

1222·2022
800
ANNI



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Le disuguaglianze CHSH e la loro violazione sperimentale: l'impossibilità del realismo locale

Relatore:

Prof. PIERALBERTO MARCHETTI

Laureando:

LUCA CAMPAGNONI

Anno Accademico 2021/2022

“La meccanica quantistica è degna di ogni rispetto, ma una voce interiore mi dice che non è ancora la soluzione giusta. È una teoria che ci dice molte cose, ma non ci fa penetrare più a fondo il segreto del Grande Vecchio. In ogni caso, sono convinto che questi non gioca a dadi col mondo.”

— Albert Einstein (lettera a Max Born, 4 dicembre 1926)

Indice

Introduzione	1
1 Il problema della completezza	3
1.1 Concetti base della Meccanica Quantistica	3
1.2 Cenni di filosofia per la fisica	5
1.3 Il paradosso EPR	6
1.4 L'idea di Bell	8
1.5 La dimostrazione di CHSH	8
2 Il Bell test	10
2.1 Prototipo	10
2.2 I loophole	11
2.2.1 Locality loophole	11
2.2.2 Fair sampling loophole	13
2.2.3 Freedom-of-choice loophole	15
2.2.4 Altri loophole	16
3 Asymmetric Bell test	17
3.1 La necessità di un test asimmetrico	17
3.2 Inefficienza e rumore	18
3.3 Un esempio	19
Conclusioni	22
A Inefficienza ed entanglement	24
Bibliografia	26

Introduzione

La nascita e lo sviluppo di una nuova teoria fisica portano inevitabilmente a valutarne i limiti di applicabilità e a considerare in quale misura possa descrivere l'aspetto della realtà fisica che si prefigge di sondare. Di ciò la Meccanica Quantistica (MQ) può essere considerata un esempio paradigmatico, principalmente per la presenza di numerosi aspetti controintuitivi e per il fatto di fondarsi su di un intrinseco, quindi ineliminabile, probabilismo.

Uno dei dibattiti più importanti e longevi, che sarà di interesse per questa tesi, è quello sollevato nel 1935 dal trio di fisici Albert Einstein, Boris Podolsky e Nathan Rosen, tramite il loro famoso articolo *La descrizione quantistica della realtà fisica può ritenersi completa?* [1]. Le conclusioni di questo lavoro, che passano oggi sotto il nome di paradosso EPR, posero all'attenzione dei fisici quantistici i problemi derivanti dal considerare l'evoluzione di sistemi quantistici composti e il loro rapporto con il concetto di realtà, il tutto inquadrato nell'ambito delle restrizioni legate alla località suggerite dalla relatività ristretta. Portava appunto a un paradosso la possibilità in linea di principio di avere due osservabili non commutanti e tuttavia simultaneamente reali. La prima reazione a questo fatto fu il rifiuto di considerare la MQ completa.

Una prima risposta all'articolo venne data nello stesso anno da Niels Bohr [2], seppur fumosa e di certo non definitiva. Dopo varie riformulazioni equivalenti, la questione venne poi trattata in modo soddisfacente nel 1964 da John Stewart Bell [3], il quale dimostrò con le sue note disuguaglianze che non può esistere alcuna teoria a variabili nascoste locale che concordi con i risultati della MQ. Tuttavia, la dimostrazione teorica non implicava una semplice trasposizione sperimentale, specie per la difficile applicazione del modello originale di Bell. Un fondamentale articolo congiunto dei fisici John Clauser, Michael Horne, Abner Shimony, e Richard Holt [4] dello stesso anno permise di ottenere una forma delle disuguaglianze, conosciute come disuguaglianze CHSH, più facilmente verificabili in laboratorio.

Nel corso degli anni numerosi esperimenti atti a osservare la violazione delle disuguaglianze si sono susseguiti, a partire da quelli gestiti da Alain Aspect nel biennio 1980-82, arrivando fino ai giorni nostri. La causa di un così lungo e meticoloso percorso di verifica sperimentale è dovuto in parte alla difficoltà tecnica di gestire con cura sistemi entangled, ma anche al tentativo di eliminare i cosiddetti loopholes (scappatoie in italiano), ovvero aspetti particolari dell'esperimento che, se non controllati a dovere, potrebbero permettere di ottenere risultati erroneamente compatibili con un qualche tipo di teorie a variabili nascoste. A tutto ciò si aggiunge il problema, diffuso ampiamente nella fisica sperimentale, dell'efficienza dei detector impiegati, la cui impostazione teorica formale è ancora in fase di sviluppo e affinamento. Questo oggetto di studio è infatti mirato non solo all'approfondimento dei limiti sperimentali, ma suggerisce approcci innovativi per attaccare storici quesiti di fondamentale importanza.

Lo scopo della presente tesi è dare un quadro teorico generale delle disuguaglianze CHSH, andando poi ad analizzare le difficoltà concettuali che emergono nel passare dalle considerazioni

del teorema di Bell, che potremmo definire quasi matematiche, all'approccio fisico vero e proprio. Si dovrà così tenere in conto degli oggetti fisici con cui si ha a che fare e delle limitazioni a cui questi sono sottoposti. Il problema andrà inoltre collocato in un'opportuna visione di tipo fisico-filosofico, mostrando l'insostenibilità del realismo locale propugnato da Einstein e altri. In conclusione, si approfondirà un esperimento descritto in un recente articolo, il quale si innesta in un nuovo filone di indagine sulle disuguaglianze CHSH e sull'entanglement in genere, aprendo a nuovi sviluppi.

1. Il problema della completezza

1.1 Concetti base della Meccanica Quantistica

Ricordiamo ora la struttura fondamentale della meccanica quantistica (MQ), elencando brevemente i punti cardine che saranno utili nella trattazione sia della presente che delle successive sezioni.

Stati puri: tutta l'informazione di un sistema fisico è caratterizzata dal suo *stato*. Se consideriamo gli stati puri, ovvero quelli di massima informazione, possiamo identificarli nei raggi vettori di uno spazio di Hilbert \mathcal{H} concreto del tipo $L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$, oppure l'equivalente $L^2(\mathbb{R}^n, d^n p)$ mediante le funzioni d'onda normalizzate di Schrödinger $\Psi(x)$ o $\tilde{\Psi}(p)$. A meno di isomorfismi, come la trasformata di Fourier appena vista, possiamo passare a uno spazio astratto, in cui gli stati puri vengono espressi nel formalismo di Dirac come ket $|\Psi\rangle$ o, se vogliamo una corrispondenza biunivoca, con i proiettori unidimensionali associati $|\Psi\rangle\langle\Psi|$.

Stati misti: potremmo trovarci ad avere uno stato di cui conosciamo solo parte dell'informazione, sapendo solo che potrebbe trovarsi in certi stati puri $|\Psi_i\rangle$ con probabilità p_i . Allora lo stato è detto *stato misto*, e la sua trattazione avviene per mezzo della *matrice densità* $\rho \equiv \sum_n p_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|$, la quale è simmetrica, definita positiva e di traccia unitaria.

Assioma delle osservabili: le *osservabili* di un sistema quantistico, i cui stati puri sono descritti da raggi vettori di \mathcal{H} , sono descritte da operatori autoaggiunti $A = A^\dagger$ (lineari e densamente definiti in \mathcal{H}).

Commutazione e compatibilità di osservabili: si dice che due operatori autoaggiunti limitati A e B , rappresentanti quindi due osservabili a spettro¹ limitato, commutano se soddisfano la relazione $AB = BA$ (se illimitati, tale uguaglianza si applica alle loro famiglie spettrali). Si dice invece che due osservabili (nel caso in cui siano limitate e a spettro discreto) sono compatibili se una misura di prima specie di una osservabile eseguita su un autostato dell'altra la lascia nello stesso autovalore. Questo si può dimostrare essere equivalente all'avere una base comune completa di autovettori per le due osservabili, permettendo inoltre di generalizzare quanto appena detto anche a osservabili con spettro continuo. Sfruttando le completezze di Dirac si può infine dimostrare che due operatori A e B autoaggiunti sono compatibili se e solo se commutano, fondendo fra loro due importanti considerazioni di carattere rispettivamente fisico e matematico.

Assioma dei sistemi composti: un sistema quantistico composto da N sistemi distinguibili con spazi di Hilbert \mathcal{H}_i ($i = 1, \dots, N$) possiede spazio di Hilbert $\mathcal{H} = \bigotimes_{i=1}^N \mathcal{H}_i$ e le osservabili

¹Insieme dei valori ottenibili sperimentalmente con una misura.

$A^{(i)}$ del sistema i -esimo agiscono come $\mathbb{1}^{(1)} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}^{(i-1)} \otimes A^{(i)} \otimes \mathbb{1}^{(i+1)} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}^{(N)}$. Per semplicità faremo uso della notazione di Dirac, in cui il prodotto tensoriale di due (o più) ket $|\Psi\rangle$ e $|\Phi\rangle$ appartenenti ai due (o più) spazi di Hilbert che compongono il sistema è scritto come $|\Psi\rangle \otimes |\Phi\rangle \equiv |\Psi\rangle |\Phi\rangle$.

Assioma della misura (ideale di prima specie): se una misura ideale di prima specie della osservabile A nello stato $|\Psi\rangle$ dà un risultato nell'insieme (misurabile) Δ , immediatamente dopo la misura lo stato del sistema è descritto dallo stato

$$P^A(\Delta) |\Psi\rangle \equiv \int_{\Delta \cap \sigma_c(A)} d\lambda \sum_{r=1}^{d(\lambda)} |\lambda, r\rangle \langle \lambda, r | \Psi\rangle + \sum_{\sigma_p(A) \ni \lambda_n \cap \Delta} \sum_{r=1}^{d(\lambda_n)} |\lambda_n, r\rangle \langle \lambda_n, r | \Psi\rangle \quad (1.1)$$

che normalizzato diventa

$$\frac{P^A(\Delta) |\Psi\rangle}{\sqrt{\langle \Psi | P^A(\Delta) | \Psi \rangle}} \quad (1.2)$$

in cui $P^A(\Delta)$ è il proiettore relativo alla misura, $|\lambda_n, r\rangle$ gli autovettori relativi all'autovalore λ_n dello spettro discreto $\sigma_p(A)$ di A , e $|\lambda, r\rangle$ gli autovettori generalizzati relativi all'autovalore generalizzato λ dello spettro continuo $\sigma_c(A)$ di A . L'atto di misura quindi opera la cosiddetta *riduzione del pacchetto d'onda*, proiettando lo stato di partenza sullo stato compatibile con il risultato della misura. Si tratta di un'evoluzione non unitaria, quindi si perde tutta l'informazione sullo stato di partenza. Ci riferiremo nel seguito a questo tipo di misura come *misura proiettiva*.

Misure generalizzate (POVM): la tipologia di misura che andremo a trattare nel seguito non rispetterà tutte le caratteristiche appena viste per una misura ideale di prima specie. Avremo per esempio che questa sarà impossibile da ripetere subito dopo la prima lettura, poiché il sistema da studiare viene distrutto dall'atto stesso della misura. Per ottenere un nuovo tipo di misura che faccia al caso nostro, è sufficiente rilassare qualche ipotesi quali l'idempotenza e l'ortogonalità degli operatori. Definiamo una *misura a valori operatoriali positivi* (POVM) come un oggetto matematico costituito da un insieme di operatori $\{F_i\}_{i \in I}$ (I insieme indicatore numerabile) autoaggiunti e semi-definiti positivi tali da soddisfare la relazione di completezza²

$$\sum_i F_i = \mathbb{I} \quad (1.3)$$

La probabilità di ottenere un esito afferente all' i -esimo operatore del POVM per uno stato descritto dalla funzione d'onda $|\psi\rangle$ è data da

²È la definizione più generale che possiamo fornire. In realtà ci sono diversi gradi di rilassamento delle ipotesi, i quali portano a misure con più o meno caratteristiche (per esempio assumendo la decomposizione dei POVM in operatori di Kraus), ma ci sarà più che sufficiente considerare solo i POVM così come li abbiamo definiti. È infine triviale osservare come le misure proiettive non siano altro che misure generalizzate a cui si aggiungono nuovamente le condizioni che avevamo tolto.

$$p_i = \langle \psi | F_i | \psi \rangle \quad (1.4)$$

in cui sappiamo che $p_i \geq 0$ per il fatto che le F_i sono semi-definite positive. Le probabilità inoltre si sommano all'unità come atteso, infatti

$$\sum_i p_i = \sum_i \langle \psi | F_i | \psi \rangle = \langle \psi | \sum_i F_i | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle = 1 \quad (1.5)$$

La generalizzazione al caso di uno stato descritto da una matrice densità ρ è immediato ed è

$$p_i = \text{tr}(F_i \rho) \quad (1.6)$$

dove ricordiamo che la traccia di un operatore A in uno spazio \mathcal{H} di base ortonormale $\{|\chi_j\rangle\}_{j \in J}$ (J ancora un insieme indicatore numerabile) è definita come

$$\text{tr}(A) = \sum_{j \in J} \langle \chi_j | A | \chi_j \rangle \quad (1.7)$$

Il collegamento di queste misure con l'esperienza si realizza mediante il teorema di Naimark, che non tratteremo per brevità, il quale afferma che una misura generalizzata può essere sempre realizzata svolgendo una misura proiettiva su di uno spazio di dimensione superiore, andando a eseguire la traccia sulla parte aggiuntiva al sistema da osservare, che viene detto *sistema ancillare* (o semplicemente *ancilla*).

1.2 Cenni di filosofia per la fisica

È necessario introdurre innanzitutto una terminologia appropriata al problema in questione, che attinge a concetti a metà fra filosofia e scienza. Sebbene appaia superfluo, occorre per prima cosa chiarire la differenza fra *realismo* e *antirealismo* (o *strumentalismo*) *scientifico*:

- **realismo scientifico**: afferma che la scienza e la conoscenza che da essa deriva (teorie, modelli, osservazioni indirette, misure, ecc.) siano in grado di assumere un valore epistemologico, ovvero che descrivano davvero ciò che la natura è. L'esistenza di un elemento in una teoria corrisponde alla sua esistenza tangibile, sia che questo possa apparire o meno in modo diretto ai nostri sensi;
- **antirealismo scientifico**: generalmente ogni forma di negazione del realismo, ma nella prima metà del XX secolo (quello che interessa nella nostra trattazione) venne principalmente rappresentato dallo strumentalismo scientifico. Questo sostiene che la scienza e le sue derivazioni (date per vere nel realismo) siano in realtà un modo per ricostruire i risultati empirici, permettendo inoltre di operare previsioni, purtuttavia non descrivendo (almeno a priori) alcuna proprietà reale.

A titolo di esempio, gli atomi per un realista sono assolutamente parte della realtà fisica, mentre per uno strumentalista sono un astuto modello per descrivere, fra le altre cose, le linee di emissione spettrale di un dato elemento.

Abbiamo poi due principi fondamentali, che potrebbero apparire quasi ovvi:

- **principio di località (\mathcal{L}):** come sostenuto dalla relatività ristretta di Einstein, l'informazione non può viaggiare a una velocità maggiore di quella della luce c . Segue che due sistemi fisici separati da una distanza di tipo spazio non possono influenzare l'evoluzione l'uno dell'altro, restando di fatto indipendenti. Questo venne ritenuto necessario da Einstein, che mal gradiva la “spaventosa azione a distanza” che sembrava emergere dalla MQ;
- **principio di realtà (\mathcal{R}):** come specificato nell'articolo EPR [1], ci accontentiamo di un criterio sufficiente, sebbene non necessario, per descrivere gli elementi di realtà fisica. Diciamo che se, senza disturbare in alcun modo un sistema, possiamo predirne con certezza il valore di una quantità fisica, allora esiste un elemento di realtà fisica corrispondente a tale quantità fisica. Notiamo che non si tratta di una definizione a priori, ma resta legata al confronto con l'esperienza.

Questi principi sono ritenuti in modo piuttosto naturale contemporaneamente validi per la meccanica classica (MC), e si può dimostrare che così è, ma non lo faremo per brevità. Al contrario, non sono così direttamente applicabili in MQ (la meccanica classica si intende qui comprensiva della relatività), e lo vedremo nei prossimi paragrafi.

1.3 Il paradosso EPR

Assumere che tutta l'informazione di uno stato fisico sia contenuta nella sua funzione d'onda $\Psi(x)$ implica che la MQ gode di una notevole proprietà: la *completezza* (\mathcal{C}). Ciò vuol dire che a ogni elemento di realtà corrisponde un elemento della teoria, riuscendo nel compito di descrivere la natura in modo, appunto, completo.

Gli autori dell'articolo si resero conto della presenza di due affermazioni circa la MQ, che avevano la caratteristica di non poter valere contemporaneamente:

1. la descrizione della realtà data dalla funzione d'onda in MQ non è completa (i.e. la MQ non lo è);
2. due quantità fisiche descritte da operatori che non commutano non possono essere simultaneamente reali.

Occorre notare come il secondo punto assuma implicitamente la completezza della MQ, dal momento che, come abbiamo ricordato, nel suo quadro teorico due osservabili che non commutano

non possono avere autovettori comuni. Segue che queste non possono nello stesso momento “assumere” un valore predicibile con probabilità unitaria, escludendo perciò che entrambi rientrino fra gli elementi di realtà sopra definiti.

Basandosi sul *realismo locale*, ovvero ammettendo la validità di $\mathcal{R}+\mathcal{L}$, si propone un esempio di stato che oggi chiamiamo entangled, ovvero del tipo

$$|\Psi\rangle = \sum_{n,m} c_{nm} |\Phi_n^{(1)}\rangle |\Phi_m^{(2)}\rangle \quad (1.8)$$

con la condizione di non separabilità, vale a dire di non poter essere rappresentato con un solo prodotto tensoriale di stati. L’esempio principe è dato dagli stati impiegati da David Bohm e Yakir Aharonov nella loro rielaborazione del paradosso [6], oggi noti come stati di Bell, in cui la misura su ognuno dei due sistemi di cui è composto può restituire un valore $a \in \{0, 1\}$. Costruiamo per esempio lo stato

$$|\Psi\rangle_{EPR} = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} \quad (1.9)$$

in cui, prendendo in prestito il termine alla *quantum information*, chiameremo ogni ket relativo a un sottosistema *qubit*, in analogia con il calcolo binario. Si vede che se l’esito della misura sul primo qubit lo proietta sullo stato $|0\rangle$, allora il secondo sarà con probabilità unitaria nello stato $|1\rangle$, e viceversa. Se facciamo in modo allora che tali stati rappresentino una misura di spin dell’elettrone, diremo che i due elettroni sono entangled (lo stesso si può fare con molecole, oppure con la polarizzazione di coppie di fotoni).

Assumiamo ora di poter fare su ogni qubit una misura di spin lungo, ad esempio, gli assi x oppure z . Queste misure sono rappresentate dalle matrici di Pauli σ_x e σ_z che, come è noto, non commutano fra loro. Costruiamo un setup sperimentale nel quale ognuno dei due sottosistemi, a cui ci si riferisce in letteratura come Alice (A) e Bob (B), sia misurato in due apparati separati da un intervallo di tipo spazio, così da scongiurare ogni interazione reciproca consentita dalla relatività. A questo punto EPR pone l’ipotesi che la MQ sia completa (1. falsa), e che tutti i ragionamenti fatti in precedenza sullo stato entangled rappresentino la realtà. Se quindi misuro il primo qubit lungo x , allora sarò certo dell’esito della misura sul secondo lungo tale asse, elevandone la quantità a realtà fisica di tale sottosistema. Lo stesso si può dire nel caso in cui si scelga di misurare lungo l’asse z . Risulta che le quantità misurabili di spin lungo le due direzioni di B saranno contemporaneamente elementi di realtà, malgrado la MQ lo impedisca a causa della non commutatività delle due misure. Si giunge così a una contraddizione, dove ambo le proposizioni di partenza (1. e 2.) risultano false. Segue che l’ipotesi di completezza della MQ debba essere abbandonata.

Ecco come la via del realismo locale lasciò spazio solamente a una MQ non completa, aprendo a teorie che sopperiscano a questa mancanza. In particolare, una delle indicazioni conseguenti all’articolo era quella di ricercare una teoria a *variabili nascoste*, vale a dire una teoria nella

quale variabili aggiuntive rispetto alla MQ, potenzialmente impossibili da osservare, possano spiegare tutti i risultati sperimentali. Questo e altri indirizzi erano seguiti dai molti critici del mondo quantistico, poiché avrebbe potuto anche togliere di mezzo il problema del probabilismo, indigesto a una comunità di fisici forse troppo affezionati alla visione classica della meccanica.

1.4 L'idea di Bell

Ad affrontare la problematica lasciata aperta da EPR nel modo corretto fu, come accennato, John Stewart Bell. Egli rese rigorosa l'idea di una teoria a variabili nascoste, permettendo di impostare formalmente il problema e, di fatto, smentendo EPR dal punto di vista teorico.

L'idea sta nel completare la MQ mediante un parametro λ , che può essere uno scalare, un vettore, un insieme di scalari, un insieme di vettori o altre combinazioni del genere, munito di una distribuzione di probabilità $\rho(\lambda)$. Possiamo allora dire che in realtà le misure che prima apparivano con esito casuale sono ora dovute all'evoluzione temporale di questo parametro, mediante un qualche processo potenzialmente ignoto. Un'osservabile diviene così una funzione del tipo $A(\lambda)$, ed è allora ben determinabile il risultato di ogni sua misura. Il valor medio è quindi

$$\langle A \rangle = \int_{\Gamma} A(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda \quad (1.10)$$

dove Γ è lo spazio totale delle λ .

Bell riuscì così a costruire un'osservabile con la caratteristica di poter assumere valori differenti a seconda che se ne computi il valor medio come in (1.10) oppure secondo il formalismo della MQ. Rimandiamo al prossimo paragrafo la dimostrazione, dal momento che per gli scopi della tesi conviene vedere quella che fa uso del lavoro di CHSH [4], considerabile come una generalizzazione del cosiddetto *teorema di Bell*.

1.5 La dimostrazione di CHSH

Consideriamo ora due osservabili A e B con esiti di misura in $\{-1, +1\}$, la cui misurazione è effettuata in due diversi apparati (Alice e Bob). Contempliamo anche la possibilità di effettuare due tipi di misura per ognuna, che indicheremo con A_a e B_b ove $a, b \in \{0, 1\}$ (per esempio modificando l'orientazione di una misura di spin con angoli di orientazione indicizzati da a e b). Tali apparati sono separati da una distanza di tipo spazio, così da impedire comunicazioni fra i due. Ipotizziamo poi che, per motivazioni analoghe, non vi sia correlazione fra i due parametri dell'esperimento che determinano le tipologie di misura, portandoci ad affermare che anche $\rho(\lambda)$ ne sia indipendente. Costruiamo la specifica osservabile in MQ che ci consentirà di ottenere il risultato voluto:

$$\mathcal{B} \equiv A_0 \otimes B_0 + A_0 \otimes B_1 + A_1 \otimes B_0 - A_1 \otimes B_1 = A_0 \otimes (B_0 + B_1) + A_1 \otimes (B_0 - B_1) \quad (1.11)$$

che non è altro che un'opportuna combinazione di correlazioni fra le osservabili sopra definite, ricordando che i prodotti tensoriali derivano dall'aver a che fare con due sottosistemi differenti.

Se ora ammettiamo l'esistenza della teoria a variabili nascoste parametro-dipendente come quella vista nello scorso paragrafo, allora ognuna delle due quattro alternative viste potrà di fatto avere come elemento di realtà (notare come ammettiamo $\mathcal{R} + \mathcal{L}$) un valore preciso scelto fra +1 e -1. Proviamo a massimizzare l'esito della misura sulla nostra nuova osservabile, o meglio, sul suo valore assoluto. Notiamo che abbiamo due casi:

1. l'apparato di Bob misura due quantità uguali per B_0 e B_1 , quindi la seconda parentesi di (1.11) è nulla, mentre la prima vale ± 2 . Unendo questo al fatto che A_0 può dare solo ± 1 , il massimo modulo ottenibile è 2;
2. allo stesso modo, se l'apparato di Bob misura due quantità differenti, si arriva ad avere modulo con nulla la prima parentesi e ± 2 la seconda.

Giungiamo così a enunciare la disuguaglianza CHSH

$$\mathcal{S} \equiv |\mathcal{B}(\lambda)| = |A_0(\lambda)B_0(\lambda) + A_0(\lambda)B_1(\lambda) + A_1(\lambda)B_0(\lambda) - A_1(\lambda)B_1(\lambda)| \leq 2 \quad (1.12)$$

Tuttavia, se torniamo al formalismo della MQ e riprendiamo la formula (1.11), se ne può computare il valor medio $\langle \mathcal{B} \rangle_\Psi = \langle \Psi | \mathcal{B} | \Psi \rangle$, dove $|\Psi\rangle = |\Psi\rangle_{EPR}$. In particolare, indichiamo con $E(a, b) \equiv \langle A_a B_b \rangle_\Psi$ il valor medio di una delle quattro generiche correlazioni $A_a B_b$ che compongono il valor medio dell'intera osservabile definita in (1.11). Si può vedere, ma lo tralascieremo per brevità, che i parametri modificabili di \mathcal{B} possono essere scelti in modo tale da ottenere una previsione quantistica che soddisfi la relazione $|\langle \mathcal{B} \rangle_\Psi| = 2\sqrt{2}$, in aperta violazione della (1.12).

Dal punto di vista teorico, questo fondamentale risultato pose formalmente fine alle discussioni sulla rinuncia alla completezza della MQ, mantenendo i principi di realtà e località. Tuttavia, si necessitava di una conferma sperimentale del teorema di Bell, che altrimenti sarebbe potuto passare per una speculazione priva di confronto con la realtà. Come vedremo, esperimenti che confermassero l'idea di Bell non tardarono ad arrivare, seppur forieri di sottili e delicate insidie.

2. Il Bell test

2.1 Prototipo

In seguito al lavoro di Bell, la comunità scientifica si attivò subito nella corsa alla verifica (o confutazione) del risultato teorico appena conseguito. Come già detto, Bohm aveva proposto di svolgere esperimenti che impiegassero coppie di particelle di spin $s = \frac{1}{2}$ entangled, ma ci si rese subito conto che la tecnica richiesta per svolgere tali esperienze era superiore alle capacità dell'epoca. Un modo più accessibile (a posteriori e per certi versi migliore) per mettere in pratica le intuizioni di Bell era impiegare coppie di fotoni entangled, ossia la cui polarizzazione venga a costituire un singoletto quantistico. Fino ad allora solo dei timidi passi avanti erano stati fatti nella produzione e rivelazione di tali sistemi, come dimostra la scarsa letteratura in merito suggerita nell'articolo CHSH [4] parlando di approcci sperimentali. Resta comunque degno di nota l'esperimento di Carl Kocher ed Eugene Commins del 1967 [7], in cui vennero prodotti fotoni entangled nel visibile per la prima volta sfruttando la diseccitazione di atomi di calcio. Il primo vero *Bell test* fu condotto da Stuart Freedman e John Clauser nel 1972 [8] violando apertamente una versione equivalente della (1.12) e aprendo la strada a tutti gli esperimenti che negli anni seguirono.

Proponiamo ora lo schema classico e più diffuso di Bell test, evitando però di addentrarci nei molteplici dettagli degli apparati sperimentali, col fine di concentrarci solo sulla logica che ne sta alla base. Potremo così snocciolare ogni criticità concettuale che emergerà e mostrarne le soluzioni.

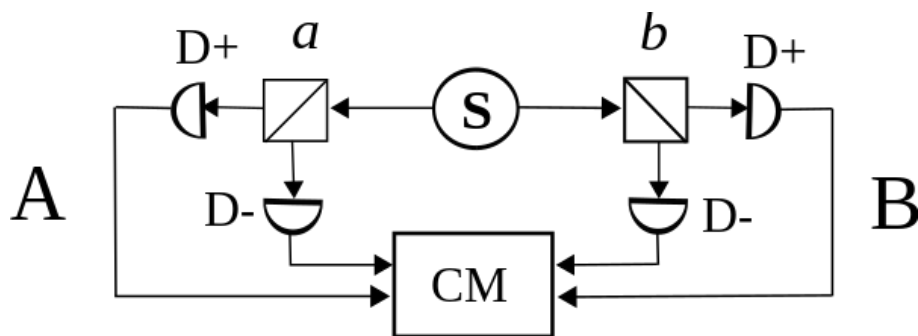


Figura 2.1: setup sperimentale basilare di un Bell test (configurazione “a due canali”).

Il principio di funzionamento è il seguente: per prima cosa una sorgente S produce una coppia di fotoni entangled. Vale la pena ricordare che dopo i lavori di Kocher e Commins [7] si è passati a metodi più affidabili per fare ciò, in particolare la *spontaneous parametric down-conversion* (SPDC) con l'utilizzo di cristalli non lineari, come la calcite. In seguito, i fotoni passano attraverso dei *beam splitter polarizzanti* (PBS) orientati in modo regolabile (a e b) e posti nei rami di Alice e Bob (A e B). Questi consentono il passaggio di fotoni polarizzati in una specifica direzione, mentre deviano la polarizzazione opposta. Dei rivelatori successivi

ai beam splitter misurano quindi lo stato di polarizzazione dei due fotoni, in base a quale dei due (D_+ oppure D_-) clicca per Alice e per Bob. Infine, un circuito di coincidenza¹ registra gli eventi che rappresentano i vari termini di (1.11), permettendone il computo².

Il risultato di un campione statisticamente rilevante di eventi permette in linea di principio di discriminare se sia avvenuta o meno una violazione delle disuguaglianze. Così Freedman e Clauser, nell'esperimento sopracitato del 1972, trovarono una violazione di oltre 6 deviazioni standard. Tale risultato non fornì loro però la prova definitiva contro il realismo locale, a causa della presenza di diversi loophole (scappatoie) che sapevano di non aver potuto eliminare, e di cui ci si sarebbe liberati del tutto (si spera) solo dopo il lavoro di molti altri fisici.

2.2 I loophole

Lo stesso John Bell già nel suo articolo originale [3] affermò, a chiosa di quanto appena trovato, che le previsioni della MQ potrebbero valere solo per apparati sperimentali in cui la scelta dei parametri dei sottosistemi fosse fatta con sufficiente anticipo da permettere una mutua comunicazione a velocità inferiori o pari a quella della luce, il tutto prima della produzione e della detezione delle particelle (o in seguito fotoni). Questo avrebbe in teoria riaperto le porte a una qualche forma di realismo locale. Gli sembrava di conseguenza cruciale porre l'attenzione su esperimenti in cui tali parametri potessero essere modificati durante il tempo di volo dei sistemi entangled. Era quindi ben conscio di quanto la località fosse un aspetto da trattare con i guanti.

Sfortunatamente, questo non era l'unico problema di un rudimentale Bell test, e negli anni successivi emersero tutti (per quanto ne sappiamo oggi) i loophole che permetterebbero l'esistenza di teorie a variabili nascoste locali. Andremo ora a osservarli da vicino, spiegando come si è riusciti a realizzare apparati sperimentali che ne fossero privi, sempre a meno di meccanismi a oggi ignoti.

2.2.1 Locality loophole

Come accennato, uno dei primi aspetti da chiarire riguardo ai Bell test è stato la località. Tutto ruota attorno al limite di velocità relativistico, che consideriamo applicabile non solo a oggetti fisici in movimento ma anche all'informazione stessa. Ecco allora che, pur senza conoscere un qualche possibile meccanismo di trasmissione dell'informazione fra i due sottosistemi A e B ,

¹Nello sviluppo dei circuiti di coincidenza non possiamo omettere il fondamentale contributo di Bruno Rossi (1905-1993), brillante fisico dell'Università degli Studi di Padova, che ne sviluppò nel 1930 la prima versione elettronica. Ampiamente utilizzato nello studio dei raggi cosmici, questo circuito costituisce l'antenato della porta logica *AND*, che sarebbe stata alla base della computazione elettronica. Purtroppo, le leggi razziali del 1938 lo costrinsero, in quanto ebreo, all'esilio negli Stati Uniti, dal quale non sarebbe più tornato.

²Per completezza, esiste anche la configurazione "a singolo canale", in cui i beam splitter sono sostituiti da filtri polarizzatori, che lasciano passare quindi solo una determinata polarizzazione. È presente qui solo uno dei due rivelatori a valle del filtro, e le varie correlazioni sono calcolate per mezzo di calcoli indiretti, facendo necessariamente delle ipotesi aggiuntive sull'apparato sperimentale, che però non approfondiremo.

vogliamo che tale scambio non possa avvenire se non a velocità superluminale, così da preservare il principio di località.

Notiamo dapprima come ogni Bell test si componga sostanzialmente di cinque eventi (intesi proprio come punti dello spaziotempo di Minkowski): la scelta dei parametri dei due apparati di rivelazione a e b , la creazione della coppia entangled e la rivelazione di quest'ultima in A e in B . Ci sono sostanzialmente due modi in cui potrebbero emergere delle correlazioni fra coppie di eventi afferenti ciascuno a uno dei due sottosistemi, e il loro insieme è noto come *locality loophole*.

Il primo, più ovvio, era stato messo in evidenza fin dagli albori del paradosso EPR, e infatti ne abbiamo già parlato: gli eventi corrispondenti agli atti di misura per i due devono avvenire a distanza di tipo spazio fra loro, cosicché l'esito di uno non possa in alcun modo (relativisticamente accettabile) influenzare l'esito dell'altro (parte superiore sinistra della figura 2.2).

Il secondo è più subdolo, e riguarda la possibile correlazione fra gli eventi di scelta di un parametro (a o b) e il processo di misura relativo all'altro ramo (B o A). Come si vede in figura 2.2, in cui linee inclinate a 45° corrispondono a oggetti di velocità c , si può impedire l'ipotetico scambio di informazione solo se la scelta di ogni parametro avviene a distanza di tipo spazio sia dall'emissione della coppia entangled che dalla rivelazione sull'altro sottosistema. Dal punto di vista matematico, presa una misura di correlazione $p(A, B|a, b)$, potremmo avere una teoria a variabili nascoste (locale) con probabilità non fattorizzabili, ovvero

$$p(A, B|a, b) = \int \rho(\lambda)p(A, B|a, b, \lambda) d\lambda \neq \int \rho(\lambda)p(A|a, \lambda)p(B|b, \lambda) d\lambda \quad (2.1)$$

e questo aprirebbe alla possibilità di mimare con essa le previsioni della MQ.

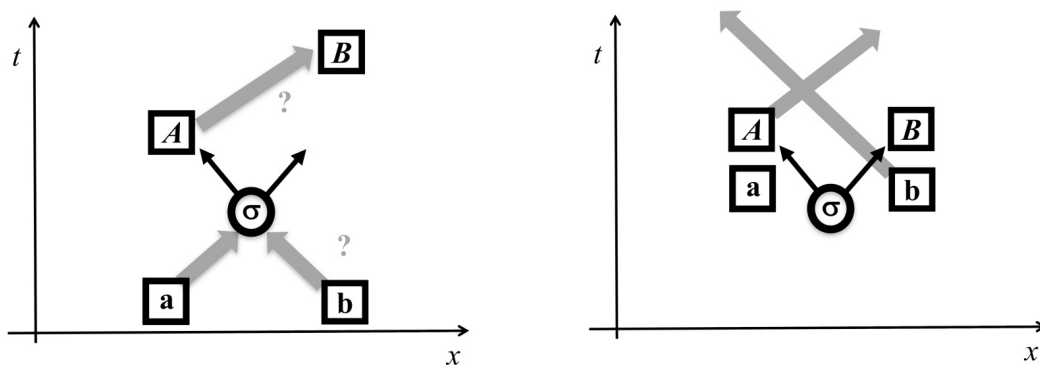


Figura 2.2: due diverse run di un Bell test: nel primo caso sono presenti due punti deboli in quanto a località, mentre nel secondo sono stati rimossi. Esempi proposti da David Kaiser [9].

La cosiddetta *chiusura del loophole* è stata realizzata per la prima volta dal gruppo di Alain Aspect in un ciclo biennale di esperimenti conclusi nel 1982 [10]. Il punto cruciale

dell'esperimento fu creare sia per Alice che per Bob due diversi canali di detezione con parametri (angoli di polarizzazione) fissati, (a, a') per Alice e (b, b') per Bob, facendo in modo che durante il "volo" dei fotoni uno switch decidesse verso quale dei due canali indirizzare ognuno. Tali modifiche vennero implementate di modo che l'intervallo di tempo fra produzione e detezione fosse di $20 ns$, mentre gli switch dei canali invertissero orientazione in modo asincrono ogni $10 ns$, tenendo le varie sezioni sufficientemente lontane da garantire distanze di tipo spazio fra loro. Gli eventi di Alice e Bob erano ora completamente all'oscuro l'uno delle azioni dell'altro, eliminando quasi del tutto le problematiche appena discusse. Il gruppo di Aspect trovò una violazione delle disuguaglianze di 5 deviazioni standard³.

Se si pone attenzione, si può però vedere come la scelta dei parametri avvenga in modo pseudo-casuale, essendoci una certa periodicità nella loro assegnazione. Inoltre, alcune correlazioni potrebbero emergere dal fatto che le varie parti dell'apparato siano controllate dai medesimi circuiti. Queste e simili sottigliezze vennero negli anni eliminate, permettendo di estirpare alla radice il problema e di non considerare più questo loophole come causa della violazione

2.2.2 Fair sampling loophole

Nel giro di circa quindici anni dopo le esperienze di Aspect, il locality loophole era del tutto sotto controllo, ma gli stessi fisici impegnati in questo compito suggerirono un'altra possibile scappatoia: i fotoni rivelati potrebbero non costituire un campione statisticamente valido per trarre conclusioni sulla violazione o meno delle disuguaglianze, dal momento che l'efficienza dei detector non permette di rilevarne una gran quantità (alcuni apparati raccoglievano solo il 5% dei fotoni emessi dalla sorgente). Sarebbe insomma potuto esistere un meccanismo nascosto (oppure mera "sfortuna statistica") secondo il quale ai detector arrivassero solo la particolare frazione di fotoni che conduceva alla violazione delle disuguaglianze. Al contrario, considerando la totalità dei fotoni, queste sarebbero state rispettate. Tale problema prende il nome di *fair sampling loophole*.

La possibilità di non rilevare dei fotoni che tuttavia sono stati emessi dalla sorgente portò all'idea di sviluppare apparati cosiddetti *event-ready*, in cui all'emissione di una coppia di fotoni corrisponde un segnale che ne testimonia la presenza, sia che questi vengano o meno rilevati. Sorge qui il problema di realizzare un tale apparato, soprattutto per la delicatezza che avrebbe richiesto, dal momento che si sarebbe dovuto mantenere intatto l'entanglement pur effettuando una misura di presenza delle particelle. Si può qui ricorrere a una semplificazione, e un banale calcolo può indicare la via da seguire, suggerendo che esiste un modo di chiudere anche questo loophole. Consideriamo che ambo i rivelatori abbiano efficienza costante η (con $0 \leq \eta \leq 1$), corrispondente alla probabilità di fornire un esito valido. La probabilità di non

³Di fatto, questo esperimento viene oggi considerato da molti come la prima seria conferma sperimentale delle idee di Bell, principalmente per il fatto che risolse (almeno in prima approssimazione) anche l'unico aspetto che per John Bell stesso poteva rappresentare un punto debole del suo lavoro.

rilevare correttamente un evento sarà allora $1 - \eta$. Considerandoli insieme, η^2 è la probabilità che entrambi diano risultato valido, $\eta(1 - \eta)$ che solo uno dei due lo dia e $(1 - \eta)^2$ che nessuno lo dia.

Riprendiamo ora i valori medi $E(a, b)$ visti alla fine del capitolo precedente, che è possibile ridefinire in questo ambito come

$$E(a, b) \equiv \sum_{A, B = \pm 1} \frac{A_a B_b N_{ab}^{AB}}{N_{ab}^{tot}} \quad (2.2)$$

dove N_{ab}^{tot} è il numero totale di coppie di fotoni entangled prodotte per una data scelta dei parametri (a, b) , mentre N_{ab}^{AB} è il numero di coincidenze rivelate per le quali $A, B \in \{+1, -1\}$. Infatti, ci interessa qui andare a studiare e analizzare i possibili esiti di un esperimento, non le previsioni che la MQ ci può offrire, quindi ci accontentiamo di una definizione empirica basata sui conteggi che di volta in volta si possono registrare.

Se vogliamo introdurre l'efficienza dei detector, dovremo modificare la definizione come segue:

$$E'(a, b) = \sum_{A, B = \pm 1, 0} \frac{A_a B_b N_{ab}^{AB}}{N_{ab}^{AB}} \quad (2.3)$$

in cui ora si può avere $A = 0$ ($B = 0$) nel caso in cui il detector di Alice (Bob) dia esito nullo. Se tralasciamo poi il caso, comunque inosservabile, nel quale entrambi i rivelatori non clicchino, abbiamo la relazione

$$E'(a, b) = \frac{N_{ab}^{double}}{N_{ab}^{double} + N_{ab}^{single}} E(a, b) = \frac{\eta}{2 - \eta} E(a, b) \quad (2.4)$$

nella quale abbiamo il numero di misure di coincidenza $N_{ab}^{double} = \eta^2 N_{ab}^{tot}$ e il numero di misure concludenti da parte di uno solo dei due rivelatori $N_{ab}^{single} = 2\eta(1 - \eta)N_{ab}^{tot}$ ⁴. A questo punto si può definire la quantità \mathcal{S}' dipendente dalle nuove correlazioni, che si può dimostrare soddisfare nuovamente $\mathcal{S}' \leq 2$. Tornando allora all'originale \mathcal{S} e tenendo a mente le nuove normalizzazioni, si giunge alla forma di (1.12) valida per detector inefficienti

$$\mathcal{S} \leq \frac{4}{\eta} - 2 \quad (2.5)$$

Si osserva come, tornando al caso idealizzato in cui $\eta = 1$, si ritrova la disuguaglianza originaria. Altro aspetto fondamentale è che un valore molto piccolo di efficienza porterebbe il membro di destra a superare $2\sqrt{2}$, così da impedire di discriminare fra una violazione della disuguaglianza e un effetto parassita dovuto all'inefficienza dei detector impiegati. Vogliamo cioè che il membro di destra non superi tale valore, e anzi ne sia il più lontano possibile. Questa condizione impone che i nostri detector abbiano $\eta_{det} \geq \eta^* = 2(\sqrt{2} - 1) \approx 82.8\%$. Avremo allora un'aperta

⁴Il fattore 2 è dovuto al fatto che il rivelatore che non produce un esito potrebbe essere sia il primo che il secondo.

violazione della disuguaglianza solo se il valore osservato soddisfa la (2.5) con $\eta = \eta_{det}$ ⁵.

L'identificazione di questo loophole può essere fatta risalire ai primissimi anni '70, tuttavia apparve chiaro fin dal principio come la difficoltà di chiuderlo fosse di molto superiore rispetto a quella del locality loophole. Si dovette aspettare infatti il nuovo millennio per ottenere risultati incoraggianti. Fra il 2001 e il 2013 svariati esperimenti vennero condotti col fine di attaccare questa scappatoia, riuscendoci in modo egregio e raggiungendo efficienze anche del 98% in certi casi. Raggiungere efficienze elevate aveva però l'effetto di tralasciare completamente la chiusura del locality loophole, che restava in agguato. Soltanto nel 2015 alcuni esperimenti furono in grado di chiuderli entrambi contemporaneamente, osservando violazioni delle disuguaglianze di diverse deviazioni standard.

2.2.3 Freedom-of-choice loophole

Nella sezione 1.5 abbiamo visto una dimostrazione del teorema di Bell, del tutto equivalente a quella originaria. È stata però fatta un'assunzione che, per quanto velata (Bell non l'aveva mai presa in considerazione, ed era emersa nel 1976 grazie a Shimony, Horne e Clauser [11]), potrebbe potenzialmente essere la falla più grande vista finora. Si era quasi glissato infatti sull'indipendenza di $\rho(\lambda)$ dai parametri dell'esperimento, cioè considerando che $\rho(\lambda) = \rho(\lambda|a, b)$. Al contrario, nulla vieta che le due quantità differiscano, e che quindi le variabili nascoste possano essere legate a doppio filo anche all'apparente casuale (diremo a volte libera, con l'opportuna accezione) scelta dei parametri dell'esperimento. Parleremo in questo caso di *freedom-of-choice loophole*.

Potrebbe sembrare a prima vista una reinterpretazione del locality loophole, ricordando le correlazioni già incontrate in quella trattazione. Invece ci troviamo su un terreno completamente diverso, dal momento che è indifferente che valga o meno la relazione (2.1) di (non)località, e conta solo un (come al solito ipotetico ma a priori possibile) meccanismo che predetermini la scelta dei parametri. Già la facilità di travisare il nocciolo del problema evidenzia quanto sia arduo comprenderlo appieno e, a fortiori, affrontarlo sperimentalmente. Inoltre, in un acuto lavoro del 1988 Carl Brans [13] è riuscito a sviluppare una teoria a variabili nascoste basata sul realismo locale che sfrutta questo aspetto per mimare le previsioni della MQ. Ulteriori sviluppi della questione hanno portato ad affermare che perfino lievissime correlazioni fra i parametri dell'esperimento e il parametro nascosto bastino a replicare tali previsioni per stati massimamente entangled come quelli di Bell.

I metodi utilizzati per chiudere questo loophole si dividono in due categorie, dettate in parte anche dal gusto filosofico col quale si intende il problema, come si intuisce direttamente dal nome. C'è chi ritiene che la fonte di casualità per eccellenza sia il libero arbitrio umano, imbastendo esperimenti come la BIG Bell Test Collaboration nel 2018, in cui volontari (tan-

⁵E' interessante il fatto che all'aumentare del numero di sottosistemi (e.g. Alice, Bob e Charlie o anche di più) diminuisca l'efficienza minima richiesta, tendendo asintoticamente al 50% per un loro numero infinito, proprietà sfruttata per esempio con stati entangled di tre qubit (stati GHZ) [11].

ti volontari, fino a 100000) hanno immesso dati (pseudo)casualmente mediante un videogame appositamente progettato [12]. Oppure, altri hanno posto questa speranza nelle fluttuazioni luminose di stelle o altri oggetti astronomici dello spazio profondo (i cosiddetti *cosmic Bell test*). In entrambi i casi, l'argomentazione del loophole potrebbe continuare a inficiare i test se ammettiamo che tutta la realtà fisica presenti correlazioni ancestrali riconducibili almeno al tempo del Big Bang, una visione detta *superdeterminismo*. Sostenere questa posizione porterebbe però, come ben descritto in [11] e [12], all'impossibilità di fare scienza basandosi su risultati empirici, che perderebbero di significato e sarebbero falsati dalla ragnatela di correlazioni che permea l'universo. Alla luce di questo, sia l'impiego di libero arbitrio umano che di sorgenti cosmiche appare un buon modo per chiudere il loophole, e ambo i metodi hanno portato a violare le disuguaglianze di diverse deviazioni standard.

2.2.4 Altri loophole

Non si pretende che la trattazione qui esposta sia comprensiva di ogni possibile loophole relativo ai Bell test, né si ritiene che sia possibile affermare con certezza che ne sia stato trovato un numero massimale. Effetti di memoria, di mancata coincidenza, di postselezione e altri possono entrare in gioco e permettere l'applicazione di teorie a variabili nascoste (per approfondire si rimanda a [11]). A ogni modo, il lungo cammino nello studio dei loophole sembra aver portato a un quadro ampio a sufficienza da poter affermare, con un livello di confidenza davvero molto elevato, che una visione di realismo locale sia del tutto insostenibile. Cade così il mito che il paradosso EPR ha cercato di inseguire per quasi un secolo, lasciando però sul suo cammino terreno fertile per nuove scoperte e nuove applicazioni della MQ, in primis il calcolo quantistico e la crittografia quantistica.

3. Asymmetric Bell test

3.1 La necessità di un test asimmetrico

Le molteplici difficoltà legate all'implementazione pratica di un test di Bell hanno messo a dura prova generazioni di fisici, giungendo finalmente a un livello di precisione tale da poterne trarre delle conclusioni con un soddisfacente livello di confidenza. È inevitabile che questo processo abbia richiesto lo sviluppo di nuove tecnologie, oltre che di metodi innovativi per attaccare il problema già sul piano teorico.

Le successive modifiche agli apparati sperimentali, diventati via via sempre più intricati e ricchi di componenti, hanno fatto emergere configurazioni interessanti, fra cui spiccano gli *asymmetric Bell test*, ovvero Bell test in cui le sezioni di Alice e Bob non sono più speculari, o comunque simili, ma deliberatamente differenti fra loro. Proprio come si era notato che un numero maggiore di sottosistemi era in grado di permettere soglie di efficienza inferiori [11], anche questo nuovo tipo di esperimento ha mostrato interessanti comportamenti che vale la pena approfondire.

A dare una forte spinta allo studio di simili setup è stato lo sviluppo della quantum information, che li vede come un possibile modo di studiare i *canali quantistici*. Per la precisione, col termine canale quantistico intendiamo propriamente un processo fisico, anche non unitario, che trasforma uno stato ρ di partenza in uno stato ρ' finale. Al di là del formalismo, si tratta proprio di un canale attraverso cui trasmettere l'informazione mediata da processi quantistici, come suggerisce il nome.

Alla luce anche del *no-cloning theorem*¹ diviene fondamentale avere un metodo di trasmettere informazioni a distanza in modo fedele ed efficiente. La modalità di nostro interesse fa uso di una coppia atomo-fotone fra di loro entangled, creata per la prima volta con sufficiente confidenza nel 2004 da Boris B. Blinov *et al.* fra ioni $^{111}\text{Cd}^+$ e i fotoni da questi emessi per diseccitazione a partire dallo stato $^2\text{P}_{3/2}$ con $|J, m_J\rangle = |2, 1\rangle^2$ [14]. Lo stato complessivo risultante era

$$|\Psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|H \uparrow\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|V \downarrow\rangle \quad (3.1)$$

rappresentante quindi un sistema entangled in cui alla polarizzazione orizzontale $|H\rangle$ del fotone corrisponde lo stato finale dello ione $^2\text{S}_{1/2}$ con $|1, 0\rangle$ (indicato con $|\uparrow\rangle$), mentre alla polarizzazione verticale $|V\rangle$ corrisponde lo stato $^2\text{S}_{1/2}$ con $|1, 1\rangle$ (indicato con $|\downarrow\rangle$). L'importanza di questo risultato risiede nel fatto che possiamo immaginare lo ione come contenitore dell'informazione con cui vogliamo andare a operare (lo stato), e quindi considerarlo la *memoria* del nostro computer quantistico, mentre il fotone è proprio il trasportatore di tale informazione, andando

¹Questo teorema mostra che non esiste alcun operatore unitario in grado di creare una copia identica di uno stato sconosciuto senza distruggerlo, impedendo di fatto che le due copie esistano simultaneamente.

²Indichiamo con J il numero quantico relativo al momento angolare totale, mentre con m_J la sua proiezione sull'asse di quantizzazione scelto.

a realizzare un canale attraverso cui trasmetterla.

Il collegamento con l'asymmetric Bell test è più stretto di quello che sembri: la caratterizzazione principale del sistema atomo-fotone risiede nel fatto di avere lo stato di una delle due componenti soggetto a una bassa efficienza di determinazione (fotone), mentre l'altra componente (atomo) presenta uno stato con tale efficienza nettamente superiore. Quindi la coppia atomo-fotone può essere ben mimata da una coppia fotone-fotone (ci sono altre combinazioni, ma sono minoritarie) nella quale si riesce ad assegnare un marcato squilibrio di efficienza nella detezione dei due. Bell test del genere sono quindi adatti a simulare uno scambio di informazione che utilizzi il metodo esposto poco fa, permettendo di studiare cosa accade precisamente al sistema in esame per quanto riguarda non-località ed entanglement.

3.2 Inefficienza e rumore

Nella sezione 2.2.2 avevamo affrontato il problema dei detector inefficienti facendo l'assunzione che ambo i detector di un Bell test possedessero il medesimo grado di efficienza η . Siamo ora però entrati nel campo degli asymmetric Bell test, il cui fulcro è proprio la rottura di questa simmetria. Viene allora naturale chiedersi sotto quali condizioni sia possibile violare le disuguaglianze CHSH (a meno di riformulazioni equivalenti). Come mostrato, fra gli altri, da Cabello e Larsson [15], risulta sufficiente manipolare il processo che porta alla (2.5) introducendo le due diverse efficienze η_A ed η_B . Si giunge così alla condizione

$$\eta_B > \frac{\eta_A}{3\eta_A - 1} \quad (3.2)$$

Considerando perciò $\eta_A = 1$, ovvero il caso in cui Alice effettua misure sempre conclusive ed efficienti, abbiamo $\eta_B > 0.5$ per Bob³. Possiamo ora giustificare matematicamente perché questo setup sia in grado di garantire vantaggi non indifferenti e proprietà interessanti. Anzitutto, tornando all'implementazione atomo-fotone, la misura dello stato dello ione può davvero sfiorare l'efficienza unitaria, interfacciandosi bene con il modello appena proposto. Secondariamente, il solo fatto di avere questa alta efficienza per Alice fa crollare drasticamente l'efficienza richiesta alla misura di Bob per far sì che le disuguaglianze vengano violate in assenza del fair-sampling loophole. Questi risultati sono di certo sorprendenti, soprattutto per chi si è sempre affidato al setup originale. Infatti, una delle difficoltà principali era quella di chiudere più loophole allo stesso tempo, ma l'alta efficienza richiesta nella detezione dei fotoni rischiava di compromettere la riuscita stessa dell'intero esperimento.

³Viene mostrato nell'articolo di Brunner *et al.* [16] come un setup con maggiori scelte di parametro, in particolare la disuguaglianza di Bell I_{3322} con 3 scelte di parametro sia per Alice che per Bob, permetta di abbassare ulteriormente il limite inferiore, arrivando a $\eta_B > 0.43$ per $\eta_A = 1$. Si fa notare come questo risultato e quello in [15] siano i primi risultati di tale specie, e che curiosamente gli autori ci siano arrivati contemporaneamente ma in modo indipendente.

Si può analogamente considerare l'impatto di un rumore di fondo sul nostro test, andando a considerare per esempio un fondo bianco che origini false letture sull'apparato in una certa percentuale dei casi P_N . È così possibile andare a valutare correzioni atte a evitare falsi risultati, come un'aggiunta al fair-sampling loophole. La sua incidenza è tuttavia più limitata, e comunque una trattazione approfondita esulerebbe dagli scopi di questa trattazione. Per approfondire la questione, oltre che per consultare un quadro riassuntivo sugli errori in varie tipologie di Bell test, si rimanda a un completo articolo di Garbarino [17].

3.3 Un esempio

Descriviamo ora come le idee appena esposte vengano realizzate sperimentalmente. Analizzeremo in particolare una recente esperienza di Zhu *et al.* [18] che implementa un modo ingegnoso per simulare misure affette da inefficienza. L'apparato sperimentale, mostrato in figura 3.1, si basa sostanzialmente sul modello classico di Bell test a due canali con coppie di fotoni entangled.

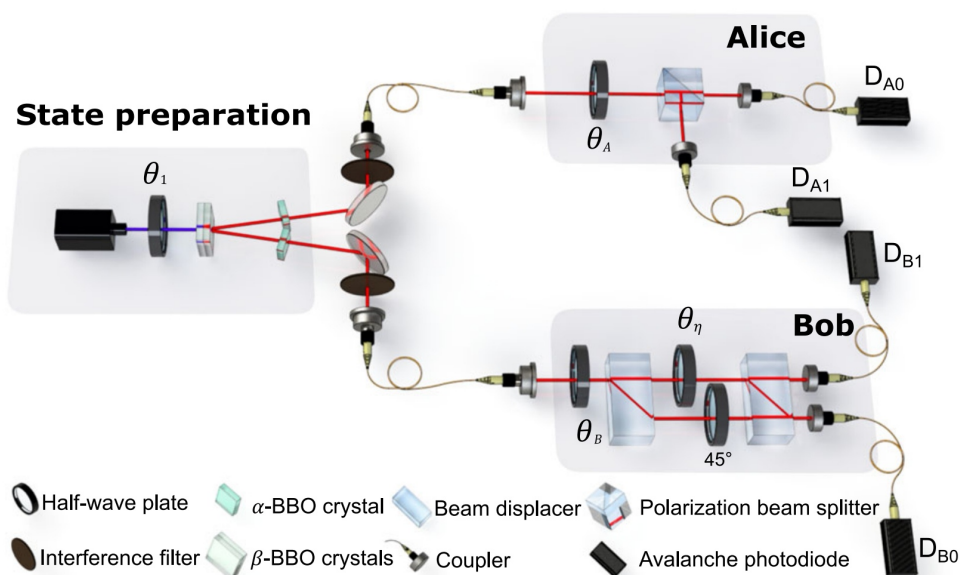


Figura 3.1: Setup dell'esperimento esposto in [18].

Nella parte sinistra vediamo la preparazione del sistema entangled, il quale viene realizzato attraverso parametric down-conversion mediante due cristalli di β -borato di bario (BBO). La sorgente di fotoni su cui agisce è un diodo laser a 404 nm il cui fascio passa prima attraverso una lamina a mezz'onda (half-wave plate HWP) di angolo $\theta = \frac{1}{2}\arcsin(a)$. Gli stati risultanti sono quindi

$$|\phi\rangle = a |HH\rangle + \sin(\arccos(a)) |VV\rangle \quad (3.3)$$

che vediamo essere degli stati ben definiti, dal momento che vale la relazione trigonometrica $\sin(\arccos(a)) = \sqrt{1 - a^2}$, da cui $a^2 + \sin^2(\arccos(a)) = 1$ e quindi sono normalizzati. Il para-

metro che definisce l'angolo deve, per motivi di dominio, soddisfare $a \in [-1, 1]$, e si può così ottenere una qualsiasi mescolanza dei due stati $|HH\rangle$ e $|VV\rangle$, utile a riprodurre tutti i possibili stati entangled di un sistema di due fotoni.

I due fotoni sono quindi inviati uno nel ramo di Alice e l'altro in quello di Bob. Si tratta di un asymmetric Bell test, quindi questi rami sono fra loro differenti. Nello specifico, il sottosistema di Alice è quello a cui siamo abituati, vale a dire una misura di polarizzazione lungo un certo angolo θ_A (uno dei due parametri dell'esperimento più volte discussi nelle sezioni precedenti) effettuata grazie a un beam splitter polarizzante e due rivelatori che cliccano nel ricevere un fotone. La misura è di tipo proiettivo, come tutte quelle già incontrate. Per un motivo che sarà chiaro quando descriveremo la misura di Bob, ci serviamo del linguaggio dei POVM per descriverla, ottenendo per Alice i proiettori⁴

$$\Pi_{0|x}^A = \frac{1}{2} (\mathbf{1} + \hat{a}_x \cdot \hat{\sigma}) \quad (3.4)$$

$$\Pi_{1|x}^A = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \hat{a}_x \cdot \hat{\sigma}) \quad (3.5)$$

dove la proiezione è stata scomposta in serie di matrici di Pauli, rappresentate qui in un unico vettore $\hat{\sigma} = \sigma_x \hat{x} + \sigma_y \hat{y} + \sigma_z \hat{z}$. Ci troviamo in uno spazio bidimensionale, in accordo con il fatto di poter ottenere i due esiti di polarizzazione del fotone. Consideriamo questa misura come quella priva di inefficienza.

La misura di Bob deve invece essere affetta da inefficienza. È ancora presente un HWP che permette di effettuare la misura lungo un asse ottico θ_B (il secondo parametro regolabile), ma a valle di esso c'è ora un *interferometro di Mach-Zehnder*, realizzato con due *beam-displacer polarizzanti* (BD)⁵ e due HWP. Questi ultimi sono posti uno a 45° , ruotando l'asse di polarizzazione di 90° , mentre il secondo a un angolo θ_η . Si viene così a creare un'interferenza del fotone con se stesso fra i due rami dell'interferometro (quello superiore e quello inferiore), che varia a seconda del valore θ_η . Dal punto di vista matematico, non abbiamo più una misura proiettiva, bensì un più generico POVM, così composto

$$\tilde{\Pi}_{0|y}^B = \frac{\eta}{2} (\mathbf{1} + \hat{b}_y \cdot \hat{\sigma}) + (1 - \eta) \mathbf{1} \quad (3.6)$$

$$\tilde{\Pi}_{1|y}^B = \frac{\eta}{2} (\mathbf{1} - \hat{b}_y \cdot \hat{\sigma}) \quad (3.7)$$

La tilde sopra le componenti del POVM ricordano che non abbiamo più proiettori, cosa di cui ci si può facilmente convincere notando che non sono idempotenti, al contrario degli analoghi per Alice.

⁴Attenzione agli indici delle componenti del POVM, che è utile specificare una volta per tutte: in apice abbiamo il riferimento ad Alice oppure Bob, il primo pedice indica la componente ordinata del POVM, mentre il secondo pedice $x, y \in \{0, 1\}$ discrimina fra le due possibili orientazioni della misura fatta in quel sottosistema.

⁵I BD agiscono similmente ai PBS, con la differenza di non deviare il fascio, ma dislocarlo (displace in inglese), dando origine di fatto a due fasci paralleli con opposte polarizzazioni.

Nei proiettori η è proprio l'inefficienza del nostro rivelatore, la cui origine verrà chiarita a breve. Consideriamo infatti la classica osservabile di Bell descritta in (1.11), in cui ora definiamo $A_x = \Pi_{0|x}^A - \Pi_{1|x}^A$ e $B_y = \tilde{\Pi}_{0|y}^B - \tilde{\Pi}_{1|y}^B$. Si può vedere come la nuova osservabile di Bell che ne deriva è della forma

$$\mathcal{B}_1 = \eta\mathcal{B} + 2(1 - \eta)\sigma_z \otimes \mathbf{1} \quad (3.8)$$

dove σ_z è la terza matrice di Pauli. È evidente come η svolga effettivamente il ruolo dell'efficienza, dal momento che gli esiti non nulli, descritti da proiettori come quelli di Alice, sono per Bob pesati con η . Analogamente, l'esito nullo è espresso matematicamente da una matrice densità multipla dell'identità⁶, che nel POVM di Bob è infatti pesata dal fattore $(1 - \eta)$.

Diciamo ora che vale la relazione $\theta_\eta = \arccos \sqrt{\eta}/2$, così da riconoscere nell'angolo θ_η il parametro dell'apparato sperimentale che va a regolare l'inefficienza. Si può vedere quanto appena detto studiando le *matrici di Jones* che descrivono l'azione degli HWP unita a quella dei BD: su vettori bidimensionali che rappresentano lo stato di polarizzazione di un fotone del tipo

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

un HWP di angolo θ agisce come la matrice di Jones

$$M_{HWP}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

mentre un BD agisce dividendo la funzione d'onda in due parti, una in cui resta solo la prima entrata del vettore e una in cui resta solo la seconda. Dal calcolo risultano le probabilità di click dei due detector di Bob:

$$P(D_{B1}) = \cos^2(2\theta_\eta)[\alpha \cos(2\theta_B) + \beta \sin(2\theta_B)]^2 \quad (3.11)$$

$$P(D_{B0}) = \alpha^2[\sin^2(2\theta_B) + \sin^2(2\theta_\eta) \cos^2(2\theta_B)] + \beta^2[\cos^2(2\theta_B) + \sin^2(2\theta_\eta) \sin^2(2\theta_B)] \\ + 2\alpha\beta \sin(2\theta_B) \cos(2\theta_B)[\sin^2(2\theta_\eta) - 1] \quad (3.12)$$

Ci possiamo convincere quindi che la relazione che collega θ_η a η sia corretta, sostituendola nelle probabilità appena ricavate. Si ottengono così, ricordando le proprietà trigonometriche già rievocate, le espressioni

$$P(D_{B1}) = \eta^2[\alpha \cos(2\theta_B) + \beta \sin(2\theta_B)]^2 \quad (3.13)$$

$$P(D_{B0}) = 1 - \eta^2[\alpha \cos(2\theta_B) + \beta \sin(2\theta_B)]^2 \quad (3.14)$$

⁶Ci si può convincere di questo andando a calcolare quale debba essere la matrice densità di uno stato massimamente misto, vale a dire uno stato in cui la distribuzione di probabilità degli stati che vengono mescolati è uniforme. Ogni possibile stato è equamente probabile, perciò la nostra ignoranza sul sistema è la massima possibile e non possiamo trarre alcuna conclusione circa lo stato in cui il sistema si trovi.

nelle quali è evidente il ruolo di η come efficienza nel senso visto prima.

Mettiamo finalmente insieme i risultati ottenuti. Se l'efficienza è massima, vale a dire $\eta = 1$ ($\theta_\eta = 0$), ricadiamo nella misura proiettiva di Alice. Se invece l'efficienza è minima, ovvero $\eta = 0$ ($\theta_\eta = \pi/4$), si avrà con probabilità unitaria un click in uno dei due rivelatori, qualunque sia lo stato di partenza. In questo secondo caso riconosciamo una misura totalmente priva di informazione, dal momento che è impossibile fare inferenze sullo stato del fotone incidente, ed è espressa nel formalismo dalla matrice unità sopracitata. Le sfumature intermedie, con $0 < \eta < 1$, coprono tutti gli altri casi, in cui la perdita di informazione cresce monotonamente al crescere dell'inefficienza.

Si è così realizzato un apparato che mima la presenza di inefficienza e che, permettendone la fine variazione, consente di analizzare quanto questa influisca sui processi tipici dei Bell test.

Conclusioni

Abbiamo ripercorso quello che è stato il processo che ha portato dalla nascita di un'idea, ovvero l'argomento EPR, fino al suo declino per mezzo di numerosi esperimenti. Nato come tentativo di minare le fondamenta stesse della Meccanica Quantistica, il paradosso ha fin da subito incontrato grossi ostacoli, primo dei quali il genio di Niels Bohr.

Per arrivare invece a un approccio pragmatico della sua trattazione ci sono voluti parecchi decenni, nei quali sembrava che fosse destinato a restare nel limbo delle speculazioni filosofiche. John Stewart Bell ha infine aperto un ramo di indagine sperimentale di mirabile fertilità, permettendo a generazioni di fisici di confrontarsi con le insidie del cosiddetto Bell test, ovvero i loopholes. Contestualmente, gli autori delle disuguaglianze CHSH e altri hanno permesso una formulazione snella del problema e facilmente comparabile con evidenze empiriche. Come abbiamo visto, per quanto i loopholes sembrassero ardui da trattare, alla fine pare che la comunità scientifica ne sia venuta a capo, mettendo una grossa pietra sul realismo locale e aprendo quindi alle molteplici alternative che la fisica e la fantasia dei fisici suggeriscono.

Avere finalmente una risposta al dibattito sul paradosso EPR è di certo una conquista di grande importanza. Notiamo però a posteriori come lo sviluppo della MQ si sia protratto per decenni anche in assenza di questo risultato, senza mai incappare in problematiche la cui soluzione ne dipendesse direttamente, almeno sul piano più sperimentale e meno speculativo. Questo suggerisce di approfondire la questione e, per esempio, il fatto che la MQ funzioni bene anche senza avere una soluzione condivisa al celeberrimo esperimento mentale del gatto di Schrödinger è solo uno dei tanti elementi in più che deve mettere in guardia chi si occupa di studiare i fondamenti di questa disciplina. Questo tipo di problemi appaiono oggi come un cruciale punto debole della teoria, e la loro trattazione ha il potenziale per aprire le porte a interessanti nuove teorie.

Come sempre accade quando si effettua ricerca in modo intensivo su di uno specifico argomento, si hanno avuti come sottoprodotto una serie di fondamentali avanzamenti nella tecnologia, in particolare nell'ottica quantistica e nella produzione di sistemi entangled. Ci siamo concentrati in questa tesi su di una applicazione specifica, ovvero gli asymmetric Bell test, considerandone sia lo sviluppo teorico che vedendone una recente realizzazione. Tali setup sono utili non solo alla ricerca di violazioni delle disuguaglianze CHSH in contesti differenti da quelli usuali, ma sono anche di grande rilevanza per la quantum information e per lo sviluppo di computer quantistici. Proprio queste interessanti innovazioni potrebbero contribuire in futuro a sciogliere i dubbi accennati poco fa e non solo.

A. Inefficienza ed entanglement

Dopo aver visto come realizzare un asymmetric Bell test, vogliamo per completezza trattare il rapporto che questo tipo di esperimento ha con le misure di entanglement, cosa che è di fatto il fine ultimo dell'articolo [18] incontrato in precedenza. Lo scopo della ricerca era infatti studiare quanto le disuguaglianze CHSH venissero violate al variare della quantità di entanglement del sistema. Potrebbe sembrare in prima battuta ovvio ritenere che per un sistema maggiormente soggetto a questo fenomeno si abbiano violazioni più marcate, dal momento che da sempre nella MQ entanglement è sinonimo di effetti contrari al realismo locale. Questo argomento, quasi euristico, regge bene se consideriamo un Bell test tradizionale, ma si hanno invece risultati meno banali nel momento in cui andiamo a considerare un asymmetric Bell test.

Ci sono diversi modi per quantificare l'entanglement in un sistema, ma nell'articolo si sceglie il parametro più adatto al caso di due qubit, la *concurrence*. Questa si definisce come segue

$$\mathcal{C}(\rho) \equiv \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\} \quad (\text{A.1})$$

dove $\{\lambda_i\}_{i=1,\dots,4}$ sono gli autovalori (in ordine decrescente) della matrice $R \equiv (\rho\sigma_y^{\otimes 2})^2$. Quello che interessa ai fini di questa trattazione è che tale misura di entanglement è monotona crescente, da un minimo $\mathcal{C}(\rho) = 0$ per stati separabili fino a un massimo $\mathcal{C}(\rho) = 1$ per stati massimamente entangled, come lo stato di Bell. Forti di questo strumento, si è voluto indagarne i rapporti con la presenza o meno di inefficienza nel Bell test.

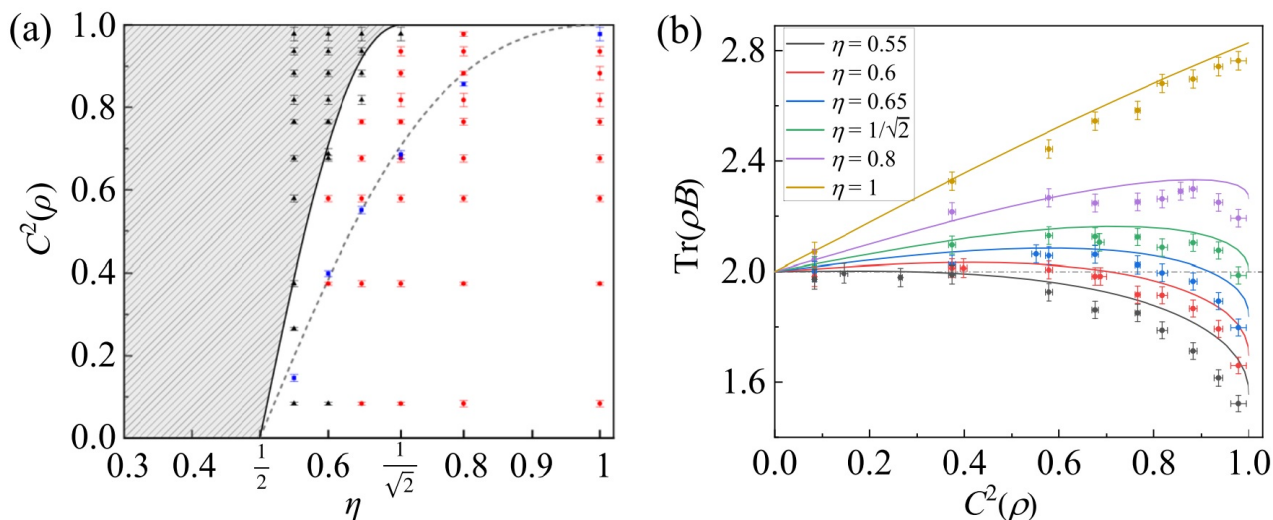


Figura A.1: Risultati dell'asymmetric Bell test riportato in [18]. In (a) vediamo il quadrato della concurrence contro l'efficienza, mentre in (b) il valor medio dell'osservabile di Bell \mathcal{B}_1 contro il quadrato della concurrence.

Per fare ciò, si sono ripetute una serie di run dell'esperimento tenendo fissa di volta in volta l'efficienza dell'apparato di Bob (ricordiamo che è regolata dall'angolo θ_η) e variando

la quantità di entanglement della coppia di fotoni. Si possono allora andare a graficare due quantità differenti in relazione al quadrato della concurrence.

Il primo (figura A.1a) mostra il quadrato della concurrence in funzione dell'efficienza. La linea nera continua è il limite teorico fra le combinazioni delle due quantità che possono portare (a destra) o meno (a sinistra) alla violazione delle disuguaglianze CHSH. La linea nera tratteggiata è invece l'andamento teorico dei punti che portano alla loro massima violazione. I triangoli neri sono quindi quelli che sperimentalmente non le violano, i pallini rossi quelli che le violano, mentre i pallini blu quelli che le violano massimamente. Osserviamo come un'efficienza sotto il 50% non permetta in alcun modo di violare le disuguaglianze, mentre da quel livello di efficienza in poi la possibilità di farlo aumenta sempre più. Addirittura, dopo $\eta = 1/\sqrt{2}$ è possibile violarle con qualsiasi quantità di entanglement, anche nello stato massimamente entangled. Questo risultato non è però in grado di darci molte informazioni. Si vede che una maggiore efficienza aiuta a violare le disuguaglianze, cosa che ha senso dal momento che ora sappiamo che in condizioni ideali la natura agisce in tal modo. Risulta degno di nota solo il fatto che si hanno comportamenti anomali per la combinazione di bassa efficienza e alto entanglement, senza però permetterci di comprendere appieno la questione.

Il secondo (figura A.1b) mostra il valor medio dell'osservabile di Bell \mathcal{B}_1 (vedi (3.8)) in funzione del quadrato della concurrence. Le linee colorate rappresentano le aspettative teoriche a differenti valori di efficienza, mentre la linea orizzontale tratteggiata il limite oltre il quale si ha una violazione delle disuguaglianze. Infine i pallini colorati sono i punti sperimentali, che ben ricreano l'andamento atteso. Naturalmente, le inefficienze di interesse partono sopra il 50% per il motivo emerso dal grafico precedente, e in effetti la lievissima violazione al valore $\eta = 0.55$ rispetto a valori maggiori ne è un'ulteriore conferma. Il caso ideale ($\eta = 1$) non riserva sorprese, e a maggiori quantità di entanglement corrisponde una maggiore violazione delle disuguaglianze, fra l'altro secondo una semplice legge lineare. Le cose diventano interessanti considerando i casi con rumore, nei quali si osserva solo inizialmente una crescita simile, per poi assistere a un calo verso il limite massimo di efficienza. Non solo, perché le cadute si fanno più evidenti quando andiamo a vedere le curve corrispondenti a efficienze maggiori. Questo vuol dire che, contrariamente a quanto accade nel caso ideale, la presenza di forte rumore sopprime il carattere nonlocale del sistema, e questo accade in modo più marcato in sistemi molto entangled. Si vede poi come tale soppressione sia in grado, come per le tre curve inferiori, di far svanire la violazione al crescere dell'entanglement.

Questi recenti risultati sono del tutto inediti e perciò di grande importanza per lo sviluppo del concetto stesso di entanglement, oltre che per le numerose applicazioni pratiche già incontrate nel corso della presente trattazione. Si spera di poter quindi arrivare, anche mediante queste e simili metodologie, a una comprensione profonda del carattere nonlocale della MQ, un aspetto controintuitivo e di conseguenza fra i più affascinanti della teoria.

Bibliografia

- [1] Einstein A., Podolsky B. and Rosen N., “Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?”, *Physical Review* 47: 777–780 (1935).
- [2] Bohr N., “Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?”, *Physical Review* 48: 696–702 (1935).
- [3] Bell J. S., “On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox”, *Physics* 1: 195–200 (1964).
- [4] Clauser J. F., Horne M. A., Shimony A., and Holt R. A., “Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories”, *Physical Review Letters* 23: 880 (1969); Erratum *Physical Review Letters* 24: 549 (1970).
- [5] <https://plato.stanford.edu/entries/scientific-realism/#WhatScieReal> (visitato in data 8 aprile 2022).
- [6] Bohm D. and Aharonov Y., “Discussion of Experimental Proof for the Paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky”, *Physical Review* 108: 1070 (1957).
- [7] Kocher C. A. and Commins E. D., “Polarization Correlation of Photons Emitted in an Atomic Cascade”, *Physical Review Letters* 18: 575 (1967).
- [8] Freedman S. J. and Clauser J. F., “Experimental test of local hidden-variable theories”, *Physical Review Letters* 28: 938–941 (1972).
- [9] Kaiser D. I., “Tackling Loopholes in Experimental Tests of Bell’s Inequality”, arXiv:2011.09296 [quant-ph] (2020).
- [10] Aspect A., Dalibard J. and Roger G. “Experimental Test of Bell’s Inequalities Using Time-Varying Analyzers”, *Physical Review Letters* 49: 1804-1807 (1982).
- [11] Larsson J., “Loopholes in Bell Inequality Tests of Local Realism”, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 47: 424003 (2014).
- [12] Abellán C. et al. (BIG Bell Test Collaboration) “Challenging local realism with human choices”, *Nature* 557: 212–216 (2018).
- [13] Brans C.H. “Bell’s theorem does not eliminate fully causal hidden variables”, *International Journal of Theoretical Physics* 27: 219–226 (1988).
- [14] Blinov B. B., Moehring D. L., Duan L., Monroe C. “Observation of entanglement between a single trapped atom and a single photon”, *Nature* 428(6979): 153-157 (2004).

- [15] Cabello A., Larsson J., “Minimum Detection Efficiency for a Loophole-Free Atom-Photon Bell Experiment”, *Physical Review Letters* 98: 220402-1-4 (2007).
- [16] Brunner N., Gisin N., Scarani V., and Simon C., “Detection loophole in asymmetric Bell experiments”, *Physical Review Letters* 98: 220403 (2007).
- [17] Garbarino G., “Minimum Detection Efficiencies for a Loophole-Free Bell-type Test”, *Physical Review A* 81: 032106 (2010).
- [18] Zhu G., Dillery D., Wang K. et al. “Less entanglement exhibiting more nonlocality with noisy measurements”, *npj Quantum Information* 7: 166 (2021).