UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Equilibri di Nash in forma di feedback per un modello pubblicitario

Relatrice:
Prof.ssa Buratto Alessandra

Laureando:
Bertolo Marco
Matricola:
1217309

23 Settembre 2022
Anno Accademico: 2021/2022

Indice

Introduzione

In ambito economico capita spesso di trovarsi in situazioni in cui sia necessario prendere delle decisioni che possono essere influenzate da vari fattori dipendenti dal soggetto stesso ma anche da agenti esterni al proprio controllo (ad esempio all'interno di un'azienda o di un ente finanziario).
Tali problemi vengono espressi matematicamente con la *Teoria dei Giochi* ovvero quella branca della matematica che si è sviluppata principalmente a partire dagli anni 40 del secolo scorso dopo la pubblicazione del libro "*Theory of games and economic behavior*" [8] da parte del matematico *John Von Neumann* e dell'economista *Oskar Morgenstern* e che si occupa di situazioni in cui un certo numero di giocatori sono alla ricerca della strategia ottimale al fine di massimizzare il proprio *payoff* ovvero quell'obbiettivo che intendono perseguire (ad esempio la massimizzazione di un profitto o la minimizzazione del rischio legato ad un investimento). La soluzione di un gioco consiste dunque nel determinarne gli equilibri qualora essi esistano. Tale concetto verrà formulato più rigorosamente in seguito così come la nozione stessa di gioco.
In questa tesi, che si basa sul modello sviluppato nell'articolo "*On the Solution of a Differential Game of Managing the Investments in an Advertising Campaign*" da *E. V. Gromova, D. V. Gromov, Yu. E. Lakhina*, si vuole analizzare il problema di un'azienda la quale intende massimizzare il proprio profitto derivante dalla vendita di un bene di consumo in un mercato con N concorrenti. Ogni azienda deve quindi determinare una strategia pubblicitaria ottimale che le permetta di massimizzare le vendite (e di conseguenza gli utili) tenendo conto di vari fattori quali la capacità del mercato e la strategia delle aziende concorrenti. Tale scelta influenza il *goodwill* dell'azienda ovvero la sua reputazione agli occhi del consumatore e conseguentemente il livello delle vendite. [1]
Nel primo capitolo verranno espressi in maniera rigorosa gli strumenti teorici della *teoria dei giochi* che saranno necessari in seguito per la discussione e la soluzione del modello proposto. In particolare dopo una prima parte in cui verranno definiti alcuni concetti fondamentali (nozioni di gioco differenziale, equilibrio,...) si passerà ad esporre una serie di teoremi per la determinazio-

[1] Per un approfondimento sul concetto di *goodwill* si veda [10]

ne degli equilibri *feedback* di un gioco differenziale e le loro caratteristiche. Successivamente nel secondo capitolo, dopo aver formulato in maniera rigorosa il problema identificando chiaramente tutte le variabili e i parametri in gioco, si distingueranno due casi:

1 I giocatori decidono di massimizzare il profitto complessivo (ovvero le aziende decidono di formare un cartello). In tal caso ci si troverà a discutere un problema di controllo ottimo.

2 Ogni giocatore vuole massimizzare il proprio *payoff*. Sotto questa ipotesi il problema verrà affrontato come un gioco alla *Nash* con lo scopo di determinarne l'equilibrio stazionario stabile.

In entrambi i casi si utilizzerà un approccio di tipo *feedback* al problema in virtù dei vantaggi che questo comporta. Infine nel terzo e ultimo capitolo verranno formulate le conclusioni derivanti dall'analisi svolta nei capitoli precedenti.

Capitolo 1

Giochi differenziali ed equilibri

Prima di esporre la teoria intendiamo precisare che la notazione che useremo di seguito $[t, t_1\rangle$ sta ad indicare che l'istante finale t_1 può essere indifferentemente finito o $+\infty$.

Definizione 1.0.1 (Gioco)**.** *[4] Si definisce gioco un problema decisionale composto da:*

- *Un insieme di giocatori* $\boldsymbol{N} = \{1, 2, ..., N\}$ *che siano soggetti intelligenti (in grado di capire la situazione in cui si trovano) e razionali (hanno preferenze coerenti sugli esiti finali e agiscono al fine di ottimizzarle)*

- *Per ogni giocatore* $i \in \boldsymbol{N}$ *un insieme di controlli (o strategie) ammissibili* U^i

- *Una funzione* $J^i(\cdot)$ *a valori reali tale per cui* $J^i(u_1, ..., u_N)$ *rappresenta il payoff del giocatore i-esimo se gli N giocatori scelgono la strategia* $(u_1, ..., u_N) \in U^1 \times ... \times U^N$

All'interno di tale definizione generale è possibile fare delle distinzioni, nel nostro caso tratteremo giochi differenziali ovvero con le seguenti caratteristiche:

Definizione 1.0.2 (Gioco differenziale)**.** *[3] Si definisce gioco differenziale un gioco con le seguenti caratteristiche:*

- *una variabile temporale* t *con valori in* $[t_0, t_1\rangle$

- *una variabile di stato* $x(t) \in \mathbb{R}^N$ *che caratterizza lo stato del sistema dinamico in ogni istante*

- *una variabile di controllo* $u_i(t) \in \mathbb{R}^{m^i}$ *che rappresenta il controllo del giocatore i-esimo in ogni istante*

- *un insieme di equazioni del moto* $\dot{x}_j(t) = f_j(x(t), u_1(t), ..., u_N(t), t)$ *con dato iniziale* $x_j(0) = x_j^0$ *per ogni* $j = 1, ..., N$

- *un payoff della forma* $J^i(\cdot) = \int_{t_0}^{t_1} e^{-\rho_i t} F^i(x(t), u_1(t), ..., u_N(t), t)dt + e^{-\rho_i t_1} S^i(x(t_1))$

- *una struttura informativa che definisce l'informazione disponibile a ciascun giocatore nel tempo per la scelta del proprio controllo*

- *per ogni giocatore i un insieme di strategie* Φ^i *dove ogni strategia è una regola decisionale che porta alla determinazione del controllo* $u_i(t)$ *in base all'informazione a disposizione*

Come detto in un gioco spesso l'obbiettivo è quello di determinarne gli equilibri. In particolare nel nostro caso ci concentreremo sugli *equilibri di Nash* ovvero quella nozione di equilibrio introdotta per la prima volta dal matematico americano *John Nash* in un articolo del 1950 [1] che può essere espressa nel seguente modo:

Definizione 1.0.3 (Equilibrio di Nash)**.** *[3] Dato un insieme di giocatori* $\boldsymbol{N}$ *si definisce equilibrio di Nash un profilo di strategie* $(u_1, ..., u_N) \in U^1 \times ... \times U^N$ *tale per cui*

$$J^i(u_1, ..., u_i, ..., u_N) \geq J^i(u_1, ..., \tilde{u}_i, ..., u_N) \quad \forall i \in \boldsymbol{N}$$

ovvero tale che nessun giocatore può migliorare il proprio payoff in maniera unilaterale. [2]

1.1 Hamilton-Jacobi-Bellman

Per trovare gli equilibri di un gioco esistono due approcci non equivalenti tra di loro. Nel nostro caso ci concentreremo sulla ricerca di equilibri di tipo *feedback* [3] in quanto questi presentano proprietà interessanti che presenteremo in seguito.

[1] l'articolo è riportato in bibliografia al numero [9]

[2] Per un approfondimento si veda [4] al capitolo 1

[3] Si veda [3] a pag. 268

Figura 1.1: J.Nash (1928-2015)

Definizione 1.1.1 (Equilibrio di Nash feedback)**.** *[3] L'N-upla di strategie* $(\phi_1, ..., \phi_N)$ *si dice equilibrio di Nash feedback se per ogni giocatore* $i \in \boldsymbol{N}$ *un controllo ottimo è dato dalla strategia* $u_i(t) = \phi_i(x(t), t)$

Definizione 1.1.2 (Problema del giocatore i-esimo)**.** *[4] Supposto che tutti i giocatori* $j \neq i$ *utilizzino la strategia* $u_j(s) = \phi_j(x(s), s)$ *allora si definisce problema del giocatore i-esimo e si indica con* $P^i(t, x)$ *un problema della forma:*

$$
\begin{array}{rl}
\textit{massimizza} & J^i(u_i(s)) = \int_t^{t_1} F^i(x(s), u_1(s), ..., u_N(s), s)e^{-\rho_i s}ds + e^{-\rho_i t_1}S^i(x(t_1)) \\
\textit{soggetto a} & \dot{x}(s) = f(x(s), u_1(s), ..., u_N(s), s) \\
 & x(t) = x \\
 & u_i(s) \in U^i(x(s), u_{-i}(s), s)
\end{array}
$$

Definizione 1.1.3 (Equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman)**.** *[4] Si consideri il problema del giocatore i-esimo definito in 1.1.2 e si definisca la funzione valore*

$$
V^i(t, x) = \max_{u_i(\cdot) \in U^i(x(s), u_{-i}, s)} \left\{ \int_t^{t_1} F^i(x(s), u(s), s)e^{-\rho_i s}ds + e^{-\rho_i t_1}S^i(x(t_1)) \right\} \tag{1.1}
$$

la quale corrisponde alla soluzione ottima del problema 1.1.2.
Si definisce equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman la seguente equazione alle

derivate parziali:

$$\rho_i V^i(t,x) - V_t^i(t,x) = \max_{u_i \in U^i(x,t)} \{V_x^i(t,x) \cdot f(x,u,t) + F^i(x,u,t)\} \tag{1.2}$$

Teorema 1.1.1 (Teorema di Hamilton-Jacobi-Bellman)**.** Si consideri il problema definito in 1.1.2 e si supponga che esso ammetta soluzione ottima definita da (1.1) che sia differenziabile con continuità rispetto ad x e a t. Allora tale soluzione soddisfa necessariamente l'equazione (1.2) e se $t_1 < +\infty$ anche la condizione finale $V^i(t_1, x) = S^i(x)$. Inoltre un controllo $u_i(\cdot) \in U^i(x,t)$ che massimizzi il membro destro dell'equazione (1.2) è un controllo ottimo per il problema definito in 1.1.2.

Dimostrazione. [4] Dimostriamo il teorema nel caso di un problema di controllo ottimo ovvero nel caso in cui vi sia un unico giocatore, la sua generalizzazione è immediata se si trattano i controlli degli altri giocatori come dei parametri.
Proviamo prima la necessità.
Consideriamo il problema $P(t,x)$ e un incremento temporale arbitrariamente piccolo $t+\epsilon$, allora ogni controllo ammissibile $u(\cdot) : [t, t+\epsilon) \to \mathbb{R}^m$ porta il sistema dallo stato x allo stato $x(t+\epsilon)$ secondo l'equazione del moto. Otteniamo dunque che il valore ottimo nell'intervallo $[t, t+\epsilon)$ è dato da:

$$V(t,x) = \max \left\{ \int_t^{t+\epsilon} F(x(s), u(s), s) e^{-\rho s} ds + e^{-\rho\epsilon} V(x(t+\epsilon), t+\epsilon) \right\}$$

A questo punto sottraiamo $V(t,x)$ ad ambo i membri e dividiamo per ϵ ottenendo:

$$0 = \max \left\{ \frac{1}{\epsilon} \int_t^{t+\epsilon} F(x(s), u(s), s) e^{-\rho s} ds + \frac{e^{-\rho\epsilon} V(x(t+\epsilon), t+\epsilon) - V(x,t)}{\epsilon} \right\}$$

Passiamo al limite per $\epsilon \to 0$ e sfruttiamo il teorema della media integrale [5] e l'ipotesi di differenziabilità della funzione V ottenendo così:

- $$\lim_{\epsilon \to 0} \left\{ \frac{1}{\epsilon} \int_t^{t+\epsilon} F(x(s), u(s), s) e^{-\rho s} ds \right\} = F(x(t), u(t), t)$$

- $$\lim_{\epsilon \to 0} \left\{ \frac{e^{-\rho\epsilon} V(x(t+\epsilon), t+\epsilon) - V(x,t)}{\epsilon} \right\} =$$

[4] Questa dimostrazione si rifà a quella presente su [4]

[5] si veda [1]

$$\frac{d}{d\epsilon}\left[e^{-\rho\epsilon}V(x(t+\epsilon),t+\epsilon)\right]_{|\epsilon=0} =$$
$$-\rho V(x(t),t) + V_x(x(t),t)\dot{x}(t) + V_t(x(t),t)$$

Quindi abbiamo trovato che:

$$0 = \max\{F(x(t),u(t),t) - \rho V(x(t),t) + V_x(x(t),t)\dot{x}(t) + V_t(x(t),t)\}$$

ovvero ricordando che $\dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t)$ abbiamo trovato l'equazione (1.2).
Per la sufficienza fissiamo $u^*(\cdot)$ che massimizza il membro destro della (1.2) e un qualunque altro controllo $u(\cdot)$ che sia ammissibile.
In base alla (1.2) si ha che

$$F(x(t),u(t),t) \leq \rho V(x(t),t) - V_t(x(t),t) - V_x(x(t),t)f(x(t),u(t),t)$$

mentre grazie al fatto che $u^*(\cdot)$ massimizza il membro destro dell'equazione la disuguaglianza precedente vale come uguaglianza.
Moltiplichiamo ora ambo i membri per $e^{-\rho t}$ e ricordiamo che $\dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t)$ sicché ricaviamo:

$$e^{-\rho t}F(x(t),u(t),t) \leq -\frac{d}{dt}[e^{-\rho t}V(x(t),t)]$$

e nuovamente si ha un'uguaglianza nel caso di $u^*(\cdot)$.
A questo punto con un conto diretto si verifica che:

$$J(u^*(\cdot)) - J(u(\cdot)) =$$
$$\int_t^{t_1} e^{-\rho s}[F(x^*(s),u*(s),s) - F(x(s),u(s),s)]ds + e^{-\rho t_1}[S(x^*(t_1)) - S(x(t_1))] \geq$$
$$\int_t^{t_1} \frac{d}{ds}e^{-\rho s}[V(x(s),s) - V(x^*(s),s)]ds + e^{-\rho t_1}[V(x^*(t_1),t_1) - V(x(t_1),t_1)] =$$
$$-e^{-\rho t}[V(x(t),t) - V(x^*(t),t)] = 0$$

dove abbiamo usato la disuguaglianza trovata in precedenza, il teorema fondamentale del calcolo integrale e la condizione iniziale del problema.

□

Facciamo ora un'osservazione: risolvendo il problema $P^i(t,x)$ per ogni $i \in \mathbf{N}$ troveremo che ogni soluzione $u_i(\cdot)$ dipende dai controlli degli altri giocatori. Ciò che risulta naturale è dunque mettere a sistema queste soluzione per trovare il vettore $u(\cdot)$ in cui ogni componente è indipendente dalle altre e a cui resta associato lo stato $x(\cdot)$. Il teorema seguente afferma che la soluzione trovata con questo procedimento rappresenta effettivamente un equilibrio del gioco. Vale dunque il seguente risultato:

Teorema 1.1.2. [4] Siano $(\phi_1, ..., \phi_N)$ funzioni tali che $\phi_j : X \times [0, t_1\rangle \to \mathbb{R}^{m^j}$ e supponiamo che:

i esista un'unica funzione assolutamente continua $x : [0, t_1\rangle \to \mathbb{R}$ che soddisfi l'equazione $\dot{x}(t) = f(x(t), \phi_1(x(t), t), ..., \phi_N(x(t), t), t)$ e la condizione iniziale $x(0) = x_0$

ii Per ogni $i \in \mathbf{N}$ esista la funzione valore $V^i : X \times [0, t_1\rangle \to \mathbb{R}$ tale che sia differenziabile con continuità e che soddisfi l'equazione (1.2) per ogni scelta di $(x, t) \in X \times [0, t_1\rangle$

iii Se $t_1 < +\infty$ allora $V^i(x, t_1) = S^i(x)$ per ogni $x \in X$ e per ogni $i \in \mathbf{N}$

iv Se $t_1 = +\infty$ allora o V^i è una funzione limitata e $\rho_i > 0$ oppure V^i è limitata inferiormente, $\rho_i > 0$, e $\limsup_{t\to+\infty} e^{-\rho_i t} V^i(x(t), t) \leq 0$

Indichiamo con $\Phi^i(x, t)$ l'insieme degli $u^i \in U^i(x, \phi_{-i}, t)$ che massimizzano il membro destro dell'equazione (1.2). Se $\phi_i(x(t), t) \in \Phi^i(x(t), t)$ per ogni i e per quasi ogni $t \in [0, t_1\rangle$ allora l'N-upla $(\phi_1, ..., \phi_N)$ è un equilibrio di Nash feedback.

Vogliamo ora concentrarci sul motivo per cui quando possibile è conveniente cercare equilibri di tipo *feedback*.
Nel seguito tornerà utile la notazione $\Gamma(x, t)$ per indicare il gioco differenziale in cui ogni giocatore si trova a dover risolvere il problema 1.1.2 con istante iniziale t e dato iniziale $x(t) = x$. Per semplicità e per non appesantire ulteriormente la notazione supporremo t=0.

Definizione 1.1.4 (Consistenza nel tempo)**.** *[4] Sia* $(\phi_1, ..., \phi_N)$ *un equilibrio feedback per il gioco* $\Gamma(x_0, 0)$ *e sia* $x(\cdot)$ *l'unica traiettoria d'equilibrio ad esso associata. Tale equilibrio si dirà consistente nel tempo se per ogni* $t \in [0, t_1\rangle$ *il sottogioco* $\Gamma(x(t), t)$ *ammette un equilibrio feedback* $(\psi_1, ..., \psi_N)$ *tale che* $\psi_i(y, s) = \phi_i(y, s)$ *per ogni* $i = 1, ..., N$ *e per ogni* $(y, s) \in X \times [t, t_1\rangle$.

In altri termini possiamo dire che un equilibrio *feedback* è consistente nel tempo se è un equilibrio per ogni sottogioco lungo la traiettoria $x(t)$.

Teorema 1.1.3. [4] Ogni equilibrio *feedback* è consistente nel tempo.

Dimostrazione. [6] Sia $(\phi_1, ..., \phi_N)$ un equilibrio *feedback* del gioco $\Gamma(x_0, 0)$ e sia fissata la traiettoria d'equilibrio $x(\cdot)$ e i controlli $u_1(\cdot), ..., u_N(\cdot)$. Supponiamo per assurdo che tale equilibrio non sia consistente nel tempo, sicché

[6] tale dimostrazione è presa da [4]

esiste un giocatore $i \in \{1, ..., N\}$ ed un istante $t \in (0, t_1\rangle$ tale che il giocatore i può incrementare il suo payoff nel sottogioco $\Gamma(x(t), t)$ se gli altri giocatori mantengono la loro strategia ϕ_j per $j \neq i$. Denotiamo con $\tilde{\phi}_i$ tale strategia. Costruiamo allora una strategia $\chi_i : X \times [0, t_1\rangle \to \mathbb{R}^{m^i}$ definita da:

$$\chi_i(x, s) = \begin{cases} \phi_i(x, s) & se \quad s \in [0, t) \\ \tilde{\phi}_i(x, s) & se \quad s \in [t, t_1\rangle \end{cases}$$

Fissiamo dunque la strategia $(\phi_1, ..., \phi_{i-1}, \chi_i, \phi_{i+1}, ..., \phi_N)$ e consideriamo la traiettoria associata $y(\cdot)$ e i controlli associati $v_1(\cdot), ..., v_N(\cdot)$. Ovviamente $y(s) = x(s)$ ed $u_j(s) = v_j(s)$ per $s \in [0, t)$ e per $j \in \{1, ..., N\}$. Vale inoltre che:

$$J^i(v_i(\cdot)) = \int_0^t F^i(x(s), u_1(s), ..., u_N(s), s)ds$$

$$+ \int_t^{t_1} F^i(y(s), v_1(s), ..., v_N(s), s)ds + e^{-\rho_i t_1} S^i(y(t_1))$$

ed avendo assunto che $\tilde{\phi}_i$ fosse una strategia migliore nel sottogioco $\Gamma(x(t), t)$ allora segue che

$$\int_t^{t_1} F^i(y(s), v_1(s), ..., v_N(s), s)ds + e^{-\rho_i t_1} S^i(y(t_1))$$

$$> \int_t^{t_1} F^i(x(s), u_1(s), ..., u_N(s), s)ds + e^{-\rho_i t_1} S^i(x(t_1))$$

contraddicendo l'ipotesi che $(\phi_1, ..., \phi_N)$ fosse un equilibrio di Nash feedback del gioco $\Gamma(x_0, 0)$ □

Definizione 1.1.5 (Perfezione nei sottogiochi). *[4] Sia* $(\phi_1, ..., \phi_N)$ *un equilibrio feedback per il gioco* $\Gamma(x_0, 0)$. *Tale equilibrio si dirà perfetto nei sottogiochi se per ogni* $(x, t) \in X \times [0, t_1\rangle$ *il sottogioco* $\Gamma(x, t)$ *ammette un equilibrio feedback* $(\psi_1, ..., \psi_N)$ *tale che* $\psi_i(y, s) = \phi_i(y, s)$ *per ogni* $i = 1, ..., N$ *e per ogni* $(y, s) \in X \times [t, t_1\rangle$.

Risulta evidente che la *perfezione nei sottogiochi* implichi la *consistenza nel tempo.* In particolare vale il seguente risultato:

Teorema 1.1.4. [4] Sia $(\phi_1, ..., \phi_N)$ una N-upla di funzioni tali che $\phi_j : X \times [0, t_1\rangle \to \mathbb{R}^{m^j}$ e supponiamo che:

i Per ogni $(y, s) \in X \times [0, t_1\rangle$ esista un'unica funzione assolutamente continua $x_{y,s} : [s, t_1\rangle \to X$ tale che sia soluzione del problema

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \phi_1(x(t), t), ..., \phi_N(x(t), t), t), \quad x(s) = y$$

ii Valgano le condizioni (ii),(iii),(iv) del teorema (1.1.2.) con la richieste che se V^i non è limitata superiormente allora

$$\limsup_{t\to+\infty} e^{-\rho_i t} V^i(x_{y,s}(t),t) \leq 0$$

deve valere per ogni $(y,s) \in X \times [0,t_1\rangle$

Indichiamo con $\Phi^i(x,t)$ l'insieme degli $u^i \in U^i(x,\phi_{-i},t)$ che massimizzano il membro destro dell'equazione (1.2). Se $\phi_i(x,t) \in \Phi^i(x,t)$ per ogni i e per ogni $(x,t) \in X \times [0,t_1\rangle$ allora $(\phi_1,...,\phi_N)$ è un equilibrio di Nash feedback perfetto nei sottogiochi.

Alla luce di quanto visto dunque l'importanza degli equilibri di *Nash feedback* sta nel fatto che, essendo essi consistenti nel tempo, qualora ad un certo istante intermedio si sia in grado di osservare lo stato del gioco nessun giocatore ha interesse a cambiare unilateralmente la propria strategia se inizialmente tutti avevano optato per una strategia che determinasse l'equilibrio.

Capitolo 2

Il modello pubblicitario

Seguendo quanto proposto nell'articolo "*On the Solution of a Differential Game of Managing the Investments in an Advertising Campaign*" dagli autori *E.V. Gromova, D.V. Gromov, Yu. E. Lakhina* si assume che nel mercato ci siano N aziende le quali intendono massimizzare il *payoff* derivante dalla vendita di un certo prodotto.
Tale quantità dipende strettamente dal *goodwill* dell'azienda, il quale in accordo con quanto proposto in [10] evolve secondo la seguente equazione differenziale:

$$\begin{cases} \dot{G}_i(t) = ka_i(t) - \delta G_i(t) \\ G_i(0) = G_0^i \geq 0 \ per \ i = 1, ..., N \end{cases} \tag{2.1}$$

In particolare k corrisponde ad una costante che rappresenta in che modo la pubblicità influenza il *goodwill*; $a_i \geq 0$ è il controllo dell'azienda ovvero la spesa pubblicitaria che essa decide di attuare; δ è il tasso istantaneo di decadimento del *goodwill* che tiene conto di una perdita di valore del brand qualora non si investa in pubblicità; infine G_i è il *goodwill* dell'azienda i-esima. In realtà nell'articolo citato in precedenza vengono risolti sia il caso cooperativo che quello non cooperativo assumendo che sia $k = 1$.
Si introducono inoltre ulteriori parametri del modello:

- $\pi > 0$ sia il profitto marginale dell'azienda ovvero il profitto derivante dalla vendita di un'unità di prodotto in un unità di tempo

- $\frac{c}{2}a_i^2(t)$ siano i costi pubblicitari dell'azienda i-esima dove $c > 0$ è una costante

- $[\beta - \sum_{h=1}^{N} G_h(t)]G_i(t)$ sia la funzione che descrive le vendite per l'i-esima azienda

- $\rho \in (0,1)$ sia il tasso istantaneo di attualizzazione e sia uguale per ogni giocatore

- l'orizzonte temporale del gioco sia $T = +\infty$

Alla luce di tali ipotesi il *payoff* del giocatore i-esimo, ovvero il profitto dell'azienda al netto delle spese pubblicitarie, risulta essere:

$$J^i(a_i(t)) = \int_0^{+\infty} \big(\pi[\beta - \sum_{h=1}^{N} G_h(t)]G_i(t) - \frac{c}{2}a_i^2(t)\big)e^{-\rho t}dt \tag{2.2}$$

2.1 Caso cooperativo

Si suppone ora che le aziende formino un cartello e che intendano dunque massimizzare il *payoff* complessivo, dato dall'espressione:

$$J(a) = \sum_{i=1}^{N} J^i(a_i) = \int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^{N} \big(\pi[\beta - \sum_{h=1}^{N} G_h(t)]G_i(t) - \frac{c}{2}a_i^2(t)\big)e^{-\rho t}dt \tag{2.3}$$

e si ipotizza che il sistema evolva secondo l'equazione (2.1).
Poiché si intende usare l'equazione di HJB è importante osservare che si tratta di un problema autonomo in tempo infinito ovvero con le seguenti caratteristiche:

- l'orizzonte temporale del gioco è $+\infty$

- $F(x,u,t) = F(x,u)$ e $f(x,u,t) = f(x,u)$

In questo caso si può dimostrare che la funzione valore è invariante rispetto al tempo, cioè $V(t,x) = V(x)$[1] e quindi l'equazione da risolvere assume una forma più semplice.

$$\rho V(G) = \max_{(a_1,\dots,a_N)\in\mathbb{R}^N_{\geq 0}} \left\{ \big(\pi[\beta - \sum_{h=1}^{N} G_h]\sum_{i=1}^{N} G_i - \frac{c}{2}\sum_{i=1}^{N} a_i^2\big) + \sum_{i=1}^{N} V_{G_i}(a_i - \delta G_i) \right\} \tag{2.4}$$

Indicando con $h(a_1,...,a_N)$ il membro destro dell'equazione e derivandolo rispetto al controllo si ottiene:

$$\frac{\partial h(\cdot)}{\partial a_i} = -ca_i + V_{G_i} = 0 \Leftrightarrow a_i = \frac{V_{G_i}}{c}$$

Si osserva che tale punto è effettivamente un massimo grazie alla concavità della funzione $h(\cdot)$ e dunque il controllo ottimo è dato dal vettore

[1] Per un approfondimento si veda [3] alle pagg. 242,243

$a^* = (a_1^*, ..., a_N^*)$ con componenti:

$$a_i^* = \max\left\{\frac{V_{G_i}}{c}, 0\right\} \tag{2.5}$$

Supponendo che $\frac{V_{G_i}}{c} \geq 0$ per ogni $i = 1, ..., N$ si può riscrivere l'equazione (2.4) come segue:

$$\rho V(G) = \pi[\beta - \sum_{h=1}^{N} G_h] \sum_{i=1}^{N} G_i - \delta \sum_{i=1}^{N} V_{G_i} G_i + \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^{N} V_{G_i}^2 \tag{2.6}$$

In virtù delle simmetrie del problema in accordo con quanto proposto in [6] si cerca una funzione valore della forma:

$$V(G) = \alpha + \gamma \sum_i G_i + \frac{\eta}{2} \sum_{i \neq j} G_i G_j + \frac{\epsilon}{2} \sum_i G_i^2 \tag{2.7}$$

Imponendo dunque che soddisfi l'equazione (2.6) si trova:

$$\alpha + \gamma \sum_i G_i + \frac{\eta}{2} \sum_{i \neq j} G_i G_j + \frac{\epsilon}{2} \sum_i G_i^2 = \frac{\gamma^2 N}{2c} + \left(\frac{\gamma\eta N + \epsilon\gamma - \eta\gamma - \delta\gamma c + \pi\beta c}{c}\right) \sum_i G_i +$$

$$+ \left(\frac{\eta^2 N + 2\epsilon\eta - 2\eta^2 - 2c\delta\eta - 2c\pi}{2c}\right) \sum_{i \neq j} G_i G_j + \left(\frac{N\eta^2 + \epsilon^2 - \eta^2 - 2c\delta\epsilon - 2c\pi}{2c}\right) \sum_i G_i^2$$

Sfruttando il principio d'identità dei polinomi si giunge al seguente sistema:

$$\begin{cases} N\gamma^2 = 2c\alpha\rho \\ [(N-1)\eta + \epsilon - c\delta - c\rho]\gamma = -c\pi\beta \\ (N-1)\eta^2 + \epsilon^2 - 2c\delta\epsilon - 2c\pi - c\rho\epsilon = 0 \\ (N-2)\eta^2 + 2\epsilon\eta - 2c\delta\eta - 2c\pi - c\rho\eta = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

Sottraendo la quarta equazione dalla terza si trova:

$$(\eta - \epsilon)(c\rho + 2c\delta + \eta - \epsilon) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \eta = \epsilon \\ \eta = \epsilon - c\rho - 2c\delta \end{cases} \tag{2.9}$$

mentre dalla seconda e dalla prima si ricava:

$$\gamma = \frac{-c\pi\beta}{(N-1)\eta + \epsilon - c\delta - c\rho} \tag{2.10}$$

$$\alpha = \frac{N\gamma^2}{2c\rho} = \frac{Nc\pi^2\beta^2}{2\rho[(N-1)\eta + \epsilon - c\delta - c\rho]^2} \tag{2.11}$$

Si risolve dunque il sistema distinguendo le due possibili situazioni e si giunge alle seguenti soluzioni:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \frac{2c\delta+c\rho+A}{2N} \\ \frac{2c\delta+c\rho-A}{2N} \\ (1-\frac{1}{2N})(2c\delta+c\rho)+\frac{A}{2N} \\ (1-\frac{1}{2N})(2c\delta+c\rho)-\frac{A}{2N} \end{bmatrix}; \eta = \begin{bmatrix} \frac{2c\delta+c\rho+A}{2N} \\ \frac{2c\delta+c\rho-A}{2N} \\ \frac{-2c\delta-c\rho+A}{2N} \\ \frac{-2c\delta-c\rho-A}{2N} \end{bmatrix}; \gamma = \begin{bmatrix} \frac{2c\pi\beta}{c\rho-A} \\ \frac{2c\pi\beta}{c\rho+A} \\ \frac{2c\pi\beta}{c\rho-A} \\ \frac{2c\pi\beta}{c\rho+A} \end{bmatrix}; \alpha = \begin{bmatrix} \frac{2Nc\pi^2\beta^2}{\rho(c\rho-A)^2} \\ \frac{2Nc\pi^2\beta^2}{\rho(c\rho+A)^2} \\ \frac{2Nc\pi^2\beta^2}{\rho(c\rho-A)^2} \\ \frac{2Nc\pi^2\beta^2}{\rho(c\rho+A)^2} \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

dove si è posto per comodità $A = \sqrt{(2c\delta + c\rho)^2 + 8Nc\pi}$.
Tali soluzioni rispecchiano quanto proposto dagli autori di [6] se si assume $N = 3$.
L'obbiettivo ora è quello di trovare la soluzione stazionaria stabile ovvero tale per cui $\dot{G_i} = a_i^* - \delta G_i = 0$ per $i = 1, ..., N$.
Osserviamo che grazie all'ipotesi che $\frac{V_{G_i}}{c} \geq 0$ allora il sistema di ODE in questione è dato dalla matrice:

$$M = \begin{pmatrix} \epsilon - c\delta & \eta & \dots & \eta \\ \eta & \epsilon - c\delta & \dots & \eta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \eta & \dots & \eta & \epsilon - c\delta \end{pmatrix}$$

Essendo tale matrice simmetrica per il *teorema spettrale* è diagonalizzabile ed ha tutti gli autovalori reali, inoltre per il *primo teorema di Gershgorin* tutti gli autovalori sono contenuti nel cerchio complesso $\{z \in \mathbb{C} : |z-\epsilon+c\delta| \leq (N-1)|\eta|\}$.

Proposizione 2.1.1. La matrice M ha esattamente $N-1$ autovalori della forma $\lambda_i = \epsilon - c\delta - \eta$ per $i = 1, ..., N-1$ e $\lambda_N = \epsilon - c\delta + (N-1)\eta$

Dimostrazione. Per determinare gli autovalori si impone che

$$det \begin{pmatrix} \epsilon - c\delta - \lambda & \eta & \dots & \eta \\ \eta & \epsilon - c\delta - \lambda & \dots & \eta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \eta & \dots & \eta & \epsilon - c\delta - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Si indichi con B tale matrice. Allora $det(B) = 0$ se e solo se $rank(B) < N$ e questo è verificato se e solo se $\lambda = \epsilon - c\delta - \eta$ oppure $\lambda = \epsilon - c\delta + (N-1)\eta$.
Nel primo caso si trovano esattamente $N-1$ soluzioni distinte del sistema:

$$\begin{cases} \eta x_1 + \eta x_2 + \dots + \eta x_N = \eta x_1 \\ \eta x_1 + \eta x_2 + \dots + \eta x_N = \eta x_2 \\ \\ \eta x_1 + \eta x_2 + \dots + \eta x_N = \eta x_N \end{cases}$$

corrispondenti agli autovettori $v_i = (-1, 0, ...0, 1_{i+1}, 0, ..., 0)^T$.
Nel secondo caso la matrice è data da

$$B = \begin{pmatrix} (1-N)\eta & \eta & \dots & \eta \\ \eta & (1-N)\eta & \dots & \eta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \eta & \eta & \dots & (1-N)\eta \end{pmatrix}$$

la quale ha evidentemente determinante nullo dato che fissato il vettore $v = (1, ..., 1)^T$ abbiamo $Bv = 0$, sicché $ker(B) \neq \emptyset$ come si voleva.

□

Ora che si è stabilito quali siano gli autovalori della matrice M ci si chiede come essa sia definita. Si procede distinguendo dunque due casi:

1 Se $\epsilon = \eta$ come dimostrato la matrice ha $N-1$ autovalori $\lambda_i = -c\delta < 0$ per $i = 1, ..., N-1$.
L'ultimo autovalore invece è $\lambda_N = -c\delta + N\eta = \begin{cases} \frac{c\rho+A}{2} > 0 \\ \frac{c\rho-A}{2} < 0 \end{cases}$
Da ciò si deduce che M è definita negativa se e solo se $\epsilon = \frac{2c\delta+c\rho-A}{2}$

2 Se $\epsilon = \eta + 2c\delta + c\rho$ si è visto che la matrice ha $N-1$ autovalori identici dati da $\lambda_i = \epsilon - c\delta - \eta = c\delta + c\rho > 0$ per $i = 1, ..., N-1$, mentre

$$\lambda_N = \epsilon - c\delta + (N-1)\eta = \begin{cases} \frac{c\rho+A}{2} > 0 \\ \frac{c\rho-A}{2} < 0 \end{cases}$$

In questo caso dunque M è definita positiva solo nel primo caso mentre non è definita nell'altro .

Ci si chiede a questo punto quale tra le quattro possibili candidate $V(G)$ sia da preferire. Poiché l'obbiettivo è trovare la soluzione stabile si scelgono i valori dei parametri tali per cui M risulti definita negativa ovvero quelli corrispondenti alla seconda riga in (2.12). Volendo dare un significato economico a tale scelta si introduce il seguente criterio:

Proposizione 2.1.2. Si supponga che il profitto marginale π in (2.3) sia nullo. Allora il profitto complessivo $V(G)$ è anch'esso nullo.

Sostituendo il valore $\pi = 0$ nelle soluzioni trovate in (2.12) si trova:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \frac{2c\delta+c\rho}{N} \\ 0 \\ 2c\delta + c\rho \\ \frac{(2N-2)c\delta+(N-1)c\rho}{N} \end{bmatrix}; \eta = \begin{bmatrix} \frac{2c\delta+c\rho}{N} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-2c\delta-c\rho}{N} \end{bmatrix}; \gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

Come era lecito attendersi il criterio economico adottato porta alla medesima scelta fatta richiedendo la stabilità dell'equilibrio stazionario. Risulta dunque provato il seguente teorema:

Teorema 2.1.1. Tra le funzioni della forma (2.7) vi sono esattamente quattro soluzioni dell'equazione (2.6). Tuttavia tra queste solo una soddisfa il criterio della proposizione (2.1.2) e porta ad un sistema per la determinazione dell'equilibrio stazionario il quale sia retto da una matrice definita negativa. Tale funzione $V^*(G)$ si ottiene ponendo:

$$\epsilon = \eta = \frac{2c\delta + c\rho - A}{2N}, \quad \gamma = \frac{2c\pi\beta}{c\rho + A}, \quad \alpha = \frac{2Nc\pi^2\beta^2}{\rho(c\rho + A)^2}$$

In virtù dell'equazione (2.5) e del fatto che $V_{G_i} = \gamma + \epsilon \sum_{k=1}^{n} G_k$ si trova che il controllo ottimo è dato da:

$$a_i^* = \frac{2\pi\beta}{c\rho + A} + (\frac{2c\delta + c\rho - A}{2cN}) \sum_{k=1}^{n} G_k$$

Si cerca dunque la soluzione stazionaria stabile del problema imponendo che valga l'equazione del moto $0 = a_i - \delta G_i$ e sostituendo il valore ottimo a_i^*. Si calcola pertanto che per $i = 1, ..., N$ deve valere:

$$G_i = \frac{1}{\delta}[\frac{2\pi\beta}{c\rho + A} + (\frac{2c\delta + c\rho - A}{2cN}) \sum_{k=1}^{n} G_k] \tag{2.14}$$

Fissando $j \neq i$ e sottraendo si ottiene:

$$G_i - G_j = 0 \Rightarrow G_i = G_j \quad \forall i \neq j$$

Si sostituisce nella (2.14) e si conclude che:

$$G_i^* = \frac{4\pi c\beta}{\delta(c\rho + A)(A - c\rho)} = \frac{4\pi c\beta}{\delta(A^2 - c^2\rho^2)} = \frac{\pi\beta}{\delta(c\delta^2 + c\delta\rho + 2N\pi)} \tag{2.15}$$

2.2 Caso non cooperativo

Tipicamente accade che ogni azienda sia interessata esclusivamente al proprio profitto senza tenere in considerazione quello altrui. In questo caso ci si trova pertanto a dover considerare un gioco non cooperativo.
Come proposto in [7] si suppone che ogni azienda abbia un approccio *miope* ovvero che sia in grado di conoscere solo l'evoluzione del proprio *goodwill*.
Perciò fissato $i \in \{1, ..., N\}$ il problema del giocatore i-esimo si può scrivere come:

$$\begin{array}{rl} \text{massimizza} & J^i(a_i) = \int_0^{+\infty} \left(\pi[\beta - \sum_{h=1}^N G_h(t)]G_i(t) - \frac{c}{2}a_i^2(t)\right)e^{-\rho t}dt \\ \text{soggetto a} & \dot{G}_i(t) = a_i(t) - \delta G_i(t) \\ & G_i(0) = G_0^i \\ & a_i(t) \geq 0 \end{array}$$

Contrariamente a quanto riportato erroneamente in [6] si ha un sistema di N equazioni di *Hamilton-Jacobi-Bellman* della forma:

$$\rho V^i(G) = \max_{a_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \left\{ \left(\pi[\beta - \sum_{h=1}^N G_h]G_i - \frac{c}{2}a_i^2\right) + V^i_{G_i}(a_i - \delta G_i) \right\} \tag{2.16}$$

dove $V^i(G)$ rappresenta la funzione valore del giocatore i-esimo.
Procedendo come nel caso precedente si calcola che

$$a_i^* = \max\left\{ \frac{V^i_{G_i}}{c}, 0 \right\} \tag{2.17}$$

e di conseguenza supponendo che $\frac{V^i_{G_i}}{c} \geq 0$ l'equazione (2.16) diventa:

$$\rho V^i(G) = \pi[\beta - \sum_{h=1}^N G_h]G_i + \frac{(V^i_{G_i})^2}{2c} - \delta V^i_{G_i} G_i \tag{2.18}$$

Dunque similmente a quanto proposto in [7] si cerca una funzione $V^i(G)$ della forma:

$$V^i(G) = \alpha + \gamma_A G_i + \gamma_B \sum_{j \neq i} G_j + \eta_A G_i \sum_{j \neq i} G_j + \frac{\eta_B}{2} \sum_{h \neq j \neq i} G_j G_h + \frac{\epsilon_A}{2} G_i^2 + \frac{\epsilon_B}{2} \sum_{j \neq i} G_j^2 \tag{2.19}$$

Perciò si ottiene $V^i_{G_i} = \gamma_A + \eta_A \sum_{j \neq i} G_j + \epsilon_A G_i$.
Imponendo che soddisfi la (2.18) ed sfruttando il principio di identità dei

polinomi si giunge al seguente sistema:

$$\begin{cases} 2c\rho\alpha = \gamma_A^2 \\ c\rho\gamma_A = c\pi\beta + \gamma_A\epsilon_A - c\delta\gamma_A \\ c\rho\gamma_B = \gamma_A\eta_A \\ c\rho\eta_A = \eta_A\epsilon_A - c\delta\eta_A - c\pi \\ c\rho\eta_B = \eta_A^2 \\ c\rho\epsilon_A = -2c\pi + \epsilon_A^2 - 2c\delta\epsilon_A \\ c\rho\epsilon_B = \eta_A^2 \end{cases} \tag{2.20}$$

Tale sistema risulta facilmente risolvibile (Si può ad esempio calcolare ϵ_A dalla penultima, sostituirlo nella seconda per determinare γ_A e nella quarta per calcolare η_A e poi dedurre i rimanenti) e porta ai seguenti valori dei parametri:

$$\epsilon_A = \begin{bmatrix} \frac{2c\delta+c\rho+\sqrt{(2c\delta+c\rho)^2+8c\pi}}{2} \\ \frac{2c\delta+c\rho-\sqrt{(2c\delta+c\rho)^2+8c\pi}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\gamma_A = \begin{bmatrix} \frac{2c\pi\beta}{c\rho-\sqrt{(2c\delta+c\rho)^2+8c\pi}} \\ \frac{2c\pi\beta}{c\rho+\sqrt{(2c\delta+c\rho)^2+8c\pi}} \end{bmatrix}$$

$$\eta_A = \begin{bmatrix} \frac{-2c\pi}{c\rho-\sqrt{(2c\delta+c\rho)^2+8c\pi}} \\ \frac{-2c\pi}{c\rho+\sqrt{(2c\delta+c\rho)^2+8c\pi}} \end{bmatrix}$$

$$\epsilon_B = \eta_B = \begin{bmatrix} \frac{4c\pi^2}{\rho(c\rho-\sqrt{(2c\delta+c\rho)^2+8c\pi})^2} \\ \frac{4c\pi^2}{\rho(c\rho+\sqrt{(2c\delta+c\rho)^2+8c\pi})^2} \end{bmatrix}$$

$$\gamma_B = \begin{bmatrix} \frac{-4c\pi^2\beta\rho}{\sqrt{(2c\delta+c\rho)^2+8c\pi}-c\rho)^2} \\ \frac{-4c\pi^2\beta\rho}{(\sqrt{(2c\delta+c\rho)^2+8c\pi}+c\rho)^2} \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \frac{2c\pi^2\beta^2}{(c\rho-\sqrt{(2c\delta+c\rho)^2+8c\pi})^2} \\ \frac{2c\pi^2\beta^2}{(c\rho+\sqrt{(2c\delta+c\rho)^2+8c\pi})^2} \end{bmatrix}$$

Anche in questo caso l'obbiettivo è determinare l'equilbrio stazionario stabile del gioco.
Grazie all'ipotesi che $\frac{V^i_{G_i}}{c} \geq 0$ per ogni $i = 1, ..., N$ il giocatore i-esimo si trova a dover risolvere l'equazione:

$$0 = \gamma_A + \eta_A \sum_{j \neq i} G_j + (\epsilon_A - c\delta) G_i$$

Mettendo a sistema le equazioni per tutti i giocatori si trova che tale sistema di ODE è retto dalla matrice[2]:

$$M = \begin{pmatrix} \epsilon_A - c\delta & \eta_A & \dots & \eta_A \\ \eta_A & \epsilon_A - c\delta & \dots & \eta_A \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_A & \eta_A & \dots & \epsilon_A - c\delta \end{pmatrix}$$

Grazie al teorema spettrale la matrice risulta diagonalizzabile con autovalori reali e per il primo teorema di *Gershgorin* gli autovalori si trovano nell'insieme:

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - \epsilon_A + c\delta| \leq (N-1)|\eta_A|\}$$

in virtù delle simmetrie con la matrice M del paragrafo precedente si giunge al seguente risultato:

Proposizione 2.2.1. La matrice M ha esattamente $N - 1$ autovalori della forma $\lambda_i = \epsilon_A - c\delta - \eta_A$ per $i = 1, ..., N - 1$ e $\lambda_N = \epsilon_A - c\delta + (N - 1)\eta_A$

Dimostrazione. La dimostrazione si svolge analogamente al caso precedente ponendo $\epsilon = \epsilon_A$ ed $\eta = \eta_A$ □

Poiché si vuole che l'equilibrio sia stabile si cercano solamente agli autovalori tali per cui la matrice M sia definita negativa. Perciò si procede con l'analisi distinguendo due casi:

- $\epsilon_A = \frac{2c\delta + c\rho + \sqrt{(2c\delta + c\rho)^2 + 8c\pi}}{2}$, $\eta_A = \frac{-2c\pi}{c\rho - \sqrt{(2c\delta + c\rho)^2 + 8c\pi}}$ allora:

  $$\lambda_i = \frac{2c(c\delta^2 + \delta\rho + \pi)}{\sqrt{(2c\delta + c\rho)^2 + 8c\pi} - c\rho} > 0 \quad per \quad i = 1, ..., N - 1$$

  mentre

  $$\lambda_N = \frac{2c(c\delta^2 + \delta\rho + (N+1)\pi)}{\sqrt{(2c\delta + c\rho)^2 + 8c\pi} - c\rho} > 0$$

  quindi M è definita positiva

[2] In [6] gli autori analizzano la matrice della forma quadratica associata alla funzione valore sia nel caso cooperativo che in quest'ultimo, tuttavia al fine di trovare l'equilibrio stazionario stabile le matrici che devono essere definite negative sono quelle riportate sopra

- $\epsilon_A = \frac{2c\delta + c\rho - \sqrt{(2c\delta+c\rho)^2+8c\pi}}{2}$, $\eta_A = \frac{-2c\pi}{c\rho+\sqrt{(2c\delta+c\rho)^2+8c\pi}}$ allora:

  $$\lambda_i = \frac{-2c(c\delta^2+\delta\rho+\pi)}{\sqrt{(2c\delta+c\rho)^2+8c\pi}+c\rho} < 0 \quad per \quad i = 1, ..., N-1$$

  mentre

  $$\lambda_N = \frac{-2c(c\delta^2+\delta\rho+(N+1)\pi)}{\sqrt{(2c\delta+c\rho)^2+8c\pi}+c\rho} < 0$$

  perciò M risulta definita negativa

Di conseguenza si sceglie la funzione $V^i(G)$ definita come in (2.19) con i coefficienti:

$$\begin{aligned}
\epsilon_A &= \frac{2c\delta + c\rho - \sqrt{(2c\delta+c\rho)^2+8c\pi}}{2}\\
\gamma_A &= \frac{2c\pi\beta}{c\rho+\sqrt{(2c\delta+c\rho)^2+8c\pi}}\\
\eta_A &= \frac{-2c\pi}{c\rho+\sqrt{(2c\delta+c\rho)^2+8c\pi}}\\
\epsilon_B &= \frac{4c\pi^2}{\rho(c\rho+\sqrt{(2c\delta+c\rho)^2+8c\pi})^2}\\
\eta_B &= \frac{4c\pi^2}{\rho(c\rho+\sqrt{(2c\delta+c\rho)^2+8c\pi})^2}\\
\gamma_B &= \frac{-4c\pi^2\beta\rho}{(\sqrt{(2c\delta+c\rho)^2+8c\pi}+c\rho)^2}\\
\alpha &= \frac{2c\pi^2\beta^2}{(c\rho+\sqrt{(2c\delta+c\rho)^2+8c\pi})^2}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Si verifica che anche in questo caso la scelta di tali parametri porta alla medesima funzione che si otterrebbe se ci si basasse sul seguente criterio economico:

Proposizione 2.2.2. Si supponga che il profitto marginale π in (2.2) sia nullo. Allora il profitto complessivo $V^i(G)$ è anch'esso nullo.

Procedendo per sostituzione si trovano i seguenti valori:

$$\epsilon_A = \begin{bmatrix} 2c\delta + c\rho \\ 0 \end{bmatrix}; \gamma_A = \eta_A = \epsilon_B = \eta_B = \gamma_B = \alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

Dunque ciò prova che la scelta fatta basandosi sulla richiesta di stabilità dell'equilibrio stazionario risulta giustificata anche da un punto di vista puramente economico. Questo in particolare porta al seguente risultato:

Teorema 2.2.1. Per ogni $i = 1, ..., N$ esistono esattamente due funzioni della forma (2.19) che soddisfano l'equazione (2.18). In particolare ne esiste solamente una la quale soddisfi il criterio della proposizione (2.2.2) e che conduca ad un sistema per la determinazione dell'equilibrio stazionario retto da una matrice definita negativa. Tale funzione si ottiene fissando i parametri come in (2.21)

Anche in questo caso si vuole trovare l'equilibrio stazionario stabile del gioco, il quale evidentemente si ottiene risolvendo il sistema dato dalle equazioni:

$$0 = a_i^* - \delta G_i = \frac{V^i_{G_i}}{c} - \delta G_i = \tfrac{1}{c}(\gamma_A + \eta_A \textstyle\sum_{j \neq i} G_j + \epsilon_A G_i) - \delta G_i$$

equivalente a:

$$0 = \gamma_A + \eta_A \sum_{j \neq i} G_j + (\epsilon_A - c\delta) G_i \tag{2.23}$$

Si fissano ora $k \neq i$ e si sottraggono le equazioni (2.23) per i, k ottenendo:

$$0 = \eta_A(G_k - G_i) + (\epsilon_A - c\delta)(G_i - G_k)$$

la quale impone che necessariamente $G_i = G_k$ per $i \neq k$ e dunque si può riscrivere la (2.23) come:

$$0 = \gamma_A + [(N-1)\eta_A + \epsilon_A - c\delta] G_i \tag{2.24}$$

ovvero sostituendo i valori trovati in (2.21) si conclude che:

$$G_i^* = \frac{\pi\beta}{\pi(1+N) + c\delta(\delta+\rho)} \tag{2.25}$$

Capitolo 3

Conclusioni

Il modello pubblicitario proposto rientra tra i cosiddetti "*Modelli Giocattolo*", ovvero modelli semplificati della realtà che trattano un problema generalmente più complicato al fine di comprenderne i meccanismi di base. In questo caso specifico la semplicità del modello sta nella simmetria del gioco, cioè nel fatto che si assuma che le aziende prese in considerazione abbiano tutte le medesime caratteristiche (profitto marginale, tasso di decadimento del *goodwill*,...). Tale ipotesi, come visto nel capitolo precedente, permette di semplificare notevolmente i conti e allo stesso tempo giungere a dei risultati comunque significativi.
Grazie all'analisi svolta nel capitolo 2 si è giunti a dimostrare che nel modello pubblicitario in esame non vi è unicità nella scelta della funzione valore sia che si decida di studiare il problema da un punto di vista cooperativo e quindi come un problema di controllo ottimo, sia che si scelga di studiarlo considerando le aziende interessate unicamente al proprio profitto ovvero come un gioco alla *Nash*.
Infatti, se si cercano funzioni di *Hamilton-Jacobi-Bellman* di tipo polinomiale, si è visto che si trovano quattro possibili candidate nel caso cooperativo mentre due nel caso non cooperativo, e in entrambi tali funzioni sono della forma più semplice possibile in quanto nessun coefficiente risulta nullo. Si è pertanto dimostrato che nel modello in esame ogni funzione valore di tipo polinomiale ha almeno grado due.
Tra le soluzioni trovate l'unicità è invece conseguenza della richiesta di stabilità dell'equilibrio o della convenienza economica ovvero dell'idea secondo cui un profitto marginale nullo produce un utile complessivo anch'esso nullo. Si è inoltre dimostrato che tali criteri risultano essere equivalenti per tale modello in quanto ambedue conducono in entrambi i casi alla scelta della medesima funzione valore.
La presenza di un'unica funzione di *Hamilton-Jacobi-Bellman* con tali caratteristiche porta a concludere che esista un unico equilibrio stazionario stabile grazie al fatto che la matrice del sistema di ODE è non singolare.

Infine si può osservare come allo scopo di raggiungere l'equilibrio le aziende debbano tutte attuare la medesima strategia e come in tali condizioni esse godano tutte del medesimo livello di *goodwill*, tale risultato è un'evidente conseguenza delle simmetrie del problema.

Bibliografia

[1] Emilio Acerbi and Giuseppe Buttazzo. *Primo corso di Analisi matematica*. Pitagora, 1997.

[2] Tamer Başar and Geert Jan Olsder. *Dynamic noncooperative game theory*. SIAM, 1998.

[3] Alessandra Buratto, Luca Grosset, and Bruno Viscolani. *Ottimizzazione dinamica: modelli economici e gestionali*. Libreria Progetto, 2021.

[4] Engelbert J Dockner, Steffen Jorgensen, Ngo Van Long, and Gerhard Sorger. *Differential games in economics and management science*. Cambridge University Press, 2000.

[5] Dieter Grass, Jonathan P Caulkins, Gustav Feichtinger, Gernot Tragler, Doris A Behrens, et al. *Optimal control of nonlinear processes*. Springer, 2008.

[6] EV Gromova, DV Gromov, and Yu E Lakhina. On the solution of a differential game of managing the investments in an advertising campaign. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 305(1):S75–S85, 2019.

[7] Steffen Jørgensen and Ekaterina Gromova. Sustaining cooperation in a differential game of advertising goodwill accumulation. *European Journal of Operational Research*, 254(1):294–303, 2016.

[8] Oskar Morgenstern and John Von Neumann. *Theory of games and economic behavior*. Princeton university press, 1944.

[9] John F Nash Jr. Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the national academy of sciences*, 36(1):48–49, 1950.

[10] Marc Nerlove and Kenneth J Arrow. Optimal advertising policy under dynamic conditions. *Economica*, pages 129–142, 1962.