espressione:

$$\frac{1}{a^3} \frac{d}{dt}(\rho a^3) = 0, \quad (2.4)$$

dalla quale è immediato ricavare la proporzionalità:

$$\rho \propto a^{-3}. \quad (2.5)$$

E' naturale che la densità della materia ordinaria evolva in maniera inversamente proporzionale al volume in un sistema chiuso senza la presenza di pozzi o sorgenti. Se ora si inserisce l'informazione sull'evoluzione della densità nell'equazione di Friedmann si ottiene:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G \rho_0}{3} \frac{1}{a}, \quad (2.6)$$

che si può integrare agevolmente, ricavando la legge di proporzionalità per l'evoluzione del fattore di scala dell'universo:

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}. \quad (2.7)$$

Dal momento, però, che l'equazione di Friedmann può essere riscritta come:

$$|\Omega_{\text{tot}}(t) - 1| = -\frac{|k|}{a^2 H^2}, \quad (2.8)$$

evidenziando la proporzionalità inversa tra densità totale di energia e fattore di scala dell'Universo, si ricava immediatamente come la differenza tra la densità totale di energia dell'universo e l'unità debba costantemente aumentare nel tempo:

$$|\Omega_{\text{tot}}(t) - 1| \propto t. \quad (2.9)$$

¹Si ricorda che le stime più recenti sulla ripartizione dell'energia totale dell'universo sono [6]:

- $\Omega_{\Lambda} = 0.679 \pm 0.013$
- $\Omega_{\text{DM}} = 0.262 \pm 0.013$
- $\Omega_M = 0.049 \pm 0.013$

²I limiti più precisi sulla densità totale dell'Universo che abbiamo oggi sono [6]:

$$\Omega_{\text{tot}} - 1 = 0.001 \pm 0.002$$

In maniera analoga, inserendo l'equazione di stato per la radiazione ($p = \rho c^2/3$), ricavabile con considerazioni di elettromagnetismo classico, nelle equazioni di Friedmann, quello che si ottiene per l'evoluzione del parametro $|\Omega_{\text{tot}} - 1|$ è del tipo:

$$|\Omega_{\text{tot}}(t) - 1| \propto t^{2/3}. \quad (2.10)$$

Anche in tal caso il valore di $|\Omega_{\text{tot}} - 1|$ non può che aumentare nel tempo, e se si volesse tener conto del contributo della costante cosmologica le cose peggiorerebbero ulteriormente: $|\Omega_{\text{tot}} - 1| = 0$, un universo a curvatura nulla, è allora un punto di equilibrio instabile. Ci si può dunque chiedere quale dev'essere stato il valore di tale parametro all'epoca della rottura di simmetria per la forza elettro-debole, che corrisponde al primo istante dell'evoluzione cosmologica per il quale abbiamo una descrizione con leggi fisiche ben comprese e verificate sperimentalmente, per poter ottenere un valore di curvatura all'interno degli estremi osservativi attuali³. Risulta che nel migliore dei casi, in un irrealistico universo dominato dalla pressione di radiazione nel corso di tutta la sua evoluzione, il valore di tale parametro doveva essere $|\Omega_{\text{tot}} - 1| < 10^{-30}$! Ecco il primo clamoroso caso di fine tuning che il modello standard dell'Hot Big Bang non trova modo di spiegare.

2.2 Il problema dell'orizzonte

Il problema dell'orizzonte risiede nel fatto che, avendo l'universo un'età finita, anche le informazioni possono aver viaggiato al massimo ad una distanza proporzionale all'età dell'universo, dal momento che sono limitate in relatività generale ad avere velocità di propagazione al massimo pari a quella della luce. Quando, però, negli anni '60 Penzias e Wilson scoprirono la radiazione cosmica di fondo, la prima radiazione in grado di propagarsi liberamente nell'universo diventato trasparente a seguito della ricombinazione e giunta fino a noi a lunghezze d'onda dilatate dall'espansione, quello che osservarono fu proprio una radiazione uniforme provenire da tutte le parti del cielo alla stessa temperatura (2.725K). Solo dagli anni '90 con le osservazioni più raffinate del satellite COBE siamo riusciti a distinguere delle anisotropie all'interno di essa, dell'ordine di 10^{-5} . Ma se due diverse parti dell'universo hanno una temperatura con differenze così lievi all'epoca della ricombinazione, significa che esse devono aver potuto interagire causalmente tra loro in precedenza, scambiandosi informazioni e permettendo la termalizzazione. Il paradosso sorge quando consideriamo regioni del cielo antipodali, la cui luce riesce ad arrivare a noi solo oggi viaggiando in direzioni opposte (dunque non sono causalmente correlate nello stato attuale dell'universo), ma che sembrano avere in precedenza interagito per termalizzare. Il modello standard dell'Hot Big Bang, presupponendo un'espansione costantemente decelerata nel corso dell'evoluzione cosmologica, dal momento che essa possiede un'inerzia iniziale che viene successivamente frenata dall'attrazione gravitazionale presente fra tutti i corpi che popolano l'universo, non riesce a trovare una spiegazione adeguata anche per quest'evidenza osservativa e deve limitarsi a considerarla un'improbabile coincidenza statistica.

2.3 Abbondanza di particelle indesiderate

C'è in realtà un terzo grosso problema per il modello standard dell'Hot Big Bang in relazione alle idee della moderna fisica delle particelle. Infatti, oltre al fatto che risulta strano che l'Universo rimanga dominato dalla radiazione per 1000 anni, un tempo considerevolmente lungo alla luce della diluizione in densità molto più rapida per essa (a^{-4}) rispetto a qualsiasi altro tipo di materia, le più recenti teorie delle interazioni fondamentali fanno emergere nuovi tipi di particelle, anche particolarmente massive, generatesi nelle prime fasi convulse ed energetiche dell'universo, ma oggi sperimentalmente inosservate. La più notevole tra di esse, che fu appunto tra le cause che indussero le prime formulazioni dell'inflazione, è il *monopolo magnetico*. Questo tipo di particelle sono una conseguenza inevitabile delle dei modelli di unificazione delle forze fondamentali, le cosiddette *GUT* (Grand Unified Theories), e si predice che debbano essere prodotte in grande abbondanza nelle prime fasi dell'universo. Vista la loro enorme massa (la scala della Grande Unificazione si stima essere attorno i 10^{16} GeV), esse dovrebbero essere non relativistiche per tutta la storia dell'universo e dunque diventare dominati rispetto alla radiazione. Dal momento che sappiamo l'universo oggi non essere dominato dai monopoli magnetici, tutte le teorie di Grande Unificazione che ne prevedevano l'esistenza risultavano incompatibili con il modello standard dell'Hot Big Bang.

³Si ricorda che secondo le più recenti stime [6] l'universo ha attualmente un'età di $t_0 = (13.801 \pm 0.024) \times 10^9$ yrs

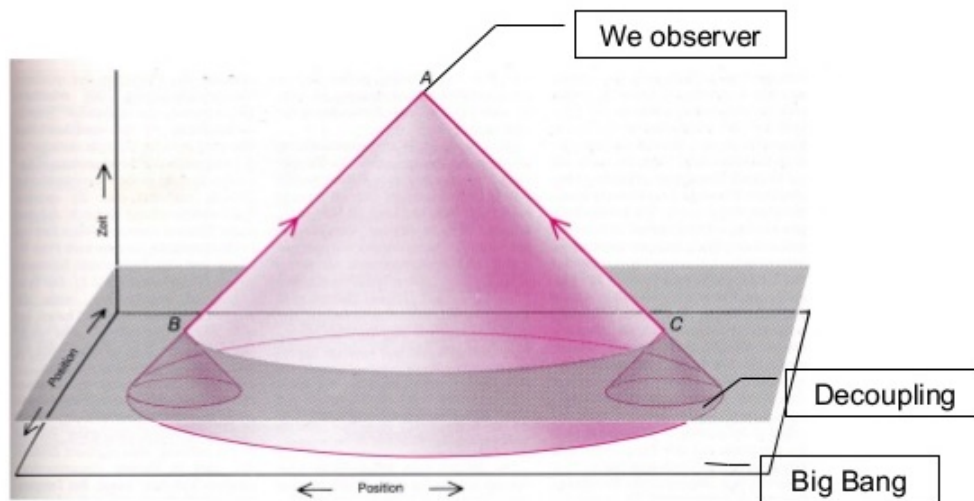


Figura 2.1: Supponendo che l'universo abbia avuto un istante iniziale, si vede come le due zone B e C , separate spazialmente all'istante della ricombinazione, non abbiano avuto modo di interagire nel passato di dimensioni finite: i loro coni-luce non si intersecano prima del Big Bang. Esse, però, sono viste alla stessa temperatura da un osservatore in A che le vede si trova al tempo t_0

Capitolo 3

L'inflazione cosmica

Nel contesto, presentato nel capitolo precedente, di profonda insoddisfazione da parte della comunità scientifica nei confronti del modello standard dell'Hot Big Bang e delle sue falle che lasciavano spazio a fini sintonizzazioni teleologiche agli albori della storia universale, Alan Guth, prendendo spunto dai precedenti articoli speculativi di Alexei Starobinski, presentò al mondo un'idea tanto semplice quanto geniale per risanare in un unico colpo tutte le fratture. Il nucleo dell'idea di Guth è, infatti, un periodo di espansione accelerata dell'universo, molto rapida e breve nel tempo, da collocarsi antecedentemente alle fasi evolutive ben note e comprese del modello standard dell'Hot Big Bang. L'inflazione cosmica può essere dunque definita utilizzando il solo fattore di scala dell'universo:

$$\ddot{a}(t) > 0. \quad (3.1)$$

Inserendo quest'informazione nell'equazione dell'accelerazione 1.4 si nota immediatamente che il termine tra parentesi $(\rho + \frac{3p}{c^2})$ deve risultare negativo. Dal momento che nessun oggetto fisico può avere densità di energia negativa, è richiesto un nuovo termine in grado di rendere la pressione totale negativa:

$$p < \frac{\rho c^2}{3}. \quad (3.2)$$

Tale pressione viene chiaramente generata da un termine di costante cosmologica, essendo proporzionale alla sola densità spaziale. Per completare in maniera esauriente il modello dell'Hot Big Bang, dunque, sarà sufficiente aggiungere nelle fasi immediatamente successive alla "creazione" un termine di questo tipo, associandogli un potenziale in grado di farlo smorzare in un tempo brevissimo. Le più recenti idee della fisica delle particelle sulle rotture spontanee di simmetria suggeriscono delle spiegazioni su come possa emergere una tale pressione negativa. Tali particelle estremamente energetiche possono vivere durante il periodo della Grande Unificazione, che si stima iniziare attorno ai 10^{-34} s dopo il Big Bang, e successivamente decadranno rapidamente in normali particelle del Modello Standard, ridando il via all'evoluzione cosmologica compresa nel modello dell'Hot Big Bang, e mettendo fine al periodo inflativo.

3.1 Soluzione dei problemi dell'Hot Big Bang

Si può immediatamente notare come l'introduzione di un periodo di espansione accelerata precedente alla bariogenesi e all'evoluzione termica dell'universo opaco, riesca a risolvere assieme tutti i problemi di fine-tuning che gravavano sul modello standard dell'Hot Big Bang. Si possono analizzare ora le soluzioni singolarmente.

3.1.1 Problema della piattezza

Ricordando l'espressione dell'equazione di Friedmann considerata nel capitolo precedente (2.8), si vede subito come dalla definizione di inflazione data poche righe sopra discenda:

$$\ddot{a} > 0 \implies \frac{d}{dt}(\dot{a}) > 0 \implies \frac{d}{dt}(aH) > 0, \quad (3.3)$$

e si avrà, appunto:

$$\frac{d}{dt}(aH) > 0 \implies |\Omega_{\text{tot}}(t) - 1| \rightarrow 0. \quad (3.4)$$

La definizione dell'inflazione, dunque, può essere riespressa, in altre parole, come quel periodo in cui la densità di energia totale dell'universo viene spinta verso l'unità invece che allontanata da essa. Equivalentemente l'universo si porta ad un valore di curvatura prossimo allo zero. Ad essere precisi questo processo di appiattimento avviene in maniera drammatica: l'inflazione dev'essere in grado di far passare il fattore di scala dell'Universo da dimensioni minori di quelle di un protone a quelle di un'arancia in un lasso di tempo di 10^{-32} secondi! Per ottenere una tale espansione esponenziale di breve durata si dovranno ricercare dei potenziali inflativi adeguati: un comportamento del genere può essere già riprodotto per mezzo di rudimentali potenziali monomiali, ma la gamma di possibilità tra cui scegliere è vastissima e sarà successivamente possibile discriminare la forma corretta confrontando le specifiche predizioni sulle osservabili di ognuno di essi con i dati osservativi. Al termine dell'inflazione, quindi, la curvatura dell'universo sarà così lieve da richiedere perlomeno centinaia di miliardi di anni di evoluzione cosmologica del tipo studiato al capitolo precedente affinché torni a valori apprezzabilmente diversi da zero¹.

3.1.2 Problema dell'orizzonte

Per chiarificare come l'espansione accelerata dell'universo risolva brillantemente anche il problema dell'orizzonte cosmico, si può dare una terza definizione di inflazione, equivalente alle due date in precedenza: l'inflazione è quel periodo durante il quale una regione di Universo aumenta le sue dimensioni fisiche, mantenendo fissata al contempo la sua scala caratteristica, la *scala di Hubble*. L'inverso della costante di Hubble, che ha le dimensioni di un tempo, moltiplicato per la velocità della luce (cH^{-1}), ci descrive, infatti, le dimensioni dell'universo osservabile in un determinato istante, o equivalentemente il raggio massimo all'interno del quale siano possibili correlazioni causali. Nel corso dell'inflazione, avvenuta in un maniera estremamente rapida, il rapporto \dot{a}/a rimane fissato, rimane costante la dimensione dell'universo osservabile, aumenta invece esponenzialmente a , che rende conto delle reali dimensioni dell'universo. Di conseguenza regioni dell'universo che precedentemente all'inflazione si trovavano all'interno dell'universo osservabile, rendendone possibile la termalizzazione, vengono successivamente allontanate oltre l'orizzonte cosmico. Esse non potranno più interagire reciprocamente, se non a partire da un istante futuro nel quale il loro orizzonte cosmico, essendo tornato ad espandersi a velocità superiore della velocità di espansione dell'universo, sarà tornato ad essere maggiore della distanza fisica che le separa.

3.1.3 Abbondanza indesiderata di particelle

Anche l'ultimo grosso problema del modello dell'Hot Big Bang viene elegantemente risolto: il periodo di espansione cosmica violenta diluisce tutte le particelle indesiderate formatesi alle energie della grande unificazione, dunque in una fase precedente all'inflazione. La quantità di inflazione richiesta per fare in modo che tali particelle abbiano una probabilità sufficientemente bassa di rientrare nel nostro orizzonte cosmico è molto minore di quella che stimiamo necessaria per risolvere i precedenti problemi.

Chiaramente il decadimento del valore della costante cosmologica che guida l'inflazione dev'essere tale che alla fine del processo la densità di energia dell'universo si trovi a livelli che non permettano la rigenerazioni di particelle problematiche.

E' necessario, infine, specificare una cosa: in queste tre sottosezioni si è visto come un periodo di espansione accelerata nei primi istanti di vita dell'universo possa eliminare le necessità di fine tuning più problematiche all'interno del modello dell'Hot Big Bang, senza specificare quanta inflazione sia richiesta per risolverle. Una stima della minima inflazione necessaria a risolvere il problema dell'orizzonte, il più impellente dal momento che la radiazione cosmica di fondo continua ad arrivarci in ogni istante uniforme, è di circa 60 e-folds ([11]). Questo sembra a prima vista un numero enorme (corrisponde infatti ad un'espansione del raggio dell'universo di un fattore 10^{24}): se per ottenere una tale esponenziazione nelle dimensioni cosmiche fosse necessaria una regolazione attenta dei parametri inflazionari, l'inflazione non risulterebbe una teoria soddisfacente. Il suo effetto sarebbe solo quello di spostare il problema, aggiungendo nuove strutture e immagini ridondanti nei nostri

¹ Poiché oggi si sa che l'universo è in una nuova fase di espansione accelerata da qualche miliardo di anni, ovvero è entrato nell'era di dominazione da parte della Dark Energy, il valore della curvatura dell'universo tenderà a zero anche per un tempo tendente ad infinito. La nuova fase di espansione accelerata non ha modo di essere arrestata essendo la densità di energia oscura costante, a differenza di tutti gli altri tipi di materia a pressione positiva, e in tal modo l'universo verrà appiattito in eterno, analogamente a quanto avvenuto nei suoi primi istanti.

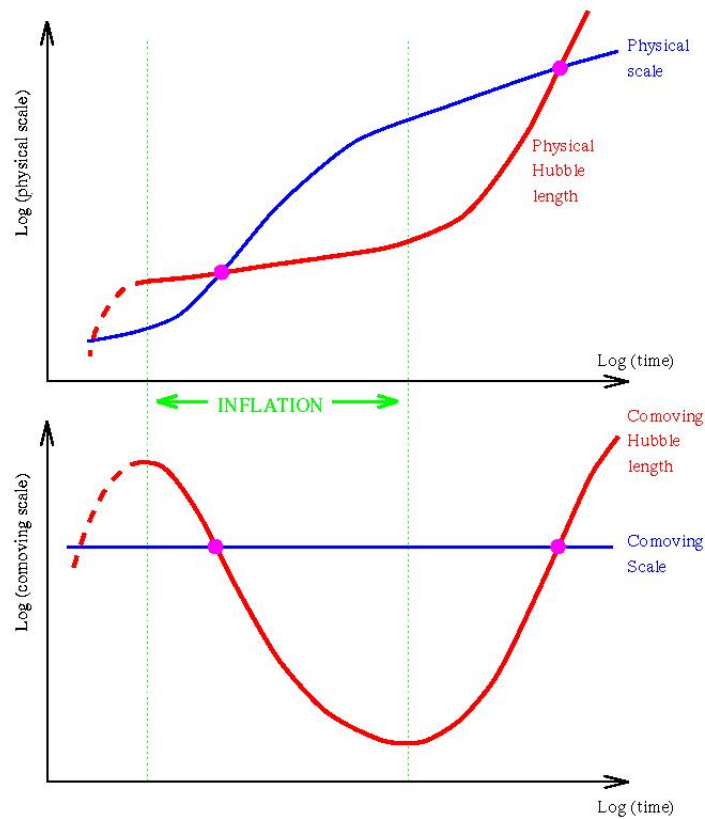


Figura 3.1: [8] In figura vengono illustrati i rapporti tra raggio fisico dell'universo e scala di Hubble da due differenti prospettive:

Nel primo grafico si analizzano le dimensioni fisiche dell'universo, ovvero in un sistema di riferimento con unità fisse nel tempo. Il raggio fisico dell'universo allora aumenta sempre con un periodo di espansione accelerata, l'inflazione, mentre il raggio fisico di Hubble, che aumenta proporzionalmente al tempo, non ha appunto tempo di aumentare durante l'inflazione rapidissima.

Nel secondo grafico si analizzano le dimensioni cosmologiche da un sistema di riferimento comovente, ovvero con un unità che si espande allo stesso ritmo dell'universo. Il raggio dell'universo è, in tale sistema di riferimento, costante per definizione, mentre il raggio di Hubble comovente deve diminuire durante un periodo di espansione dello spazio, dunque delle unità di riferimento, più rapida della sua velocità di espansione fissata.

In entrambi i casi vediamo come ci siano due punti di intersezione tra raggio di Hubble e raggio dell'universo grazie all'introduzione dell'inflazione: nel primo due zone ad una distanza fissata, precedentemente comunicanti, escono dal rispettivo raggio di interazione causale, nel secondo punto, dopo che l'universo ha rallentato il suo rate di espansione, ci rientrano.

modelli cosmologici. Fortunatamente, però, la situazione non è questa e anche il modello inflazionario più rudimentale è in grado di produrre un'aumento delle dimensioni cosmiche estremamente più elevato del necessario (si sta parlando di espansioni di fattori dell'ordine di $(10^{10})^{100}$ garantiti). Addirittura il problema per buona parte dei potenziali inflativi è quello di trovare un modo di mettere fine all'espansione accelerata²! Nonostante i vari modelli inflazionari richiedano la sintonizzazione arbitraria di un certo numero di parametri, dunque, risolvono problemi ben più gravosi di fine tuning rispetto a quelli che introducono, e lo fanno inoltre con un eleganza raramente eguagliata nella storia della fisica, anche se quest'ultima considerazione non ha alcun carattere scientifico.

²Si pensi, per esempio, a tutta la famiglia di modelli multi-campo scalare, tra cui l'*inflazione ibrida* [12], nei quali si introducono diversi potenziali che raggiungono i rispettivi minimi in diversi momenti e con diverse velocità per riuscire a sedare un'espansione altrimenti incontrollata

Capitolo 4

Potenziali inflazionari

Si è visto come un periodo di espansione accelerata, l'inflazione, sia in grado di risolvere i maggiori problemi che affliggevano il modello standard dell'Hot Big Bang. E' opportuno, però, fornire un modello matematico alla base in grado di descrivere tale processo e di un background fisico alle equazioni impostate, per rendere tale spiegazione a tutti gli effetti scientifica. E' necessario dunque trovare l'adeguato scenario in grado di dare una spiegazione a una tale espansione accelerata e che ci consenta al contempo di fare predizioni su possibili valori osservabili, rendendo così testabile la teoria.

4.1 Campi scalari

L'oggetto matematico deputato a guidare una tale espansione è il *campo scalare*. Esso non è altro che una funzione che associa uno scalare ad ogni punto dello spazio-tempo, rimanendo, dunque, invariato sotto ogni possibile trasformazione di Poincarè. In fisica delle particelle, i campi scalari sono utilizzati per descrivere le particelle di spin nullo, e sono inoltre di fondamentale importanza per la rottura spontanea delle simmetrie. In un universo omogeneo un campo scalare sarà funzione del solo tempo e ad esso sarà naturalmente associato un potenziale.

Per iniziare la trattazione del campo scalare omogeneo che guida l'inflazione vanno definite classicamente le relazioni che intercorrono tra densità effettiva di energia, pressione esercitata dal campo e il suo potenziale:

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (4.1)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (4.2)$$

Il primo termine a destra in tali equazioni può essere interpretato come una sorta di energia cinetica del campo scalare, mentre il secondo rappresenta l'energia potenziale, ovvero la densità di energia interna associata ad ogni particolare valore del campo ϕ . Naturalmente i campi scalari cercano di minimizzare tale energia interna, come in ogni sistema fisico, e il fatto che sia richiesto un certo intervallo temporale di dimensioni finite per raggiungere il minimo del potenziale rende possibile l'inflazione: nel periodo in cui il potenziale inflazionario si trova a valori (considerevolmente) diversi da zero, avverrà l'espansione accelerata dell'universo¹.

Si vede come non sia possibile descrivere la dinamica di un campo scalare per mezzo di un'equazione di stato; ciò è evidente, poichè non c'è un unico valore di p associabile ad un dato valore di ρ , dal momento che la densità di energia può dividersi in diverse maniere tra energia cinetica e potenziale. Per questo motivo ciò che si fa in ogni modello inflazionario è specificare una forma arbitraria del potenziale $V(\phi)$, regolata a sua volta da opportuni parametri, e da tale ipotesi derivare espressioni per le varie quantità osservabili, grazie alle quali sarà poi possibile inferire sulla calibrazione dei parametri di ogni differente potenziale, e discernere quali siano le forme di potenziali più calzanti per riprodurre le caratteristiche dell'universo attuale. Uno dei punti di forza di tale approccio è il fatto che già considerando le forme di potenziale più elementari, i potenziali monomiali,

¹ Il passo successivo sarà comprendere il perchè il potenziale inflativo si trovi inizialmente ad un determinato valore differente da zero e come sia possibile che tale valore riesca a fornire abbastanza inflazione per evitare il ricollasso dell'universo o la sua eccessiva espansione e diluizione. La spiegazione di tale processo è da ricercarsi in fluttuazioni quantistiche del campo scalare, di dimensioni considerevoli ai regimi energetici della grande unificazione, che non verranno chiaramente affrontate nel corso di questa esposizione.

si riescono a riprodurre in prima approssimazione le principali caratteristiche dell'universo oggi osservato, e successivamente si potrà raffinare i modelli di base per produrre previsioni più accurate.

4.2 Equazioni del moto

Le equazioni del moto per un universo in espansione contenente un campo scalare omogeneo si possono ottenere immediatamente sostituendo le equazioni 4.1 e 4.2 nelle equazioni di Friedmann 1.9, di fluido 1.8 e dell'accelerazione 1.4. Nella seguente trattazione si porrà il valore della curvatura dell'universo $k = 0$, dal momento che sappiamo che il termine di curvatura è trascurabile nell'universo attuale e a maggior ragione lo deve essere stato nell'universo primordiale.

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right], \quad (4.3)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V'(\phi), \quad (4.4)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\dot{\phi}^2 - V(\phi)), \quad (4.5)$$

dove l'apostrofo indica una derivata rispetto al parametro ϕ ($d/d\phi$).

Dalla terza equazione segue che:

$$\ddot{a} > 0 \iff \dot{\phi}^2 < V(\phi),$$

dunque avremo inflazione quando il termine di energia potenziale del campo scalare è dominante. Si dovranno cercare dei potenziali che riescano a mantenere tale condizione per un periodo sufficientemente lungo e che dispongano di un minimo nel quale l'inflazione possa concludersi. Si ricorda, inoltre, che dall'equazione dell'accelerazione si deduce anche che il fluido cosmico associato al campo scalare debba avere pressione negativa e minore di $p < -\rho/3$.

La strategia standard adottata per risolvere queste equazioni è l'*approssimazione di Slow-Roll*, che verrà trattata più approfonditamente nel capitolo 5. Questa approssimazione assume che, sotto determinate condizioni imposte sui parametri di slow-roll, si possa trascurare un termine in ciascuna delle prime due equazioni del moto, semplificandole nella forma:

$$H^2 \simeq \frac{8\pi G}{3} V(\phi), \quad (4.6)$$

$$3H\dot{\phi} \simeq -V'(\phi). \quad (4.7)$$

Come si può vedere, l'approssimazione di slow-roll riduce di uno l'ordine del sistema di equazioni differenziali, dunque la sua soluzione generale conterrà una condizione iniziale in meno.

4.3 Forma alternativa delle equazioni del moto

L'approccio presentato nelle sezioni precedenti non è l'unico possibile, in particolare, quando si vuole fare uno studio più generale senza specificare un determinato potenziale da analizzare, c'è un modo più conveniente di impostare l'approssimazione. In letteratura, il primo dei due approcci, a potenziale fissato, viene detto *PSRA* (*Potential Slow-Roll Approximation*), mentre il secondo, che impone condizioni sull'evoluzione del parametro di Hubble durante l'inflazione, viene chiamato *HSRA* (*Hubble Slow-Roll Approximation*). Oltre alla maggiore generalità, l'HSRA possiede anche un'interpretazione geometrica più chiara e proprietà analitiche più convenienti.

Il secondo approccio è basato su una forma alternativa delle equazioni del moto (4.3,4.4) in cui si utilizza il campo scalare come variabile temporale, ovvero si analizza l'evoluzione di $H(\phi)$ al posto di $H(t)$. Questo richiede che $\dot{\phi}$ non cambi di segno nel corso dell'inflazione, e si può scegliere $\dot{\phi} > 0$ senza perdita di generalità. Per passare alla nuova forma delle equazioni del moto allora sarà sufficiente derivare rispetto al tempo l'equazione 4.3:

$$2H\dot{H} = \frac{8\pi G}{3} \dot{\phi} \ddot{\phi}, \quad (4.8)$$

dal momento che il potenziale inflazionario non varia nel tempo. Inserendo in essa la seconda equazione del moto 4.4, nella quale il termine di variazione di potenziale diventa nullo, e riarrangiando:

$$2H\dot{H} = -8\pi HG\dot{\phi}^2, \quad (4.9)$$

$$\dot{H} = -4\pi G \dot{\phi}^2. \quad (4.10)$$

Si vede immediatamente come ciò implichi $\dot{H} \leq 0$, che è una delle caratteristiche essenziali dell'inflazione. Dividendo quest'equazione per $\dot{\phi}$ per eliminare la dipendenza temporale²:

$$\dot{\phi} = -\frac{H'(\phi)}{4\pi G}, \quad (4.11)$$

ed inserendo l'equazione così ottenuta in 4.3 si ottiene:

$$H(\phi)^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[\frac{H'(\phi)^2}{32\pi^2 G^2} + V(\phi) \right], \quad (4.12)$$

$$H'(\phi)^2 - 12\pi G H(\phi)^2 = -32\pi^2 G^2 V(\phi). \quad (4.13)$$

Le equazioni 4.11 e 4.13, messe a sistema, vengono dette *equazioni di Hamilton-Jacobi* e rappresentano una forma alternativa delle equazioni del moto precedentemente derivate. Il procedimento HSRa che ne fa uso si può sintetizzare come segue: specifico una determinata forma di $H(\phi)$ da analizzare e utilizzo l'equazione 4.13 per trovarne il potenziale a cui corrisponde; sfruttando 4.11 si può poi ottenere $\dot{\phi}$, grazie alla quale posso riconvertire le dipendenze in ϕ in dipendenze temporali, per ricavare $H(t)$. Da qui è poi possibile ricavare l'espressione di qualsiasi parametro desiderato utilizzando le procedure standard.

4.4 Parametri inflazionari

Questa sezione è dedicata all'introduzione di alcuni parametri dell'inflazione che torneranno utili nella seconda parte del lavoro, in particolare di due quantità osservabili di fondamentale importanza per discernere quali siano, tra le molte forme di potenziale presenti in letteratura, le più aderenti alle evidenze sperimentali.

Si può cominciare dalla definizione di un parametro teorico di vastissimo utilizzo negli studi cosmologici: la quantità di inflazione generata dal modello in analisi viene solitamente specificata per mezzo del logaritmo dell'aumento relativo del fattore di scala dell'universo occorso, ovvero il *numero di e-foldings* N :

$$N \equiv \ln \left(\frac{a(t_f)}{a(t_i)} \right) = \int_{t_i}^{t_f} H dt \simeq -8\pi G \int_{\phi_i}^{\phi_e} \frac{V}{V'} d\phi, \quad (4.14)$$

dove nell'ultimo passaggio si è utilizzata l'approssimazione di slow-roll e si vedranno sotto quali condizioni esso sia valido nel prossimo capitolo. Si noti come non serva risolvere le equazioni del moto per ricavare il numero di e-foldings a partire da un determinato potenziale, e che tutta la classe di potenziali della stessa forma, ovvero differenti solo per una costante moltiplicativa, produrranno la stessa quantità d'inflazione. Chiaramente tale parametro non serve solamente ad indicare la quantità totale d'inflazione avvenuta, ma, prendendo come riferimento la fine dell'inflazione, può indicarci in quale momento una determinata scala di lunghezze d'onda sia uscita dal raggio di Hubble. In particolare il numero minimo di e-folds necessario in un modello inflazionario per poter risolvere i problemi della piatezza e dell'orizzonte è $N_* = 60$.

Uno dei punti di forza dell'inflazione, che la rende una teoria ancor più completa rispetto alla semplice soluzione delle problematiche illustrate in precedenza, è che essa non si limita ad appiattare ed omogenizzare l'universo, ma fornisce anche un meccanismo naturale per la produzione di onde gravitazionali e di densità primordiali. Tali perturbazioni di densità saranno responsabili delle anisotropie nella radiazione cosmica di fondo, che nella loro evoluzione saranno il nucleo della formazione di strutture galattiche. Il parametro che rende conto della potenza relativa delle perturbazioni gravitazionali (tensoriali) rispetto a quelle di densità (scalari) è il *Tensor-to-Scalar Ratio* r :

$$r = \frac{C_l^{GW}}{C_l^{DP}} = 4 \frac{\Delta_+^2}{\Delta_R^2}. \quad (4.15)$$

²Chiaramente, nel caso di modelli inflazionari a singolo campo, si avrà:

$$\frac{\dot{H}}{\dot{\phi}} = \frac{dH}{dt} \frac{dt}{d\phi} = \frac{dH}{d\phi} \equiv H'(\phi).$$

La prima definizione è data in termini del rapporto dei contributi al monopolio nelle microonde, la seconda del rapporto tra gli spettri di potenza, in cui quello tensoriale va moltiplicato per 2^2 per rendere conto delle due possibili polarizzazioni nelle onde gravitazionali. Questo rapporto è generalmente molto piccolo e infatti disponiamo sperimentalmente solo di limiti superiori per esso: riusciamo a misurare lo spettro di potenza delle perturbazioni di densità con un'ottima precisione ma ancora non siamo in grado di individuare le tracce gravitazionali dell'inflazione, che si manifestano solo sulle scale dell'ordine dell'universo osservabile stesso *e sulle quali dunque grava la limitazione fisica della cosmic variance nel determinarne un valore preciso.*

L'ultimo parametro inflazionario rilevante ai fini della nostra discussione futura è lo *Scalar Tilt* n_s . Siamo in grado di calcolare l'ampiezza di ogni singolo modo di oscillazione quando la sua lunghezza d'onda, che varia a causa dell'espansione, è uguale all'orizzonte degli eventi³. In seguito quel modo uscirà dall'orizzonte e, non potendo più interagire con le oscillazioni rimaste all'interno, la sua ampiezza rimarrà immutata. Nel caso si verifichino le condizioni di slow-roll, ovvero una piccola $\dot{\phi}$ e un parametro di Hubble praticamente costante nel tempo, i modi di diverse lunghezze d'onda dovrebbero avere all'incirca le stesse ampiezze, con una lenta variazione in funzione della scala. Se dunque definiamo lo spettro di potenza delle perturbazioni scalari come la varianza in ampiezza per intervallo logaritmico:

$$\Delta_R^2 = \left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)^2 = \int P_S(k) d\log k, \quad (4.16)$$

allora l'inflazione predice una legge di potenza per la potenza dei modi all'istante di uscita dall'orizzonte $P_S(k)$:

$$P_S(k) \propto k^{n_s-1},$$

cosicché uno spettro invariante di scala sarà dato da uno *Scalar Tilt* unitario. Nella realtà l'inflazione non riesce a produrre uno spettro di potenza perfettamente invariante di scala, poichè comunque le condizioni sono solo approssimative, anche se ci va molto vicina e lo *Scalar Tilt* $n_s - 1$ misura questa deviazione dall'invarianza di scala per le perturbazioni di densità. Le stime più recenti per il valore di tale parametro sono $n_s - 1 = -0.035 \pm 0.004$ [6] Chiaramente lo stesso discorso varrà per i modi di oscillazione gravitazionali e sarà possibile definire un indice analogo n_T ⁴ per valutare la deviazione dall'invarianza di scala delle perturbazioni tensoriali.

³Non è nello scopo di questo lavoro presentare una derivazione delle espressioni per tali ampiezze. Le riportiamo per completezza, una corretta derivazione si potrà trovare in [13]:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)_{k=aH} &= \frac{H^2}{4\pi^{3/2}\dot{\phi}}, \\ (h_{+, \times})_{k=aH} &= \frac{H\sqrt{G}}{2\pi}. \end{aligned}$$

⁴Attenzione che nel caso tensoriale, anche per motivi storici di notazione, l'indice viene definito solamente come n_T , dunque si avrà una perfetta invarianza di scala per $n_T = 0$.

Capitolo 5

Espansioni e parametri di Slow-Roll

L'approssimazione di slow-roll è utilizzata di frequente nell'analisi dei diversi modelli inflazionari dal momento che si conoscono solo un numero limitato di soluzioni analitiche delle equazioni del moto. Nel capitolo precedente si sono presentati i due possibili metodi per mezzo dei quali impostare e risolvere le equazioni di slow-roll, omettendo la discussione sulle condizioni necessarie e sufficienti per i parametri di slow-roll. Il valore dei parametri di slow-roll è infatti ciò che permette di capire quando l'universo si trova in regime inflazionario e fino a quando durerà l'inflazione. Ogni differente approccio, PSRA o HSRA, ha i suoi specifici parametri di slow-roll e in letteratura vengono spesso definiti in maniera diversa da articolo ad articolo, generando possibili confusioni: in questo capitolo si presenterà, dunque, una prescrizione per costruire in maniera univoca tutta l'infinita gerarchia di parametri di slow-roll per ogni approccio, formalizzata nell'articolo [7] di Liddle, Parson, Barrow, e si analizzeranno le condizioni derivanti per il regime inflazionario.

5.1 La gerarchia dei parametri HSR

Di frequente, in letteratura, si desidera ottenere dei risultati al prim'ordine nell'espansione di Hubble slow-roll e a questo scopo vengono definiti:

$$\epsilon_H(\phi) = \frac{1}{4\pi G} \left(\frac{H'(\phi)}{H(\phi)} \right)^2, \quad (5.1)$$

$$\eta_H(\phi) = \frac{1}{4\pi G} \frac{H''(\phi)}{H(\phi)}, \quad (5.2)$$

detti impropriamente *parametri di (Hubble)-slow-roll*, che valutano le derivate prime e seconde rispetto a ϕ del parametro di Hubble. Per ottenere risultati ad ordini superiori sarà necessario definire ulteriori parametri di slow-roll, che coinvolgano derivate di grado superiore del parametro di Hubble¹ e qui nascono diversi equivoci poichè la questione non viene affrontata in maniera sistematica. Si prenda ad esempio l'articolo [9] in cui il parametro aggiuntivo per ottenere un'espansione al second'ordine è stato definito come $\xi = (1/4\pi G)(H'''/H')$; questa definizione è problematica in quanto si sta espandendo attorno ad un potenziale piatto e in tal caso non è garantito che il parametro ξ tenda a zero, come è richiesto per tutti i vari parametri di slow-roll, a causa della derivata prima a denominatore.

Ricordiamo, infatti, che le condizioni *necessarie* affinché si abbia inflazione nell'universo sono che i parametri di HSR siano (molto) minori dell'unità. Nello specifico, in un espansione al prim'ordine, dovremo richiedere che:

- $\epsilon_H \ll 1$ per poter trascurare il primo termine dell'equazione 4.13;
- $|\eta_H| \ll 1$ per poter trascurare la derivata del primo termine dell'equazione 4.13;

Dal momento che si stanno cercando di ottenere risultati al prim'ordine, sbarazzandoci già della derivata seconda di $H(\phi)$ quando sono soddisfatte tali condizioni, si sono considerati tutti i possibili contributi all'espressione

¹Si dimostrerà che per ottenere un'espansione di slow-roll all'ordine n , sarà sempre necessario introdurre $n+1$ parametri di slow-roll, ovvero bisognerà coinvolgere una derivata di grado $n+1$ del parametro di Hubble.

finale e dunque tutte le informazioni dinamiche *necessarie* per garantire l'inflazione sono contenute nei parametri HSR. In particolare, la condizione esatta affinché l'universo sia in fase inflazionaria è in tal caso:

$$\ddot{a} > 0 \iff \epsilon_H < 1.$$

Il nocciolo della questione, alla fine, è cercare di definire una gerarchia di parametri di HSR tale che essi tendano sempre a zero nel momento in cui un potenziale tende ad appiattirsi. Facendo una tale richiesta rimangono comunque aperte diverse strade di definire la gerarchia di parametri. La definizione più intuitiva potrebbe sembrare²:

$${}^n\tilde{\beta}_H = \frac{1}{4\pi G} \left(\frac{H^{(n)}}{H} \right)^{2/n}, \quad (5.3)$$

che riproduce ${}^1\tilde{\beta}_H = \epsilon_H$ e ${}^2\tilde{\beta}_H = \eta_H$. Quando si necessita espandere ad ordini superiori, però, tale scelta non si rivela la più efficace e si dispone di una definizione più appropriata, per motivi che si vedranno in seguito.

Il metodo migliore per definire la gerarchia di parametri di HSR è quello di partire dal secondo parametro lasciando fuori il primo, includendolo solo separatamente. Per convenienza, dunque, rinomineremo l'ordine dei parametri in tale gerarchia assegnando lo 0 al primo parametro ϵ_H e procedendo poi di conseguenza. Si avrà allora:

$$\epsilon_H \equiv {}^0\beta_H = \frac{1}{4\pi G} \left(\frac{H'}{H} \right)^2, \quad (5.4)$$

$${}^n\beta_H = \frac{1}{4\pi G} \left(\frac{(H')^{n-1} H^{n+1}}{H^n} \right)^{1/n}. \quad (5.5)$$

Si vede come il primo parametro individuato da questa definizione sia ${}^1\beta_H \equiv \eta_H$ mentre a seguire si otterranno:

$$\xi_H \equiv {}^2\beta_H = \frac{1}{4\pi G} \left(\frac{H' H'''}{H^2} \right)^{1/2}, \quad (5.6)$$

$$\sigma_H \equiv {}^3\beta_H = \frac{1}{4\pi G} \left(\frac{(H')^2 H''''}{H^3} \right)^{1/3}, \quad (5.7)$$

$$\tau_H \equiv {}^4\beta_H = \frac{1}{4\pi G} \left(\frac{(H')^3 H^{(5)}}{H^4} \right)^{1/4}, \quad (5.8)$$

$$\zeta_H \equiv {}^5\beta_H = \frac{1}{4\pi G} \left(\frac{(H')^4 H^{(6)}}{H^5} \right)^{1/5}. \quad (5.9)$$

Il punto di forza di tale definizione è che in ogni parametro compare una combinazione di H e delle sue derivate elevata ad un potenza $1/n$, dove $n \in \mathbb{Z}^+$. Ora, se si vuole convertire la serie di Taylor di una funzione di $H(\phi)$ e delle sue derivate in un'espansione nei parametri di slow-roll, è garantito che ogni specifico argomento di ogni parametro che compare nell'espressione dovrà essere elevato ad una potenza intera. Dunque la conseguenza notevole della definizione precedente è che non è possibile che compaia il parametro ${}^n\beta_H$ in un termine dell'espansione di ordine minore di n . Si può notare, allora, che per fare un'espansione all'ordine n -esimo, saranno sempre sufficienti al massimo $n + 1$ parametri di slow-roll.

5.2 La gerarchia dei parametri PSR

Quando si desidera ottenere un risultato al prim'ordine nell'espansione di Potential Slow-roll, ciò che si fa usualmente è definire i due parametri:

$$\epsilon_V(\phi) = \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2, \quad (5.10)$$

$$\eta_V(\phi) = \frac{1}{8\pi G} \frac{V''(\phi)}{V(\phi)}, \quad (5.11)$$

²L'apice ${}^{(n)}$ indica la derivata n -esima rispetto a ϕ

e richiederne la limitatezza ($\epsilon_V \ll 1, \eta_V \ll 1$). La loro limitatezza è utilizzata per giustificare la trascurabilità del termine cinetico nell'equazione di Friedmann e del termine di accelerazione nell'equazione d'onda scalare, come fatto ai punti 4.6 e 4.7. A differenza del caso precedente, però, la limitatezza dei parametri PSR è una condizione *necessaria* per garantire l'inflazione e la conseguente trascurabilità di tali termini, ma non *sufficiente*. I parametri PSR, infatti, impongono delle condizioni solo sulla forma del potenziale e non sulle proprietà delle soluzioni. Le soluzioni conterranno un ulteriore parametro liberamente specificabile, ϕ , che regola le dimensioni del termine cinetico, che può diventare grande a piacimento nonostante la limitatezza dei parametri PSR.

Per garantire che l'universo stia attraversando una fase inflazionaria nell'approccio PSR è, in generale, necessaria un'ulteriore assunzione: il campo scalare ϕ evolve verso una soluzione asintotica detta appunto *attrattore*. L'attrattore inflazionario in questione è:

$$\dot{\phi} \simeq -\frac{V'}{3H}. \quad (5.12)$$

Non è comunque complicato verificare che questa condizione sia rispettata. Senza entrare nei dettagli³, si può dimostrare che, se il potenziale è in grado di supportare l'inflazione, tutte le soluzioni inflazionarie si avvicinano rapidamente l'una all'altra con velocità esponenziale una volta entrati in regime lineare. Anche quando l'inflazione si conclude l'universo continua ad espandersi e le diverse soluzioni si avvicinano ulteriormente. Di conseguenza anche la fase di fine inflazione, che è la parte che lascia le impronte caratteristiche sulle successive fasi dell'Hot Big Bang, è indipendente dalle condizioni iniziali.⁴

L'unica situazione in cui la condizione dell'attrattore inflazionario non si può applicare è dunque nei primi istanti dopo l'inizio dell'espansione accelerata. Tali periodi così distanti nel tempo non sono sondabili sperimentalmente e si possono ignorare nell'analisi.

Tuttavia, come fatto nella sezione precedente, è conveniente introdurre una gerarchia infinita di parametri PSR dalle proprietà ben definite. Ancora una volta si adatterà il metodo di definire una gerarchia che presti attenzione alle potenze a cui vengono elevati i termini di potenziale, escludendo la definizione di ϵ_V che andrà fatta separatamente:

$$\epsilon_V \equiv^0 \beta_V = \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V'}{V} \right)^2, \quad (5.13)$$

$${}^0\beta_V = \frac{1}{8\pi G} \left(\frac{(V')^{n-1} V^{(n+1)}}{V^n} \right)^{1/n}, \quad (5.14)$$

Il primo parametro descritto da tale definizione è ${}^1\beta_V = \eta_V$, come desiderato, a cui seguiranno:

$$\xi_V \equiv^2 \beta_V = \frac{1}{8\pi G} \left(\frac{V' V'''}{V^2} \right)^{1/2}, \quad (5.15)$$

$$\sigma_V \equiv^3 \beta_V = \frac{1}{8\pi G} \left(\frac{(V')^2 V''''}{V^3} \right)^{1/3}, \quad (5.16)$$

$$\tau_V \equiv^4 \beta_V = \frac{1}{8\pi G} \left(\frac{(V')^3 V^{(5)}}{V^4} \right)^{1/4}, \quad (5.17)$$

$$\zeta_V \equiv^5 \beta_V = \frac{1}{8\pi G} \left(\frac{(V')^4 V^{(6)}}{V^5} \right)^{1/5}. \quad (5.18)$$

Le considerazioni sulle espansioni all'ordine n-esimo fatte per l'approccio HSR valgono chiaramente anche in questo caso.

5.3 Collegamento tra i due approcci

Le espansioni HSR e PSR hanno differenti proprietà e vantaggi ma sono chiaramente collegate e nella sezione 4.3 si è visto come passare dalle equazioni del moto espresse in funzione del potenziale a quelle espresse in funzione del parametro di Hubble. Allo stesso modo si può cercare la connessione che lega i parametri delle

³Per una discussione più approfondita si rimanda a [7]

⁴A questo proposito bisogna notare che non esiste la nozione di una soluzione preferenziale che faccia da attrattore, bensì ogni soluzione è attrattrice per tutte le altre ed esse convergono asintoticamente

espansioni PSR ai corrispondenti parametri dell'approccio HSR, ricordando che per rendere i primi realmente equivalenti ai secondi non è sufficiente una semplice trasformazione, ma è anche necessaria un'ulteriore discussione sulla verifica della condizione di attrattore inflazionario. Non è possibile ottenere una relazione ricorsiva per costruire le relazioni tra parametri di ordine n -esimo, ma con la dovuta pazienza è possibile arrivare ad una relazione analitica che leghi ogni parametro PSR ai parametri HSR ed eventualmente alle loro derivate rispetto a ϕ . Si illustrerà ora il metodo per ricavare le espressioni analitiche per i primi due parametri PSR, che sarà poi estendibile facilmente ai parametri successivi se desiderati.

Il procedimento da seguire è quello di riesprimere, all'interno della definizione del parametro PSR desiderato, il potenziale e le sue derivate per mezzo della seconda equazione di Hamilton-Jacobi (4.13) opportunamente derivata. Si può partire, dunque, dall'espressione per il parametro PSR di ordine 0 (5.10), isolando poi il potenziale nell'equazione 4.13

$$V = -\frac{1}{32\pi^2 G^2} (H'^2 - 12\pi G H^2), \quad (5.19)$$

e calcolandone la derivata rispetto a ϕ :

$$V' = -\frac{1}{16\pi^2 G^2} (H' H'' - 12\pi G H H'). \quad (5.20)$$

Sostituendo queste due espressioni nell'equazione 5.10 si ottiene:

$$\epsilon_V = \frac{1}{16\pi G} \left(-\frac{32\pi^2 G^2}{16\pi^2 G^2} \right)^2 \left(\frac{H' H'' - 12\pi G H H'}{H'^2 - 12\pi G H^2} \right)^2, \quad (5.21)$$

che si può riarrangiare nella seguente maniera, individuando al suo interno le espressioni dei parametri HSR definiti nella sezione 5.1:

$$\epsilon_V = \epsilon_H \left(\frac{H'' - 12\pi G H}{\frac{H'^2}{H} - 12\pi G H} \right)^2, \quad (5.22)$$

$$\epsilon_V = \epsilon_H \left(\frac{\frac{H''}{4\pi G H} - 3}{\frac{H'^2}{4\pi G H^2} - 3} \right)^2, \quad (5.23)$$

$$\epsilon_V = \epsilon_H \left(\frac{3 - \eta_H}{3 - \epsilon_H} \right)^2. \quad (5.24)$$

Questa è la prima delle relazioni analitiche tra parametri PSR e HSR e, come si può vedere, per riesprimere ϵ_V è necessaria un'espressione che coinvolga il parametro HSR di ordine superiore η_H . Per quando riguarda il secondo parametro PSR, sempre partendo dalla sua definizione 5.11, e calcolando la derivata seconda dell'equazione di Hamilton-Jacobi:

$$V'' = -\frac{1}{16\pi^2 G^2} (H''^2 + H' H''' - 12\pi G (H'^2 + H H'')), \quad (5.25)$$

si ottiene, una volta sostituite le espressioni per il potenziale nella definizione originaria:

$$\eta_V = \frac{1}{8\pi G} \left(\frac{32\pi^2 G^2}{16\pi^2 G^2} \right) \left(\frac{H''^2 + H' H''' - 12\pi G (H'^2 + H H'')}{H'^2 - 12\pi G H^2} \right). \quad (5.26)$$

Come in precedenza, operando dei semplici raccoglimenti, si può arrivare ad un'espressione in funzione dei parametri HSR:

$$\eta_V = \frac{1}{4\pi G} \frac{1}{4\pi G H^2} \left(\frac{H''^2 + H' H''' - 12\pi G (H'^2 + H H'')}{\epsilon_H - 3} \right), \quad (5.27)$$

$$\eta_V = \frac{\frac{1}{16\pi^2 G^2} \left(\frac{H''^2}{H^2} + \frac{H' H'''}{H^2} \right) - \frac{3}{4\pi G} \left(\frac{H'^2}{H^2} + \frac{H''}{H} \right)}{\epsilon_H - 3}, \quad (5.28)$$

$$\eta_V = \frac{3\epsilon_H + 3\eta_H - \eta_H^2 - \xi_H^2}{3 - \epsilon_H}. \quad (5.29)$$

Reiterando tale procedura è possibile ottenere una gerarchia infinita di relazioni analitiche tra i parametri PSR e HSR.

5.4 Sviluppo di un'espansione HSR

Nelle sezioni precedenti si sono illustrati in generale i vari approcci per generare espansioni di slow roll dei parametri inflazionari desiderati e si è definita una gerarchia infinita di tali parametri dalle precise proprietà analitiche per facilitare lo sviluppo delle espansioni. Si vuole concludere questa prima parte mostrando all'opera brevemente il meccanismo per generare un'espansione all'ordine desiderato dell'equazione di Hamilton Jacobi 4.13 e presentando a corredo delle espansioni di parametri inflazionari da utilizzarsi nella seconda parte.

Il punto di partenza è uno specifico potenziale $V(\phi)$ per il quale si sta cercando la dinamica del parametro di Hubble da esso generata. Non riuscendo generalmente a risolvere analiticamente per $H(\phi)$, si cerca una soluzione approssimata per mezzo di un'espansione di Taylor nei vari parametri PSR. E' inanzitutto necessario riesprimere l'equazione 4.13 utilizzando la definizione di ϵ_H :

$$\begin{aligned} H^2 - \frac{1}{12\pi G} H'^2 &= \frac{8\pi G}{3} V \\ \left[1 - \frac{1}{12\pi G} \left(\frac{H'}{H}\right)^2\right] H^2 &= \frac{8\pi G}{3} V \\ H^2 &= \frac{8\pi G}{3} V \left(1 - \frac{1}{3}\epsilon_H\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

In seguito si cercherà una soluzione approssimata per $H(\phi)^2$ della forma:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} V (1 + a\epsilon_V + b\eta_V + c\epsilon_V^2 + \dots), \quad (5.31)$$

dove a, b sono costanti da determinare e si sono trascurati i termini di ordine superiore al secondo. Si noti che l'equazione 5.24 garantisce già che si abbia $b = 0$, imponendo ogni espansione di ϵ_H a contenere almeno una potenza di ϵ_V .

Ora, volendo ottenere un'espansione di $(1 - \epsilon_H/3)^{-1}$ nei parametri PSR, si assume un'espressione generale dei parametri HSR in termini di quelli PSR, del tipo 5.31 per ogni parametro. Le forme al prim'ordine già note vanno allora sostituite nell'equazione 5.24, da cui si può estrarre la costante incognita per confronto. La procedura va reiterata ordine per ordine e successivamente si invertirà l'espansione di $(1 - \epsilon_H/3)$ usando il teorema binomiale. Ottenere i primi due termini dell'espansione è dunque immediato, conoscendo già $\epsilon_H \simeq \epsilon_V$ al prim'ordine:

$$\epsilon_H = \epsilon_V - \frac{4}{3}\epsilon_V^2 + O_2. \quad (5.32)$$

Dunque, invertendo, la soluzione approssimata al second'ordine per la dinamica di H dato il potenziale $V(\phi)$ sarà:

$$H(\phi)^2 = \frac{8\pi G}{3} V(\phi) \left(1 + \epsilon_V - \frac{1}{3}\epsilon_V^2 + O_2\right). \quad (5.33)$$

Allo stesso modo in cui è possibile utilizzare l'espansione di slow roll per ottenere informazioni approssimate sulla dinamica dell'inflazione, essa può essere utilizzata anche nel calcolo degli spettri delle perturbazioni generate. Riportiamo dunque due espansioni al second'ordine nei parametri HSR ricavate in [7] che torneranno utili nelle prossime pagine: sono le espansioni del tensor-to-scalar ratio r e dello scalar tilt $n_s - 1$ definiti nella sezione 4.4.

$$r = \frac{25}{2}\epsilon_H [1 + 2c(\epsilon_H - \eta_H) + O_2], \quad (5.34)$$

$$n_s - 1 = -4\epsilon_H + 2\eta_H - 2(1 + c)\epsilon_H^2 + \frac{1}{2}(3 - 5c)\epsilon_H\eta_H - \frac{1}{2}(3 - c)\xi_H^2 + O_2, \quad (5.35)$$

nelle quali $c = 4(\ln 2 + \gamma)^5$.

⁵ γ è la costante di Eulero-Mascheroni:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) \simeq 0.57722. \quad (5.36)$$

Parte II

Correlazioni fra parametri inflazionari: Studio al second'ordine nell'espansione di Slow-Roll

Capitolo 6

Correlazioni fra parametri inflazionari

Nella prima parte si è presentato il meccanismo dell'inflazione cosmologica e la sua descrizione matematica: essa si è rivelata una teoria in grado di spazzare via la necessità di regolazioni ad una precisione drammatica in alcuni parametri cosmologici di importanza fondamentale nel modello standard dell'Hot Big Bang, senza introdurre, per contro, altrettanti fine-tunings nei nuovi parametri inflazionari. Questa, come già rimarcato, è la direzione verso cui deve puntare una teoria scientifica efficace, il cercare di arrivare ad una spiegazione completa dei fenomeni naturali che richieda la sintonizzazione arbitraria del minor numero possibile di parametri e che riduca al minimo il computo delle eccezioni. Si vuole procedere in questa direzione anche con il lavoro svolto in questa seconda parte. Il modello dell'Hot Big Bang corredato dell'Inflazione non è una Teoria del Tutto¹, e come tale lascia spazio a diverse regolazioni ad hoc di parametri e di spiegazioni riguardo il suo estremo iniziale. Anche le evidenze osservative sempre più raffinate aprono nuovi interrogativi e mostrano, talvolta, come ci manchi ancora qualche pezzo di spiegazione lì dove i vari parametri misurati sembrano convergere verso rapporti troppo sospetti per essere casuali. Una di queste apparenti correlazioni verrà presa in esame nelle pagine seguenti: è il valore dello scalar tilt $n_s - 1$, che secondo le stime più recenti della Planck Collaboration sembrerebbe compatibile con l'inverso di N_* , il numero di e-folds rispetto alla fine dell'inflazione a cui le scale rilevanti per l'osservazione odierna escono dall'orizzonte cosmologico. Si ipotizzerà che la correlazione fra questi parametri sia una caratteristica intrinseca del meccanismo inflazionario più generale e verranno studiate le sue implicazioni sulla dinamica dei parametri di Hubble Slow-Roll, in particolare come essi regolino l'evoluzione del Tensor-to-Scalar Ratio r . L'esistenza di uno scalamento di $n_s - 1$ proporzionale ad $1/N$ fu osservata per la prima volta in [2] ed è stata successivamente assunta come ipotesi fondante ed analizzata nell'articolo [1], effettuando un'espansione al prim'ordine nei parametri di Hubble Slow-Roll. Si estenderà qui l'analisi al second'ordine, dal momento che le future missioni saranno in grado di fornire limiti massimali molto più precisi sul Tensor-to-Scalar Ratio, permettendoci di operare una cernita migliore delle forme di potenziale in grado di riprodurli, se venisse confermata l'ipotesi alla base.

Nella seconda parte di questo lavoro, nello specifico, si tenterà di riprodurre le considerazioni esposte nell'articolo "Implications of the scalar tilt for the tensor-to-scalar ratio" [1] estendendole all'ordine successivo nei parametri di Hubble slow roll. Si cercherà, in questo modo, di fornire un'analisi più approfondita delle conseguenze dell'ipotesi alla base dell'articolo, osservando oltretutto se è possibile applicarla in tutte le zone del piano (n_s, r) valutate nella trattazione al prim'ordine. L'espansione all'ordine successivo non vuole essere un solo esercizio didattico per testare la comprensione delle tecniche di utilizzo delle approssimazioni di slow-roll, bensì spera di rivelarsi una fonte di informazioni utili quando, con l'arrivo di nuovi dati osservativi provenienti dalle missioni programmate per gli anni futuri, sarà possibile affinare il limite superiore attuale sul tensor-to-scalar ratio e identificare con maggiore precisione la zona del piano nella quale dovranno cadere i modelli teorici.

¹Per inciso, non potendo esistere una teoria matematica che soddisfi contemporaneamente i criteri di consistenza e completezza, una teoria del genere che non richieda la sintonizzazione arbitraria di alcun parametro e che trovi necessità di esistere come tale in se stessa, esiste solo nelle fantasie di alcuni fisici. Quando il termine "Teoria del Tutto" viene utilizzato per riferirsi ad una teoria di gravità quantistica, è un utilizzo improprio dal momento che anch'esse richiedono, soprattutto nei tentativi primordiali che siamo in grado di formulare oggi, un certo numero di arbitrarietà.

6.1 Contesto osservativo attuale ed ipotesi di correlazione

La più recente pubblicazione della Planck Collaboration conferma le indicazioni precedenti riguardo la leggera deviazione dall'invarianza di scala per lo spettro di potenza delle perturbazioni di densità, stimando un valore dello scalar tilt pari a $n_s - 1 = -0.035 \pm 0.004^2$ al confidence level di 1σ [6]. Questo dato è di fondamentale importanza per la nostra comprensione dell'universo primordiale poichè il valore della deviazione dall'invarianza di scala è dipendente dal modello inflazionario e permette di selezionare le forme di potenziale in grado di riprodurlo. Per di più il valore sperimentale di $|n_s - 1|$ è dello stesso ordine di grandezza di $1/N_* \simeq 0.017$, dove N_* è il numero di e-folds dalla fine dell'inflazione a cui le scale oggi osservativamente rilevanti escono dall'orizzonte degli eventi durante l'inflazione³. Questa sembrerebbe una coincidenza fortuita: è facile trovare in letteratura modelli inflazionari in grado di produrre i valori di $|n_s - 1|$ più disparati, con l'unica limitazione imposta dall'approssimazione di slow-roll che richiede uno scalar tilt in ogni caso minore dell'unità. I valori di $|n_s - 1|$ possono dunque spaziare tra 0.2 e 10^{-4} e persino all'interno dello stesso modello inflazionario non c'è una relazione univoca tra lo scalar tilt ed N , si pensi per esempio al prototipo dell'inflazione ibrida, per cui la coincidenza approssimativa fra $|n_s - 1|$ ed N nel corso dell'intera inflazione risulta apparentemente un'improbabile casualità.

Nello stesso spirito dell'inflazione e di qualsiasi teoria fisica che miri ad un'unificazione più completa della nostra descrizione del cosmo, non si vuole credere che questa coincidenza tra parametri sia frutto del caso, bensì dev' esserci una spiegazione per essa che risiede nei potenziali adatti a legare naturalmente le due quantità. Si ipotizzerà, quindi, che esista una relazione del tipo:

$$n_s - 1 = -\frac{\alpha}{N}, \quad (6.1)$$

con α dell'ordine dell'unità e si assumerà inoltre che tale relazione sia valida in un range molto più grande della limitata finestra osservabile, ovvero che la stessa equazione debba valere alle scale che attraversano l'orizzonte ad $N = 10$ o $N = 200$. Anche in questo caso, infatti, limitarsi ad affermare che una relazione debba valere solo per la nostra limitata finestra di scale osservabili, risulterebbe una nuova forma di fine-tuning delle leggi naturali.

Partendo da questa relazione si analizzeranno le implicazioni sulla quantità di onde gravitazionali generate da i vari modelli in grado di soddisfarla. Si vedrà come una regione considerevole del piano (n_s, r) non è compatibile con la relazione ipotizzata. Per tutta la durata di questo lavoro si assumerà, inoltre, α costante, ed eventuali considerazioni sulle implicazioni di un α debolmente dipendente dalla scala verranno rimandate alle conclusioni.

6.2 Implicazioni nella dinamica del parametro ϵ_H

6.2.1 Espansione HSR al prim'ordine

Supponendo valida l'ipotesi alla base di questa trattazione per un periodo considerevole durante l'espansione accelerata dell'universo, si può osservare immediatamente come essa regoli la dinamica del parametro HSR ϵ_H nel corso dell'inflazione. Utilizzando l'espansione al second'ordine ricavata nella sezione 5.4 per riesprimere lo scalar tilt in termini del parametro HSR ϵ_H e delle sue derivate, l'equazione 6.1 diventa un'equazione differenziale in ϵ_H .

Si noti che è essenziale ottenere un'equazione differenziale in funzione solo di ϵ_H se si vuole sperare di poterla risolvere perlomeno con metodi perturbativi. Per riuscire nell'intento è dunque necessario trovare una relazione analitica che leghi i primi parametri HSR e le loro derivate tra di loro, del tipo di quelle ricavate nella sezione 5.3, per poi isolare in ognuna i termini in funzione di ϵ_H . Per brevità si utilizzeranno le relazioni nella forma esposta nell'articolo [14], ed è possibile ricavarle per mezzo delle tecniche esposte in precedenza:

$$\frac{d\epsilon_H}{dN} = \epsilon_H(\sigma + 2\epsilon_H), \quad (6.2)$$

²Nell'articolo [1] si fa riferimento alla pubblicazione del 2015 [10] nella quale la stima per lo scalar tilt è $n_s - 1 = -0.032 \pm 0.004$. Si farà riferimento a tale stima nella riproduzione del grafico dell'articolo con la presenza delle correzioni all'ordine successivo nei parametri di slow-roll.

³Per la precisione, da qui in avanti si considererà $N_* = 60$

$$\frac{d\sigma}{dN} = -5\epsilon_H\sigma - 12\epsilon_H^2 + 2\xi_H^2, \quad (6.3)$$

dove $\sigma \equiv 2\eta_H - 4\epsilon_H$. Da queste equazioni è necessario estrarre un'espressione per i due parametri η_H e ξ_H in funzione di ϵ_H e derivate, invertendole opportunamente:

$$\eta_H = \frac{1}{2\epsilon_H} \frac{d\epsilon_H}{dN} + \epsilon_H, \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} \xi_H^2 &= \frac{5}{2}\epsilon_H(2\eta_H - 4\epsilon_H) + 6\epsilon_H^2 + \frac{1}{2}\left(2\frac{d\eta_H}{dN} - 4\frac{d\epsilon_H}{dN}\right) \\ &= \frac{5}{2}\frac{d\epsilon_H}{dN} + \epsilon_H^2 - 2\frac{d\epsilon_H}{dN} + \frac{d\epsilon_H}{dN} + \frac{1}{2\epsilon_H}\frac{d^2\epsilon_H}{dN^2} - \frac{1}{2\epsilon_H^2}\frac{d\epsilon_H^2}{dN} \\ &= \epsilon_H^2 + \frac{3}{2}\frac{d\epsilon_H}{dN} + \frac{1}{2\epsilon_H}\frac{d^2\epsilon_H}{dN^2} - \frac{1}{2\epsilon_H^2}\frac{d\epsilon_H^2}{dN}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

A questo punto le due espressioni possono essere inserite nell'espansione al second'ordine dello scalar tilt, a sua volta inserita nella relazione 6.1, ottenendo in questo modo l'equazione differenziale non lineare di second'ordine in ϵ_H cercata:

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha}{N} &= -2\epsilon_H + \frac{1}{\epsilon_H}\frac{d\epsilon_H}{dN} - 2\epsilon_H^2 + \frac{3+c}{2}\frac{d\epsilon_H}{dN} + \frac{3-c}{4\epsilon_H}\left[\frac{d^2\epsilon_H}{dN^2} - \frac{1}{\epsilon_H}\left(\frac{d\epsilon_H}{dN}\right)^2\right] \\ &= -2\epsilon_H + \left(\frac{1}{\epsilon_H} + \frac{3+c}{2}\right)\frac{d\epsilon_H}{dN} - 2\epsilon_H^2 + \frac{3-c}{4\epsilon_H}\left[\frac{d^2\epsilon_H}{dN^2} - \frac{1}{\epsilon_H}\left(\frac{d\epsilon_H}{dN}\right)^2\right]. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Denotando, dunque, la derivata rispetto ad N con l'apostrofo ', e riarrangiando l'espressione in maniera tale da avere un'equazione differenziale in forma normale, si ha:

$$\epsilon_H'' = -\frac{4\alpha}{(3-c)N}\epsilon_H + \frac{8}{3-c}\epsilon_H^2 - \frac{4}{3-c}\epsilon_H' + \frac{8}{3-c}\epsilon_H^3 - 2\frac{3+c}{3-c}\epsilon_H\epsilon_H' + \frac{(\epsilon_H')^2}{\epsilon_H}. \quad (6.7)$$

I primi tre termini a destra dell'uguale non sono altro che l'espansione al prim'ordine nei parametri di slow roll dell'equazione 6.1, esattamente come presentata nell'articolo, mentre tutti i rimanenti sono i termini che entrano in gioco al second'ordine nell'espansione.

L'equazione differenziale di prim'ordine è facilmente risolvibile notando che si tratta di un'equazione di Bernoulli. Per ottenere la soluzione di questo tipo di equazioni differenziali non lineari è necessario, dopo averla portata nella forma:

$$\frac{\epsilon_H'}{\epsilon_H^2} = -\frac{\alpha}{N}\epsilon_H^{-1} + 2, \quad (6.8)$$

effettuare la sostituzione $z \equiv \epsilon_H^{-1}$, da cui discende per derivazione la condizione $z' = -(\epsilon_H'/\epsilon_H^2)$, per ottenere un'equazione differenziale lineare di prim'ordine, la cui formula risolutiva è ben nota⁴:

$$z' - \frac{\alpha}{N}z = -2. \quad (6.9)$$

Allora, ricavando la soluzione in $z(N)$ ed invertendola per tornare nella variabile originaria, quello che si ottiene è:

$$\epsilon_H(N) = \frac{1}{2(\alpha-1)^{-1}N + AN^\alpha}, \quad (6.10)$$

⁴Ponendo, per comodità, $a_0(N) = -\frac{\alpha}{N}$ e $g = -2$ la soluzione analitica di tale equazione differenziale è data da:

$$z(N) = e^{-X(N)}\left[A + \int (ge^{X(N)})dN\right],$$

Dove:

$$X(N) = \int a_0(N)dN.$$

che è l'equazione governante la dinamica di ϵ_H nel corso dell'inflazione al prim'ordine. Si noti che la costante d'integrazione A può essere messa in relazione con il numero di e-folds al quale i due termini a denominatore si equivalgono N_* : $A = 2N_*^{1-\alpha}/(\alpha - 1)$. In base all'istante dell'inflazione in cui avviene il passaggio da un regime di dominanza all'altro, dunque, si potranno avere valori ϵ_H molto diversi all'istante N_* in cui le scale rilevanti per l'osservazione odierna escono dall'orizzonte, e di conseguenza si potranno produrre valori del tensor-to-scalar ratio molto differenti per quanto visto in 5.34.

Qui si invocherà ancora una volta il Principio Cosmologico che più volte ha indicato la via nel corso di questo lavoro: se nulla è necessariamente speciale in ciò che l'essere umano può osservare dalla sua posizione nello spazio-tempo universale, non lo dev'essere nemmeno regime di ϵ_H presente alle scale attualmente rilevanti. Sarà ragionevole allora assumere che in una certa finestra attorno ad $N_* = 60$ sia solo una delle due leggi di potenza a denominatore di 6.10 a dominare, visto che la probabilità che esse siano in equilibrio sarà di gran lunga minore. La discussione dei vari casi seguenti quest'assunzione viene rimandata a quando lo sviluppo a second'ordine dell'equazione differenziale sarà completato.

6.2.2 Espansione HSR al second'ordine

Nell'articolo di Creminelli et al. si limita ad un'analisi della soluzione così ottenuta al prim'ordine. Volendo qui spingersi oltre nell'accuratezza delle considerazioni riguardo l'ipotesi iniziale, è necessario estendere al second'ordine le espansioni di slow roll, a partire da quella riguardante l'equazione differenziale per la dinamica del parametro ϵ_H . Come detto, la tecnica utilizzata per ottenere quest'estensione è il metodo perturbativo per le equazioni differenziali: si risolve l'equazione differenziale di prim'ordine non lineare formante il prim'ordine dell'espansione, che sarà chiaramente il termine dominante di tutta la soluzione analitica completa, e la si inserisce nell'equazione differenziale sviluppata all'ordine successivo, permettendo di riesprimere i termini di second'ordine in funzione di essa e ottenere una nuova equazione differenziale di prim'ordine non lineare; in principio sarà poi possibile risolvere anche questa seconda equazione differenziale analiticamente, ottenendo la soluzione originaria modificata da termini perturbativi, valida a meno di termini del terz'ordine o successivi.

Il primo passo per ottenere un'equazione differenziale al second'ordine nell'espansione di slow-roll ma di prim'ordine analitico è quello di riesprimere i termini dell'ordine successivo presenti in 6.7 per mezzo della soluzione ottenuta in precedenza. Le varie derivate di $\epsilon_H(N)$ che si dovranno calcolare sono dunque:

$$\epsilon_H' = \frac{2(\alpha - 1)^{-1} + \alpha AN^{\alpha-1}}{(2(\alpha - 1)^{-1}N + AN^\alpha)^2}, \quad (6.11)$$

$$\epsilon_H'' = -\frac{(\alpha(\alpha - 1)^{-1}AN^{\alpha-2})(2(\alpha - 1)^{-1}N + AN^\alpha) - 2(2(\alpha - 1)^{-1} + \alpha AN^{\alpha-1})^2}{(2(\alpha - 1)^{-1}N + AN^\alpha)^3}. \quad (6.12)$$

Riportiamo dunque il risultato dell'equazione completamente espansa a second'ordine, in cui l'equazione differenziale di partenza è stata riarrangiata e i termini appena calcolati sono stati inseriti e moltiplicati per i coefficienti richiesti:

$$\epsilon_H' = 2\epsilon_H^2 + \epsilon_H \left[-\frac{\alpha}{N} - \frac{\frac{4}{3-c} \left[\frac{3-c}{4} \alpha A^2 N^{2(\alpha-1)} + (c + \frac{3-c}{\alpha-1}) \alpha AN^{\alpha-1} + \frac{3-c}{(\alpha-1)^2} + \frac{3+c}{\alpha-1} - 2 \right]}{(2(\alpha - 1)^{-1}N + AN^\alpha)^2} \right]. \quad (6.13)$$

Questa è chiaramente ancora un'equazione di Bernoulli. Impostandone la risoluzione come al paragrafo precedente, dopo aver riscritto l'equazione in z , ci si imbatte nell'integrale

$$\begin{aligned} X(N) &= \int -\frac{\alpha}{N} - \frac{\frac{4}{3-c} \left[\frac{3-c}{4} \alpha A^2 N^{2(\alpha-1)} + (c + \frac{3-c}{\alpha-1}) \alpha AN^{\alpha-1} + \frac{3-c}{(\alpha-1)^2} + \frac{3+c}{\alpha-1} - 2 \right]}{(2(\alpha - 1)^{-1}N + AN^\alpha)^2} dN \\ &= -\alpha \ln(N) - \int \frac{\frac{4}{3-c} \left[\frac{3-c}{4} \alpha A^2 N^{2(\alpha-1)} + (c + \frac{3-c}{\alpha-1}) \alpha AN^{\alpha-1} + \frac{3-c}{(\alpha-1)^2} + \frac{3+c}{\alpha-1} - 2 \right]}{(2(\alpha - 1)^{-1}N + AN^\alpha)^2} dN, \end{aligned} \quad (6.14)$$

che dovrebbe essere inserito nella formula risolutiva delle equazioni differenziali di prim'ordine lineari. Questo termine non è integrabile analiticamente, come si può chiaramente vedere. Si può adottare, però, lo stesso

approccio della sezione precedente: a denominatore la probabilità che i due termini si equivalgano nella finestra di scale attualmente osservabili è bassa e perciò si considererà che uno sia dominante sull'altro, separando lo studio dei due regimi.

6.3 Studio dei regimi di evoluzione di ϵ_H

Adottando ora l'ipotesi menzionata sulla dominanza di un termine per volta a denominatore di 6.14 si può costruire una discussione articolata sui vari regimi di evoluzione di ϵ_H , che saranno riproducibili solo da certi potenziali inflazionari, per studiarne poi le conseguenze sulla generazione di onde gravitazionali. Si premette una precisazione sulla struttura di tale discussione: dall'assunzione derivano tre casi differenti. I primi due trattano la regione $\alpha > 1$, nella quale entrambi i termini a denominatore possono dominare, il terzo la regione $\alpha < 1$, nella quale può dominare solo il termine AN^α . In caso contrario, infatti, il parametro ϵ_H diverrebbe negativo a causa del segno meno emerso nel termine dominante, e questa è una situazione non fisica.

6.3.1 Regime $AN^\alpha \gg 2(\alpha - 1)^{-1}N$

In questo caso l'integrale da risolvere per ottenere una soluzione approssimata diventa:

$$X(N) \simeq -\alpha \ln(N) - \int \frac{3-c}{4} \alpha N^{-2} + \left(c + \frac{3-c}{\alpha-1}\right) \alpha A^{-1} N^{-\alpha-1} + \left[\frac{3-c}{(\alpha-1)^2} + \frac{3+c}{\alpha-1} - 2\right] A^{-2} N^{-2\alpha} dN \quad (6.15)$$

I singoli pezzi sono ora integrabili analiticamente, ma si può ancora individuare quale dei tre sia quello dominante nei due differenti sottocasi in funzione di α . Si noti che avendo supposto che la relazione ipotetica di partenza 6.1 sia valida in una finestra di scale attorno a quella delle osservazioni attuali ($N_* = 60$) tutti i ragionamenti sottendono un valore alto di N e le dominanze di un termine rispetto all'altro sono accentuate.

Caso $\alpha > 1$

Riscrivendo la relazione caratteristica del regime prevalente a denominatore per mezzo dell'equazione tra A ed N_\times presentata nella sezione 6.2.1 si ottiene la regione temporale all'interno dell'inflazione in cui può avvenire tale combinazione di parametri:

$$N^{\alpha-1} \gg \frac{2}{(\alpha-1)A} = N_\times^{\alpha-1}. \quad (6.16)$$

Se $\alpha > 1$ allora, gli esponenti saranno positivi e affinché tale relazione sia verificata ci si dovrà trovare nella regione $N > N_\times$. Questa è la parte di inflazione che si trova tra il suo eventuale inizio e l'istante N_\times in cui i due regimi a denominatore si equivalgono. Di conseguenza in questo caso l'istante N_\times si troverebbe ad un numero di e-folds dalla fine dell'inflazione minore rispetto ad N_* .

All'interno dell'integrale approssimato 6.15, invece, gli esponenti del secondo e terzo termine diventano entrambi minori di 2 per la presenza di α in essi, dunque per N grandi⁵ sarà il primo termine a risultare dominante. Il risultato dell'integrazione, al netto di tali considerazioni, diventa:

$$X(N) \simeq -\alpha \ln(N) - \int \frac{3-c}{4} \alpha N^{-2} dN = -\alpha \ln(N) + \frac{3-c}{4} \frac{\alpha}{N}. \quad (6.17)$$

Inserendo questo risultato nella formula risolutiva per l'equazione differenziale in z ed invertendola, con la cura di tenere applicare il regime analizzato anche al denominatore della soluzione completa, ciò che si ottiene è:

$$\epsilon_H(N) \simeq \frac{e^{-\frac{3-c}{4} \frac{\alpha}{N}}}{AN^\alpha}. \quad (6.18)$$

Questa è l'equazione della dinamica per il parametro ϵ_H al second'ordine nei parametri di slow roll, nell'ipotesi di trovarsi nel regime definito in precedenza. Si vede immediatamente come la correzione di second'ordine rispetto all'equazione discussa nel capitolo non presenti punti patologici; analizzando il limite $N \rightarrow \infty$ il l'argomento dell'esponenziale tende a zero e la soluzione tende verso l'equazione a prim'ordine. Si noti che in

⁵Si noti che in questo caso, essendo nella zona $N > N_\times$ si è autorizzati ad impostare un limite per $N \rightarrow \infty$ rigoroso.

questo caso non è possibile fissare un valore di ϵ_H dal momento che l'unica richiesta è che A sia sufficientemente grande da poter trascurare il primo termine a denominatore della della soluzione completa.

A questo punto si può dare una stima della quantità di onde gravitazionali prodotte in questo regime di evoluzione di ϵ_H , dal momento che si conosce l'espansione al second'ordine nei parametri di Hubble slow roll del tensor-to-scalar ratio 5.34. Anche qui si riesprime l'espressione ottenuta in precedenza in funzione del solo parametro ϵ_H e delle sue derivate, utilizzando 6.4:

$$r = \frac{25}{2}(\epsilon_H - c\epsilon_H'). \quad (6.19)$$

Inserendo l'equazione per la dinamica di ϵ_H in quest'equazione si ottiene:

$$\begin{aligned} r &\simeq \frac{25}{2} \frac{e^{-\frac{3-c}{4}\frac{\alpha}{N}}}{AN^\alpha} \left(1 + \frac{c\alpha}{N}\right) \\ &\simeq \frac{25}{4}(\alpha - 1) \frac{e^{-\frac{3-c}{4}\frac{\alpha}{N}}}{N_x^{1-\alpha}N^\alpha} \left(1 + \frac{c\alpha}{N}\right), \end{aligned} \quad (6.20)$$

dove nell'ultimo passaggio si è utilizzata la relazione tra A ed N_x per riesprimere il risultato in funzione di parametri dalla chiara interpretazione fisica. Questo è dunque il limite superiore per il tensor-to-scalar ratio al second'ordine nell'espansione HSR per il regime in analisi.

Di seguito vengono illustrati i grafici delle differenze assolute e relative tra la soluzione al primo e secondo ordine nei parametri HSR, per i casi estremali⁶ trattati nell'articolo di riferimento, ovvero $N_x = 1$ (6.1) e $N_x = N_x/10 = 6$ (6.2)⁷.

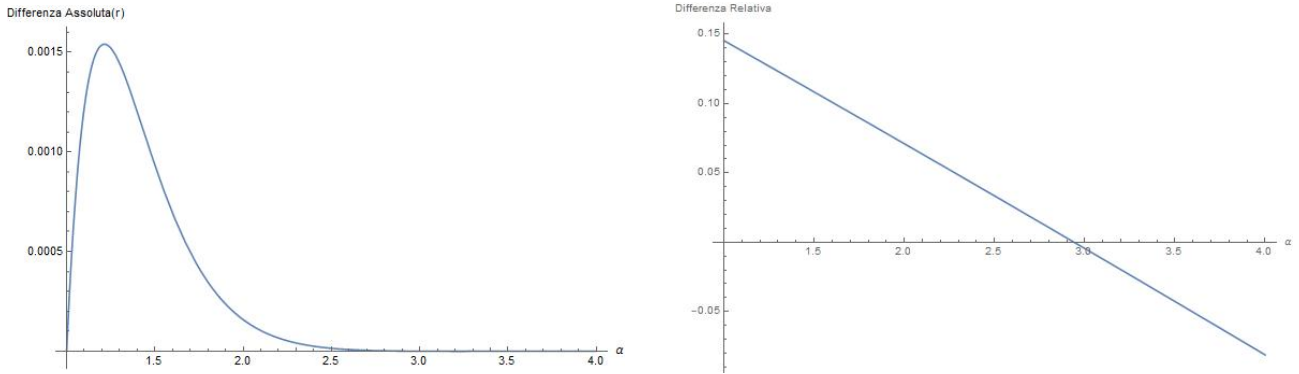


Figura 6.1: Grafici differenze ($N_x = 1$)

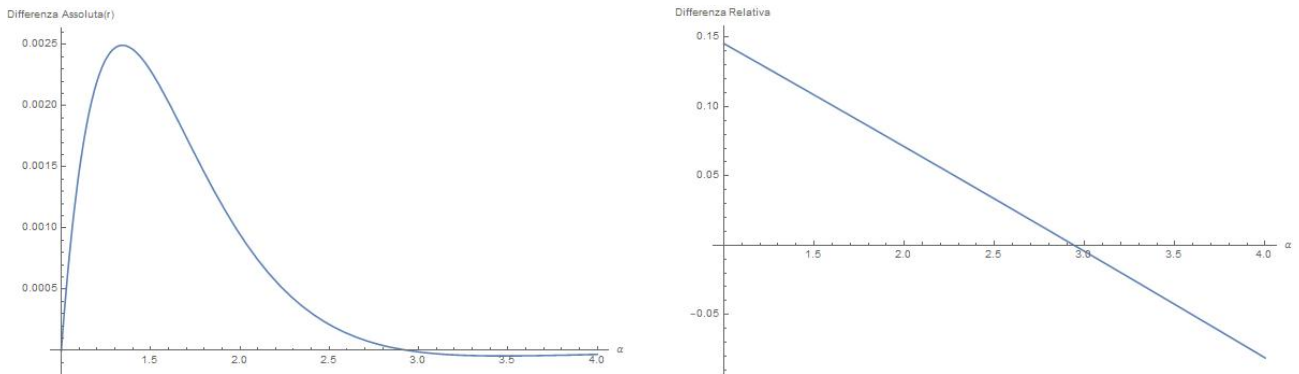


Figura 6.2: Grafici differenze ($N_x = 6$)

I grafici mostrano solo la regione di α di possibile interesse: per valori di α considerevolmente differenti dall'unità, infatti, verrebbe a cadere l'ipotesi che sta alla base di tutto l'articolo 6.1. Nell'intorno di $\alpha = 1$, inoltre,

⁶Si ricorda che si sta considerando che lo scambio di dominanza tra i due regimi è considerato avvenire distante dalla finestra di scale attualmente osservabile

⁷Si ricorda che tutti i grafici presenti sono calcolati fissando $N_* = 60$, in quanto siamo chiaramente interessati ad ottenere delle previsioni per le quantità osservabili dalla nostra posizione spazio-temporale all'interno dell'universo.

dove le correzioni relative diventano più significative, i due regimi convergono l'uno verso l'altro perdendo le caratteristiche distintive ed invalidando la discussione così strutturata. Non vanno prese troppo sul serio le previsioni sul tensor-to-scalar ratio tendenti a zero in quest'intorno: esso è comunque relativamente distante dai limiti attuali sul valore sperimentali dello scalar tilt (oltre il 2σ) e dunque non è fonte di interesse o preoccupazioni.

Caso $\alpha < 1$

Nel caso si abbia $\alpha < 1$ nella relazione 6.16 gli esponenti divengono negativi e affinché sia verificata è necessario che $N < N_\times$. Ciò significa che questo regime si può verificare nella parte finale dell'inflazione, dal momento in cui i due termini a denominatore dell'equazione della dinamica di ϵ_H si equivalgono in poi. Di conseguenza l'istante N_\times dovrà essersi verificato ad un numero di e-folds dalla fine dell'inflazione maggiore rispetto ad N_* . Nella discussione di questo caso bisogna prestare attenzione, dunque, sia alla zona $N \simeq N_\times$, nella quale i due termini a denominatore hanno dimensioni confrontabili, sia alla zona $N \rightarrow 1$, nella quale l'inflazione sta giungendo al termine. La finestra in analisi è comunque ampia avendo supposto che N_\times avvenga distante dalla nostra regione di scale osservabili, mentre nella zona $N \rightarrow 1$ non si suppone nemmeno possa verificarsi l'ipotesi di partenza. Quando, nella discussione di questo regime, si studieranno i limiti per $N \rightarrow \infty$, saranno trattati impropriamente dal punto di vista matematico ma avranno un chiaro significato fisico dal momento che è sufficiente condurre l'analisi per N sufficientemente grandi.

In ogni caso, il termine dominante all'interno dell'integrale 6.15 diventa il terzo, dal momento che in esso l' N al denominatore compare elevata alla potenza minore. Si può risolvere facilmente l'integrale così approssimato:

$$\begin{aligned} X(N) &\simeq -\alpha \ln(N) - \int \left(\frac{3-c}{(\alpha-1)^2} + \frac{3+c}{\alpha-1} - 2 \right) A^{-2} N^{-2\alpha} dN \\ &\simeq -\alpha \ln(N) + \frac{1}{2\alpha-1} \left(\frac{3-c}{(\alpha-1)^2} + \frac{3+c}{\alpha-1} - 2 \right) \frac{1}{A^2 N^{2\alpha-1}}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Procedendo in analogia al caso precedente, l'equazione della dinamica per il parametro ϵ_H al second'ordine nell'espansione HSR che si ricava è:

$$\epsilon_H(N) \simeq \frac{e^{-\frac{1}{2\alpha-1} \left(\frac{3-c+(3+c)(\alpha-1)-2(\alpha-1)^2}{(\alpha-1)^2} \right) \frac{1}{A^2 N^{2\alpha-1}}}}{AN^\alpha}. \quad (6.22)$$

Si nota immediatamente che la correzione al second'ordine presenta un punto patologico. Si ha infatti:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0.5^-} \epsilon_H(N) = +\infty \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0.5^+} \epsilon_H(N) = 0. \quad (6.23)$$

In $\alpha = 0.5$ è presente una singolarità, che emerge solo alla luce della trattazione al second'ordine nell'espansione HSR. Infatti tale problematica non viene osservata nella discussione dell'articolo [1], le cui equazioni espanse al prim'ordine non presentano alcun tipo di problema in questo regime. Si nota, d'altronde, come tale singolarità sia emersa come sola conseguenza dell'ipotesi di partenza unita alle varie approssimazioni necessarie per arrivare ad una soluzione del problema, ma mai "fisicamente pericolose", in quanto i termini trascurati non presentavano mai potenziali divergenze, che avrebbero potuto curare la singolarità ora emersa, eventualmente. Al contempo il punto $\alpha = 0.5$ non possiede alcuna proprietà fisica speciale: non c'è alcun motivo di sospettare che per tale valore di α debbano accadere strani fenomeni che invalidino le condizioni inflazionarie a prescindere da qualsiasi ipotesi contenuta fatta posteriormente. Di conseguenza, si potrebbe affermare che l'ipotesi di fondo di questa discussione 6.1, non sia applicabile in un intorno di $\alpha = 0.5$. Nelle prossime pagine si vedrà come questa considerazione possa essere compresa più a fondo alla luce di nuove informazioni.

E' necessario fare una precisazione sui limiti di validità della correzione al second'ordine al variare di α . Per i valori di $\alpha < 0.5$ l'esponente di N a denominatore dell'argomento dell'esponenziale diventa negativo, la stessa cosa accade per il primo denominatore dell'argomento, mentre il termine tra parentesi tonde è in ogni caso negativo: nel limite $N \rightarrow \infty$ l'argomento dell'esponenziale tende a $-\infty$ e l'effetto della correzione è quello di spingere verso lo zero il parametro di slow roll e con lui il valore successivo dell'ampiezza delle onde gravitazionali. In questa zona specifica di questo secondo regime, allora, le ipotesi di partenza dell'articolo devono essere applicate con cautela e la relazione 6.1 può valere solo in una regione ristretta di numero di e-folds attorno all'osservabile. Un tale comportamento non è presente nel resto del regime ($1 > \alpha > 0.5$), dal momento che

l'esponente della N rimane positivo e nel limite $N \rightarrow \infty$ si riottiene effettivamente la soluzione imperturbata. Ad ogni modo queste problematiche non sono altamente invalidanti: tali zone si trovano ben al di fuori dei limiti osservativi per il valore dello scalar tilt (addirittura sono situato al di fuori della regione di confidenza al 4σ). Come fatto al caso precedente si può ottenere un limite superiore per la produzione di onde gravitazionali all'interno di questo regime al second'ordine nell'espansione HSR:

$$r \simeq \frac{25}{4}(1-\alpha)\left(\frac{\bar{N}}{N}\right)^\alpha \frac{1}{N}\left(1+\frac{c\alpha}{N}\right)e^{-\frac{1}{2\alpha-1}\left(\frac{3-c+(3+c)(\alpha-1)-2(\alpha-1)^2}{4}\right)}\frac{1}{\bar{N}^{2(1-\alpha)}}\frac{1}{N^{2\alpha-1}}. \quad (6.24)$$

In essa si è rinominato $N_\times = \bar{N}$ per seguire la convenzione dell'articolo. Nella creazione dei grafici si assumerà sempre $\bar{N} = 10N_* = 600$.

Si mostrano di seguito i grafici delle differenze assolute e relative rispetto alla soluzione al prim'ordine nell'espansione ricavata nell'articolo di riferimento.

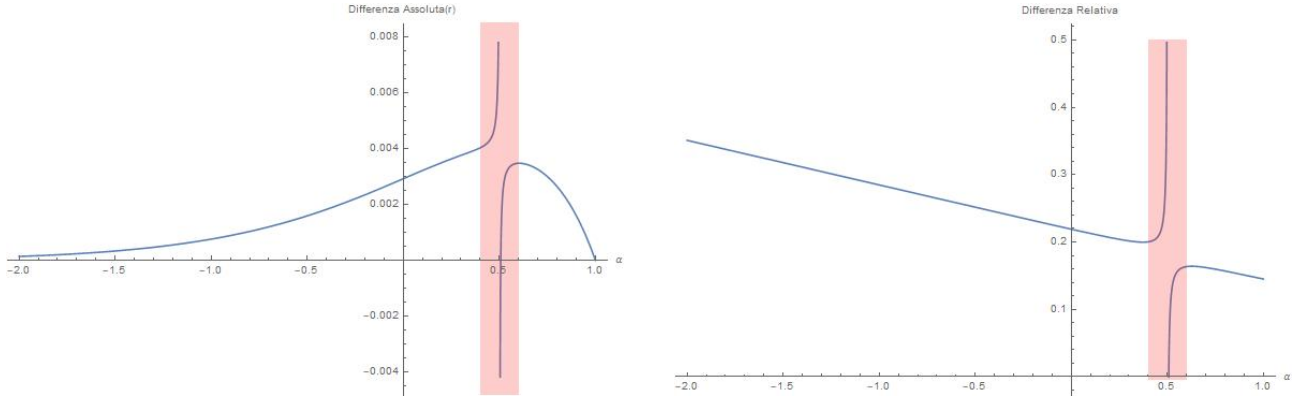


Figura 6.3: Grafici differenze ($\bar{N} = 600$)

Per questo regime le correzioni relative sulle predizioni del tensor-to-scalar ratio sono più significative: sono sempre superiori al 10% e crescono linearmente al diminuire di α . Si ricorda comunque che questa è la regione della retta n_s più distante dal valore sperimentale per lo scalar tilt tra le due analizzate.

6.3.2 Regime $AN^\alpha \ll 2(\alpha - 1)^{-1}N$

Nel momento in cui il termine dominante diventa $2(\alpha - 1)^{-1}N$, il termine $X(N)$ che compare nella formula risolutiva delle equazioni differenziali di second'ordine lineari può essere approssimato con:

$$X(N) \simeq -\alpha \ln(N) - \int \frac{3-c}{16} \alpha(\alpha-1)^2 A^2 N^{2(\alpha-2)} + \left(c + \frac{3-c}{\alpha-1}\right) \frac{\alpha(\alpha-1)^2}{4} AN^{\alpha-3} + \left[\frac{3-c}{(\alpha-1)^2} + \frac{3+c}{\alpha-1} - 2\right] \frac{(\alpha-1)^2}{4} N^{-2} dN. \quad (6.25)$$

L'unico caso possibile all'interno di questo regime, come già spiegato, è $\alpha > 1$. In questo caso allora, la relazione di dominanza riscritta per mezzo della relazione $A(N_\times)$ diventa:

$$N^{\alpha-1} \ll \frac{2}{(\alpha-1)A} = N_\times^{\alpha-1}. \quad (6.26)$$

Per $\alpha > 1$ gli esponenti saranno positivi e affinché tale relazione sia verificata ci si dovrà trovare nella regione inflazionaria $N < N_\times$, analoga a quella della sezione precedente. Valgono anche le medesime considerazioni sulla finestra di N analizzabile.

Il termine dominante all'interno di questa nuova forma dell'integrazione richiesta è chiaramente il primo, visto che l'esponente al quale è elevato N cresce linearmente con α . Cosicché diviene:

$$X(N) \simeq -\alpha \ln(N) - \int \frac{3-c}{16} \alpha(\alpha-1)^2 A^2 N^{2(\alpha-2)} dN = -\alpha \ln(N) - \frac{3-c}{16(2\alpha-3)} \alpha(\alpha-1)^2 A^2 N^{2\alpha-3}. \quad (6.27)$$

Ripetendo il procedimento delle sezioni precedenti, si ottiene l'equazione della dinamica per il parametro ϵ_H al second'ordine nei parametri HSR in tale regime di dominanza:

$$\epsilon_H(N) \simeq \frac{\alpha - 1}{2N} e^{\frac{3-c}{16(2\alpha-3)} \alpha(\alpha-1)^2 A^2 N^{2\alpha-3}}. \quad (6.28)$$

Anche in questo caso si nota immediatamente la singolarità presente nel punto $\alpha = 1.5$:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1.5^-} \epsilon_H(N) = 0 \quad \lim_{\alpha \rightarrow 1.5^+} \epsilon_H(N) = +\infty. \quad (6.29)$$

Tale punto patologico è emerso solo nel corso dell'analisi al second'ordine nei parametri HSR e non ve n'è traccia nelle equazioni dell'articolo [1]. In questo caso la singolarità è, però, emersa in un punto in cui è presente un potenziale inflazionario le cui soluzioni analitiche sono note: alla condizione $\alpha = 1.5$ corrisponde il potenziale monomiale lineare che verrà discusso nella sezione 5.4. Seppur potrebbe sembrare che la presenza di un potenziale approfonditamente studiato in letteratura nel punto apparentemente patologico possa invalidare la discussione, bisogna prestare le dovute attenzioni: il potenziale monomiale lineare ha tutte le derivate superiori alla prima nulle, dunque è improprio impostare l'espansione al second'ordine com'è stato fatto nel corso di tutto il lavoro svolto in questo capitolo. I suoi parametri di slow roll di ordine superiore a ϵ sono tutti nulli per definizione, di conseguenza quando si cerca di effettuare l'espansione all'ordine successivo per esso si ritrova la formula ottenuta al prim'ordine. L'espansione all'ordine successivo della relazione alla base dell'articolo non è applicabile allora, in $\alpha = 1.5$ e in seguito si vedranno considerazioni più approfondite del perchè ciò accada. Anche qui si rende necessaria una breve puntualizzazione sui limiti di validità della correzione al second'ordine introdotta. Per i valori di $\alpha > 1.5$ l'esponentiale della N presente nell'argomento dell'esponentiale diventa positivo, mentre la prima frazione dell'argomento è negativa: nel limite $N \rightarrow \infty$ l'intero argomento dell'esponentiale tende a $-\infty$ e la correzione al second'ordine finisce con lo spingere verso zero il valore del primo parametro di slow roll e della conseguente produzione di onde gravitazionali. Dalla letteratura ci aspetteremmo che in tale zona di questo regime ci siano potenziali che creano un valore alto e crescente di onde gravitazionali, perciò si consiglia di prestare attenzione all'applicazione delle ipotesi iniziali anche in questo caso specifico. Nella zona $1 < \alpha < 1.5$, invece, l'esponentiale di N rimane negativo e per $N \rightarrow \infty$ si riottiene la soluzione imperturbata senza alcun problema. Con le dovute attenzioni, si può ricavare il limite superiore per la produzione di onde gravitazionali all'interno di questo regime ripetendo la procedura illustrata:

$$\begin{aligned} r &\simeq \frac{25}{4} \frac{\alpha - 1}{N} \left(1 + \frac{c}{N}\right) e^{\frac{3-c}{16(2\alpha-3)} \alpha(\alpha-1)^2 A^2 N^{2\alpha-3}} \\ &\simeq \frac{25}{4} \frac{\alpha - 1}{N} \left(1 + \frac{c}{N}\right) e^{\frac{3-c}{4(2\alpha-3)} \alpha(\alpha-1) \bar{N}^{1-\alpha} N^{2\alpha-3}}, \end{aligned} \quad (6.30)$$

dove $\bar{N} = N_\times$ come in precedenza. Si noti che in questo caso non è necessario effettuare l'ultimo passaggio per riesprimere la costante d'integrazione A in termini di quantità aventi un significato fisico, se non nella correzione di second'ordine: il contributo dominante al valore di ϵ_H è determinato dai parametri α ed N , e di conseguenza ϵ_H è grande in tutta la regione $\alpha > 1$ a meno dell'intorno destro dell'unità, in cui tutta l'analisi perde valore poichè le differenze tra i due regimi tendono ad appiarsi in esso. La conseguenza del fatto che la dinamica di ϵ_H sia determinata senza ambiguità all'interno di questo regime, e che la fisica dei potenziali che lo possono generare sia ben compresa, è che l'espressione di r appena ricavata è una vera indicazione analitica sulla fenomenologia di onde gravitazionali generate, e non un semplice limite superiore come nei casi precedenti.

Anche qui vengono mostrati i grafici delle differenze assolute e relative rispetto alla soluzione al prim'ordine valutata attorno alle scale attualmente osservabili (fig. 6.4). I grafici sono ottenuti fissando $\bar{N} = 10N_* = 600$. Questo è il caso con le correzioni relative al second'ordine maggiori. Si deve considerare che il limite superiore per r in questo regime è lineare in α , e si vedrà che un tale andamento può essere riprodotto da potenziali monomiali, che non sono più di grande interesse allo stato attuale della fisica dell'inflazione. Per la precisione i più recenti limiti osservativi sul tensor-to-scalar ratio escludono questo regime al 2σ .

6.4 Sommario delle correzioni al second'ordine

Questa sezione è dedicata ad una panoramica dei risultati ottenuti nei tre diversi regimi derivanti dall'ipotesi $n_s - 1 = -\alpha/N$.

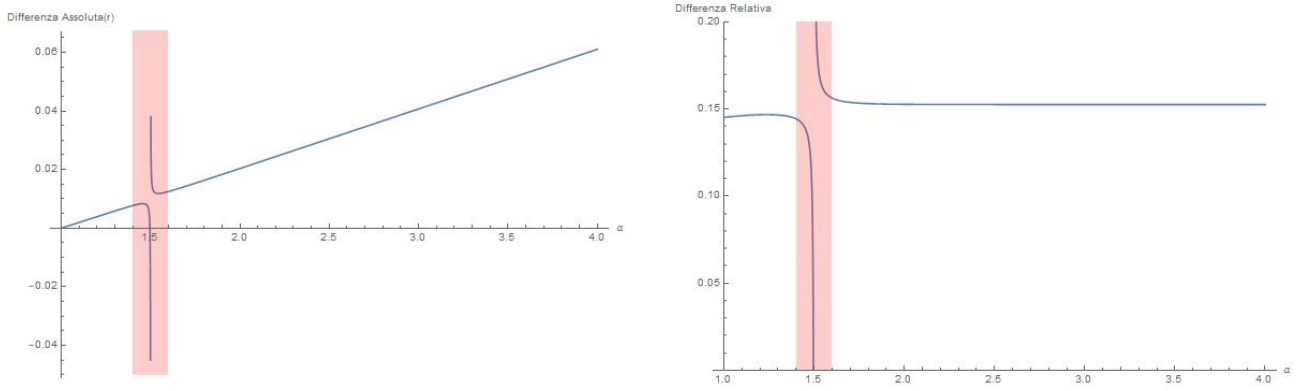


Figura 6.4: Grafici differenze ($\bar{N} = 600$)

Nelle sezioni precedenti ci si è limitati ad analizzare le differenze assolute e relative tra i limiti superiori ricavati al prim'ordine nell'articolo di riferimento ed quelli al second'ordine nell'espansione HSR presenti in questo lavoro. I casi con le maggiori correzioni relative erano il secondo ($\alpha < 1 \wedge AN^\alpha \gg 2(\alpha - 1)^{-1}N$) ed il terzo ($\alpha > 1 \wedge AN^\alpha \ll 2(\alpha - 1)^{-1}N$), nei quali esse si assestavano attorno al 10/15%. Essi erano anche gli unici due regimi contenenti dei punti di α patologici ($\alpha = 0.5$ nel secondo regime, $\alpha = 1.5$ nel terzo), e per i quali c'era una regione incompatibile con l'ipotesi di partenza nell'intorno di tali punti. Il primo regime ($\alpha > 1 \wedge AN^\alpha \gg 2(\alpha - 1)^{-1}N$), invece, non presentava alcun punto d'incompatibilità con l'ipotesi iniziale nella sua regione di validità e le correzioni relative erano più contenute. Esso è anche il regime che produce i risultati più coerenti con le evidenze osservative: è valido nella regione 2σ attorno al valore più probabile di n_s e la quantità di onde gravitazionali prodotte è sufficientemente bassa da rientrare al di sotto dei limiti superiori attuali su r . Si può vedere meglio quale sia il rapporto tra le regioni di validità dei vari regimi e la regione del piano (n_s, r) delimitata dalle osservazioni riproducendo il grafico presente a pag.2 dell'articolo [1] (figura 6.5). In questo grafico si possono vedere i limiti sul tensor-to-scalar ratio al variare di n_s previsti dai tre regimi al

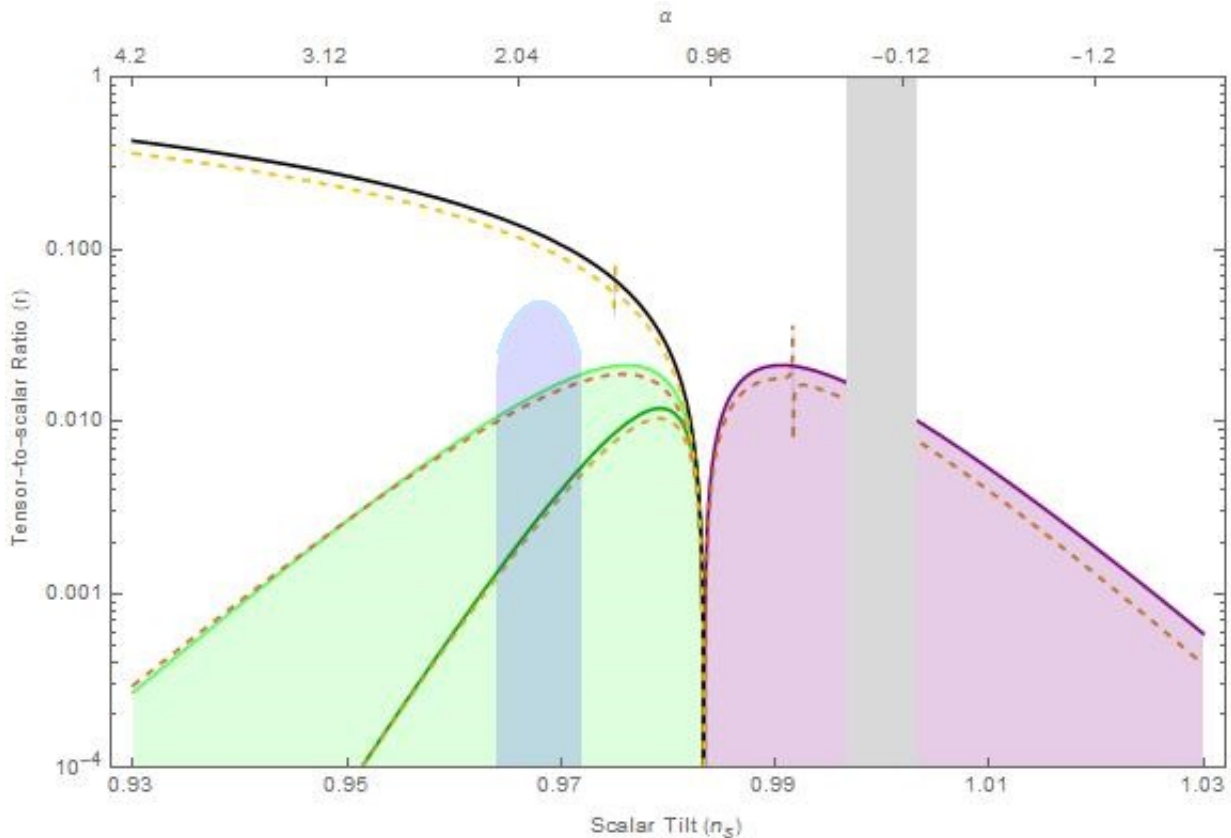


Figura 6.5: Regioni di validità dei vari regimi nel piano (n_s, r) ($N_* = 60$)

prim'ordine nell'espansione HSR (linee continue) e le loro correzioni al second'ordine (linee tratteggiate). Le linee verdi racchiudono la regione del piano (n_s, r) compatibile con il primo regime analizzato: la linea verde chiaro è il caso estrema in cui si è fissato $N_\times = 1$, la linea verde scuro quella per $N_\times = 6$. Si noti che esso è l'unico regime che si sovrappone alla regione del piano delimitata dalle osservazioni all' 1σ (azzurro). La linea nera corrisponde ai comportamenti generati dal terzo caso analizzato: come detto la fisica dei potenziali compatibili con un tale regime è ben compresa e la dinamica di ϵ_H è determinata senza ambiguità; questo fa sì che per esso si possa fare una predizione analitica della quantità di onde gravitazionali generate senza doversi limitare a fornire un limite superiore. La regione evidenziata in viola, infine, è quella compatibile con i potenziali generanti il secondo regime analizzato. E' evidenziata in grigio la regione in cui l'ipotesi $n_s - 1 = -\alpha/N$ non è più valida⁸.

Si vuole concludere il capitolo con un'osservazione sui punti patologici emersi all'interno del secondo e terzo regime. Si è visto come la discontinuità nel punto $\alpha = 1.5$ trovi una spiegazione nel fatto che in quel punto e regime sia situato il potenziale monomiale lineare per il quale non è possibile impostare l'espansione al second'ordine come fatto nel corso di tutto il capitolo e si suppone che una cosa analoga debba accadere anche nel punto speculare rispetto alla "asse" del grafico dei regimi, $\alpha = 0.5$, anche se ad esso non si sa associare un potenziale con altrettanta chiarezza. Questo ragionamento è sufficiente ad invalidare la trattazione nei due punti appena menzionati, ma si sa anche che in un intorno di essi dell'ordine di ± 0.1 in α le correzioni relative cominciano già a divenire importanti e divergere. Nel corso della trattazione degli ultimi due regimi si è preferito invalidare i risultati all'interno di tutto l'intorno, come si può anche vedere graficamente nelle figure 6.3 e 6.4, e ora si può dare una giustificazione più formale della non applicabilità dell'espansione. Nell'equazione 6.13, nella quale si presenta l'equazione differenziale ricavata riscrivendo l'ipotesi di partenza in funzione dei parametri di slow roll e portando l'espansione al second'ordine, si deve controllare che i nuovi termini di second'ordine introdotti siano effettivamente più piccoli di quelli già presenti al prim'ordine nell'equazione dell'articolo di riferimento. Ciò non è vero per qualsiasi punto dello spazio (α, N, A) . In particolare gli unici punti in cui i termini di second'ordine diventano confrontabili con quelli di prim'ordine sono gli intorni di $\alpha = 0.5$ e $\alpha = 1.5$ sotto le condizioni del secondo e terzo regime rispettivamente. Si ponga per esempio $\alpha = 1.5$ e si analizzi la frazione contenente tutti i termini di ordine superiore: le N a numeratore sono elevate ad esponenti positivi dunque il termine dominante è quello a sinistra ed ha un andamento $\propto N$ per grandi N ; se ci troviamo nel regime in cui a denominatore domina il termine di sinistra, il tutto andrà come N^2 e l'intera frazione risulterà $\propto 1/N$. Un termine del genere, però, ha le stesse dimensioni di quelli al prim'ordine e anche in un intorno di $\alpha = 1.5$ il termine risultante al second'ordine è confrontabile con quelli del primo anche per N grandi. Il medesimo comportamento delle correzioni si manifesta in un intorno di $\alpha = 0.5$ e regime di dominazione $AN^\alpha \gg 2(\alpha - 1)^{-1}N$. Si capisce allora che non è corretto a priori effettuare un'espansione a second'ordine in queste zone, senza dover introdurre nemmeno spiegazioni inerenti le forme dei potenziali corrispettivi.

⁸Per maggiori informazioni sulle curve tracciate al prim'ordine nell'espansione e il rapporto tra esse ed il *Lyth Bound*, consultare pag.2 dell'articolo [1]

Capitolo 7

Potenziali compatibili con i regimi analizzati

In quest'ultimo capitolo si farà una breve panoramica dei potenziali in grado di generare ognuno dei regimi derivanti dall'ipotesi $n_s - 1 = -\alpha/N$. L'obiettivo di tutto questo lavoro è infatti quello di fornire un ulteriore criterio per discriminare quali siano i potenziali più adatti a descrivere le evidenze osservative attuali.

Un motivo aggiuntivo di questa sezione conclusivo è quello di dare un'idea di come fosse la situazione teorica e quali le considerazioni sulla classificazione dei vari tipi di potenziali che fecero da fondamenta per le idee contenute nell'articolo di riferimento. In particolare si presenterà brevemente la classificazione di potenziali esposta in [3] che ha rivestito un ruolo di centrale importanza, assieme all'osservazione della relazione di proporzionalità $n_s - 1 \propto 1/N$ mostrata in [2], nello sviluppo dell'articolo di riferimento e che di conseguenza ha reso possibile questo lavoro.

Si precisa come la discussione condotta all'interno di questo capitolo fornisca solo delle indicazioni su possibili potenziali generanti il determinato regime, e non determini completamente ogni possibile potenziale compatibile con esso. In ogni caso è istruttivo comprendere quali caratteristiche debba avere un potenziale per essere compatibile con il regime in analisi.

7.1 Classificazione dei modelli con $n_s - 1 \propto 1/N$

Partendo da considerazioni derivate dalle evidenze osservative è possibile effettuare una classificazione dei modelli inflazionari riproducenti il comportamento studiato nel corso di questo lavoro, $n_s - 1 \simeq 1/N$. In particolare, come esposto nell'articolo "Universality classes for inflation" di D.Roest, affermare che esista uno scalamento come quello dell'ipotesi è equivalente ad imporre che esista una legge di potenza che leghi l'evoluzione dei parametri di potential slow roll di ordine minore al numero di e-folds. Facendo un confronto con le osservazioni della missione Planck l'esponente che regola la dimensione della legge di potenza può essere fissato con ottima approssimazione all'unità e di conseguenza i due parametri PSR di ordine inferiore possono essere riparametrizzati, al prim'ordine in $1/N$, come:

$$\epsilon_V \simeq \frac{\epsilon_1}{N} \quad \eta_V \simeq \frac{\eta_1}{N}. \quad (7.1)$$

Si assume che questi due parametri non si annullino mai contemporaneamente.

Dalla definizione del parametro η_V discende che, al prim'ordine, la seguente relazione è valida per qualsiasi valore del campo scalare ϕ :

$$\frac{V''}{V} \simeq \frac{\eta_1}{\int \frac{V}{V'}}. \quad (7.2)$$

Per mezzo di poche semplici integrazioni e riarrangiamenti quest'equazione può essere portata alla forma:

$$V' \simeq \lambda \left(\frac{V''}{V} \right)^{-\eta_1}. \quad (7.3)$$

A questo punto è facile individuare la definizione dei due primi parametri PSR all'interno di quest'espressione:

$$\epsilon_V^{1/2} \eta_V^{-\eta_1} \simeq \frac{\lambda}{V}, \quad (7.4)$$

con la condizione che $\eta_1 \neq 0$. Allo stesso modo si può ricavare una relazione partendo dalla definizione del parametro PSR di ordine zero:

$$\epsilon_V^{-2\epsilon_1} \simeq \frac{\lambda}{V}, \quad (7.5)$$

con la condizione $\epsilon_1 \neq 0$. Queste equazioni, inoltre, perdono di validità durante la fase finale dell'inflazione. L'assunzione basata sulle osservazioni che i due parametri non siano entrambi contemporaneamente nulli, porta alla nascita di tre classi principali in cui si possono raggruppare i potenziali in grado di fornire lo scalamento desiderato. Esse si restringono a due sole considerando che la classe corrispondente al caso $\epsilon_V \neq 0 \wedge \eta_V = 0$ non corrisponde ad un comportamento fisico.

- Classe 1: $\epsilon_1 = 0$ e $\eta_1 \neq 0$

Per via del fatto che in questa classe il potenziale scalare tende verso una costante, a causa dell'assenza della derivata prima, l'equazione 7.4 porta ad una relazione per la variazione dall'invarianza di scala e per il tensor-to-scalar ratio del tipo:

$$n_s - 1 \simeq \frac{2\eta_1}{N}, \quad (7.6)$$

$$r \simeq \frac{1}{N^{-2\eta_1}}. \quad (7.7)$$

Si noti che per via dell'aver imposto $\epsilon_1 = 0$, i potenziali appartenenti a questa classe dovranno rispettare l'ulteriore condizione $\eta_1 < \frac{1}{2}$.

Esempi di potenziali appartenenti a questa classe sono quelli di tipo "hilltop" o quelli di Witt discussi nella sezione 7.2

- Classe 2: $\epsilon_1 \neq 0$ e $\eta_1 \neq 0$

In questo caso sono invece valide entrambe le relazioni asintotiche 7.4 e 7.5 e si trova una relazione lineare tra i coefficienti di ordine inferiore:

$$\eta_1 = 2\epsilon_1 - \frac{1}{2}.$$

Questo poi porta alle seguenti relazioni caratteristiche tra osservabili:

$$n_s - 1 \simeq -\frac{2\epsilon_1 + 1}{N}, \quad (7.8)$$

$$r \simeq \frac{16\epsilon_1}{N}. \quad (7.9)$$

In questa classe il parametro ϵ_1 dev'essere dunque sempre positivo e differire da 1/4. Si noti come in questa classe anche il tensor-to-scalar ratio ha uno scalamento come $1/N$.

Esempi di potenziali appartenenti a questa classe sono i modelli di inflazioni caotica a potenziale monomiale che verranno analizzati nella sezione 7.4 o quelli del tipo "Mexican hat"¹.

Da questa classificazione è stato possibile ricavare quella più consona alla forma dei regimi discussi nel corso di questo lavoro e comprendere importanti proprietà per ogni tipo di potenziale da associarsi al caso in analisi.

7.2 Regime $AN^\alpha \gg 2(\alpha - 1)^{-1}N$: caso $\alpha > 1$

Per questo primo comportamento della dinamica inflazionaria si possono trattare tre diversi sottocasi al variare di α :

¹I modelli inflazionari di questo tipo hanno un potenziale della forma:

$$V(\phi) = M^4 \left[\left(\frac{\phi}{M_P} \right)^2 - 1 \right]^2$$

- $\alpha > 2$: questo comportamento in cui la dominanza caratterizzante il regime è accentuata è generato, per esempio da potenziali "hilltop" che generano inflazione in un intorno dell'origine:

$$V(\phi) = V_0 \left[1 - \left(\frac{\phi}{M} \right)^n \right], \quad (7.10)$$

nei quali si deve avere $n > 2$ e $M < M_P^2$. Per questo tipo di modelli è agevolmente ricavabile l'equazione della dinamica di ϵ_H in maniera analitica [15]:

$$\epsilon_H(N) = \frac{\frac{1}{2} \frac{n^2}{M^2}}{\left(\frac{Nn(n-2)}{M^2} \right)^{\frac{2n-2}{n-2}}}, \quad (7.11)$$

e conseguentemente si ha per essi $\alpha = (2n - 2)/(n - 2)$. Differenti valore di n saranno in grado di coprire l'intera regione $\alpha > 2$, mentre in un intorno destro di $\alpha = 2$ l'ipotesi fondamentale di scalamento come $1/N$ viene a mancare³. La regione di α corrispondente a questo caso è comunque la più distante dalla regione del piano delimitata sperimentalmente, coprendo tutta la parte in basso a sinistra del grafico 6.5.

- $\alpha = 2$: questo specifico comportamento è riprodotto dal potenziale di Witt corrispondente al modello di Starobinsky:

$$V(\phi) = V_0 \left(1 - e^{-\sqrt{2/3}\phi} \right)^2. \quad (7.12)$$

In questo caso si può ottenere una soluzione approssimata dell'equazione della dinamica per ϵ_H , che al prim'ordine è:

$$\epsilon_H(N) = \frac{3}{4N^2}. \quad (7.13)$$

Questo modello si trova all'interno della regione 2σ delimitata dalle osservazioni dal momento che produce uno scalar tilt pari ad $n_s = 0,96$.

Un ulteriore tipo di potenziali in grado di generare questo comportamento sono i modelli "T", della forma:

$$V(\phi) = V_0 \tanh^{2n} \left(\frac{\phi}{\sqrt{6p}} \right), \quad (7.14)$$

con p qualsiasi, che possono essere visti come una generalizzazione dei potenziali 7.12. L'equazione della dinamica per il loro parametro ϵ_H è:

$$\epsilon_H(N) = \frac{3pn}{4nN^2 + 2N\sqrt{3p(3p + 4n^2)} + 3pn}. \quad (7.15)$$

Cambiando il valore di p in questo tipo di potenziali, si cambia la quantità di onde gravitazionali prodotte, potendo generare qualsiasi valore desiderato.

Un ulteriore tipo di potenziali in grado di riprodurre questo caso sono quelli del tipo:

$$V(\phi) = V_0 \left[1 - e^{-\frac{\phi}{M}} \right], \quad (7.16)$$

con $M < M_P$

²Nel corso di questo lavoro si è sempre utilizzata la costante di gravitazione di universale G come coefficiente di proporzionalità per potenziali e relazioni generiche da essi ricavate. Si sarebbe potuto riesprimere equivalentemente tutte queste relazioni utilizzando il valore della *Massa di Planck* M_P che è legata alla costante di gravitazione universale, in unità naturali, per mezzo di:

$$M_P = \frac{1}{\sqrt{G}}.$$

³In particolare sono η_H e dunque n_s a diventare costanti per valori di ϕ vicini all'origine.

- $1 < \alpha < 2$: i potenziali in grado di riprodurre una tale situazione sono del tipo "inverse hilltop", ovvero caratterizzati da un potenziale:

$$V(\phi) = V_0 \left[1 - \left(\frac{M}{\phi} \right)^n \right], \quad (7.17)$$

con $n > 0$ e $M < M_P$. Essi producono un'equazione della dinamica per il primo parametro di slow roll del tipo:

$$\epsilon_H(N) = \frac{\frac{1}{2} \frac{n^2}{M^2}}{\left(\frac{Nn(n+2)}{M^2} \right)^{\frac{2n+2}{n+2}}}, \quad (7.18)$$

e di conseguenza si avrà $\alpha = (2n + 2)/n + 2$. Anche questo è chiaramente un risultato approssimato al prim'ordine. Questo tipo di modelli, al variare di n , spazia in tutta la regione $1 < \alpha < 2$, dunque essi si trovano proprio al centro della regione più probabile per i parametri n_s e r delimitata dalle osservazioni più recenti.

7.3 Regime $AN^\alpha \gg 2(\alpha - 1)^{-1}N$: caso $\alpha < 1$

Questo è il caso più estremo, come detto, e di minore interesse fisico. Ad ogni modo un regime di questo tipo può essere generato da potenziali del tipo:

$$V(\phi) = V_0 \left[1 + \left(\frac{\phi}{M} \right)^n \right], \quad (7.19)$$

con $0 < n < 2$ e $M \gg M_P$. In questo caso lo scalamento di α è del tipo $\alpha = -2(n - 1)/(2 - n)$, a patto che il valore del campo scalare sia $\phi \ll M$, il che rappresenta il fatto che questo regime sia sostenibile solo fino ad un certo valore di N . Anche in questo caso si deve diffidare di questa trattazione in un intorno sinistro di $\alpha = 1$ o per valori di α troppo negativi, in quanto in tali condizioni viene a mancare l'ipotesi iniziale.

Si può notare come questa classe di potenziali riesca a produrre non solo degli spettri di potenza per le perturbazioni di densità *red-tilted*, ovvero con $n_s < 1$, come in tutti i casi rimanenti, ma anche spettri *blue-tilted*, ovvero con $n_s > 1$. La principale differenza tra i due tipi di modelli è che nei primi l'inflazione arriva ad una conclusione naturalmente, quando η_H diventa grande e negativo, spingendo rapidamente ϵ_H verso l'unità, mentre per i secondi nella fase finale dello slow roll η_H è grande e positivo, cosicché ϵ_H continua a decrescere e diventare sempre più piccolo. E' perciò necessario implementare in essi ingredienti aggiuntivi per riuscire a terminare il periodo di espansione accelerata dell'universo. In ogni caso entrambi i casi appartenenti a questa regione sono esclusi sperimentalmente con un ottimo livello di confidenza.

7.4 Regime $AN^\alpha \ll 2(\alpha - 1)^{-1}N$

Questo è il regime di più semplice trattazione, per il quale le implicazioni fisiche possono essere studiate analiticamente senza grosse complicazioni. Una situazione del genere può essere infatti riprodotta da tutti i potenziali monomiali del tipo:

$$V(\phi) \propto \phi^{2\alpha-2}. \quad (7.20)$$

Per questi potenziali vale una relazione di proporzionalità tra osservabili al second'ordine nell'espansione di slow roll del tipo [16]:

$$(n_s - 1) + \frac{11}{24}(n_s - 1)^2 = -\frac{r}{4}. \quad (7.21)$$

E' utile visualizzare quali siano i valori all'interno del piano (n_s, r) generati dai potenziali più semplici di questa famiglia, per i quali riusciamo a ricavare soluzioni analitiche. La collocazione nel piano dei primi 3 potenziali monomiali viene mostrata in figura 7.1 .

Nel grafico sono rappresentate le curve per il valore atteso del tensor-to-scalar ratio al variare dello scalar tilt per i potenziali appartenenti al terzo regime (in blu al prim'ordine, in arancione al second'ordine) e i punti relativi alle prime tre forme di potenziale monomiale ad esponenti interi: ϕ è rappresentato in verde chiaro, ϕ^2 in verde scuro, ϕ^3 in nero. Si nota come il potenziale $V(\phi) \propto \phi$ si trovi nella regione all'interno della quale non si è

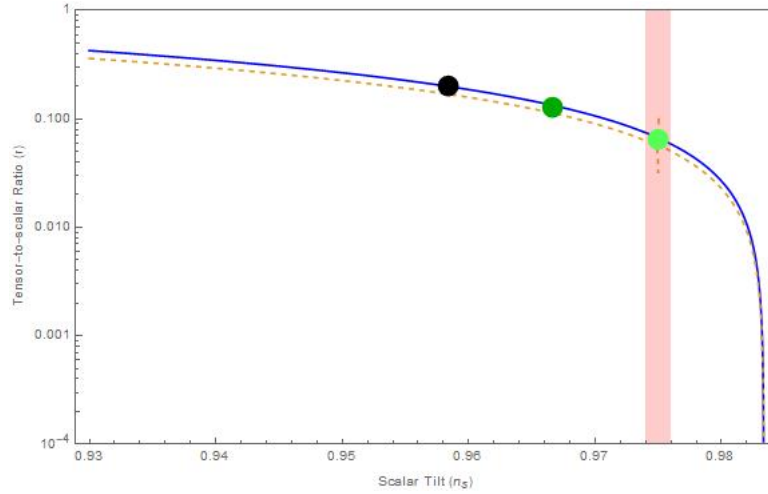


Figura 7.1: Predizioni di potenziali monomiali nel piano (n_s, r) ($N_* = 60$)

sicuri di poter estendere le considerazioni relative al terzo regime di questo lavoro. Nello specifico il potenziale monomiale lineare si trova proprio nel punto di divergenza della correzione al second'ordine. Esso è, però, un potenziale particolare, facendo da spartiacque tra i modelli inflazionari *small field*, ovvero con derivata seconda del potenziale negativa e di conseguenza $\eta_V < 0$, e i modelli *large field*, consistenti in potenziali inflazionari a derivata seconda positiva e $\eta_V > 0$. Essendo esso l'unico potenziale a derivata seconda nulla, e tutti i parametri di slow roll di ordine superiore ad ϵ_V pari a zero, si comprende il perché sia problematico applicare il ragionamento alla base della derivazione dei regimi in questo punto: tentando di estendere l'espansione dell'articolo all'ordine successivo, essendo nulli tutti i termini contenenti parametri successivi o derivate di ϵ , si riottiene l'equazione di partenza. Ad una considerazione analoga si può arrivare considerando l'espansione al second'ordine di r 5.34 nel caso di parametro $\eta_H = 0$. Per questo motivo si è indotti a sospettare che le discontinuità emerse al second'ordine nell'espansione di slow roll nel corso di questo lavoro non abbiano un significato fisico, ma siano solo una conseguenza dell'impostazione matematica adottata per ottenere le correzioni alle predizioni sul Tensor-to-Scalar Ratio.

Capitolo 8

Conclusioni

Lo sviluppo all'ordine successivo nell'espansione di slow roll delle equazioni della dinamica del parametro ϵ_H e dei conseguenti limiti sulla quantità di onde gravitazionali prodotte nei vari regimi presentati nell'articolo [1] è andato a buon fine, essendo stati in grado di riprodurre tutte le curve nel piano (r, n_s) presenti nel grafico complessivo originario (fig. 6.5). Anche le considerazioni esposte negli articoli [2] e [3] sono state approfondite grazie all'estensione al second'ordine dell'espansione. L'obiettivo primario di questo lavoro si può dire, dunque, raggiunto.

Nel corso della derivazione dei risultati al second'ordine delle equazioni del moto di ϵ_H a partire dall'ipotesi $n_s - 1 = -\frac{\alpha}{N}$, ci si è imbattuti in due punti, situati all'interno del secondo e terzo regime, in cui erano presenti delle discontinuità, e si è studiato il potenziale in grado di riprodurre il regime emergente in uno dei punti: era il potenziale monomiale lineare che predice un valore di deviazione dall'invarianza di scala dello spettro di potenza scalare pari ad $\alpha = 1.5$. Per esso non è possibile ottenere un'espansione al second'ordine nei parametri di slow roll dell'equazione della dinamica del parametro ϵ_H che aggiunga informazioni rispetto al primo, dal momento che i parametri di ordine superiore allo zero, seguendo la convenzione espressa nella prima parte, sono tutti nulli per questo caso. Per il potenziale monomiale lineare dunque, le predizioni sul tensor-to-scalar perturbation ratio espanso al prim'ordine, presenti nell'articolo, sono predizioni esatte ed è improprio applicare la trattazione presente nel capitolo 6 su di esso. La stessa cosa si è supposta accadere nell'altro punto di discontinuità $\alpha = 0.5$, seppur non sia stato possibile associarci un potenziale dalle soluzioni analitiche note. Si è visto, inoltre, come la non applicabilità della trattazione qui illustrata fosse da estendere anche ad un intorno di questi punti e come la ragione delle divergenze risiedesse nella confrontabilità tra termini di primo ordine e correzioni al secondo all'interno dell'equazione differenziale ricavata riesprimendo la relazione fondamentale $n_s - 1 = -\frac{\alpha}{N}$ in funzione dei parametri di slow roll.

Le previsioni sul tensor-to-scalar perturbation ratio per ogni regime ricavate al prim'ordine nell'espansione di slow roll ricavate nell'articolo sono dunque dovunque confermate, e corrette al second'ordine dove possibile. Si sono specificate le limitazioni nei range di applicabilità dell'ipotesi di partenza, all'interno delle regioni estremali del secondo e terzo regime.

Si possono infine trarre considerazioni di interesse in vista delle future missioni di osservazione della radiazione cosmica di fondo. La trattazione relativa al primo regime, l'unico che si sovrappone alla regione del piano (r, n_s) delimitata dalle evidenze sperimentali all' 1σ , non presenta problemi di alcun tipo all'interno di tutta la sua finestra di validità. La previsione fornita nell'articolo di riferimento per il limite superiore di r viene perciò modificata, con correzioni relative leggermente superiori al 5% all'interno della finestra all' 1σ . Se la prossima generazione di telescopi spaziali nelle microonde riuscisse ad identificare un'impronta nella radiazione cosmica di fondo delle onde gravitazionali prodotte dall'inflazione, ottenendo per il tensor-to-scalar ratio un valore numerico soggetto ad errore sperimentale e non più un semplice limite superiore, una tale correzione potrebbe risultare di prezioso aiuto nella selezione del potenziale inflazionario più adatto a riprodurre le evidenze osservative.

Bibliografia

- [1] P. Creminelli, S. Dubovsky, D. López Nacir, M. Simonović, G. Trevisan, G. Villadoro, M. Zaldarriaga, arXiv:1412.0678 [astro-ph.CO].
- [2] V. Mukhanov, arXiv:1303.3925v1 [astro-ph.CO].
- [3] D. Roest, arXiv:1309.1285v2 [hep-th].
- [4] A. Liddle, An Introduction to Modern Cosmology, Wiley, Second Edition.
- [5] F. Lucchin, Introduzione alla Cosmologia, Zanichelli, Ristampa Riveduta.
- [6] [Planck Collaboration], arXiv:1807.06209v1 [astro-ph.CO].
- [7] Andrew Liddle, Paul Parson e John D. Barrow, arXiv.org/abs/astro-ph/9408015.
- [8] A.R. Liddle, arXiv:astro-ph/9612093v2
- [9] E.J. Copeland, E.W. Kolb, A.R. Liddle and J.E. Lidsey, Phys Rev D49, 1840.
- [10] [Planck Collaboration], arXiv:1502.01589 [astro-ph.CO].
- [11] https://ned.ipac.caltech.edu/level5/Sept02/Kinney/Kinney4_3.html
- [12] A.R. Liddle, arXiv:astro-ph/9901124v1.
- [13] S. Tsujikawa, arXiv:hep-ph/0304257v1.
- [14] A.R. Liddle, arXiv:astro-ph/0307286v2.
- [15] J. Garcia-Bellido, D. Roest, arXiv:1402.2059v2 [astro-ph.CO]
- [16] P. Creminelli, D. López Nacir, M. Simonović, G. Trevisan, M. Zaldarriaga, arXiv:1404.1065v2 [astro-ph.CO]