

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"
Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita"
Corso di Laurea in Fisica

GLI INVARIANTI ADIABATICI E L'ATTRAVERSAMENTO
DELLE SEPARATRICI

Relatore:
Giancarlo Benettin

Laureando:
Matteo Morittu

Anno Accademico 2016/2017

Indice

1	Introduzione	1
2	La teoria adiabatica	3
3	L'attraversamento delle separatrici	11
3.1	La teoria adiabatica nelle vicinanze delle separatrici	12
3.2	Il cambiamento dell'invariante adiabatico all'attraversamento delle separatrici e i parametri di attraversamento	15
3.3	Il pendolo	18
4	Un approccio statistico	21
4.1	Alcune considerazioni generali	21
4.2	Gli attraversamenti consecutivi	22
4.3	Un'applicazione ad un caso simmetrico	26
5	Conclusioni	29
6	Appendici	31

1 Introduzione

Al termine del Corso di Laurea triennale in Fisica ho pensato di approfondire lo studio degli *invarianti adiabatici* e, più precisamente, della dinamica dei sistemi hamiltoniani ad un grado di libertà che dipendono lentamente dal tempo e il cui ritratto in fase si caratterizza, istante per istante, per la presenza di curve separatrici. Oggetti di studio sono, dunque, i sistemi hamiltoniani del tipo $H(p, q, \lambda(\epsilon t))$, ove la funzione $\lambda: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ gode di opportune proprietà di regolarità ed ϵ è un parametro piccolo. L'hamiltoniana di questi sistemi cambia significativamente per tempi di ordine $\frac{1}{\epsilon}$. Come si avrà modo di precisare, gli invarianti adiabatici sono funzioni che, a differenza dell'energia non più conservata, si mantengono quasi costanti su tale scala temporale.

Per i moti che restano staccati dalle separatrici per tempi $t \sim \frac{1}{\epsilon}$ la *teoria adiabatica* "elementare" (basata sul Principio della Media) funziona bene e si dimostra che l'azione è un invariante adiabatico. La descrizione dei moti che attraversano le separatrici è più delicata. Il problema è stato studiato a partire dagli anni '80 del '900. Correggendo la teoria adiabatica "elementare" è stato possibile calcolare il salto dell'invariante adiabatico ad ogni passaggio delle separatrici. Si è messa in evidenza, inoltre, la possibilità che molti attraversamenti consecutivi si accumulino dando luogo ad un processo casuale o che, invece, vi siano delle compensazioni e che l'invarianza adiabatica persista.

Lo scopo della tesi è approfondire questo studio attraverso la lettura e la comprensione di alcuni tra i lavori più importanti.

I vari argomenti sono distribuiti tra i capitoli com'è precisato di seguito.

Il **Capitolo 2** è dedicato alla presentazione delle nozioni fondamentali della teoria adiabatica. Per prendere confidenza con la definizione di invariante adiabatico, si considera un modello drasticamente semplificato di gas monoatomico. Esso permette di introdurre l'invariante adiabatico caratteristico di un sistema unidimensionale composto da una sola particella in moto in una scatola con una parete fissa e un pistone lentamente mobile (cfr. [7]). Con stretto riferimento a sistemi hamiltoniani ad un grado di libertà, si introducono poi gli invarianti adiabatici per un oscillatore armonico con frequenza lentamente variabile e per un pendolo con frequenza (o con lunghezza) lentamente variabile. Estendendo la dimostrazione valida per l'oscillatore armonico, si prova la natura di invariante adiabatico della variabile d'azione per un sistema non lineare (qual è, ad esempio, il pendolo). Essa varia al più di una quantità di ordine ϵ per tempi $t \sim \frac{1}{\epsilon}$. Tale affermazione è valida se le orbite che compongono (a ogni tempo fissato) il ritratto in fase del sistema si mantengono distanti dalle curve separatrici mobili. In caso contrario, l'invarianza adiabatica si rompe.

Nel **Capitolo 3**, adottando il formalismo di [1,2], è sviluppata la teoria adiabatica nelle vicinanze delle curve separatrici. I risultati che vengono presentati sono validi al primo ordine perturbativo. Se un'orbita attraversa una regione del piano delle fasi che le separatrici spazzano durante l'evoluzione del sistema, esiste un breve intervallo di tempo nel quale avviene la transizione tra due dei regimi di moto che le separatrici stesse individuano. L'attraversamento delle separatrici fa sì, ad esempio, che un pendolo originariamente in moto oscillatorio inizi a ruotare o viceversa. Si può mostrare che, per $\epsilon \rightarrow 0$, è possibile modificare il regime di moto del sistema a $t \sim \frac{1}{\epsilon}$ variando i dati iniziali di una quantità di ordine ϵ . Si comprende così che non è sensato trattare deterministicamente il processo di transizione delle curve separatrici. Una descrizione probabilistica del fenomeno acquisisce consistenza. La variazione del valore dell'invariante adiabatico per un singolo attraversamento delle curve separatrici dipende da un parametro, detto *parametro di transizione*. Esso coincide (in buona sostanza) con la fase iniziale del punto del piano delle fasi rappresentativo dell'orbita che subisce l'attraversamento. Questa dipendenza viene messa in evidenza esplicitamente per il sistema meccanico composto da un pendolo semplice con lunghezza lentamente variabile nel tempo.

L'obiettivo del **Capitolo 4** consiste nella comprensione della natura del processo di transizione delle separatrici. Adottando il linguaggio della statistica, assegnato un insieme di dati iniziali caratterizzati dallo stesso valore dell'invariante adiabatico e tali che la loro distribuzione rispetto alla variabile angolare coniugata all'azione sia uniforme, si determina la densità di probabilità associata al

parametro di attraversamento. Per rispondere alla domanda circa la casualità dell'attraversamento delle separatrici, si propone lo studio dettagliato della dinamica di un sistema hamiltoniano lentamente dipendente dal tempo all'occorrenza di due transizioni consecutive. Infine, come applicazione, si considera il caso di un sistema hamiltoniano simmetrico che descrive la dinamica di una particella di massa unitaria sottoposta ad un potenziale quartico.

Nelle **Appendici** sono riassunte alcune nozioni di base di Meccanica Hamiltoniana e sono esposti alcuni risultati fondamentali della Teoria Hamiltoniana delle Perturbazioni.

2 La teoria adiabatica

Consideriamo un sistema hamiltoniano ad n gradi di libertà dipendente da un parametro lentamente variabile nel tempo. L'hamiltoniana sia $H(p,q,\lambda)$ ove $(p,q) \in \mathfrak{R}^n$; $\lambda = \lambda(\epsilon t)$ è una funzione assegnata del tempo t sufficientemente regolare e ϵ è un numero piccolo ($0 < \epsilon \ll 1$). Lo studio della dinamica del sistema diviene interessante per tempi $O(\frac{1}{\epsilon})$, quando la funzione $\lambda(\epsilon t)$ è sottoposta ad un'evoluzione significativa. Nonostante la variazione consistente di λ , domandiamoci se sia possibile affermare l'esistenza di una grandezza conservata. Osserviamo che l'energia non si conserva: l'hamiltoniana $H(p,q,\lambda)$ dipende dal tempo (cfr. **Appendice A**). Seguendo Paul Ehrenfest, introduciamo la nozione di *invariante adiabatico*.

DEFINIZIONE. Una funzione $F(p,q,\lambda): \mathfrak{R}^{n+1} \rightarrow \mathfrak{R}$ si dice invariante adiabatico per il sistema hamiltoniano di hamiltoniana $H(p,q,\lambda)$, se esiste $\tau_0 > 0$ tale che per ogni moto del sistema risulti

$$F(p(t), q(t), \lambda(\epsilon t)) - F(p(0), q(0), \lambda(0)) \rightarrow 0 \quad \text{per } \epsilon \rightarrow 0 \quad (2.1)$$

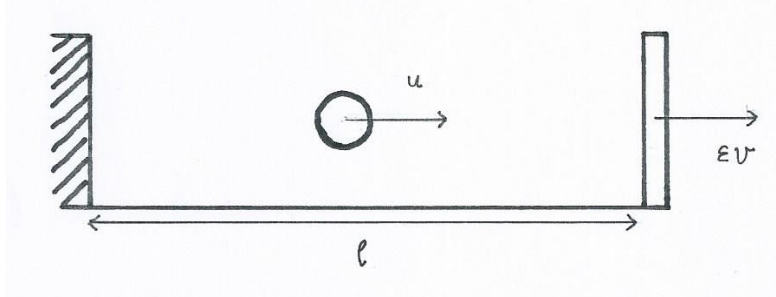
in tutto l'intervallo $0 \leq t \leq \tau_0/\epsilon$.

Indichiamo con τ la quantità ϵt , nota come *tempo breve* del sistema. La definizione precedente fa riferimento ad un intervallo di tempo breve fissato.

Studiando i processi adiabatici in Termodinamica, L. Boltzmann riuscì per la prima volta a mettere in evidenza l'esistenza di grandezze quasi conservate che, nel linguaggio usuale, soddisfano alla condizione **2.1**. Consideriamo il seguente modello drasticamente semplificato per un gas in una dimensione. Supponiamo che un (solo) punto materiale si muova in avanti e all'indietro tra una parete fissa e un pistone che modifica lentamente la propria posizione.

Figura 2.1:

Rappresentazione grafica del modello elementare unidimensionale per un gas monoatomico.



Supponiamo che il pistone si muova secondo la legge oraria $l = l(\epsilon t)$ ove $l(\epsilon t)$ è una funzione regolare tale che $l(\epsilon t) > L$. Denotiamo con $\epsilon l'(\epsilon t)$ la velocità istantanea del pistone e con $\epsilon l'_j$ la sua velocità all'istante della j -esima collisione. Indichiamo con u il modulo della velocità della particella tra due urti consecutivi (istantanei ed elastici) con il pistone e con u_j la componente della velocità all'uscita dalla j -esima collisione. Per via delle leggi dell'urto classiche che coinvolgono un punto materiale e un oggetto di massa infinita, a seguito dell'interazione $j + 1$ -esima la particella acquisisce la velocità

$$u_{j+1} = u_j - 2\epsilon l'_{j+1} \quad (2.2)$$

Chiamiamo l_j la posizione del pistone al momento della j -esima collisione. Il tempo tra un urto e il successivo si trova imponendo la condizione $u_j t = 2l_j + \epsilon \int_{t_j}^{t_{j+1}} l'(\epsilon t) dt = l_j + l_{j+1}$. La posizione del pistone alla $j + 1$ -esima interazione è

$$l_{j+1} = l_j \frac{u_j + \epsilon l'_j}{u_j - \epsilon l'_j} + O(\epsilon^2) \quad . \quad (2.3)$$

Le equazioni **2.2** e **2.3** descrivono la mappa $(l_j, u_j) \rightarrow (l_{j+1}, u_{j+1})$ tra due urti. L'equazione **2.2** fornisce la condizione $u_j = u_0 - 2\epsilon \sum_{i=0}^j l'_{j+1}$. Richiediamo che il denominatore dell'equazione **2.3** sia ben staccato da zero. Imponiamo, per questo

$$u_j > \frac{u_0}{2} \quad . \quad (2.4)$$

E' immediato convincersi, quindi, che la mappa $(l_j, u_j) \rightarrow (l_{j+1}, u_{j+1})$ conserva il prodotto $l(t)u(t)$ al primo ordine in ϵ . In simboli,

$$l_{j+1}u_{j+1} = l_j u_j + O(\epsilon^2) \quad . \quad (2.5)$$

La richiesta **2.4** limita il numero di urti al valore massimo $n_0 = \frac{u_0}{4\epsilon L'} (= O(\frac{1}{\epsilon}))$, ove L' è il limite inferiore della funzione $l'(\epsilon t)$, conseguenza del limite inferiore imposto alla legge oraria $l(\epsilon t)$. Poiché il tempo complessivamente trascorso è la somma dei tempi t_j fino all'urto n_0 (con $t_j > \frac{2l_0}{u_0}$), si ottiene un intervallo temporale superiore a $\frac{\tau_0}{\epsilon}$ ove $\tau_0 = \frac{l_0}{2L'}$. Durante questo tempo, il prodotto lu è variato di $O(\epsilon)$ ed è, pertanto, un invariante adiabatico.

Se interpretiamo l come volume e u^2 come temperatura a meno di una costante moltiplicativa, le considerazioni precedenti permettono di trovare (a dispetto della semplicità del modello) la *legge delle adiabatiche*. Per un gas monoatomico in una dimensione ($d = 1$), la relazione $T V^{\gamma-1} = \text{cost}$ (con $\gamma = d + 2/d = 3$) si riduce all'uguaglianza $u^2 l^2 = \text{cost}$ ¹.

La teoria degli invarianti adiabatici è stata sviluppata in modo esaustivo per i sistemi ad un grado di libertà che esibiscono moti periodici per $\lambda(\epsilon t)$ bloccato. L'oscillatore armonico e il pendolo con frequenze lentamente variabili sono due tipici esempi di sistemi oscillanti che possiedono queste caratteristiche.

Il sistema costituito da un oscillatore armonico con frequenza lentamente variabile nel tempo ha hamiltoniana

$$H(p, q, \epsilon t) = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2(\epsilon t)q^2) \quad , \quad (2.6)$$

ove $\omega(\epsilon t): \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ è una funzione regolare. Con riferimento alla definizione **2.1**, si prova con calcoli espliciti (cfr.[7]) che, se $\omega(\tau) \neq 0$ per $0 \leq \tau \leq \tau_0$, l'azione

$$I(p, q, \omega) = \frac{1}{2\omega}(p^2 + \omega^2 q^2) \quad (2.7)$$

è un invariante adiabatico.

La semplice dimostrazione che si può condurre per l'oscillatore armonico si generalizza al caso di un sistema hamiltoniano non lineare qualsiasi purché ci si mantenga ben lontani dalle curve separatrici. Il sistema meccanico composto da un pendolo semplice di frequenza ω , analogamente,

¹ Estendiamo le considerazioni precedenti. Se nella scatola unidimensionale sono contenute N molecole non interagenti, il ragionamento poc'anzi proposto si applica a ciascuna di esse separatamente. Ad ogni particella associamo l'invariante adiabatico lu . Se nella scatola unidimensionale sono contenute N molecole che interagiscono mediante urti elastici e istantanei, l'idea è che si conservano il prodotto $u_i l$ (e, quindi, il prodotto $u_i^2 l^2$) per la molecola i -esima e la quantità $l^2 \sum_{i=1}^N \frac{u_i^2}{2m}$ per il sistema di N molecole di massa m . Servendosi delle identificazioni già presentate, si ricava la *legge delle adiabatiche* $T V^{\gamma-1} = \text{cost}$ con $\gamma = d + 2/d = 3$ in una dimensione ($d = 1$).

di lunghezza) lentamente variabile nel tempo è un buon modello di riferimento. La sua hamiltoniana è

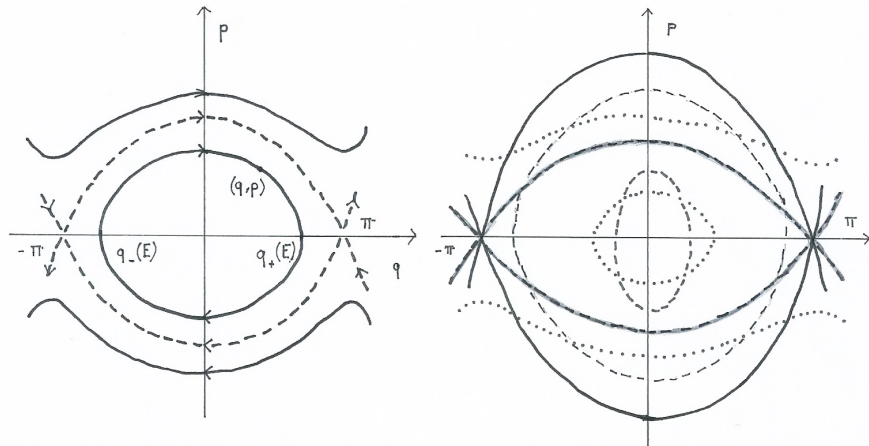
$$H(p, q, \epsilon t) = \frac{1}{2}p^2 + V(q) \quad (2.8)$$

ove $V(q) = -\omega_0^2(\epsilon t)\cos q$.

Il ritratto in fase del sistema ha la forma presentata nella **Figura 2.2**.

Figura 2.2:

Ritratto in fase del pendolo a tempo fissato. Sovrapposizione dei ritratti in fase del pendolo a due istanti di tempo successivi; si può facilmente individuare l'area del piano delle fasi che le separatrici pulsanti spazzano nell'intervallo di tempo considerato.



Al trascorrere del tempo le curve separatrici pulsano, spazzando la regione del piano delle fasi evidenziata nella rappresentazione grafica precedente. Al di fuori di questa, è ben definito un invariante adiabatico: l'azione. Quest'ultima si interpreta, per definizione, come l'area sottesa da un'orbita a frequenza fissata. Ad istanti di tempo successivi, le orbite che descrivono moti perpetuamente oscillatori (o rotatori) sono correlate dalla proprietà di conservare l'area dello spazio delle fasi. Essa assume valori o sempre minori o sempre maggiori di quelli minimo o massimo individuati dalla pulsazione delle separatrici.

L'invarianza adiabatica si interrompe per le orbite caratterizzate da un valore intermedio dell'azione, ovvero per quelle orbite che sottendono un'area il cui valore è compreso tra i due valori limite che le separatrici scandiscono. Perché l'area si conservi, è necessario che l'orbita attraversi le separatrici. Ciò può comportare una modifica del regime iniziale del moto. Il pendolo originariamente in oscillazione inizia così a ruotare (o viceversa).

Richiedendo che la frequenza tipica del sistema non lineare in analisi (sia $\omega(\tau)$) si mantenga ben staccata da zero (si resta così lontani dalle separatrici), mostriamo esplicitamente che l'azione è un invariante adiabatico. Per fissare le idee, si può immaginare di considerare il sistema pendolare **6.5** in regime oscillatorio.

Precisamente, per il sistema hamiltoniano con l'hamiltoniana **6.5**, se $\omega(\tau) \neq 0$ per $0 \leq \tau \leq \tau_0$, l'azione

$$I(p, q, \epsilon t) = \frac{1}{2\pi} \oint p dq = \frac{1}{\pi} \int_{q_-(E)}^{q_+(E)} \sqrt{2(E - V(x))} dx \quad (2.9)$$

(ove $E = H(p, q, \epsilon t)$ a tempo bloccato; $q_-(E)$ e $q_+(E)$ sono i punti di inversione definiti nella **Figura 2.2** e la deduzione dell'espressione dell'azione $I(p, q)$ è proposta nell'**Appendice A**) è un invariante adiabatico.

Poniamoci, innanzitutto, nello spazio esteso e consideriamo il sistema autonomo a due gradi di libertà

$$H_\epsilon^{ext}(p, q, A, \tau) = \frac{1}{2}p^2 + V(q, \tau) + \epsilon A \quad (2.10)$$

ove A è il momento coniugato al tempo breve τ .

Poiché

$$\dot{\tau} = \frac{\partial H_\epsilon^{ext}}{\partial A} = \epsilon \quad ,$$

i moti di H_ϵ^{ext} con $\tau(0) = 0$ coincidono con i moti di H per p e q .

Facciamo ora riferimento ai risultati dell'**Appendice A** che riguardano il sistema pendolare. Introduciamo le variabili di azione e angolo (I, ϕ) per il pendolo ed estendiamole in modo opportuno alla coppia (J, τ) . Caratterizziamo, cioè, la trasformazione di coordinate

$$(p, q, A, \tau) = w(I, \phi, J, \hat{\tau})$$

richiedendo che $\tau = \hat{\tau}$ e che le variabili di azione ed angolo siano quelle che si introducono a parametro fisso. Ovvero (con riferimento a w^{-1}),

$$I(E) = \frac{1}{\pi} \int_{q_-(E)}^{q_+(E)} \sqrt{2(E - V(x))} dx \quad ; \quad \phi(E) = \frac{2\pi}{T(E)} t = \frac{2\pi}{2 \int_{q_-(E)}^{q_+(E)} \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))}}} \int_0^q \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))}} \quad . \quad (2.11)$$

Cerchiamo, infine, l'espressione di A in funzione delle nuove variabili cosicché la trasformazione sia completata canonicamente. Indichiamo con $S(p, \phi, \hat{\tau})$ la funzione generatrice della trasformazione **2.11** per un dato τ . Estendiamo, quindi, la funzione generatrice all'ulteriore grado di libertà. Si ottiene,

$$S^{ext}(p, \phi, A, \hat{\tau}) = S(p, \phi, \hat{\tau}) + A\hat{\tau} \quad .$$

La scelta che per S^{ext} abbiamo operato assicura che $\tau = \frac{\partial S^{ext}}{\partial A} = \hat{\tau}$. Inoltre, visto che $J = A + \frac{\partial S}{\partial \hat{\tau}}$ ($= \frac{\partial S^{ext}}{\partial \hat{\tau}}$), possiamo scrivere

$$A = J + a(p, \phi, \tau) \quad .$$

La nuova hamiltoniana $H_\epsilon = H_\epsilon^{ext} \circ w$ è

$$H_\epsilon = h(I, \tau) + \epsilon J + \epsilon a(I, \phi, \tau) \quad .$$

Osserviamo che la dipendenza di ω dal tempo breve si traduce, all'introduzione delle variabili di azione e angolo, nella comparsa di un termine perturbativo $a(I, \phi, \tau)$.

Sull'hamiltoniana precedente operiamo, infine, con metodi perturbativi per mostrare che

$$|I(t) - I(0)| < \text{cost } \epsilon \quad \text{per } \epsilon \rightarrow 0 \quad .$$

Eseguiamo un passo perturbativo con il *Metodo di Lie*. Attuiamo la trasformazione di coordinate ϵ -vicina all'identità

$$(I, \phi, J, \tau) = \Phi_\epsilon^\chi(\tilde{I}, \tilde{\phi}, \tilde{J}, \tilde{\tau})$$

avendo cura di scegliere χ indipendente da J . In questo modo, nella dinamica di χ ,

$$\dot{\tau} = 0$$

e

$$\tau = \tilde{\tau} \quad .$$

L'hamiltoniana nelle nuove variabili (eliminando le $\tilde{}$) è

$$\tilde{H}_\epsilon = H_\epsilon \circ \Phi_\epsilon^\chi = h + \epsilon\{h, \chi\} + \epsilon(J + a) + O(\epsilon^2) \quad .$$

Determiniamo χ in modo che il termine di ordine ϵ perda la dipendenza dalla variabile angolare ϕ . Riconoscendo J come la media della perturbazione, ponendo $\omega(\tau) = \frac{\partial h}{\partial I}$ e ricordando che χ è indipendente da J , dobbiamo risolvere l'equazione

$$\omega(\tau) \frac{\partial \chi}{\partial \phi} = a(I, \phi, \tau) \quad ,$$

ovvero

$$\frac{\partial \chi}{\partial \phi} = \frac{1}{\omega(\tau)} a(I, \phi, \tau) \quad .$$

Integrando, si può trovare χ . Dal momento che stiamo discutendo di un sistema ad un grado di libertà non appaiono piccoli divisori. Compare, però, ω a denominatore. L'aver posto $\omega(\tau) \neq 0$ nell'intervallo $O(\frac{1}{\epsilon})$ di interesse diviene così un fatto di cruciale importanza.

La trasformazione canonica Φ_ϵ^χ ci conduce all'hamiltoniana

$$\tilde{H}_\epsilon = h(\tilde{I}, \tau) + \epsilon \tilde{J} + O(\epsilon^2) \quad .$$

Giungiamo alle stime

$$|\tilde{I}(t) - \tilde{I}(0)| < \text{cost } \epsilon \quad \text{per } \epsilon \rightarrow 0 \quad .$$

e, poiché la trasformazione Φ_ϵ^χ è ϵ -vicina all'identità, si ha

$$|I(t) - \tilde{I}(t)| < \text{cost } \epsilon$$

e

$$|I(0) - \tilde{I}(0)| < \text{cost } \epsilon \quad .$$

In definitiva, vale che

$$|I(t) - I(0)| < \text{cost } \epsilon \quad \text{per } 0 \leq t \leq \tau_0/\epsilon \quad .$$

come volevasi dimostrare.

Si prova, dunque, che i sistemi hamiltoniani descritti da hamiltoniane $H(p,q,\lambda(\epsilon t))$ lentamente variabili nel tempo e che esibiscono (a parametro fissato) moti periodici ammettono, se la loro frequenza tipica $\omega(I,\lambda)$ resta ben staccata da zero, un invariante adiabatico. Esso è l'azione

$$I(E, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \oint P(q, E, \lambda) dq \quad (2.12)$$

ovvero, a meno di un fattore costante, l'area sottesa dalle curve di livello dell'energia $H(p,q,\lambda)=E$ a tempo fissato. La funzione $P(q,E,\lambda)$ si ottiene risolvendo (rispetto al momento) l'equazione $H(P(q,E,\lambda),q, \lambda) = E$.

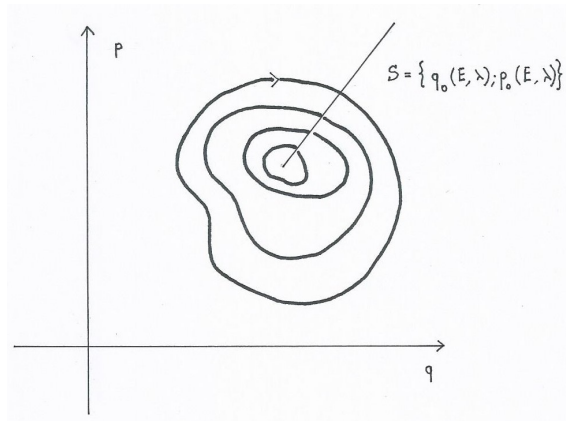
Individuato l'invariante adiabatico, la *teoria adiabatica* prevede l'introduzione delle variabili di azione ed angolo per il sistema di interesse. Si esegue così la trasformazione di coordinate dalle variabili (p,q) alle variabili (I,ϕ) mediante la funzione generatrice

$$F(q, I, \lambda) = \int_{q_0(I,\lambda)}^q P(q', E(I, \lambda), \lambda) dq' \quad (2.13)$$

ove $q_0(I,\lambda)$ è il valore della coordinata q lungo la curva $S = \{q_0(I,\lambda), p_0(I,\lambda)\}$ che interseca le orbite del ritratto in fase come in **Figura 2.3**. La sezione S rappresenta una possibile origine per la variabile angolare ϕ , che corre lungo le curve di livello dell'energia.

Figura 2.3:

Rappresentazione grafica della sezione di riferimento per la misura della variabile angolare di un sistema hamiltoniano assegnato.



A seguito della trasformazione di coordinate, l'hamiltoniana diviene

$$K(I, \phi) = h(I, \lambda) + \epsilon \frac{\partial F}{\partial \lambda}(q, I, \lambda) \quad (2.14)$$

Si conclude immediatamente che, per scale temporali $O(\frac{1}{\epsilon})$ (cioè, dopo che l'hamiltoniana del sistema ha subito un'evoluzione apprezzabile), l'azione I rimane ϵ -vicina al proprio valore iniziale e l'angolo ϕ varia di una quantità di ordine unitario con tasso di cambiamento

$$\dot{\phi} = \omega(I, \lambda) + O(\epsilon)$$

ove $\omega(I,\lambda) = \frac{\partial h}{\partial I}$.

Se nel ritratto in fase del sistema compaiono le curve separatrici (corrispondenti all'energia delle configurazioni di equilibrio instabile), la *teoria adiabatica* si applica lontano da queste.

Lungo una curva separatrice il periodo del moto diviene infinito e smette, dunque, di essere piccolo rispetto alle scale temporali tipiche per l'evoluzione consistente dell'hamiltoniana del sistema. L'invarianza adiabatica si interrompe anche nelle vicinanze delle separatrici, visto che delle orbite del ritratto in fase giacciono nella regione che le separatrici spazzano al trascorrere del tempo. Un'esemplificazione grafica di quanto appena scritto è proposta nella **Figura 2.2** che si riferisce al sistema **6.5**.

Per completezza, osserviamo che è possibile estendere i risultati combinati **2.1** e **2.12**. Infatti, se la funzione hamiltoniana $H(p, q, \lambda(\tau))$ è analitica, l'azione è un invariante adiabatico per tempi molto lunghi $O(e^{\epsilon_0/\epsilon})$ ove ϵ_0 è una costante positiva. Se la funzione hamiltoniana $H(p, q, \lambda(\tau))$ è analitica e $\lambda(\tau)$ tende ai limiti finiti λ_{\pm} per $\tau \rightarrow \pm \infty$, allora l'azione è un invariante adiabatico per tutti i tempi. Ovvero, $|I(t) - I(0)| < \text{cost } \epsilon$ per ogni $t \in \mathfrak{R}$. In questo caso, si dimostra anche (cfr. [6]) che la variazione asintotica dell'azione tra $t = -\infty$ e $t = +\infty$ è esponenzialmente piccola. In particolare, esistono i limiti $I_{\pm} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} I(t)$ e $|I_+ - I_-| = O(e^{-\epsilon_0/\epsilon})$. Infine, se $H(p, q, \lambda(\tau))$ è analitica e dipende periodicamente dal tempo breve τ , l'azione è invariante adiabatico per tutti i tempi.

Nel prossimo capitolo, svilupperemo la teoria adiabatica nelle vicinanze delle separatrici. Per farlo, è opportuno correggere al primo ordine perturbativo l'invariante adiabatico **2.12** e l'hamiltoniana **2.14**.

Indichiamo con J^1 l'azione corretta al primo ordine e con J_1 la correzione al primo ordine dell'azione I . In simboli,

$$J^1 = I + \epsilon J_1 \quad . \quad (2.15)$$

Non riportiamo il calcolo esplicito (piuttosto laborioso e poco istruttivo) di J_1 . Esso si trova in [1] e porge il seguente risultato:

$$\epsilon J_1 = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial I}{\partial E} \frac{\partial I}{\partial \lambda} - \epsilon \oint \frac{\partial P}{\partial E}(q', E, \lambda) dq' \int_q^{q'} \frac{\partial P}{\partial \lambda}(q'', E, \lambda) dq'' \quad (2.16)$$

sottointendendo $E = H(p, q, \lambda)$.

Denotiamo con il simbolo K^1 l'hamiltoniana corretta al primo ordine. Vale che,

$$K^1 = K_0^1 + \epsilon K_1^1 \quad (2.17)$$

ove $K_0^1 = h(J^1, \lambda)$ e K_1^1 si ottiene mediando il termine correttivo dell'equazione **2.14** rispetto alla variabile angolare ϕ per I e λ fissati e sostituendo (solo alla fine) I con J^1 . Ossia,

$$\epsilon K_1^1(J^1, \lambda) = -\epsilon \omega(J^1, \lambda) J_1(q_0(E, \lambda), E, \lambda) - \epsilon P(q_0(E, \lambda), E, \lambda) \frac{\partial q_0}{\partial \lambda}(E, \lambda) \quad (2.18)$$

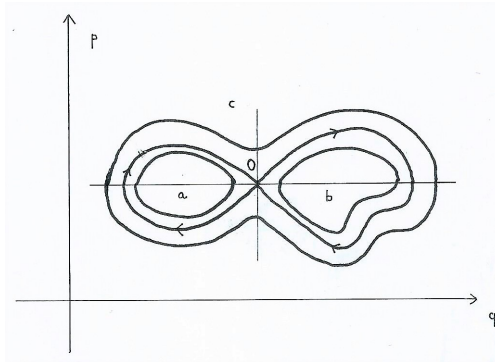
in cui $E = h(J^1, \lambda)$.

Per completezza, osserviamo che la correzione al primo ordine del tasso di variazione della variabile angolare ϕ si ricava calcolando la derivata rispetto a J^1 dell'equazione precedente.

Come già annunciato, nel prossimo capitolo svilupperemo la teoria adiabatica nelle vicinanze delle curve separatrici. In un primo momento, considereremo sistemi hamiltoniani ad un grado di libertà il cui ritratto in fase, istante per istante, è mostrato nella **Figura 2.4**.

Figura 2.4:

Rappresentazione schematica del ritratto in fase del sistema hamiltoniano 3.1.



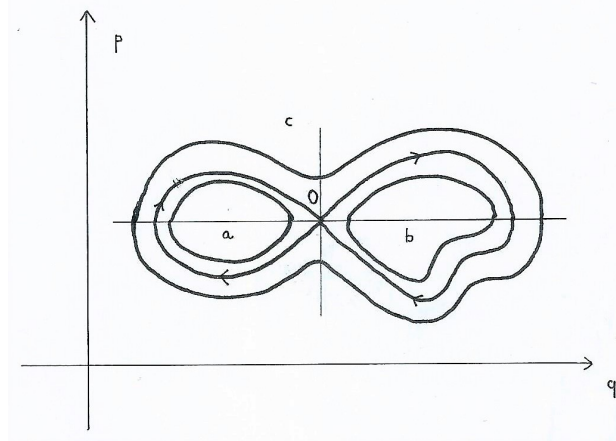
Successivamente, vedremo come i risultati ottenuti si possano applicare al pendolo e ai sistemi ad esso simili, con piccole accortezze.

3 L'attraversamento delle separatrici

Nelle pagine che seguono illustreremo sinteticamente alcune delle considerazioni esposte in [1] e [2].

Consideriamo un sistema hamiltoniano il cui ritratto in fase (come sempre a tempo fissato) ha la forma rappresentata nella **Figura 3.1**.

Figura 3.1:
Rappresentazione schematica del ritratto in fase del sistema hamiltoniano 3.1.



Le separatrici dividono lo spazio delle fasi in tre regioni che indichiamo con le lettere a , b e c . I simboli $Y_\alpha(\lambda)$ con $\alpha = a, b$ identificano l'area racchiusa dai lobi a o b e la scrittura $Y_c(\lambda)$ denota l'area dei due lobi: cioè, $Y_c(\lambda) = Y_a(\lambda) + Y_b(\lambda)$.

Per un'orbita, curva di livello dell'energia (a tempo fissato), definiamo l'azione come l'area del piano delle fasi che essa sottende (cfr. [1],[2]). La normalizzazione delle variabili d'azione, che assumeremo nelle prossime pagine, è illustrata nel sotto-paragrafo seguente con riferimento all'equazione 20 di [1].

Per fissare le idee, consideriamo un'orbita prossima alle separatrici ed inizialmente nella regione c (cfr. **Figura 3.1**). Sia J_i^1 il valore iniziale dell'invariante adiabatico (corretto al primo ordine) per l'orbita considerata. Poiché le separatrici si muovono lentamente, le aree delle porzioni dello spazio delle fasi che esse individuano variano. Quando $Y_c(\lambda_x) = J_i^1$ all'istante di tempo breve $\lambda_x = \epsilon t_x$, l'orbita attraversa la separatrice ². Avvenuto l'attraversamento, l'orbita può venir confinata nel lobo a o nel lobo b sino all'occorrenza dell'attraversamento successivo.

Chiamiamo *tempo di pseudo-attraversamento* l'istante di tempo t_x , caratteristico dell'attraversamento della separatrice.

Osserviamo, inoltre, che sono possibili tre tipi di attraversamento singolo, schematicamente illustrati nella **Figura 3.2**. Un'orbita che inizialmente si trova nel lobo a o nel lobo b e che alla fine giace nella regione c (o viceversa) è soggetta ad un *attraversamento singolo*. Il processo di *doppio attraversamento* per il quale un'orbita in principio nel lobo a (o nel lobo b) giunge, alla fine, nel lobo b (o nel lobo a) è inteso come attraversamento singolo se l'orbita entra ed esce dalla regione dello spazio delle fasi che le separatrici spazzano una volta soltanto (si veda la prima immagine della **Figura 3.2**).

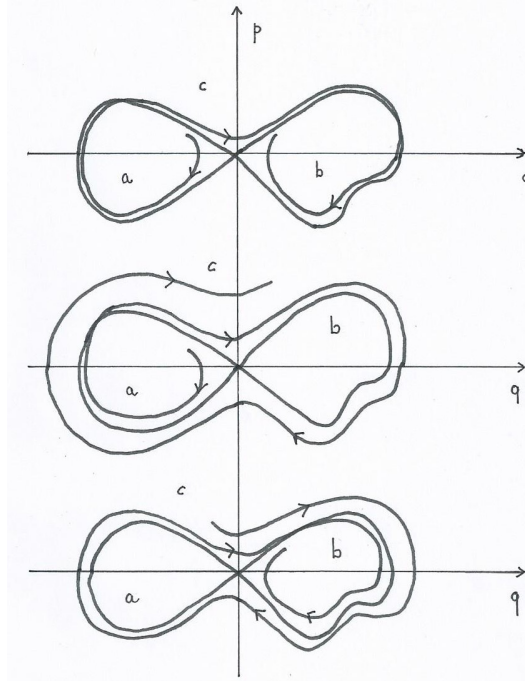
Nei sistemi simmetrici, la transizione tra i due lobi non può avvenire secondo il meccanismo illustrato nella prima immagine della **Figura 3.2**. Un'orbita che inizialmente giace in uno dei lobi e che attraversa le separatrici non può che trovarsi, al termine del processo di attraversamento singolo, nella regione c . Infatti, i lobi delle separatrici si contraggono (e, in generale, pulsano) simmetricamente. Il passaggio di un'orbita da un lobo all'altro può realizzarsi come composizione di due attraversamenti singoli del tipo di quelli rappresentati nelle immagini seconda e terza della

² Per coerenza con i simboli utilizzati in [1,2] indichiamo d'ora in poi il tempo breve con la lettera λ , anziché con la lettera τ .

Figura 3.2. Tali attraversamenti avvengono separatamente e non in rapida successione, come accade nel caso illustrato dalla prima immagine della **Figura 3.2**. Il processo di doppio attraversamento che i passaggi da un lobo alla regione c e dalla regione c ad un lobo costituiscono non si può ridurre (in presenza di simmetrie) ad un fenomeno di attraversamento singolo (cfr. [1,2]).

Figura 3.2:

Illustrazione dei tre possibili tipi di *attraversamento singolo* per il sistema hamiltoniano 3.1. La rappresentazione grafica proposta è schematica. Infatti, l'orbita si mantiene prossima ad una curva di livello dell'energia che sottende un'area di valore costante, mentre l'area racchiusa dalle curve separatrici varia.



In questa sezione ci proponiamo di sviluppare al primo ordine perturbativo la teoria adiabatica nelle vicinanze delle separatrici (valida per le orbite che possono incontrare le separatrici durante l'evoluzione del sistema) e di studiare nel dettaglio il processo di attraversamento. Come ben illustrato in [1], la realizzazione di questo progetto e l'enunciazione dei risultati si semplificano mediante una ben precisa scelta di coordinate. Richiediamo, ad esempio, che il punto di sella O sia l'origine di queste e che l'energia all'interno dei lobi sia negativa.

In particolare, facciamo riferimento a funzioni hamiltoniane della forma

$$H(p, q, \lambda) = \frac{1}{2}\omega(p^2 - q^2) + \delta H(p, q, \lambda) \tag{3.1}$$

ove ω rappresenta il tasso al quale le orbite prossime al punto di sella si separano esponenzialmente e $\delta H(p, q, \lambda)$ contiene termini $O(3)$ o $O(4)$ in p e q .

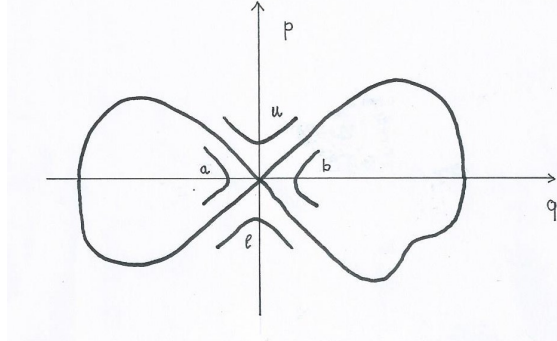
3.1 La teoria adiabatica nelle vicinanze delle separatrici

Come ben sappiamo, soltanto le orbite prossime alle separatrici possono essere protagoniste del processo di attraversamento. Quest'ultimo rompe l'invarianza adiabatica che caratterizza i moti sufficientemente distanti dalle curve di livello ad energia nulla. La costruzione della teoria adiabatica vicino alle separatrici consiste nel valutare le quantità rilevanti, determinate nel contesto della teoria adiabatica, per piccoli valori dell'energia E . Tale procedura permette, se attuata con cura, di scorgere gli effetti del processo di attraversamento delle separatrici. In esso i valori dell'energia interessanti sono di ordine ϵ .

Assegnate le coordinate in cui la funzione hamiltoniana del sistema in analisi assume la forma

3.1, definiamo il *vertice* di un'orbita, come il punto in cui questa intercetta l'asse p o l'asse q . I possibili vertici per un'orbita del sistema sono evidenziati nella **Figura 3.1.1**.

Figura 3.1.1:
Definizione dei vertici di un'orbita nelle regioni a , b e c .



Individuiamo i vertici di un'orbita attraverso un numero intero n di modo che i vertici con $n < 0$ precedano l'attraversamento della separatrice; il vertice con $n = 0$ sia quello immediatamente precedente all'attraversamento e i vertici con $n > 0$ siano quelli che il punto del piano di fase, in moto lungo un'orbita, incontra dopo il vertice $n = 0$ ad attraversamento avvenuto. Come vedremo, le quantità rilevanti che caratterizzano il processo di transizione dipendono dal valore dell'energia E_0 al vertice $n = 0$ e dall'istante di tempo t_0 al quale esso viene incontrato.

Con riferimento all'equazione 20 di [1] e alla decomposizione **2.15**, le azioni I_a e I_b per un'orbita nel lobo a o nel lobo b sono rispettivamente

$$I_a(E, \lambda) = Y_a + \frac{E}{\omega} \left(1 + \log \left| \frac{E_a}{E} \right| \right) + \mu_a(\lambda) |E|^{\frac{3}{2}} + O(|E|^{\frac{3}{2}}) \quad (3.2)$$

e

$$I_b(E, \lambda) = Y_b + \frac{E}{\omega} \left(1 + \log \left| \frac{E_b}{E} \right| \right) + \mu_b(\lambda) |E|^{\frac{3}{2}} + O(|E|^{\frac{3}{2}}) \quad ; \quad (3.3)$$

e l'azione I_c per un'orbita che cinge entrambi i lobi è

$$I_c(E, \lambda) = Y_c + \frac{2E}{\omega} \left(1 + \log \left| \frac{E_c}{E} \right| \right) + \mu_c(\lambda) |E|^{\frac{3}{2}} + O(|E|^{\frac{3}{2}}) \quad . \quad (3.4)$$

Per i nostri scopi, non è necessario conoscere l'espressione delle funzioni μ_α (per $\alpha = a, b$) e μ_c . Esse sono rilevanti per determinare i termini d'errore, che non ricaveremo esplicitamente nelle pagine seguenti.

Si trova che gli invarianti adiabatici corretti al primo ordine ai vertici v (a, b, u o l) sono

$$J_v^1(E, \lambda) = Y_v(\lambda) + \delta J_v(E, \lambda) + O(|E|^{\frac{3}{2}}) + O(\epsilon E) \quad (3.5)$$

ove E è un parametro piccolo nelle vicinanze delle separatrici.

Per i vertici $\alpha = a, b$ nei lobi, si ha che

$$\delta J_\alpha = \frac{E}{\omega} \left(1 + \log \left| \frac{E_\alpha}{E} \right| \right) + \epsilon g_\alpha \quad . \quad (3.6)$$

Per i vertici u e l , vale che

$$\delta J_u = \delta J_a + \delta J_b + \frac{1}{2\omega} \left(\dot{Y}_a \log \left| \frac{E_b}{E} \right| - \dot{Y}_b \log \left| \frac{E_a}{E} \right| \right) \quad (3.7)$$

e

$$\delta J_l = \delta J_a + \delta J_b + \frac{1}{2\omega} \left(\dot{Y}_b \log \left| \frac{E_a}{E} \right| - \dot{Y}_a \log \left| \frac{E_b}{E} \right| \right) \quad . \quad (3.8)$$

Nelle espressioni precedenti la quantità E_α rappresenta la differenza del valore dell'azione rispetto a quello della separatrice, dovuta alla porzione di orbita lontana dal punto di sella. Si trova che

$$\log |E_\alpha| = \log |2\omega q_\alpha^2| + 2\omega \int_0^{q_\alpha} \left(\frac{\partial P}{\partial E} - \frac{1}{\sqrt{2\omega E + \omega^2 q^2}} \right) dq \quad (3.9)$$

ove q_α rappresenta (a tempo fissato) il valore della coordinata q del punto del tratto di un'orbita tra due vertici (l'uno nel semipiano $p > 0$ e l'altro nel semipiano $p < 0$ o viceversa) dopo mezzo periodo.

Nell'equazione 3.6 la quantità g_α vale

$$g_\alpha = - \int_0^{q_\alpha} \frac{\partial P(q, 0, \lambda)}{\partial E} dq \int_0^q \frac{\partial P(q', 0, \lambda)}{\partial \lambda} dq' + \int_{q_\alpha}^0 \frac{\partial P(q, 0, \lambda)}{\partial E} dq \int_q^0 \frac{\partial P(q', 0, \lambda)}{\partial \lambda} dq' \quad . \quad (3.10)$$

Gli integrali vanno valutati seguendo il moto di un punto del piano di fase lungo le curve di livello dell'energia che, istante per istante, compongono il ritratto in fase del sistema.

Gli ultimi termini delle espressioni 3.6, 3.7 e 3.8 derivano dalla correzione al primo ordine dell'invariante adiabatico. Si può mostrare, infatti, che

$$\epsilon J_{1,\alpha}(E = 0, \lambda) = g_\alpha$$

per $\alpha = a, b$ e

$$\epsilon J_{1,\beta} = \text{sign}(\beta) \left(\frac{1}{2\omega} \left(\dot{Y}_b \log \left| \frac{E_a}{E} \right| - \dot{Y}_a \log \left| \frac{E_b}{E} \right| \right) \right) \quad ,$$

ove $\text{sign}(\beta) = +1$ per $\beta = u$ e $\text{sign}(\beta) = -1$ per $\beta = l$.

Al minor ordine perturbativo, le frequenze delle orbite nelle regioni a, b e c si determinano come le inverse delle derivate dell'azione rispetto all'energia. In particolare,

$$\omega_{0,\alpha} = \frac{\omega}{\log \left| \frac{E_\alpha}{E} \right|} \quad (3.11)$$

per $\alpha = a, b$ e

$$\omega_{0,c} = \frac{\omega}{\log \left| \frac{E_c}{E} \right|} \quad (3.12)$$

in cui E_c è la media geometrica di E_a e E_b .

Per esprimere la correzione al primo ordine dell'hamiltoniana è opportuno, innanzitutto, definire l'origine $q_0(I, \lambda)$ della coordinata angolare ϕ . Poniamo $P(q_0, E, \lambda) = 0$ nelle regioni a e b e fissiamo $q_0 = 0$ con $P(q_0, E, \lambda) > 0$ nella regione c . In questo modo, il limite inferiore dell'integrale 2.13 corrisponde ai vertici a o b o u . Con questa scelta per q_0 e ricordando la relazione 2.18, otteniamo

$$K_{1,\alpha}^1(J^1, \lambda) = -\omega_{0,\alpha}(J^1, \lambda) J_{1,\alpha}(h(J^1, \lambda), \lambda) \quad (3.13)$$

per $\alpha = a, b$ e

$$K_{1,c}^1(J^1, \lambda) = -\omega_{0,c}(J^1, \lambda) J_{1,u}(h(J^1, \lambda), \lambda) \quad . \quad (3.14)$$

All'avvicinamento della separatrice, nelle espressioni 3.13 e 3.14 le dipendenze logaritmiche dall'energia E delle correzioni al primo ordine delle azioni e delle frequenze dei moti si compensano. Infatti, per $E \rightarrow 0$, il termine $\log |E|$ diverge e diviene così dominante ai numeratori e ai denominatori delle espressioni correttive delle azioni e delle frequenze rispettivamente. L'hamiltoniana corretta è

finita sebbene il valore dell'invariante adiabatico si avvicini al valore dell'azione corrispondente alla separatrice.

Introdotta la notazione $K_{1,\eta,x}^1 = K_{1,\eta}^1(Y_\alpha, \lambda)$ (con $\eta = a, b, c$), si trova che

$$K_{1,\alpha,x}^1 = 0 \quad (3.15)$$

per $\alpha = a, b$ e

$$\epsilon K_{1,c,x}^1 = \frac{1}{4}(\dot{Y}_b - \dot{Y}_a) \quad . \quad (3.16)$$

Deduciamo che l'hamiltoniana corretta al primo ordine non è continua all'occorrenza dell'attraversamento delle separatrici. Tale discontinuità non è sorprendente: le stesse variabili di azione e angolo, di cui l'hamiltoniana è funzione, sono discontinue all'attraversamento delle curve di livello di energia nulla.

3.2 Il cambiamento dell'invariante adiabatico all'attraversamento delle separatrici e i parametri di attraversamento

Facciamo riferimento ad un sistema hamiltoniano il cui ritratto in fase è rappresentato nella **Figura 3.1**, istante per istante. Le separatrici (lentamente mobili) dividono lo spazio delle fasi in tre regioni (a, b e c). Come sappiamo, ad un'orbita lontana dalle curve separatrici può essere associato un invariante adiabatico. Al trascorrere del tempo, un punto del piano di fase, muovendosi lungo le curve di livello dell'hamiltoniana, si mantiene prossimo all'orbita che racchiude un'area pari al valore iniziale dell'invariante adiabatico (a meno, eventualmente, di un fattore costante).

Consideriamo ora un'orbita che giace (ad esempio) nella regione c e supponiamo che l'area Y_c racchiusa dalle separatrici stia aumentando lentamente nel tempo. E' possibile che esista un istante di tempo al quale l'orbita attraversi le separatrici. Per un'orbita che inizialmente giace nella regione η ($= a, b, c$) il tempo di pseudo-attraversamento t_x è definito dalla condizione

$$Y_\eta(\lambda_x = \epsilon t_x) = J_{\eta,i}^1 = J_i \quad . \quad (3.17)$$

Richiediamo, cioè, che l'istante di tempo t_x sia quello al quale l'area contenuta dalla curva separatrice (Y_η) eguagli il valore iniziale dell'invariante adiabatico corretto al primo ordine per l'orbita considerata (J_i).

Durante l'attraversamento, la teoria adiabatica non è in grado di dar ragione di ciò che all'orbita di interesse accade.

Sviluppata la teoria adiabatica nelle vicinanze delle separatrici (cfr. **Sezione 3.1**) e con riferimento ad [1], affermiamo che il valore finale dell'invariante adiabatico (dopo l'attraversamento delle separatrici) è prossimo all'area racchiusa dalla separatrice nella regione in cui l'orbita si trova al termine del processo. Scriviamo

$$J_{\eta,f}^1 = Y_\eta(\lambda_x) + \delta J_{\eta,f} \quad . \quad (3.18)$$

Il calcolo delle deviazioni $\delta J_{\eta,f}$, eseguito con considerevole dettaglio in [1], procede nel modo che sinteticamente descriviamo di seguito. Si determina, innanzitutto, il tempo che un punto del piano di fase impiega a percorrere il tratto dell'orbita su cui è in moto, compreso tra due vertici. Si trova, quindi, la variazione dell'energia del punto, che si ha tra due vertici consecutivi quando esso cinge il lobo a , il lobo b o entrambi i lobi. Si può così valutare il cambiamento dell'invariante adiabatico tra due vertici in ciascuna delle regioni a, b o c . La variazione complessiva dell'azione all'attraversamento delle separatrici si ottiene sommando i cambiamenti che si registrano tra due vertici successivi.

Chiamiamo *vertice critico* il vertice più vicino (temporalmente) all'attraversamento delle separatrici. Individuiamolo con l'indice intero $n = 0$. L'istante di tempo al quale l'orbita si trova al vertice critico sia t_0 ; il valore dell'energia in corrispondenza di tale vertice sia E_0 .

Per giungere al valore finale dell'invariante adiabatico $J_{\eta,f}$ è necessario cercare la relazione che sussiste tra il valore dell'invariante adiabatico all'istante di tempo t_0 e quello dell'azione per tempi di gran lunga successivi a t_0 . E' opportuno, inoltre, comprendere il legame che intercorre tra gli istanti di tempo t_0 e t_x .

Per convenienza, si introducono le quantità

$$M_\eta = -\frac{E_0}{\dot{Y}_\eta(\lambda_x)} \quad (3.19)$$

per $\eta = a, b, c$. Esse sono dette *parametri di attraversamento*.

Osserviamo che i parametri M_η che descrivono un processo di attraversamento singolo sono posti in relazione grazie all'equazione

$$M_\gamma = M_\eta \frac{\dot{Y}_\eta(\lambda_x)}{\dot{Y}_\gamma(\lambda_x)} \quad (3.20)$$

Gli intervalli di variabilità dei parametri di attraversamento sono definiti a partire dagli insiemi di definizione di E_0 . Determiniamo, ad esempio, il dominio di definizione di M_a per un'orbita che abbandona il lobo a . Nell'ipotesi che l'hamiltoniana del sistema sia della forma **3.1** e che il vertice critico giaccia sull'asse p , il più piccolo valore che E_0 può assumere è zero. Dal momento che tra il vertice che precede il vertice critico ed esso stesso l'energia è $E_0 + \dot{Y}_a$ ed è negativa, il massimo valore che E_0 può assumere è $-\dot{Y}_a$. In questo modo, per un punto del piano di fase che abbandona il lobo a , vale che $0 < |M_a| < 1$. In generale, per un'orbita in procinto di abbandonare o di accedere alla regione η , $0 < |M_\eta| < 1$. In particolare, M_η è positivo se il punto in moto nel piano delle fasi sta lasciando il lobo a o il lobo b o sta entrando nella regione c ; e M_η è negativo se tale punto sta entrando nel lobo a o nel lobo b o sta uscendo dalla regione c .

Sintetizziamo nella seguente tabella queste ultime considerazioni.

Tabella 3.2.1

Process	Range of crossing parameters
Leaving lobe- α	$0 < M_\alpha < 1$
Entering lobe- α	$-1 < M_\alpha < 0$
Entering region- c	$0 < M_c < 1, 0 < M_u < 1$
Leaving region- c	$-1 < M_c < 0, -1 < M_u < 0$

Combinando le affermazioni precedenti con l'identità

$$J_\eta^1(E_N, \lambda_N) = J_\eta^1(E_0, \lambda_0) + \sum_{n=0}^{N-1} [J_\eta^1(E_{n+1}, \lambda_{n+1}) - J_\eta^1(E_n, \lambda_n)] \quad (3.21)$$

(ove i pedici si riferiscono ai vertici che l'orbita attraversa); sfruttando i risultati ottenuti per il cambiamento dell'azione tra due vertici consecutivi e risolvendo le difficoltà che si incontrano nel limite $N \rightarrow +\infty$, si ottengono le quantità desiderate.

Riassumiamo i risultati fondamentali mediante le equazioni **3.22**, **3.23** e **3.24**. Il valore finale dell'invariante adiabatico è, includendo i termini d'errore,

$$J_{\eta,f}^1 = J_{\eta,f} = Y_\eta(\lambda_x) + \delta J_{\eta,f} [1 + O(\epsilon^{\frac{1}{5}}) + O(\epsilon \log |E_{\min}|)] \quad (3.22)$$

ove E_{\min} è il più piccolo tra i valori dell'energia $\{E_{-1}, E_0, E_{+1}\}$.

Per un'orbita che transisce da uno dei lobi alla regione c o viceversa, vale che

$$\delta J_{\eta,f} = G + \left(\frac{\dot{Y}_\eta}{\omega}\right) \left[\log \left| \Gamma(-|M_\alpha|) \Gamma(1 + R_\alpha |M_\alpha|) \frac{\Gamma(1 - R_\alpha + R_\alpha |M_\alpha|)}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \right| + \log \left| \frac{E_c}{E_\alpha} \right| + \left(\frac{1}{2} + |M_\alpha|\right) \log \left| \frac{E_\alpha}{\dot{Y}_\alpha} \right| - (1 - R_\alpha + 2R_\alpha |M_\alpha|) \log \left| \frac{E_c}{\dot{Y}_c} \right| \right] \quad (3.23)$$

per $\alpha = a, b$.

Se la transizione avviene dal lobo α al lobo β

$$\delta J_{\beta,f} = G + \left(\frac{\dot{Y}_\beta}{\omega}\right) \left[\log \left| \frac{\Gamma(1 + M_\beta) \Gamma(1 - M_\alpha)}{2\pi} \right| - \frac{1}{2} \log |M_\alpha M_\beta| + M_\alpha \log \left| \frac{E_\alpha}{\dot{Y}_\alpha} \right| - M_\beta \log \left| \frac{E_\beta}{\dot{Y}_\beta} \right| \right] . \quad (3.24)$$

La funzione $\Gamma(x)$ è l'usuale funzione Γ di Eulero. Le nuove grandezze G e R_α sono definite rispettivamente come

$$G = \frac{g_b - g_a \frac{\dot{Y}_b}{\dot{Y}_a}}{\omega} \quad (3.25)$$

e

$$R_\alpha = \frac{\dot{Y}_\alpha}{\dot{Y}_c} \quad (3.26)$$

per $\alpha = a, b$.

Nelle equazioni precedenti i parametri \dot{Y}_α , E_α e g_α sono valutati al tempo di pseudo-atteveramento t_x .

Si può dimostrare che le deviazioni [3.23](#) e [3.24](#) sono indipendenti dalla scelta che si effettua per le coordinate (cfr.[1]).

Le relazioni generali alle quali siamo appena giunti possono essere adattate con semplicità ad un caso di speciale interesse: quello in cui i lobi delle separatrici evolvono simmetricamente nel tempo. Sotto questa ipotesi, $\dot{Y}_a = \dot{Y}_b$ e, similmente, $E_a = E_b$ e $g_a = g_b$.

Come già accennato, soltanto le transizioni da un lobo alla regione c (o viceversa) sono ammesse in qualità di attraversamenti singoli. In particolare, se $\dot{Y}_a > 0$ le orbite abbandonano la regione c ed entrano in uno dei lobi; se $\dot{Y}_a < 0$ accade il contrario.

Supponiamo $\dot{Y}_a > 0$. Riadattando il ragionamento di A.V. Tmofeev (cfr. [3]) al formalismo che abbiamo finora sviluppato, otteniamo (ad esempio) che

$$J_{b,f} = Y_b(\lambda_x) - \frac{\dot{Y}_b}{\omega} \log \left| 2 \sin \left(\pi \frac{E_0}{\dot{Y}_b} \right) \right| \quad (3.27)$$

ove non compaiono E_a e E_b , ma soltanto il fondamentale parametro E_0 .

Se $\dot{Y}_a < 0$, l'espressione per $J_{c,f}$ è analoga alla precedente a meno della sostituzione del pedice b con il pedice c ovunque tranne che nell'argomento del seno.

Ritorniamo alla situazione più generale e cerchiamo di mettere in evidenza la sostanza dei risultati ottenuti. Osserviamo che il valore finale dell'invariante adiabatico $J_{\eta,f}$ dipende dai parametri di attraversamento M_η e, quindi, dall'energia E_0 . L'energia al vertice critico può essere posta in relazione con la fase iniziale del punto in moto nel piano delle fasi. La dipendenza dalla fase del valore finale dell'azione è cruciale. Essa suggerisce insistentemente la necessità di indagare le caratteristiche del processo di attraversamento delle separatrici. Le domande che ci poniamo riguardano la possibile casualità di questo processo o l'esistenza di correlazioni tra due o più

attraversamenti consecutivi. In quest'ultima circostanza, la natura casuale del fenomeno di cui stiamo discutendo diventerebbe dubbia. Nel prossimo capitolo studieremo ciò che accade quando un'orbita è sottoposta a due attraversamenti successivi delle separatrici e tenteremo così di dar risposta ai quesiti appena presentati.

3.3 Il pendolo

In questa sezione proponiamo un'applicazione dei risultati enunciati poc'anzi al caso del pendolo.

Consideriamo il sistema hamiltoniano

$$H(p, q, \epsilon t) = \frac{1}{2}p^2 - \omega_0^2(\epsilon t) \cos q \quad . \quad (3.28)$$

Vogliamo che esso rappresenti un pendolo di massa m unitaria e di lunghezza l lentamente variabile nel tempo. Fissata l'accelerazione di gravità ad 1, possiamo definire la quantità $A(\epsilon t)$ come

$$A(\epsilon t) = \omega_0^2(\epsilon t) = \frac{1}{l(\epsilon t)} \quad . \quad (3.29)$$

Se si pone, ad esempio, $l(\epsilon t) = 1 - \epsilon t$, $A(\epsilon t)$ diviene

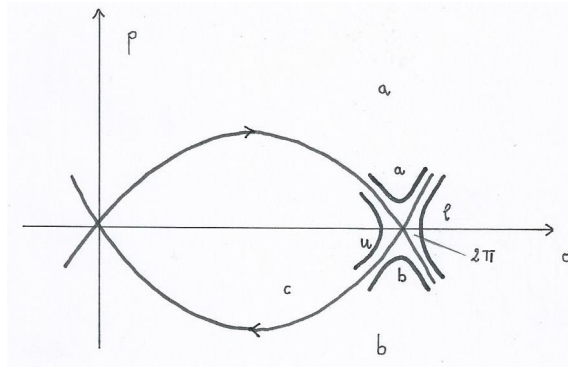
$$A(\epsilon t) = \frac{1}{1 - \epsilon t} \approx 1 + \epsilon t \quad (3.30)$$

espandendo in serie di Taylor (sino al primo ordine) nel limite $\epsilon \rightarrow 0$. In questo modo, $\dot{l} = \dot{A} = O(\epsilon)$.

A causa della periodicità della funzione hamiltoniana $H(p, q, \epsilon t)$ rispetto alla variabile q , il ritratto in fase del sistema (a tempo bloccato) non è della forma presentata nella **Figura 3.1**. Tuttavia, come affermato in [1], c'è un'equivalenza tra il ritratto in fase desiderato e quello proprio del sistema pendolare. Essa è schematizzata nella **Figura 3.3.1**.

Figura 3.3.1:

Schematizzazione dell'equivalenza tra i ritratti in fase dei sistemi hamiltoniani 3.1 e 3.28.



Si dimostra (cfr. [3,4]) che l'azione per il sistema simmetrico 3.28 nelle regione α ($= a, b$) vale

$$I_\alpha(E, t) = 8 \left(\frac{A}{k} \right)^{\frac{1}{2}} E(k) \quad (3.31)$$

ove $k = \frac{1}{1 + \frac{E}{2A}}$ e $E(k)$ è l'integrale ellittico di seconda specie

$$E(q, k) = \int_0^q (1 - k \sin^2(x))^{\frac{1}{2}} dx \quad .$$

In prossimità delle separatrici, quando $E \rightarrow 0$ e k è di ordine unitario, l'espressione di $I_\alpha(E, t)$ diviene della forma (cfr. eq. 20 di [1])

$$I_\alpha(E, t) = Y_\alpha + \frac{E}{\omega_0} \left(1 + \log \left| \frac{E_\alpha}{E} \right| \right) + O(|E|^{\frac{3}{2}}) \quad (3.32)$$

con

$$Y_\alpha = 8A^{\frac{1}{2}} \quad . \quad (3.33)$$

Nella regione c , per piccoli valori di E , l'azione è (cfr. eq. 20 di [1])

$$I_c(E, t) = Y_c + \frac{2E}{\omega_0} \left(1 + \log \left| \frac{E_c}{E} \right| \right) + O(|E|^{\frac{3}{2}}) \quad (3.34)$$

ove

$$Y_c = 16A^{\frac{1}{2}} \quad . \quad (3.35)$$

Sfruttando la simmetria del sistema, si trova che le correzioni **3.6** e **3.7** sono

$$\delta J_a = \delta J_b = \frac{E}{\omega_0} \left(1 + \log \left| \frac{32A}{E} \right| \right) \quad (3.36)$$

e

$$\delta J_u = 2\delta J_a \quad . \quad (3.37)$$

Se si inseriscono questi risultati nell'equazione **3.23** (o si fa riferimento al risultato **3.27**), il valore finale dell'invariante adiabatico risulta pari a

$$J_f = Y_a(t_x) - 4\frac{\dot{A}}{A} \log \left| 2 \sin \left(\pi E_0 \frac{A^{\frac{1}{2}}}{4\dot{A}} \right) \right| = Y_a(t_x) - 4\frac{\epsilon}{A} \log \left| 2 \sin \left(\pi E_0 \frac{A^{\frac{1}{2}}}{4\epsilon} \right) \right| \quad . \quad (3.38)$$

Come previsto dal calcolo analitico generale, osserviamo che il cambiamento dell'invariante adiabatico all'attraversamento delle separatrici dipende dall'essenziale parametro E_0 . Esso corrisponde, in buona sostanza, alla *fase* iniziale del punto in moto nel piano delle fasi.

L'espressione della discontinuità dell'azione a cui si giunge in [3] coincide con il secondo termine dell'equazione **3.38**. L'azione nella regione c è definita in [3] come la metà del valore che, invece, abbiamo assunto in precedenza.

4 Un approccio statistico

4.1 Alcune considerazioni generali

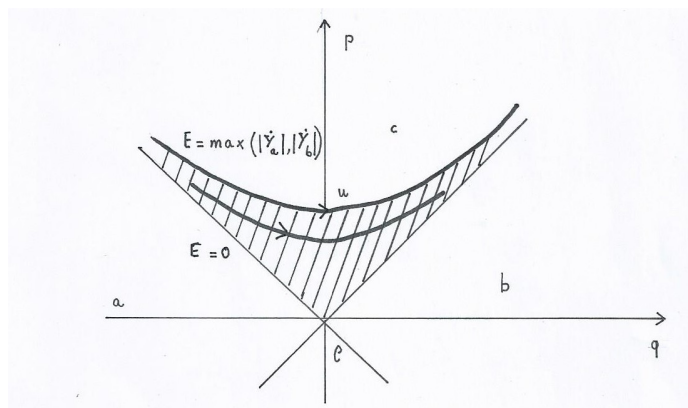
Nel **Capitolo 3** abbiamo ricavato l'espressione del valore finale (per $t = O(\frac{1}{\epsilon})$) dell'invariante adiabatico per un'orbita del sistema, protagonista di una transizione singola delle curve separatrici. Questo valore dipende dall'energia E_0 al vertice critico, che corrisponde alla fase iniziale del punto in moto nello spazio delle fasi. Questa fase governa il processo di attraversamento delle separatrici.

Adottando un punto di vista statistico, consideriamo un insieme di punti del piano delle fasi, caratterizzati dal medesimo valore iniziale dell'azione (sia J_i). Supponiamo che la distribuzione di questi punti rispetto alla fase sia uniforme. Valutiamo la densità di probabilità del parametro E_0 (sia $\rho(E_0)$).

Il *Teorema di Liouville* (circa la conservazione del volume dello spazio delle fasi che il flusso hamiltoniano garantisce) e l'uniformità della distribuzione iniziale dei punti in analisi rispetto alla variabile angolare fanno sì che la densità n_0 di questi ultimi resti uniforme in una piccola regione attorno al punto di sella O (cfr. **Figura 4.1.1**).

Figura 4.1.1:

Rappresentazione grafica della regione dello spazio delle fasi che ha abbandonato il lobo a o è in procinto di entrare nel lobo b .



Nella regione evidenziata il numero di particelle che attraversano l'asse $q = 0$ tra p e $p + dp$ è

$$dn = n_0 \dot{q} dt dp = n_0 \omega p dp dt = n_0 dE_0 dt \quad . \quad (4.1)$$

Dal momento che la probabilità $\rho(E_0)dE_0$ è proporzionale a $\frac{dn}{dt}$, la densità di probabilità $\rho(E_0)$ è uniforme. Osserviamo che questa derivazione della forma di $\rho(E_0)$ può essere raffinata per mostrare che la densità di probabilità $\rho(E_0)$ è uniforme anche nel caso in cui la distribuzione iniziale del campione di punti di interesse sia uniforme in una regione del piano delle fasi per la quale $J_i < J < J_i + \delta J_i$. Con riferimento ad [1] si trova, infatti, che $\rho(E_0) \propto 1 + O(\epsilon \log|E_{\min}|)$, ove E_{\min} è il più piccolo tra i valori dell'energia $\{E_{-1}, E_0, E_{+1}\}$. La distribuzione è uniforme tranne che per un sottoinsieme di punti ai quali è associato un valore di E_0 in un piccolo intervallo la cui ampiezza diminuisce man mano che ϵ si avvicina a 0.

Le considerazioni precedenti ci permettono di affermare che la fase iniziale del punto del piano di fase è legata al parametro E_0 attraverso una relazione lineare.

Possiamo dedurre così la probabilità di ingresso in una particolare regione del piano delle fasi nel caso di una distribuzione di punti uniforme rispetto alla fase coniugata all'invariante adiabatico. Pensiamo, ad esempio, che i punti del campione in analisi si trovino inizialmente nella regione c e supponiamo che $\dot{Y}_a > 0$ e $\dot{Y}_b > 0$. Questi punti lasciano la regione c e hanno accesso ad uno dei lobi (a o b). Se $0 < E_0 < \dot{Y}_b$ i punti vengono intrappolati nel lobo b ; per $\dot{Y}_b < E_0 < \dot{Y}_b + \dot{Y}_a$

($=\dot{Y}_c$) essi entrano nel lobo a . Poiché la densità di probabilità $\rho(E_0)$ è uniforme, la probabilità di intrappolamento nel lobo b vale $R_b = \frac{\dot{Y}_b}{\dot{Y}_c}$ e la probabilità di ingresso nel lobo a è $R_a = \frac{\dot{Y}_a}{\dot{Y}_c}$.

4.2 Gli attraversamenti consecutivi

Cerchiamo ora di comprendere la possibile presenza di casualità nel processo di attraversamento delle separatrici. Vogliamo tentare di capire se quest'ultimo possa essere caratterizzato come un fenomeno casuale o se, invece, ciò non sia possibile.

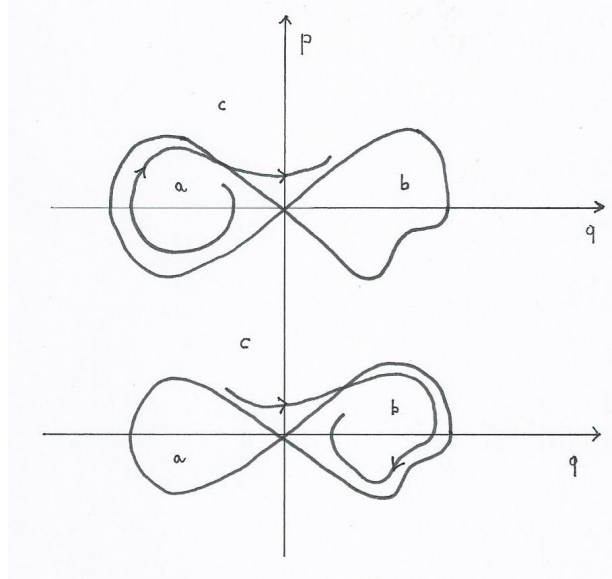
Supponiamo che un'orbita del sistema hamiltoniano in analisi subisca due transizioni successive delle curve di livello ad energia nulla.

Come più volte affermato, il processo di attraversamento delle separatrici coinvolge un parametro di transizione (o, analogamente, una fase), a cui può essere associata una ben definita densità di probabilità (cfr. **Sezione 4.1**). Assegnato tale parametro e precisato il valore iniziale dell'invariante adiabatico, è possibile calcolare il valore dell'invariante adiabatico dopo il primo attraversamento (cfr. **Sezione 3.2**). Se fosse possibile conoscere, in questa stessa condizione, il valore del parametro di transizione, si potrebbe caratterizzare completamente anche il successivo attraversamento. Studiamo, pertanto, le relazioni che sussistono tra due parametri di transizione consecutivi.

Per fissare le idee, approfondiamo il processo schematizzato nella **Figura 4.2.1**.

Figura 4.2.1:

Uscita di un'orbita dal lobo a . Ingresso di un'orbita nel lobo b . La rappresentazione è schematica: l'orbita rimane prossima ad una curva di livello dell'hamiltoniana, che sottende un'area di valore costante; mentre l'area racchiusa dalle separatrici varia nel tempo.



Un'orbita si trova inizialmente nel lobo a . Sia J_i il valore originario dell'invariante adiabatico ad essa associato. Le curve separatrici pulsano lentamente. Ad un certo istante di tempo l'orbita entra nella regione c . La transizione è caratterizzata da un certo parametro di attraversamento. Esso determina il valore dell'invariante adiabatico nella regione c (sia J_m). Ad un istante di tempo successivo avviene un ulteriore attraversamento. L'orbita lascia la regione c e ha accesso ad uno dei lobi a o b . Il secondo attraversamento è descritto da un parametro di transizione che desideriamo porre in relazione con il primo.

Durante l'intero processo, è necessario definire con precisione la direzione di riferimento per la misura della variabile angolare. Nella regione c , definiamo i parametri di transizione M_u e M'_u in termini delle energie $E_{0,u}$ e $E'_{0,u}$ associate alla prima o all'ultima intersezione dell'orbita con il semiasse positivo dei momenti. Osserviamo che il parametro $M_u = -\frac{E_{0,u}}{\dot{Y}_c}$ può differire dalla

quantità $-\frac{E_0}{Y_c}$ che viene valutata servendosi dell'energia E_0 tipica dell'intersezione dell'orbita con il semiasse positivo o con quello negativo dell'asse p , che precede l'attraversamento.

La **Tabella 4.2.1** mette in evidenza le relazioni che sussistono tra i parametri di attraversamento (originario e rilevante nella regione di arrivo) nel caso di una transizione singola delle curve separatrici.

Tabella 4.2.1

Transition	Range of crossing parameter	Crossing parameter relevant to new region
From lobe-a to region-c	$\max(0, -R_b/R_a) < M_a < 1$	$M_u = M_a R_a$
From lobe-b to region-c	$\max(0, -R_a/R_b) < M_b < 1$	$M_u = M_b R_b + R_a$
From region-c to lobe-a	$-1 < M_u < \min(0, -R_b)$	$M_a = (M_u + R_b)/R_a$
From region-c to lobe-b	$R_b/R_a < M_u < \min(0, R_a)$	$M_b = M_u/R_b$
From lobe- α to lobe- β	$0 < M_\alpha < \min(1, -R_\alpha/R_\beta)$	$M_\beta = M_\alpha R_\alpha/R_\beta$

Continuiamo, per semplicità, a far riferimento al processo descritto nella **Figura 4.2.1**, ricordando che la trattazione proposta di seguito può essere facilmente generalizzata.

Indichiamo con t_N l'istante di tempo al quale l'orbita conclude l'esecuzione di N passaggi tra due vertici successivi enumerati dal vertice u incontrato per primo dopo il primo attraversamento. Denotiamo con t'_{-N} l'istante di tempo al quale l'orbita inizia ad eseguire gli N passaggi tra due vertici consecutivi antecedenti al vertice u , l'ultimo che essa incontra prima della seconda transizione. Nell'intervallo temporale $[t_N, t'_{-N}]$ si può applicare la teoria adiabatica.

Nei lobi a e b si sceglie che la variabile angolare si annulli ai vertici. La fase spazzata dal punto del piano delle fasi rappresentativo dell'orbita considerata tra t_N e t'_{-N} deve soddisfare, al minor ordine perturbativo, alla condizione

$$\int_{t_N}^{t'_{-N}} \nu_c^1(J_m, \lambda) dt = n \quad (4.2)$$

ove n è un numero intero; ν_c^1 è la frequenza corretta al primo ordine per l'orbita in analisi (cfr. **Capitolo 2**). Dal momento che l'intervallo di integrazione è $O(\frac{1}{\epsilon})$, l'integrando va valutato al primo ordine perturbativo, affinché l'integrale sia accurato all'ordine dell'unità. Nella scrittura dell'equazione **4.2** assumiamo che valga la condizione $t_N < t'_{-N}$.

Il valore intermedio dell'invariante adiabatico nella regione c è definito con precisione dall'equazione

$$J_m = J_c^1(E_N, t_N) = J_c^1(E'_{-N}, t'_{-N}) \quad (4.3)$$

affetta da un errore $O(\epsilon^2 J_{c,2})$.

Riscriviamo la relazione **4.2** come

$$\int_{t_N}^{t'_{-N}} \nu_c^1(J_m, \lambda) dt = \Phi_c(J_m) - \int_{t_x}^{t_N} \nu_c^1(J_m, \lambda) dt - \int_{t'_{-N}}^{t'_x} \nu_c^1(J_m, \lambda) dt \quad (4.4)$$

ove

$$\Phi_c(J_m) = \int_{t_x}^{t'_x} \nu_c^1(J_m, \lambda) dt = \frac{1}{\epsilon} \int_{t_x}^{t'_x} \nu_c^1(J_m, \lambda) d\lambda = \frac{\Delta_c(J_m)}{\epsilon} \quad (4.5)$$

Gli istanti t_x e t'_x sono i tempi di pseudo-attraversamento per la prima e per la seconda transizione. Ovvero, $J_m = \dot{Y}_c(\lambda_x) = \dot{Y}_c(\lambda'_x)$.

Poiché l'integrale al primo membro dell'equazione 4.4 è valutato per J_m fissato, negli integrali che compaiono al secondo membro della stesa equazione J_m va mantenuto costante (anche se la teoria adiabatica non è valida in prossimità delle curve separatrici tra t_x e t_N e tra t'_{-N} e t'_x). Ciò consente di modificare la variabile di integrazione di modo che essa diventi l'energia $E^1 = K^1(J_m, \lambda)$. Con riferimento a [2], si trova che

$$\int_{t_x}^{t_N} \nu_c^1(J_m, \lambda) dt = \frac{K_c^1(J_m, \lambda_x) - K_c^1(J_m, \lambda_N)}{\dot{Y}_c(\lambda_x)} \quad (4.6)$$

e

$$\int_{t'_{-N}}^{t'_x} \nu_c^1(J_m, \lambda) dt = \frac{K_c^1(J_m, \lambda'_x) - K_c^1(J_m, \lambda'_{-N})}{\dot{Y}_c(\lambda'_x)} \quad (4.7)$$

Grazie alle equazioni 3.14 e 4.3 si giunge alla stima

$$K_c^1(J_m, \lambda_N) = E_N = E_0 - N\dot{Y}_c(\lambda_x) \quad (4.8)$$

valida ad $O(\epsilon)$. Procedendo allo stesso modo (cfr. [2]), si ottiene un risultato simile anche per $K_c^1(J_m, \lambda'_{-N})$.

Combinando le equazioni 4.4, 4.6, 4.7 e 4.8, siamo in grado di ricavare l'espressione per il parametro di attraversamento M'_u dopo la transizione. Essa è

$$M'_u = \text{frac} \left(M_u + \Phi_c(J_m) + \frac{K_{1,c,x}^1(\lambda_x)}{\dot{Y}_c(\lambda_x)} + \frac{K_{1,c,x}^1(\lambda'_x)}{\dot{Y}_c(\lambda'_x)} \right) - 1 \quad (4.9)$$

ove il simbolo "frac" denota la funzione che restituisce la parte frazionaria del proprio argomento. Notiamo che M'_u appartiene all'intervallo $(-1, 0)$.

Ricordando poi che valgono le condizioni 3.15 e 3.16,

$$M'_u = \text{frac} \left(M_u + \Phi_c(J_m) + \frac{1}{4} [R_b(\lambda_x) - R_a(\lambda_x) - R_b(\lambda'_x) + R_a(\lambda'_x)] \right) - 1 \quad (4.10)$$

Se si ripercorre il raginamento esposto poc'anzi, non è difficile convincersi che il nuovo paramwetro di transizione per un'orbita che entra e abbandona i lobi è

$$M'_\alpha = \text{frac}(M_\alpha + \Phi_\alpha(J_m)) \quad (4.11)$$

in cui

$$\Phi_\alpha(J) = \int_{t_x}^{t'_x} \nu_\alpha^1(J, \lambda) dt = \frac{1}{\epsilon} \int_{t_x}^{t'_x} \nu_\alpha^1(J, \lambda) d\lambda = \frac{\Delta_\alpha(J)}{\epsilon} \quad (4.12)$$

Le equazioni 4.10 e 4.11 esprimono (tenendo in considerazione i risultati della **Tabella 4.2.1**) le relazioni che sussistono tra i parametri di transizione all'occorrenza di attraversamenti consecutivi delle curve separatrici.

Se si assume che l'orbita di interesse si trovi inizialmente nei lobi a o b o nella regione c e che la sua fase sia tale che il parametro di attraversamento rilevante per la transizione successiva (la quale costringe l'orbita al di fuori di una delle tre regioni) sia M_a , M_b o M_u , le relazioni 3.23 e 3.24 forniscono il nuovo valore dell'invariante adiabatico.

Le equazioni [3.23](#), [3.24](#), [4.10](#) e [4.11](#) permettono di descrivere la dinamica di una sequenza arbitraria di attraversamenti delle curve di livello ad energia nulla per un sistema hamiltoniano della forma [3.1](#).

Forti dei risultati appena enunciati, cerchiamo di capire se l'attraversamento delle separatrici sia o non sia un fenomeno casuale. All'occorrenza di una sequenza di transizioni, domandiamoci se queste possano avvenire indipendentemente le une dalle altre senza, cioè, che il sistema abbia memoria degli attraversamenti che si sono già verificati.

Per fissare le idee, consideriamo la duplice transizione dalla regione c al lobo a e dal lobo a alla regione c . Indichiamo con $J_{c,i}$ il valore iniziale dell'invariante adiabatico. La condizione $J_{c,i} = Y_c(\lambda_x)$ permette di determinare l'istante di pseudo-attraversamento t_x per la prima transizione. Dopo il primo attraversamento il valore intermedio dell'invariante adiabatico (al minor ordine perturbativo) è $J_{a,m} = Y_a(\lambda_x)$. Con riferimento alla **Tabella 4.2.1**, il parametro di attraversamento rilevante nel lobo a è $M_a = \frac{M_u + R_b}{R_a}$ ove M_u è il parametro di transizione originariamente associato all'orbita. Le equazioni [3.23](#) e [4.11](#) implicano che il parametro di attraversamento per il secondo passaggio (dal lobo a alla regione c) è

$$M'_a = \text{frac}(M_a + \Phi_a(J_{a,m} + \delta J_{a,f})) \quad (4.13)$$

all'ordine dell'unità.

Espandendo in serie di Taylor al primo ordine l'argomento dell'espressione precedente, troviamo

$$M'_a = \text{frac}(M_a + \Phi_a(J_{a,m}) + \delta J_{a,f}(M_u) \frac{d\Phi_a}{dJ}(J_{a,m})) \quad (4.14)$$

all'ordine dell'unità.

Per via della dipendenza dal parametro M_u , il termine $\delta J_{a,f}(M_u) \frac{d\Phi_a}{dJ}(J_{a,m})$ dell'equazione [4.14](#) mostra esplicitamente l'esistenza di effetti di correlazione (o di mancato mescolamento della fase) che sussistono tra due attraversamenti consecutivi.

Nel considerare la relazione tra i parametri di transizione nel processo di duplice attraversamento delle curve separatrici, è possibile mettere in evidenza due casi limite. Il primo prevede che il termine di correlazione sia molto ampio e che vi sia un forte legame tra due parametri di attraversamento successivi; e il secondo (detto anche *limite adiabatico primitivo* in [2]) è tale che i parametri di transizione associati a due attraversamenti consecutivi vengono considerati indipendenti l'uno dall'altro. In quest'ultimo caso si ignora la mancanza di validità della teoria adiabatica nelle vicinanze delle separatrici e si pone $\delta J_{a,f} = 0$. Facendo tendere ϵ a zero nessuno dei due limiti viene, però, raggiunto. Nell'equazione [4.14](#), i termini $\Phi_a(J_{a,m})$ e $\frac{d\Phi_a}{dJ}(J_{a,m})$ sono di ordine $\frac{1}{\epsilon}$ e la quantità $\delta J_{a,f}$ è di ordine $\epsilon \log|\epsilon|$ nel caso generale ed è di ordine ϵ nel caso simmetrico (cfr. [2]). Il termine $\delta J_{a,f}(M_u) \frac{d\Phi_a}{dJ}(J_{a,m})$ scala (al più) come $\log|\epsilon|$ nel caso generale e non dipende da ϵ nel caso simmetrico. Esso, perciò, non tende a zero e non diverge fortemente nel limite $\epsilon \rightarrow 0$.

Le correlazioni tra gli attraversamenti consecutivi in una sequenza di transizioni non possono essere trascurate. In altre parole, non è possibile ignorare l'influenza che la storia del sistema esercita sul suo stato presente all'accadimento di un attraversamento delle curve separatrici. La mancata indipendenza di un parametro di attraversamento dai precedenti parametri di transizione impedisce di classificare il fenomeno di attraversamento delle separatrici come un processo casuale.

Per concludere questa sezione, discutiamo brevemente di uno dei limiti di validità delle considerazioni esposte finora.

Perché l'equazione [4.2](#) possa essere applicata deve esistere una regione dello spazio delle fasi in cui, per un certo tempo, la teoria adiabatica risulti valida. E' necessario, quindi, che t_N sia minore di t'_{-N} . Tale circostanza si realizza nel caso in cui i tempi di pseudo-attraversamento t_x e t'_x descrivono un intervallo temporale più ampio rispetto a quello che t_N e t_x individuano. Sappiamo che $t'_x - t_x = O(\frac{1}{\epsilon})$. Stimiamo $t_N - t_x$ che scriviamo come $t_N - t_x = (t_N - t_0) + (t_0 - t_x)$. In [2] la valutazione di $t_N - t_x$ porge il seguente risultato: per tutte le orbite, ad eccezione di un insieme

esponenzialmente piccolo di queste ($O(\frac{e^{-1/\epsilon}}{\epsilon})$), $t_N - t_x = O(N \epsilon \log|\frac{1}{N\epsilon}|)$ risulta minore di $t'_x - t_x$ ($= O(\frac{1}{\epsilon})$). Per quelle orbite che attraversano le separatrici ad istanti di tempo troppo vicini rispetto a quelli dell'inversione dell'evoluzione dei lobi, i ragionamenti proposti nelle pagine precedenti non sono validi.

4.3 Un'applicazione ad un caso simmetrico

Per migliorare la comprensione delle nozioni introdotte nelle **Sezione 4.1** e **Sezione 4.2**, studiamo la dinamica dell'attraversamento delle separatrici per un sistema hamiltoniano simmetrico.

I sistemi simmetrici sono tali che i parametri di attraversamento e le funzioni di fase **4.12** dei due lobi delle curve separatrici sono uguali.

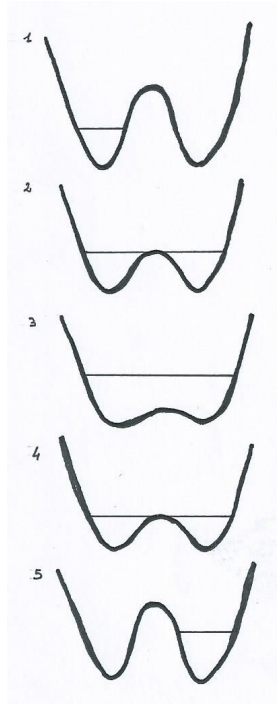
Consideriamo il sistema hamiltoniano di hamiltoniana

$$H(p, q, \lambda) = \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}\omega^2(\lambda)q^2 + b(\lambda)q^4 \quad (4.15)$$

con potenziale quartico. A questa energia potenziale è sottoposta una particella di massa unitaria. Poiché ω e b variano (lentamente) nel tempo, le profondità delle due buche (simmetriche rispetto all'asse p) cambiano. La particella può venir intrappolata in una delle buche o può essere espulsa da una di esse. La **Figura 4.3.1** mostra una sequenza di due attraversamenti delle separatrici quando una particella è soggetta ad un potenziale simmetrico a doppia buca lentamente variabile nel tempo.

Figura 4.3.1:

Illustrazione di due attraversamenti consecutivi delle separatrici per una particella in una doppia buca di potenziale simmetrica e con ampiezza variabile nel tempo.



Consideriamo un'orbita che si trova inizialmente nel lobo a . Indichiamo con $J_a^1 = J_{a,0}$ il valore iniziale dell'invariante adiabatico corretto al primo ordine. Assumiamo che il parametro di attraversamento rilevante per la prima transizione verso la regione c sia $M_{a,0}$.

Il primo attraversamento avviene all'istante di tempo $t_{x,0}$ che si determina risolvendo l'equazione $J_{a,0} = Y_a(\epsilon t_{x,0})$.

Al minor ordine perturbativo, il nuovo valore dell'invariante adiabatico nella regione c è $Y_c(\epsilon t_{x,0}) = 2J_{a,0}$. Al primo ordine, l'invariante adiabatico nella regione c è

$$J_{c,0} = 2J_{a,0} - \frac{\dot{Y}_c}{\omega} \log |2 \sin(\pi M_{a,0})| \quad (4.16)$$

come si può dedurre dall'equazione **3.23**, ponendo $\dot{Y}_a = \dot{Y}_b = \frac{1}{2} \dot{Y}_c$, $R_a = R_b = \frac{1}{2}$, $E_a = E_b = E_c$ e $g_a = g_b$.

Con riferimento alla **Tabella 4.2.1**, il parametro di attraversamento rilevante nella regione c è $M_{u,0} = \frac{M_{a,0}}{2}$. Inserendo questa espressione per $M_{u,0}$ nell'equazione **4.10**, possiamo ottenere l'espressione per il parametro $M'_{u,0}$ rilevante per la seconda transizione. Si ottiene

$$M'_{u,0} = \text{frac}\left(\frac{M_{a,0}}{2} + \Phi_c(J_{c,1})\right) \quad (4.17)$$

ove la funzione $\Phi_c(J_{c,1})$ va valutata numericamente.

All'ordine dell'unità, possiamo scrivere (cfr. [2])

$$M'_{u,0} = \text{frac}(\rho(M_{a,0}, J_{a,0})) \quad (4.18)$$

con

$$\rho(M_a, J_a) = \frac{M_a}{2} + \frac{\Delta_c(2J_a)}{\epsilon} - \frac{1}{\omega} \frac{d\Phi_c(2J_a)}{dJ} \frac{dY_c}{d\lambda} \log |2 \sin(\pi M_a)| \quad . \quad (4.19)$$

Le equazioni **4.18** e **4.19** implicano che la relazione tra i parametri di attraversamento nel caso simmetrico è periodica in $\frac{1}{\epsilon}$ per ϵ piccolo (con periodo $\frac{1}{\Delta_c}$). Ciò conferma quanto già affermato: né il limite adiabatico primitivo (che prevederebbe di trascurare l'ultimo termine dell'equazione **4.19**) né il limite opposto (nel quale l'ultimo termine dell'equazione **4.19** si dovrebbe assumere molto grande) si realizzano quando ϵ tende a 0.

Il parametro $M'_{u,0}$ determina lo stato di intrappolamento che segue al secondo attraversamento delle separatrici. In accordo con la **Tabella 4.2.1**, se $M'_{u,0} > \frac{1}{2}$, l'orbita ha accesso al lobo a ; se $M'_{u,0} < \frac{1}{2}$, l'orbita entra nel lobo b .

Adottando il linguaggio della statistica, consideriamo un insieme di dati iniziali caratterizzati dallo stesso valore dell'invariante adiabatico ($J_a^1 = J_a$) e distribuiti uniformemente rispetto alla variabile angolare coniugata all'azione. Come abbiamo mostrato nella **Sezione 4.1**, i parametri di attraversamento M_a si distribuiscono uniformemente. Il fatto che ciò accada e che $\frac{1}{2} < M'_{u,0} < 1$, perché l'orbita entri nel lobo a (ad esempio), consente di definire la probabilità di intrappolamento P come

$$P = \text{mes}(M_a : 0 < M_a < 1, n < \rho(M_a, J_a) < n + \frac{1}{2}, n \in Z) \quad . \quad (4.20)$$

P rappresenta la frazione dell'insieme di orbite considerate che accedono al lobo a dopo la seconda transizione. Delle formule analoghe e valide in generale si possono ricavare a partire dalle equazioni **3.23**, **3.24** e **4.10** e dai risultati della **Tabella 4.2.1**.

La funzione P è periodica con periodo $\frac{1}{\Delta_c}$ per ϵ piccolo. Asintoticamente, essa non tende né alla frazione $2 \text{ frac}(\frac{\Delta_c}{\epsilon})$ per $\text{frac}(\frac{\Delta_c}{\epsilon}) < \frac{1}{2}$ o $2 [1 - \text{frac}(\frac{\Delta_c}{\epsilon})]$ per $\text{frac}(\frac{\Delta_c}{\epsilon}) > \frac{1}{2}$ né a $\frac{1}{2}$. Questi sono i risultati che si ottengono rispettivamente nel limite adiabatico primitivo e nel limite di consistente dipendenza tra i parametri di attraversamento.

Il calcolo di P assume rilevanza per tempi significativamente successivi al secondo istante di pseudo-atteveramento, quando la maggior parte delle orbite del campione in analisi ha preso parte

alla seconda transizione verso uno dei due lobi. In particolare, l'espressione [4.20](#) è valida dopo tempi di ordine $\log|\frac{1}{\epsilon}|$ dall'istante di pseudo-atteveramento. Come dev'essere, un intervallo di tempo $O(\log|\frac{1}{\epsilon}|)$ ha ampiezza minore rispetto alla distanza temporale $t'_x - t_x$ di ordine $O(\frac{1}{\epsilon})$, per $\epsilon \rightarrow 0$.

Per completare la descrizione del processo di doppio attraversamento che stiamo considerando, è necessario calcolare sia il valore finale dell'invariante adiabatico sia il valore del nuovo parametro di transizione dopo l'ingresso in uno dei lobi. Applicando la condizione di simmetria alle equazioni [3.23](#) e [4.10](#) si ottengono i risultati

$$J_{\alpha,1} = \frac{J_{c,0}}{2} - \frac{\dot{Y}_c}{2\omega} \log |2 \sin(2\pi M'_{u,0})| \quad (4.21)$$

e

$$M_{\alpha,1} = \text{frac}(2M'_{u,0} + \Phi_{\alpha}(J_{\alpha,1})) \quad (4.22)$$

per $\alpha = a, b$.

Le equazioni [4.16](#), [4.17](#), [4.21](#) e [4.22](#) riducono la duplice transizione delle separatrici ad una mappa. Essa può essere iterata per descrivere una sequenza arbitraria di attraversamenti. Il lobo a cui l'orbita accede dopo la seconda transizione è irrilevante per l'analisi dei successivi attraversamenti. Infatti, tutte le considerazioni precedenti possono essere facilmente adattate al caso in cui l'orbita si trovi originariamente nel lobo b anziché nel lobo a . I sistemi simmetrici sono tali che le transizioni sono simmetriche. Esse, in qualità di singoli attraversamenti, prevedono il passaggio dalla regione c ad uno dei lobi o viceversa. Quando i lobi si contraggono, le orbite entrano necessariamente nella regione c .

In linea di principio, il *modus operandi* presentato poc'anzi si può applicare ad ogni sistema hamiltoniano lentamente dipendente dal tempo (come, ad esempio, al sistema [6.5](#)). Dopo ciascuna transizione delle curve separatrici si aggiorna il valore dell'invariante adiabatico e si utilizza quest'ultimo per determinare l'istante di tempo al quale l'attraversamento successivo avviene. Il nuovo valore della fase (o del parametro di transizione) consente di discernere la regione alla quale l'orbita in analisi avrà accesso e di esprimere il valore finale dell'invariante adiabatico.

5 Conclusioni

Riassumiamo le conclusioni principali che si possono trarre dai risultati dei capitoli precedenti.

Prendiamo in considerazione un sistema hamiltoniano ad un grado di libertà che dipende lentamente dal tempo e il cui ritratto in fase (a tempo fissato) presenta delle curve separatrici. La sua hamiltoniana sia $H(p, q, \lambda(\epsilon t))$, ove la funzione $\lambda: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ è regolare e ϵ è un parametro piccolo.

Se l'attraversamento delle separatrici non avviene (e ci si mantiene staccati da queste), esiste un invariante adiabatico (quasi) conservato. Esso è l'azione

$$I(E, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \oint P(q, E, \lambda) dq \quad .$$

Essa si può interpretare come l'area racchiusa da un'orbita assegnata a un dato istante di tempo.

Consideriamo un'orbita che sottende un'area di valore intermedio tra i valori minimo e massimo delle aree individuate dalle separatrici pulsanti. Perché l'azione si conservi, l'orbita deve attraversare le curve separatrici. La teoria adiabatica sviluppata nelle lontananze delle separatrici non è valida e, corrispondentemente, l'invariante adiabatico subisce un salto.

La costruzione della teoria adiabatica in prossimità delle curve separatrici permette di descrivere il processo di attraversamento e di calcolare il valore finale dell'azione per tempi $t \sim \frac{1}{\epsilon}$. Al primo ordine perturbativo, esso è

$$J_{\eta, f}^1 = J_{\eta, f} = Y_{\eta}(\lambda_x) + \delta J_{\eta, f}(E_0, M_{\eta})[1 + O(\epsilon^{\frac{1}{5}}) + O(\epsilon \log |E_{\min}|)]$$

e si esprime in termini di alcune quantità dipendenti dalla fase di ordine ϵ e $\epsilon \log|\epsilon|$. Tale dipendenza e le relazioni che sussistono tra i parametri di transizione sono cruciali per giungere alla comprensione delle caratteristiche del fenomeno di attraversamento delle separatrici.

I parametri di transizione (strettamente legati alla variabile angolare coniugata all'azione, cioè alla fase) possono essere caratterizzati come variabili casuali dotate di una ben definita densità di probabilità. Quest'ultima è uniforme per un insieme di dati iniziali con lo stesso valore dell'azione e con distribuzione uniforme rispetto alla variabile angolare coniugata all'azione medesima.

Tuttavia, l'analisi della dinamica del sistema all'occorrenza di una sequenza di attraversamenti successivi mostra la presenza di correlazioni tra di essi. Il sistema, di transizione in transizione, mantiene memoria degli attraversamenti precedentemente avvenuti. In altre parole, essi non sono completamente indipendenti gli uni dagli altri. Lo stato presente del sistema è influenzato dalla sua storia. Per due attraversamenti consecutivi, il termine di mancato mescolamento della fase ($\delta J_{a, f}(M_u) \frac{d\Phi_a}{dJ}(J_{a, m})$ per un'orbita che transisce dalla regione c al lobo a e dal lobo a alla regione c) scala (al più) come $\log|\epsilon|$ (e non dipende da ϵ nel caso simmetrico). Nel limite $\epsilon \rightarrow 0$ i termini di correlazione non possono, in generale, essere trascurati.

Come già accennato, la trattazione proposta presenta dei limiti. Essa non vale per un piccolo insieme di dati iniziali troppo vicini al punto di sella O e per quelle orbite per le quali gli attraversamenti delle separatrici sono temporalmente troppo ravvicinati. Ciononostante, le simulazioni numeriche con le quali è sempre necessario confrontare i risultati analitici sono in considerevole accordo questi (cfr. [2]).

Si ringraziano di cuore il Professor Giancarlo Benettin per i profondi e utili insegnamenti e per le grandi disponibilità e dedizione; Giacomo Di Dio per il prezioso supporto nell'impaginazione del testo e nella risoluzione delle difficoltà incontrate durante la compilazione del codice LaTeX.

6 Appendici

Appendice A. Qualche nozione preliminare.

Presentiamo di seguito alcune nozioni di base sulle quali poggiano la costruzione e la comprensione dei capitoli precedenti.

Assumiamo note le definizioni di *sistema hamiltoniano* e di *flusso* di un sistema hamiltoniano.

Consideriamo l'equazione differenziale

$$\dot{x} = X(x)$$

in \mathfrak{R}^n . Indichiamo con $\Phi^t(x)$ il flusso del campo vettoriale X e con A un insieme sottoinsieme di \mathfrak{R}^n . Vale il seguente importante risultato.

PROPOSIZIONE. Sia A misurabile. Il volume $\text{Vol}(\Phi^t(A))$ varia nel tempo secondo la legge

$$\frac{d\text{Vol}(\Phi^t(A))}{dt} = \int_{\Phi^t(A)} \text{div}(X) dV \quad .$$

In particolare,

COROLLARIO. Il flusso hamiltoniano preserva il volume in \mathfrak{R}^{2n} .

Quest'ultimo risultato è noto come *Teorema di Liouville*.

Nei sistemi hamiltoniani autonomi con hamiltoniana $H(p,q)$ (ove, in generale, $(p,q) \in D \subset \mathfrak{R}^{2n}$) si conserva l'energia. L'hamiltoniana è costante lungo le soluzioni. Le curve di livello dell'energia sono insiemi invarianti.

Se il sistema hamiltoniano non è autonomo, cioè se l'hamiltoniana $H: D \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ dipende esplicitamente dal tempo, le equazioni di Hamilton dipendono esse stesse dal tempo. L'energia non è più un integrale primo del sistema.

Per studiare i sistemi hamiltoniani non autonomi a n gradi di libertà può risultare conveniente pensarli come sistemi autonomi a $n + 1$ gradi di libertà nello spazio esteso, munito di coordinate $(p_1, \dots, p_n, p_{n+1}, q_1, \dots, q_n, q_{n+1}) = (p_1, \dots, p_n, A, q_1, \dots, q_n, \tau)$, con hamiltoniana

$$H^{ext}(p_1, \dots, p_n, A, q_1, \dots, q_n, \tau) = H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, \tau) + A \quad . \quad (6.1)$$

Osserviamo che $\dot{\tau} = 1$: le equazioni del moto con $\tau(0) = 0$ pongono $\tau(t) = t$. Così, le equazioni di Hamilton per le variabili p e q relative ad H^{ext} coincidono con quelle di H . Le soluzioni $(p(t), q(t))$ del sistema esteso coincidono con quelle del sistema originario.

L'equazione del moto per la variabile ausiliaria A è

$$\dot{A} = -\frac{\partial H^{ext}}{\partial \tau} = -\frac{dH}{dt}$$

e ci informa che H^{ext} si conserva.

Appresa la nozione di trasformazione canonica di coordinate (anche nel caso dipendente dal tempo), osserviamo che uno dei motivi per cui esse sono interessanti riguarda la possibilità di utilizzarle nel contesto della Teoria Hamiltoniana delle Perturbazioni, ove si cerca di assorbire l'effetto della perturbazione in un cambiamento di variabili opportuno. E' necessario allora saper generare delle

famiglie di trasformazioni la cui canonicità sia garantita a priori. A tal fine esistono due metodi principali: il Metodo di Lie e il Metodo delle Funzioni Generatrici.

Il Metodo di Lie

Assegnati il campo vettoriale $X(x)$ e l'equazione differenziale $\dot{x} = X(x)$ in \mathfrak{R}^n , per ogni istante t_0 il flusso Φ_X^t fornisce una trasformazione regolare ed invertibile che associa al dato iniziale $\tilde{x} = \Phi_X^t(\tilde{x})$. Consideriamo ora un sistema hamiltoniano. Indichiamo con

$$\Phi_H^t(\tilde{p}, \tilde{q}) = (u(\tilde{p}, \tilde{q}, t), v(\tilde{p}, \tilde{q}, t))$$

il suo flusso e, per ogni t_0 , consideriamo la trasformazione di variabili

$$p = u(\tilde{p}, \tilde{q}, t) \quad ; \quad q = v(\tilde{p}, \tilde{q}, t) \quad . \quad (6.2)$$

Si dimostra che tale trasformazione è canonica.

Ricordiamo che per $t_0 = \epsilon$ piccolo la trasformazione di variabili $w_\epsilon = \Phi_H^\epsilon$ è prossima all'identità. Essa dipende in modo regolare dal parametro ϵ (definito in un intorno dell'origine) e si riduce all'identità per $\epsilon = 0$.

Il Metodo delle Funzioni Generatrici

Consideriamo una funzione di $2n$ variabili $S(\tilde{p}, q)$ definita in un aperto di \mathfrak{R}^{2n} . Supponiamo che nel dominio di definizione di $S(\tilde{p}, q)$ risulti

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \tilde{p}_i \partial q_j}\right) \neq 0 \quad .$$

Si dimostra che le equazioni

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} \quad ; \quad \tilde{q} = \frac{\partial S}{\partial \tilde{p}} \quad (6.3)$$

definiscono implicitamente una trasformazione di coordinate

$$p = u(\tilde{p}, \tilde{q}, t) \quad ; \quad q = v(\tilde{p}, \tilde{q}, t) \quad . \quad (6.4)$$

che, laddove è definita, è canonica. La funzione $S(\tilde{p}, q)$ si dice *funzione generatrice*.

L'identità è generata da $S(\tilde{p}, q) = \tilde{p} \circ q$. Una trasformazione canonica prossima all'identità si può generare per mezzo della funzione generatrice

$$S(\tilde{p}, q) = \tilde{p} \circ q + \epsilon \mathcal{S}(\tilde{p}, q, \epsilon) \quad .$$

Introduciamo ora le nozioni di sistema integrabile (secondo *Liouville*) e le variabili di azione e angolo per il pendolo.

Ricordiamo che:

DEFINIZIONE. L'hamiltoniana $H: D \rightarrow \mathfrak{R}$ si dice integrabile secondo Liouville nel dominio $D' \subset D$ se esiste una trasformazione canonica $(p,q) = w(I,\phi)$ definita per $I \in B \subset \mathfrak{R}^n$ e per $\phi \in \mathcal{T}^n$ tale che $D' = w(B \times \mathcal{T}^n)$ e la nuova hamiltoniana $K = H \circ w$ è funzione delle sole azioni. Ovvero, $K(I,\phi) = h(I)$ con $h: B \rightarrow \mathfrak{R}$ ³.

Osserviamo che non tutti i sistemi sono integrabili. Se nel dominio è presente un punto di equilibrio instabile o una separatrice, la condizione di integrabilità salta. Essa resta, comunque, di fondamentale importanza: molti dei sistemi fisici più significativi sono integrabili.

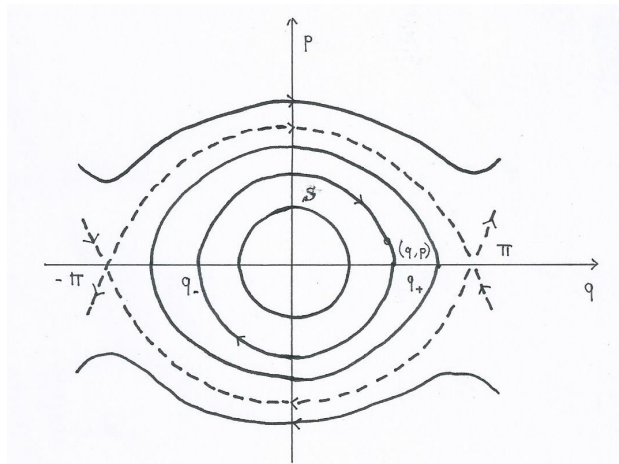
Consideriamo, per concludere, il sistema ad un grado di libertà

$$H(p, q) = \frac{1}{2}p^2 + V(q) \quad (6.5)$$

ove $V(q) = -\omega_0^2 \cos q$.

Il ritratto in fase del sistema ha la forma presentata nella **Figura A1**.

Figura A1:
Ritratto in fase del pendolo.



Restringiamoci al regime oscillatorio (escludendo il punto di equilibrio stabile). Studiamo, cioè, la dinamica del sistema nel sottoinsieme D del piano delle fasi \mathfrak{R}^2 per il quale l'energia soddisfa alla condizione $-\omega_0^2 \leq E \leq \omega_0^2$.

Vogliamo trovare delle coordinate canoniche (\tilde{p}, \tilde{q}) tali che \tilde{p} resti costante e \tilde{q} avanzi uniformemente. La struttura del ritratto in fase diviene così cilindrica.

Sembra naturale scegliere come coordinata \tilde{p} l'energia

$$E = H(p, q)$$

e come coordinata \tilde{q} il tempo. Fissata la semiretta $q = 0$ con $p > 0$ come sezione che taglia tutte le orbite, il tempo necessario per arrivare da S a (p, q) è

$$\tau = \tau(p, q) = \int_0^q \frac{1}{\sqrt{2(H(p, q) - V(x))}} dx$$

per $p > 0$ e

$$\tau = \tau(p, q) = \frac{1}{2}T(H(p, q)) - \int_0^q \frac{1}{\sqrt{2(H(p, q) - V(x))}} dx$$

per $p < 0$

³ Il simbolo \mathcal{T}^n denota il toro n -dimensionale, dominio delle variabili angolari $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$.

ove

$$T(H(p, q)) = \int_{q_-(E)}^{q_+(E)} \frac{1}{\sqrt{2(E - V(x))}} dx \quad .$$

I simboli $q_-(E)$ e $q_+(E)$ individuano i due punti di arresto all'energia E .
Le funzioni $H(p, q)$ e $\tau(p, q)$ individuano la trasformazione di coordinate

$$(E, \tau) = w^{-1}(p, q) \quad .$$

Essa è canonica ed è canonico anche il cambiamento di variabili

$$(p, q) = w(E, \tau) \quad .$$

Nelle nuove variabili l'hamiltoniana è

$$\tilde{H}(E, \tau) = E \quad .$$

Questa scelta di coordinate ha, però, una complicazione nascosta. Il periodo $T(H(p, q))$ dipende dall'energia E e, per questo, il dominio delle variabili (E, τ) non ha la semplice forma cilindrica che desideriamo.

Per ovviare a tale inconveniente, sostituiamo alla variabile τ una coordinata angolare con periodo pari a 2π . Essa è definita dall'espressione

$$\phi = \omega\tau = \frac{2\pi}{T(E)}\tau \quad (6.6)$$

e cerchiamo $I = I(E)$ che completi canonicamente la trasformazione. Si trova che

$$I(E) = \frac{1}{2\pi} \oint pdq = \frac{1}{\pi} \int_{q_-(E)}^{q_+(E)} \sqrt{2(E - V(x))} dx \quad . \quad (6.7)$$

Il dominio D delle nuove variabili è $D = (0, I_{\max}) \times S^1$. La nuova hamiltoniana è $K(I, \phi) = h(I)$, se si pone $E = h(I)$ come la funzione che inverte l'equazione 6.7. Le equazioni del moto sono

$$\dot{I} = 0 \quad ; \quad \dot{\phi} = \omega(I) \quad (6.8)$$

ove $\omega(I) = \frac{\partial h}{\partial I}$.

Le variabili I e ϕ sono dette variabili di azione e angolo per il pendolo.

Dalle considerazioni precedenti dobbiamo escludere l'origine (il punto di equilibrio stabile) e le separatrici (le curve di livello dell'energia che contengono i punti di equilibrio instabili). Nell'origine si ha una singolarità geometrica. Un insieme di curve collassa in un punto e in un intorno del punto singolare non è possibile definire né τ né ϕ . Si tratta della singolarità propria delle coordinate polari. Sulle separatrici la natura della singolarità è distinta. Ivi, infatti, il periodo $T(E)$ diverge e i moti non sono più periodici. Sebbene si possa ancora introdurre la coppia di coordinate (E, τ) , non sono invece definite le variabili (I, ϕ) .

Appendice B. Cenni alla Teoria Hamiltoniana delle Perturbazioni.

Nel mondo fisico sono abbondanti i sistemi prossimi a sistemi integrabili. Nelle variabili di azione e angolo del sistema integrabile di riferimento, essi si possono scrivere come

$$H_\epsilon(I, \phi) = h(I) + \epsilon f(I, \phi, \epsilon) \quad (6.9)$$

ove ϵ è un parametro piccolo. In questo contesto, h è detta *hamiltoniana imperturbata*; f si chiama *perturbazione* e H_ϵ è l'*hamiltoniana perturbata*.

L'analisi della dinamica di questi sistemi su scale di tempo $O(\frac{1}{\epsilon})$, o maggiori, è l'oggetto di studio della Teoria Hamiltoniana delle Perturbazioni. Presentiamo alcune delle idee fondamentali su cui essa si costruisce.

Cerchiamo, innanzitutto, di capire come si possa procedere nello studio della dinamica di un sistema per tempi lunghi mettendo in evidenza un eventuale effetto medio della perturbazione, dominante su queste scale temporali. Per maggiore chiarezza, consideriamo il generico sistema di equazioni differenziali (non necessariamente hamiltoniano) in $n + m$ variabili

$$\dot{I} = \epsilon F(I, \phi) \quad ; \quad \dot{\phi} = \omega(I) + \epsilon G(I, \phi) \quad (6.10)$$

con $I = (I_1, \dots, I_m) \in \mathfrak{R}^m$ e $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) \in \mathcal{T}^n$.

Nel caso dell'*hamiltoniana 6.9* $n = m$ e valgono le seguenti corrispondenze: $\omega(I) = \frac{\partial h}{\partial I}$; $F = -\frac{\partial f}{\partial \phi}$ e $G = \frac{\partial f}{\partial I}$.

Le equazioni **6.10** mostrano che le variabili I sono lente e che gli angoli ϕ sono veloci per ϵ piccolo.

Scomponiamo F come somma di una parte oscillante (che dà luogo a compensazioni) e di una parte media (che fornisce il contributo dominante su tempi lunghi) e introduciamo il sistema mediato

$$\dot{J} = \epsilon \bar{F}(J) \quad (6.11)$$

ove \bar{F} è la parte media di F .

Il confronto tra le soluzioni $I_\epsilon(t)$ e $J_\epsilon(t)$ a parità di dato iniziale $I^0 = J^0$ è significativo per tempi $O(\frac{1}{\epsilon})$ dopo che le azioni I e J si sono scostate significativamente dal loro valore iniziale. Enunciamo il *Principio della Media* al primo ordine in ϵ .

DEFINIZIONE. Il sistema di equazioni differenziali **6.10** soddisfa al principio della media al primo ordine in ϵ , se esiste $t_0 > 0$ tale che, per ogni dato iniziale (I^0, ϕ^0) , la soluzione $(I_\epsilon(t), \phi_\epsilon(t))$ e la soluzione $J_\epsilon(t)$ dell'equazione mediata **6.11** con dato iniziale $J^0 = I^0$ sono tali che

$$\max_{|t| \leq \frac{t_0}{\epsilon}} \| I_\epsilon(t) - J_\epsilon(t) \| \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad . \quad (6.12)$$

Un'estensione di tale principio, utile per costruire la teoria adiabatica nelle vicinanze delle separatrici (cfr. **Capitolo 2**) viene discussa da A.I. Neishtadt in [5].

Osserviamo che nel caso hamiltoniano il sistema mediato **6.11** diviene $\dot{J} = 0$ (H è periodica in ϕ) e, dunque, $J_\epsilon(t) = J^0$.

Per terminare, consideriamo l'*hamiltoniana perturbata*

$$H_\epsilon(I, \phi) = h(I) + \epsilon f(I, \phi, \epsilon) \quad (6.13)$$

con $(I, \phi) \in D = B \times \mathcal{T}^n$.

Ci proponiamo di assorbire gli effetti della perturbazione in un cambiamento di variabili. Cerchiamo, cioè, una trasformazione di coordinate canonica e prossima all'identità

$$(I, \phi) = w_\epsilon(\tilde{I}, \tilde{\phi})$$

tale che la nuova hamiltoniana $\tilde{H}_\epsilon(\tilde{I}, \tilde{\phi}) = H(w_\epsilon(\tilde{I}, \tilde{\phi}))$ sia più integrabile di H_ϵ . Ad esempio, vorremmo che \tilde{H}_ϵ fosse

$$\tilde{H}_\epsilon = h(\tilde{I}) + \epsilon g(\tilde{I}) + \epsilon^2 \tilde{f}(\tilde{I}, \tilde{\phi}, \epsilon)$$

integrabile a meno di termini di ordine ϵ^2 per una opportuna g .

Se ciò si realizzasse, si deduce immediatamente che le nuove azioni evolverebbero con velocità $O(\epsilon^2)$ e sarebbe soddisfatta la condizione

$$\| \tilde{I}(t) - \tilde{I}(0) \| < \text{cost } \epsilon$$

per $|t| \leq \frac{\text{cost}}{\epsilon}$.

Inoltre, poiché la trasformazione w_ϵ è prossima all'identità, varrebbe anche

$$\| I(t) - I(0) \| < \text{cost } \epsilon$$

per $|t| \leq \frac{\text{cost}}{\epsilon}$.

Per individuare la trasformazione alla quale siamo interessati possiamo procedere indifferentemente utilizzando il Metodo di Lie o il Metodo delle Funzioni Generatrici. Scegliamo il primo e cerchiamo, dunque, un'hamiltoniana generatrice $\chi(I, \phi)$ tale che il suo flusso sia la trasformazione desiderata.

Visto che

$$F \circ \Phi_\chi^\epsilon = F + \epsilon \{F, \chi\} + \frac{\epsilon^2}{2} \{\{F, \chi\}, \chi\} + O(\epsilon^3) \quad ,$$

la nuova hamiltoniana è

$$\tilde{H}_\epsilon = H_\epsilon \circ \Phi_\chi^\epsilon = h + \epsilon(\{h, \chi\} + f) + O(\epsilon^2) \quad (6.14)$$

se si trascurano i termini $O(\epsilon^2)$.

Vogliamo determinare χ e g in modo che $\{h, \chi\}(\tilde{I}, \tilde{\phi}) + f(\tilde{I}, \tilde{\phi}) = g(\tilde{I})$. Dal momento che la parentesi di Poisson $\{h, \chi\}$ vale $\{h, \chi\} = - \frac{\partial h}{\partial I} \circ \frac{\partial \chi}{\partial \phi} = - \omega \circ \frac{\partial \chi}{\partial \phi}$, troviamo l'equazione

$$- \omega \circ \frac{\partial \chi}{\partial \phi} = f - g \quad (6.15)$$

in cui f è nota e χ e g sono incognite. Dovendo g dipendere dalle sole azioni, tale funzione può essere determinata immediatamente. Mediando sugli angoli i due membri dell'equazione precedente e ricordando che la media della derivata rispetto ad un angolo di una funzione periodica è nulla,

$$g = \langle f \rangle_\phi \quad . \quad (6.16)$$

In definitiva, dobbiamo risolvere l'equazione

$$- \omega \circ \frac{\partial \chi}{\partial \phi} = f - \langle f \rangle_\phi \quad (6.17)$$

cruciale in Teoria Hamiltoniana delle Perturbazioni.

Bibliografia

- [1] J.R. Cary, D.F. Escande, J.L. Tennyson; *Adiabatic – invariant change due to separatrix crossing*, *Physical Review A*, vol. 34 pagg. 4256-4276 (1986).
- [2] J.R. Cary, R.T. Skodje; *Phase change between separatrix crossings*, *Physica D*, vol. 36, pagg. 287-316 (1989).
- [3] A.V. Timofeev; *On the constancy of an adiabatic invariant when the nature of the motion changes*, *Soviet Physics JETP*, vol. 48, pagg. 656-659 (1978).
- [4] R.W.B. Best; *On the motion of charged particles in a slightly damped sinusoidal potential wave*, *Physica*, vol. 40, pagg. 182-196 (1968).
- [5] A.I. Neishtadt; *Passage through a separatrix in a resonance problem with a slowly – varying parameter*, *Physical and Mathematical Mechanics (PMM)*, vol. 39, pagg. 594-605 (1975).
- [6] A.I. Neishtadt; *On the accuracy of the conservation of the adiabatic invariant*, *Physical and Mathematical Mechanics (PMM)*, vol. 45, pagg. 58-63 (1982).
- [7] G. Benettin; *Appunti per il Corso di Meccanica Analitica* (2016).