

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

Laurea Triennale in Ingegneria dell'Informazione

**Modellizzazione e Controllo
di un Sistema frenante di un aereo**

RELATRICE: Prof.ssa Ing. MARIA ELENA VALCHER

LAUREANDO: ALVISE BON

ANNO ACCADEMICO 2011-2012

Indice

Introduzione	pag. 7
1 Modellistica	pag. 9
2 Controllo in catena aperta	pag. 15
3 Controllo in catena chiusa	pag. 17
3.1 Controllore proporzionale P	
3.1.1 Analisi con il Criterio di Routh	
3.1.2 Analisi con il Criterio di Nyquist	
3.1.3 Analisi con il Luogo delle Radici	
3.2 Controllore PI	
3.3 Controllore PD	
3.4 Controllore PID	
3.5 Controllore <i>Ad Hoc</i>	
3.6 Controllo con condizioni iniziali non nulle	
3.7 Note	
Conclusioni	pag.41
Bibliografia	pag.43

Introduzione

Il sistema preso in considerazione, in questa tesina è il seguente:

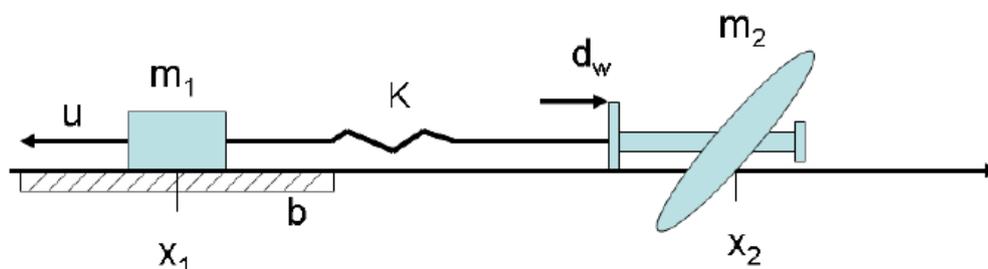


Figura 1 Sistema Frenante Aereo

Esso rappresenta il modello semplificato di un sistema frenante per aerei usato nell'atterraggio, tipicamente su navi portaerei.

L'aereo, dopo aver iniziato la fase di decelerazione azionando i flap e aperto il carrello, cala un gancio con cui si aggancia ad una fune metallica posta ortogonalmente alla direzione del suo moto. Lungo la stessa direzione, a contatto col suolo della pista, scorre un motore responsabile dell'arresto dell'aereo all'interno della pista, ai lati della stessa sono presenti due robuste carrucole su cui scorre la fune metallica attaccata al motore e che viene utilizzata per frenare l'aereo, modulandone la velocità fino a fermarlo completamente all'interno della pista di atterraggio.

Il modello con cui abbiamo analizzato il sistema è rappresentato dalla *Figura 1*, in altre parole l'intero sistema di carrucole viene approssimato come un sistema elastico che frena il moto dell'aereo, a cui va aggiunto il contributo dato dal motore e che viene indicato con il vettore u .

Vogliamo quindi controllare l'atterraggio dell'aereo attraverso un'opportuna forza frenante $u(t)$, in altre parole controllare la posizione dell'aereo agendo tramite il motore (che d'ora in poi chiameremo controllore o compensatore), supponendo il moto unidimensionale e trascurabile l'attrito tra ruote dell'aereo e terreno, ma non la forza di disturbo esercitata dall'aria e indicata con d_w .

Per la progettazione del controllore si fa ricorso ai diagrammi di Bode e Nyquist e ai Luoghi delle Radici, tramite i quali è possibile valutare la bontà della risposta del sistema e per eseguire le simulazioni dei sistemi retroazionati via via analizzati si fa ricorso a MatLab.

Capitolo 1

Modellistica

Il sistema può essere descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + b \dot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = -u \\ m_2 \ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = d_w \end{cases}$$

Dove:

x_1 è la posizione della massa frenante

x_2 è la posizione dell'aereo,

u è la forza frenante del motore e corrisponde al segnale d'ingresso,

m_1 è la massa della zavorra,

m_2 è la massa dell'aereo,

k è la costante elastica della fune,

b è il coefficiente di attrito fra terreno e zavorra,

d_w è la forza di disturbo dovuta dal vento.

Introduciamo, per comodità di notazione, il vettore $Z = (x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)^T$.

In tal modo possiamo riscrivere il sistema nella forma di stato:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_3 \\ \dot{z}_2 = z_4 \\ \dot{z}_3 = -\frac{k}{m_1}(z_1 - z_2) - \frac{b}{m_1}z_3 - \frac{u}{m_1} \\ \dot{z}_4 = \frac{k}{m_2}(z_1 - z_2) + \frac{d_w}{m_2} \end{cases}$$

Quindi considerando come uscita, $y(t)$, la posizione dell'aereo (ovvero $z_2(t) = x_2(t)$), a questo punto possiamo riscrivere il modello di stato in termini matriciali:

$$\begin{cases} \dot{Z} = AZ + B_1 u + B_2 d_w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k/m_1 & k/m_1 & -b/m_1 & 0 \\ k/m_2 & -k/m_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} Z + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/m_1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/m_2 \end{pmatrix} d_w \\ y = CZ = (0 \ 1 \ 0 \ 0) Z \end{cases}$$

La trasformata di Laplace dell'uscita $y(t)$, in assenza dell'ingresso d_w , è:

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1} B_1] U(s) + C(sI - A)^{-1} (0 \ 0 \ 0 \ 1)^T z_4(0).$$

Nel caso in cui si tenga conto anche dell'effetto del disturbo, si ottiene

$$\begin{aligned} Y(s) &= [C(sI - A)^{-1} B_1] U(s) + C(sI - A)^{-1} (0 \ 0 \ 0 \ 1)^T z_4(0) \\ &\quad + [C(sI - A)^{-1} B_2] D_w(s) = \\ &= G_1(s)U(s) + G_2(s)z_4(0) + G_3(s)D_w(s) \end{aligned}$$

Analizzando le varie espressioni si ha:

$$G_1(s) = C(sI - A)^{-1} B_1 = -\frac{m_1}{s[s^3 m_1 m_2 + b s^2 m_2 + k s (m_1 + m_2) + b k]}$$

$$\begin{aligned} G_2(s)z_4(0) &= C(sI - A)^{-1} (0 \ 0 \ 0 \ 1)^T z_4(0) = \\ &= \frac{(s^2 m_1 + s b + k) m_2 v}{s[s^3 m_1 m_2 + b s^2 m_2 + k s (m_1 + m_2) + b k]} \end{aligned}$$

$$G_3(s)B_2 = C(sI - A)^{-1} B_2 = \frac{s^2 m_1 + s b + k}{s[s^3 m_1 m_2 + b s^2 m_2 + k s (m_1 + m_2) + b k]}$$

Tutte le funzioni $G_i(s)$ ($i = 1, 2, 3$) hanno lo stesso denominatore, ma quella che ci interessa è $G_1(s)$ ovvero la funzione di trasferimento che lega la posizione della massa m_2 e la forza u .

Qui di seguito riportiamo i valori numerici che abbiamo assunto per il modello:

$m_1 = 10000 \text{ Kg}$ è la massa della zavorra,

$m_2 = 50000 \text{ Kg}$ è la massa dell'aereo,

$k = 6000 \text{ N/m}$ è la costante elastica della fune e infine

$b = 500 \text{ Ns/m}$ è il coefficiente di attrito fra terreno e zavorra.

Sappiamo inoltre che la velocità di atterraggio è pari a $\dot{x}_2(0) = 20 \text{ m/s}$.

Sostituendo i valori numerici e riconducendoci alla Forma di Bode otteniamo:

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \frac{-10000}{s[5 \cdot 10^8 s^3 + 4 \cdot 10^8 s^2 + 6 \cdot 10^8 s + 8 \cdot 10^7]} = \\ &= \frac{-2 \cdot 10^{-5}}{s(s + 0.1448)(s^2 + 0.6552s + 1.105)} = \\ &= \frac{-15.2637 \cdot 10^{-5}}{s(1 + 6.906s)(1 + 0.5929s + 0.9049s^2)} \end{aligned}$$

Abbiamo introdotto alcune semplificazioni sulla funzione di trasferimento, operando sui coefficienti di $G_1(s)$ arrotondamenti per eccesso o per difetto a seconda dei casi. In definitiva nel seguito assumeremo:

$$G_1(s) = \frac{-15 \cdot 10^{-5}}{s(1 + 7s)(1 + 0.6s + s^2)}$$

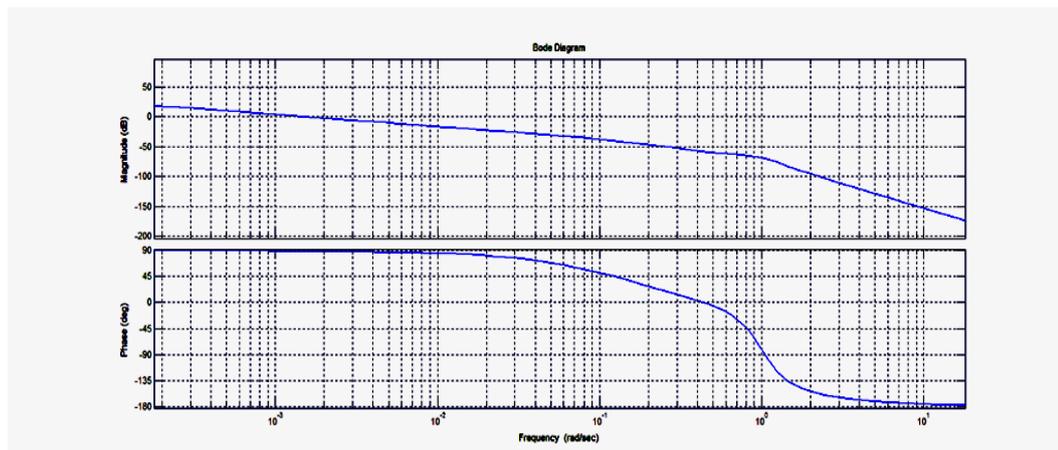


Figura 2 Diagramma di Bode di G_1

In *Figura 2* è illustrato il Diagramma di Bode della risposta in frequenza di $G_1(s)$; grazie ad esso abbiamo osservato che la pulsazione di attraversamento di $G_1(s)$ vale circa $\omega_a \cong 10^{-3} \text{ rad/s}$ e la banda passante del sistema ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G_1(s)$ coincide con ω_a . Per quanto riguarda invece il margine di fase si osserva che vale $m_\varphi \cong 270^\circ$, questo perché alla costante di Bode negativa al numeratore viene attribuita fase 180° . L'analisi corretta va fatta in questo caso analizzando il Diagramma di Nyquist:

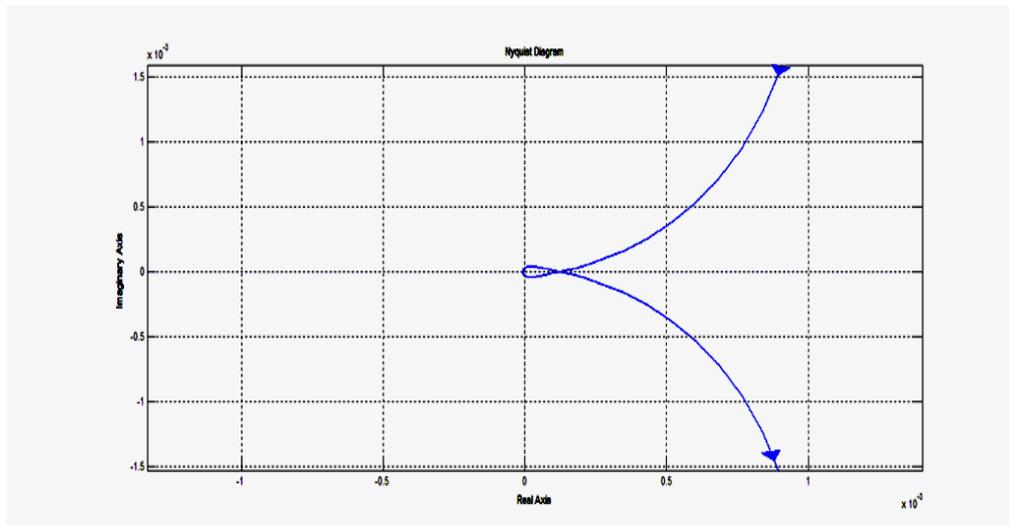


Figura 3 Diagramma di Nyquist di $G_1(s)$

Si rende necessaria una visione più specifica del Diagramma in modo da osservarne meglio l'andamento nell'origine:

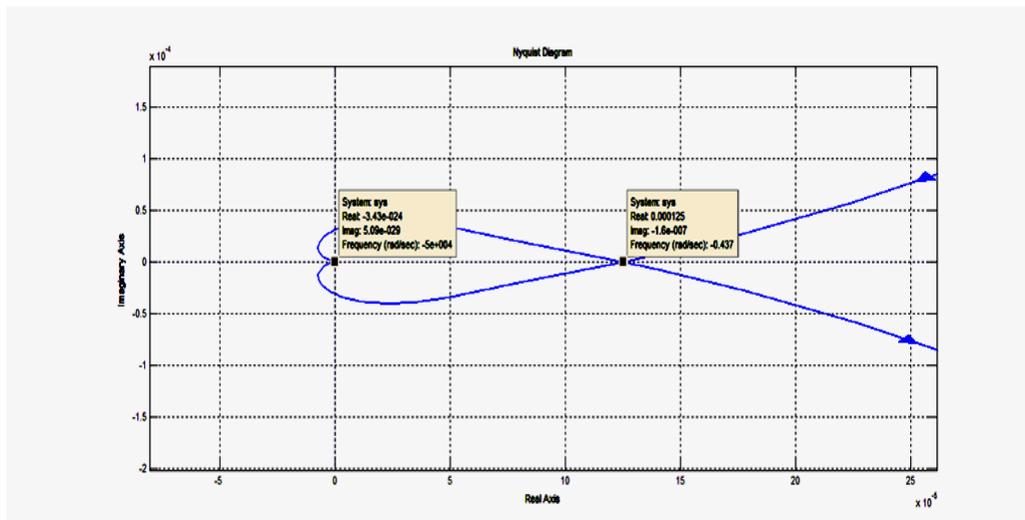


Figura 4 Zoom Figura 3

Notiamo che il margine di fase, che dal Diagramma di Bode risulta essere di 270° , vale 90° in realtà (ovvero la fase corrispondente alla pulsazione di attraversamento vale -90°).

In seguito introdurremo le specifiche progettuali che vorremo ottenere, retroazionando il nostro sistema con diversi controllori, ma abbiamo visto in quest'ultima analisi come il margine di fase valga 90° senza l'impiego di alcun tipo di controllo, mentre per quanto riguarda la pulsazione di

attraversamento vorremo aumentarla in modo da avere una risposta al gradino più pronta. Il nostro sistema rappresenta, seppur in modo semplificato, un controllo sull'atterraggio di un aereo e di conseguenza la componente temporale risulta fondamentale come risultato e sarà necessario aumentare la pulsazione di attraversamento in modo da ottenere tale risultato.

La funzione di trasferimento $G_1(s)$ può essere riscritta in forma simbolica come segue:

$$G_1(s) = \frac{K}{s(1 + \tau s) \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)}$$

In questa forma si vede chiaramente che retroazionando la funzione di trasferimento $G_1(s)$ si ottiene una funzione $W(s)$ di tipo 1, visto il polo nell'origine di $G_1(s)$. Inoltre $G_1(s)$ possiede un polo reale stabile ed infine un termine trinomio anch'esso stabile.

Riportiamo ora in *Figura 5* lo schema a blocchi che rappresenta il sistema sollecitato da un ingresso di tipo gradino. Esso servirà nei successivi punti.

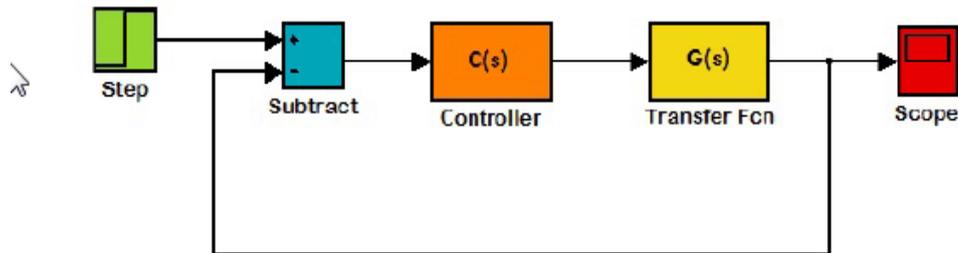


Figura 5 Schema a Blocchi

Useremo quindi per tutte le retroazioni il comando MatLab $y(t) = \text{feedback}(CG_1, 1)$, in modo da ottenere la funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{C(s)G_1(s)}{1 + C(s)G_1(s)}$$

Capitolo 2:

Controllo in catena aperta

Come avevamo precedentemente discusso, la trasformata di Laplace dell'uscita attraverso il sistema è data da

$$Y(s) = G_1(s)U(s) + G_2(s)z_4(0) + G_3(s)D_w(s).$$

Per prima cosa riportiamo il Diagramma di Nyquist della risposta in frequenza di $G_1(s)$ e cioè analizziamo dapprima il sistema senza tenere conto del disturbo del vento d_w .

$$G_1(s) = \frac{-15 \cdot 10^{-5}}{s(1 + 7s)(1 + 0.6s + s^2)}$$

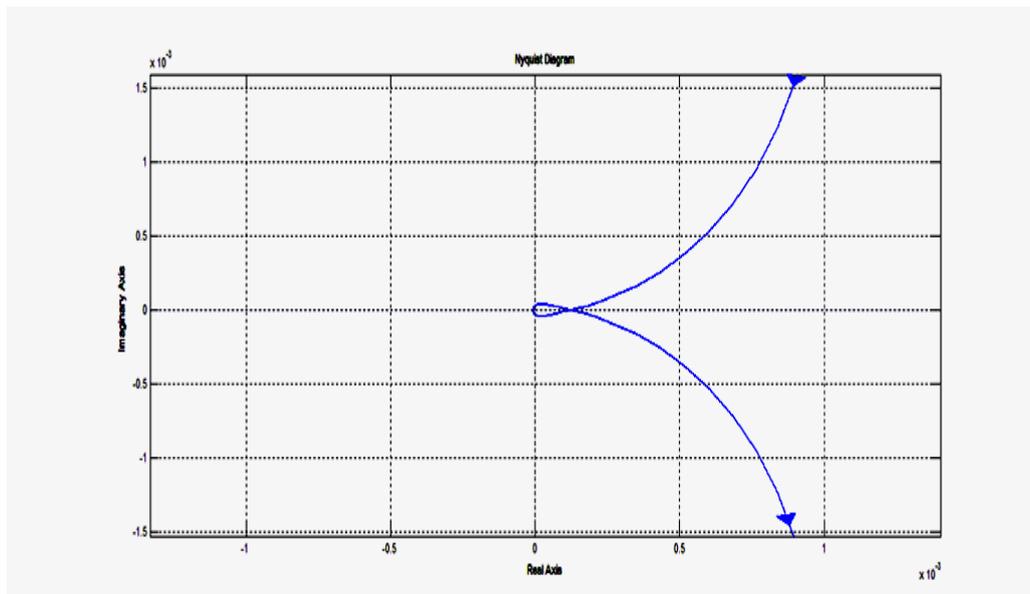


Figura 6 Diagramma di Nyquist di G_1

A causa del polo nell'origine, il diagramma passa per il punto improprio e dobbiamo utilizzare l'Estensione del Criterio di Nyquist (percorso di Nyquist modificato): preso un ε piccolo a piacere e $|R| = \left| \frac{G(0)}{\varepsilon} \right|$, essendo 1 la molteplicità del polo nell'origine, tracciamo una semicirconferenza di raggio R che, in verso orario, parte dall'estremo in basso della figura

(corrispondente a $\omega = -\varepsilon$) e che si unisce all'estremo in alto (corrispondente a $\omega = +\varepsilon$). Notiamo perciò l'instabilità del sistema retroazionato dal diagramma, in quanto il punto critico -1 è interno alla curva ($N=-1$ mentre $n_{G+}=0$, da cui segue che $W(s)$ ha $n_{W+}=1$ polo a parte reale positiva).

Capitolo 3

Controllo in catena chiusa

Nella trattazione successiva, andremo a vedere come i sistemi in catena chiusa, ottenuti in corrispondenza ai diversi controllori, si comportino qualora siano soggetti ad un ingresso a gradino unitario. Di conseguenza vogliamo fissare dei valori per il tempo di salita ed il tempo di assestamento accettabili come specifiche progettuali.

Una volta indicata con $w(t), t \in \mathbb{R}$ (nulla per $t < 0$) la risposta impulsiva del sistema, possiamo considerare la risposta forzata al gradino unitario, che chiameremo $w_{-1}(t) = (w * \delta_{-1})(t) = \int_0^t w(\tau) d\tau$. Si ha che il corrispondente tempo di salita (al 10%) è dato da:

$$t_r = \min \{ t \geq 0 : |w_{-1}(t) - w_{-1}(+\infty)| \leq 0.1 |w_{-1}(+\infty)| \}$$

Ora se consideriamo la relazione $B_p \cdot t_r = H$, con H che assume valori costanti non troppo elevati (abbiamo scelto di porlo pari a 7, in quanto per una funzione di trasferimento di ordine 2 in genere il prodotto $B_p \cdot t_r \cong 3.5$ mentre nel nostro caso la funzione $G_1(s)$ è di ordine 4), ci chiediamo di quanto aumentare la banda passante del sistema retroazionato per avere un t_r di circa 7 secondi. Sfruttando la relazione precedente, ed il fatto che la pulsazione di attraversamento del sistema in catena aperta rappresenti con buona approssimazione la banda passante a 3 dB del sistema in catena chiusa, otteniamo il parametro di specifica nel dominio della frequenza: come pulsazione di attraversamento del sistema in catena aperta dobbiamo imporre $\omega_a \simeq 1 \text{ rad/s}$, mentre per quanto concerne la BIBO stabilità e la sovralongazione della risposta al gradino, un margine di fase $m_\varphi \simeq 90^\circ$. Inoltre imponiamo come specifica di progetto che il sistema sia di **Tipo 1**; l'inseguimento da parte del sistema della rampa lineare in ingresso non è legato alla ricerca della soluzione al problema dell'asservimento di questo sistema, bensì vogliamo ottenere errore nullo al gradino unitario e per fare ciò si rende necessaria la richiesta del Tipo 1 per il nostro sistema.

Analizziamo ora la risposta al gradino del sistema ottenuto per retroazione unitaria da $G_1(s)$, (in altri termini assumiamo $C(s)=1$) e quindi della funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)}$$

Se andiamo a graficare il diagramma di Bode in questo caso otteniamo ovviamente:

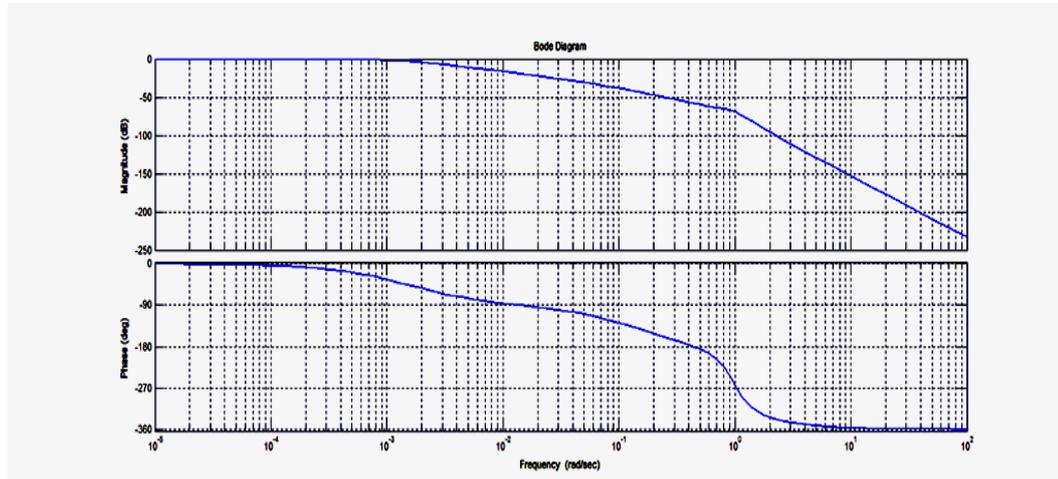


Figura 7 Diagramma di Bode della retroazione unitaria di $G_1(s)$

La banda passante è molto piccola (dell'ordine di 10^{-3} rad/s), di conseguenza avremo una risposta al gradino veramente molto lenta; infatti l'andamento è il seguente:

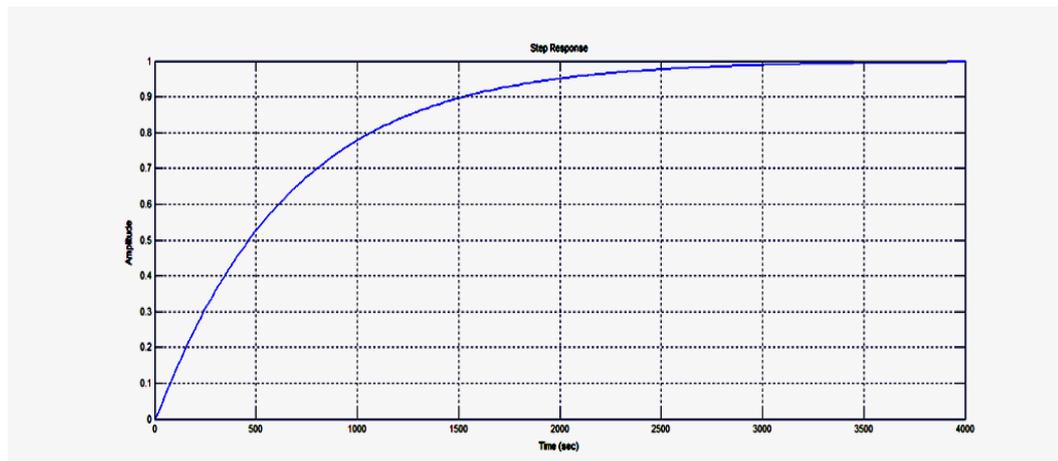


Figura 8 Risposta al gradino di $G_1/1+G_1$

Sapevamo subito dalla *Figura 7* che il nostro primo controllore era inadatto al soddisfacimento delle specifiche di progetto, ma abbiamo calcolato lo stesso il *rise time* (pari a 1500 secondi) del sistema per avere una prima indicazione

su come agire per migliorarlo. Abbiamo trovato che il sistema insegue il segnale gradino unitario con errore che si può considerare nullo solamente intorno ai 4000 secondi e ovviamente la cosa fa sì che come sistema non solo sia scadente, ma anche alquanto fastidioso poiché dato un ingresso a gradino al tempo t_0 avremo una risposta dopo poco più di un'ora.

Proviamo quindi ad utilizzare diverse modalità di controllo per migliorare i parametri di sistema: controllori di tipo P, PI, PD e PID.

Sempre mantenendo i parametri di progetto da cui siamo partiti, cercheremo in ultima analisi, attraverso una sintesi per tentativi, di ottenere un controllore adatto a soddisfare tutte le specifiche senza la necessità di trade-off riguardanti pulsazioni di attraversamento o di margine di fase.

3.1 Controllore proporzionale P

In prima battuta, consideriamo un controllo puramente proporzionale che corrisponde ad una funzione di trasferimento in catena chiusa del tipo

$$W(s) = \frac{KG_1(s)}{1 + KG_1(s)}$$

$$W(s) = K \cdot \frac{\text{num}(G_1(s))}{\text{den}(G_1(s))} \cdot \frac{\text{den}(G_1(s))}{\text{den}(G_1(s)) + K \cdot \text{num}(G_1(s))} =$$

$$= \frac{K \cdot (-15) \cdot 10^{-5}}{s(1 + 7s)(1 + 0.6s + s^2) + K \cdot (-15) \cdot 10^{-5}}$$

Trattandosi di una rappresentazione irriducibile, applichiamo il Criterio di Routh al denominatore per trovare dei vincoli su K per avere stabilità; in seguito ragioneremo sulla stabilità col Criterio di Nyquist, per poi concludere con un'analoga trattazione sfruttando l'analisi del Luogo delle Radici.

3.1.1 Analisi con il Criterio di Routh

Valutiamo il polinomio al denominatore:

$$7s^4 + 5.2s^3 + 7.6s^2 + s - 15 \cdot 10^{-5} \cdot K$$

E ad esso applichiamo il Criterio di Routh,

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 7 & 7.6 & -15 \cdot 10^{-5} \cdot K \\ 3 & 5.2 & 1 & \\ 2 & 6.25 & -15 \cdot 10^{-5} \cdot K & \\ 1 & x & & \\ 0 & -15 \cdot 10^{-5} \cdot K & & \end{array}$$

Dove $x = \frac{5.2 \cdot (-15) \cdot 10^{-5} K - 6.25}{-6.25} = \frac{6.25 + 7.8 \cdot 10^{-5} K}{6.25}$, chiaramente per avere un polinomio di Hurwitz e quindi per garantire la stabilità BIBO si deve avere $6.25 + 7.8 \cdot 10^{-5} K > 0$ cioè $K > -8000$ e $K < 0$.

In dettaglio, per i valori:

- $K < -8000$: si hanno 2 variazioni in prima colonna e quindi 2 poli a parte reale positiva,
- $-8000 < K < 0$: non si hanno variazioni di segno nella prima colonna e quindi si ha BIBO stabilità,
- $K > 0$: si ha 1 variazione di segno nella prima colonna e quindi 1 polo a parte reale positiva.

3.1.2 Analisi con il Criterio di Nyquist

Cerchiamo, al variare di K , i valori di s che annullano il denominatore di $W(s)$; a tal fine c'è utile uno zoom del grafico di Nyquist di $G_1(s)$.

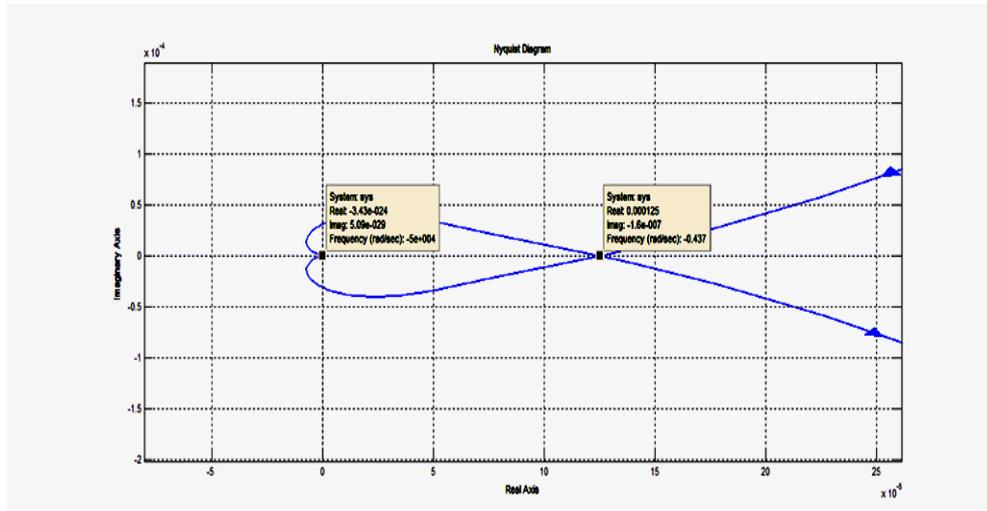


Figura 9=Figura 4 con zoom del Diagramma di Nyquist di $G_1(s)$

Per lo studio del sistema retroazionato in catena chiusa al variare di K , dobbiamo risolvere l'equazione $1 + KG_1(s) = 0$ e quindi considerare ogni range di variabilità del parametro $-\frac{1}{K}$. Si possono evidenziare tre zone basandoci sulle intersezioni del Diagramma di Nyquist con l'asse delle ascisse della funzione di trasferimento $G_1(s)$, in definitiva troviamo che:

- per $-\frac{1}{K} < 0$ cioè per $K > 0$ si ha $N = -1$, $n_{G+} = 0$ di conseguenza $n_W = 1$ cioè $W(s)$ è instabile con 1 polo a parte reale positiva.
- per $0 < -\frac{1}{K} < 12.5 \cdot 10^{-5}$ cioè per $K < -8000$ si ha $N = -2$, $n_{G+} = 0$. Di conseguenza $n_W = 2$ cioè instabilità con 2 poli a parte reale positiva.
- per $-\frac{1}{K} > 12.5 \cdot 10^{-5}$ cioè per $-8000 < K < 0$ si ha $N = 0$, $n_{G+} = 0$. Di conseguenza $n_W = 0$ cioè si ha BIBO stabilità.

Restano i casi limite:

- $K = 0$: viene incluso nella BIBO stabilità in quanto $W(s)=0$ soddisfa la definizione di funzione di trasferimento BIBO stabile;
- $K = -8000$: il grafico passa per il punto -1 per due valori finiti della pulsazione, perciò $W(s)$ ha 2 poli complessi coniugati.

3.1.3 Analisi con il *Luogo delle Radici*

La funzione di cui dobbiamo tracciare il Luogo delle Radici è:

$$G_1(s) = \frac{-15 \cdot 10^{-5}}{s(1 + 7s)(1 + 0.6s + s^2)}$$

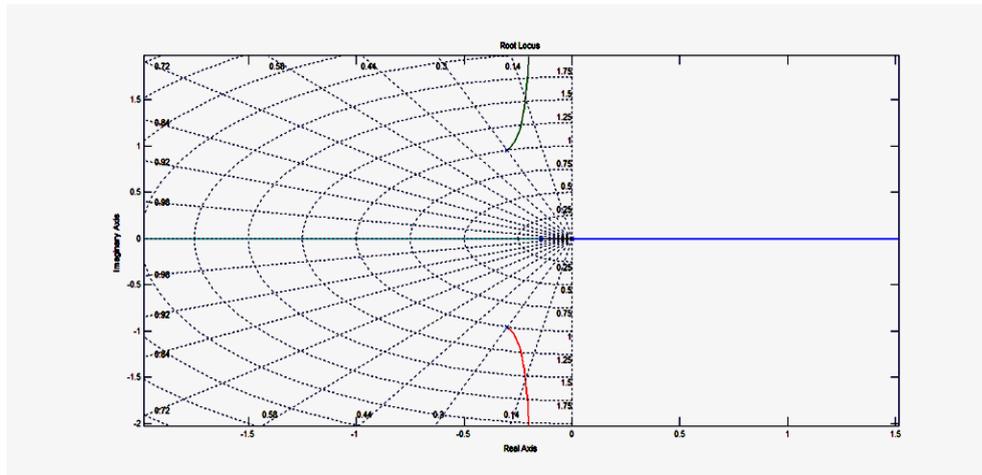


Figura 10 Luogo delle radici positivo di $G_1(s)$

Nella *Figura 10* vediamo che il Luogo delle radici ottenuto dalla funzione di trasferimento $G_1(s)$ ha un polo a parte reale positiva, mentre gli altri sono stabili con parte reale negativa di cui uno strettamente reale e gli altri due con parte immaginaria diversa da zero.

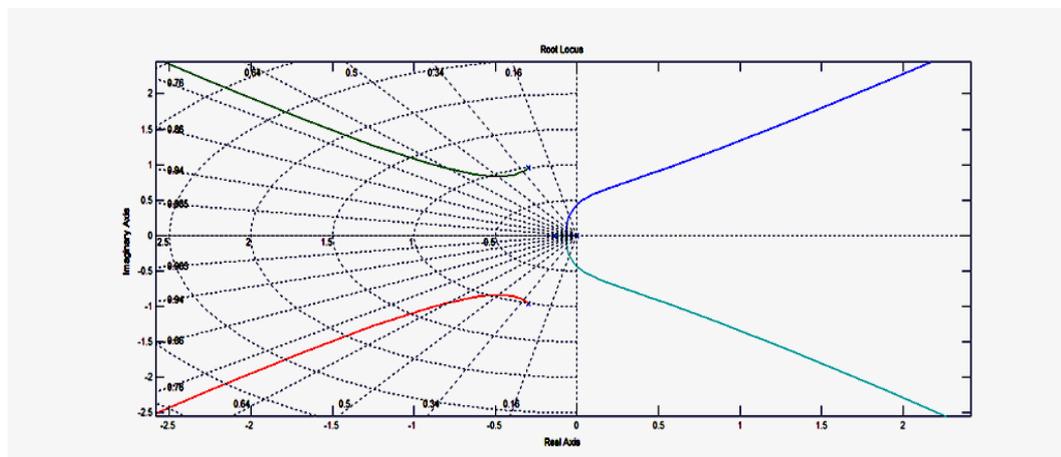


Figura 11 Luogo delle radici negativo di $G_1(s)$

Nella *Figura 11* abbiamo rappresentato il luogo delle radici negativo, come si può vedere esiste un intervallo di variabilità per i $K < 0$ tale per cui ci sia BIBO stabilità. Infatti i punti di variazione di stabilità, cioè le transizioni del luogo in corrispondenza dell'asse immaginario, avvengono per $K = -8000$.

Quindi con quest'analisi otteniamo gli stessi intervalli di valori di K tale per cui il risultante sistema retroazionato risulta BIBO stabile:

- per $K < -8000$ si hanno 2 poli a parte reale positiva,
- per $-8000 < K < 0$ si ha BIBO stabilità,
- per $K > 0$ si ha 1 polo a parte reale positiva.

Ora per il calcolo della risposta al gradino abbiamo considerato un valore interno al range dei K per cui vale la stabilità BIBO, quindi prendiamo ad esempio $K = -5000$ e vediamo la risposta al gradino come si comporta:

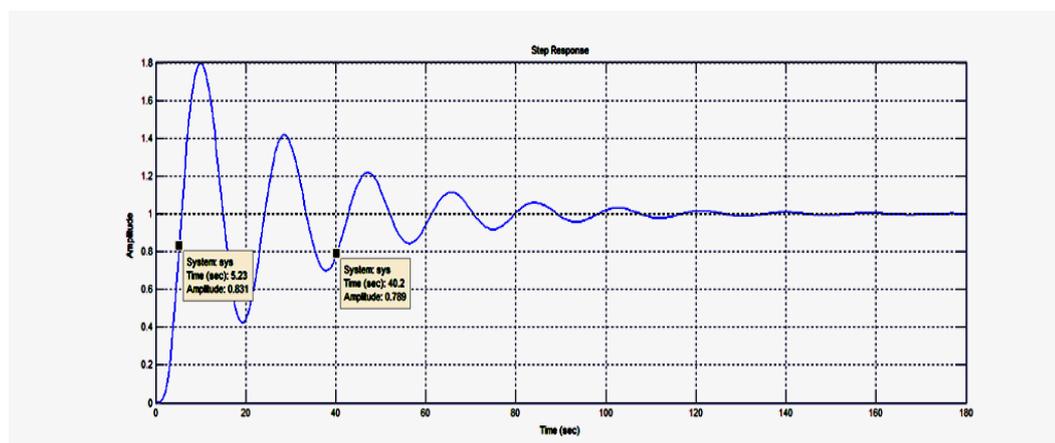


Figura 12 Risposta al gradino con controllo proporzionale

Abbiamo risolto sicuramente il problema delle 3 ore di attesa della risposta e portato il tempo di assestamento a 40 secondi, ma abbiamo introdotto una forte oscillazione iniziale dovuta al guadagno applicato. La consideriamo una forte oscillazione, quella introdotta perché il *rise time* effettivo è di 5 secondi mentre la risposta si assesta intorno ai 40 secondi, oscillando per tutta la durata della fase intermedia. Da ciò si evidenzia l'impossibilità dell'uso di un compensatore puramente proporzionale poiché l'oscillazione, sia in durata sia in ampiezza, dipende fortemente dalla costante applicata e preclude un andamento della risposta al gradino privo di oscillazioni.

Chiaramente il tempo di assestamento risulta troppo alto per un'applicazione pratica, di conseguenza cercheremo di risolvere il quesito sulla distanza percorsa dall'aereo prima di arrestarsi definitivamente con altre tipologie di controllo.

3.2 Controllore PI

Analizziamo il sistema retroazionato con un controllore PI ovvero del tipo :

$$C(s) = \frac{K_i}{s} (1 + \tau s).$$

Consideriamo le specifiche di progetto prima introdotte per scegliere adeguatamente la posizione dello zero da introdurre. Basandoci sulla *Figura 2*, proviamo ad alzare la pulsazione di attraversamento ed il margine di fase introducendo una cancellazione zero-polo; la costante integrativa per la nostra analisi non è vincolante e dopo alcuni tentativi (che qui omettiamo) si è scelto di porla pari a 100 in modo da ottenere un errore alla rampa lineare pari a 0.01, ergo si arriva a

$$C(s) = \frac{-100}{s} (1 + 7s).$$

Calcolando con MatLab il Diagramma di Bode, otteniamo:

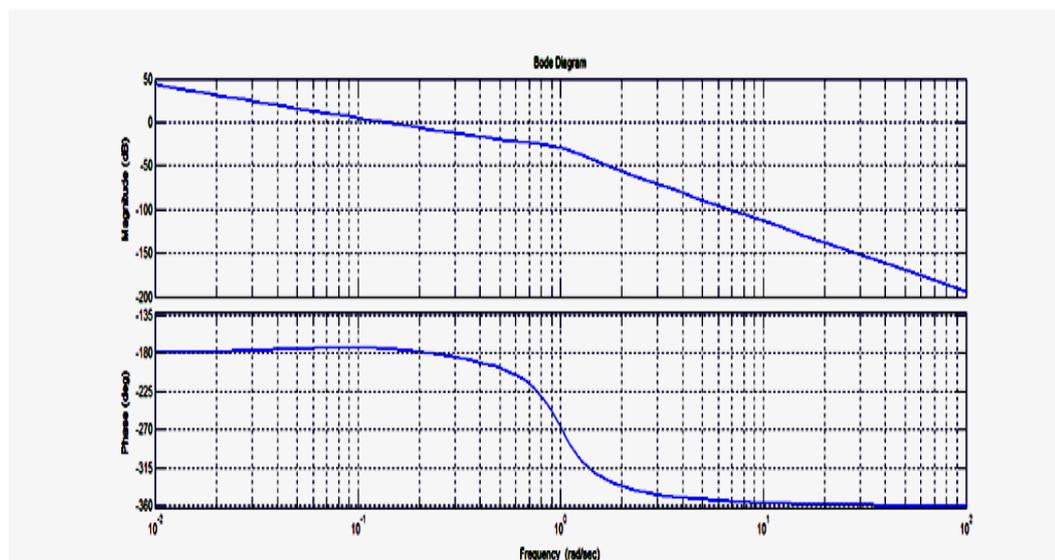


Figura 13 Controllore PI

Con questo primo valore abbiamo un margine di fase $m_\varphi \cong 0^\circ$ ed una pulsazione di attraversamento $\omega_a \cong 10^{-1} \text{rad/s}$; per ottenere un margine di fase $m_\varphi \cong 90^\circ$ ed una pulsazione di attraversamento dell'ordine di 1rad/s si rende necessario l'utilizzo di un controllore di tipo diverso.

E' doveroso un piccolo ragionamento riguardante la fase iniziale del sistema da noi preso in esame: la fase iniziale vale -90° dovuta al polo nell'origine dato dalla funzione di trasferimento $G_1(s)$, introdurre un ulteriore polo nell'origine porta subito la fase a -180° .

Quindi abbiamo preferito considerare tipologie di controllori differenti per raggiungere le specifiche progettuali, poiché chiaramente avendo una fase iniziale di -90° , abbassarla subito a -180° con l'introduzione di un ulteriore polo nell'origine rende più laborioso il raggiungimento delle specifiche da noi poste come obiettivo.

3.3 Controllore PD

Analizziamo il sistema agendo su di esso tramite un controllore di tipo $C(s) = K_p \cdot (1 + \tau s)$; vista la posizione dei poli nella funzione di trasferimento $G_1(s)$, decidiamo di collocare lo zero del controllore in modo tale da introdurre la cancellazione con il polo singolo, in modo da alzare pulsazione di attraversamento e margine di fase. Le condizioni sulla scelta dell'errore a regime alla rampa lineare valgono anche in questo caso e quindi imponiamo $K_p = -100$, ottenendo $C(s) = -100 \cdot (1 + 7s)$.

Analizzando il Diagramma di Bode della funzione $C(s)G_1(s)$ (*Figura 14*) osserviamo che la pulsazione di attraversamento vale circa 10^{-2}rad/s , la quale non permette al nostro sistema di reagire prontamente a livello di *rise time* e tempo di assestamento

$$C(s)G_1(s) = \frac{15 \cdot 10^{-3}}{s(1 + 0.6s + s^2)}$$

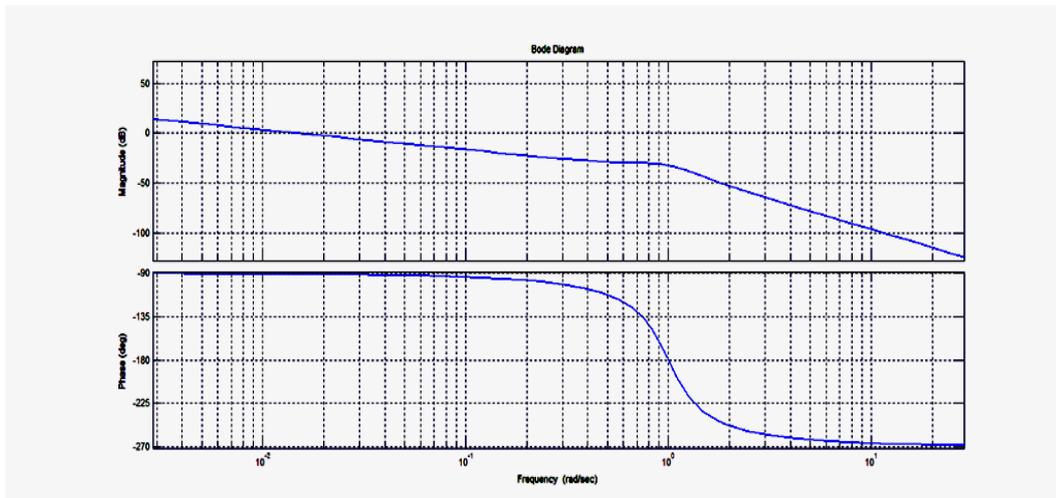


Figura 14 Diagramma di Bode del controllore PD

Riusciamo ad ottenere una pulsazione di attraversamento maggiore di quella ottenuta dal primo controllore ma non ancora dell'ordine di 1 rad/s , perché, come si può vedere dal diagramma di Bode di $C(s)G(s)$, otteniamo $\omega_a \cong 10^{-2} \text{ rad/s}$. In compenso abbiamo un margine di fase pari a $m_\varphi \cong 90^\circ$ e quindi il sistema retroazionato è ampiamente stabile. Nonostante il mancato raggiungimento della condizioni specifica di progetto riguardante la pulsazione di attraversamento, analizziamo la risposta al gradino del sistema dopo l'azione del controllore PD, per vedere se in qualche modo sia possibile alleggerire le specifiche progettuali senza discostarsene troppo.

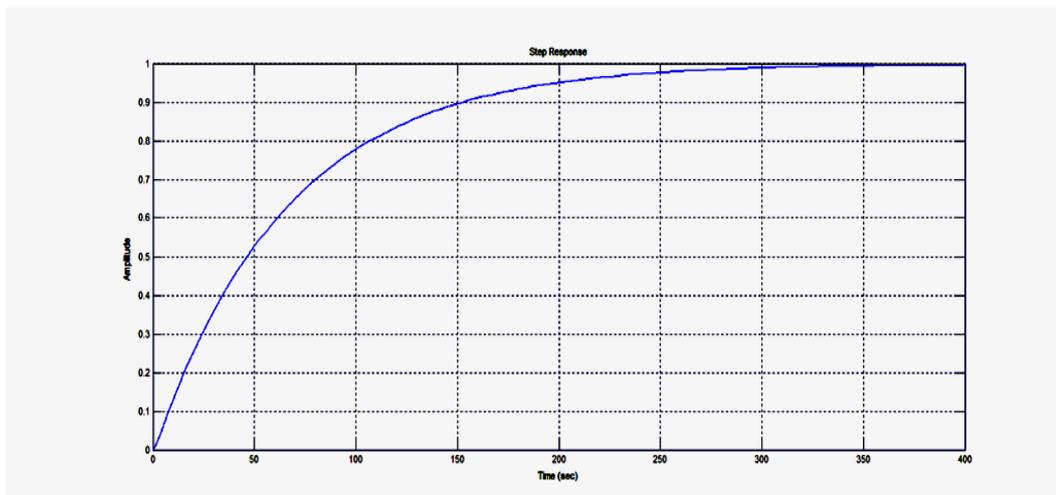


Figura 15 Risposta al gradino con controllore PD

Come ci aspettavamo, la pulsazione di attraversamento influisce negativamente sul *rise time* che risulta valere circa 200 secondi.

Ammettiamo di avere la possibilità di porre $K_p = -1000$, allora riusciremmo ad avere una diminuzione di un fattore 10 in ambito di *rise time* avendo con ingresso un gradino. Infatti ponendo $K_p = -1000$ otteniamo:

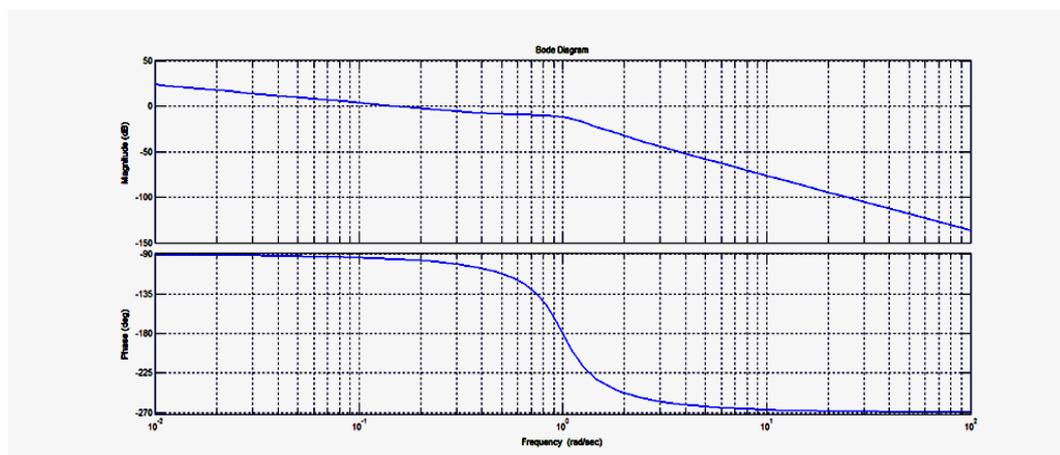


Figura 16 Diagramma di Bode di CG_1 con $K=-1000$

Cioè otteniamo una pulsazione di attraversamento pari a 10^{-1}rad/s e se analizziamo la risposta al gradino:

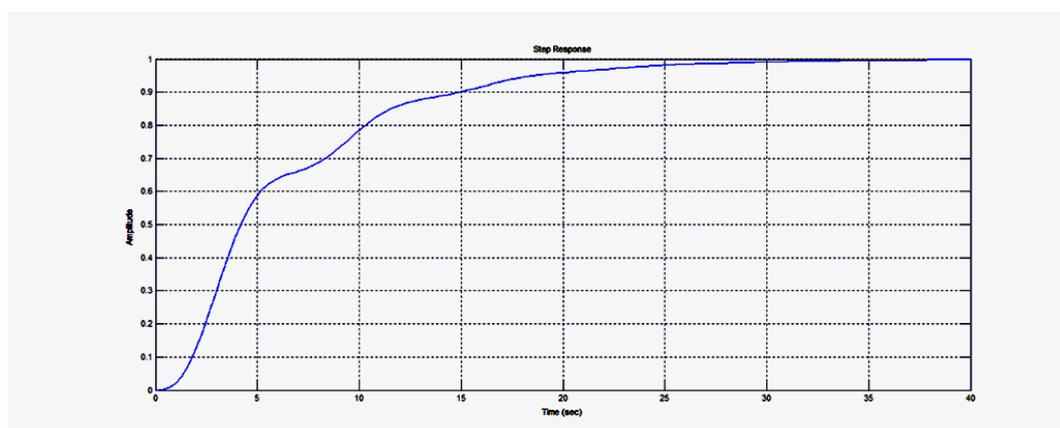


Figura 17 Risposta al gradino con $K=-1000$

Ovvero otteniamo un tempo di salita di poco superiore a 15 secondi, purtroppo la costante necessaria al raggiungimento di questo valore di tempo di assestamento, tende ad essere troppo elevata e inoltre con una costante alta abbiamo ottenuto un tempo all'incirca doppio rispetto a quello che ci siamo prefissati, per cui un controllore di questa tipologia non è soddisfacente.

3.4 Controllore PID

Completiamo l'analisi sintetizzando un controllore PID per soddisfare le seguenti:

- $\omega_a \cong 1 \text{ rad/s}$
- Tipo 1
- $m_\varphi \cong 90^\circ$

Quindi il controllore sarà del tipo $C(s) = \frac{K_i}{s} (1 + \tau s)(1 + \psi s)$ con $K_i = -100$.

Analogamente a quanto fatto con i controllori precedenti, decidiamo di introdurre una cancellazione zero-polo con il polo singolo e proviamo a vedere cosa comporta porre anche il secondo zero del controllore in corrispondenza dello stesso. In definitiva

$$C(s) = -\frac{100}{s} (1 + 7s)^2$$

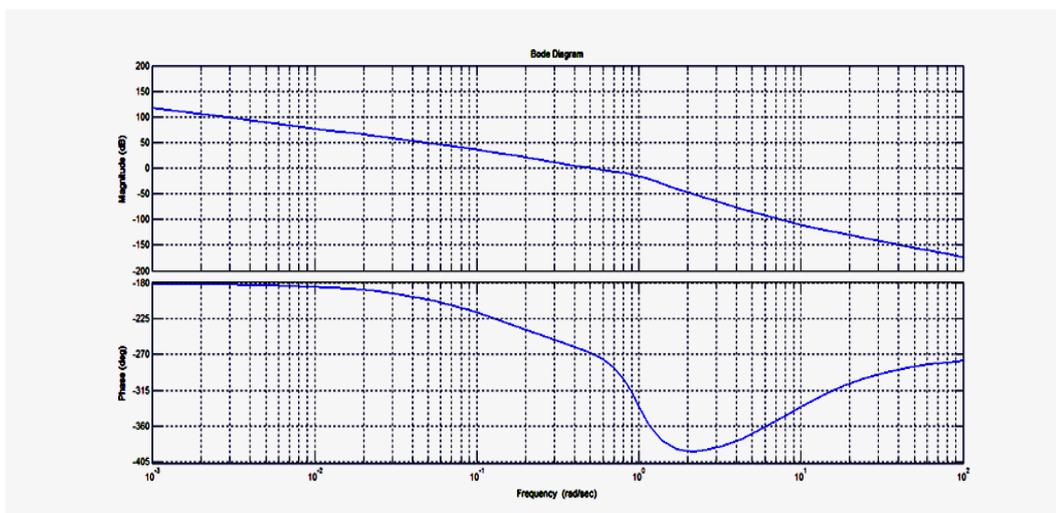


Figura 18 Diagramma di Bode con controllo di tipo PID

Come per il controllore PI, il polo nell'origine presente nella funzione di trasferimento $G_1(s)$ sommato a quello introdotto dal nostro controllore di tipo PID, porta la fase iniziale a -180° . La conclusione che ne traiamo è che la posizione del secondo zero deve essere a bassa frequenza in modo da bilanciare, seppur in modo approssimativo, l'effetto del secondo polo nell'origine. Se scegliamo $\tau = 7, \psi = 10000$ e quindi

$C(s) = \frac{-100}{s} (1 + 7s)(1 + 10000s)$ non otteniamo un risultato soddisfacente perché:

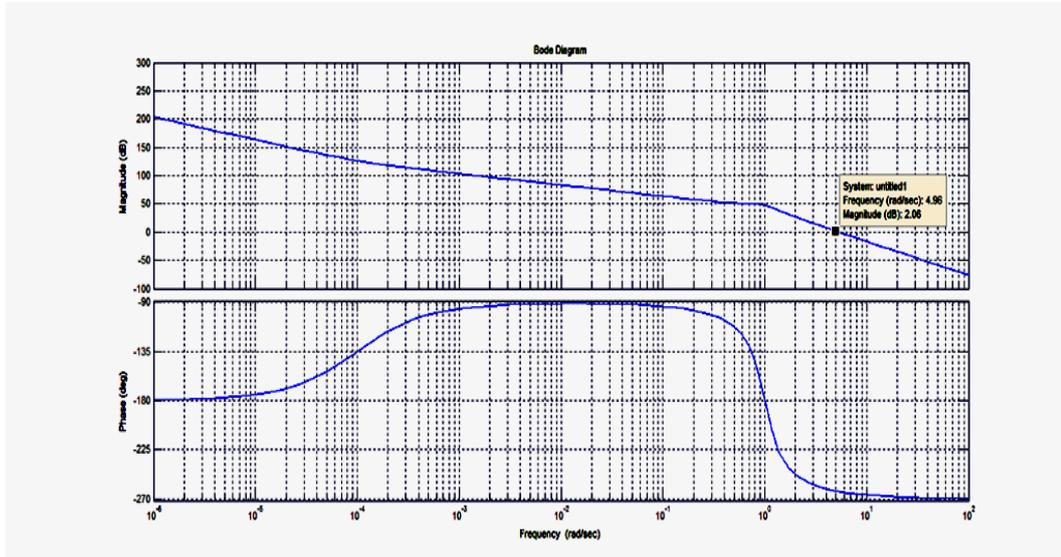


Figura 19 Diagramma di Bode con controllo di tipo PID

Come possiamo vedere non riusciamo ad ottenere il margine di fase che ci siamo imposti all'inizio. Ma per risolvere il problema basta abbassare il valore della costante integrativa per ottenere il risultato da noi cercato. Attraverso diversi tentativi abbiamo scelto di porre $K_i = -1/10$ e ottenuto così facendo:

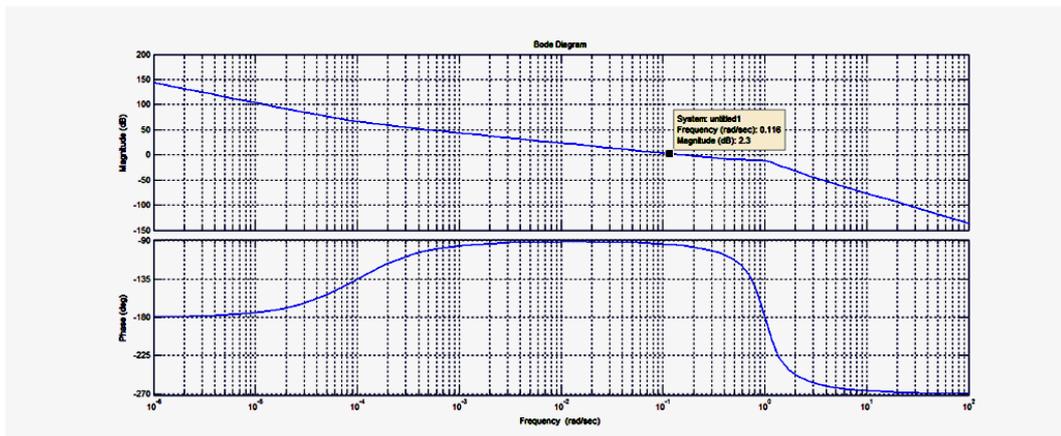


Figura 20 Diagramma di Bode con controllo di tipo PID

Riassumendo:

$$C(s) = -\frac{1}{10s}(1 + 7s)(1 + 10000s)$$

Così facendo abbiamo ottenuto un margine di fase di circa 90° e una pulsazione di attraversamento di poco inferiore a 1 rad/s e quindi abbiamo trovato una soluzione efficiente con cui poter retro azionare il nostro sistema

Analizziamo ora come per i precedenti controllori, la risposta al gradino del sistema retroazionato:

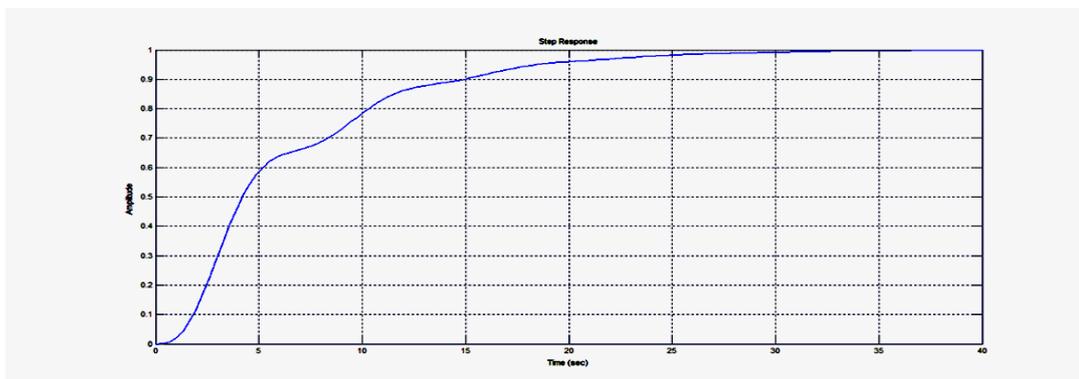


Figura 21 Risposta al gradino con controllore PID

Abbiamo raggiunto un *rise time* di circa 15 secondi, cioè circa il doppio rispetto a quanto avevamo richiesto come tempo di salita per la risposta al gradino unitario da parte del sistema retroazionato con il controllore PID precedentemente sintetizzato.

Il valore ottenuto è da considerarsi troppo elevato, in quanto la pulsazione di attraversamento è di poco inferiore a 1 rad/s ma questa piccola differenza (il Diagramma di Bode è su scala logaritmica) porta un ritardo indesiderato nella risposta del sistema retroazionato all'ingresso di un gradino unitario.

Dovremo quindi ottenere una pulsazione di attraversamento pari a quella richiesta dalle specifiche con maggiore precisione, rispetto a quella raggiunta con un controllo di tipo PID.

3.5 Controllore Ad Hoc

Riportiamo le specifiche di progetto:

- $\omega_a \cong 1 \text{ rad/s}$
- Tipo 1
- $m_\varphi \cong 90^\circ$

Come già fatto in precedenza applichiamo un guadagno negativo in modo da avere come costante di Bode $K_{CG_1} = K_{G_1} \cdot K_C > 0$ e così facendo possiamo applicare il Criterio di Bode sulla BIBO stabilità del sistema retroazionato, scegliamo $K_{CG_1} = -100$ come già fatto in precedenza, ricavando:

$$\tilde{C}(s)G_1(s) = \frac{15 \cdot 10^{-3}}{s(1 + 7s)(1 + 0.6s + s^2)}$$

Analizziamone il Diagramma di Bode:

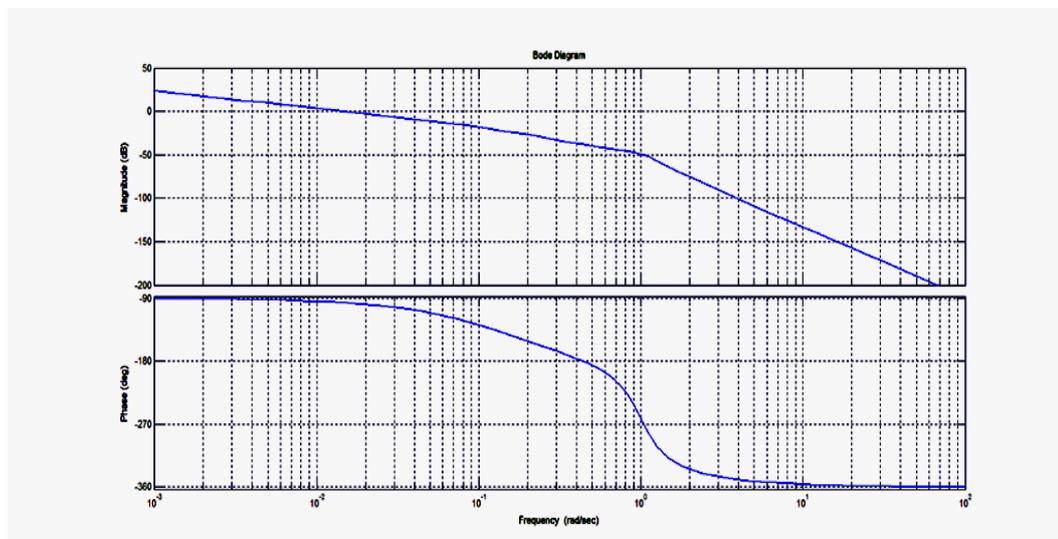


Figura 22 Controllore ad hoc

Il margine di fase è accettabile, ma altrettanto non si può dire della pulsazione di attraversamento perché è dell'ordine di 10^{-2} rad/s . Proviamo ad introdurre una rete anticipatrice prima della pulsazione di attraversamento per aumentare la stessa. Abbiamo scelto di porla in 10^{-3} rad/s e 10^{-2} rad/s e quindi applicare un controllore

$$C(s) = -100 \frac{(1 + 10^3 s)}{(1 + 10^2 s)}$$

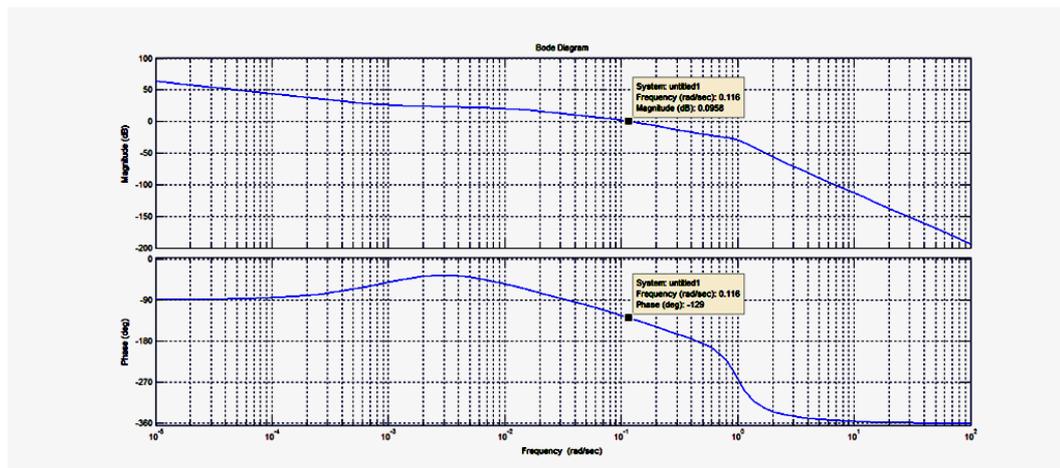


Figura 23 Controllore ad hoc

La pulsazione di attraversamento risulta essere intorno a 10^{-1} rad/s e la fase vale all'incirca -135° , cioè il margine di fase vale 45° ; si rende necessario l'impiego di un ulteriore zero stabile per poter alzare la pulsazione di attraversamento e conseguentemente la banda passante. Notiamo che la posizione del polo doppio dato dal termine trinomio nella funzione $G_1(s)$ abbassa di un fattore 180° la fase e quindi il margine di fase, di conseguenza introducendo poli ci allontaniamo dalla soluzione del problema.

Basandoci sui risultati finora ottenuti decidiamo di porre

$$C(s) = -100(1 + s)(1 + 7s)$$

Abbiamo cioè eliminato il polo nella coppia zero-polo di ordine uno e abbiamo introdotto uno zero con pulsazione pari a quella del termine trinomio. Ogni considerazione basata sul fatto che sia impossibile sintetizzare un controllore con funzione di trasferimento impropria verrà fatta nel prossimo paragrafo, cioè in [3.7 Note](#).

Consideriamo ora il prodotto tra funzioni di trasferimento $G_1(s)C(s)$ e tracciamone il diagramma di Bode (*Figure 24 e 25*), così facendo otteniamo:

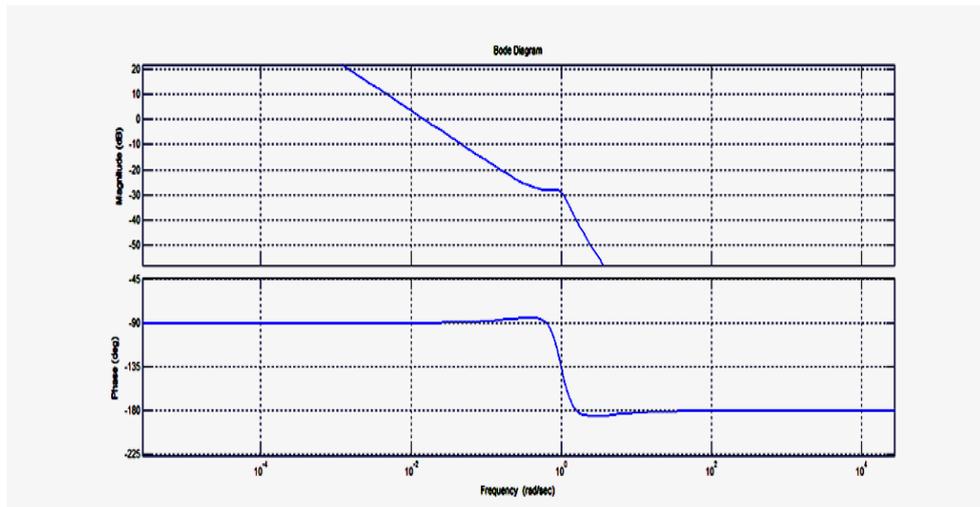


Figura 24 Controllore ad hoc

Il margine di fase ottenuto è ampiamente stabile e pari a 90° , ma la pulsazione di attraversamento vale circa 10^{-2} rad/s , di conseguenza dovremo introdurre una rete anticipatrice in modo da portare la pulsazione al valore richiesto dalle specifiche di progetto.

Riassumendo otteniamo:

$$C(s) = -100 \frac{(1 + 10000s)(1 + s)(1 + 7s)}{(1 + 100s)}$$

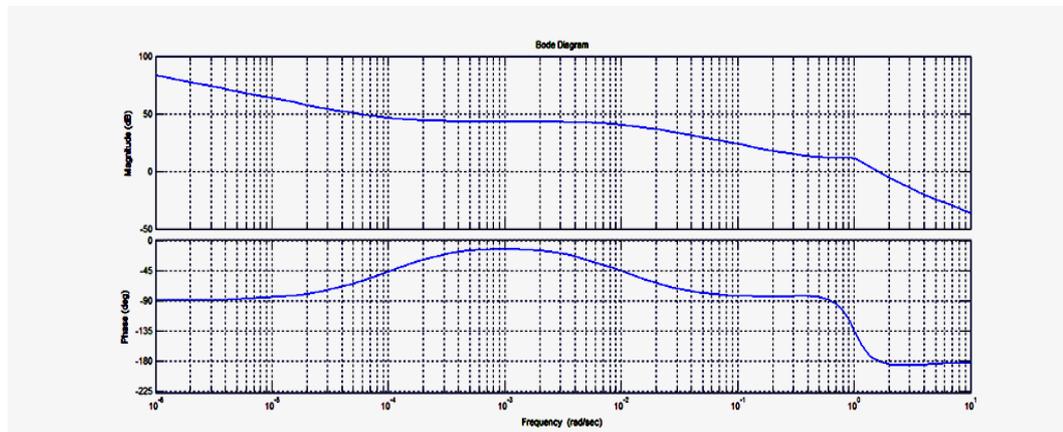


Figura 25 Controllore ad hoc con rete anticipatrice

La pulsazione di attraversamento risulta adeguata ma altrettanto non possiamo dire per quanto concerne il margine di fase, poiché esso risulta valere circa 0° . Si rende necessario l'impiego di un ulteriore zero in modo da ottenere un margine di fase strettamente positivo.

Abbiamo scelto di porre un secondo zero in $(1 + 7s)$ ottenendo:

$$C(s) = -100 \frac{(1 + 10000s)(1 + s)(1 + 7s)^2}{(1 + 100s)}$$

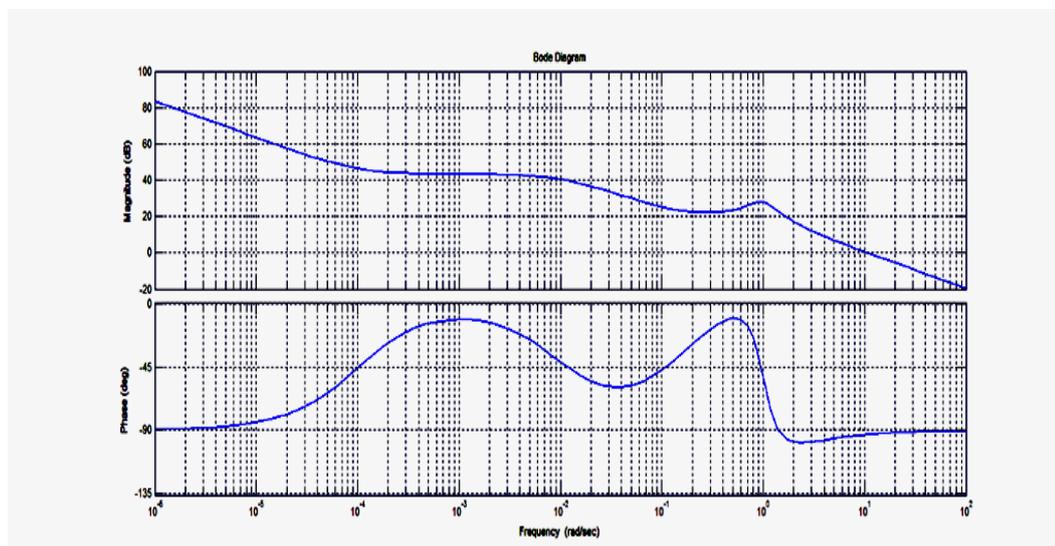


Figura 26 Controllore ad hoc

Come possiamo facilmente vedere il margine di fase vale 90° come da specifiche, mentre la pulsazione di attraversamento vale 10 rad/s . Basta abbassare il fattore costante per soddisfare quindi anche la specifica riguardante la pulsazione di attraversamento.

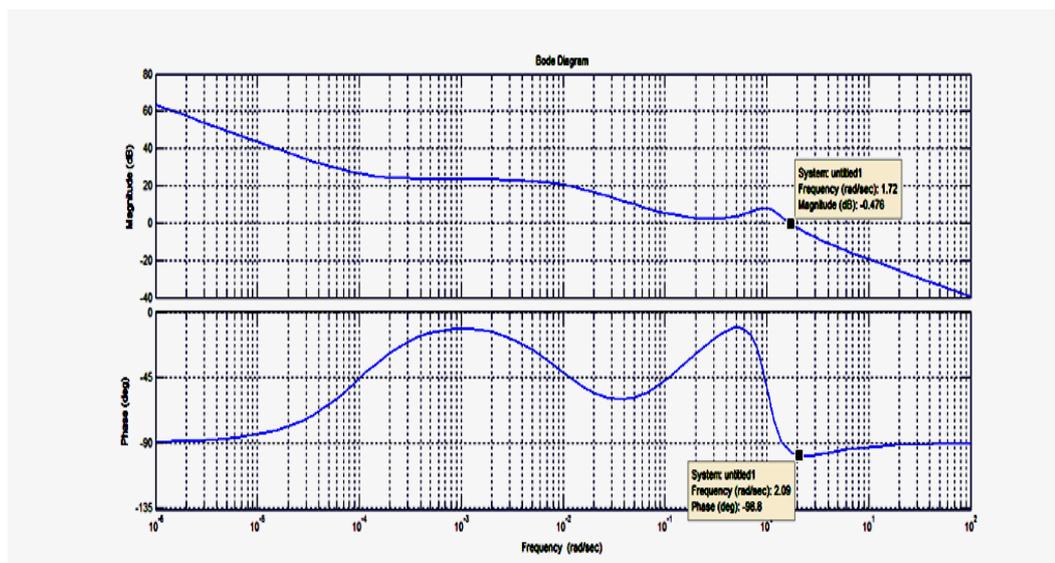


Figura 27 Controllore ad hoc

In definitiva il controllore *ad hoc* è:

$$C(s) = -10 \frac{(1 + 10000s)(1 + s)(1 + 7s)^2}{(1 + 100s)}$$

Analizziamo ora la risposta al gradino del sistema ottenuto con retroazione con quest'ultimo controllore $C(s)$:

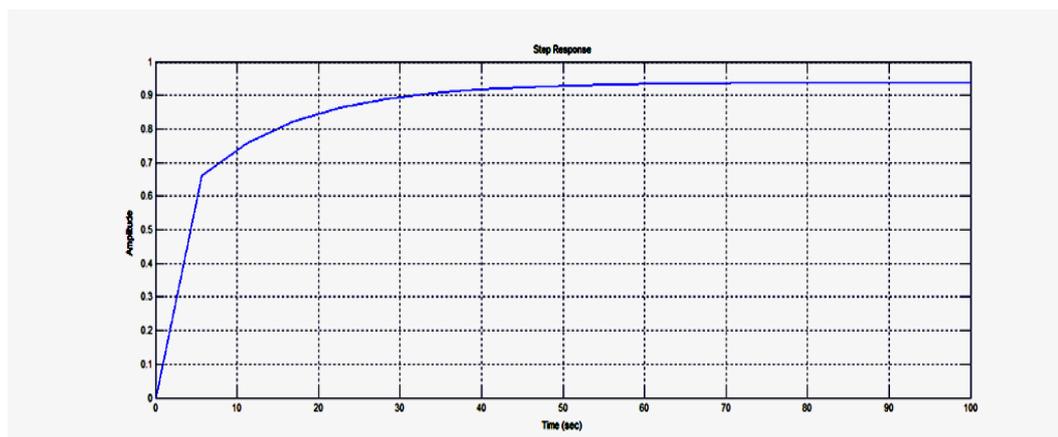


Figura 28 Risposta al gradino con Controllore ad hoc

Notiamo che il tempo di assestamento è piuttosto alto rispetto ai 7 secondi che volevamo ottenere (vale 30 secondi), ma la causa è semplicemente il basso guadagno iniziale. Se cominciamo a far variare il parametro otteniamo:

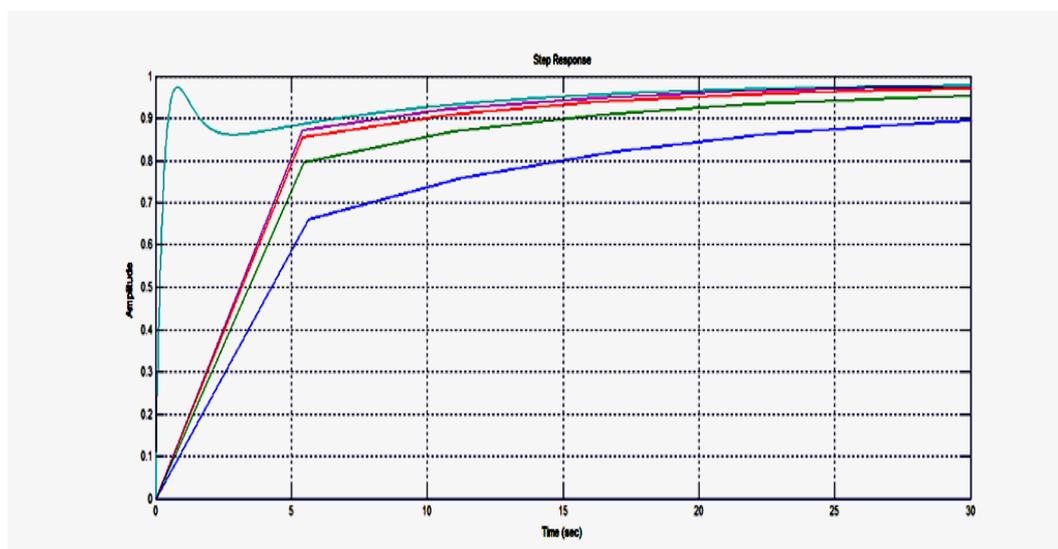


Figura 29 Risposte al gradino al variare della costante K

Dove i diversi grafici corrispondono a diversi valori della costante: blu corrisponde a $K = -10$, verde a $K = -20$, rosso a $K = -30$, , viola a $K = -35$, azzurro a $K = -40$.

Per chiarezza riportiamo il grafico con la risposta più significativa per la nostra applicazione, cioè per $K = -35$:

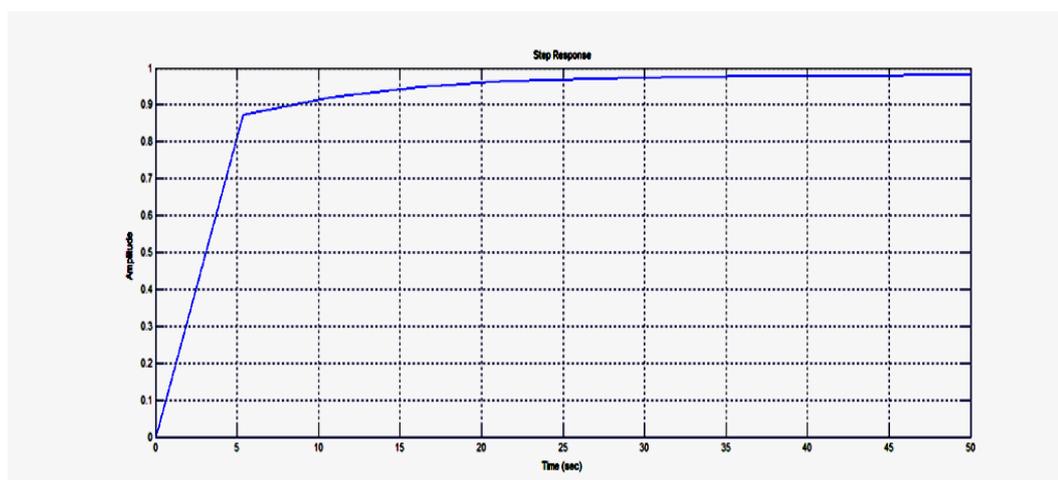


Figura 30 Risposta al gradino con costante $K=-35$

Se immaginiamo il moto dell'aereo durante l'atterraggio, possiamo considerare completata l'azione del controllore qualora l'aereo abbia raggiunto una velocità tale per cui l'azionamento dei freni da parte del pilota porti l'aereo ad arrestarsi senza ulteriori ausili esterni. Di conseguenza, se adottiamo questa ipotesi, il vincolo sul tempo di salita posto da noi all'inizio può considerarsi soddisfatto, in quanto in 7 secondi il sistema raggiunge il segnale 90%, dalle nostre assunzioni possiamo dire che dopo 7 secondi la velocità dell'aereo è tale per cui il pilota può azionare i freni ed arrestare l'aereo senza l'impiego di un ulteriore controllo esterno.

3.6 Controllo con condizioni iniziali non nulle

Abbiamo sintetizzato con successo un controllore in grado di soddisfare i parametri progettuali che ci siamo prefissati, passiamo ora all'analisi del comportamento del sistema retroazionato, tenendo conto delle condizioni iniziali (velocità di atterraggio all'istante $t_0 = 0$ s pari a 20 m/s). Per fare ciò abbiamo introdotto un ulteriore ingresso al sistema e qui abbiamo riportato lo schema a blocchi su cui ci siamo basati:

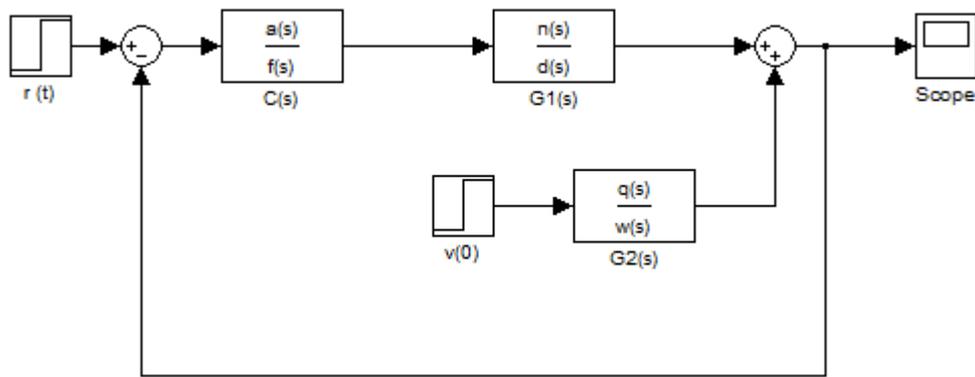


Figura 31 Schema a blocchi con condizioni iniziali

Se consideriamo una pista d'atterraggio su una portaerei, la sua lunghezza media varia tra i 160 metri e i 200 metri. Possiamo prendere come riferimento $D = 180$ metri per la lunghezza della pista e assumere come obiettivo che l'aereo si fermi ad una distanza $d = 150$ metri rispetto alla posizione iniziale di atterraggio.

L'ingresso $r(t)$ corrisponde alla posizione raggiunta dall'aereo quando la sua velocità è nulla, e abbiamo scelto di porlo pari a $d\delta_{-1}(t)$ in modo da avere la sicurezza che l'aereo, dopo l'impiego del nostro controllore, rimanga all'interno della pista.

Dopo il primo blocco sommatore, troviamo il controllore $C(s)$ precedentemente analizzato, successivamente il segnale entra nel blocco che rappresenta la funzione di trasferimento di partenza $G_1(s)$.

All'uscita di quest'ultimo, prima della retroazione, dobbiamo sommare il contributo della funzione di trasferimento $G_2(s)$ moltiplicata per la

condizione iniziale $v(0) = 20 \text{ m/s} = \dot{x}_2(0)$. Per motivi tecnici abbiamo posto il secondo ingresso a gradino (SIMULINK tratta solo funzioni di trasferimento strettamente proprie) ma è bastato porre un filtro $sG_2(s)$ in modo così da avere una rappresentazione equivalente al nostro sistema: come ingresso $v(0)\delta(t)$ e come funzione di trasferimento $G_2(s)$.

Grazie all'impiego di Simulink abbiamo ottenuto il seguente grafico illustrativo dell'uscita del sistema (ovvero della posizione dell'aereo sulla pista di atterraggio):

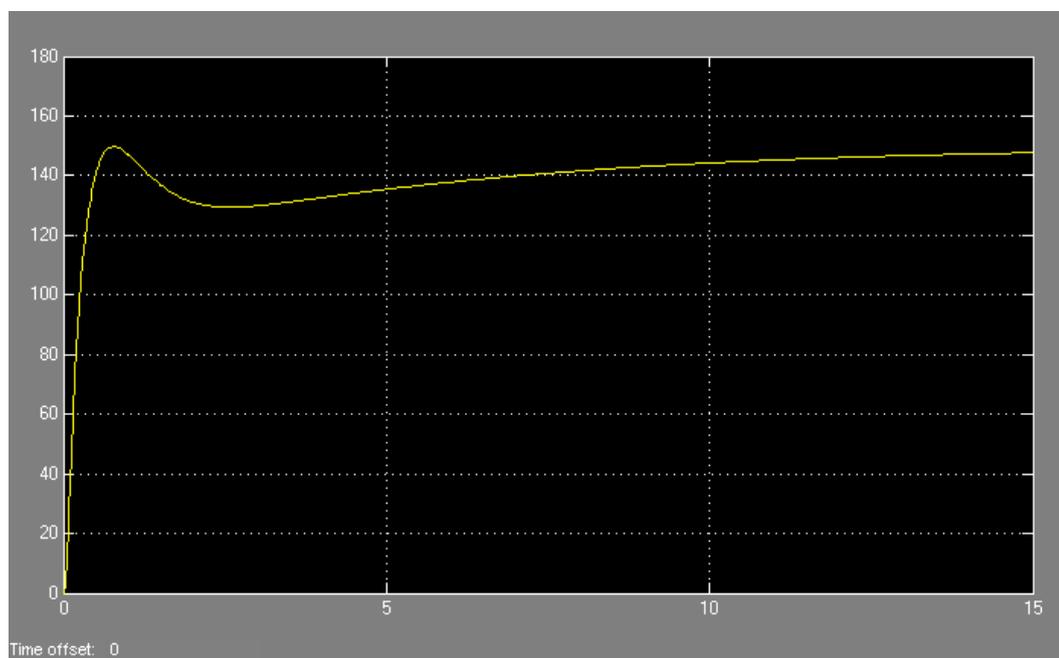


Figura 32 Scope con Simulink dell'uscita $y(t)$ con condizioni iniziali non nulle

Come si può vedere dalla figura, nonostante l'introduzione della condizione iniziale, l'istante in cui il sistema si avvicina al valore 150 continua ad essere di 7 secondi, inoltre il valore D posto da noi come limite superiore non viene raggiunto in quanto l'aereo si arresta intorno ai 150 metri. Ciò significa che il controllo da noi applicato è solido anche in presenza di disturbi e di condizioni iniziali non nulle.

3.7 Note

Nelle trattazioni precedenti abbiamo omesso di trattare un piccolo dettaglio: non è possibile creare un compensatore con funzione di trasferimento impropria come abbiamo fatto sempre nei nostri tentativi.

Tuttavia basta porre un sufficiente numero di poli in alta frequenza in modo da rendere ogni funzione di trasferimento stabile; mettendoli abbastanza lontani dalla pulsazione di attraversamento possiamo, ad esempio, rendere il compensatore di tipo PID reale e proprio

$$C(s) = \frac{K (1 + 10s)^2}{s (1 + 10^{-6}s)^2}$$

Ciò vale per il controllore di tipo PID, ma anche per tutti gli altri infatti, preso un controllore generico

$$\tilde{C}(s) = \frac{\sum_{n=1}^N (1 + \tau_n s) \left(1 + \frac{2\xi_n}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)}{\sum_{m=1}^M (1 + \rho_m s) \left(1 + \frac{2\xi_m}{\omega_m} s + \frac{s^2}{\omega_m^2}\right)}, \quad M < N$$

Possiamo ottenere un controllore strettamente proprio introducendo M-N poli situati dopo la pulsazione di attraversamento che nel nostro ultimo caso vale $\omega_a = 1 \text{ rad/s}$; in questo modo otteniamo un controllore $C(s)$ il quale nel range di pulsazioni che ci interessano, ha un comportamento analogo a quello di $\tilde{C}(s)$.

Conclusioni

Nella nostra analisi abbiamo considerato un sistema instabile e con dei semplici controllori di tipo P, PI, PD, PID abbiamo cercato di soddisfare delle specifiche che c'eravamo posti all'inizio.

Partendo da specifiche temporali note, siamo risaliti tramite la relazione tra banda passante e rise time alle specifiche nel dominio della frequenza per poter tracciare i diversi Diagrammi di Bode dopo aver applicato al sistema le diverse tipologie di controllo sopra citate. Fatto questo abbiamo evidenziato come la risposta al gradino non fosse soddisfacente alla nostra applicazione dei diversi controllori, per questo abbiamo ottenuto tramite una sintesi per tentativi un controllore ad hoc, adatto cioè ad essere applicato al sistema da noi preso in analisi. Per questo controllore abbiamo poi analizzato la risposta al gradino ed evidenziato l'andamento di essa al variare del parametro costante concludendo poi che una piccola modifica avrebbe portato alla soluzione riguardante il tempo di salita dopo l'azione del controllore ad hoc.

La nostra trattazione è mirata all'applicazione dei metodi di analisi fondamentali nello studio dei Controlli Automatici, una trattazione completa ed esaustiva riguardante il meccanismo con cui si svolge fisicamente e meccanicamente l'atterraggio di un aereo esula dai nostri scopi e richiede strumenti diversi, ma soprattutto è fondamentale non introdurre approssimazioni sia numeriche sia concettuali.

Bibliografia

Testi:

M. Bisiacco, M.E. Valcher, Controlli Automatici, Ed. Libreria Progetto, Padova, 2008.

Siti Internet:

- <http://www.centropiaggio.unipi.it/course/fondamenti-di-automatica-regolazione-e-controllo-dei-sistemi-meccanici.html>
- http://it.wikipedia.org/wiki/Controlli_automatici
- http://en.wikipedia.org/wiki/Arresting_gear



Figura 33 Sistema Frenante