

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

The seal of the University of Padua is a large, faint watermark in the background. It is circular and contains the Latin text 'UNIVERSITAS STUDII PADUENSIS' around the perimeter. In the center, there is a shield with two figures: on the left, a woman holding a wheel and a staff; on the right, a man holding a staff. Below the shield is the Roman numeral 'MCCXXII'.

**Calcolo dei momenti di corrente per la ricostruzione  
in tempo reale della frontiera di plasma**

Candidato:  
**Matteo Bonotto**  
Matricola 1057554

Relatore:  
**Prof. Paolo Bettini**  
Correlatore:  
**Prof. Angelo Cenedese**



*A voi che avete creduto in me.*



## Sommario

Nei dispositivi per ricerche su plasmi confinati magneticamente le prestazioni del sistema di controllo si basano su una precisa e veloce identificazione della geometria di plasma: per questo motivo nel presente documento si descrive una metodologia di ricostruzione in tempo reale della frontiera di plasma partendo dal calcolo dei momenti di corrente toroidale di plasma di ordine inferiore. Il risultato fondamentale che costituisce la base del lavoro è dato dalla relazione esatta che permette di calcolare i momenti di corrente conoscendo il campo induzione lungo una curva chiusa che contiene la sezione poloidale di plasma. Per prima cosa si studia un metodo che, attraverso la combinazione con opportuni coefficienti delle misure di campo normale e tangente fornito dai sensori reali di ITER, permetta di ricostruire i momenti nel caso magneto-statico, per dare una stima sufficientemente precisa di questi. Si passa dunque allo studio dell'evoluzione di un plasma, con lo scopo di creare un modello in grado di identificare in tempo reale la sua frontiera: ciò si ottiene dalla combinazione del codice IAIA per l'identificazione statica della frontiera di plasma con un algoritmo che, attraverso il calcolo dei momenti di corrente, permette la ricostruzione in tempo reale delle correnti indotte nei conduttori passivi.

**Parole chiave:** momenti di corrente toroidale, frontiera di plasma, ricostruzione in tempo reale.



## Abstract

In magnetic confinement fusion devices the control system accuracy relies on a precise and quick identification of plasma boundary: for this reason, in this document is described a real time plasma boundary reconstruction method which is based upon the computation of low order moments of toroidal current density. The fundamental result at the base of the work is given by an exact relation that allows current moments computation knowing the induction field measurements along a closed line, placed around plasma poloidal cross section. First of all it has been searched a current moments reconstruction method based on the linear combination of ITER real tangential and normal sensors measurements, using an optimization coefficients set. Then the magneto-dynamic case has been investigated with the aim of building a real-time plasma boundary reconstruction: such a model is obtained by means of the combination of the static reconstruction code IAIA with a new real-time passive currents evaluation algorithm. Through the current moments computation this allows the real-time eddy currents trend reconstruction within passive conductors.

**Keywords:** toroidal current moments, plasma boundary, real-time reconstruction.





## Ringraziamenti

Per prima cosa rivolgo i miei più sinceri ringraziamenti al professor Paolo Bettini, per il suo costante e inesauribile sostegno dedicatomi in questi mesi, nonché per tutte le conoscenze e le competenze di cui ho avuto il privilegio di arricchirmi. Sono fermamente convinto che, se privo della sua supervisione, non avrei portato a termine un lavoro altrettanto ben fatto. Confermo inoltre la mia gratitudine al professor Angelo Cenedese, per il tempo che mi ha gentilmente concesso.

Secondo, ma non per importanza, spetta un ringraziamento speciale alla mia famiglia, con particolare riservo ai miei genitori. Spero, quando sarò il mio momento, di riuscire ad essere un genitore capace proprio come loro lo sono stati per me. Oltre ai ringraziamenti dovuti e forse troppo raramente restituiti, rivolgo a mia sorella Chiara l'augurio che arrivi presto il giorno in cui sarò io a consegnarle la corona d'alloro. A questo punto estendo i ringraziamenti anche ai miei nonni, paterni e materni, nella speranza di aver conservato quanto più possibile del tesoro che sono stati i loro insegnamenti.

Rivolgo a Mirka un ringraziamento tanto grande quanto la pazienza che, in questi mesi, è riuscita a portare nei miei confronti, perché il sostegno ricevuto dal suo amore è stato profondo e inesauribile.

Proseguo ringraziando personalmente tutti gli amici e le amiche di ieri e di oggi che hanno colorato le mie giornate: questo traguardo è, oltre che mio, anche loro, perché ognuno a modo suo ha contribuito a rendere meno impervio questo lungo cammino.



# INDICE

<b>Elenco delle figure</b>	<b>III</b>
<b>1 Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1 Perché fusione? . . . . .	1
1.2 Stato dell'arte e progetto ITER . . . . .	2
<b>2 Il problema magneto-stazionario in simmetria assiale</b>	<b>5</b>
2.1 Equilibrio di un plasma assial-simmetrico . . . . .	5
2.1.1 Geometria del problema e considerazioni preliminari . . . . .	5
2.1.2 Legge di Ampere . . . . .	6
2.1.3 Equazione di Grad-Shafranov . . . . .	7
2.1.4 Calcolo del campo induzione in un generico punto dello spazio . . . . .	8
2.1.5 Frontiera di plasma . . . . .	10
2.2 Momenti della densità di corrente toroidale di plasma . . . . .	12
2.2.1 Definizione . . . . .	12
2.2.2 Calcolo dei momenti di corrente lungo il bordo di un dominio chiuso . . . . .	13
<b>3 Diagnostica magnetica</b>	<b>17</b>
3.1 Principali tecniche di diagnostica magnetica . . . . .	17
3.1.1 Misure di campo magnetico e di flusso . . . . .	17
3.1.2 Misura della corrente di plasma . . . . .	20
3.1.3 Misura di resistività e potenza ohmica . . . . .	21
3.2 Diagnostica magnetica in ITER . . . . .	27
<b>4 Ricostruzione dei momenti di plasma di ordine inferiore nel caso statico</b>	<b>31</b>
4.1 Calcolo dei momenti di plasma secondo definizione . . . . .	31
4.2 Ricostruzione dei momenti di plasma da curve continue . . . . .	32
4.2.1 Considerazioni preliminari . . . . .	32
4.2.2 Costruzione delle misure di campo magnetico . . . . .	33
4.2.3 Caso 1: circonferenza esterna al vessel . . . . .	34
4.2.4 Caso 2: curva interna al vessel . . . . .	38

4.3	Ricostruzione dei momenti di plasma da un numero ridotto di misure . . . . .	41
4.3.1	Presentazione del problema . . . . .	41
4.3.2	Il problema di ottimizzazione . . . . .	41
4.3.3	Verifica dei risultati . . . . .	44
4.3.4	Risultati . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Ricostruzione in tempo reale della frontiera di plasma</b>	<b>51</b>
5.1	Trattazione teorica sullo studio della dinamica . . . . .	51
5.1.1	Considerazioni preliminari . . . . .	51
5.1.2	Correnti parassite indotte nei conduttori passivi . . . . .	52
5.1.3	Effetto delle correnti nei passivi sulle misure di campo . . . . .	55
5.1.4	Modello filamentare . . . . .	62
5.2	Ricostruzione delle correnti parassite attraverso il metodo dei momenti di corrente . . . . .	64
5.3	Ricostruzione dinamica della frontiera di plasma . . . . .	78
5.3.1	Il codice IAIA per la ricostruzione statica della frontiera di plasma . . . . .	78
5.3.2	Estensione del codice IAIA per il caso dinamico . . . . .	81
5.3.3	Risultati e confronti . . . . .	82
5.3.4	Implementazione simulink del modello . . . . .	97
<b>6</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>99</b>
<b>A</b>	<b>Polinomi per il calcolo dei momenti della corrente toroidale di plasma</b>	<b>101</b>
A.1	Soluzione polinomiale dell'equazione di Grad-Shafranov omogenea . . . . .	101
A.2	Coniugato della soluzione dell'equazione di Grad-Shafranov omogenea . . . . .	105
A.3	Caratterizzazione dei polinomi per gli ordini inferiori . . . . .	108
<b>B</b>	<b>Ricerca del X-Point per mezzo delle funzioni base sull'elemento biquadratico lagrangiano</b>	<b>111</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>117</b>

## ELENCO DELLE FIGURE

2.1	Sistema di riferimento in coordinate cilindriche . . . . .	6
2.2	Spira circolare elementare. . . . .	9
2.3	Frontiere di plasma nel caso di configurazione limiter (blu) e diverted (rosso). . . . .	11
2.4	Esempio di plasma diverted e relativa frontiera. . . . .	11
3.1	Pick-up coil. . . . .	19
3.2	Sensore ad effetto Hall. . . . .	19
3.3	Raffigurazione schematica di una bobina di Rogowski. . . . .	22
3.4	Anello utilizzato nella misura <i>Volts per turn</i> . . . . .	22
3.5	Volume generico d'inviluppo della curva $\Gamma$ . . . . .	24
3.6	Vista d'insieme dei sensori pick-up. . . . .	28
3.7	Vista d'insieme delle flux loops. . . . .	28
3.8	Vista d'insieme dei sensori a sella. . . . .	29
4.1	Dominio $\Omega_p$ dove è definito il plasma. . . . .	33
4.2	Circonferenza $\hat{\gamma}(\zeta)$ . . . . .	37
4.3	Valore del campo $\vec{B}_{pol}$ lungo la curva $\hat{\gamma}(\zeta)$ . . . . .	37
4.4	Curva $\hat{\gamma}(\zeta)$ . . . . .	40
4.5	Valore del campo $\vec{B}_{pol}$ lungo la curva $\hat{\gamma}(\zeta)$ . . . . .	40
4.6	Disposizione reale dei sensori normali e tangenti. . . . .	42
4.7	Configurazione di equilibrio EQUIL00005 . . . . .	45
4.8	Configurazione di equilibrio EQUIL00014 . . . . .	45
4.9	Configurazione di equilibrio EQUIL00027 . . . . .	46
4.10	Configurazione di equilibrio EQUIL00030 . . . . .	46
4.11	Configurazione di equilibrio EQUIL00035 . . . . .	47
4.12	Configurazione di equilibrio EQUIL00039 . . . . .	47
4.13	Configurazione di equilibrio EQUIL00067 . . . . .	48
4.14	Configurazione di equilibrio EQUIL00090 . . . . .	48
4.15	Configurazione di equilibrio EQUIL00098 . . . . .	49
4.16	Configurazione di equilibrio EQUIL00131 . . . . .	49
4.17	Configurazione di equilibrio EQUIL00090 con correnti esterne. . . . .	50
4.18	Configurazione con 12 correnti interne definite a priori. . . . .	50

5.1	Schema di numerazione dei conduttori passivi. . . . .	53
5.2	Particolare raffigurante triangular support e vertical structure. . . . .	53
5.3	Correnti reali nel vessel interno rettificato. . . . .	56
5.4	Andamento tridimensionale delle correnti reali nel vessel interno. . . . .	56
5.5	Correnti reali nel vessel esterno rettificato. . . . .	57
5.6	Andamento tridimensionale delle correnti reali nel vessel esterno. . . . .	57
5.7	Correnti reali nel triangular support interno rettificato. . . . .	58
5.8	Andamento tridimensionale delle correnti reali nel triangular support. . . . .	58
5.9	Correnti reali nella vertical structure interno rettificato. . . . .	59
5.10	Andamento tridimensionale delle correnti reali nella vertical structure. . . . .	59
5.11	Mappa del flusso reale in condizioni stazionarie e sensori più soggetti agli effetti delle correnti nei passivi. . . . .	60
5.12	Mappa del flusso prodotto dalle correnti nei passivi in un istante del transitorio e sensori più soggetti ai suoi effetti. . . . .	60
5.13	Andamento temporale dell'errore di misura del sensore AA-8. . . . .	61
5.14	Andamento temporale dell'errore di misura del sensore AB-8. . . . .	61
5.15	Andamento temporale dell'errore di misura del sensore AB-10. . . . .	61
5.16	Ellisse delle correnti equivalenti. . . . .	63
5.17	Andamento di $I_p$ (nero) e ricostruzioni (rosso= $I_p^*$ , blu= $I_p^{**}$ ) con relativo errore. . . . .	67
5.18	Andamento di $z_p$ (nero) e ricostruzioni (rosso= $z_p^*$ , blu= $z_p^{**}$ ) con relativo errore. . . . .	67
5.19	Andamento di $r_p$ (nero) e ricostruzioni (rosso= $r_p^*$ , blu= $r_p^{**}$ ) con relativo errore. . . . .	67
5.20	Andamento delle correnti indotte nei passivi: nero=reali, rosso=ricostruite. . . . .	68
5.21	Andamento delle correnti indotte nei passivi: nero=reali, rosso=ricostruite. . . . .	68
5.22	Andamento delle correnti indotte nei passivi: nero=reali, rosso=ricostruite. . . . .	68
5.23	Andamento delle correnti indotte nei passivi: nero=reali, rosso=ricostruite. . . . .	69
5.24	Andamento delle correnti indotte nei passivi: nero=reali, rosso=ricostruite. . . . .	69
5.25	Andamento delle correnti indotte nei passivi: nero=reali, rosso=ricostruite. . . . .	69
5.26	Correnti reali nel vessel interno rettificato. . . . .	70
5.27	Correnti ricostruite nel vessel interno rettificato. . . . .	70
5.28	Andamento temporale dell'errore nel vessel interno rettificato. . . . .	70
5.29	Andamento tridimensionale delle correnti reali nel vessel interno. . . . .	71
5.30	Andamento tridimensionale delle correnti ricostruite nel vessel interno. . . . .	71

5.31	Correnti reali nel vessel esterno rettificato. . . . .	72
5.32	Correnti ricostruite nel vessel esterno rettificato. . . . .	72
5.33	Andamento temporale dell'errore nel vessel esterno rettificato. . . . .	72
5.34	Andamento tridimensionale delle correnti reali nel vessel esterno. . . . .	73
5.35	Andamento tridimensionale delle correnti ricostruite nel vessel esterno. . . . .	73
5.36	Correnti reali nel vertical support. . . . .	74
5.37	Correnti ricostruite nel vertical support. . . . .	74
5.38	Andamento temporale dell'errore nel triangular support. . . . .	74
5.39	Andamento tridimensionale delle correnti reali nel triangular support. . . . .	75
5.40	Andamento tridimensionale delle correnti ricostruite nel triangular support. . . . .	75
5.41	Correnti reali nella vertical structure. . . . .	76
5.42	Correnti ricostruite nella vertical structure. . . . .	76
5.43	Andamento temporale dell'errore nella vertical structure. . . . .	76
5.44	Andamento tridimensionale delle correnti reali nella vertical structure. . . . .	77
5.45	Andamento tridimensionale delle correnti ricostruite nella vertical structure. . . . .	77
5.46	Geometria delle <i>gaplines</i> . . . . .	80
5.47	Schema di raggi utilizzati in IAIA per posizionare le correnti equivalenti. . . . .	80
5.48	Schema a blocchi del modello implementato. . . . .	83
5.49	Distribuzione di densità di corrente e relativa mappa di flusso reali (a,b) e ricostruiti (c,d). . . . .	87
5.50	Errori in diversi istanti di tempo con le misure delle <i>sole pick-up coils</i> e le correnti <i>reali</i> nei conduttori passivi. . . . .	88
5.51	Errori in diversi istanti di tempo con le misure delle <i>sole pick-up coils</i> e le correnti <i>ricostruite</i> nei conduttori passivi. . . . .	89
5.52	Errori in diversi istanti di tempo con le misure delle <i>sole pick-up coils</i> , <i>trascurando</i> le correnti nei conduttori passivi. . . . .	90
5.53	Errori in diversi istanti di tempo con le misure di <i>flux loop + sensori a sella</i> e le correnti <i>reali</i> nei conduttori passivi. . . . .	91
5.54	Errori in diversi istanti di tempo con le misure di <i>flux loop + sensori a sella</i> e le correnti <i>ricostruite</i> nei conduttori passivi. . . . .	92
5.55	Errori in diversi istanti di tempo con le misure di <i>flux loop + sensori a sella</i> , <i>trascurando</i> le correnti nei conduttori passivi. . . . .	93
5.56	Errori in diversi istanti di tempo con le misure di <i>pick-up coils + flux loop + sensori a sella</i> e le correnti <i>reali</i> nei conduttori passivi. . . . .	94
5.57	Errori in diversi istanti di tempo con le misure di <i>pick-up coils + flux loop + sensori a sella</i> e le correnti <i>ricostruite</i> nei conduttori passivi. . . . .	95

5.58	Errori in diversi istanti di tempo con le misure delle <i>pick-up coils + flux loop + sensori a sella</i> , trascurando le correnti nei conduttori passivi. . . . .	96
5.59	Modello simulink di PCRA+IAIA. . . . .	98
B.1	Zona della griglia di punti per un'identificazione grezza del X-Point. . . . .	112
B.2	Elementi biquadratici lagrangiani reale e normalizzato. . . . .	112
B.3	Andamento di $ \hat{B}_{pol}(\xi, \eta) $ nell'elemento base. . . . .	115
B.4	Andamento di $\hat{\psi}(\xi, \eta)$ nell'elemento base. . . . .	115
B.5	Polinomi base dei 3 nodi con $\eta = 1$ . . . . .	116
B.6	Polinomi base dei 3 nodi con $\eta = 0$ . . . . .	116
B.7	Polinomi base dei 3 nodi con $\eta = -1$ . . . . .	116



# CAPITOLO 1

## Introduzione

### 1.1 Perché fusione?

*L'età della pietra non finì perché finirono le pietre.*

Questa frase fu pronunciata nel 2000 dall'ex Ministro del Petrolio e delle risorse minerarie dell'Arabia Saudita Ahmed Zaki Yamani, durante un'intervista con l'agenzia Reuters. Yamani, tuttora presidente del Centre for Global Energy Studies di Londra, aveva con lungimiranza capito che qualsiasi salto nel futuro, qualsiasi cambiamento radicale, qualsiasi passo verso una nuova direzione è mosso solamente dal desiderio di conoscenza.

Nel pronunciare quelle parole Yamani guardava alle risorse petrolifere come se fossero le pietre dell'età della pietra: fonte di ricchezza ed elemento principale per qualsiasi cosa fosse artificiale, ma comunque un bene esauribile. Tuttavia, il passaggio alla più evoluta età del bronzo non avvenne a causa dell'esaurimento delle scorte di pietra, ma partì da un progresso nella tecnica che rese raggiungibili orizzonti prima impensabili. Così la fine dell'era del petrolio, o più generalmente la fine dell'era dei combustibili fossili, potrà realizzarsi attraverso un salto tecnologico in avanti, nel progresso.

Prima di procedere nel discorso è d'obbligo dedicare qualche parola ad alcune definizioni. Una fonte di energia primaria è una fonte presente in natura, che non deriva dalla trasformazione di nessun'altra forma di energia. Dalla fonte primaria si distingue la fonte secondaria in quanto non disponibile direttamente in natura, ma ottenibile come trasformazione di una fonte primaria. I combustibili fossili, l'energia solare o il combustibile nucleare sono tutte fonti primarie, mentre l'energia elettrica è una fonte secondaria.

Si distingua l'utilizzo delle fonti di energia primaria a seconda che lo scopo sia la produzione di energia elettrica, come il carbone in una centrale termoelettrica, dall'utilizzo diretto al dettaglio dalla popolazione, come il combustibile in un veicolo. Questi due ambiti sono profondamente separati l'uno dall'altro, e necessitano ognuno di un discorso a se stante.

La maggioranza del carbone che l'uomo utilizza viene destinato alla produzione dell'energia elettrica. La situazione nel 2009 [1] vedeva destinato,

per questo scopo, circa il 90% del carbone utilizzato a livello mondiale, mentre la percentuale per i paesi OCSE<sup>1</sup> era superiore del 95%. L'impiego del petrolio è invece ripartito equamente tra la produzione di energia e l'utilizzo nei trasporti. Tuttavia, il giorno in cui sarà disponibile una fonte alternativa che lo sostituisca nella produzione di energia elettrica sembra molto più vicino del giorno in cui sarà disponibile su larga scala una fonte alternativa che lo sostituisca nella propulsione.

In un pianeta abitato da una popolazione in continuo aumento, la cui fame di progresso non fa altro che esigere nuove risorse, sempre più inesorabile suona la domanda: *come potrà il mondo continuare la sua corsa allo sviluppo senza che il costo diventi eccessivo?* Con il costo dello sviluppo sempre più elevato da una parte, e le risorse limitate dall'altra, è naturale pensare che, prima o poi, le pietre debbano davvero esaurirsi. Ma il passo verso una nuova direzione è già stato intrapreso ancora all'inizio degli anni 50, con il desiderio di sviluppare la fusione termonucleare controllata come strumento per la produzione di energia su larga scala.

Dal momento che le fonti di energia rinnovabili, allo stato attuale della tecnologia, sono caratterizzate dal non essere continue e dall'aver bassi rendimenti, si ritiene che il loro uso può essere al momento solo di supporto, e non di rifornimento principale. Pertanto la fusione nucleare controllata potrebbe risolvere la maggior parte dei problemi energetici sulla terra, perché potrebbe produrre quantità pressoché illimitate di energia senza emissioni di gas nocivi o gas serra, e con la produzione di limitate quantità di scorie radioattive, per di più caratterizzate da tempi di dimezzamento confrontabili con la durata di vita media di una centrale.

Le elevate difficoltà tecniche di realizzazione sono tali da far risultare, ad oggi, non conveniente l'utilizzo della fusione come fonte di energia primaria, il che mantiene il pianeta e la sua popolazione nell'era dei combustibili fossili. Tuttavia gli sviluppi nella ricerca sono stati numerosi e continui, e, continuando tuttora, permettono di avvicinare di giorno in giorno il traguardo, facendo auspicare la fine di questa età della pietra.

## 1.2 Stato dell'arte e progetto ITER

Gli esperimenti in ambito fusione nucleare hanno da sempre mosso grandi interessi nelle menti dei paesi più sviluppati, e, per questo motivo, se ne contano in numero sempre maggiore. In tutti i casi però si tratta di macchine pilota, di prototipi, necessari per investigare i fenomeni in gioco e per cercare di dare delle risposte alle molte domande che ancora avvolgono l'argomento.

Che si utilizzino, ai fini del confinamento, dei laser di elevata potenza oppure dei campi magnetici, la tipologia di reattore viene definita rispettivamente a confinamento *inerziale* oppure a confinamento *magnetico*. Senza

---

<sup>1</sup>Organizzazione per la cooperazione e lo sviluppo economico.

discutere la prima tipologia [2], esistono tre grandi categorie di reattori a confinamento magnetico: i reattori TOKAMAK, i reattori RFP, e i reattori STELLARATOR. Ad oggi nessun reattore a fusione di qualsiasi tipologia ha superato il punto di *break even*, o punto di pareggio, richiedendo quindi una quantità di energia necessaria per l'innesco maggiore di quella che si ottiene dal processo di fusione. Ciò, di fatto, pregiudica qualsiasi utilizzo a scopo commerciale di questa tecnologia.

Quando, nel lontano 1985, i presidenti Regan e Gorbachev ipotizzarono di dare il via, in maniera congiunta con Unione Europea e Giappone, ad un progetto di nome ITER, difficilmente ebbero ben chiara la portata dell'iniziativa: la costruzione di un reattore tokamak frutto degli sforzi di tutte le nazioni tecnologicamente più sviluppate.

Passando attraverso anni di progetti si arrivò all'annuncio ufficiale dell'inizio dei lavori, nel giugno del 2005, che vide Cadarache (Francia) come sito scelto e il 2008 come anno previsto di inizio dei lavori. Con un costo iniziale stimato di 10 miliardi di euro e una decade di tempo necessario, ITER sarà il definitivo passo in avanti nel cammino della fusione a confinamento magnetico [3], attraverso il quale verrà raggiunto e superato il punto di pareggio, facendo auspicare in una commercializzazione di questa fonte di energia.

Secondo i dati di progetto, ITER sarà una macchina a funzionamento pulsato, in grado di generare una potenza termica da fusione di circa 500MW per una scarica di 1000 secondi, al fronte di una potenza di innesco dieci volte inferiore. Tuttavia, ad oggi questa situazione è ben lontana, e gli sforzi della ricerca nel campo coinvolgono numerosi ed eterogenei settori della tecnica, alcuni dei quali sono gli studi sulle tipologie di riscaldamento addizionali, lo sviluppo di materiali che offrono particolari prestazioni, lo studio della diagnostica di plasma, e così via.

Una delle questioni di maggior interesse è il problema del confinamento e del controllo in tempo reale: riuscire a prolungare il confinamento del plasma per tempi sempre più lunghi è un risultato che non si può pensare di ottenere senza l'implementazione di un buon sistema di controllo. Controllare in maniera accurata la posizione e la forma del plasma in ogni istante della scarica non solo permette di aumentare il rendimento del reattore e di mantenere in buona salute tutti i componenti a diretto contatto col plasma [40], ma costituisce un requisito indispensabile per raggiungere il punto di pareggio.



## CAPITOLO 2

# Il problema magneto-stazionario in simmetria assiale

## 2.1 Equilibrio di un plasma assial-simmetrico

### 2.1.1 Geometria del problema e considerazioni preliminari

Si consideri un generico sistema di coordinate cilindriche  $r\varphi z$  come mostrato in figura 2.1. In questo sistema di riferimento viene affrontato il problema dell'equilibrio MHD per la configurazione di plasma. La configurazione geometrica è tale da poter fare affidamento sull'ipotesi di simmetria assiale.

Si faccia riferimento ad un piano poloidale generico  $(r, \tilde{\varphi}, z)$ . La funzione *flusso di campo poloidale* normalizzato<sup>1</sup>  $\psi(r, z) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  viene definita come segue:

$$\nabla\psi(r, z) = (rB_z(r, z), -rB_r(r, z))$$

mentre la funzione  $F(r, z) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  viene detta *funzione di corrente poloidale* viene definita a partire dal campo densità di corrente  $\vec{j}(r, \varphi, z) = (j_r, j_\varphi, j_z)$  come segue:

$$F(r, z) = \frac{\mu_0 j_\varphi(r, z)}{2\pi} = rB_\varphi(r, z)$$

I campi magnetico e di corrente possono essere scritti separando le componenti poloidale e toroidale:

$$\vec{B}(r, \varphi, z) = \underbrace{\frac{\nabla\psi}{r} \times \vec{u}_\varphi}_{\text{poloidale}} + \underbrace{B_\varphi \vec{u}_\varphi}_{\text{toroidale}}$$
$$\vec{j}(r, \varphi, z) = \underbrace{\frac{\nabla(F/\mu_0)}{r} \times \vec{u}_\varphi}_{\text{poloidale}} + \underbrace{j_\varphi \vec{u}_\varphi}_{\text{toroidale}}$$

---

<sup>1</sup>Per comodità si dividono entrambe le componenti per  $2\pi$ .

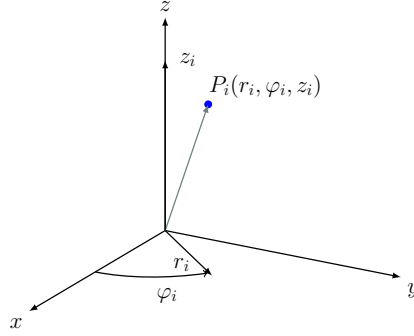


Figura 2.1: Sistema di riferimento in coordinate cilindriche

I campi così definiti possono essere maneggevolmente combinati per derivare l'equazione di Grad-Shafranov, come si vedrà nei prossimi paragrafi.

Si presti attenzione al fatto che il campo magnetico poloidale può essere scritto anche come segue:

$$\vec{B}_{pol}(r, z) = \left[ \nabla \times \left( \frac{\psi(r, z)}{r} \right) \right]_{\varphi} \quad (2.1)$$

pertanto il flusso poloidale è legato al potenziale vettore del campo poloidale  $\vec{A}_{pol}(r, \varphi, z)$  secondo la relazione  $\psi(r, z) = rA_{\varphi}(r, z)$ . Si ricordi l'ipotesi di simmetria assiale prima enunciata.

### 2.1.2 Legge di Ampere

Come noto, in generale la legge di Ampere-Maxwell in forma locale risulta:

$$\nabla \times \vec{B}(r, \varphi, z) = \mu_0 \vec{j}(r, \varphi, z)$$

Data una densità di corrente generica  $\vec{j}_{\varphi}(r, \varphi, z)$ , la relazione col potenziale vettore magnetico  $\vec{A}_{\varphi}(r, \varphi, z)$  risulta:

$$\begin{aligned} \mu_0 \vec{j}_{\varphi}(r, \varphi, z) &= \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) \\ &= -\nabla^2 \vec{A} \\ &= -\nabla^2 A_{\varphi} - \frac{A_{\varphi}}{r} \end{aligned}$$

dove il termine  $-\nabla^2 \vec{A}$  indica il laplaciano di un vettore. Nel caso di una particolare distribuzione di densità di corrente  $\vec{j}_{\varphi}(r, \varphi, z) = (0, j_{\varphi}(r, \varphi, z), 0)$  che gode di simmetria assiale, la legge di Ampere-Maxwell diventa, tenendo conto della (2.1):

$$\begin{aligned} \mu_0 j_{\varphi}(r, \varphi, z) &= -\nabla^2 \left( \frac{\psi(r, z)}{r} \right) + \frac{\psi(r, z)}{r^3} \\ &= \frac{\nabla^* \psi(r, z)}{r} \end{aligned} \quad (2.2)$$

dove l'operatore differenziale  $\Delta^* \#(r, z)$  è detto *operatore di Shafranov* e viene definito come:

$$\Delta^* \#(r, z) = r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \#}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \#}{\partial z^2}$$

La relazione (2.2) viene scritta come segue:

$$\Delta^* \psi(r, z) = r^2 \nabla \cdot \left( \frac{\nabla \psi}{\mu_0 r^2} \right) = -\mu_0 r j_\varphi(r, z) \quad (2.3)$$

e indica la caratterizzazione della legge di Ampere-Maxwell nel dominio in cui è definita una certa densità di corrente toroidale.

### 2.1.3 Equazione di Grad-Shafranov

L'equazione di Grad-Shafranov è un'equazione differenziale alle derivate parziali non lineare che descrive l'equilibrio MHD di un plasma assial-simmetrico [6]. La possibilità di caratterizzare il problema dell'equilibrio con una singola equazione alle derivate parziali segue direttamente dall'ipotesi di simmetria assiale della configurazione magnetica.

Si consideri una situazione di equilibrio *force-balance* descritta dall'equazione di bilancio:

$$\vec{j} \times \vec{B} = \nabla p \quad (2.4)$$

dove  $p(r, z)$  è la pressione cinetica del plasma. In simmetria assiale si dimostra che:

$$\nabla p(r, z) \parallel \nabla \psi(r, z) \parallel \nabla F(r, z)$$

da cui segue che  $p = p(\psi)$ ,  $F = F(\psi)$ .

Separando i contributi poloidale e toroidale nell'equazione 2.4 si ottiene:

$$\begin{aligned} \nabla p &= \vec{j}_{pol} \times B_\varphi \vec{u}_\varphi + j_\varphi \vec{u}_\varphi \times \vec{B}_{pol} \\ &= -\frac{B_\varphi}{\mu_0 r} \nabla F + \frac{j_\varphi}{r} \nabla \psi \\ \Rightarrow j_\varphi &= r \frac{dp}{d\psi} + \frac{B_\varphi}{\mu_0} \frac{dF}{d\psi} \end{aligned} \quad (2.5)$$

essendo che  $\nabla F(\psi) = dF/d\psi \nabla \psi$  e  $\nabla p(\psi) = dp/d\psi \nabla \psi$ . Inserendo l'equazione (2.5) nella (2.3) si ottiene l'equazione di Grad-Shafranov:

$$\Delta^* \psi(r, z) = -\mu_0 r^2 \frac{dp}{d\psi} - F \frac{dF}{d\psi} \quad (2.6)$$

La soluzione dell'equazione (2.6) permette, date  $F(\psi)$ ,  $p(\psi)$  e b. c., di determinare la distribuzione di corrente toroidale  $j_\varphi(r, z)$  compatibile con l'equilibrio MHD.

La natura dell'equilibrio, che sia una configurazione TOKAMAK piuttosto che RFP<sup>2</sup>, è determinata solamente dalla scelta delle funzioni  $F(\psi), p(\psi)$  e delle condizioni al contorno, mentre non dipende dal campo induzione toroidale  $B_\varphi$ . Infatti una variazione del termine  $B_\varphi$  andrà solamente a riscaldare il valore del *safety factor*  $q = (R_{min}B_\varphi)/(R_{max}B_p)$ , ovvero la vorticosità (avvitamento) delle linee di campo in direzione toroidale  $\vec{u}_\varphi$ , senza andare a modificarne il profilo. Analogamente, modificando  $B_\varphi$  anche i profili delle superfici di flusso, di pressione e di densità di corrente rimarranno inalterate [8].

L'equazione (2.6) è stata definita nella regione di plasma  $\Omega_p$ , dove è presente una certa densità di corrente toroidale  $j_\varphi(r, \varphi, z)$ . Fuori del dominio di plasma  $\Omega_p$  l'equazione (2.6) viene caratterizzata come:

$$\Delta^* \psi(r, z) = 0 \quad (2.7)$$

che prende il nome di *equazione di Grad-Shafranof omogenea* e descrive la configurazione magnetica nel vuoto.

#### 2.1.4 Calcolo del campo induzione in un generico punto dello spazio

Nella geometria della struttura ogni sorgente di campo può essere vista come una spira circolare di asse coincidente con l'asse  $z$  e di traccia puntiforme sul piano poloidale. Questo discorso vale sia per il plasma, sia per le bobine, sia per le strutture conduttrici passive, tenendo conto che il plasma, in generale, viene visto come un insieme di spire circolari discrete la cui composizione fornisce la sezione della colonna di plasma. Si ricordi che l'eventuale presenza di una componente di tipo *pinch* nella corrente di plasma è totalmente irrilevante ai fini dei risultati.

Una generica spira circolare di raggio  $a$  che gode di simmetria assiale è percorsa dalla densità di induzione  $\vec{B}(r, \varphi, z)$  in un generico punto dello spazio, tenendo conto che l'asse della spira è l'asse  $z$  e che essa è posta alla quota  $z = 0$ , vale [9] [10]:

$$\begin{aligned} B_r(r, 0, z) &= \frac{2\mu_0 I z}{2\pi r \sqrt{z^2 + (a+r)^2}} \left[ -K(k) + E(k) \frac{a^2 + r^2 + z^2}{(a-r)^2 + z^2} \right] \\ B_\varphi(r, 0, z) &\equiv 0 \\ B_z(r, 0, z) &= \frac{2\mu_0 I}{2\pi \sqrt{z^2 + (a+r)^2}} \left[ K(k) + E(k) \frac{a^2 - r^2 - z^2}{(a-r)^2 + z^2} \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

---

<sup>2</sup>Reverse Field Pinch, si veda [6].



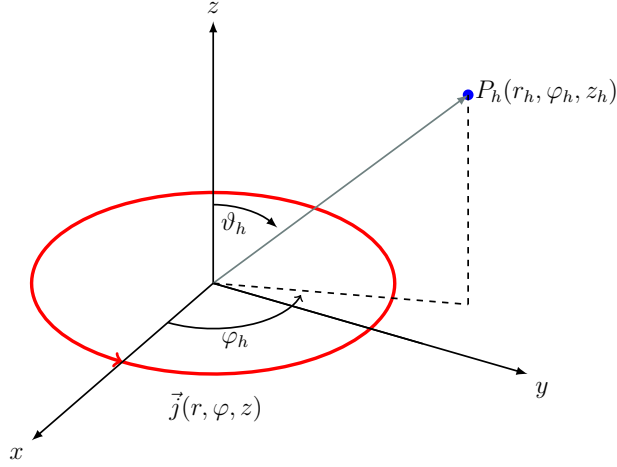


Figura 2.2: Spira circolare elementare.

dove  $K(k)$ ,  $E(k)$  sono integrali ellittici completi di prima e seconda specie e  $k$  è legato alla geometria del problema:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}} d\vartheta \quad (2.9)$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta} d\vartheta \quad (2.10)$$

$$k^2 = \frac{4ar}{(a - r)^2 + z^2} \quad (2.11)$$

Sia  $\gamma(\zeta) = (\gamma_1(\zeta), \gamma_2(\zeta))$  una curva chiusa nel piano poloidale  $rz$ , con  $\zeta \in [0, 1]$  ascissa curvilinea normalizzata. È utile dunque calcolare le componenti del vettore  $\vec{B}_{pol}$  tangente e normale rispetto alla curva  $\gamma$ , dette  $B_t$ ,  $B_n$ . Dati tali versori definiti come:

$$\vec{t} = \frac{1}{\|\gamma(\zeta)\|} (\gamma'_1(\zeta), \gamma'_2(\zeta)) \quad (2.12)$$

$$\vec{n} = \frac{1}{\|\gamma(\zeta)\|} (\gamma'_2(\zeta), -\gamma'_1(\zeta)) \quad (2.13)$$

si ha che:

$$B_t(r, z) = \vec{B}_{pol} \cdot \vec{t} = \frac{1}{\|\gamma(\zeta)\|} (B_r(\gamma(\zeta))\gamma'_1(\zeta) + B_z(\gamma(\zeta))\gamma'_2(\zeta)) \quad (2.14)$$

$$B_n(r, z) = \vec{B}_{pol} \cdot \vec{n} = \frac{1}{\|\gamma(\zeta)\|} (B_r(\gamma(\zeta))\gamma'_2(\zeta) - B_z(\gamma(\zeta))\gamma'_1(\zeta)) \quad (2.15)$$

Il calcolo viene poi generalizzato per il caso reale tenendo conto che le spire elementari sono ad una quota non nulla. Nei paragrafi successivi si mostrerà come implementare il calcolo per la corrente di plasma.

### 2.1.5 Frontiera di plasma

Si consideri una configurazione di plasma descritta da un modello di equilibrio MHD [6]: le equazioni di Maxwell che lo caratterizzano, nel caso magneto-statico, sono:

$$\begin{cases} \vec{j} \times \vec{B} = \nabla p \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{cases}$$

da ciò segue che:

$$\begin{aligned} \vec{j} \cdot (\vec{j} \times \vec{B}) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{j} \cdot \nabla p = 0 \\ \vec{B} \cdot (\vec{j} \times \vec{B}) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{B} \cdot \nabla p = 0 \end{aligned}$$

pertanto le linee di campo di  $\vec{j}, \vec{B}$  giacciono su superfici isobare, perché caratterizzate da  $\nabla p = 0$ . In modo equivalente si può affermare che le superfici isobare sono anche superfici isoflusso per i campi  $\vec{B}, \vec{j}$ . Inoltre, vista la configurazione strutturale della camera da vuoto il problema gode, come già detto in precedenza, di simmetria assiale, pertanto le superfici isoflusso appena presentate sono di forma *toroidale concentrica*<sup>3</sup>.

Dal momento che le tracce sul piano poloidale  $rz$  delle superfici isoflusso di  $\vec{B}, \vec{j}$  sono delle linee chiuse  $\gamma$ , è naturale che sia definibile l'ultima linea chiusa  $\gamma_b$  all'interno del vessel che non interseca la prima parete (first wall) [18] [20]. Questa curva prende il nome di *frontiera di plasma*, altrimenti detta *plasma boundary*, e racchiude lo spazio dove il plasma è caratterizzato, idealmente, da valori di corrente e pressione non nulli: al di fuori della frontiera di plasma  $\vec{j}$  e  $p$  sono identicamente nulli. Si presti attenzione al fatto che la definizione appena fornita è una definizione di carattere topologico, e non fisico, poiché definisce l'ultima linea chiusa di campo poloidale che non interseca la prima parete. Con questo non si deve pensare che il plasma sia davvero realmente contenuto all'interno di questa curva: nella realtà la frontiera è continuamente attraversata da un flusso di particelle che escono dal plasma e collidono con la parete, dando luogo ad un fenomeno di interazione detto *plasma-wall interaction*. L'idea di frontiera viene dunque utilizzata per avere, con sufficiente precisione, un'idea della posizione del plasma all'interno della camera da vuoto.

Nella figura 2.3 sono raffigurati i boundary per due configurazioni di plasma differenti, rispettivamente:

*limiter plasma*, in rosso, in cui la geometria dei tubi di flusso è tale per cui la frontiera tocca il first wall in un punto;

*diverted plasma*, in blu, in cui viene generato un punto (*X-point*, in verde in figura) di nullo per il campo  $B_{pol}$ , e la frontiera di plasma è data dalla linea isoflusso a cui appartiene il punto X-point.

<sup>3</sup>In generale la traccia nel piano poloidale delle superfici toriodali non è circolare ma allungata verticalmente. Tuttavia questo non fa perdere di generalità i risultati ottenuti.

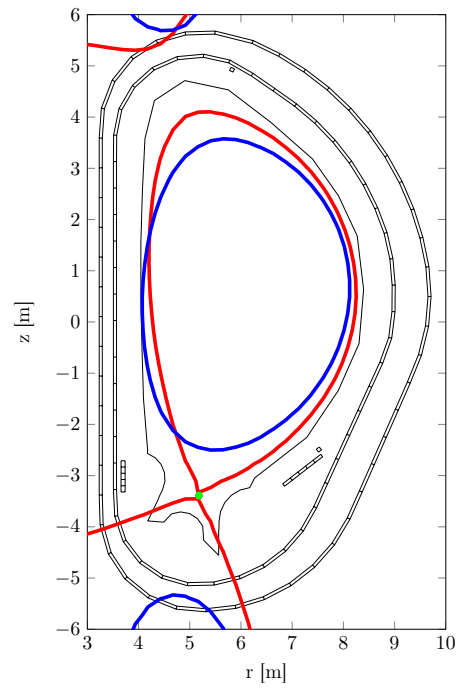


Figura 2.3: Frontiere di plasma nel caso di configurazione limiter (blu) e diverted (rosso).

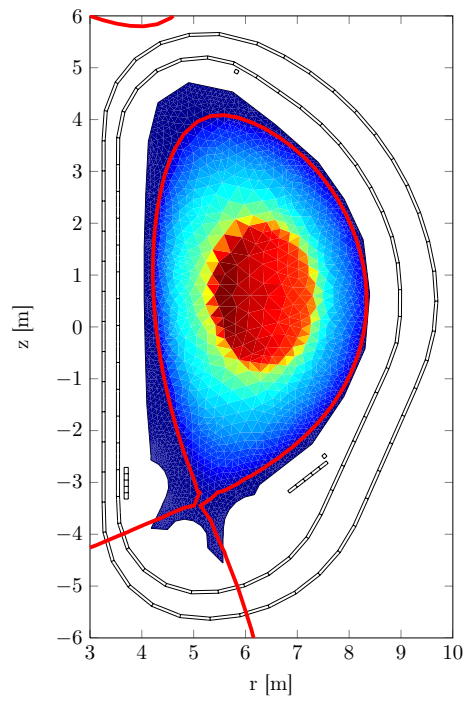


Figura 2.4: Esempio di plasma diverted e relativa frontiera.

segue, in figura 2.4, un esempio di plasma diverted e relativa frontiera: si noti come il profilo di densità di corrente sia completamente contenuto all'interno della curva.

Senza entrare troppo in profondità nella questione, una configurazione *diverted plasma* è da preferirsi ad una configurazione *limiter*, in quanto permette di aumentare l'utilizzo dello spazio nella camera da vuoto, e quindi ridurre i costi di investimento a parità di prestazioni. Inoltre, un plasma diverted permette di diminuire sensibilmente l'interazione plasma-prima parete (plasma-wall Interaction), concentrandola nella parte inferiore della camera da vuoto, in corrispondenza di un organo appositamente progettato per sopportare questa interazione, detto *divertore* [19].

La realizzazione di un plasma diverted viene raggiunta ricercando una soluzione dell'equazione di Grad-Shafranov (2.6) tale per cui la funzione  $\psi(r, z)$  rispetti il vincolo  $\nabla\psi = 0$  nel X-point [20]. Quindi le bobine di eccitazione saranno alimentate da un set di correnti tali da produrre una funzione di flusso  $\psi$  compatibile con i vincoli imposti.

Nei moderni TOKAMAKS vengono studiate anche configurazioni a *doppio nullo*, uno nella parte inferiore e uno nella parte superiore della camera da vuoto. Dal momento che gli equilibri qui studiati non fanno riferimento a questo tipo di configurazione, non si discuterà oltre riguardo a questa categoria.

## 2.2 Momenti della densità di corrente toroidale di plasma

### 2.2.1 Definizione

In un generico piano  $rz$  sia  $\Omega_p$  l'insieme definito come il dominio che identifica la sezione della colonna di plasma, e  $\Omega_d$  un insieme generalmente definito affinché sia  $\Omega_p \subseteq \Omega_d$ . Si definisce *momento della densità di corrente toroidale di plasma* di ordine n-esimo il seguente integrale calcolato sul dominio  $\Omega_d$ :

$$q_n = \int_{\Omega_d} \chi_n(r, z) j_\varphi(r, z) dr dz \quad (2.16)$$

La funzione peso  $\chi_n(r, z)$  è un polinomio di ordine n-esimo soluzione dell'equazione di Grad-Shafranov omogenea  $\Delta^* \chi_n(r, z) = 0$ , che ha la seguente espressione [21]:

$$\chi_n(r, z) = r^n \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} (-4)^{-k} \frac{(n-2)!}{k!(k+1)!(n-2k-2)!} \left[ \frac{z}{r} \right]^{n-2k-2} \quad (2.17)$$

dove  $\lfloor \# \rfloor$  è la funzione *floor*(#). In appendice A è riportato il procedimento analitico necessario per ricavare l'espressione (2.17).

I momenti di ordine inferiore  $n = 0, 1, 2$  permettono di determinare delle grandezze fondamentali per il plasma, rispettivamente la corrente  $I_p$  e le coordinate della posizione del centroide di plasma  $(r_p, z_p)$ . Salendo con l'ordine del polinomio si ottengono i momenti di ordine superiore<sup>4</sup>, che forniscono informazioni rispettivamente su elongazione di *skew*  $\kappa_{sk}$  e verticale  $\kappa_v$ , e triangolarità superiore  $\delta_{up}$  ed inferiore  $\delta_{down}$  [22]. Infatti, caratterizzando la 2.17 per gli ordini  $n = 0, \dots, 6$  si ottiene:

$$\begin{aligned}
\chi_0 = 1 & \Rightarrow q_0 = \int_{\Omega_d} \chi_0(r, z) j_\varphi(r, z) dr dz = I_p \\
\chi_1 = z & \Rightarrow q_1 = \int_{\Omega_d} \chi_1(r, z) j_\varphi(r, z) dr dz = z_p I_p \\
\chi_2 = r^2 & \Rightarrow q_2 = \int_{\Omega_d} \chi_2(r, z) j_\varphi(r, z) dr dz = r_p^2 I_p \\
\chi_3 = r^2 z & \Rightarrow q_3 = \int_{\Omega_d} \chi_3(r, z) j_\varphi(r, z) dr dz = \kappa_{sk}^3 I_p \\
\chi_4 = r^2 z^2 - \frac{1}{4} r^4 & \Rightarrow q_4 = \int_{\Omega_d} \chi_4(r, z) j_\varphi(r, z) dr dz = \kappa_v^4 I_p \\
\chi_5 = r^2 z^3 - \frac{3}{4} r^4 z & \Rightarrow q_5 = \int_{\Omega_d} \chi_5(r, z) j_\varphi(r, z) dr dz = \delta_{up}^5 I_p \\
\chi_6 = r^2 z^4 - \frac{3}{2} r^4 z^2 + \frac{1}{8} r^6 & \Rightarrow q_6 = \int_{\Omega_d} \chi_6(r, z) j_\varphi(r, z) dr dz = \delta_{down}^6 I_p
\end{aligned}$$

Nei capitoli successivi verranno presentati dei metodi per la ricostruzione dei momenti di ordine inferiore  $\chi_0, \chi_1, \chi_2$ , senza considerare gli ordini più elevati.

Sebbene per ora questo non sia apprezzabile, il concetto di momento di corrente toroidale in simmetria assiale è molto importante per la descrizione della configurazione magnetica generata dalla sorgente  $j_\varphi$ : per rendersi conto di questo si rimanda alla fine del paragrafo successivo 2.2.2, più precisamente alla discussione sul risultato (2.25).

## 2.2.2 Calcolo dei momenti di corrente lungo il bordo di un dominio chiuso

Si considerino le seguenti funzioni definite in precedenza:

$$\psi(r, z) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ flusso poloidale normalizzato}$$

$$j_\varphi(r, z) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ densità di corrente toroidale}$$

$$\chi(r, z) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ generica funzione peso}$$

---

<sup>4</sup>Elongazione e triangolarità possono essere definite anche partendo da considerazioni geometriche sul profilo di plasma. In quel caso si presti attenzione al fatto che, definendo una grandezza in modo differente, si ottengono risultati diversi

Le funzioni di cui sopra devono soddisfare dei determinati vincoli: in primo luogo la corrente toroidale dev'essere compatibile con l'equilibrio imposto dall'equazione di Grad-Shafranov, ovvero:

$$\Delta^* \psi(r, z) = r^2 \nabla \cdot \left( \frac{\nabla \psi}{\mu_0 r^2} \right) = -\mu_0 r j_\varphi(r, z)$$

Inoltre, la funzione peso  $\chi(r, z)$  dev'essere ricercata tra le soluzioni dell'equazione omogenea di Grad-Shafranov:

$$\Delta^* \chi(r, z) = 0 \quad (2.18)$$

Si consideri poi la generica curva chiusa positivamente orientata  $\gamma(\zeta) = (\gamma_1(\zeta), \gamma_2(\zeta))$ , come definita nel paragrafo 2.1.4. La curva viene definita in modo tale che valga  $\gamma(\zeta) = \partial\Omega_d$ , e che sia di classe  $C^1$ . Per la curva in questione i versori normale uscente e tangente sono già stati definiti in (2.13), (2.13).

La definizione di momento di plasma di ordine n-esimo  $q_n$  è già stata presentata nella sezione 2.2.1. Il vincolo (2.18) porge:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_d} \frac{1}{\mu_0 r} (\psi \Delta^* \chi_n - \chi_n \Delta^* \psi) dr dz &= \int_{\Omega_d} -\frac{1}{\mu_0 r} (\chi_n \Delta^* \psi) dr dz \\ &= \int_{\Omega_d} \chi_n(r, z) j_\varphi(r, z) dr dz \\ &= q_n \end{aligned}$$

questo passaggio ha mostrato che il momento  $q_n$  è legato alla quantità  $(\psi \Delta^* \chi_n - \chi_n \Delta^* \psi)$ .

Sfruttando la seconda identità di Green è possibile passare dall'integrale nel dominio  $\Omega_d$  ad un integrale di flusso attraverso la curva  $\gamma(\zeta) = \partial\Omega_d$ . Si ottiene:

$$\begin{aligned} q_n &= \int_{\Omega_d} \frac{1}{\mu_0 r} (\psi \Delta^* \chi_n - \chi_n \Delta^* \psi) dr dz \\ &= \int_{\partial\Omega_d} \frac{1}{\mu_0 r} [\psi \nabla \chi_n - \chi_n \nabla \psi] \cdot \mathbf{\bar{n}} d\gamma \\ &= \int_{\partial\Omega_d} \frac{1}{\mu_0 r} \left[ \psi \frac{\partial \chi_n}{\partial \mathbf{\bar{n}}} - \chi_n \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{\bar{n}}} \right] d\gamma \end{aligned} \quad (2.19)$$

con l'ovvio significato dei simboli.

Si introduca a questo punto la funzione  $\xi_n(r, z) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  coniugata della funzione  $\chi_n(r, z)$  [23], ovvero:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\xi_n}{\mu_0 r} \right) = -\frac{1}{\mu_0 r} \frac{\partial \chi_n}{\partial z} \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\xi_n}{\mu_0 r} \right) = \frac{1}{\mu_0 r} \frac{\partial \chi_n}{\partial r} \quad (2.21)$$

questa proprietà implica anche il seguente risultato:

$$\nabla\left(\frac{\xi_n}{\mu_0 r}\right) \perp \frac{1}{\mu_0 r} \nabla \chi_n \quad (2.22)$$

Per come sono stati definiti i versori si ottiene che

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\mu_0 r} \nabla \chi_n \cdot \vec{\mathbf{n}} d\gamma = \oint_{\gamma} \nabla\left(\frac{\xi_n}{\mu_0 r}\right) \cdot \vec{\mathbf{t}} d\gamma$$

pertanto l'integrale (2.19) diventa:

$$\begin{aligned} q_n &= \int_{\partial\Omega_d} \frac{1}{\mu_0 r} [\psi \nabla \chi_n - \chi_n \nabla \psi] \cdot \vec{\mathbf{n}} d\gamma \\ &= \int_{\gamma} \psi \nabla\left(\frac{\xi_n}{\mu_0 r}\right) \cdot \vec{\mathbf{t}} d\gamma - \int_{\gamma} \frac{1}{\mu_0 r} \chi_n \nabla \psi \cdot \vec{\mathbf{n}} d\gamma \end{aligned}$$

dove gli integrali su  $\gamma$  indicano rispettivamente una circuitazione e un flusso.

L'integrando della circuitazione può essere opportunamente sistemato:

$$\nabla\left(\psi \frac{\xi_n}{\mu_0 r}\right) = \psi \nabla\left(\frac{\xi_n}{\mu_0 r}\right) + \left(\frac{\xi_n}{\mu_0 r}\right) \nabla \psi \quad (2.23)$$

tenendo conto che il dominio di integrazione è semplicemente connesso e un qualsiasi campo  $\nabla U(r, z)$  è, per definizione, un campo conservativo, allora la circuitazione del termine a sinistra dell'uguale nella (2.23) è nulla. Pertanto, essendo il flusso poloidale definito come  $\nabla \psi(r, z) = (r B_z(r, z), -r B_r(r, z))$ , il termine  $q_n$  risulta:

$$\begin{aligned} q_n &= - \oint_{\gamma} \left(\frac{\xi_n}{\mu_0 r}\right) \nabla \psi \cdot \vec{\mathbf{t}} d\gamma - \int_{\gamma} \frac{1}{\mu_0 r} \chi_n \nabla \psi \cdot \vec{\mathbf{n}} d\gamma \\ &= - \int_0^1 \frac{\chi_n}{\mu_0} (B_z \gamma'_2 + B_r \gamma'_1) d\zeta + \int_0^1 \frac{\xi_n}{\mu_0} (B_z \gamma'_1 - B_r \gamma'_2) d\zeta \\ &= - \frac{1}{\mu_0} \oint_{\gamma} \chi_n \vec{B}_{pol} \cdot \vec{\mathbf{t}} d\gamma + \frac{1}{\mu_0} \int_{\gamma} \xi_n \vec{B}_{pol} \cdot \vec{\mathbf{n}} d\gamma \end{aligned} \quad (2.24)$$

si sottolinea ulteriormente che il primo integrale della (2.24) è una circuitazione del campo  $\chi_n \vec{B}_{pol}$  lungo la curva  $\gamma$ , mentre il secondo integrale indica il flusso del campo  $\xi_n \vec{B}_{pol}$  uscente dalla curva  $\gamma$ .

Il momento  $q_n$  è stato definito lungo una curva percorsa in senso antiorario. Percorrendo la curva in senso orario si ottiene la relazione a cui si fa riferimento nelle sezioni successive:

$$q_n = \frac{1}{\mu_0} \oint_{\gamma} \chi_n \vec{B}_{pol} \cdot \vec{\mathbf{t}} d\gamma + \frac{1}{\mu_0} \int_{\gamma} \xi_n \vec{B}_{pol} \cdot \vec{\mathbf{n}} d\gamma \quad (2.25)$$

La funzione polinomiale  $\chi_n(r, z)$  è già stata introdotta nella (2.17), mentre  $\xi_n(r, z)$  si definisce come:

$$\xi_n(r, z) = - \sum_{k=0}^{\lceil n/2 \rceil - 1} (-4)^{1-k} \frac{(n-2)!}{2 \cdot (k!)^2 (n-2k-1)!} r^{2k+1} z^{n-2k-1} \quad (2.26)$$

dove  $\lceil \# \rceil$  indica la funzione *ceil*(#). In appendice A si trova descritto, come detto in precedenza, il procedimento analitico che permette di ricavare i polinomi  $\chi_n(r, z)$ ,  $\xi_n(r, z)$  come soluzione polinomiale dell'equazione di Grad-Shafranov omogenea.

A questo punto è utile una considerazione: per il momento  $q_0$  si ha che (sezione A.3)  $\chi_0 = 1, \xi_0 = 0$ , pertanto dalle (2.16), (2.25) segue:

$$q_0 = \int_{\Omega_d} \chi_0(r, z) j_\varphi(r, z) \, dr dz = I_p = \frac{1}{\mu_0} \oint_{\gamma} \vec{B}_{pol} \cdot \vec{t} \, d\gamma$$

che è la formulazione integrale della legge di Ampere. Quindi la quantità  $q_n$ , attraverso la relazione (2.25), rappresenta una generalizzazione dell'idea di ricercare informazioni su di una corrente valutando le componenti  $\vec{B}_t, \vec{B}_n$  del campo induzione da essa generato lungo una curva  $\gamma$  che la concatena, di cui la legge di Ampere è un caso particolare per il grado  $n = 0$ . Il termine  $q_n$  può dare informazioni via via differenti su posizione e forma della corrente di plasma a seconda che si scelgano diversi pesi  $\chi_n, \xi_n$ , e conseguentemente diverse combinazioni lineari dei termini  $\vec{B}_t, \vec{B}_n$  [24]. La profondità del concetto di momento di corrente ed il suo legame intrinseco con la configurazione magnetica dello spazio sono una conseguenza diretta dell'ipotesi di simmetria assiale di cui gode il problema.



## CAPITOLO 3

# Diagnostica magnetica

Per garantire delle ottime prestazioni in una macchina a fusione si deve necessariamente attuare un controllo in retroazione (*feedback*) sui parametri geometrici e fisici del plasma, in modo da comandare in tempo reale le correnti nelle bobine di eccitazione con elevata precisione. L'attuazione di tale controllo *feedback* parte dalle informazioni sul plasma disponibili istante per istante, provenienti da tutti quei sensori e sonde che vengono riuniti sotto il nome di *diagnostica di plasma*.

Per tenere sotto controllo ogni aspetto del plasma i parametri devono essere in numero elevato per dare un'immagine quanto più precisa del plasma, e richiedono tecniche e competenze tra loro molto diverse: le tecnologie in gioco prevedono l' utilizzo di sensori ad infrarossi, della spettroscopia, di microonde e laser, e di sensori di natura magnetica,

Nel presente capitolo si vuole, per prima cosa, fornire una vista d'insieme dei principali dispositivi e delle relative tecnologie che trovano largo impiego nel settore della diagnostica del plasma negli odierni reattori a fusione [5] [25]. Seguirà una presentazione della configurazione di sensori scelta per il reattore ITER.

### 3.1 Principali tecniche di diagnostica magnetica

#### 3.1.1 Misure di campo magnetico e di flusso

##### Pick-up coils

Il modo più semplice per misurare l'intensità del campo magnetico in prossimità di un punto nello spazio è quella di utilizzare una piccola spira, detta *pick-up coil*, di sezione molto ridotta, in prossimità del punto desiderato. Un tipico esempio è mostrato in figura 3.1.

Detta  $S$  la superficie della spira elementare e  $\Gamma$  suo bordo, la legge di Faraday porge:

$$\varepsilon(t) = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{t} \, dl$$

Si consideri a questo punto il circuito reale di figura 3.1. Indicando con  $\Gamma$  la curva definita dagli avvolgimenti della spira si ottiene:

$$\varepsilon(t) = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{t} \, dl = - \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, dl \quad (3.1)$$

Pertanto, valutando la fem indotta ai capi della spira si determina il valore temporale della grandezza  $\partial B/\partial t$ . Si noti in particolare che il dispositivo permette di misurare solamente la componente di campo magnetico normale alla superficie  $S$  nel caso in cui il campo sia uniforme nella superficie, in caso contrario misura solo il valor medio spaziale della componente normale.

Nel caso in cui ci sia della corrente nella spira, per esempio per via della non idealità dell'amplificatore operativo, o per la presenza di accoppiamenti capacitivi, la fem misurata che compare nella relazione (3.1) è la fem indotta a meno di una c.d.t. dovuta alla corrente. L'effetto di autoinduzione che si presenta comporta una modifica del campo magnetico concatenato con  $S$ , e la precisione della misura viene meno.

### Sonda ad effetto Hall

Visti i difetti che affliggono le pick-up coils, in particolar modo il fatto che permettono di misurare la derivata  $\partial B/\partial t$  e non il valore vero e proprio, è conveniente utilizzare un sensore che non sfrutti la legge di Faraday. Una soluzione consiste nell'utilizzo di un  *sensore ad effetto Hall*, riportato in figura 3.2.

L'effetto Hall consiste nella formazione di una differenza di potenziale tra le facce opposte di un materiale conduttore, all'interno del quale scorre una corrente  $I$ , ed immerso in un campo magnetico  $B$  non parallelo alla corrente. Questo effetto è dovuto alla forza di Lorentz che si genera nei portatori di carica in movimento, determinando la separazione di carica e la comparsa di densità di carica di segno opposto nelle due facce del materiale: se viene iniettata una corrente nota nella sonda, dalla misura della tensione tra le due facce si valuta l'intensità del campo magnetico. Pertanto un sensore ad effetto Hall è composto da una piastra sottile di materiale semiconduttore, attraversata da una corrente nota  $I$  che permette di misurare il valore del campo magnetico normale alla sua faccia in condizioni statiche.

In generale, dato un campo magnetico  $\vec{B}$  incidente alla faccia del sensore di Hall, inclinato di un angolo  $\alpha$  rispetto alla direzione normale alla faccia, la tensione di Hall che si misura tra le facce della piastra vale, in presenza della corrente  $I$ :

$$V_H = \eta I B \sin \alpha$$

con  $\eta$  efficienza del sensore, dipendente da temperatura, geometria e area.

Anche se le sonde ad effetto Hall, dopo un'accurata calibrazione, permettono di raggiungere elevate precisioni di misura, nella maggior parte degli

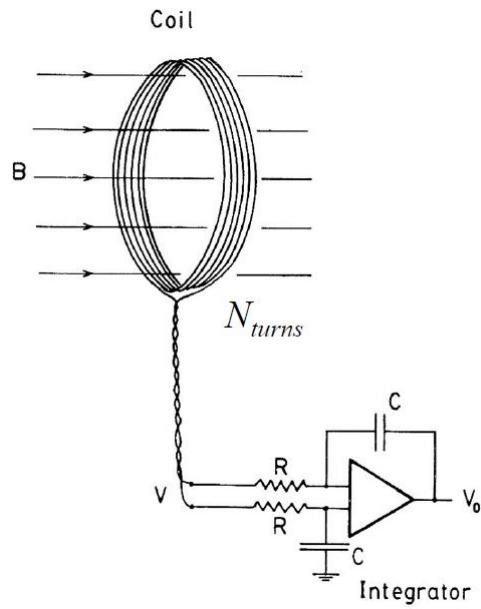


Figura 3.1: Pick-up coil.

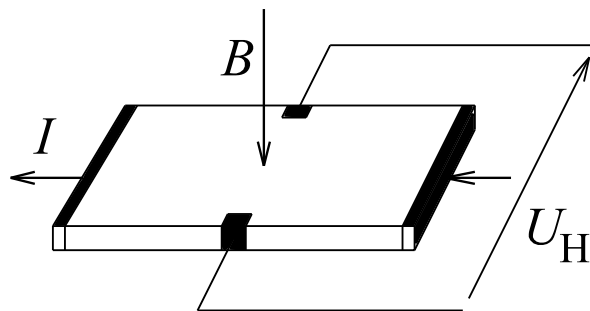


Figura 3.2: Sensore ad effetto Hall.

esperimenti con plasmi confinati magneticamente il loro utilizzo non è molto diffuso, essendo molto spesso rimpiazzate dalle pick-up coils già presentate. Questo accade perché le sonde ad effetto Hall sono di costruzione complessa, per via della loro elevata sensibilità ai campi elettrici parassiti, nonché a causa del loro comportamento non lineare che manifestano per alti valori di campo  $B$ .

### 3.1.2 Misura della corrente di plasma

#### Bobina di Rogowski

Il principio di funzionamento della bobina di Rogowski si basa sulla legge di Ampere in forma integrale, e permette di misurare la corrente totale di plasma  $I_p$ .

Si consideri una bobina come quella di figura 3.3, di sezione  $A$  costante, con un numero di spire per unità di lunghezza  $n$  costante. Si consideri inoltre che la variazione del campo  $B$  nello spazio tra le spire sia trascurabile, ovvero:

$$\frac{|\nabla B|}{B} \ll n$$

allora il flusso totale concatenato dalla bobina può essere scritto, ricordando che  $n$  è sufficientemente elevato, come:

$$\Phi = nA \oint_l \vec{B} \cdot \vec{t} \, dl \quad (3.2)$$

dove  $l$  è il contorno che coincide con l'asse toroidale della bobina di Rogowski. Si noti che l'integrale della (3.2) altro non è che la legge di Ampere, pertanto la (3.2) diventa:

$$\Phi = nA\mu I_p$$

e la tensione ai capi della bobina vale:

$$v(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = nA\mu \frac{\partial I_p}{\partial t} \quad (3.3)$$

Pertanto dall'integrazione del segnale di tensione  $v(t)$  si ottiene la totale corrente di plasma  $I_p$ . Si noti che la corrente viene determinata a meno di una costante di integrazione  $C$ , che può essere determinata univocamente integrando un plasma in condizioni statiche in cui  $\partial I_p / \partial t = 0$ .

Si noti infine che è presente il ritorno del conduttore all'interno della bobina, in modo da rendere la bobina insensibile alle componenti di campo indesiderate.

### 3.1.3 Misura di resistività e potenza ohmica

La tensione d'anello  $\varepsilon_l$ , altrimenti detta *loop voltage* o *volts per turns*, è la caduta di tensione ai capi di una spira toroidale lungo un contorno  $l$  concentrico al toro di plasma, come si può vedere in figura 3.4. Questa misura permette di determinare resistività del plasma  $\rho_p$  e la potenza termica  $P_t$  dissipata per effetto joule dalla corrente di plasma  $I_p$ .

Seguono due trattazioni differenti sulla ricostruzione di  $\rho_p$ ,  $P_t$  partendo da  $\varepsilon_l$ .

#### Loop singolo

La cdt  $\varepsilon_l$  ai capi dell'anello toroidale di resistenza  $\Omega_l$  di figura 3.4 è dato dalla relazione:

$$\varepsilon_l = \frac{d}{dt}(L_l I_l) + \Omega_l I_l + \sum_{j=1}^{N_s} \frac{d}{dt}(M_{lj} I_j) + \frac{d}{dt}(M_{lp} I_p)$$

dove  $N_s$  indica il numero degli avvolgimenti attivi, e

$L_l$  coefficiente di autoinduzione dell'anello;

$M_{lj}$  mutuo accoppiamento tra avvolgimenti attivi e anello;

$M_{lp}$  mutuo accoppiamento tra plasma e anello.

La misura di tensione viene valutata servendosi di un amplificatore con un'elevata resistenza d'ingresso, così da far risultare trascurabile la corrente nell'anello. In questo caso:

$$\varepsilon_l = \sum_{j=1}^{N_s} \frac{d}{dt}(M_{lj} I_j) + \frac{d}{dt}(M_{lp} I_p) \quad (3.4)$$

che viene integrato nel tempo per fornire il flusso poloidale<sup>1</sup>  $\Psi$ , in quanto:

$$\begin{aligned} \varepsilon_l &= \frac{d}{dt} \int_{S_l} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_l} r B_z \, dr d\varphi \\ &= \frac{d}{dt} \left( 2\pi \int_0^{R_l} r B_z \, dr \right) \\ &= \frac{d\Psi}{dt} \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Si fa riferimento al flusso totale  $\Psi$ , non a quello normalizzato  $\psi = \Psi/2\pi$ .

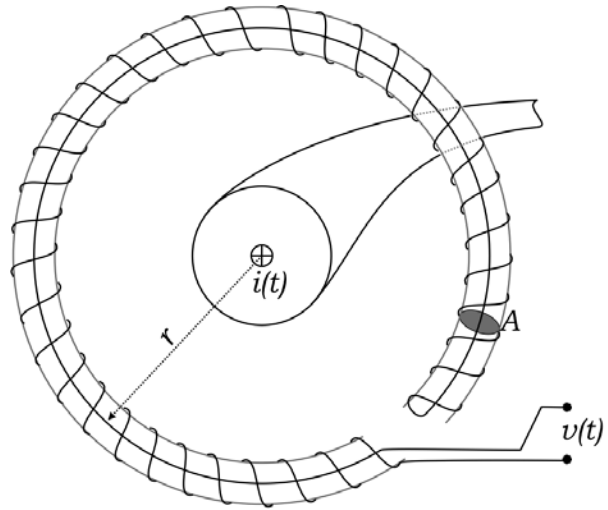


Figura 3.3: Rappresentazione schematica di una bobina di Rogowski.

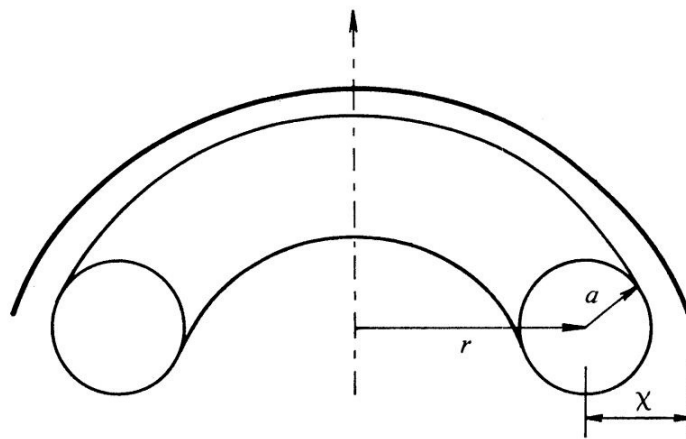


Figura 3.4: Anello utilizzato nella misura *Volts per turn*.

Si consideri a questo punto la caduta di tensione  $\varepsilon_p$  nel plasma, ricordando che esso è in cortocircuito:

$$\varepsilon_p = \frac{d}{dt}(L_p I_p) + \Omega_p I_p + \sum_{j=1}^{N_s} \frac{d}{dt}(M_{pj} I_j) \equiv 0 \quad (3.5)$$

Come noto, la definizione di mutua induttanza in termini di flussi concatenati permette di scrivere il flusso prodotto da una corrente  $I_b$  in un conduttore  $b$  concatenato con un conduttore  $a$  come  $\Psi_{ab} = M_{ab} I_b$ . Introducendo un altro conduttore  $c$ , il flusso  $\Psi_{ab}$  può essere scritto come:

$$\begin{aligned} \Psi_{ab} &= M_{ab} I_b + \Psi_{cb} - \Psi_{cb} \\ &= \Psi_{cb} + (\Psi_{ab} - \Psi_{cb}) \\ &= \Psi_{cb} + \Delta\Psi_{ac,b} \end{aligned}$$

ovvero in funzione del flusso indotto dalla corrente  $I_b$  nel circuito  $c$  e dell'incremento di flusso  $\Delta\Psi_{ca,b}$  tra i circuiti  $c, a$  dovuto alla corrente  $I_b$  nel circuito  $b$ . Applicando questa notazione ai circuiti di plasma, conduttori attivi e anello si ha che  $\Psi_{lj} = \Psi_{pj} + \Delta\Psi_{pl,j} = \Psi_{pj} + (\Psi_{lj} - \Psi_{pj})$ , pertanto:

$$\varepsilon_l = \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^{N_s} (M_{pj} I_j) \right) + \frac{d}{dt} (M_{lp} I_p) + \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^{N_s} \Delta\Psi_{pl,j} \right) \quad (3.6)$$

Ora, sostituendo la (3.5) nella (3.6) si ha:

$$\begin{aligned} \varepsilon_l &= -\frac{d}{dt}(L_p I_p) - \Omega_p I_p - \sum_{j=1}^{N_s} \frac{d}{dt}(\Psi_{pj}) + \frac{d}{dt}(\Psi_{lp}) + \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^{N_s} \Delta\Psi_{pl,j} \right) \\ &= -\frac{d}{dt}(L_p I_p) - \Omega_p I_p + \frac{d}{dt}(\Psi_{p,l})_{tot} \end{aligned} \quad (3.7)$$

dove  $(\Psi_{p,l})_{tot}$  è il flusso *totale* che concatena plasma e anello, generato, oltre che dalla corrente di plasma  $I_p$ , anche dalle correnti nei conduttori attivi.

La relazione (3.7) appena determinata permette, nel caso di corrente  $I_p$  costante, di determinare la resistenza  $\Omega_p$  della colonna di plasma.

## Teorema di Poynting

Il teorema di Poynting è una relazione integrale a cui deve sottostare ogni soluzione delle equazioni di Maxwell, ed esprime la conservazione dell'energia del campo elettromagnetico nel caso in cui i campi elettrico e magnetico siano accoppiati [26], cosa che non avviene in generale per il caso statico.

Il teorema afferma che la variazione nel tempo della densità di energia elettromagnetica  $u$  sommata alla variazione nello spazio del vettore di Poynting  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$  sia pari alla potenza meccanica dissipata dal campo nel materiale:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E} \quad (3.8)$$

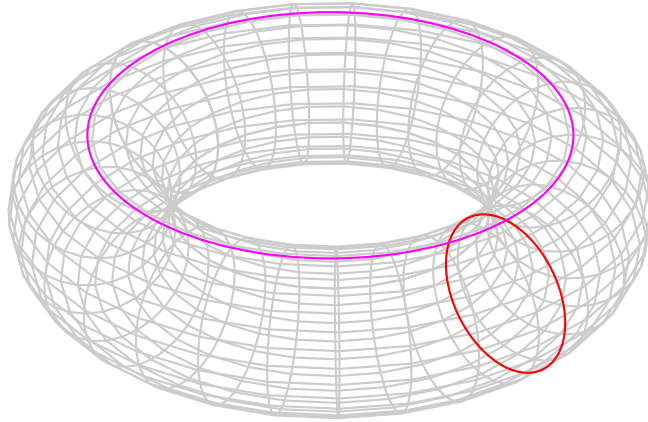


Figura 3.5: Volume generico d'involuppo della curva  $\Gamma$ .

con  $\vec{j}$  densità di corrente. Pertanto il termine  $\vec{j} \cdot \vec{E}$  indica la potenza trasferita alle cariche libere del materiale.

Si consideri un certo numero di flux loops posizionate attorno al plasma su di una superficie toroidale concentrica alla colonna di plasma, di traccia  $\Gamma$  sul piano poloidale (circongerenza rossa in figura 3.5). In generale le spire non giacciono nella stessa superficie iso-flusso, pertanto su ogni anello viene indotta una fem differente.

Il risultato (3.8) segue dalle equazioni di Maxwell:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{B} = \mu \vec{j} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases}$$

in particolare, dalla geometria del problema segue che, nelle equazioni di Maxwell, i campi poloidali (pedice *pol*) e toroidali (pedice  $\varphi$ ) sono disaccoppiati, e la relazione (3.8) assume la seguente forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{B_{pol}^2}{2\mu_0} \right) + \nabla \cdot \left( \vec{E} \times \frac{\vec{B}_{pol}}{\mu_0} \right) = -j_\varphi E_\varphi \quad (3.9)$$

Si integri la relazione (3.9) nel volume  $V_\Gamma$  (toro in figura 3.5) ottenuto dalla rivoluzione della traccia  $\Gamma$  attorno all'asse  $z$ ; i vari termini valgono:

$$\begin{aligned} \int_{V_\Gamma} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{B_{pol}^2}{2\mu_0} \right) dV &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{V_\Gamma} \frac{B_{pol}^2}{2\mu_0} \right) dV \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{LI_p^2}{2} \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \int_{V_T} \nabla \cdot \left( \vec{E} \times \frac{\vec{B}_{pol}}{\mu_0} \right) dV &= \int_{S_T} (\vec{E}_\varphi \times \vec{B}_{pol}) \cdot \vec{n} dS \\ &= \oint_{\Gamma} \varepsilon \vec{B}_p \cdot \vec{t} dl \end{aligned}$$

da cui risulta:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{LI_p^2}{2} \right) + \int_{V_T} j_\varphi E_\varphi dV = \oint_{\Gamma} \varepsilon \vec{B}_p \cdot \vec{t} dl \quad (3.10)$$

Si noti che l'integrale di linea viene valutato sul contorno  $\Gamma$  e non sul contorno di plasma, per questo motivo l'induttanza  $L$  che compare nella relazione (3.10) non indica l'induttanza del solo plasma.

A questo punto, dalla legge di Ohm opportunamente rielaborata  $\vec{j} \cdot \vec{B} = (\sigma_{\parallel} \vec{E}) \cdot \vec{B}$  e assumendo che  $|B_{\varphi,0} - B_\varphi| \ll B_{\varphi,0}$ , risulta che  $E_\varphi = j_\varphi / \sigma_{\parallel}$ , e in definitiva:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{LI_p^2}{2} \right) + \int_{V_T} \frac{j_\varphi^2}{\sigma_{\parallel}} dV = I_p \langle \varepsilon \rangle \quad (3.11)$$

con

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{\mu_0 I_p} \oint_{\Gamma} \varepsilon \vec{B}_p \cdot \vec{t} dl$$

La relazione (3.11) sostiene che la potenza termica  $\int j_\varphi^2 / \sigma_{\parallel} dV$  dissipata per effetto joule nel plasma e trasmessa attraverso il campo elettromagnetico può essere valutata conoscendo sia  $\varepsilon$  che  $\vec{B}_p \cdot \vec{t} = \vec{B}_{tan}$  lungo il contorno  $\Gamma$ , così come l'induttanza  $L$ .

Con riferimento alla figura 3.4, nel caso di molte flux loops concentriche alla colonna di plasma, in cui  $R_p \gg a_p$ , l'induttrice  $L$  può essere approssimata considerando il sistema plasma-superficie toroidale esterna ad esso come un conduttore coassiale massiccio rettilineo:

$$L \approx \mu_0 R_p \left[ \ln \left( \frac{8R_p}{a_p} \right) - 2 + \frac{l_i}{2} \right]$$

con  $a_p$  raggio minore del plasma e  $a_l$  ed  $l_i$  induttanza interna della colonna di plasma, definita come:

$$l_i = \frac{\int r B_{pol}^2 dr dz}{B_{pol}(a_p)^2 \pi a_p^2}$$

### Utilizzo della misura *Volts per turn*

Il valore medio della conducibilità  $\langle \sigma_p \rangle$  del plasma può essere determinata scrivendo:

$$\frac{2\pi R_p I_p^2}{\pi a_p^2 \langle \sigma_p \rangle} = \int_V \frac{j_\varphi^2}{\sigma_p} dV = I_p \langle \varepsilon \rangle - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{LI_p^2}{2} \right)$$

A questo punto è possibile derivare una relazione che fornisca il tempo di penetrazione medio  $\tau_{skin}$ , ovvero il tempo di penetrazione di un campo all'interno di un materiale caratterizzato da una conducibilità uniforme  $\langle\sigma\rangle$ :

$$\tau_{skin} = \frac{\pi\mu_0\langle\sigma_p\rangle a_p^2}{16} \quad (3.12)$$

Ora si cercherà di ricavare una relazione che permetta di valutare il tempo di confinamento dell'energia  $\tau_E$  per un plasma di raggio maggiore  $R_p$  e una sezione  $S_\varphi$ , con riscaldamento ohmico. Siano:

$$\begin{aligned} W &= 3\pi R_p \int_{S_\varphi} p \, dS && \text{totale energia del plasma} \\ P_{oh} &= \Omega_p I_p^2 && \text{potenza ohmica entrante} \\ \beta_{pol} &= \frac{8\pi}{\mu_0 I_p^2} \int_{S_\varphi} p \, dS && \text{poloidal beta}^2 \\ \Omega_p &= \rho_p \frac{l_p}{S_\varphi} = \frac{1}{\langle\sigma\rangle} \frac{2R_p}{a_p^2} && \text{resistenza della colonna di plasma} \end{aligned}$$

si ottiene:

$$\tau_E = \frac{W}{P_{oh}} = \frac{3\mu_0\beta_{pol}R_p}{8\Omega_p} = \frac{3\mu_0\beta_{pol}a_p^2\langle\sigma\rangle}{16} \quad (3.13)$$

Combinando le relazioni (3.12) e (3.13) si ottiene:

$$\frac{\tau_E}{\tau_{skin}} \approx \beta_{pol} \approx 0.3$$

poiché nei plasmi riscaldati ohmicamente vale  $\beta_{pol} \approx 0.3$ . Da questo segue che il tempo necessario alla corrente per penetrare nel plasma è circa 3 volte il tempo che impiega l'energia ad uscire da quest'ultimo.

---

<sup>2</sup>Parametro utile per descrivere il confinamento [6].

### 3.2 Diagnostica magnetica in ITER

Segue la lista dei sensori per la diagnostica magnetica del reattore ITER [27], accompagnata dalle viste d'insieme di alcuni set di sensori.

<b>Tipo di misura</b>	<b>Numero di sensori</b>
sensori di campo induzione in-vessel per la ricostruzione dell'equilibrio e il controllo in tempo reale	150 $B_{tan}$ , 72 $B_{norm}$ , 6 $B_{tor}$
spire di flusso in-vessel per la ricostruzione dell'equilibrio e il controllo in tempo reale	4 spire di flusso (full flux) in 9 settori, 120 spire a sella
sensori in-vessel nella zona del divertore per la ricostruzione di strike points e frontiera di plasma	36 $B_{tan}$ , 36 $B_{norm}$ , 1 $B_{tor}$
sensori in-vessel e spire di flusso per le instabilità MHD di modo elevato-frequenza elevata	300 $B_{pol}$ , 100 $B_{norm}$ , 72 saddle loops
misure del flusso diamagnetico per l'energia immagazzinata	2-turns diamagnetic flux loop in 3 settori di macchina separati, 24 saddle loops
Bobine di Rogowski per la misurazione di halo current	360 per il blanket, 60 per il divertore
sensori di campo induzione ext-vessel per la ricostruzione dell'equilibrio (e il controllo in tempo reale?)	180 $B_{tan}$ , 180 $B_{norm}$
sensori di campo stazionario ext-vessel per la ricostruzione dell'equilibrio (e il controllo in tempo reale?)	60 $B_{tan}$ , 60 $B_{norm}$
spire di flusso ext-vessel per la ricostruzione dell'equilibrio	5 full loops
bobine di Rogowski nell'involucro delle bobine TF per la misurazione della corrente di plasma	9 bobine TF integrate con le bobine di Rogowski
sensori ad effetto Faraday ext-vessel per misurare la corrente di plasma	4 sensori in 3 settori di macchina

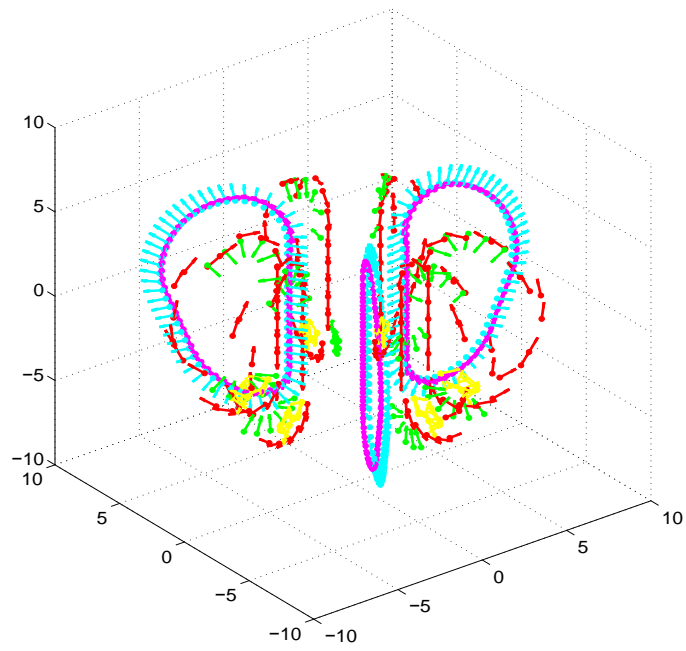


Figura 3.6: Vista d'insieme dei sensori pick-up.

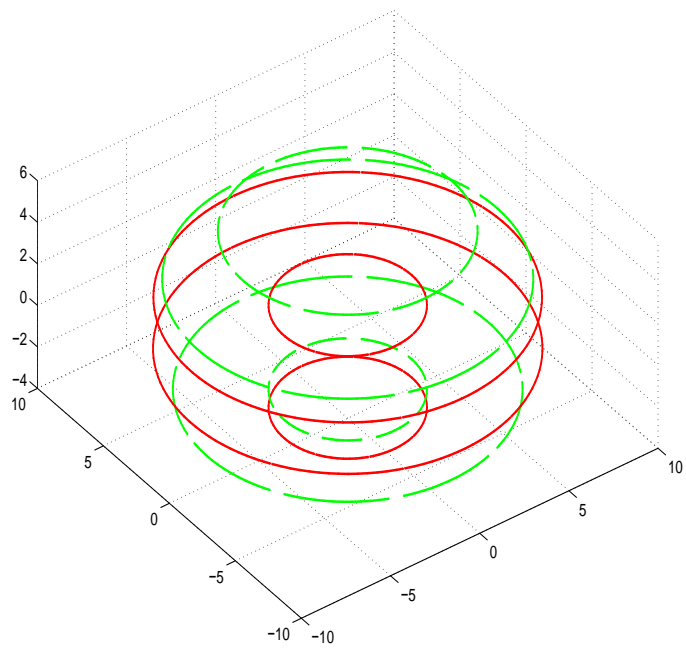


Figura 3.7: Vista d'insieme delle flux loops.

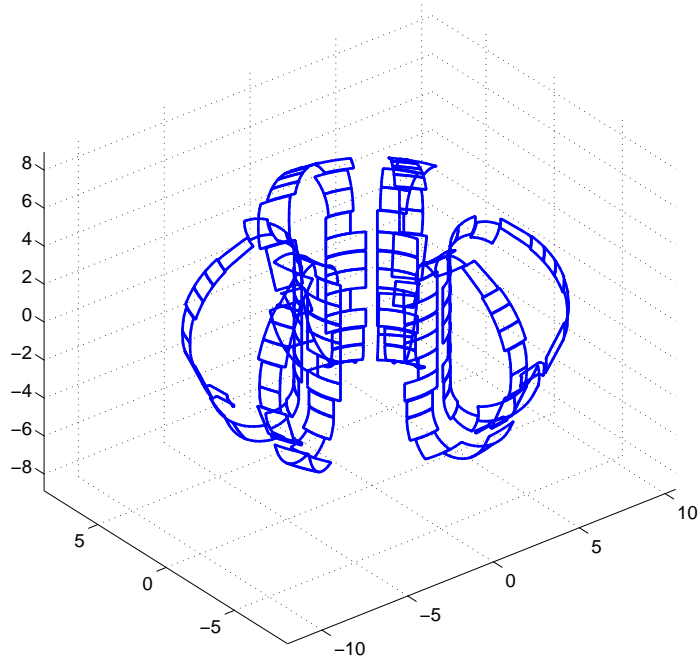


Figura 3.8: Vista d'insieme dei sensori a sella.



## CAPITOLO 4

# Ricostruzione dei momenti di plasma di ordine inferiore nel caso statico

Il problema da affrontare consiste nel calcolare i momenti di corrente di plasma di ordine inferiore senza conoscere la reale distribuzione di corrente toroidale, ma solamente i valori di campo induzione al bordo di un dominio che contiene il plasma. Nella prima parte dell'esperienza si cercherà di validare il risultato ottenuto con la (2.25) valutando tale risultato lungo un certo numero di curve, modificando il numero di punti su cui è definita la curva per rendersi conto di quanto varia il risultato mano a mano che le curve sono meno ricche di punti. In seguito, partendo dalle reali misure di diagnostica, si affronterà il problema con un approccio di ottimizzazione anziché analitico, per riuscire a combinare le poche misure di campo induzione disponibili ed ottenere momenti di corrente verosimilmente corretti.

### 4.1 Calcolo dei momenti di plasma secondo definizione

Si consideri la configurazione di plasma EQUIL00090 mostrata in figura 4.14. Data questa particolare situazione di equilibrio si calcoleranno, per via numerica, i momenti di plasma di ordine inferiore secondo la definizione (2.16).

La densità di corrente di plasma è data come un insieme discreto di  $N_p = 14448$  correnti circolari coassiali, ognuna delle quali ha traccia sul piano poloidale  $rz$  pari al punto  $P_i = (r_i, z_i)$ . In questa situazione la relazione 2.16 viene così riscritta:

$$\hat{q}_n = \sum_{i=1}^{N_p} \chi_n(P_i) j_\varphi(P_i) \quad (4.1)$$

dove il cappuccio  $\hat{\#}$  indica che la grandezza  $\hat{q}_n$  si ottiene da un calcolo discreto. Applicando la (4.1) al plasma in questione si calcolano i momenti di

ordine  $n = 0, 1, 2$ :

$$\begin{aligned}\hat{q}_0 &= I_p = 11.567 \text{ MA} \\ \hat{q}_1 &= z_p I_p \quad \Rightarrow \quad z_p = \frac{\sum_{i=1}^{N_p} z_i \cdot j_\varphi(P_i)}{I_p} = 0.5566 \text{ m} \\ \hat{q}_1 &= r_p^2 I_p \quad \Rightarrow \quad r_p = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_p} r_i^2 \cdot j_\varphi(P_i)}{I_p}} = 6.0392 \text{ m}\end{aligned}$$

In ogni esperienza sono stati calcolati i momenti di plasma con relazioni approssimate, e questi risultati sono stati confrontati con i momenti ottenuti per mezzo della definizione (4.1) per valutare l'errore tra i due valori ottenuti.

## 4.2 Ricostruzione dei momenti di plasma da curve continue

### 4.2.1 Considerazioni preliminari

Il risultato (2.25) sostiene che un momento di plasma  $q_n$  può essere calcolato solamente valutando il campo  $\vec{B}_{pol}$  al bordo di un dominio chiuso. L'importanza del risultato, nonché le conseguenze che ne derivano, possono essere meglio comprese ricordando le relazioni (2.16), (2.25), rispettivamente:

$$\begin{aligned}q_n &= \int_{\Omega_d} \chi_n(r, z) j_\varphi(r, z) \, dr dz \\ q_n &= \frac{1}{\mu_0} \oint_{\gamma} \chi_n \vec{B}_{pol} \cdot \vec{t} \, d\gamma + \frac{1}{\mu_0} \int_{\gamma} \xi_n \vec{B}_{pol} \cdot \vec{n} \, d\gamma\end{aligned}$$

con  $\gamma = \partial\Omega_d$ .

Si noti come ogni integrando sia una funzione  $f(r, z)$  di due variabili, in generale non identicamente nulla: in un dominio  $\Omega_d$  di  $N \times N$  il calcolo di (2.16) richiede  $O(N^4)$  operazioni, mentre il calcolo di (2.25) ne richiede  $O(N^3)$ . Pertanto l'onere computazionale è quindi sensibilmente minore.

Inoltre, l'utilizzo della relazione (2.25), piuttosto che la (2.16), è dovuto al fatto che non si è a conoscenza, con precisione, della funzione  $j_\varphi(r, z)$  all'interno del plasma, mentre  $\chi_n(r, z), \xi_t(r, z)$  sono polinomi noti analiticamente, dunque calcolabili in tutto il dominio  $\Omega_d$  compreso il bordo, e le grandezze  $B_n(r, z), B_t(r, z)$  sono note come misure dei sensori di campo nell'immediata prossimità del first wall, in un'insieme di punti che può essere verosimilmente considerato come parte del bordo  $\partial\Omega_d$ . Pertanto la scelta è dettata da ragioni di necessità.

Lo scopo dell'esperienza è dunque la verifica dei risultati della relazione (2.25), calcolata in modo discreto nel paragrafo 4.1, andando ad eseguire il



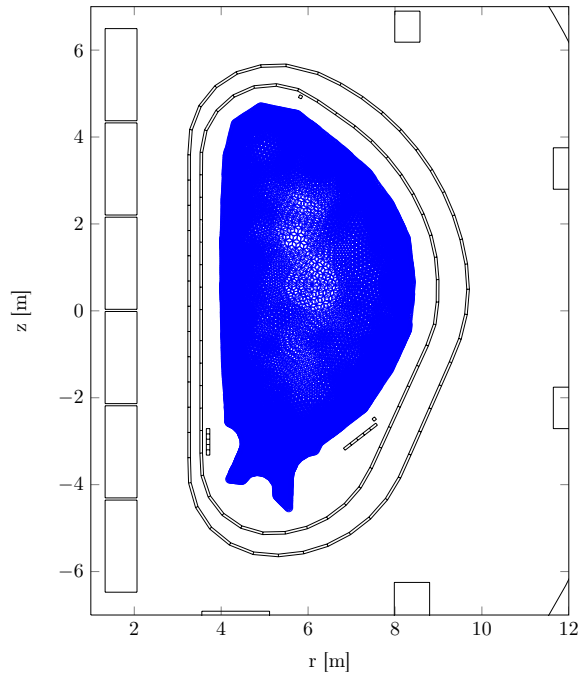


Figura 4.1: Dominio  $\Omega_p$  dove è definito il plasma.

calcolo su curve composte da un numero sufficientemente elevato di punti, tale da poterle considerare continue.

Si studiano i seguenti casi differenti:

1. delle curve composte da una spezzata che passa per i punti, che saranno caso per caso 50, 100, 200, 500, 1000 punti;
2. una curva composta da una spline cubica che interpola 135 punti, posizionati nella periferia della camera da vuoto in prossimità della prima parete.

Come già detto in precedenza, nelle configurazioni di equilibrio studiate si considera il plasma come un insieme di  $N_p$  conduttori filiformi equivalenti disposti nel dominio  $\Omega_p$ , tali che la traccia nel piano  $rz$  sia un punto. In figura 4.1 si vede raffigurato in blu tale dominio. I conduttori filiformi così definiti sono tali da formare una distribuzione discreta di densità di corrente toroidale  $j_\varphi$ , che soddisfa l'equilibrio di Grad-Shafranov, e permettono di sviluppare i calcoli agevolmente.

#### 4.2.2 Costruzione delle misure di campo magnetico

Le misure di campo induzione lungo la curva  $\hat{\gamma}$  necessarie per ricostruire i momenti non sono disponibili nella realtà, poiché si stanno considerando curve generiche attorno al plasma, mentre i sensori di diagnostica sono posti

in una ben precisa posizione all'interno del vessel. Si procede pertanto al calcolo delle componenti  $B_r, B_z$  in ogni punto della curva, costruendo il vettore delle misure virtuali come in ogni punto della curva fosse posizionato un sensore. Data la configurazione di plasma discretizzata in un gran numero di conduttori filiformi è agevole calcolare i valori di campo fittizi misurati dai sensori.

Si consideri l' $h$ -esimo sensore posizionato nel punto  $P_h = (r_h, z_h)$  del piano poloidale. Il valore di campo induzione  $m_h$  misurato dal sensore è dato dalla somma vettoriale dei campi prodotti dalle varie sorgenti. Tenendo conto di tutti gli  $N_s$  sensori si ha che:

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \mathbf{m}_p + \mathbf{m}_s + \mathbf{m}_c \\ &= \mathbf{G}_{mp}\mathbf{I}_p + \mathbf{G}_{ms}\mathbf{I}_s + \mathbf{G}_{mc}\mathbf{I}_c \end{aligned} \quad (4.2)$$

dove i tre termini sono rispettivamente i contributi della corrente di plasma, delle bobine e degli elementi passivi conduttori. Si noti che nel caso magnetostatico in questione l'ultimo termine della (4.2) è identicamente nullo.

Le misure virtuali del campo lungo la curva  $\hat{\gamma}$  sono i dati che in una situazione reale proverrebbero dalle misure di diagnostica. Dal momento che non si dispone la misura fittizia  $m_h$  riferita all' $h$ -esimo sensore viene calcolata in modo da rendere disponibili le componenti  $B_r, B_z$  del campo induzione, e non solamente il modulo come accade nella realtà.

La matrice  $\mathbf{G}_{mp} \in \mathbb{R}^{N_s \times N_p}$  ha nel posto  $(h, i)$  il termine  $G_{h,i}$  funzione di Green che tiene conto del campo prodotto sul sensore  $m_h$  dalla corrente elementare unitaria  $j_{\varphi,i}(r_i, z_i)$ , a seconda della componente desiderata:

$$G_{r,mp} = \frac{2\mu_0 z}{2\pi r \sqrt{z^2 + (a+r)^2}} \left[ -K(k) + E(k) \frac{a^2 + r^2 + z^2}{(a-r)^2 + z^2} \right] \quad (4.3)$$

$$G_{z,mp} = \frac{2\mu_0}{2\pi \sqrt{z^2 + (a+r)^2}} \left[ K(k) + E(k) \frac{a^2 - r^2 - z^2}{(a-r)^2 + z^2} \right] \quad (4.4)$$

con  $K(k_*)$ ,  $E(k_*)$  già definiti nelle (2.9), (2.10) per il parametro  $k_*$  tale che:

$$k_*^2 = \frac{4rr'}{(r'+r)^2 + (z'+z)^2}$$

Le misure virtuali  $B_r, B_z$  verranno utilizzate per calcolare le proiezioni di  $\vec{B}_{pol}$  nelle direzioni tangente e normale alla curva considerata.

### 4.2.3 Caso 1: circonferenza esterna al vessel

Lo scopo dell'esperienza è quello di studiare curve definite con un numero di punti progressivamente minore, per mostrare in che modo aumenta l'errore commesso per approssimazioni sempre più grezze. Si consideri a questo scopo una circonferenza in figura 4.2, data da una spezzata  $\hat{\gamma}$  composta

da un numero di segmenti sufficientemente elevato da poter essere ritenuta continua.

Per questa curva  $\hat{\gamma}$  l'integrale della relazione (2.25) viene calcolato in modo discreto con la seguente relazione:

$$\hat{q}_n = \sum_{h=1}^{N_s} \frac{1}{\mu_0} [\chi(r_h, z_h) B_t(r_h, z_h) \Delta_{t,h} + \xi(r_h, z_h) B_n(r_h, z_h) \Delta_{n,h}] \quad (4.5)$$

dove  $\Delta_{\#,h}$  è l'ampiezza dell'intervallo h-esimo su cui si calcola la circuitazione piuttosto che il flusso.

Data la curva  $\hat{\gamma}$  definita per punti la relazione (4.2) fornisce le componenti del campo induzione  $\vec{B}_{pol} = (B_r, B_z)$  nei punti della curva. La proiezione del vettore  $\vec{B}_{pol}$  lungo i versori tangente e normale permette di determinare  $B_t, B_n$ . Dal momento che la curva è discreta si ha:

$$\begin{aligned} B_t(P_h) &= \vec{B}_{pol} \cdot \vec{\mathbf{t}} = \frac{1}{\|\gamma_{1,h}(\zeta)\|} (B_r(P_h) \gamma'_{1,h}(\zeta) + B_z(P_h) \gamma'_{2,h}(\zeta)) \\ B_n(P_h) &= \vec{B}_{pol} \cdot \vec{\mathbf{n}} = \frac{1}{\|\gamma_{1,h}(\zeta)\|} (B_r(P_h) \gamma'_{1,h}(\zeta) - B_z(P_h) \gamma'_{2,h}(\zeta)) \end{aligned}$$

con la derivata della curva nel punto h-esimo:

$$\begin{aligned} \gamma'_{1,h} &= \frac{r_{h+1} - r_{h-1}}{2} \\ \gamma'_{2,h} &= \frac{z_{h+1} - z_{h-1}}{2} \end{aligned}$$

Per il calcolo della lunghezza  $\Delta_{\#,h}$  riferita al punto  $P_h$  si definiscono i punti medi  $P_m$  dei segmenti successivo e precedente al punto  $P_h$  come:

$$\begin{aligned} P_{m,h+1} &= \left( \frac{r_{h+1} + r_h}{2}, \frac{z_{h+1} + z_h}{2} \right) \\ P_{m,h-1} &= \left( \frac{r_h + r_{h-1}}{2}, \frac{z_h + z_{h-1}}{2} \right) \end{aligned}$$

e si calcolano le distanze  $\Delta_{\#,h} = d(M_{h+1}, M_{h-1})$ .

Seguono i risultati nei casi considerati. Si noti come le ricostruzioni di  $I_p, r_p$  siano molto precise anche con un numero molto ridotto di punti. La ricostruzione de  $z_p$  è invece più delicata, visto il suo valore esiguo rispetto alle altre due grandezze: tuttavia l'errore rimane sempre contenuto e largamente al di sotto del 2%.

50 punti

---

$I_p$	11.536 MA
$r_p$	6.0386 m
$z_p$	0.5659 m
$\Delta I_p$	0.2689 %
$\Delta r_p$	0.0091 %
$\Delta z_p$	1.6662 %

---

100 punti

---

$I_p$	11.559 MA
$r_p$	6.0390 m
$z_p$	0.5590 m
$\Delta I_p$	0.0671 %
$\Delta r_p$	0.0021 %
$\Delta z_p$	0.4177 %

---

200 punti

---

$I_p$	11.565 MA
$r_p$	6.0391 m
$z_p$	0.5572 m
$\Delta I_p$	0.0168 %
$\Delta r_p$	$\approx 5 \times 10^{-4}$ %
$\Delta z_p$	0.1046 %

---

500 punti

---

$I_p$	11.567 MA
$r_p$	6.0392 m
$z_p$	0.5567 m
$\Delta I_p$	0.0027 %
$\Delta r_p$	$\approx 8 \times 10^{-5}$ %
$\Delta z_p$	0.0167 %

---

1000 punti

---

$I_p$	11.567 MA
$r_p$	6.0392 m
$z_p$	0.5567 m
$\Delta I_p$	$\approx 7 \times 10^{-4}$ %
$\Delta r_p$	$\approx 2 \times 10^{-5}$ %
$\Delta z_p$	0.0042 %

---

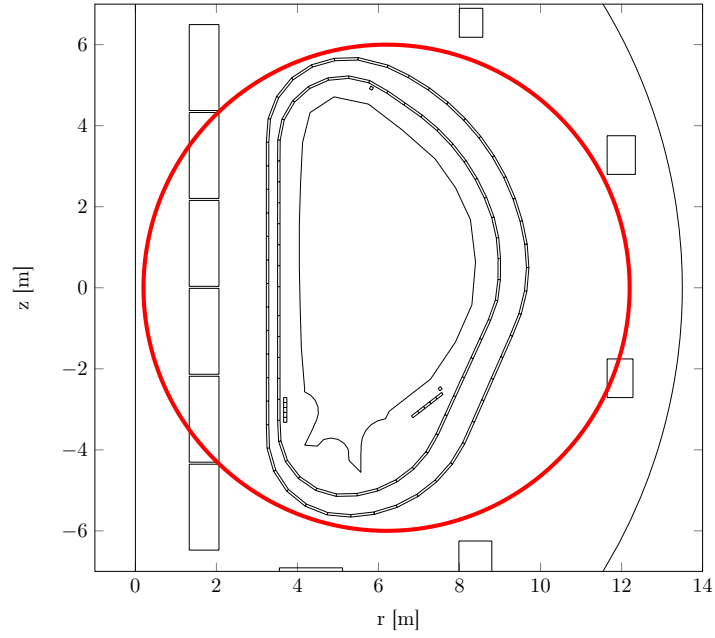


Figura 4.2: Circonferenza  $\hat{\gamma}(\zeta)$ .

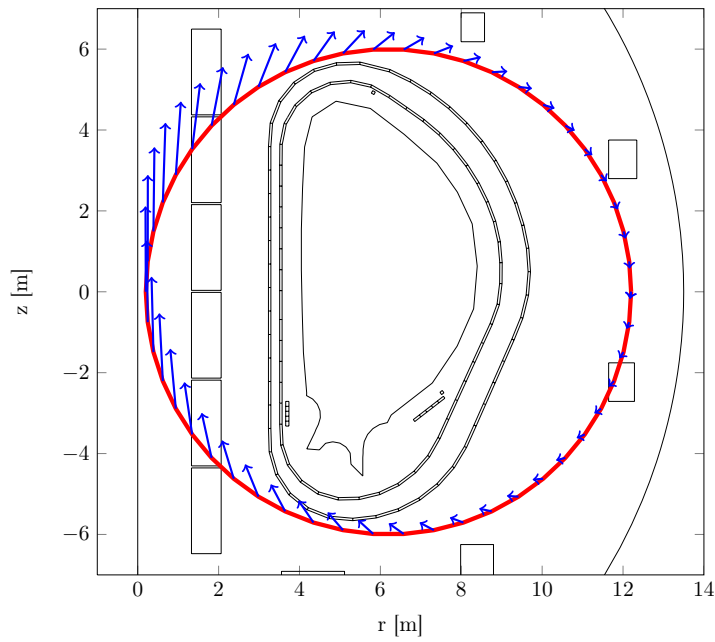


Figura 4.3: Valore del campo  $\vec{B}_{pol}$  lungo la curva  $\hat{\gamma}(\zeta)$ .

#### 4.2.4 Caso 2: curva interna al vessel

A differenza della curva spezzata del caso precedente si utilizzi un'insieme di  $N_s = 135$  nodi d'appoggio in prossimità della prima parete, interpolati per mezzo di una spline cubica [28].

Ognuna delle due componenti della curva  $\gamma(\zeta) = (\gamma_1(\zeta), \gamma_2(\zeta))$  viene interpolata con una spline cubica passante per i  $N_s = 135$  punti, in modo da conoscere analiticamente ogni coppia di polinomi base (*Piecewise-polynomials*) nei 135 intervalli. Pertanto nell'intervallo h-esimo la curva è definita come segue:

$$\gamma_h(\omega) = (a_{1,h}\omega^3 + b_{1,h}\omega^2 + c_{1,h}\omega + d_{1,h}, a_{2,h}\omega^3 + b_{2,h}\omega^2 + c_{2,h}\omega + d_{2,h})$$

con  $\omega \in [0, 1]$  ascissa curvilinea del segmento, tale che  $\gamma_h(0) = (P_h)$  e  $\gamma_h(1) = (P_{h+1})$ ; questo permette di affermare che l'intervallo h-esimo ha origine nel nodo  $P_h$  e termine nel nodo  $P_{h+1}$ . Inoltre i coefficienti  $a_{i,h}$ ,  $b_{i,h}$ ,  $c_{i,h}$ ,  $d_{i,h}$ , con  $i = 1, 2$ , sono propri di ciascun intervallo.

Data la definizione analitica della curva è possibile definire le direzioni tangente e normale nei punti d'appoggio, essendo note in modo esatto le derivate delle componenti della curva nei punti:

$$\gamma'_1(P_h) = \gamma'_1(\zeta = 0) = c_{1,h}$$

$$\gamma'_2(P_h) = \gamma'_2(\zeta = 0) = c_{2,h}$$

pertanto:

$$\begin{aligned} B_t(r, z) &= \vec{B}_{pol} \cdot \vec{\mathbf{t}} \\ &= \frac{1}{\|\gamma_{1,h}(\zeta)\|} (B_r(\gamma(\zeta))\gamma'_1(\zeta) + B_z(\gamma(\zeta))\gamma'_2(\zeta)) \\ &= \frac{1}{\|\gamma_{1,h}(\zeta)\|} (B_r(P_h) \cdot c_{1,h} + B_z(P_h) \cdot c_{2,h}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_n(r, z) &= \vec{B}_{pol} \cdot \vec{\mathbf{n}} \\ &= \frac{1}{\|\gamma_{2,h}(\zeta)\|} (B_r(\gamma(\zeta))\gamma'_2(\zeta) - B_z(\gamma(\zeta))\gamma'_1(\zeta)) \\ &= \frac{1}{\|\gamma_{2,h}(\zeta)\|} (B_r(P_h) \cdot c_{2,h} - B_z(P_h) \cdot c_{1,h}) \end{aligned}$$

Si noti che i calcoli eseguiti fino a questo punto siano analiticamente esatti, visto che si è a conoscenza dei polinomi base di tutti gli intervalli.

La lunghezza  $\Delta_{\#,h}$  è la lunghezza del tratto di curva tra un nodo e l'altro, che vale:

$$\begin{aligned}
\Delta_{\#,h} &= \int_{[0,1]} \|\gamma'_h(\zeta)\| d\zeta \\
&= \int_0^1 \sqrt{[\gamma'_{1,h}(\zeta)]^2 + [\gamma'_{2,h}(\zeta)]^2} d\zeta \\
&= \int_0^1 \sqrt{g_h(\zeta)} d\zeta
\end{aligned} \tag{4.6}$$

L'integrando della (4.6) è, come già detto in precedenza, noto per via analitica. Infatti:

$$g_h(\zeta) = (3a_{1,h}\zeta^2 + 2b_{1,h}\zeta + c_{1,h})^2 + (3a_{2,h}\zeta^2 + 2b_{2,h}\zeta + c_{2,h})^2$$

tuttavia, data la complessità dell'integrale, questo viene calcolato per via numerica servendosi della quadratura di Gauss-Legendre del quinto ordine [29], così da ottenere un errore trascurabile.

La ricostruzione dei momenti col procedimento appena presentato restituisce i seguenti risultati. Si noti come i risultati siano molto precisi anche con un numero ridotto di punti. Questo è dovuto al fatto che l'espressione analitica della curva è nota, e di conseguenza i calcoli sono più precisi rispetto al caso della circonferenza. In particolare si vede come, con una spline cubica di 135 punti, l'errore nella ricostruzione delle coordinate del centroide  $(r_p, z_p)$  è dello stesso ordine di grandezza di quello commesso servendosi della circonferenza di 500 punti, mentre per la corrente  $I_p$  l'errore risulta molto minore, confrontabile con quello della circonferenza per 1000 punti.

$I_p$	11.567 MA
$r_p$	6.0392 m
$z_p$	0.5567 m
$\Delta I_p$	$4.1789 \times 10^{-4} \%$
$\Delta r_p$	$1.3312 \times 10^{-4} \%$
$\Delta z_p$	0.0157 %

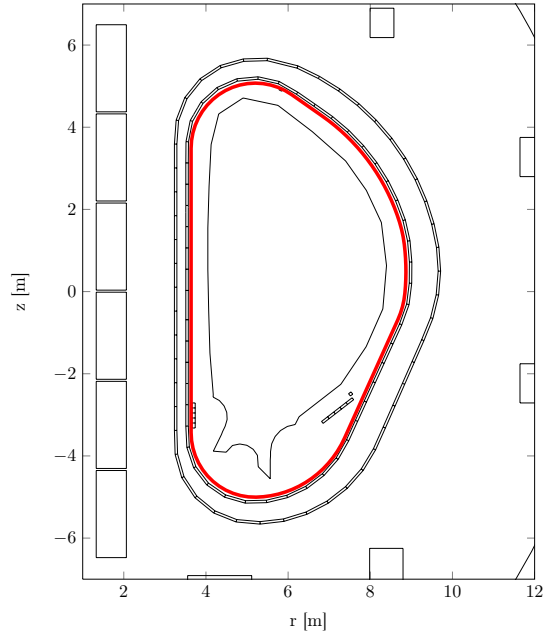


Figura 4.4: Curva  $\hat{\gamma}(\zeta)$ .

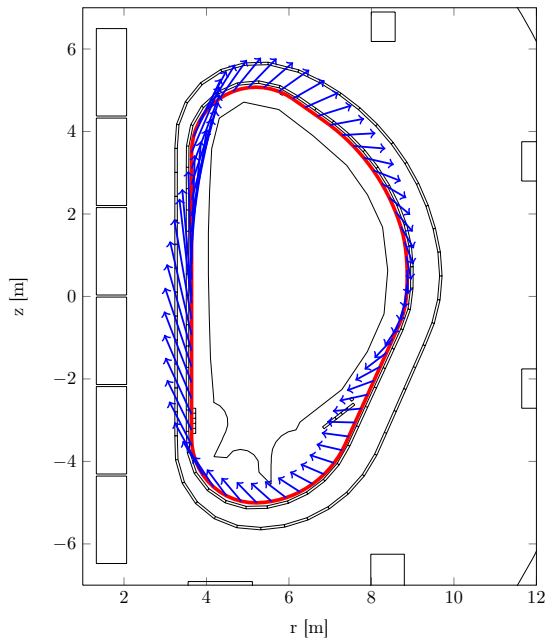


Figura 4.5: Valore del campo  $\vec{B}_{pol}$  lungo la curva  $\hat{\gamma}(\zeta)$ .



## 4.3 Ricostruzione dei momenti di plasma da un numero ridotto di misure

### 4.3.1 Presentazione del problema

Si considerino i sensori reali per la misura dell'induzione magnetica presenti all'interno del vessel di ITER, riportati in figura 4.6. Questi sono:

24 sensori che misurano la componente *tangenziale* del campo induzione (sensori AA), in rosso in figura;

12 sensori che misurano la componente *normale* del campo induzione (sensori AB), in rosso in figura;

per un totale di 36 sensori complessivi. Il numero esiguo e la disposizione molto discontinua, soprattutto dei sensori AB, non permette un calcolo dei momenti di plasma per mezzo della relazione (4.5): ciò vorrebbe dire considerare costante il valore  $|\vec{B}_{pol}|$  nel tratto  $\Delta_h$ , e alcuni tratti  $\Delta_h$  sono di lunghezza considerevole, soprattutto per i sensori che misurano la componente normale.

Per ovviare alla scarsa precisione che si otterrebbe col metodo studiato nei paragrafi precedenti, si sceglie di affrontare il problema come se fosse un problema di ottimizzazione. Si noti che il calcolo di un momento  $q_n$  altro non è che una combinazione lineare delle misure di campo induzione: a livello generale, per esempio, la relazione (4.5) è una combinazione lineare delle misure di campo pesate con un certo coefficiente in un dato intervallo. Noti i momenti risultanti è quindi ragionevole cercare a ritroso i coefficienti che permettono di ottenere i risultati voluti: i pesi ottimi saranno, idealmente, indipendenti dalla configurazione della corrente di plasma.

Servendosi di un numero di configurazioni note di plasma sufficientemente maggiore del numero dei sensori è possibile ricavare il set di pesi che permette di approssimare i momenti in modo migliore. Naturalmente cambiando l'ordine del momento di plasma cambia anche il set di pesi ottimi ad esso riferito.

### 4.3.2 Il problema di ottimizzazione

Si consideri il generico momento  $q_0$  di una qualsiasi configurazione di plasma. La relazione (4.5) viene riscritta come segue:

$$k_1 m_1 + k_2 m_2 + \dots + k_{36} m_{36} = I_p$$

con  $m_h$  valore del campo induzione misurato del sensore h-esimo. Il vettore  $\mathbf{k}$  contiene 36 pesi, ciascuno per la misura di uno dei 36 sensori, la cui combinazione lineare con le misure dei sensori rispettivi permette di ricostruire il momento di corrente di ordine zero. Le equazioni del sistema sono ordinate

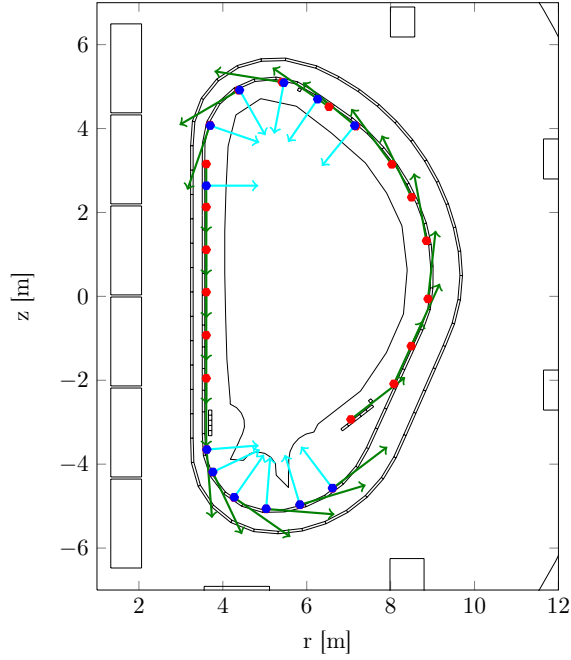


Figura 4.6: Disposizione reale dei sensori normali e tangenziali.

in modo che i primi 24 termini siano riferiti ai sensori tangenziali, gli altri 12 ai sensori normali.

Il plasma della configurazione EQUIL00090 è composto, come già detto, da  $N_p = 14448$  conduttori filiformi equivalenti. Si considerano 14448 scenari di plasma composti dalle  $N_p$  unitarie, prese una alla volta scenario dopo scenario, e posizionate negli  $N_p$  punti previsti dalla configurazione di equilibrio. Pertanto, per ognuno dei 14448 casi i momenti di plasma risultano, banalmente:

$$\begin{aligned} q_{0,i} &= I_{p,i} = 1 \\ q_{1,i} &= z_i I_{p,i} = z_1 \\ q_{2,i} &= r_i^2 I_{p,i} = r_i^2 \end{aligned}$$

con  $i = 1, \dots, N_p$ . Quindi i sistemi da risolvere sono:

$$\begin{cases} k_{I_p,1} m_{1,1} + k_{I_p,2} m_{1,2} + \dots + k_{I_p,36} m_{1,36} = 1 \\ \vdots \\ k_{I_p,1} m_{14448,1} + k_{I_p,2} m_{14448,2} + \dots + k_{I_p,36} m_{14448,36} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_{z_p,1} m_{1,1} + k_{z_p,2} m_{1,2} + \dots + k_{z_p,36} m_{1,36} = z_1 \\ \vdots \\ k_{z_p,1} m_{14448,1} + k_{z_p,2} m_{14448,2} + \dots + k_{z_p,36} m_{14448,36} = z_{14448} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_{r_p,1}m_{1,1} + k_{r_p,2}m_{1,2} + \dots + k_{r_p,36}m_{1,36} = r_1^2 \\ \vdots \\ k_{r_p,1}m_{14448,1} + k_{r_p,2}m_{14448,2} + \dots + k_{r_p,36}m_{14448,36} = r_{14448}^2 \end{cases}$$

scrivendo i sistemi in modo compatto si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{p,s} \mathbf{k}_{I_p} &= \mathbf{1} \\ \mathbf{G}_{p,s} \mathbf{k}_{z_p} &= \mathbf{z}_p \\ \mathbf{G}_{p,s} \mathbf{k}_{r_p} &= \mathbf{r}_p^2 \end{aligned}$$

avendo indicato con  $\mathbf{G}_{p,s} \in \mathbb{R}^{N_e \times N_s}$  la matrice delle misure sui sensori, nella direzione di misura, generate da correnti unitarie.

Il risultato di ognuno dei tre sistemi non è determinabile per via analitica, essendo  $N_p \neq N_s$ : pertanto si ricercano delle soluzioni *ai minimi quadrati*, scrivendo i problemi nella seguente forma:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{k}_{I_p}} \|\mathbf{G}_{p,s} \mathbf{k}_{I_p} - \mathbf{b}_{I_p}\|_2 \\ \min_{\mathbf{k}_{z_p}} \|\mathbf{G}_{p,s} \mathbf{k}_{z_p} - \mathbf{b}_{z_p}\|_2 \\ \min_{\mathbf{k}_{r_p}} \|\mathbf{G}_{p,s} \mathbf{k}_{r_p} - \mathbf{b}_{r_p}\|_2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

dove  $\mathbf{b}$  indica il vettore dei termini noti e  $\|\#\|_2$  indica la norma euclidea.

In particolare, il numero di condizionamento  $\kappa(\mathbf{G}_{p,s})$  della matrice  $\mathbf{G}_{p,s}$  vale:

$$\kappa(\mathbf{G}_{p,s}) \approx 1.35 \times 10^3$$

segue che il problema in questione è mal condizionato, e tale mal condizionamento dipende pesantemente dalla posizione dei sensori e delle correnti, nonché dal loro valore. Pertanto, il problema richiede una decomposizione TSVD (Truncated Singular Value Decomposition), attraverso la quale si sacrifica il fit con i dati per ottenere una maggiore regolarità nella soluzione [34].

Partendo con una decomposizione ai valori singolari SVD di  $\mathbf{G}_{p,s}$  si ottiene:

$$\mathbf{G}_{p,s} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^\top \quad (4.8)$$

con  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{N_p \times N_p}$ ,  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N_s \times N_s}$ , e  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{N_p \times N_s}$  estensione della matrice quadrata  $\mathbf{S}^* = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_{N_s})$  ponendo zero in tutti i termini della matrice  $\mathbf{S}$  fuori della diagonale di  $\mathbf{S}^*$ .

Dalla (4.8) è possibile ottenere il vettore soluzione per il problema ai minimi quadrati (4.7):

$$\mathbf{k} = \mathbf{V} \mathbf{S}^+ \mathbf{U}^\top \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{N_s} \frac{(\mathbf{U}^\top \mathbf{b})(i)}{\sigma_i} \mathbf{v}_i$$

La soluzione SVD appena descritta non è sufficientemente regolare, perché i set di coefficienti  $\mathbf{k}_{I_p}$ ,  $\mathbf{k}_{z_p}$ ,  $\mathbf{k}_{r_p}$  sono troppo sensibili alla posizione e al valore delle correnti, causando un mal condizionamento del problema. Pertanto, come detto in precedenza, viene utilizzato un metodo TSVD con indice di troncamento  $k_t$ . Pertanto la soluzione risulta:

$$\mathbf{k} = \mathbf{V}_k \mathbf{S}_k^+ \mathbf{U}_k^\top \mathbf{b} = \sum_{i=1}^k \frac{(\mathbf{U}_k^\top \mathbf{b})(i)}{\sigma_k} \mathbf{v}_i$$

dove  $\mathbf{U}_k \in \mathbb{R}^{N_p \times k_t}$ ,  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N_s \times k_t}$ , e  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{k_t \times k_t}$  matrice quadrata diagonale composta da  $(\sigma_1, \dots, \sigma_{k_t})$ .

Dalle prove effettuate si è visto che il compromesso migliore tra precisione della soluzione e buona regolarità viene raggiunto per un ordine di troncamento pari a  $k_t = 23$ . Naturalmente, visto che si sta trattando il caso magneto-statico, le correnti indotte nei passivi sono identicamente nulle e i problemi di regolarità della soluzione non sono comunque apprezzabili. Tuttavia, nel capitolo successivo si vedrà come una buona ricostruzione dinamica dipenda pesantemente da una soluzione regolare del problema (4.7).

Il processo è stato applicato a 10 configurazioni note di plasma, e i risultati sono riportati nel paragrafo 4.3.4. Si noti come gli errori percentuali risultino molto ridotti.

### 4.3.3 Verifica dei risultati

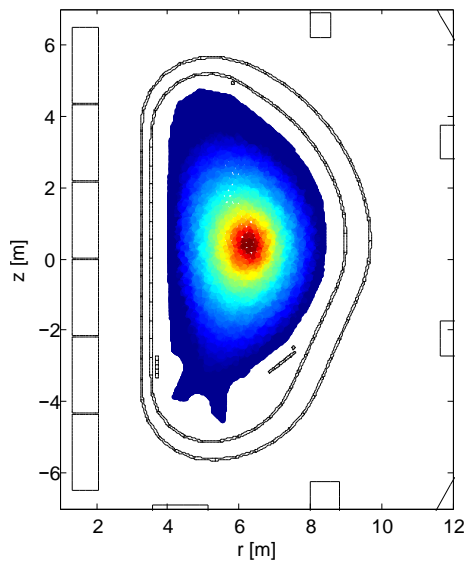
Si noti che la relazione (2.25) è insensibile alla presenza di qualsiasi corrente esterna al bordo  $\partial\Omega_d$ . Ciò non sarà del tutto vero anche per i set di pesi appena determinati, provenendo questi da un processo di ottimizzazione. Per provare quanto sia ridotta la sensibilità a correnti esterne al vessel sono stati ricostruiti i momenti di corrente per la configurazione di plasma già analizzata con l'aggiunta di 12 correnti di 20kA ciascuna, posizionate come in figura 4.17. Si vede come gli errori siano maggiori rispetto alla presenza del solo plasma, ma risultando comunque molto contenuti.

Un'ulteriore verifica viene mostrata in figura 4.18. La configurazione di plasma è data da 12 correnti, ognuna di valore pari a 1MA, posizionate lungo una circonferenza di centro  $(r_a, z_a) = (6, 0.5)$ . Dal calcolo dei momenti di corrente secondo definizione si ottiene:

$$\begin{aligned} I_p &= 12 \text{ MA} \\ z_p &= 0.5 \text{ m} \\ r_p &= 6.093 \text{ m} \end{aligned}$$

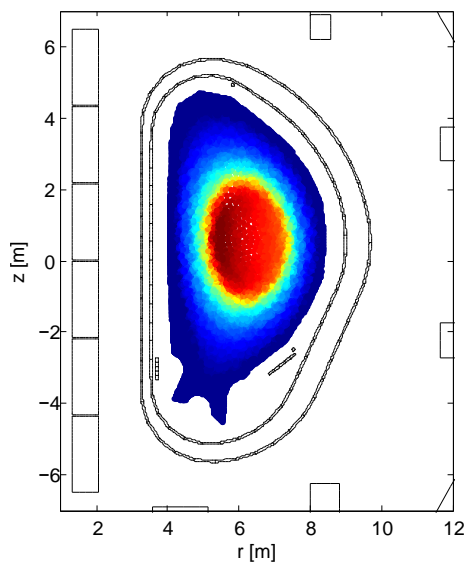
La ricostruzione ottenuta è, come si può vedere, molto soddisfacente.

### 4.3.4 Risultati



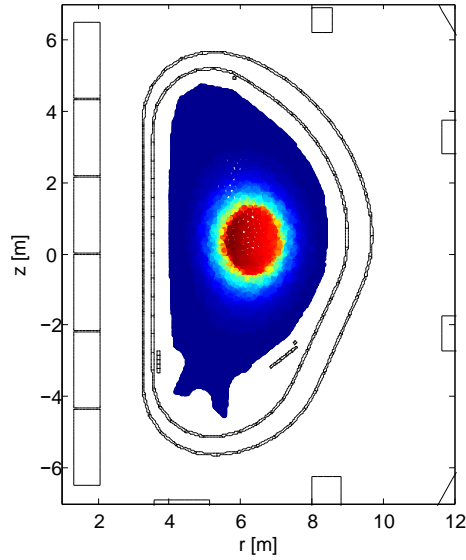
$I_p$	5.5257 MA
$z_p$	0.3681 m
$r_p$	6.1545 m
$\Delta I_p$	0.0732 %
$\Delta z_p$	0.1291 %
$\Delta r_p$	0.0045 %

Figura 4.7: Configurazione di equilibrio EQUIL00005



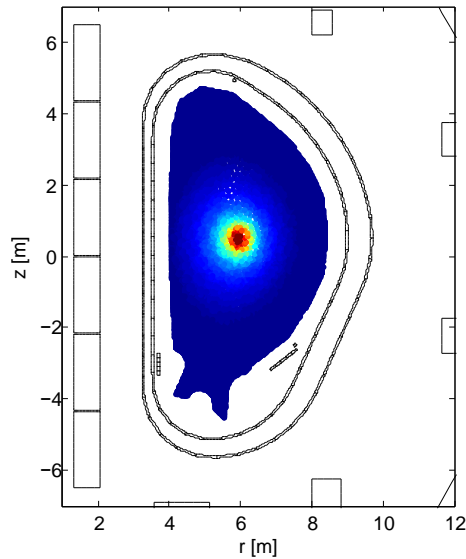
$I_p$	14.956 MA
$z_p$	0.5764 m
$r_p$	6.1553 m
$\Delta I_p$	0.0690 %
$\Delta z_p$	0.0398 %
$\Delta r_p$	0.0017 %

Figura 4.8: Configurazione di equilibrio EQUIL00014



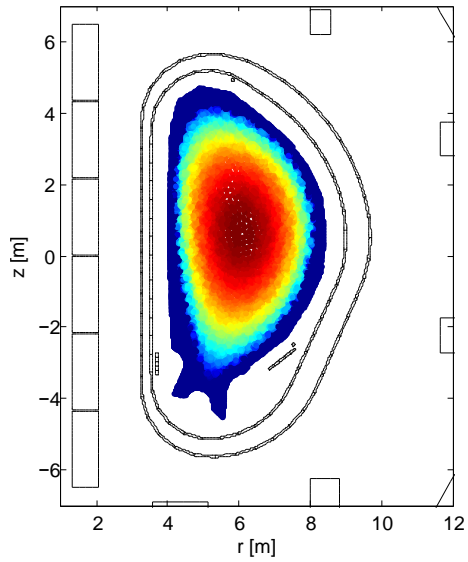
$I_p$	6.0039 MA
$z_p$	0.3739 m
$r_p$	6.2844 m
$\Delta I_p$	0.0647 %
$\Delta z_p$	0.0981 %
$\Delta r_p$	0.0094 %

Figura 4.9: Configurazione di equilibrio EQUIL00027



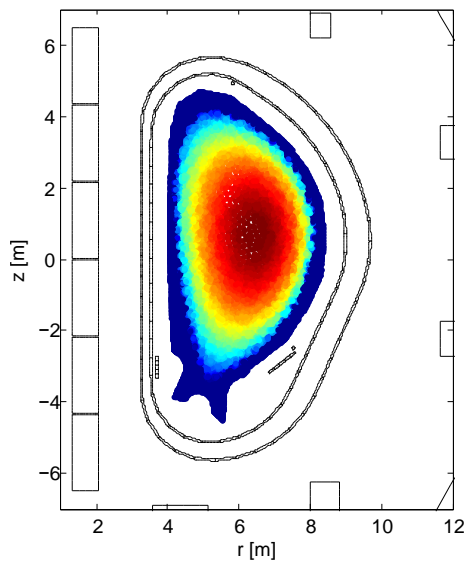
$I_p$	3.0021 MA
$z_p$	0.4829 m
$r_p$	5.8627 m
$\Delta I_p$	0.0695 %
$\Delta z_p$	0.0250 %
$\Delta r_p$	0.0076 %

Figura 4.10: Configurazione di equilibrio EQUIL00030



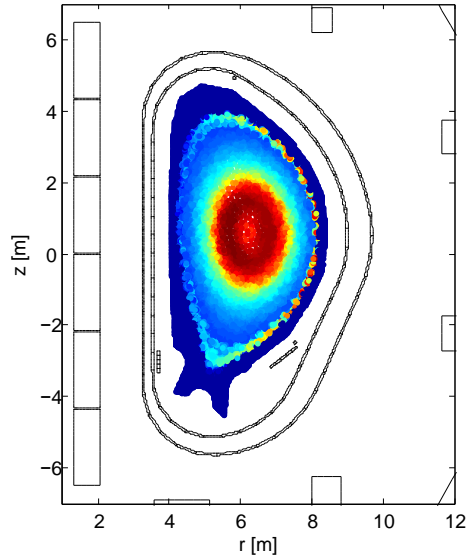
$I_p$	15.011 MA
$z_p$	0.6485 m
$r_c$	6.0659 m
$\Delta I_p$	0.0714 %
$\Delta z_p$	0.0523 %
$\Delta r_p$	0.0064 %

Figura 4.11: Configurazione di equilibrio EQUIL00035



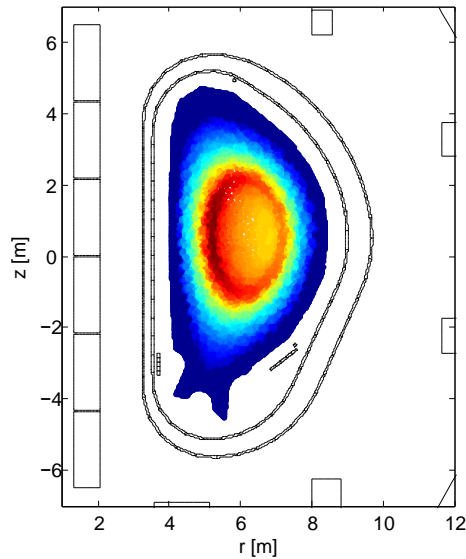
$I_p$	15.010 MA
$z_p$	0.6379 m
$r_c$	6.1487 m
$\Delta I_p$	0.0689 %
$\Delta z_p$	0.0537 %
$\Delta r_p$	0.0070 %

Figura 4.12: Configurazione di equilibrio EQUIL00039



$I_p$	15.010 MA
$z_p$	0.5476 m
$r_p$	6.2419 m
$\Delta I_p$	0.0642 %
$\Delta z_p$	0.0219 %
$\Delta r_p$	0.0020 %

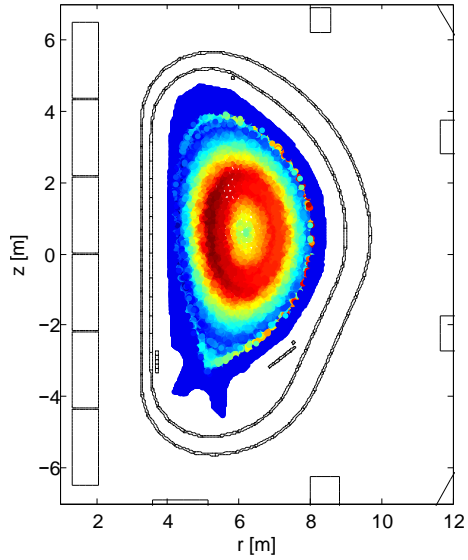
Figura 4.13: Configurazione di equilibrio EQUIL00067



$I_p$	11.576 MA
$z_p$	0.5562 m
$r_p$	6.0390 m
$\Delta I_p$	0.0744 %
$\Delta z_p$	0.0692 %
$\Delta r_p$	0.033 %

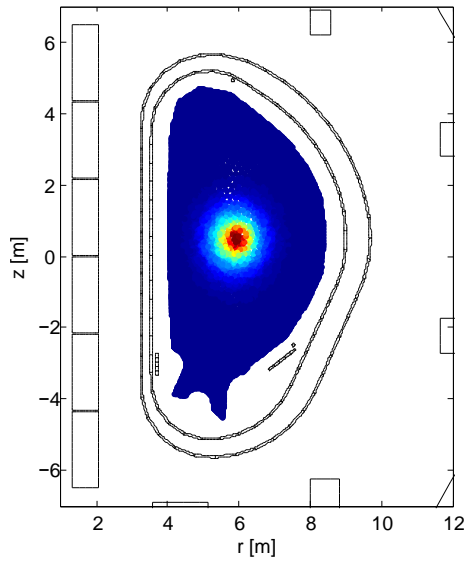
Figura 4.14: Configurazione di equilibrio EQUIL00090





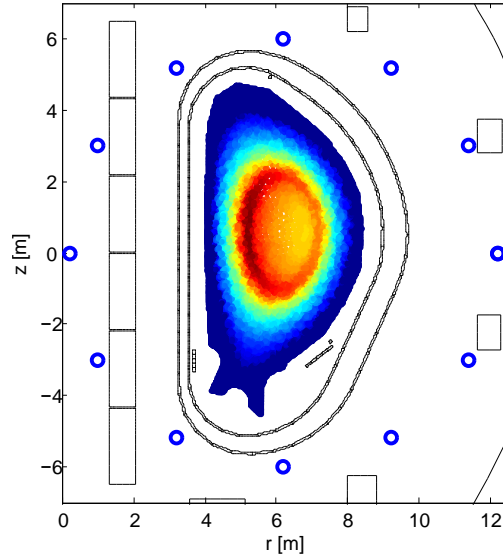
$I_p$	15.010 MA
$z_p$	0.5485 m
$r_p$	6.1469 m
$\Delta I_p$	0.0682 %
$\Delta z_p$	0.0301 %
$\Delta r_p$	0.0023 %

Figura 4.15: Configurazione di equilibrio EQUIL00098



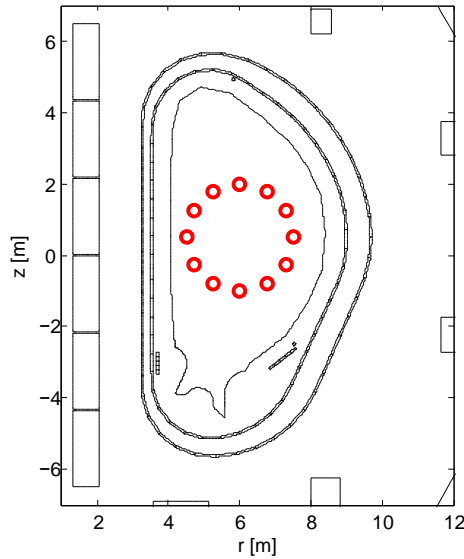
$I_p$	2.5267 MA
$z_p$	0.4737 m
$r_p$	5.9172 m
$\Delta I_p$	0.0668 %
$\Delta z_p$	0.0329 %
$\Delta r_p$	0.0086 %

Figura 4.16: Configurazione di equilibrio EQUIL00131



$I_p$	11.6628 MA
$z_p$	0.5539 m
$r_p$	6.0318 m
$\Delta I_p$	0.52 %
$\Delta z_p$	0.1226 %
$\Delta r_p$	0.5231 %

Figura 4.17: Configurazione di equilibrio EQUIL00090 con correnti esterne.



$I_p$	12.004 MA
$z_p$	0.4999 m
$r_p$	6.0940 m
$\Delta I_p$	0.0333 %
$\Delta z_p$	0.0287 %
$\Delta r_p$	0.0154 %

Figura 4.18: Configurazione con 12 correnti interne definite a priori.

## CAPITOLO 5

# Ricostruzione in tempo reale della frontiera di plasma

L'approccio presentato nel capitolo precedente si presta sufficientemente bene alla ricostruzione dei momenti di corrente di ordine inferiore nel caso magneto-statico. Ci si propone a questo punto di estendere tale approccio allo studio della dinamica di una qualsiasi configurazione di plasma, per valutare l'evoluzione temporale della frontiera di quest'ultimo.

In un qualsiasi regime transitorio del plasma si assiste alla nascita di correnti parassite indotte negli elementi conduttori che concatenano il flusso del plasma. Queste correnti vanno a sporcare, con il loro contributo, le misure di campo magnetico raccolte dai sensori, rendendo il procedimento di ricostruzione descritto in precedenza del tutto inaffidabile.

Pertanto, rendere il meccanismo di ricostruzione dei momenti di plasma adatto allo studio di un transitorio significa nient'altro che rendere tale procedura insensibile all'effetto delle correnti indotte nelle strutture conduttrici.

## 5.1 Trattazione teorica sullo studio della dinamica

### 5.1.1 Considerazioni preliminari

Si consideri il sistema di riferimento in coordinate cilindriche  $r\varphi z$  già presentato in precedenza e mostrato in figura 2.1. In questo sistema di riferimento tutta la geometria del piano poloidale può essere descritta in modo differente, a seconda che si ricorra, per la risoluzione del problema, al metodo agli elementi finiti (FEM) oppure al metodo circuitale.

Si consideri la seconda opzione: il plasma, i conduttori attivi e le strutture passive possono essere considerate in modo discreto come un insieme di spire circolari filiformi, tutte coassiali all'asse della macchina e di traccia puntiforme  $P_h = (r_h, z_h)$  nel piano poloidale  $rz$ .

Ogni spira viene considerata un circuito elettrico, caratterizzato da un valore di resistenza  $R_h$ , da un coefficiente di autoinduzione  $L_h$  e da un mu-

tuo accoppiamento con ogni altro circuito elementare. Questa trattazione prende, pertanto, il nome di *modello circuitale*.

La scelta del modello circuitale piuttosto che quello FEM si giustifica con la maggiore semplicità del primo rispetto al secondo. Per rendersene conto, basti pensare che tutta la trattazione coinvolge solamente equazioni circuitali dei vari elementi discreti, evitando qualsiasi considerazione di natura magnetoidrodinamica, quindi evitando di ricorrere al modello basato sull'equazione di Grad-Shafranov.

Complessivamente i conduttori passivi vengono distinti nel seguente modo, in riferimento alle figure 5.1, 5.2:

- *vessel interno* di 50 conduttori (blu) e numerazione 1 → 50;
- *vessel esterno* di 50 conduttori (rosso) e numerazione 51 → 100;
- *triangular support* di 5 conduttori (verde) e numerazione 101 → 105;
- *vertical structure* di 5 conduttori (giallo) e numerazione 106 → 110;

per un totale di 110 conduttori passivi.

Pertanto il modello circuitale sarà composto dai seguenti circuiti:

$$\begin{aligned} \text{Plasma} &\Rightarrow N_p \approx 3600 \\ \text{Attivi} &\Rightarrow N_s = 14 \\ \text{Passivi} &\Rightarrow N_c = 110 \end{aligned}$$

### 5.1.2 Correnti parassite indotte nei conduttori passivi

La valutazione delle correnti *reali* indotte nelle strutture passive durante un transitorio viene eseguita attraverso le equazioni circuitali degli elementi passivi. Si presti attenzione al fatto che questo si può fare solamente se è noto a priori il comportamento del plasma ad ogni istante temporale: pertanto la seguente procedura si presta alla rielaborazione dei dati a seguito di un transitorio, ed è del tutto inutilizzabile al fine di operare un controllo *feedback*.

Utilizzando una scrittura matriciale compatta per le  $N_c$  equazioni circuitali degli elementi passivi si ha che:

$$\dot{\Psi}_c + \mathbf{R}_c \mathbf{I}_c = 0 \quad (5.1)$$

con

$$\Psi_c = \mathbf{M}_{cc} \mathbf{I}_c + \mathbf{M}_{cp} \mathbf{I}_p + \mathbf{M}_{cs} \mathbf{I}_s \quad (5.2)$$

dove:

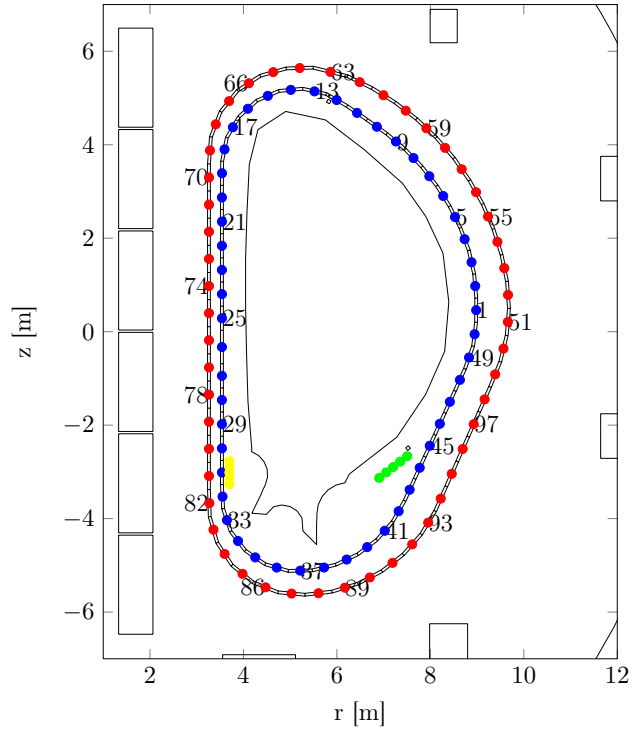


Figura 5.1: Schema di numerazione dei conduttori passivi.

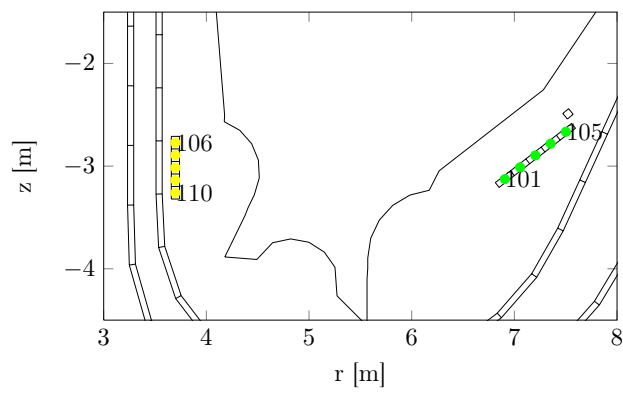


Figura 5.2: Particolare raffigurante triangular support e vertical structure.

$\mathbf{M}_{cc} \in \mathbb{R}^{N_c \times N_c}$  matrice dei coefficienti di autoinduzione dei conduttori passivi;

$\mathbf{M}_{cp} \in \mathbb{R}^{N_c \times N_p}$  matrice dei coefficienti di mutua induzione tra conduttori passivi e plasma;

$\mathbf{M}_{cs} \in \mathbb{R}^{N_c \times N_s}$  matrice dei coefficienti di mutua induzione tra conduttori passivi e le bobine;

$\mathbf{R}_c \in \mathbb{R}^{N_c \times N_c}$  matrice delle resistenze di conduttori passivi;

Combinando la (5.1) con la (5.2) si ottiene l'equazione differenziale del modello:

$$\mathbf{M}_{cc}\dot{\mathbf{I}}_c + \mathbf{R}_c\mathbf{I}_c = -\mathbf{M}_{cp}\dot{\mathbf{I}}_p - \mathbf{M}_{cs}\dot{\mathbf{I}}_s$$

che può essere scritta nella seguente forma

$$\mathbf{M}_{cc}\dot{\mathbf{I}}_c + \mathbf{R}_c\mathbf{I}_c = \mathbf{f}(t) \quad (5.3)$$

con  $\mathbf{f}(t)$  matrice degli ingressi

$$\mathbf{f}(t) = -\mathbf{M}_{cp}\dot{\mathbf{I}}_p - \mathbf{M}_{cs}\dot{\mathbf{I}}_s$$

Si noti che l'andamento temporale delle correnti nelle bobine di alimentazione  $\mathbf{I}_s$  è nota in ogni caso perché scelta a priori, mentre la corrente di plasma  $\mathbf{I}_p$  è nota solamente a transitorio avvenuto.

Dal momento che le grandezze  $\mathbf{I}_s$ ,  $\mathbf{I}_p$  sono note solo in modo temporalmente discreto, la risoluzione della (5.3) dev'essere eseguita per via numerica. Si noti che nel termine  $\mathbf{f}(t)$  compaiono le derivate temporali  $\dot{\mathbf{I}}_s$ ,  $\dot{\mathbf{I}}_p$  di grandezze note in modo discreto, e quindi potenzialmente affette da rumore, e la derivazione di una grandezza affetta da rumore peggiora sensibilmente la qualità dei risultati. Pertanto l'equazione (5.3), anche se teoricamente corretta, porta a dei risultati di scarsa qualità.

Per evitare il problema di cui sopra una soluzione consiste nel riscrivere l'equazione differenziale del modello in termini di flusso piuttosto che di corrente. Infatti dalla relazione (5.2) si ottiene:

$$\mathbf{I}_c = \mathbf{M}_{cc}^{-1}[\Psi_c - \mathbf{M}_{cp}\mathbf{I}_p - \mathbf{M}_{cs}\mathbf{I}_s] \quad (5.4)$$

che sostituita nella (5.1) porge:

$$\dot{\Psi}_c + \mathbf{R}_c\mathbf{M}_{cc}^{-1}\Psi_c = \mathbf{R}_c\mathbf{M}_{cc}^{-1}[\mathbf{M}_{cp}\mathbf{I}_p + \mathbf{M}_{cs}\mathbf{I}_s]$$

ovvero:

$$\dot{\Psi}_c + \mathbf{R}_c\mathbf{M}_{cc}^{-1}\Psi_c = \mathbf{g}(t) \quad (5.5)$$

con ovvio significato dei simboli. Si noti come gli ingressi non presentino alcuna derivata temporale. A questo punto, dopo aver ricavato l'andamento temporale del vettore flusso  $\Psi_c$ , si ricava l'andamento delle correnti  $I_c$  dalla relazione (5.4).

Sfruttando le considerazioni precedenti è stato possibile determinare la reale evoluzione delle correnti nei conduttori passivi. Nelle figure 5.3 - 5.10 sono riportati tali andamenti, sfruttando due differenti rappresentazioni per raffigurare il più chiaramente possibile l'evoluzione temporale.

### 5.1.3 Effetto delle correnti nei passivi sulle misure di campo

La comparsa di correnti negli schermi conduttori in prossimità del plasma comporta una sensibile modifica della configurazione magnetica dello spazio nelle regioni ad essi limitrofe. Questo naturalmente comporta una differenza nelle misure di campo da parte dei sensori AA, AB rispetto al caso magneto-statico. Tale differenza può, talvolta, essere molto marcata, vista la vicinanza dei sensori di misura alle strutture conduttrici, come si può vedere nella figura 4.6.

Nelle figure 5.11, 5.12 sono raffigurate rispettivamente la mappa del flusso prodotto dalle correnti di plasma e conduttori attivi in una condizione magneto-stazionaria, e la mappa di flusso prodotta dalle correnti nei passivi in un istante del transitorio. Sono inoltre riportati alcuni tra i sensori che più risentono del contributo delle correnti nei conduttori passivi (in rosso i sensori AA e in blu i sensori AB). Si noti come le linee di campo in corrispondenza dei sensori evidenziati varino sensibilmente tra le due configurazioni magnetiche raffigurate: questo giustifica l'elevato errore di misura che si può raggiungere durante il transitorio. Per darne quantitativamente un'idea, vengono raffigurati gli andamenti degli errori di misura nei sensori più influenzati. Si vedano le figure 5.13, 5.14, 5.15.

Per quanto l'effetto delle correnti passive sulle misure possa sembrare importante, esso è irrisorio nella maggior parte dei sensori. Per rendersi conto di ciò, detto  $\epsilon_{i,\%}(t)$  l'evoluzione temporale dell'*i*-esimo errore, si calcola la quantità  $\epsilon_{\%}(t)$ :

$$\epsilon_{\%}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{36} \epsilon_{i,\%}(t)}{36}$$

che rappresenta l'evoluzione della media di 36 errori durante la scarica. Si ha che il valore massimo che viene raggiunto è pari a  $\hat{\epsilon}_{\%} = 12\%$ . Tale valore è bel lontano dai picchi raggiunti negli andamenti di figura 5.13, 5.14, 5.15, e per di più questo picco viene raggiunto solamente nei primi istanti di transitorio. Tuttavia, anche se le correnti nei passivi sembrano non influire eccessivamente nelle misure di diagnostica, è auspicabile riuscire a valutare, anche in modo approssimato, il loro andamento, per poter ricostruire l'evoluzione dei momenti di corrente in maniera quanto più precisa.

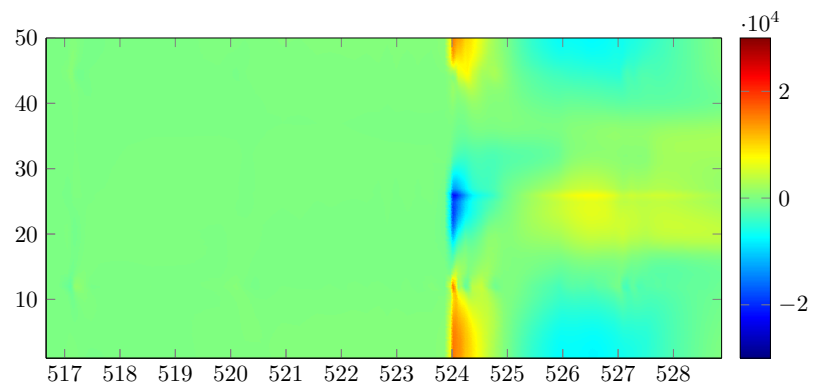


Figura 5.3: Correnti reali nel vessel interno rettificato.

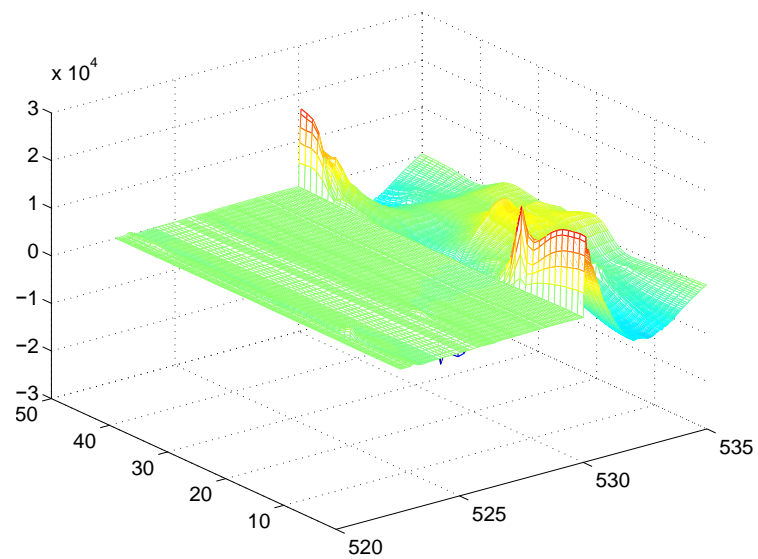


Figura 5.4: Andamento tridimensionale delle correnti reali nel vessel interno.



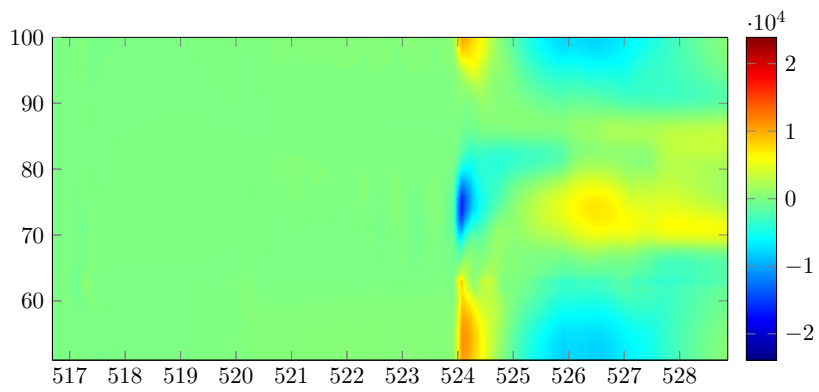


Figura 5.5: Correnti reali nel vessel esterno rettificato.

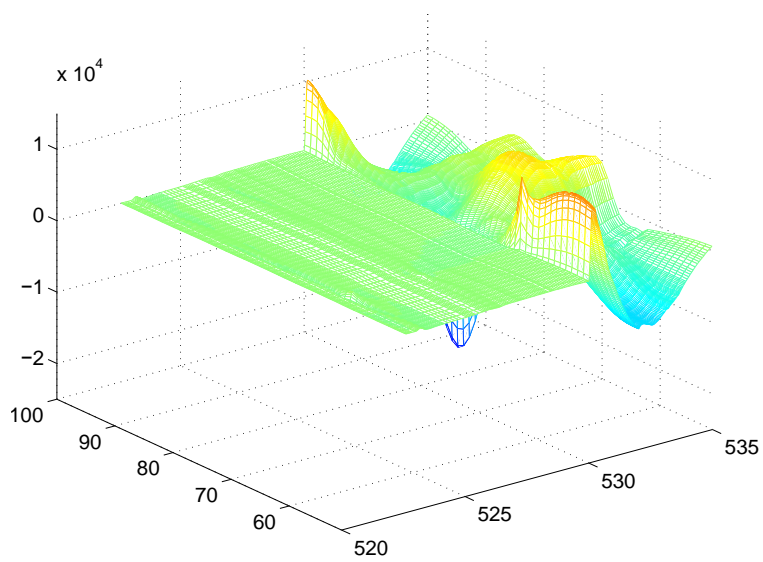


Figura 5.6: Andamento tridimensionale delle correnti reali nel vessel esterno.

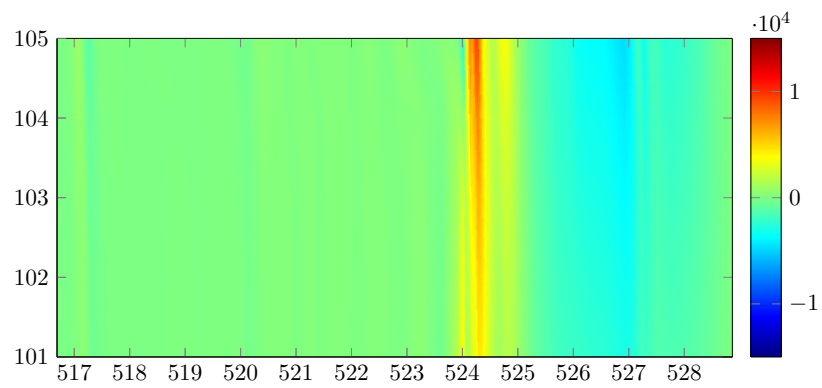


Figura 5.7: Correnti reali nel triangular support interno rettificato.

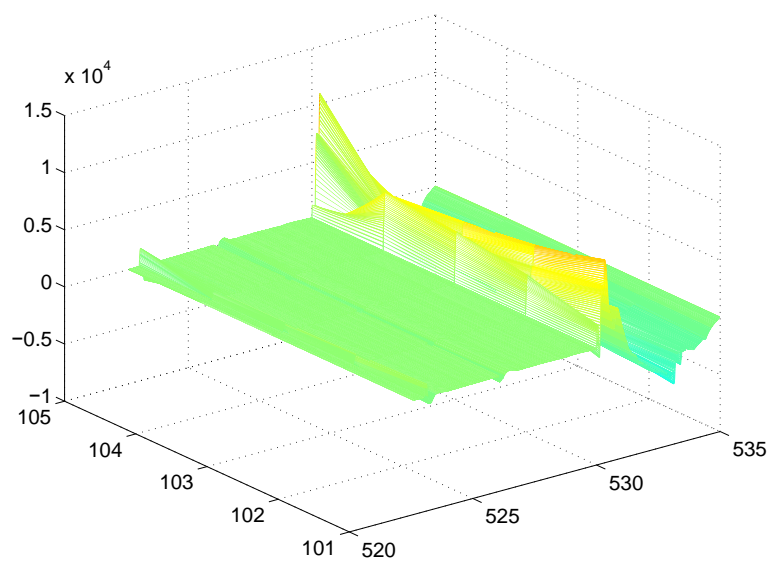


Figura 5.8: Andamento tridimensionale delle correnti reali nel triangular support.

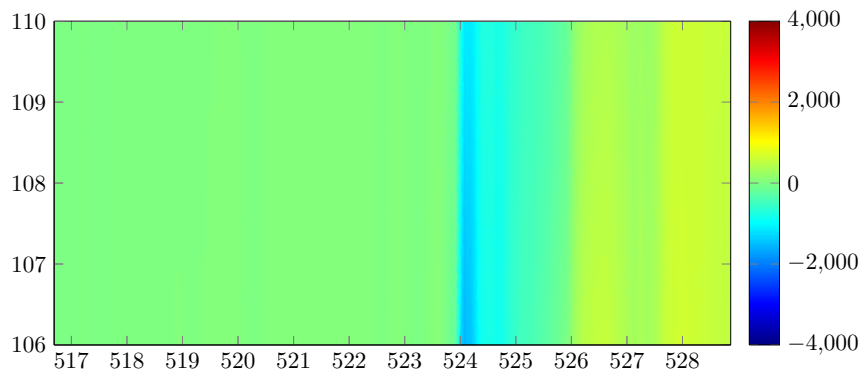


Figura 5.9: Correnti reali nella vertical structure interno rettificato.

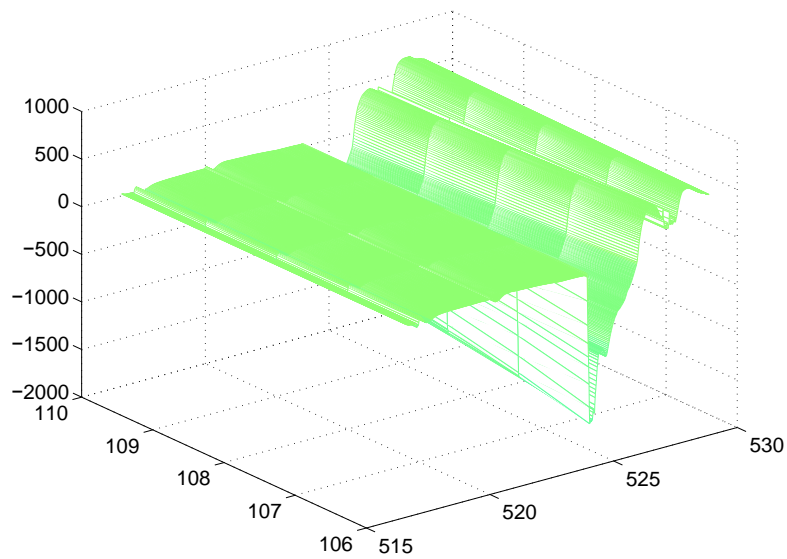


Figura 5.10: Andamento tridimensionale delle correnti reali nella vertical structure.

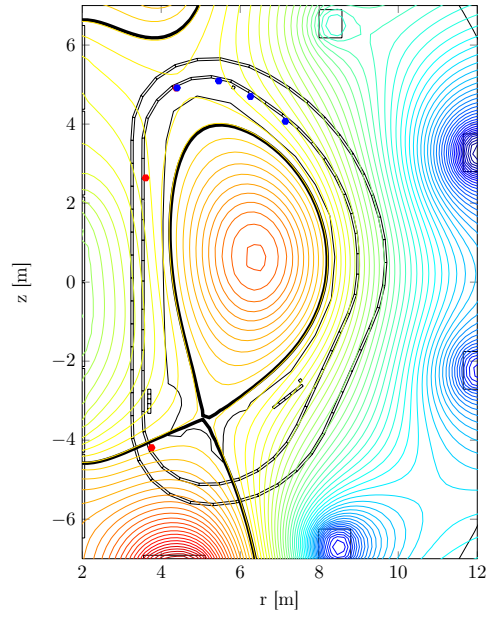


Figura 5.11: Mappa del flusso reale in condizioni stazionarie e sensori più soggetti agli effetti delle correnti nei passivi.

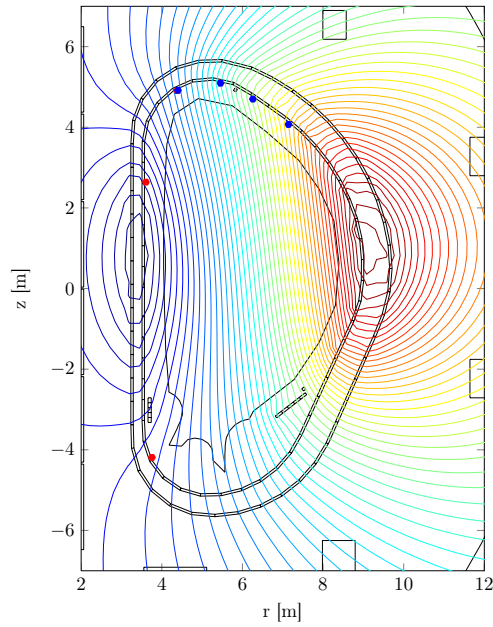


Figura 5.12: Mappa del flusso prodotto dalle correnti nei passivi in un istante del transitorio e sensori più soggetti ai suoi effetti.

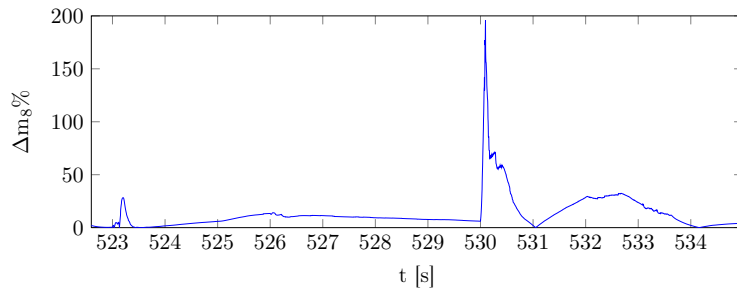


Figura 5.13: Andamento temporale dell'errore di misura del sensore AA-8.

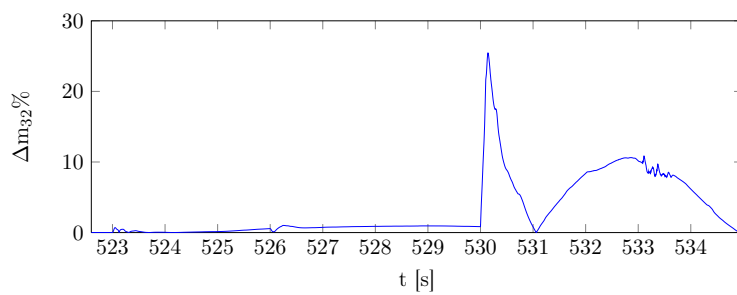


Figura 5.14: Andamento temporale dell'errore di misura del sensore AB-8.

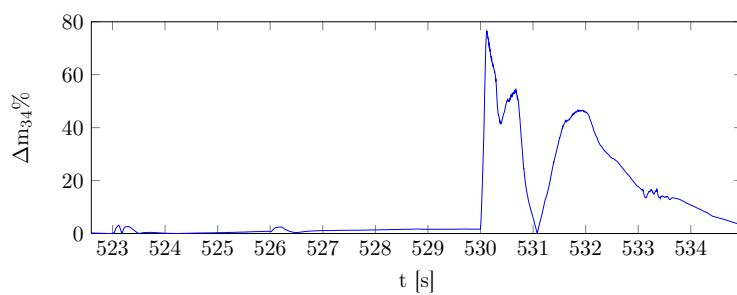


Figura 5.15: Andamento temporale dell'errore di misura del sensore AB-10.

### 5.1.4 Modello filamentare

Prima di procedere con la ricostruzione dinamica è utile presentare il modello filamentare. Tale modello permette di rappresentare il plasma con una distribuzione di correnti equivalenti filiformi disposte in una certa posizione geometrica tempo-invariante, di valore tale da soddisfare, istante per istante, determinati vincoli sui momenti della corrente toroidale.

Si noti l'importanza della tempo-invarianza della posizione geometrica delle correnti equivalenti: da ciò segue che le matrici di accoppiamento tra il plasma e gli altri circuiti del modello sono tutte a coefficienti costanti.

Si consideri una configurazione di  $N_e = 100$  correnti equivalenti disposte lungo un'ellisse definita a priori. Si ha che l' $i$ -esimo filamento di plasma equivalente è posto in  $P_i = (r_i, z_i)$ :

$$\begin{cases} r_i = r_0 + a \cos \vartheta_i \\ z_i = z_0 + b \sin \vartheta_i \end{cases}$$

con  $r_0 = 6.2$  m,  $z_0 = 0.55$  m,  $a = 0.7$  m,  $b = 1$  m,  $i = 1, \dots, 100$ . In figura 5.16 si può vedere l'ellisse delle correnti.

La distribuzione di corrente viene a priori definita di andamento sinusoidale:

$$I_{e,i}(t) = I_0(t) + I_c(t) \cos \vartheta_i + I_s(t) \sin \vartheta_i \quad (5.6)$$

Dal momento che la posizione delle correnti equivalenti è scelta a priori e fissa nel tempo, gli unici gradi di libertà del problema sono dati dal valore delle correnti equivalenti, ovvero i termini  $I_0(t)$ ,  $I_c(t)$ ,  $I_s(t)$ . Pertanto, a 3 gradi di libertà corrispondono altrettanti vincoli per avere una relazione analitica che lega i termini  $I_0(t)$ ,  $I_c(t)$ ,  $I_s(t)$  alla corrente reale di plasma. In particolare si vuole che configurazione equivalente di plasma e configurazione di reale siano caratterizzate dagli stessi momenti  $q_0$ ,  $q_1$ ,  $q_2$ , uguaglianza che deve essere soddisfatta istante per istante.

Dalla definizione di momento magnetico di grado  $n$  segue:

$$q_0 = I_p = \sum_{i=1}^{N_e} I_{e,i}(t) = N_e I_0(t) \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} q_1 &= z_p \cdot I_p = \sum_{i=1}^{N_e} z_i \cdot I_{e,i}(t) \\ &= \sum_{i=1}^{N_e} (z_0 + b \sin \vartheta_i) (I_0(t) + I_c(t) \cos \vartheta_i + I_s(t) \sin \vartheta_i) \\ &= z_0 N_e I_0(t) + b I_s(t) \frac{N_e}{2} \end{aligned} \quad (5.8)$$

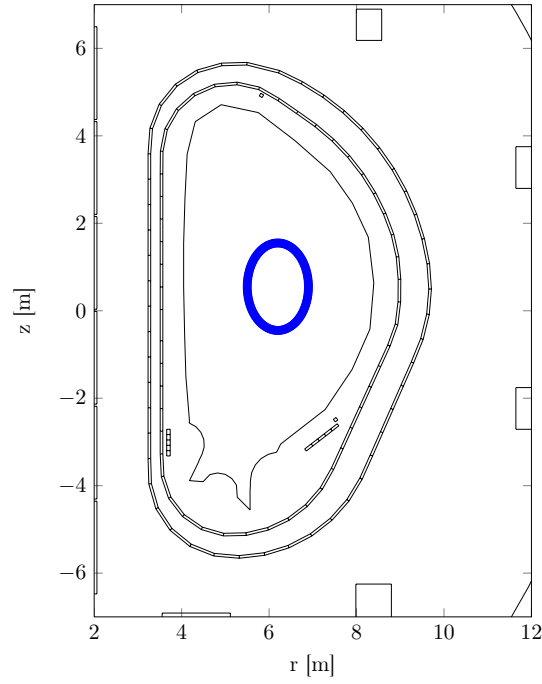


Figura 5.16: Ellisse delle correnti equivalenti.

$$\begin{aligned}
 q_2 = r_p^2 \cdot I_p &= \sum_{i=1}^{N_e} r_i^2 \cdot I_{e,i}(t) \\
 &= \sum_{i=1}^{N_e} (r_0 + a \cos \vartheta_i)^2 (I_0(t) + I_c(t) \cos \vartheta_i + I_s(t) \sin \vartheta_i) \\
 &= r_0^2 N_e I_0(t) + a^2 I_0(t) \frac{N_e}{2} + ar_0 I_c(t) N_e
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

A questo punto, dai risultati appena ottenuti, si determinano i coefficienti della relazione (5.6):

$$I_0(t) = \frac{1}{N_e} I_p \tag{5.10}$$

$$I_s(t) = 2 \cdot \frac{z_p - z_0}{b N_e} \cdot I_p \tag{5.11}$$

$$I_c(t) = \frac{r_p^2 - r_0^2 - a^2/2}{ar_0 N_e} \cdot I_p \tag{5.12}$$

Pertanto, *conoscendo a priori* i valori di  $(I_p, z_p, r_p)$  istante per istante è possibile determinare univocamente i coefficienti  $I_0(t), I_s(t), I_c(t)$  della distribuzione ellittica equivalente. La risoluzione dell'equazione differenziale (5.5) può essere a questo punto eseguita servendosi del plasma equivalente

anziché della distribuzione di corrente vera e propria, commettendo un errore molto contenuto nel calcolo delle correnti nei conduttori passivi.

## 5.2 Ricostruzione delle correnti parassite attraverso il metodo dei momenti di corrente

Si consideri una generica condizione di transitorio durante il quale variano posizione, forma e corrente di plasma. I valori del campo magnetico misurato dai sensori sono, come si vede nella relazione 4.2, somma dei seguenti contributi:

$$\begin{aligned}\mathbf{m} &= \mathbf{m}_p + \mathbf{m}_s + \mathbf{m}_c \\ &= \mathbf{G}_{mp}\mathbf{I}_p + \mathbf{G}_{ms}\mathbf{I}_s + \mathbf{G}_{mc}\mathbf{I}_c\end{aligned}$$

tuttavia, nel caso dinamico, si inducono delle correnti nei conduttori passivi, quindi il termine  $\mathbf{m}_c$  è in generale non nullo. Pertanto l'approccio *best fit* descritto nella sezione 4.3, per quanto sia robusto e poco sensibile alle correnti nei passivi, non permette di ricostruire fedelmente l'evoluzione temporale dei momenti di plasma.

Dal momento che le uniche grandezze note sono le misure di campo magnetico  $\mathbf{m}$  e le correnti nelle bobine attive  $\mathbf{I}_s$ , la ricostruzione delle correnti nei conduttori passivi attraverso l'equazione differenziale (5.5) risulta impossibile, non conoscendo la distribuzione di corrente toroidale di plasma, ne tantomeno le correnti equivalenti del modello filamentare.

Tuttavia, in prima approssimazione, è possibile procedere alla stima dei momenti  $(q_0, q_1, q_2)$  trascurando il contributo delle correnti passive  $\mathbf{m}_c$ , servendosi dei coefficienti  $(\mathbf{k}_{I_p}, \mathbf{k}_{z_p}, \mathbf{k}_{r_p})$  determinati nel paragrafo 4.3.2. Questo permette di calcolare le grandezze  $I_0(t), I_s(t), I_c(t)$  del modello filamentare, per avere una distribuzione approssimata di corrente di plasma come ingresso del modello (5.5). Pertanto, indicando con l'apice \* le grandezze determinate trascurando il contributo dei passivi, si ha che  $\mathbf{m}_p^* \approx \mathbf{m} - \mathbf{m}_s$ , e quindi:

$$\begin{aligned}\mathbf{m}_p^*(t)\mathbf{k}_{I_p} &= q_0^*(t) \quad \Rightarrow \quad I_p^*(t) \\ \mathbf{m}_p^*(t)\mathbf{k}_{z_c} &= q_1^*(t) \quad \Rightarrow \quad z_p^*(t) \\ \mathbf{m}_p^*(t)\mathbf{k}_{r_c} &= q_2^*(t) \quad \Rightarrow \quad r_p^*(t)\end{aligned}$$

da cui si ottengono le correnti del modello filamentare approssimate  $I_0^*(t), I_s^*(t), I_c^*(t) \Rightarrow \mathbf{I}_e^*$ , con cui vengono ricostruite, in prima approssimazione, le correnti nei passivi  $\mathbf{I}_{c,r}^*$ . Quindi:

$$\mathbf{I}_{c,r}^* = \mathbf{M}_{cc}^{-1}[\mathbf{\Psi}_c^* - \mathbf{M}_{ce}\mathbf{I}_e^* - \mathbf{M}_{cs}\mathbf{I}_s] \quad (5.13)$$



con  $\mathbf{M}_{ce} \in \mathbb{R}^{N_c \times N_e}$  matrice dei coefficienti di mutua induzione tra conduttori passivi e plasma equivalente. Proseguendo:

$$\dot{\Psi}_{c,r}^* + \mathbf{R}_c \mathbf{M}_{cc}^{-1} \Psi_{c,r}^* = \mathbf{R}_c \mathbf{M}_{cc}^{-1} [\mathbf{M}_{ce} \mathbf{I}_e^* + \mathbf{M}_{cs} \mathbf{I}_s]$$

ovvero:

$$\dot{\Psi}_{c,r}^* + \mathbf{R}_c \mathbf{M}_{cc}^{-1} \Psi_{c,r}^* = \mathbf{g}^*(t) \quad (5.14)$$

con ovvio significato dei simboli. A questo punto, noto il vettore  $\dot{\Psi}_{c,r}^*$ , attraverso la (5.13) è possibile dare una prima stima delle correnti indotte nei conduttori passivi.

Dopo aver ricostruito il vettore  $\mathbf{I}_{c,r}^*$  si procede al calcolo del loro contributo nelle misure di campo magnetico  $\mathbf{m}_{c,r}^*$  come si è già visto nel paragrafo 4.2.2. Si ha che:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_p^{**} &= \mathbf{m} - \mathbf{m}_s - \mathbf{m}_{c,r}^* \\ &= \mathbf{m} - \mathbf{G}_{ms} \mathbf{I}_s - \mathbf{G}_{mc} \mathbf{I}_{c,r}^* \end{aligned}$$

A questo punto si esegue una seconda volta il processo di ricostruzione delle correnti nei passivi: utilizzando le misure  $\mathbf{m}_p^{**} = \mathbf{m} - \mathbf{m}_s - \mathbf{m}_{c,r}^*$  ripulite del contributo stimato  $\mathbf{m}_{c,r}^*$  dei conduttori passivi, è possibile ricostruire con migliore precisione l'evoluzione dei momenti di plasma. Per questo motivo si hanno informazioni a sufficienza per ricostruire nuovamente le correnti indotte nei passivi, che si indicheranno con il doppio apice \*\* nel testo.

Quindi si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_p^{**}(t) \mathbf{k}_{I_p} &= q_0^{**}(t) \Rightarrow I_p^{**}(t) \\ \mathbf{m}_p^{**}(t) \mathbf{k}_{z_c} &= q_1^{**}(t) \Rightarrow z_p^{**}(t) \\ \mathbf{m}_p^{**}(t) \mathbf{k}_{r_c} &= q_2^{**}(t) \Rightarrow r_p^{**}(t) \end{aligned}$$

da qui si ricalcolano i valori  $I_0^{**}(t)$ ,  $I_s^{**}(t)$ ,  $I_c^{**}(t) \Rightarrow \mathbf{I}_e^{**}$  delle correnti equivalenti, e si procede alla risoluzione del modello per la ricostruzione delle correnti indotte nei conduttori passivi:

$$\begin{cases} \dot{\Psi}_{c,r}^{**} + \mathbf{R}_c \mathbf{M}_{cc}^{-1} \Psi_{c,r}^{**} = \mathbf{R}_c \mathbf{M}_{cc}^{-1} [\mathbf{M}_{ce} \mathbf{I}_e^{**} + \mathbf{M}_{cs} \mathbf{I}_s] \\ \mathbf{I}_{c,r}^{**} = \mathbf{M}_{cc}^{-1} [\Psi_c^{**} - \mathbf{M}_{ce} \mathbf{I}_e^{**} - \mathbf{M}_{cs} \mathbf{I}_s] \end{cases} \quad (5.15)$$

La procedura appena descritta potrebbe essere iterata ancora, ma la precisione raggiunta alla seconda iterazione è tale che il risultato  $\mathbf{I}_{c,r}^{**}$  si può ritenere sufficientemente preciso.

## Risultati

Seguono i risultati ottenuti con la procedura di cui sopra.

Nelle figure 5.17, 5.18 e 5.19 sono raffigurati gli andamenti reali e ricostruiti gli andamenti rispettivamente di  $I_p, z_p, r_p$ , con rispettivi errori. La curva nera tratteggiata indica l'andamento reale della grandezza, quella rossa indica la prima ricostruzione  $I_p^*, z_p^*, r_p^*$  mentre quella blu indica la ricostruzione alla seconda iterazione  $I_p^{**}, z_p^{**}, r_p^{**}$ .

Si noti che in tutte le grandezze ricostruite alla seconda iterazione l'errore commesso è largamente inferiore allo 0.5%, eccezion fatta per l'istante d'inizio del transitorio, in cui lo scostamento con la grandezza reale si mantiene ugualmente al di sotto del 1%.

Nelle figure dalla 5.20 alla 5.25 sono riportati i grafici che mostrano alcune delle correnti nei passivi ricostruite (rosso), confrontate con i rispettivi andamenti reali (nero). Come si può vedere i risultati rispecchiano con molta precisione gli andamenti reali, conseguenza del fatto che le correnti di plasma equivalente usate per approssimare la distribuzione di plasma reale sono state determinate partendo da una ricostruzione molto precisa dei momenti di plasma. Le figure successive, dalla 5.26 alla 5.45, mostrano un confronto tra le correnti passive reali e ricostruite prima in una vista rettificata delle strutture conduttrici (si ricordi la figura 5.1), e successivamente in una vista tridimensionale.

Si può dimostrare che, anche conoscendo a priori *l'esatto andamento* di  $I_p, z_p, r_p$ , la precisione della ricostruzione delle correnti  $\mathbf{I}_{c,r}$  è pari o di poco superiore a quella raggiunta attraverso il modello presentato. Pertanto l'approccio TSVD con ordine di troncamento  $k_t = 23$  presentato nel paragrafo 4.3.2 permette di raggiungere un ottimo compromesso tra precisione e regolarità, in quanto la ricostruzione è molto precisa anche modificando sia la disposizione che l'intensità delle sorgenti di campo.

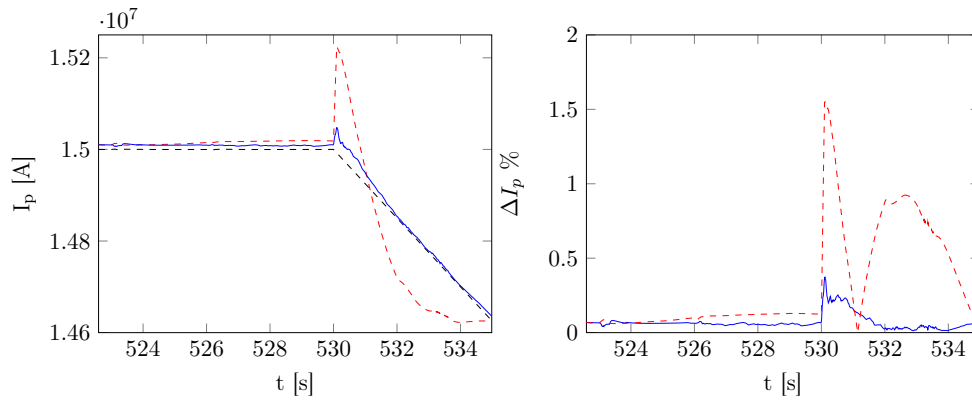


Figura 5.17: Andamento di  $I_p$  (nero) e ricostruzioni (rosso= $I_p^*$ , blu= $I_p^{**}$ ) con relativo errore.

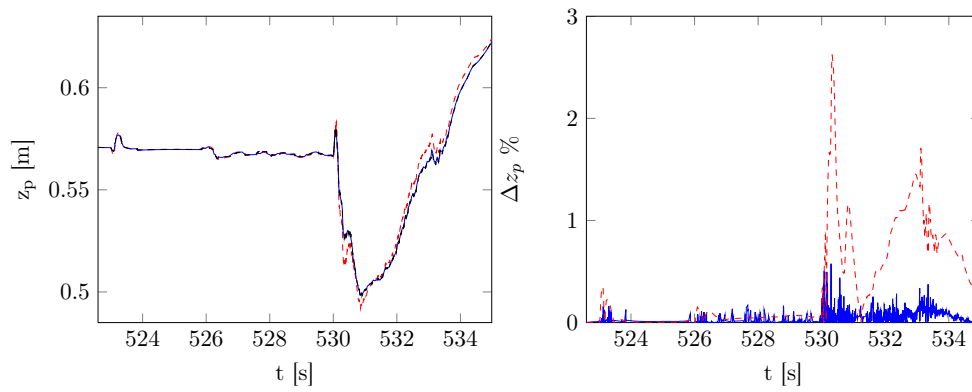


Figura 5.18: Andamento di  $z_p$  (nero) e ricostruzioni (rosso= $z_p^*$ , blu= $z_p^{**}$ ) con relativo errore.

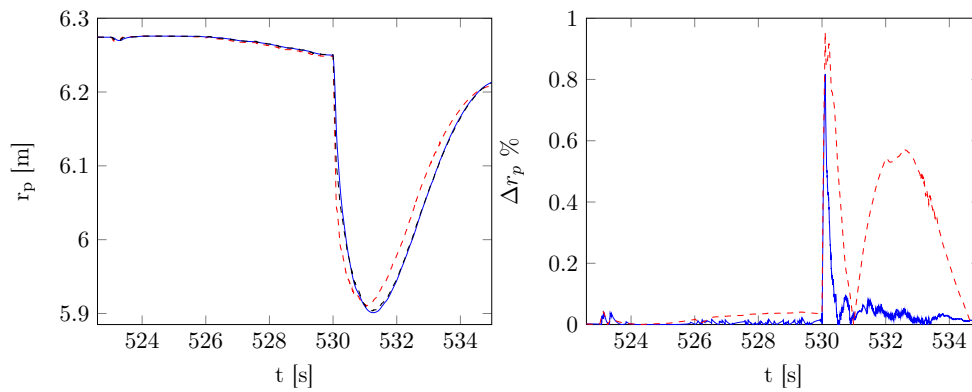


Figura 5.19: Andamento di  $r_p$  (nero) e ricostruzioni (rosso= $r_p^*$ , blu= $r_p^{**}$ ) con relativo errore.

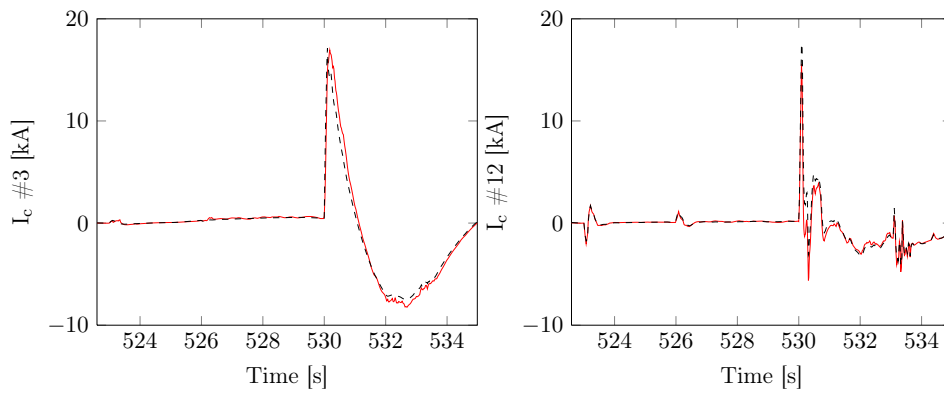


Figura 5.20: Andamento delle correnti indotte nei passivi: nero=reali, rosso=ricostruite.

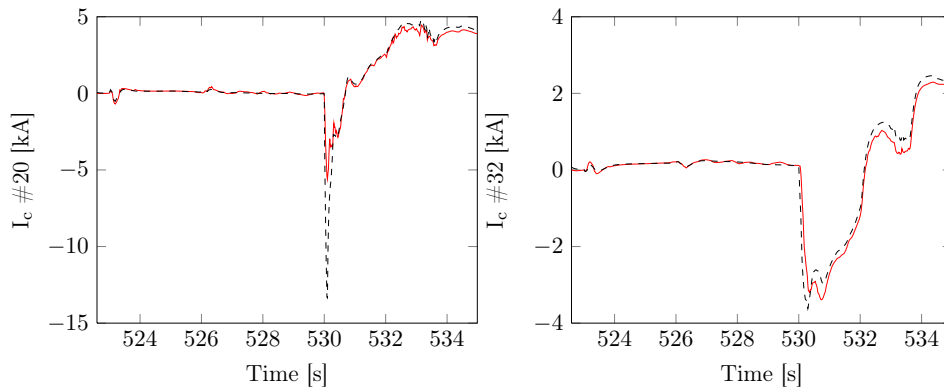


Figura 5.21: Andamento delle correnti indotte nei passivi: nero=reali, rosso=ricostruite.

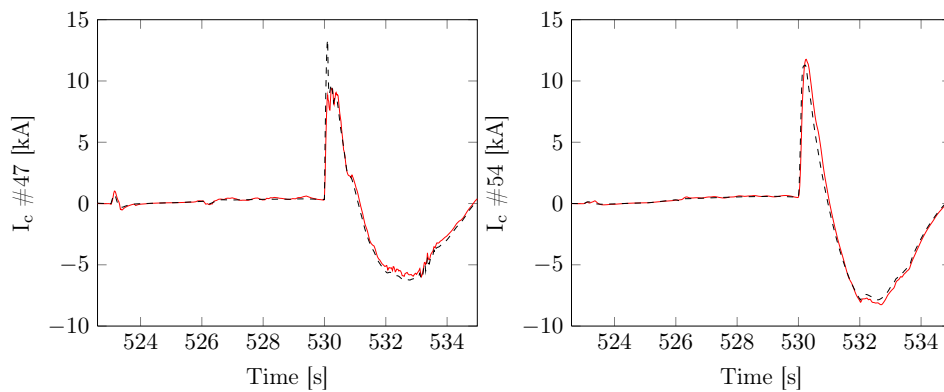


Figura 5.22: Andamento delle correnti indotte nei passivi: nero=reali, rosso=ricostruite.

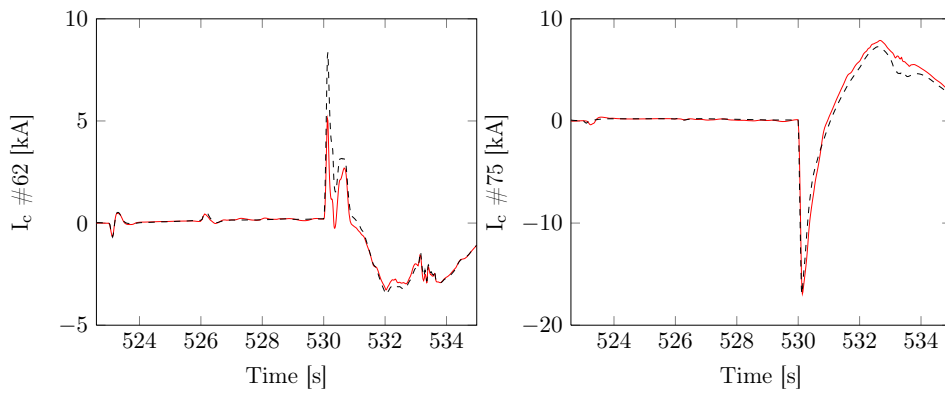


Figura 5.23: Andamento delle correnti indotte nei passivi: nero=reali, rosso=ricostruite.

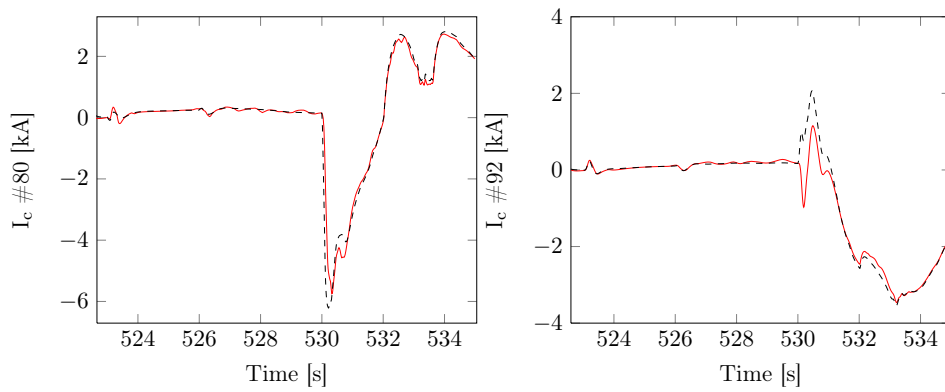


Figura 5.24: Andamento delle correnti indotte nei passivi: nero=reali, rosso=ricostruite.

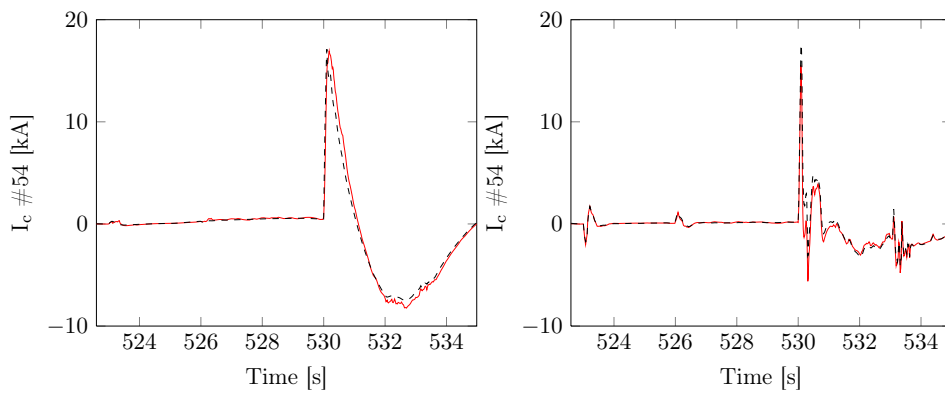


Figura 5.25: Andamento delle correnti indotte nei passivi: nero=reali, rosso=ricostruite.

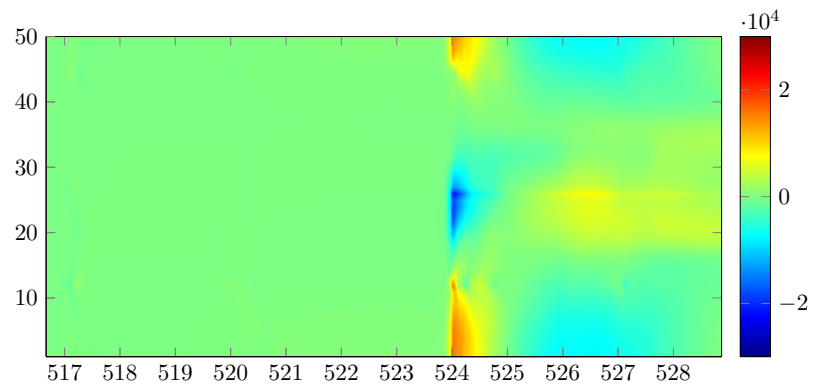


Figura 5.26: Correnti reali nel vessel interno rettificato.

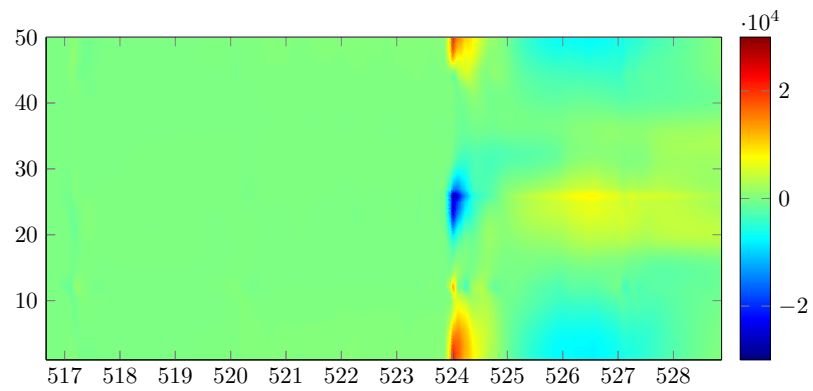


Figura 5.27: Correnti ricostruite nel vessel interno rettificato.

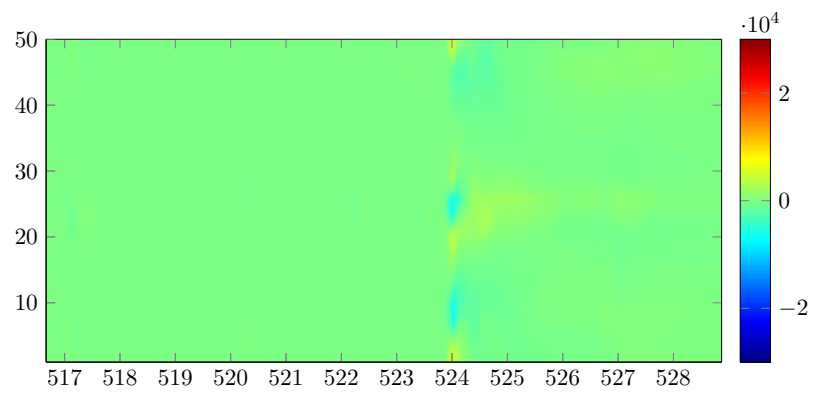


Figura 5.28: Andamento temporale dell'errore nel vessel interno rettificato.

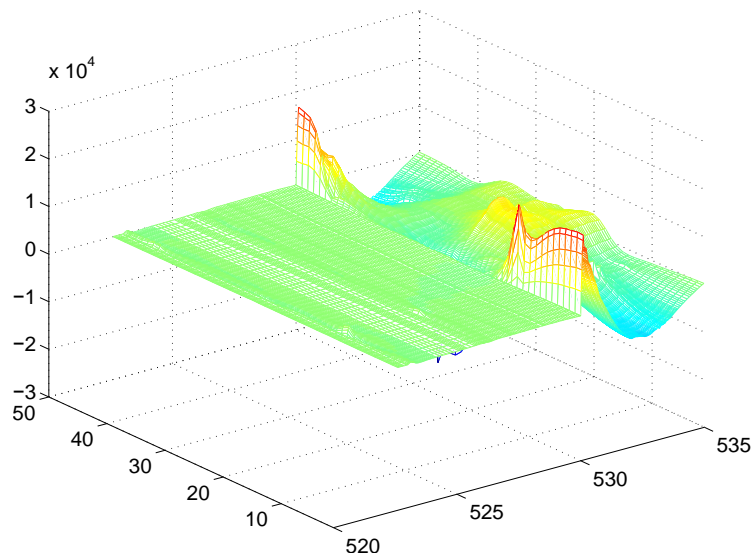


Figura 5.29: Andamento tridimensionale delle correnti reali nel vessel interno.

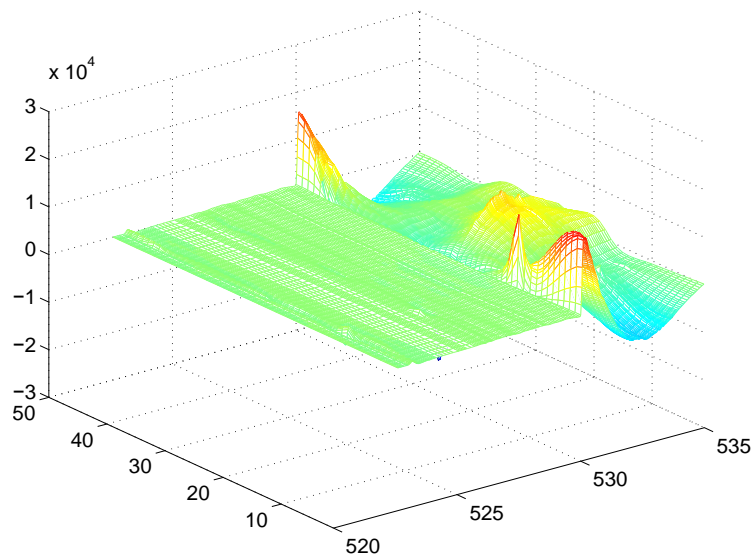


Figura 5.30: Andamento tridimensionale delle correnti ricostruite nel vessel interno.

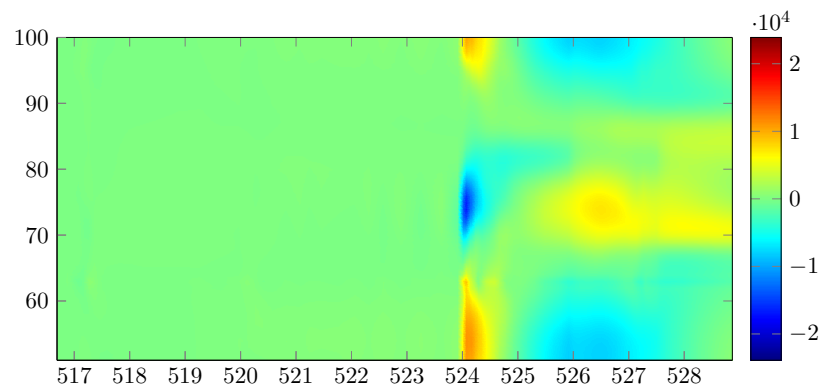


Figura 5.31: Correnti reali nel vessel esterno rettificato.

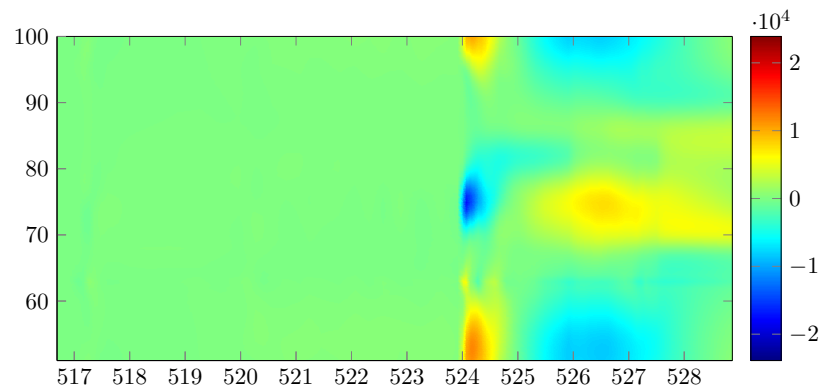


Figura 5.32: Correnti ricostruite nel vessel esterno rettificato.

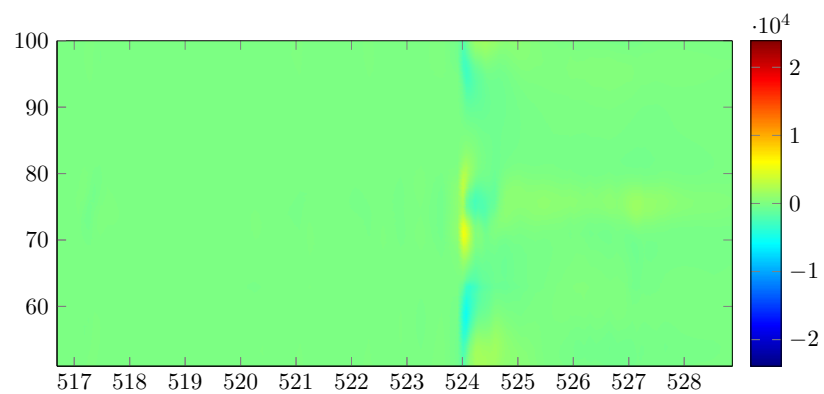


Figura 5.33: Andamento temporale dell'errore nel vessel esterno rettificato.



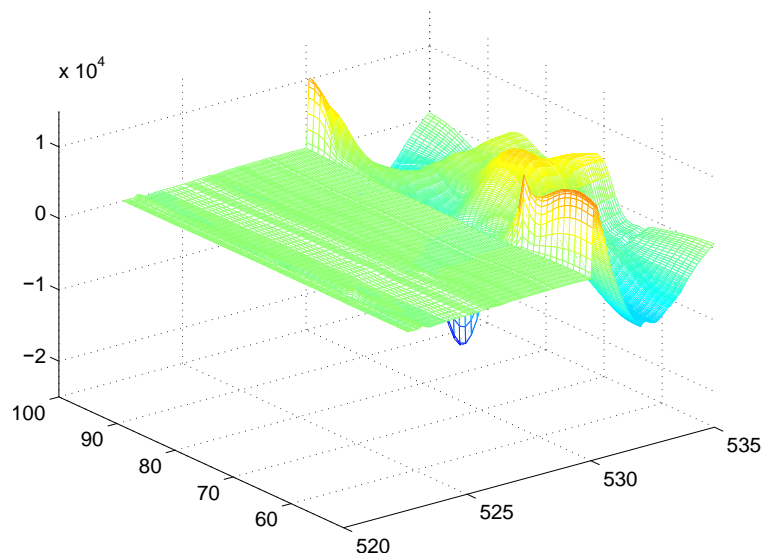


Figura 5.34: Andamento tridimensionale delle correnti reali nel vessel esterno.

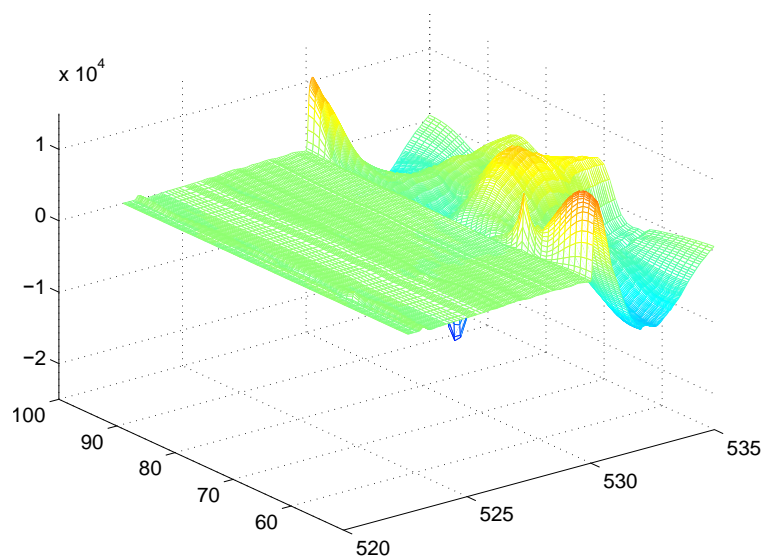


Figura 5.35: Andamento tridimensionale delle correnti ricostruite nel vessel esterno.

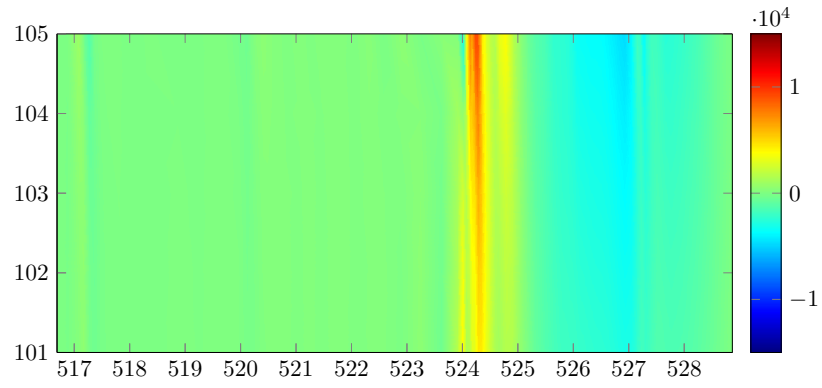


Figura 5.36: Correnti reali nel vertical support.

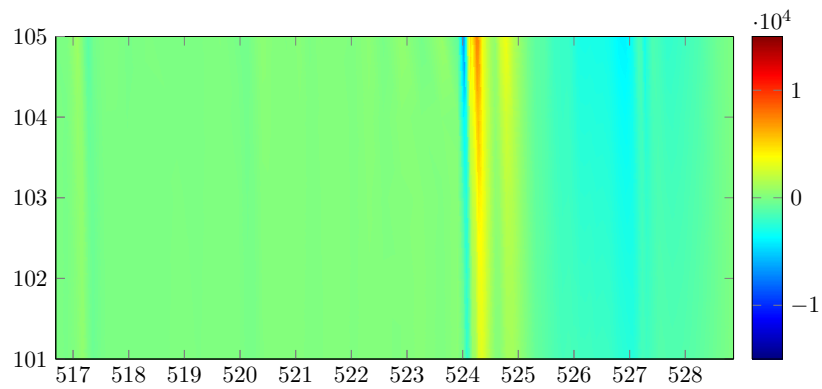


Figura 5.37: Correnti ricostruite nel vertical support.

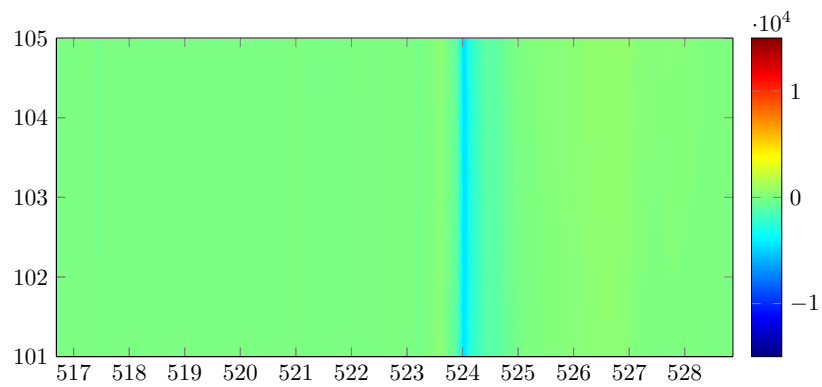


Figura 5.38: Andamento temporale dell'errore nel triangular support.

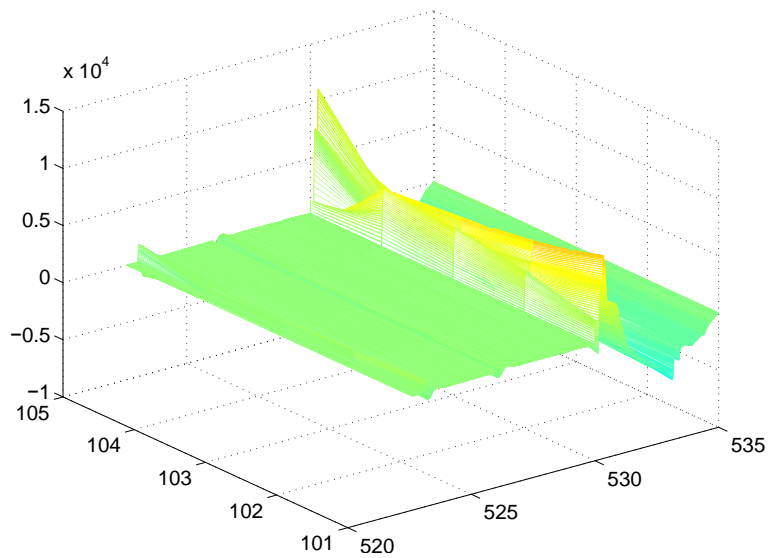


Figura 5.39: Andamento tridimensionale delle correnti reali nel triangular support.

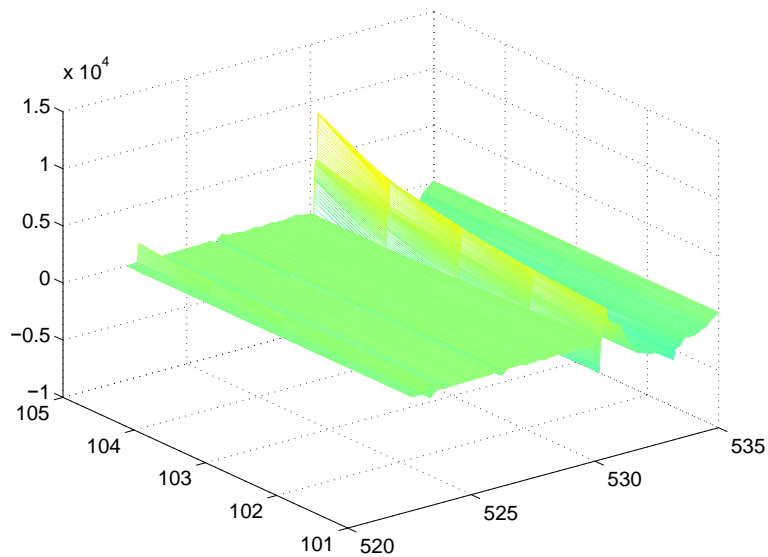


Figura 5.40: Andamento tridimensionale delle correnti ricostruite nel triangular support.

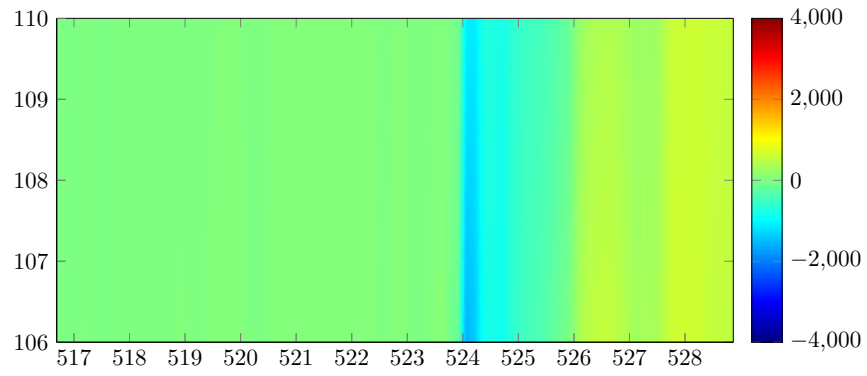


Figura 5.41: Correnti reali nella vertical structure.

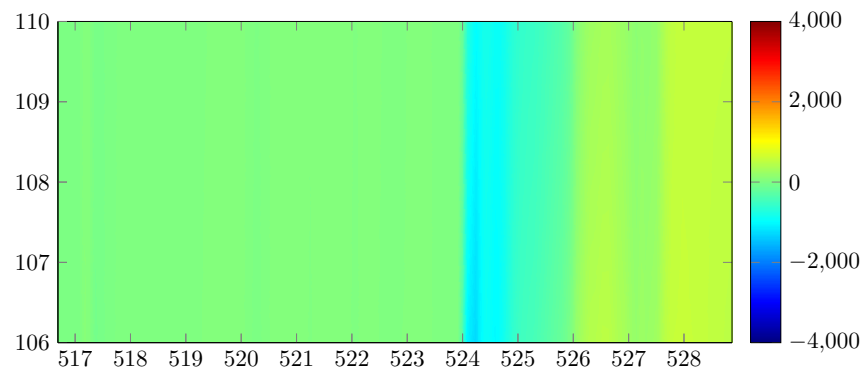


Figura 5.42: Correnti ricostruite nella vertical structure.

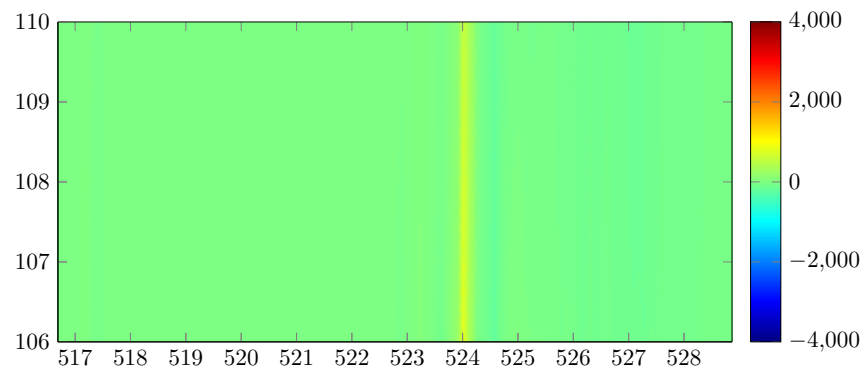


Figura 5.43: Andamento temporale dell'errore nella vertical structure.

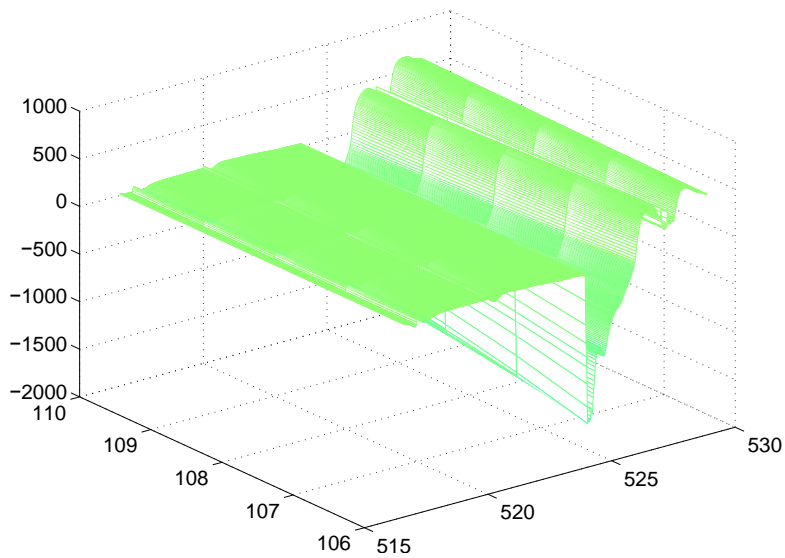


Figura 5.44: Andamento tridimensionale delle correnti reali nella vertical structure.

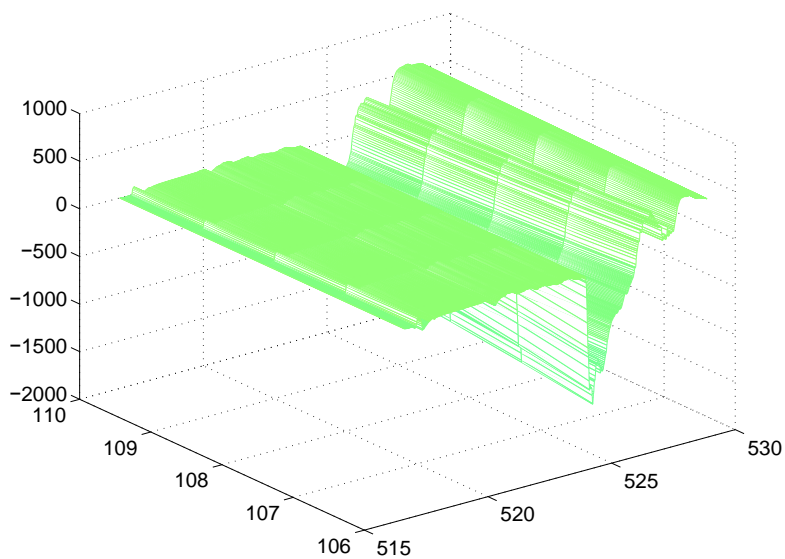


Figura 5.45: Andamento tridimensionale delle correnti ricostruite nella vertical structure.

## 5.3 Ricostruzione dinamica della frontiera di plasma

L'identificazione della frontiera di plasma è un problema fondamentale ai fini del suo controllo in tempo reale, perché permette di definire la posizione del plasma all'interno della camera da vuoto. Nell'approccio qui usato la frontiera viene descritta attraverso la sua intersezione con delle linee di riferimento virtuali, detti *gaplines* [18] [36], mostrate in figura 5.46: la quantità controllata è la distanza, lungo ogni gapline, tra l'intersezione gap-boundary e la prima parete.

Nel seguente paragrafo viene per prima cosa presentato un codice di ricostruzione del boundary di plasma, detto IAIA (Iterative Axisymmetric Identification Algorithm), che ricostruisce il valore dei gaps e approssima la distribuzione di corrente toroidale  $j_\varphi$  partendo dalle misure di campo induzione prodotte dalla sola corrente di plasma. Per questo motivo il codice IAIA permette la ricostruzione solamente nel caso magneto-statico, quando le misure sono date dai soli contributi di plasma e bobine attive.

Viene di seguito presentato un modello che permette di ricostruire in tempo reale i valori dei gaps, e quindi identificare la frontiera di plasma, in una generica condizione di transitorio, ottenuta integrando il codice IAIA con la procedura di ricostruzione dei momenti di corrente presentata nei paragrafi precedenti.

### 5.3.1 Il codice IAIA per la ricostruzione statica della frontiera di plasma

Come detto in precedenza, una procedura per la ricostruzione della frontiera di plasma e del valore dei gaps che si basa su un sistema di correnti equivalenti è stata sviluppata e testata su un gran numero di configurazioni di equilibrio di ITER [37]. La procedura fa riferimento al codice IAIA (Iterative Axisymmetric Identification Algorithm) che posiziona le correnti di plasma equivalenti in maniera automatica e adattiva.

Sia  $\mathbf{m}'$  un vettore di misure generiche<sup>1</sup> tra misure di campo, flux loops e saddle loops (si veda il capitolo 3). Come già detto in precedenza, nel caso magneto-statico qualsiasi misura è data dalla somma dei contributi della corrente di plasma  $\mathbf{I}_p$  e della corrente nelle bobine attive  $\mathbf{I}_s$ . Visto che le correnti  $\mathbf{I}_s$  sono note ad ogni istante, le misure  $\mathbf{m}'$  permettono di conoscere informazioni sulla corrente di plasma.

Dato come punto di partenza il vettore  $\mathbf{m}'_p = \mathbf{m}' - \mathbf{m}'_s$  si procede mediante un processo di ottimizzazione (*best fit*) statica per valutare i parametri del problema. La relazione tra gli ingressi  $\mathbf{m}'_p$  e uscite  $\mathbf{I}_p$  dipende dagli autovalori

---

<sup>1</sup>Si parla di un vettore misure magnetiche *generiche*, da non confondere con il vettore  $\mathbf{m}$  (privo di apice) delle misure di campo induzione provenienti dalle pick-up coils, a cui si fa riferimento in tutto il documento.

della matrice  $\mathbf{G}_{s,p}$  che mette in relazione le grandezze: maggiori sono gli autovalori e più forte è la correlazione tra ingressi e uscite.

Il numero  $N_e$  e la posizione delle correnti sono gradi di libertà del problema inverso, e devono essere definiti a priori [35]. Pertanto, per una data configurazione scelta, il problema viene così riformulato:

$$\min_{\mathbf{I}_{pi}} \|\mathbf{G}_{m,p} \mathbf{I}_{pi} - \mathbf{m}'_p\|_2 \quad (5.16)$$

con ovvio significato dei simboli.

Dal momento che il problema (5.16) è mal condizionato, si deve ricorrere ad un metodo di regolarizzazione per ottenere una soluzione sufficientemente regolare. Tale mal condizionamento dipende pesantemente dalla posizione sia dei sensori che della distribuzione di correnti equivalenti, e dev'essere scelta a priori.

La soluzione viene determinata applicando una decomposizione TSVD (Truncated Singular Value Decomposition) alla matrice  $\mathbf{G}_{m,p} = \mathbf{V}_k \mathbf{S}_k^+ \mathbf{U}_k^\top$ , e quindi il vettore  $\mathbf{I}_e$  risulta:

$$\mathbf{I}_{pi} = \mathbf{V}_k \mathbf{S}_k^+ \mathbf{U}_k^\top \mathbf{m}'_p = \sum_{i=1}^k \frac{(\mathbf{U}_k^\top \mathbf{m}'_p)(i)}{\sigma_k} \mathbf{v}_i$$

avendo utilizzato le notazioni che sono state già presentate nel paragrafo 4.3.2.

Le correnti equivalenti così calcolate vengono posizionate all'interno del dominio di plasma lungo una serie di raggi che vanno dal first wall fino al centro della macchina come si può vedere in figura 5.47. Lungo queste linee la posizione delle correnti filiformi  $\mathbf{I}_e$  è determinata in modo automatico con una procedura iterativa che può essere così riassunta:

1. un primo set di correnti viene posizionato nell'estremità più interna dei raggi (estremità blu in figura 5.47) in un'area sicuramente contenuta in qualsiasi configurazione di plasma, e si calcola il boundary per quella configurazione di correnti.
2. Un secondo set di correnti viene posizionato lungo i raggi, nel punto medio tra il boundary appena identificato e le posizioni delle correnti al punto precedente. Si risolve il problema (5.16) mantenendo sia le correnti appena posizionate che le correnti già disposte al punto precedente, e si determina il boundary per la nuova configurazione.
3. Una terza iterazione, analoga alla precedente, posiziona un anello di correnti in posizione compresa tra il secondo anello e la frontiera dell'iterazione precedente, e il calcolo della nuova frontiera viene eseguito spegnendo le correnti dell'iterazione precedente.
4. Il processo è iterato fino a convergenza raggiunta.

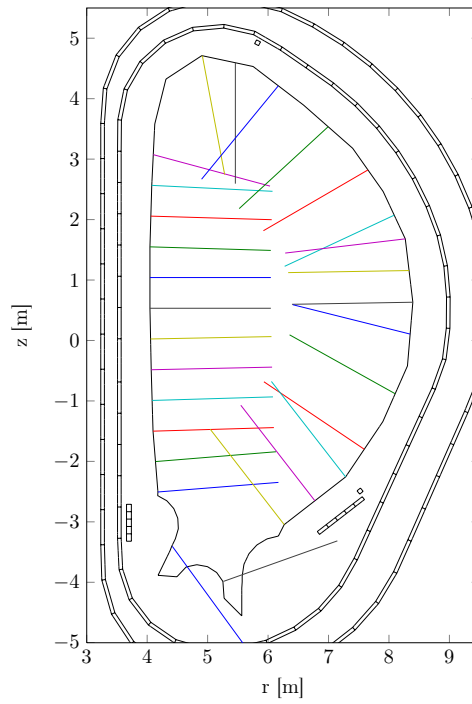


Figura 5.46: Geometria delle *gaplines*.

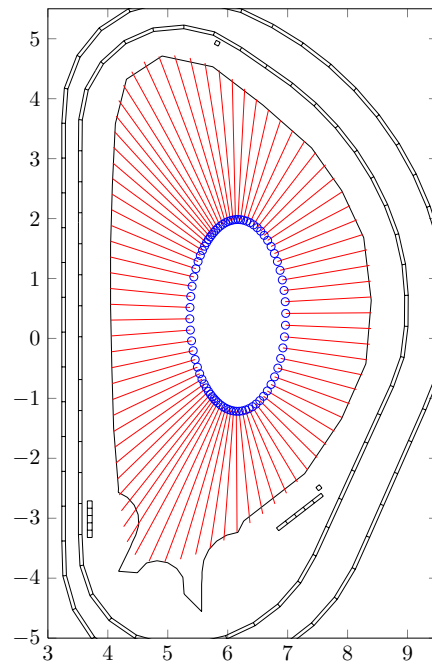


Figura 5.47: Schema di raggi utilizzati in IAIA per posizionare le correnti equivalenti.



Inoltre, iterazione dopo iterazione l'indice di troncamento del processo TSVD viene incrementato, in modo da far partecipare, nella calcolo delle correnti, sempre più autovalori, e di conseguenza incrementando la precisione della soluzione. Naturalmente aumentare il numero di autovalori ha anche l'effetto collaterale di far diminuire la regolarità della soluzione, quindi la sua precisione peggiora di molto nel caso in cui sia presente del rumore nelle misure  $\mathbf{m}'$ . È importante notare, inoltre, che con un numero troppo elevato di iterazioni del codice si rischia di posizionare l'anello di corrente più esterno al di fuori della frontiera reale, pregiudicando definitivamente il risultato. Nelle simulazioni che sono state svolte si è scelto di eseguire solamente tre iterazioni, i cui indici di troncamento sono stati, rispettivamente,  $k_t = 12, 15, 21$ : l'indice di troncamento della terza iterazione è molto elevato, e può dare problemi di regolarità in presenza di rumore.

Il modello presentato non si limita solamente a identificare una distribuzione approssimata di corrente  $\mathbf{I}_{pi}$  formata da due anelli di correnti equivalenti, rispettivamente quello della prima e quello dell'ultima iterazione, compatibile con le misure  $\mathbf{m}'$ , ma fornisce anche l'evoluzione temporale dei valori dei gaps. La distribuzione  $\mathbf{I}_{pi}$  non dev'essere confusa con la corrente di plasma equivalente del modello filamentare  $\mathbf{I}_e$ , perché la corrente  $\mathbf{I}_{pi}$  viene posizionata in modo adattivo mentre  $\mathbf{I}_s$  è disposta sempre lungo la stessa ellisse. Inoltre, la prima viene determinata come soluzione di un problema ai minimi quadrati che ha come vincoli le misure, mentre la seconda deriva da vincoli sui momenti di corrente ed il problema ha soluzione analitica.

Si riporta un elenco completo delle grandezze calcolate dal codice IAIA appena presentato:

configurazione di plasma (*limiter, diverted*);

posizione della frontiera di plasma in riferimento alle gaplines;

posizione e valori di  $\mathbf{I}_{pi}$  distribuzione approssimata di corrente toroidale di plasma;

$\psi$  mappa del flusso;

Nel caso dinamico la procedura appena presentata può essere ugualmente utilizzata, a patto di conoscere le correnti  $\mathbf{I}_c$  nei conduttori passivi, in modo da poter ripulire gli ingressi dal contributo  $\mathbf{m}'_c$ . Tuttavia, visto che le correnti  $\mathbf{I}_c$  non fanno parte degli ingressi ma sono delle incognite, il codice IAIA così presentato non è in grado di identificare la posizione della frontiera di plasma durante un transitorio.

### 5.3.2 Estensione del codice IAIA per il caso dinamico

La possibilità di ricostruire in tempo reale il boundary di plasma in una generica condizione di transitorio, e quindi in presenza di correnti indotte nei

conduttori passivi, si ottiene combinando il codice IAIA con la procedura di ricostruzione real-time dei momenti di corrente presentata nella sezione 5.2.

Il modello così assemblato può essere riassunto nello schema a blocchi di figura 5.48a, dove la procedura seguita può essere così descritta:

1. partendo dalle misure  $\mathbf{m}$  campo induzione dei sensori AA, AB si ricostruiscono alla prima iterazione le correnti  $\mathbf{I}_c^*$ , e quindi le misure  $\mathbf{m}_c^*$ , utilizzando la combinazione lineare dei momenti di corrente attraverso i coefficienti  $\mathbf{k}_{I_p}$ ,  $\mathbf{k}_{z_p}$ ,  $\mathbf{k}_{r_p}$ . Il blocco PCRA (*passive Current Reconstruction Algorithm*) racchiude una sola iterazione della procedura di ricostruzione delle correnti nei passivi, ed il suo contenuto è esplicitato nella figura 5.48b, dove si distingue la combinazione lineare delle misure (blocco  $\mathbf{k}_q$ ), il modello filamentare (blocco FM) e il sistema (5.15) (blocco ODE).
2. Dalle misure  $\mathbf{m}_p^{**} = \mathbf{m} - \mathbf{m}_s - \mathbf{m}_{c,r}^*$  si ricostruiscono  $\mathbf{I}_c^{**}$  e quindi le relative misure  $\mathbf{m}_c^{**}$  alla seconda iterazione, col modello PCRA.
3. A questo punto è pronto il set di ingressi per IAIA, ovvero  $\mathbf{I}_s, \mathbf{m}'$  come nel caso statico, e le correnti  $\mathbf{I}_c^{**}$ , i cui contributi in termini di misura<sup>2</sup> andranno sottratti dal vettore  $\mathbf{m}'$  facendo figurare la ricostruzione come se si stesse studiando un plasma in regime stazionario

È molto utile sottolineare come il termine  $\mathbf{m}'$  ingresso di IAIA non specifichi il tipo di misura richiesto. A seconda che la misura sia proveniente da un set di pick-up coil, di flux loop oppure di saddle loops, il codice si comporta di conseguenza, ricostruendo l'evoluzione del boundary e della distribuzione di corrente  $\mathbf{I}_{pi}$ .

### 5.3.3 Risultati e confronti

Il codice sopra descritto è stato testato nella ricostruzione della frontiera di un plasma la cui evoluzione è nota istante per istante. Per il confronto sono stati valutati 4 istanti di tempo (*'snapshot'*) del transitorio, per cercare di riassumere nel modo più completo possibile il comportamento del modello durante la dinamica.

Come detto nel paragrafo 5.3.1, la ricostruzione da parte di IAIA ha come punto di partenza le misure  $\mathbf{m}'$ , che possono provenire da pick up coils, flux loop e sensori a sella: può quindi essere utile valutare i risultati ed i rispettivi errori a seconda del set di misure che si utilizza. Inoltre, dal momento che il codice IAIA fornisce, anche in caso di regime stazionario, una ricostruzione pur sempre approssimata della frontiera di plasma, sono stati valutati, in primo luogo, gli errori commessi nel caso più favorevole, ovvero implementando il modello ed utilizzando le correnti reali indotte nei passivi, calcolate

---

<sup>2</sup>si ricordi la nota piè di pagina del paragrafo 5.3.1, in merito alla differenza tra  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{m}'$ .

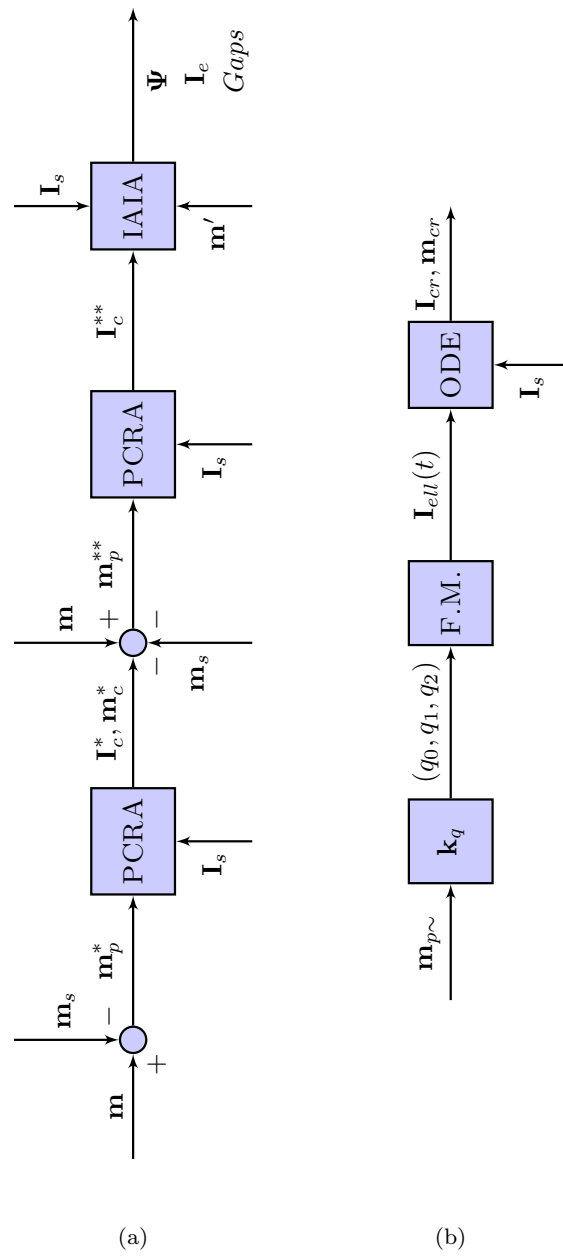


Figura 5.48: Schema a blocchi del modello implementato.

nel paragrafo 5.1.2: questo può dare sensibilità sull'errore minimo che si può commettere. È particolarmente d'interesse, a questo punto, confrontare le due situazioni precedenti con una ricostruzione in cui si trascurano le correnti indotte: il modello PCRA+IAIA fornisce una ricostruzione approssimata senza conoscere realmente le correnti nei passivi, ed è interessante vedere quantitativamente il miglioramento della ricostruzione rispetto al caso in cui queste correnti vengano trascurate. Si procede quindi ad implementare il modello IAIA per un set di correnti parassite identicamente nulle.

In figura 5.49 sono riportati, a titolo di esempio, la distribuzione di corrente e la mappa del flusso nel caso reale (figure 5.49a, 5.49b), le correnti ricostruite da IAIA alla terza iterazione (ellissi blu in figura 5.49c) con relativa mappa di flusso e una stima della frontiera (verde), nonché i gaps ricostruiti (figura 5.49d). Si noti, in particolare, come la mappa di flusso di figura 5.49c sia, nella zona interna del plasma, molto differente dalla mappa di flusso reale, e come questa differenza non sia apprezzabile all'esterno della frontiera: questo si spiega ricordando che il codice IAIA si basa su una coppia di ellissi di corrente di plasma equivalente che soddisfano dei vincoli sulle misure  $\mathbf{m}'$  di sensori esterni al plasma, e che hanno lo scopo di ricostruire, con sufficiente precisione, la frontiera e la configurazione magnetica esterna ad essa, e non al suo interno. Per conoscere in modo più fedele la mappa di flusso magnetico all'interno del plasma e la densità di corrente toroidale è necessario far riferimento ad un modello MHD.

Seguono i risultati divisi a seconda del set di misure  $\mathbf{m}'$  utilizzato, rispettivamente le figure 5.50 - 5.52 per le *pick-up coils*, le figure 5.53 - 5.55 per *flux loop + sensori a sella* e le figure 5.56 - 5.57 per *pick-up coils + flux loop + sensori a sella*, ovvero per tutte le misure: per ogni set di misura viene eseguita la ricostruzione scegliendo come ingressi rispettivamente le correnti reali nei passivi  $\mathbf{I}_{c,real}$ , le correnti ricostruite  $\mathbf{I}_{c,rec}$ , e trascurando tali correnti, ovvero imponendo  $\mathbf{I}_c \equiv 0$ . Per ogni figura è evidenziata una fascia di ampiezza  $\pm 10$  mm, all'interno della quale dovrebbero cadere gli errori per soddisfare il vincolo di precisione richiesto. Per semplificare il confronto tra le ricostruzioni si riportano le tabelle 5.1 - 5.3, rispettivamente per ogni set di misura, per riassumere la coppia errore medio e deviazione standard  $\varepsilon, \sigma$  per i 29 gaps ricostruiti, ad ogni istante di tempo considerato.

Si può notare che la ricostruzione, note le correnti reali nei passivi, è molto precisa, e permette di ottenere sempre scostamenti inferiori ai 10 mm, indipendentemente dal set di misure in ingresso. Questo costituisce la verifica di come l'algoritmo IAIA, partendo dagli ingressi reali, sia molto preciso. Per quanto riguarda il caso delle correnti ricostruite, ovvero il caso di interesse vero e proprio, si vede come alcuni scostamenti siano superiori ai 10 mm, ma solamente negli istanti di dinamica più spinta: si tenga tuttavia presente che lo scostamento medio dal valore reale non supera mai i 10 mm. I risultati ottenuti sono, anche se in qualche caso maggiori della banda di tolleranza, sufficientemente precisi, tanto da soddisfare le aspettative: per convincersi

di ciò basta considerare i risultati che si hanno trascurando il contributo dei conduttori passivi, e rendersi conto di quanto siano migliorati con l'approccio PCRA+IAIA.

### pick-up coils

	$\mathbf{I}_c$ reale	$\mathbf{I}_c$ ricostruito	$\mathbf{I}_c$ trascurato
$t = 528.5\text{s}$	$\varepsilon = 2.2, \sigma = 1.8$	$\varepsilon = 2.4, \sigma = 1.9$	$\varepsilon = 7.5, \sigma = 10.5$
$t = 530.5\text{s}$	$\varepsilon = 2, \sigma = 2.6$	$\varepsilon = 7.5, \sigma = 10.2$	$\varepsilon = 38.2, \sigma = 75.8$
$t = 532.0\text{s}$	$\varepsilon = 1.6, \sigma = 2$	$\varepsilon = 3.3, \sigma = 7.9$	$\varepsilon = 40.5, \sigma = 37$
$t = 534.5\text{s}$	$\varepsilon = 0.5, \sigma = 0.8$	$\varepsilon = 1.5, \sigma = 3$	$\varepsilon = 12.5, \sigma = 11$

Tabella 5.1: Errore medio e deviazione standard per la ricostruzione con le misure delle *sole pick-up coils*.

### flux loop + sensori a sella

	$\mathbf{I}_c$ reale	$\mathbf{I}_c$ ricostruito	$\mathbf{I}_c$ trascurato
$t = 528.5\text{s}$	$\varepsilon = 1.7, \sigma = 1.6$	$\varepsilon = 2.2, \sigma = 1.8$	$\varepsilon = 7.8, \sigma = 7.9$
$t = 530.5\text{s}$	$\varepsilon = 2.6, \sigma = 2.3$	$\varepsilon = 8.1, \sigma = 15.7$	$\varepsilon = 30.9, \sigma = 25.7$
$t = 532.0\text{s}$	$\varepsilon = 1.7, \sigma = 1.7$	$\varepsilon = 1.9, \sigma = 4$	$\varepsilon = 24, \sigma = 35.8$
$t = 534.5\text{s}$	$\varepsilon = 0.6, \sigma = 1$	$\varepsilon = 1.4, \sigma = 2.8$	$\varepsilon = 14.6, \sigma = 30.6$

Tabella 5.2: Errore medio e deviazione standard per la ricostruzione con le misure di *flux loop + sensori a sella*.

### pick-up coils + flux loop + sensori a sella

	$\mathbf{I}_c$ reale	$\mathbf{I}_c$ ricostruito	$\mathbf{I}_c$ trascurato
$t = 528.5\text{s}$	$\varepsilon = 1.7, \sigma = 1.6$	$\varepsilon = 1.9, \sigma = 1.7$	$\varepsilon = 7.8, \sigma = 7.9$
$t = 530.5\text{s}$	$\varepsilon = 3.2, \sigma = 3$	$\varepsilon = 7.2, \sigma = 15.3$	$\varepsilon = 33, \sigma = 26.4$
$t = 532.0\text{s}$	$\varepsilon = 1.7, \sigma = 1.9$	$\varepsilon = 2, \sigma = 3.9$	$\varepsilon = 24.4, \sigma = 36.4$
$t = 534.5\text{s}$	$\varepsilon = 0.4, \sigma = 0.7$	$\varepsilon = 1.3, \sigma = 2.7$	$\varepsilon = 14.4, \sigma = 30.2$

Tabella 5.3: Errore medio e deviazione standard per la ricostruzione con le misure di *pick-up coils + flux loop + sensori a sella*.

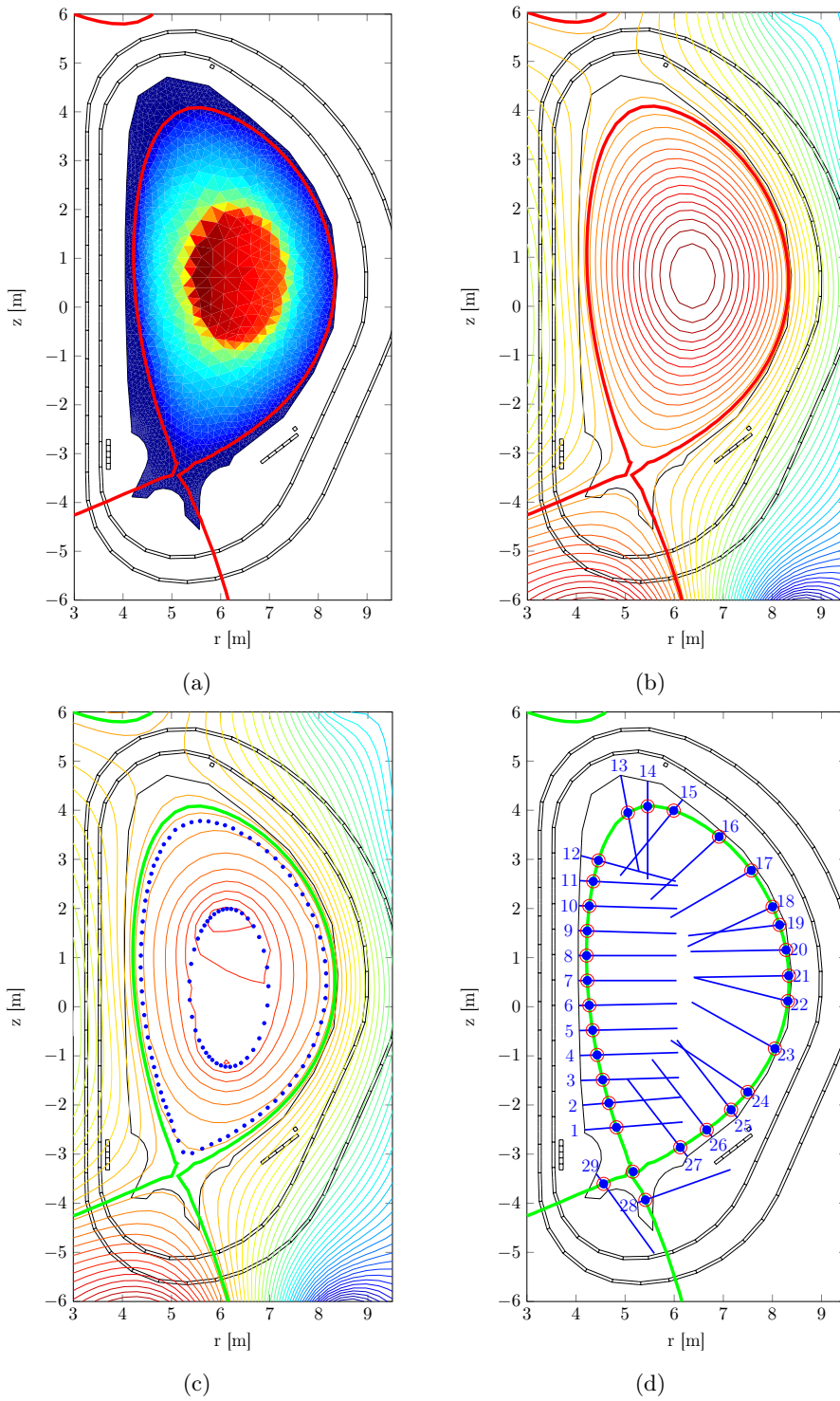


Figura 5.49: Distribuzione di densità di corrente e relativa mappa di flusso reali (a,b) e ricostruiti (c,d).

## pick-up coils

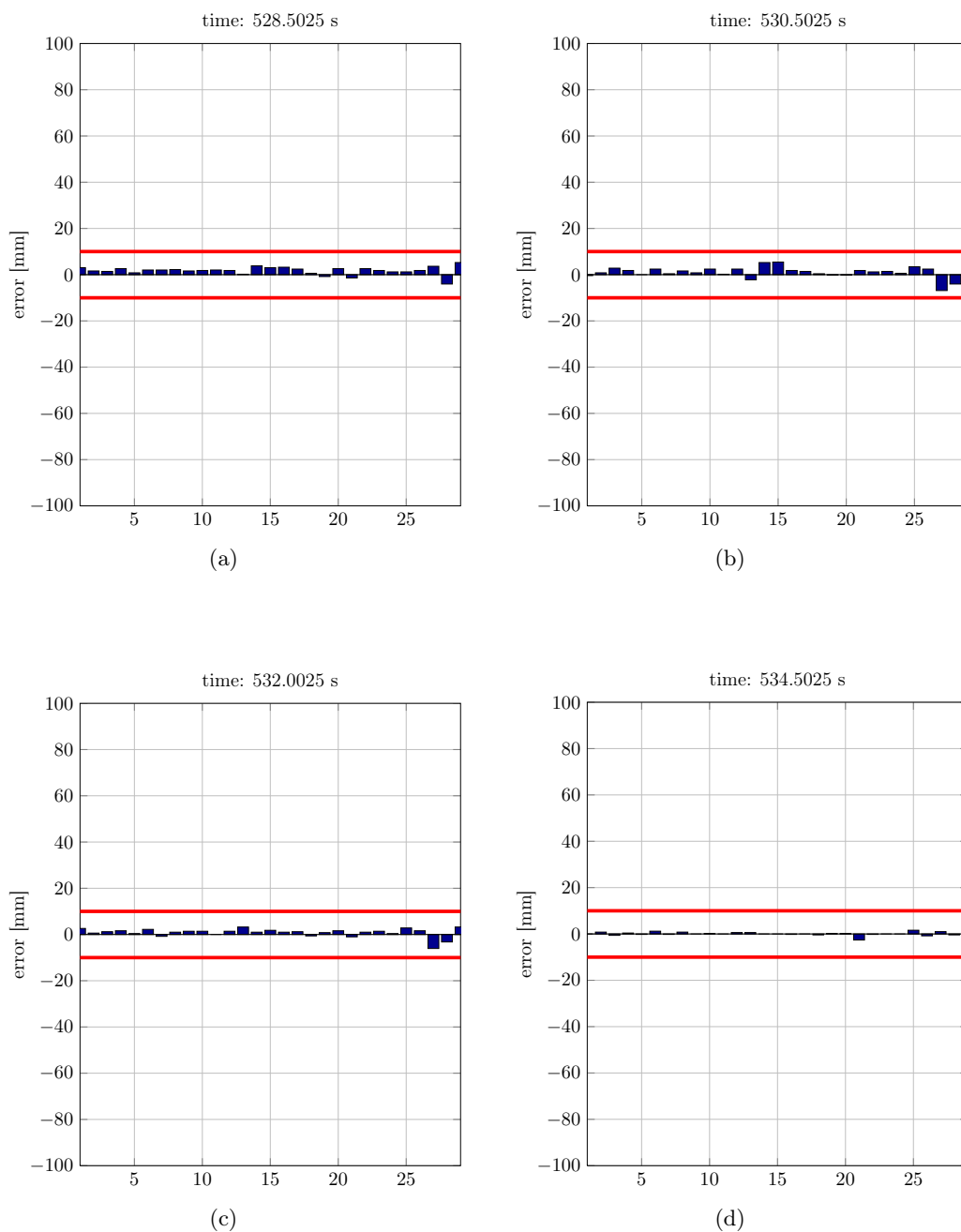
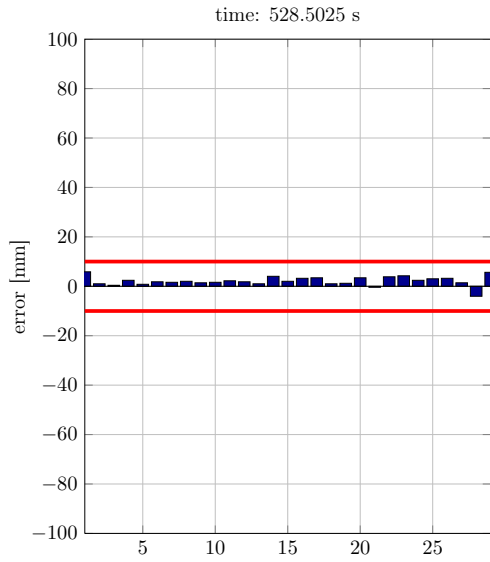
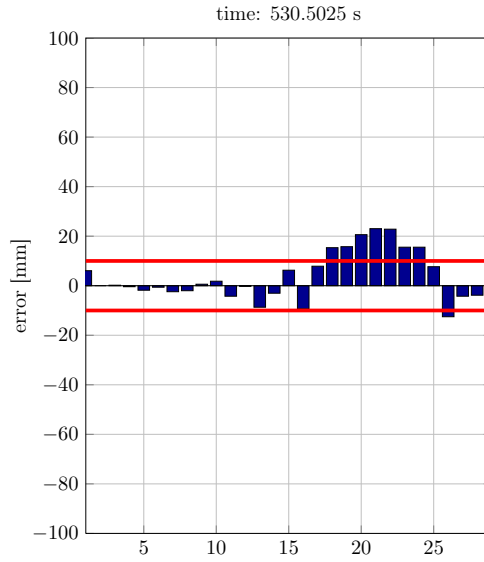


Figura 5.50: Errori in diversi istanti di tempo con le misure delle *sole pick-up coils* e le correnti *reali* nei conduttori passivi.

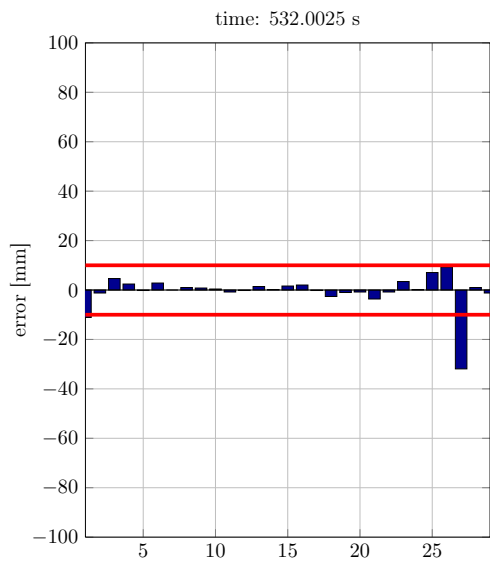




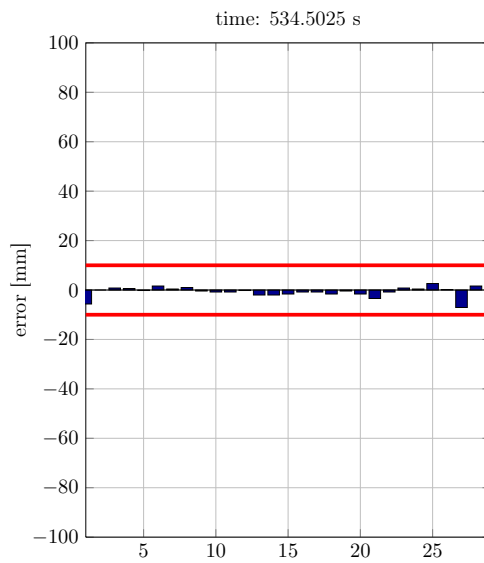
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.51: Errori in diversi istanti di tempo con le misure delle *sole pick-up coils* e le correnti *ricostruite* nei conduttori passivi.

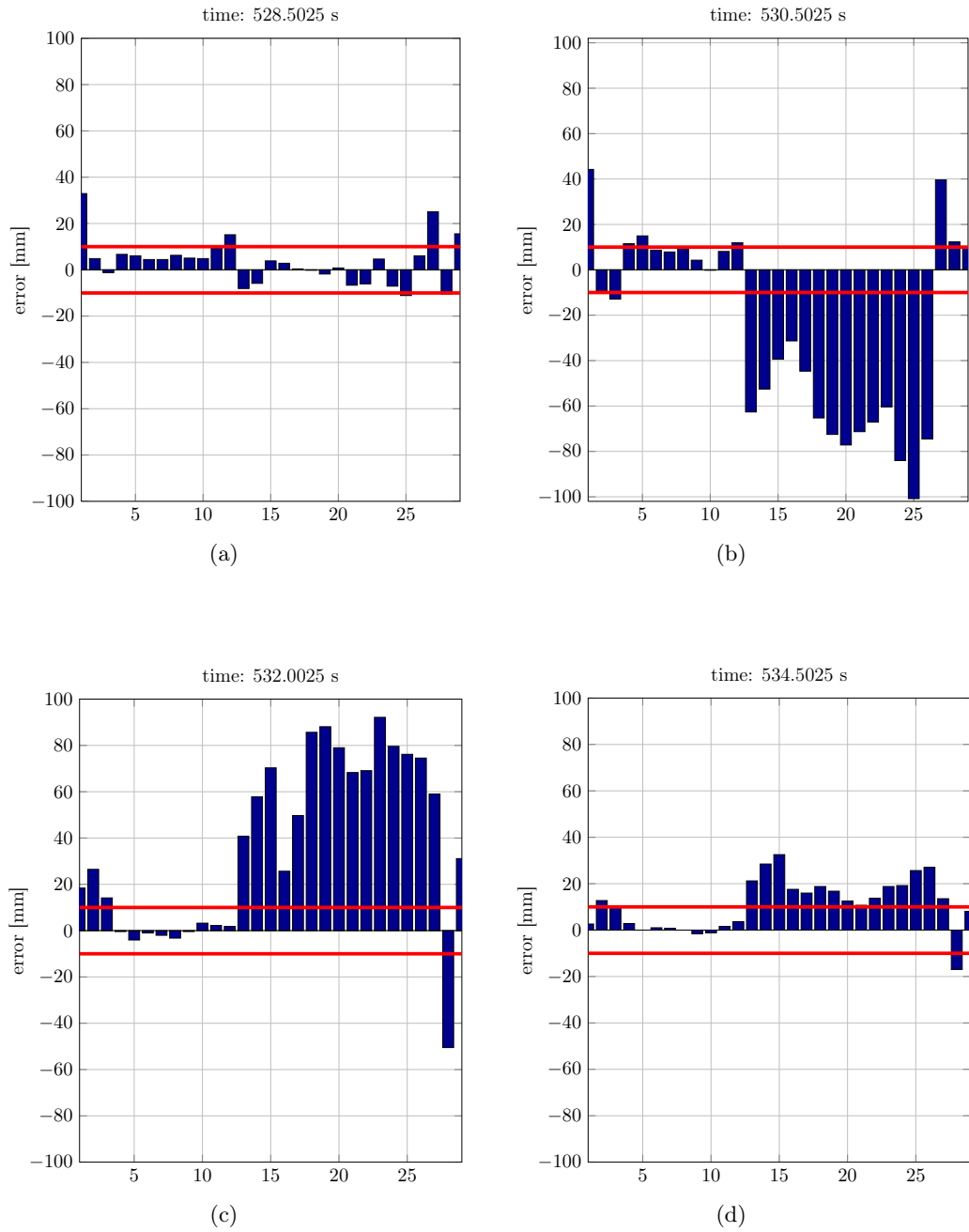


Figura 5.52: Errori in diversi istanti di tempo con le misure delle *sole pick-up coils*, trascurando le correnti nei conduttori passivi.

## flux loop + sensori a sella

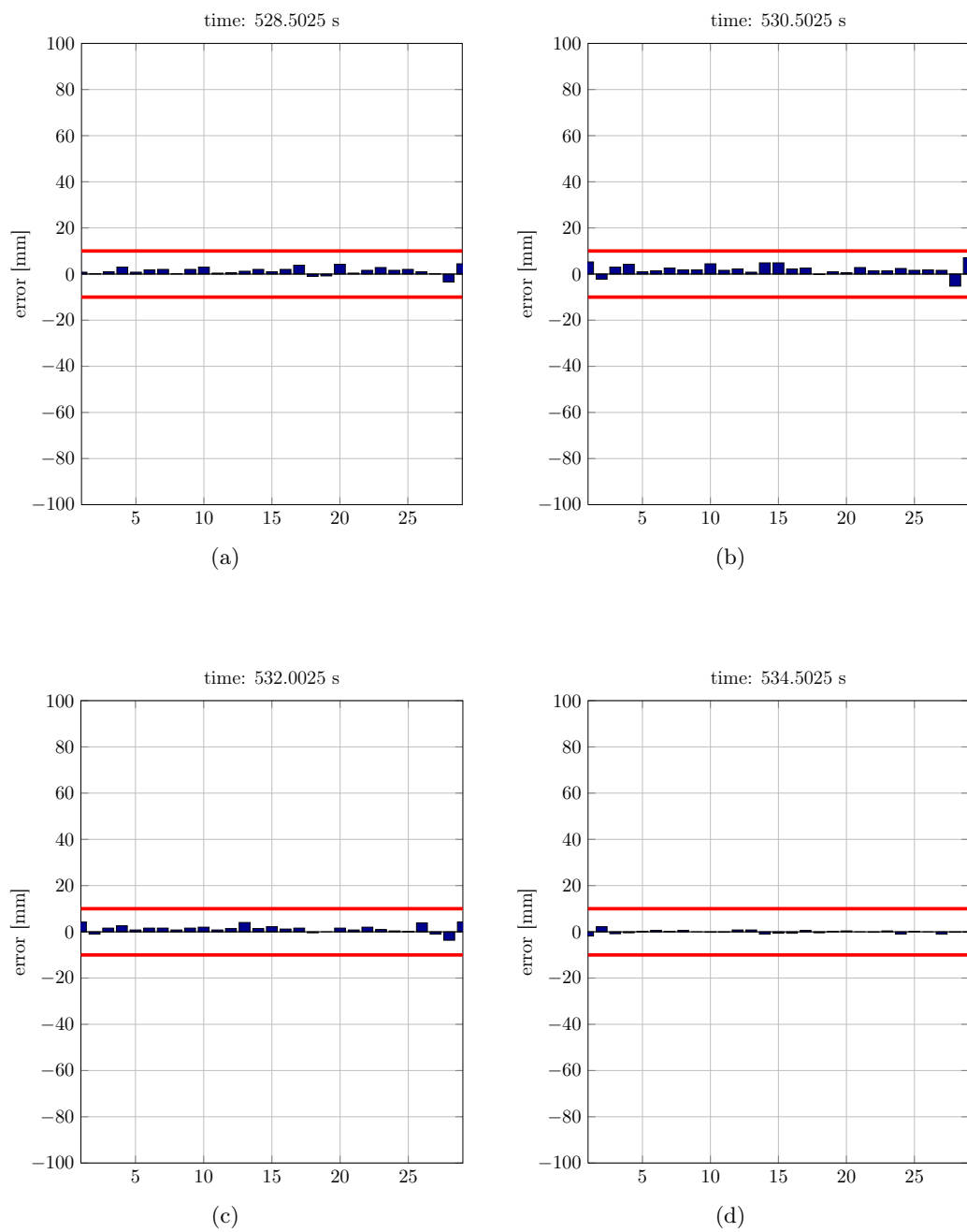


Figura 5.53: Errori in diversi istanti di tempo con le misure di *flux loop* + *sensori a sella* e le correnti *reali* nei conduttori passivi.

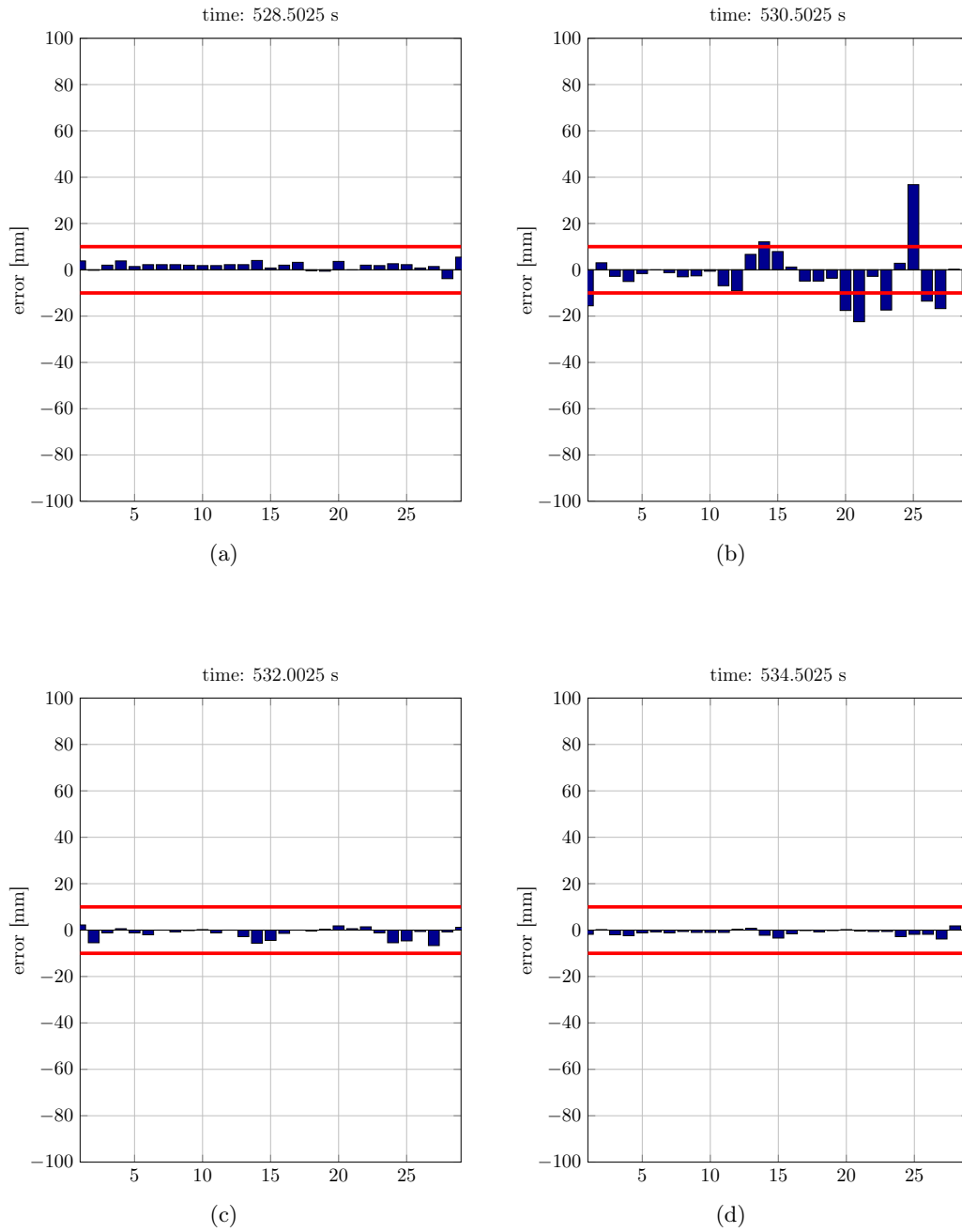
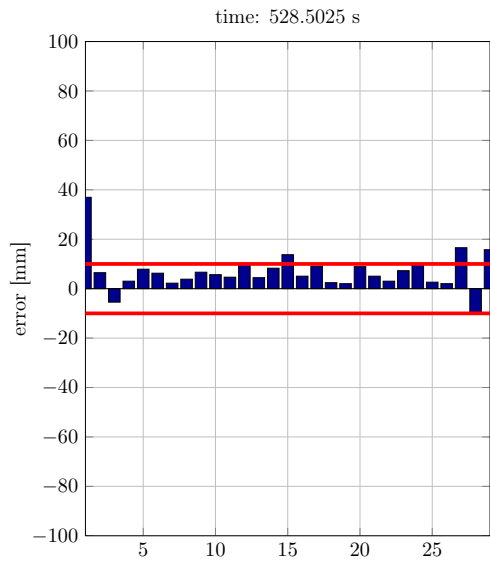
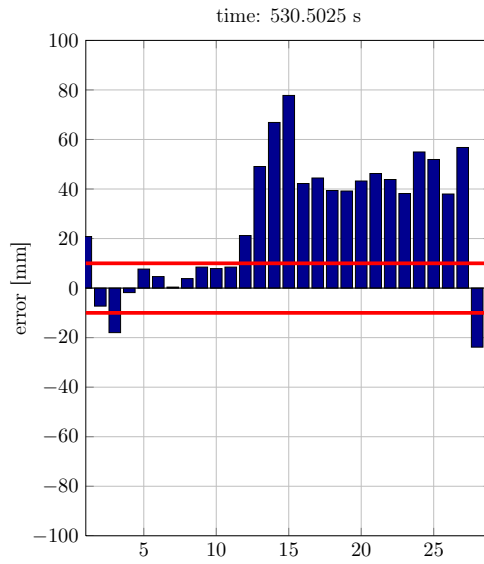


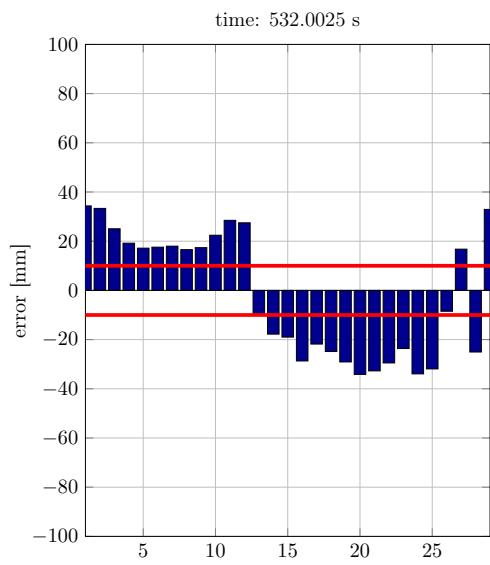
Figura 5.54: Errori in diversi istanti di tempo con le misure di *flux loop* + *sensori a sella* e le correnti *ricostruite* nei conduttori passivi.



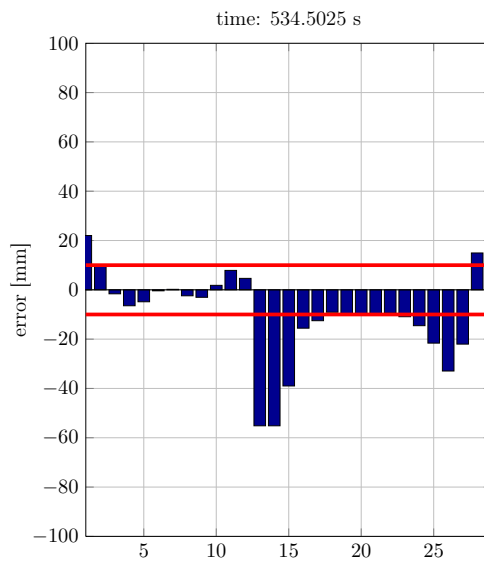
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.55: Errori in diversi istanti di tempo con le misure di *flux loop* + sensori a sella, trascurando le correnti nei conduttori passivi.

**pick-up coils + flux loop + sensori a sella**

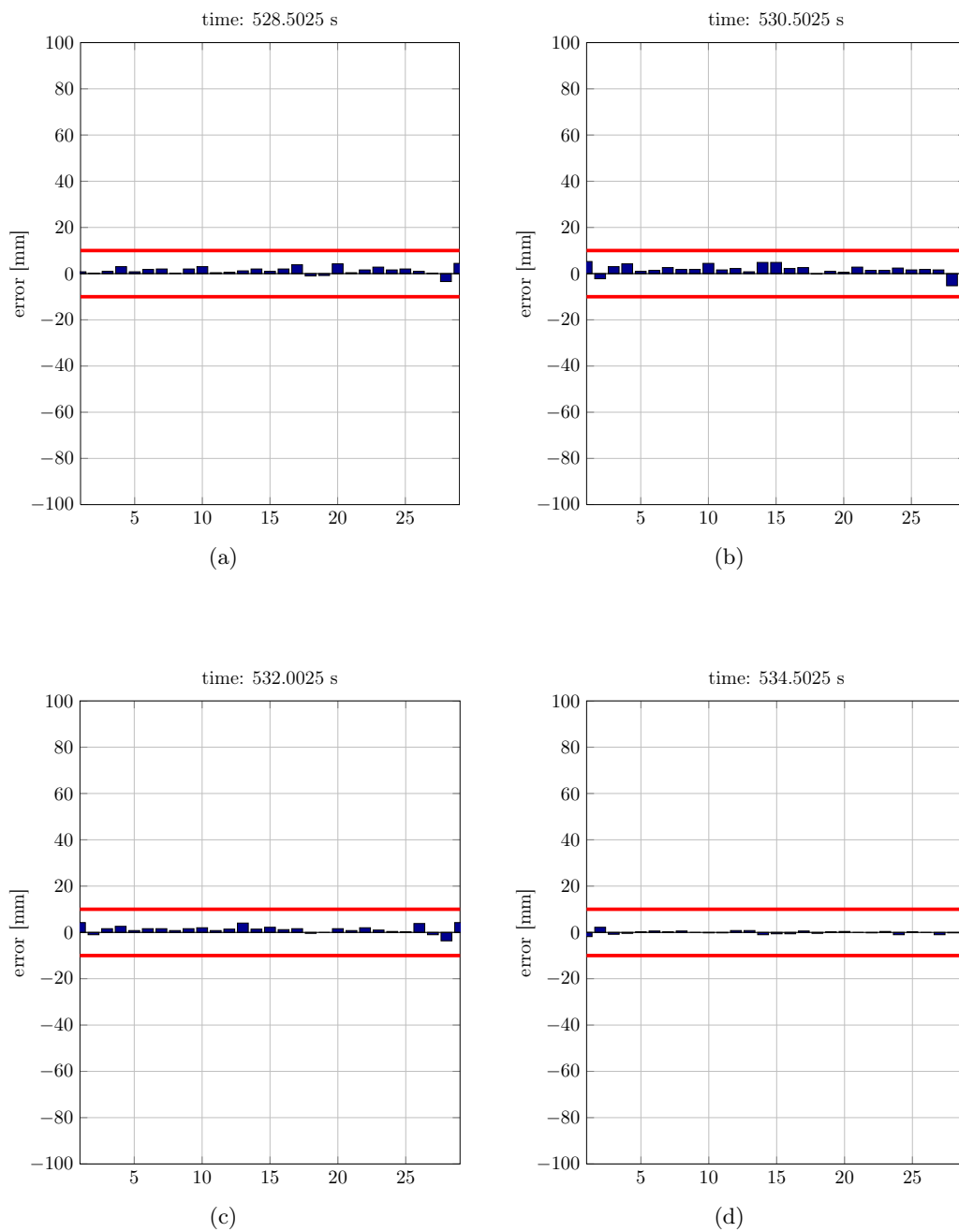


Figura 5.56: Errori in diversi istanti di tempo con le misure di *pick-up coils + flux loop + sensori a sella* e le correnti *reali* nei conduttori passivi.

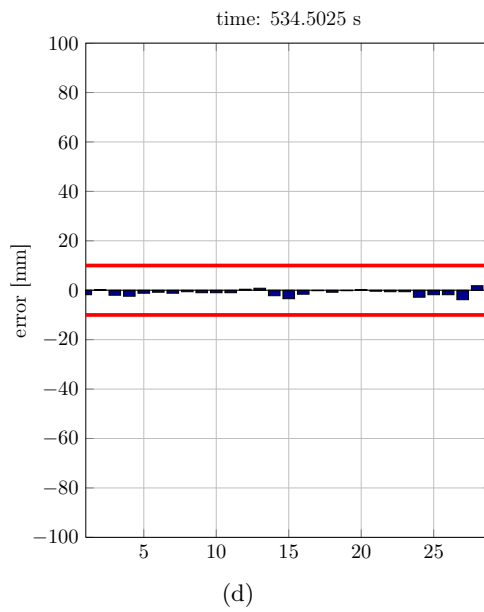
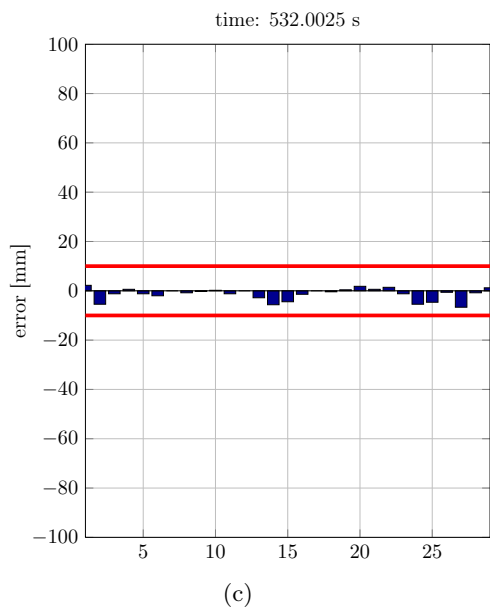
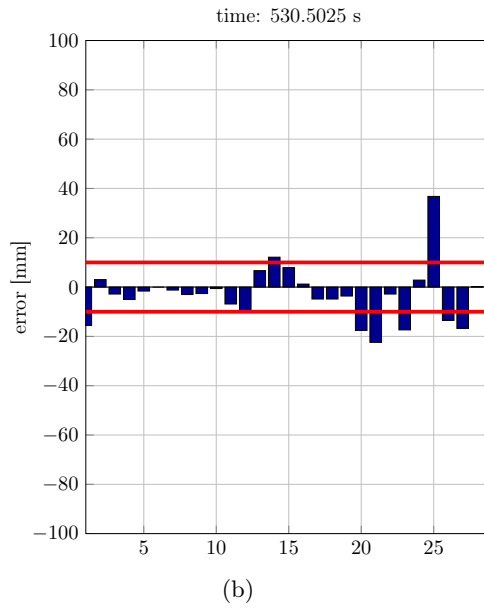
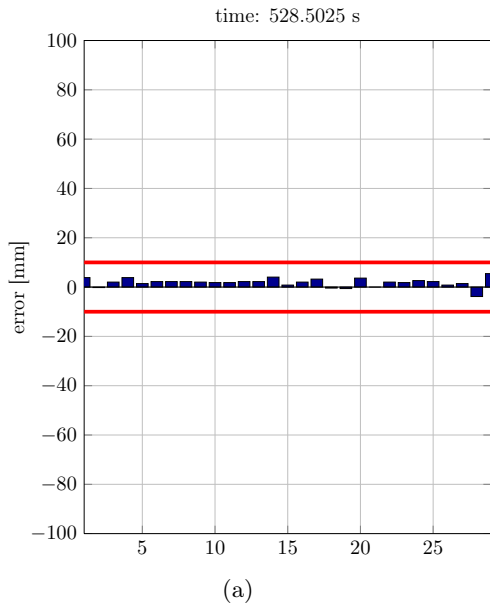


Figura 5.57: Errori in diversi istanti di tempo con le misure di *pick-up coils + flux loop + sensori a sella* e le correnti *ricostruite* nei conduttori passivi.

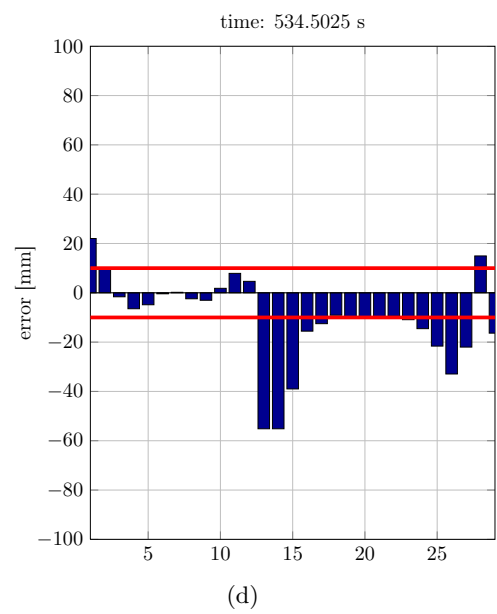
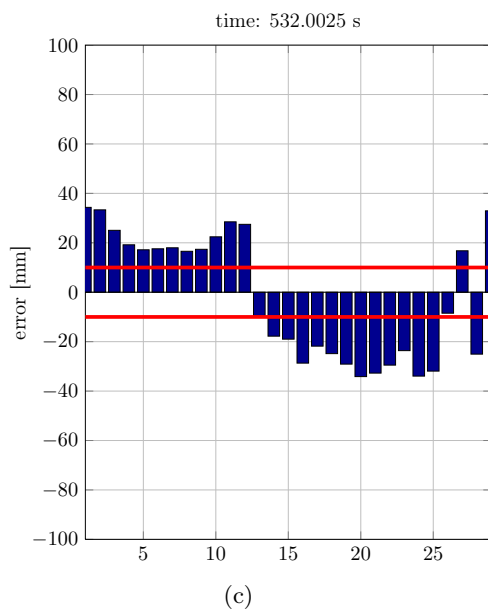
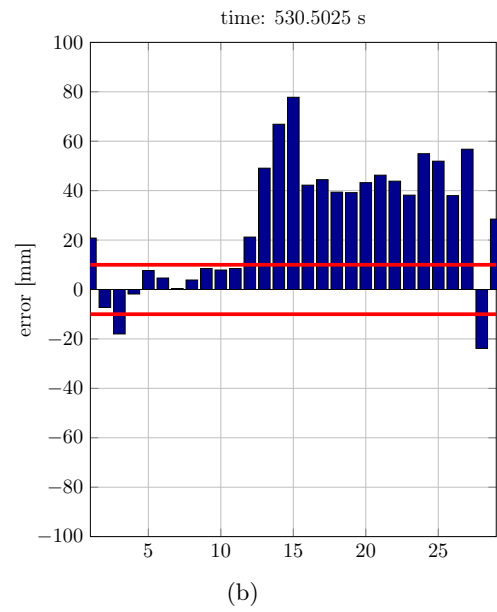
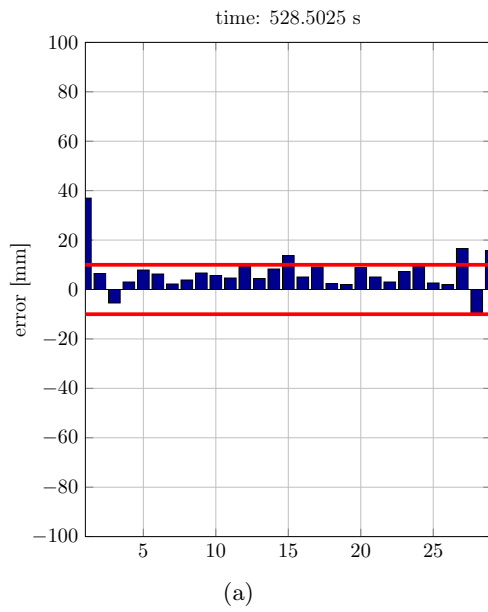


Figura 5.58: Errori in diversi istanti di tempo con le misure delle *pick-up coils + flux loop + sensori a sella*, trascurando le correnti nei conduttori passivi.



### 5.3.4 Implementazione simulink del modello

Si è compiuto un ulteriore passaggio andando ad implementare il modello in questione utilizzando l'ambiente SIMULINK. Naturalmente non ci sono differenze rispetto alla versione implementata attraverso script MATLAB utilizzata per lo studio. In figura 5.59 è riportato lo schema a blocchi del modello ottenuto. A differenza dello schema di figura 5.48, qui si possono vedere esplicitati tutti i blocchi che compongono il modello:

gli ingressi  $\mathbf{m}, \mathbf{I}_s$  per la ricostruzione delle correnti nei passivi;

entrambe le iterazioni dell'algoritmo PCRA, dove si distinguono il blocco di calcolo dei momenti dalla combinazione delle misure, il blocco del modello filamentare e il blocco di ricostruzione delle correnti nei passivi secondo il sistema (5.15);

il blocco di costruzione delle misure fittizie  $\mathbf{m}'_{c,r}$  delle correnti nei passivi, che costituisce, insieme al vettore delle misure reali  $\mathbf{m}'$  e alle correnti  $\mathbf{I}_s$ , l'ingresso del blocco IAIA;

il blocco IAIA vero e proprio con le relative uscite.

Si ricorda che l'ambiente simulink può essere agevolmente integrato con un sistema di controllo in catena chiusa, con cui si può controllare la posizione attraverso la stima di  $I_p, z_p, r_p$  e dei *gaps*. Naturalmente sono ad oggi disponibili molti altri algoritmi di controllo, ognuno dei quali controlla posizione e forma del plasma a partire da grandezze differenti.

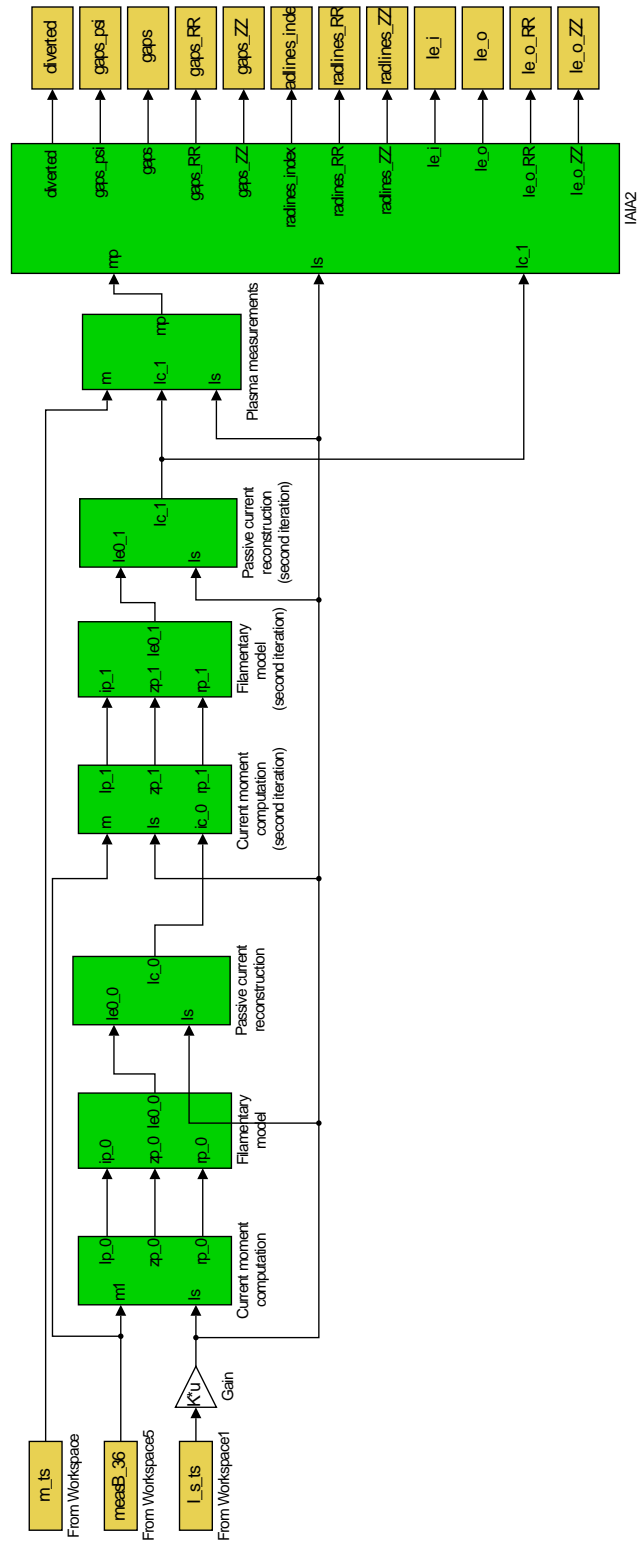


Figura 5.59: Modello simulink di PCRA+IAIA.

## CAPITOLO 6

# Conclusioni

Come noto, l'identificazione della frontiera di plasma riveste un ruolo centrale nel problema del controllo in tempo reale di quest'ultimo. Questa identificazione è resa particolarmente difficoltosa dal fatto che la distribuzione di corrente non è nota in maniera esatta, e non è determinabile dalle misure di diagnostica, dal momento che queste misure permettono solamente di determinare parametri macroscopici del plasma, come la corrente totale. Questo problema viene superato, nel caso magneto-statico, servendosi del codice IAIA, che permette sia di ricostruire la frontiera di plasma sia di stimare una distribuzione approssimata di densità di corrente.

L'estensione di tale approccio al caso di generico transitorio è stata affrontata con successo costruendo un modello che, partendo dal calcolo dei momenti di corrente toroidale di plasma, permette di ricostruire l'evoluzione delle correnti indotte nei conduttori passivi. In particolare, l'idea su cui poggia questo modello è la ricostruzione, in qualsiasi condizione di transitorio, dei momenti di corrente di ordine inferiore partendo dalla combinazione lineare delle misure di campo induzione pesate con degli opportuni coefficienti.

Si è dimostrato per via empirica che i set di coefficienti peso ricavati con un processo di regolarizzazione TSDV con indice di troncamento  $k_t = 23$  forniscono un buon compromesso tra regolarità e precisione, tanto da permettere, con sole due iterazioni, una ricostruzione molto precisa dell'evoluzione dei momenti di corrente. Questo risultato è molto importante, perché la ricostruzione precisa delle correnti nei passivi, e quindi una buona identificazione della frontiera di plasma, non sarebbero stati possibili partendo da un set di coefficienti che non garantissero sia precisione che regolarità. Per queste proprietà è stata di vitale importanza la scelta dell'indice di troncamento, scelta a cui si è pervenuti dopo numerose prove sperimentali.

Si noti inoltre che l'idea di una doppia iterazione per ricostruire i momenti di corrente durante il transitorio non era in origine contemplata: le prove prevedevano inizialmente una sola iterazione, e solo a lavoro inoltrato si è scelto di intraprendere un'altro percorso, che si è in seguito rivelato decisamente migliore.

Infine, oltre all'aver esteso il funzionamento di IAIA al caso magnetodinamico, è stata incrementata la precisione di calcolo rispetto alla versione da cui si è partiti, attraverso l'utilizzo di un metodo di ricerca del nullo che sfrutta le funzioni base biquadratiche lagrangiane, unito all'interpolazione di secondo grado dei valori del flusso calcolato lungo le gaplines.

Il lavoro fin qui descritto lascia spazio a ulteriori sviluppi volti all'implementazione in ambiente simulink del modello, in particolare concentrando l'attenzione sul problema del controllo in tempo reale. Tale implementazione è, in parte, già stata eseguita, mentre il progetto di un sistema di controllo non ha ancora avuto inizio. Tuttavia, si prevede che un lavoro di questo tipo porterebbe alla costruzione di un sistema di controllo real-time sufficientemente rapido e preciso, dal momento che si basa sul modello approssimato di densità di corrente di plasma: si ricordi che un problema dei controllori che fanno riferimento a modelli MHD è proprio l'aver una dinamica così lenta da non renderli utilizzabili per il controllo in tempo reale.

Si sottolinea infine che la validità di un modello piuttosto che di un altro dipende dal problema da risolvere, da cui possono derivare necessità di elevata precisione oppure di buona dinamica, pertanto ogni giudizio dev'essere ponderato tenendo presente lo scopo per cui il modello è stato costruito.

In definitiva, il lavoro ha permesso di raggiungere i risultati sperati, soddisfacendo completamente le aspettative sulla precisione.

## APPENDICE A

# Polinomi per il calcolo dei momenti della corrente toroidale di plasma

### A.1 Soluzione polinomiale dell'equazione di Grad-Shafranov omogenea

Si consideri l'equazione di Grad-Shafranov omogenea:

$$\Delta^* \chi_n(r, z) = 0$$

esplicitando l'operatore  $\Delta^*$  si ha l'equazione differenziale alle derivate parziali da risolvere:

$$\underbrace{r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_n}{\partial r} \right)}_{\Delta_r^*} + \underbrace{\frac{\partial^2 \chi_n}{\partial z^2}}_{\Delta_z^*} = 0 \quad (\text{A.1})$$

La soluzione ricercata è di tipo polinomiale, somma al più di  $n$  termini  $r^\alpha z^\beta$ , tale che sia  $\alpha + \beta = n$  ad ogni termine. Pertanto, in generale, la soluzione sarà del tipo:

$$\begin{aligned} \chi_n(r, z) &= A_{(n,0)} z^n + A_{(n,1)} r z^{n-1} + \dots + A_{(n,n-1)} r^{n-1} z + A_{(n,n)} r^n \\ &= \sum_{k=0}^n A_{(n,k)} r^k z^{n-k} \end{aligned}$$

Per la data soluzione si vede che:

$$\begin{aligned} \Delta_r^* &= -A_{(n,1)} r^{-1} z^{n-1} + 0 + 3A_{(n,3)} r z^{n-3} + \dots + \\ &\quad + (n-2)(n-4)A_{(n,n-2)} r^{n-4} z^2 + (n-1)(n-3)A_{(n,n-1)} r^{n-3} z \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} A_{(n,k)} (k)(k-2) r^{k-2} z^{n-k} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

e anche

$$\begin{aligned}
\Delta_z^* &= n(n-1)A_{(n,0)}z^{n-2} + (n-1)(n-2)A_{(n,1)}rz^{n-3} + \\
&\quad \dots + 3A_{(n,n-3)}r^{n-3}z + 2A_{(n,n-2)}r^{n-2} \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} A_{(n,k)}(n-k)(n-k-1)r^k z^{n-k-2}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

L'equazione (A.1) può quindi essere riscritta in termini delle sommatorie (A.2), (A.3), e si ottiene:

$$\sum_{k=0}^{n-2} A_{(n,k)}k(k-2)r^{k-2}z^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-2} A_{(n,k)}(n-k)(n-k-1)r^k z^{n-k-2} = 0$$

Dovendo essere nulla la somma  $\Delta_r^* + \Delta_z^*$ , ogni termine del polinomio  $\Delta_r^*$  dev'essere compensato da un termine del polinomio  $\Delta_z^*$ . Si noti che nel termine di grado 0 di  $\Delta_r^*$  compare  $r^{-2}$ , termine che mai compare in  $\Delta_z^*$ . Pertanto dovrà sempre essere  $A_{(n,0)} \equiv 0$ . La stessa cosa succede per il termine di grado 1 di  $\Delta_r^*$ , che presenta  $r^{-1}$ , mai compensato da un termine uguale in  $\Delta_z^*$ . Ne deriva che, necessariamente,  $A_{(n,1)} \equiv 0$ .

Prima di procedere si noti che il termine  $k$ -esimo  $r^{k-2}z^{n-k}$  di  $\Delta_r^*$  è uguale al termine  $(k-2)$ -esimo  $r^{(k-2)}z^{n-(k-2)-2}$  di  $\Delta_z^*$ . Questo sarà utile in seguito per il bilancio dei termini e la determinazione dei coefficienti  $A_{n,k}$ .

Si studiano alcuni gradi del polinomio per vedere come si combinano i vari termini che compongono  $\Delta_r^*$ ,  $\Delta_z^*$ :

per  $n = 4$ :

il polinomio risulta  $\chi_4 = A_{(4,2)}r^2z^2 + A_{(4,3)}r^3z + A_{(4,4)}r^4$ , e imponendo  $\Delta_r^* + \Delta_z^* = 0$  si ha:

$$[3A_{(4,3)}rz + 2 \cdot 4A_{(4,4)}r^2] + [2A_{(4,2)}r^2] = 0$$

il termine  $3A_{4,3}rz$  non viene bilanciato perché non compare nessun termine  $A \cdot rz$  nella parentesi di destra, pertanto il suddetto termine non comparirà nel polinomio  $\chi_4$ . Quindi il polinomio risulta  $\chi_4 = A_{(4,2)}r^2z^2 + A_{(4,4)}r^4$ , e si ha che:

$$A_{(4,4)} = -\frac{2 \cdot A_{(4,2)}}{2 \cdot 4} \tag{A.4}$$

per  $n = 5$ :

il polinomio risulta  $\chi_5 = A_{(5,2)}r^2z^3 + A_{(5,3)}r^3z^2 + A_{(5,4)}r^4z + A_{(5,5)}r^5$  e imponendo  $\Delta_r^* + \Delta_z^* = 0$  si ha:

$$[3A_{(5,3)}r^2z^3 + 2 \cdot 4A_{(4,5)}r^2z + 5 \cdot 3A_{(5,5)}r^3] + [2 \cdot 3A_{(5,2)}r^2z + 2A_{(5,3)}r^3] = 0$$

il termine  $3A_{(5,3)}r^2z^3$  non è bilanciato, pertanto non può comparire in  $\chi_5$ . Ma allora non compare nemmeno il termine  $2A_{(5,3)}r^3$ , e per questo motivo anche il termine  $5 \cdot 3A_{(5,5)}r^3$  non viene bilanciato. Quindi il polinomio sarà  $\chi_5 = A_{(5,2)}r^2z^3 + A_{(5,4)}r^4z$ . Procedendo:

$$A_{(5,4)} = -\frac{2 \cdot 3 \cdot A_{(5,2)}}{2 \cdot 4} \quad (\text{A.5})$$

Ripetendo il procedimento per  $n$  più elevati si vede che, in generale, compaiono solamente i termini dove c'è  $r^\alpha$  con  $\alpha$  pari. Inoltre, in base al fatto che  $n$  sia pari oppure dispari, si ha che:

$$\begin{aligned} n \text{ pari} &\quad \Rightarrow \quad \text{solo potenze } z^\beta \text{ con } \beta \text{ pari} \\ n \text{ dispari} &\quad \Rightarrow \quad \text{solo potenze } z^\beta \text{ con } \beta \text{ dispari} \end{aligned}$$

Dalle considerazioni precedenti, sono soluzioni della (A.1) i seguenti polinomi:

$$\begin{aligned} \chi_2 &= A_{(2,2)}r^2 \\ \chi_3 &= A_{(3,2)}r^2z \\ \chi_4 &= A_{(4,2)}r^2z^2 + A_{(4,4)}r^4 \\ \chi_5 &= A_{(5,2)}r^2z^3 + A_{(5,4)}r^4z \\ \chi_6 &= A_{(6,2)}r^2z^4 + A_{(6,4)}r^4z^2 + A_{(6,6)}r^6 \\ \chi_7 &= A_{(7,2)}r^2z^5 + A_{(7,4)}r^4z^3 + A_{(7,6)}r^6z \\ &\dots \end{aligned}$$

In generale, per  $n$  pari:

$$\begin{aligned} \chi_n &= A_{(n,2)}r^2z^{n-2} + A_{(n,4)}r^4z^{n-4} + \\ &\quad \dots + A_{(n,n-2)}r^{n-2}z^2 + A_{(n,n)}r^n \\ &= \sum_{k=1}^{n/2} A_{(n,2k)}r^{2k}z^{n-2k} \\ &= \sum_{k=0}^{n/2-1} A_{(n,2k+2)}r^{2k+2}z^{n-2k-2} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

mentre, per  $n$  dispari:

$$\begin{aligned} \chi_n &= A_{(n,2)}r^2z^{n-2} + A_{(n,4)}r^4z^{n-4} + \\ &\quad \dots + A_{(n,n-3)}r^{n-3}z^3 + A_{(n,n-1)}r^{n-1}z \\ &= \sum_{k=1}^{(n-1)/2} A_{(n,2k)}r^{2k}z^{n-2k} \\ &= \sum_{k=0}^{(n-1)/2-1} A_{(n,2k+2)}r^{2k+2}z^{n-2k-2} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Avendo cambiato i coefficienti delle potenze a  $2k$ , ora si ha che il termine  $(k-1)$ -esimo di  $\Delta_z^*$  ha lo stesso polinomio del termine  $k$ -esimo di  $\Delta_r^*$ . Questi termini vagono:

$$\begin{aligned}\Delta_{r,k}^* &= (2k+2)(2k)A_{(n,2k+2)}r^{2k}z^{n-2k-2} \\ \Delta_{z,k-1}^* &= (n-2(k-1)-2)(n-2(k-1)-3)A_{(n,2k)}r^{2k}z^{n-2k-2} \\ &= (n-2k)(n-2k-1)A_{(n,2k)}r^{2k}z^{n-2k-2}\end{aligned}$$

Si può cominciare ora al bilanciamento ricorsivo dei coefficienti tenendo conto che  $\Delta_{r,k}^* = -\Delta_{z,k-1}^*$ :

$$\begin{aligned}A_{(n,2k+2)} &= -\frac{(n-2k)(n-2k-1)}{2(k+1)2(k)}A_{(n,2k)} \\ A_{(n,2k)} &= -\frac{(n-2k+2)(n-2k+1)}{2(k)2(k-1)}A_{(n,2k-2)} \\ A_{(n,2k-2)} &= -\frac{(n-2k+4)(n-2k+3)}{2(k-1)2(k-2)}A_{(n,2k-4)} \\ &\vdots \\ A_{(n,4)} &= -\frac{(n-3)(n-2)}{2 \cdot (2) \cdot 2 \cdot (1)}A_{(n,2)} \\ A_{(n,2)} &\equiv 1\end{aligned}$$

Si noti come la scelta di uno dei coefficienti sia arbitraria: per comodità si è scelto  $A_{(n,2)} \equiv 1$ . Inserendo in modo ricorsivo uno nell'altro i coefficienti di cui sopra si ottiene il coefficiente  $A_{(n,2k+2)}$  del termine  $k$ -esimo come:

$$A_{(n,2k+2)} = (-4)^{-k} \frac{(n-2)!}{k!(k+1)!(n-2k-2)!} \quad (\text{A.8})$$

per rendersi conto di ciò si presti attenzione al fatto che:

$$(n-2)(n-3)\dots(n-2k)(n-2k-1) = \frac{(n-2)!}{(n-2k-2)!}$$

A questo punto basta riscrivere le relazioni (A.6) e (A.7) caratterizzate per il risultato (A.8), così da ottenere:

$$\begin{aligned}\chi_{n,\text{even}}(r, z) &= \sum_{k=0}^{n/2-1} (-4)^{-k} \frac{(n-2)!}{k!(k+1)!(n-2k-2)!} r^{2k+2} z^{n-2k-2} \\ \chi_{n,\text{odd}}(r, z) &= \sum_{k=0}^{(n-1)/2-1} (-4)^{-k} \frac{(n-2)!}{k!(k+1)!(n-2k-2)!} r^{2k+2} z^{n-2k-2}\end{aligned}$$

I risultati appena trovati sono in accordo con la scrittura compatta presentata nella (2.17).



## A.2 Coniugato della soluzione dell'equazione di Grad-Shafranov omogenea

Dato il polinomio  $\chi_n(r, z)$  definito nella sezione precedente, si determini il suo coniugato  $\xi_n(r, z)$  introdotto nella sottosezione 2.2.2, ovvero tale da soddisfare la seguente coppia di vincoli:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\xi_n}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \chi_n}{\partial z} \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\xi_n}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_n}{\partial r} \quad (\text{A.10})$$

vincoli che possono anche essere scritti come segue:

$$\xi_n(r, z) = -r \int \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \chi_n(r, z) dr = \xi_n^*(r, z) \quad (\text{A.11})$$

$$\xi_n(r, z) = r \int \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \chi_n(r, z) dz = \xi_n^{**}(r, z) \quad (\text{A.12})$$

naturalmente le relazioni (A.11) e (A.12) dovranno essere uguali tra loro, e le costanti di integrazione saranno tali da soddisfare l'uguaglianza.

Dal momento che  $\chi_n(r, z)$  dipende dal fatto che  $n$  sia *pari* piuttosto che *dispari*, lo stesso vale per  $\xi_n(r, z)$ : seguono i procedimenti per i due casi distinti.

### **$n$ pari**

Esplicitando la relazione di  $\chi_n(r, z)$  definita nella sezione precedente per  $n$  pari si ha:

$$\begin{aligned} \chi_n(r, z) = & A_{(n,2)} r^2 z^{n-2} + A_{(n,4)} r^4 z^{n-4} + \dots + \\ & + A_{(n,n-2)} r^{n-2} z^2 + A_{(n,n)} r^n \end{aligned}$$

da cui si ricavano le seguenti (A.11), (A.12):

$$\begin{aligned} \xi_n^*(r, z) = & -\frac{n-2}{2} A_{(n,2)} r^3 z^{n-3} - \frac{n-4}{4} A_{(n,4)} r^5 z^{n-5} - \dots - \\ & - \frac{2}{n-2} A_{(n,n-2)} r^{n-1} z - C^*(z) \cdot r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_n^{**}(r, z) = & \frac{2}{n-1} A_{(n,2)} r z^{n-1} + \frac{4}{n-3} A_{(n,4)} r^3 z^{n-3} + \dots + \\ & + n A_{(n,n)} r^{n-1} z + C^{**}(r) \cdot r \end{aligned}$$

dove i termini  $C^*(z)$ ,  $C^{**}(r)$  sono le costanti di integrazione rispettivamente di (A.11) e (A.12). In generale  $C^*(z)$  è un polinomio della sola variabile  $z$

e si determina imponendo che sia soddisfatto il vincolo  $\xi_n^*(r, z) \equiv \xi_n^{**}(r, z)$ . Lo stesso discorso vale per  $C^{**}(r)$  nell'incognita  $r$ .

Si procede con il bilanciamento dei termini di  $\xi_n^*(r, z)$  con quelli di  $\xi_n^{**}(r, z)$ . Si noti che:

il primo termine di  $\xi_n^*$  ha monomio  $r^3 z^{n-3}$ , che compare anche nel secondo termine di  $\xi_n^{**}$ , il secondo termine di  $\xi_n^*$  ha monomio  $r^5 z^{n-5}$ , che compare anche nel terzo termine di  $\xi_n^{**}$ , e così via;

il primo termine di  $\xi_n^{**}$  ha monomio  $r z^{n-1}$ , che non compare in nessun termine di  $\xi_n^*$ ;

dunque, per tutti i termini che possiedono monomi che compaiono sia in  $\xi_n^*$  che in  $\xi_n^{**}$  basterà verificare che i coefficienti siano uguali e opposti. Si noti comunque che i termini  $C^*(z) \cdot r$ ,  $C^{**}(r) \cdot r$  che compaiono nelle relazioni precedenti possono aiutare il bilanciamento solamente di alcuni monomi, rispettivamente di monomi del tipo  $z^a r$  e  $r^b$ , con  $a$ ,  $b$  qualsiasi.

A questo punto si confronta ogni termine di  $\xi_n^*$  con il rispettivo di  $\xi_n^{**}$  in cui appare lo stesso monomio. Si operano, a titolo di esempio, solamente i primi due confronti.

1. il bilanciamento del primo termine di  $\xi_{n,1}^*$  con il secondo di  $\xi_{n,1}^{**}$  porge:

$$-\frac{n-2}{2} A_{(n,2)} r^3 z^{n-3} = \frac{4}{n-3} A_{(n,4)} r^3 z^{n-3}$$

ricordando che  $A_{(n,2)} = 1$  e che:

$$A_{(n,4)} = -\frac{(n-3)(n-2)}{8}$$

segue l'uguaglianza tra i due termini.

2. il bilanciamento del secondo termine di  $\xi_{n,1}^*$  con il terzo di  $\xi_{n,1}^{**}$  porge:

$$-\frac{n-4}{4} A_{(n,4)} r^5 z^{n-5} = \frac{6}{n-5} A_{(n,6)} r^5 z^{n-5}$$

tenendo conto che:

$$A_{(n,6)} = -\frac{(n-6-2)(n-6+1)}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (3-1)} \cdot A_{(n,4)}$$

l'uguaglianza tra i due termini è verificata.

Per il bilanciamento del primo termine di  $\xi_n^{**}$  si ricorre alla costante di integrazione  $C^*(z)$ :

$$-\frac{2}{n-1} A_{(n,2)} r z^{n-1} = -C^*(z) \cdot r$$

$$\Rightarrow C^*(z) = \frac{2}{n-1} z^{n-1}$$

segue inoltre che la costante di integrazione  $C^{**}(r)$  è identicamente nulla.

Dopo aver determinato l'espressione delle costanti di integrazione si può scrivere in modo esplicito il polinomio  $\xi_n(r, z)$ :

$$\begin{aligned} \xi_n(r, z) &= \frac{2}{n-1} r z^{n-1} - \frac{n-2}{2} A_{(n,2)} r^3 z^{n-3} - \dots - \\ &\quad - \frac{2}{n-2} A_{(n,n-2)} r^{n-1} z \\ &= \frac{2}{n-1} r z^{n-1} - \sum_{k=0}^{n/2-2} \frac{n-(2k+2)}{2k+2} A_{(n,2k+2)} r^{2k+3} z^{n-2k-3} \end{aligned}$$

facendo attenzione al fatto che:

$$\begin{aligned} A_{(n,2k+2)} \cdot \frac{n-(2k+2)}{2k+2} &= \frac{n-(2k+2)}{2k+2} (-4)^{-k} \frac{(n-2)!}{k!(k+1)!(n-2k-2)!} \\ \frac{n-(2k+2)}{(n-2k-2)!} &= \frac{1}{(n-2k-3)!} \\ (2k+2)k! &= 2(k+1)! \end{aligned}$$

si ottiene la scrittura definitiva:

$$\begin{aligned} \xi_n(r, z) &= \frac{2}{n-1} r z^{n-1} - \sum_{k=0}^{n/2-2} (-4)^{-k} \frac{(n-2)!}{2[(k+1)!]^2 (n-2k-3)!} r^{2k+3} z^{n-2k-3} \\ &= \frac{2}{n-1} r z^{n-1} - \sum_{k=1}^{n/2-1} (-4)^{1-k} \frac{(n-2)!}{2 \cdot (k!)^2 (n-2k-1)!} r^{2k+1} z^{n-2k-1} \\ &= - \sum_{k=0}^{n/2-1} (-4)^{1-k} \frac{(n-2)!}{2 \cdot (k!)^2 (n-2k-1)!} r^{2k+1} z^{n-2k-1} \quad (\text{A.13}) \end{aligned}$$

valida, si ricorda, solamente per  $n$  pari.

### **$n$ dispari**

Per i valori dispari di  $n$  si ottiene:

$$\begin{aligned} \chi_n(r, z) &= A_{(n,2)} r^2 z^{n-2} + A_{(n,4)} r^4 z^{n-4} + \dots + \\ &\quad + A_{(n,n-3)} r^{n-3} z^3 + A_{(n,n-1)} r^{n-1} z \end{aligned}$$

da cui seguono le (A.11), (A.12):

$$\begin{aligned} \xi_n^*(r, z) &= -\frac{n-2}{2} A_{(n,2)} r^3 z^{n-3} - \frac{n-4}{4} A_{(n,4)} r^5 z^{n-5} - \dots - \\ &\quad - \frac{3}{n-3} A_{(n,n-3)} r^{n-2} z^2 - \frac{1}{n-1} A_{(n,n-1)} r^n - C^*(z) \cdot r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_n^*(r, z) &= \frac{2}{n-1}A_{(n,2)}rz^{n-1} + \frac{4}{n-3}A_{(n,4)}r^3z^{n-3} + \dots + \\ &+ \frac{n-3}{4}A_{(n,n-3)}r^{n-4}z^4 + \frac{n-1}{2}A_{(n,n-1)}r^{n-2}z^2 + C^{**}(r) \cdot r\end{aligned}$$

col noto significato dei simboli.

Il bilanciamento termine a termine di  $\xi_n^*$  e di  $\xi_n^{**}$  viene eseguito, *mutatis mutandis*, in modo analogo alla trattazione per i valori pari di  $n$ , eccezion fatta per la costante  $C^{**}(r)$ , in questo caso non nulla. Infatti risulta:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{n-1}A_{(n,n-1)}r^n &= C^{**}(r) \cdot r \\ \Rightarrow C^{**}(r) &= -\frac{1}{n-1}A_{(n,n-1)}r^{n-1}\end{aligned}$$

La scrittura esplicita del polinomio risulta dunque:

$$\begin{aligned}\xi_n(r, z) &= \frac{2}{n-1}rz^{n-1} - \frac{n-2}{2}A_{(n,2)}r^3z^{n-3} - \dots - \\ &- \frac{3}{n-3}A_{(n,n-3)}r^{n-2}z^2 - \frac{1}{n-1}A_{(n,n-1)}r^n \\ &= \frac{2}{n-1}rz^{n-1} - \sum_{k=0}^{(n-1)/2-2} \frac{n-(2k+2)}{2k+2}A_{(n,2k+2)}r^{2k+3}z^{n-2k-3}\end{aligned}$$

che, per mezzo di passaggi già visti in precedenza, può essere riscritta definitivamente:

$$\begin{aligned}\xi_n(r, z) &= \frac{2}{n-1}rz^{n-1} - \sum_{k=0}^{(n-1)/2-1} (-4)^{-k} \frac{(n-2)!}{2[(k+1)!]^2(n-2k-3)!} r^{2k+3}z^{n-2k-3} \\ &= \frac{2}{n-1}rz^{n-1} - \sum_{k=1}^{(n-1)/2} (-4)^{1-k} \frac{(n-2)!}{2 \cdot (k!)^2(n-2k-1)!} r^{2k+1}z^{n-2k-1} \\ &= - \sum_{k=0}^{(n-1)/2} (-4)^{1-k} \frac{(n-2)!}{2 \cdot (k!)^2(n-2k-1)!} r^{2k+1}z^{n-2k-1}\end{aligned}\tag{A.14}$$

con ovvio significato dei simboli.

### A.3 Caratterizzazione dei polinomi per gli ordini inferiori

Riepilogando, i polinomi peso che compaiono nella relazione (2.25) sono i seguenti:

**$n$  pari:**

$$\chi_{n,\text{even}}(r, z) = \sum_{k=0}^{n/2-1} (-4)^{-k} \frac{(n-2)!}{k!(k+1)!(n-2k-2)!} r^{2k+2} z^{n-2k-2}$$

$$\xi_{n,\text{even}}(r, z) = - \sum_{k=0}^{n/2-1} (-4)^{1-k} \frac{(n-2)!}{2 \cdot (k!)^2 (n-2k-1)!} r^{2k+1} z^{n-2k-1}$$

**$n$  dispari:**

$$\chi_{n,\text{odd}}(r, z) = \sum_{k=0}^{(n-1)/2-1} (-4)^{-k} \frac{(n-2)!}{k!(k+1)!(n-2k-2)!} r^{2k+2} z^{n-2k-2}$$

$$\xi_{n,\text{odd}}(r, z) = - \sum_{k=0}^{(n-1)/2} (-4)^{1-k} \frac{(n-2)!}{2 \cdot (k!)^2 (n-2k-1)!} r^{2k+1} z^{n-2k-1}$$

Segue un elenco dei polinomi caratterizzati fino ad un certo grado, ricordando che le relazioni determinate in precedenza permettono di determinare  $\chi_2$ ,  $\xi_2$  come pesi di grado minimo. Per la procedura di derivazione dei pesi di grado inferiore si rimanda alla letteratura specifica [42].

$n=0$

$$\chi_0(r, z) = 1$$

$$\xi_0(r, z) = 0$$

$n=1$

$$\chi_1(r, z) = z$$

$$\xi_1(r, z) = -r \ln r$$

$n=2$

$$\chi_2(r, z) = r^2$$

$$\xi_2(r, z) = 2rz$$

$n=3$

$$\chi_3(r, z) = r^2 z$$

$$\xi_3(r, z) = rz^2 - \frac{1}{2} r^3$$

n=4

$$\chi_4(r, z) = r^2 z^2 - \frac{1}{4} r^4$$

$$\xi_4(r, z) = \frac{2}{3} z^3 r - r^3 z$$

n=5

$$\chi_5(r, z) = r^2 z^3 - \frac{3}{4} r^4 z$$

$$\xi_5(r, z) = \frac{1}{2} r z^4 - \frac{3}{2} r^3 z^2 + \frac{3}{16} r^5$$

n=6

$$\chi_6(r, z) = r^2 z^4 - \frac{3}{2} r^4 z^2 + \frac{1}{8} r^6$$

$$\xi_6(r, z) = \frac{2}{5} r z^5 - 2 r^3 z^3 + \frac{3}{4} r^5 z$$

## APPENDICE B

# Ricerca del X-Point per mezzo delle funzioni base sull'elemento biquadratico lagrangiano

Come già detto in precedenza, nel caso di un plasma *diverted* la configurazione magnetica ricercata prevede la presenza del X-Point, punto in cui  $\vec{B}_{pol} = 0$ , per una serie di vantaggi già citati. Inoltre, in corrispondenza di questo punto la mappa della funzione  $\psi(r, z)$  nel piano  $rz$  ha un punto di sella. Questi andamenti sono raffigurati più avanti.

Gli sforzi per la ricostruzione della frontiera di plasma si concentrano principalmente nella ricerca delle coordinate  $(r_x, z_x)$  del punto di nullo. Questa ricerca è stata eseguita valutando il campo  $\vec{B}_{pol}(r_i, z_j)$  in una griglia di  $31 \times 31$  punti posizionata nella parte inferiore della camera da vuoto (figura B.1), essendo noti in ogni istante i valori delle correnti  $\mathbf{I}_s, \mathbf{I}_p, \mathbf{I}_c$ . Il valore così determinato del campo  $|\vec{B}_{pol}(r_i, z_j)|$  fornisce una distribuzione discreta dell'andamento del campo induzione, sufficientemente buona per fornire una prima stima della posizione del punto di nullo ma troppo grossolana per pensare di determinarne la posizione definitiva.

Per la raffinazione del risultato grossolano ottenuto in prima approssimazione si sono sfruttati i polinomi continui a tratti, altrimenti detti *funzioni base*, su cui si appoggia il metodo degli elementi finiti. In particolare sono stati utilizzati polinomi lagrangiani biquadratici, definiti necessariamente su una griglia di 9 nodi, a cui corrisponde l'elemento lagrangiano biquadratico. Il punto scelto come nodo centrale sarà naturalmente il punto di prima approssimazione del X-Point, mentre gli 8 punti circostanti della griglia di partenza vanno a definire i nodi di lato e i nodi d'angolo dell'elemento biquadratico su cui si ricostruiranno le funzioni  $|\vec{B}_{pol}(r, z)|, \psi(r, z)$ .

Nella figura B.2 si vede il passaggio dall'elemento biquadratico lagrangiano reale all'elemento biquadratico normalizzato, attraverso un cambio di sistema di riferimento  $(r, z) \mapsto (\xi, \eta)$  che permette di passare dal generico elemento centrato in un punto qualsiasi ad un elemento centrato nell'origine, definito nell'intervallo  $(\xi, \eta) \in [-1, 1]$ . Il cambio di coordinate avviene

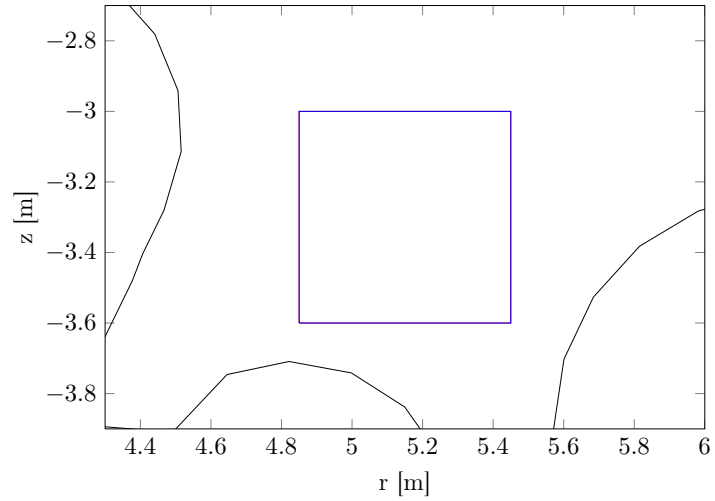


Figura B.1: Zona della griglia di punti per un'identificazione grezza del X-Point.

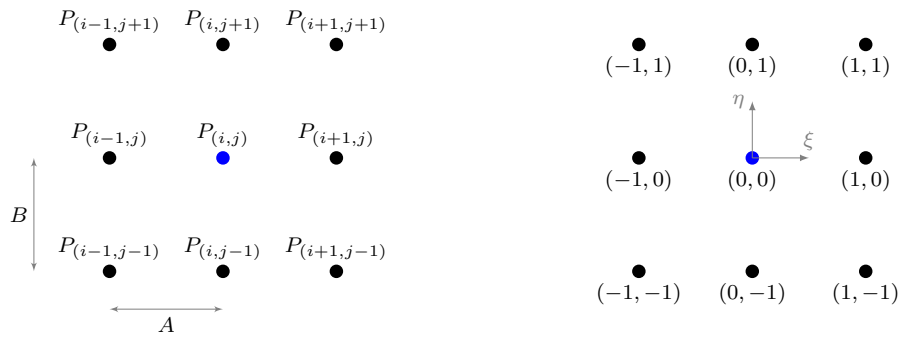


Figura B.2: Elementi biquadratici lagrangiani reale e normalizzato.



attraverso la seguente trasformazione:

$$\begin{cases} r(\xi, \eta) = P_{(i,j)} + A\xi \\ z(\xi, \eta) = P_{(i,j)} - B\eta \end{cases}$$

e viceversa:

$$\begin{cases} \xi(r, z) = \frac{1}{A}(r - P_{(i,j)}) \\ \eta(r, z) = \frac{1}{B}(P_{(i,j)} - z) \end{cases}$$

con  $A, B$  definiti in figura B.2.

In generale viene definito, per ognuno dei 9 nodi, un polinomio base biquadratico [29], come:

$$g_{(i,j)}(r, z) = L_i(r)L_j(z) \quad (\text{B.1})$$

con  $i, j = -1, 0, 1$  e  $L_h, L_l$  sono i polinomi base di Lagrange definiti come:

$$L_i(r) = \prod_{\substack{j=-1 \\ j \neq i}}^1 \frac{r - r_j}{r_i - r_j} \quad L_j(z) = \prod_{\substack{i=-1 \\ i \neq j}}^1 \frac{z - z_i}{z_j - z_i}$$

La relazione (B.1) porta alla costruzione di 9 polinomi nelle variabili  $(r, z)$ , identicamente nulli al di fuori dell'elemento e definiti come segue all'interno di esso, nelle variabili  $(\xi, \eta)$ :

nodo centrale

$$g_{(0,0)}(\xi, \eta) = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$$

nodi d'angolo

$$g_{(-1,1)}(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}\xi\eta(1 - \xi)(1 + \eta)$$

$$g_{(1,1)}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}\xi\eta(1 + \xi)(1 + \eta)$$

$$g_{(-1,-1)}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}\xi\eta(1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$g_{(1,-1)}(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}\xi\eta(1 + \xi)(1 - \eta)$$

nodi nella mezzeria dei lati

$$\begin{aligned}
g_{(0,1)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}\xi\eta(1 - \xi^2)(1 + \eta) \\
g_{(-1,0)}(\xi, \eta) &= -\frac{1}{2}\xi\eta(1 - \xi)(1 - \eta^2) \\
g_{(1,0)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}\xi\eta(1 + \xi)(1 - \eta^2) \\
g_{(0,-1)}(\xi, \eta) &= -\frac{1}{2}\xi\eta(1 - \xi^2)(1 - \eta)
\end{aligned}$$

I polinomi appena definiti si possono vedere nelle figure B.5, B.6, B.7 alla fine dell'appendice.

Si noti che i polinomi base  $g_{(i,j)}(\xi, \eta)$  hanno valore massimo unitario in corrispondenza al nodo di definizione, e si annullano al passaggio degli altri nodi. La composizione di questi polinomi interpolanti fornisce una ricostruzione della funzione desiderata, partendo solamente dal valore di tale funzione nei nodi. Pertanto, detti  $|\vec{B}_{pol}(\xi_i, \eta_j)|, \psi(\xi_i, \eta_j)$  valori del campo magnetico e del flusso nei nodi della griglia, le rispettive funzioni ricostruite  $|\hat{B}_{pol}(\xi, \eta)|, \hat{\psi}(\xi, \eta)$  risultano:

$$|\hat{B}_{pol}(\xi, \eta)| = \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 g_{(i,j)}(\xi, \eta) |\vec{B}_{pol}(\xi_i, \eta_j)| \quad (\text{B.2})$$

$$\hat{\psi}(\xi, \eta) = \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 g_{(i,j)}(\xi, \eta) \psi(\xi_i, \eta_j) \quad (\text{B.3})$$

Gli andamenti delle funzioni ricostruite  $|\hat{B}_{pol}(\xi, \eta)|, \hat{\psi}(\xi, \eta)$  sono riportati nelle figure B.3, B.4. Si noti il punto di minimo del campo magnetico ed il corrispondente valore di flusso  $\psi^*$  nel punto di sella.

L'interpolazione degli andamenti di flusso e campo induzione attraverso il metodo dei polinomi base permette di raffinare sensibilmente la precisione della ricerca: dalla funzione  $|\hat{B}_{pol}(\xi, \eta)|$  si ricerca il nuovo X-Point  $(\xi_x, \eta_x) \mapsto (r_x, z_x)$  dove il campo presenta un punto di nullo, e quindi si valuta  $\psi^* = \hat{\psi}(\xi_x, \eta_x)$  valore del flusso nel X-Point, che sarà il valore di flusso riferito alla curva di livello che identifica la frontiera di plasma.

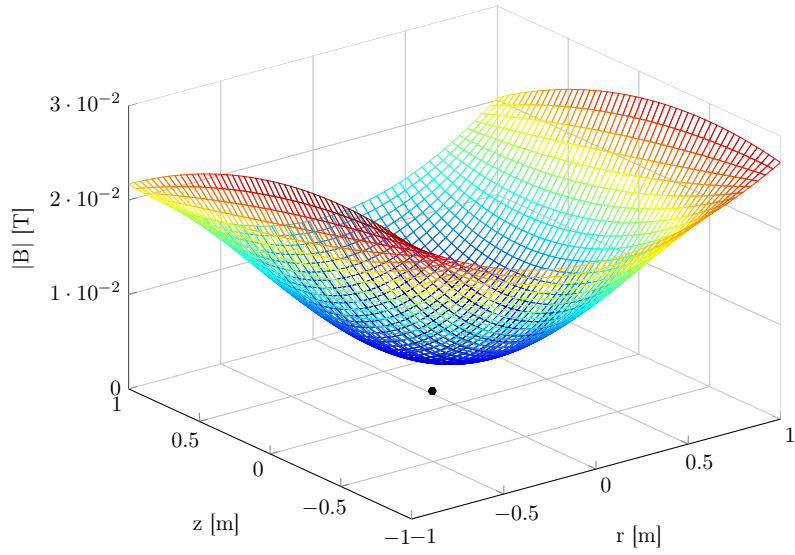


Figura B.3: Andamento di  $|\hat{B}_{pol}(\xi, \eta)|$  nell'elemento base.

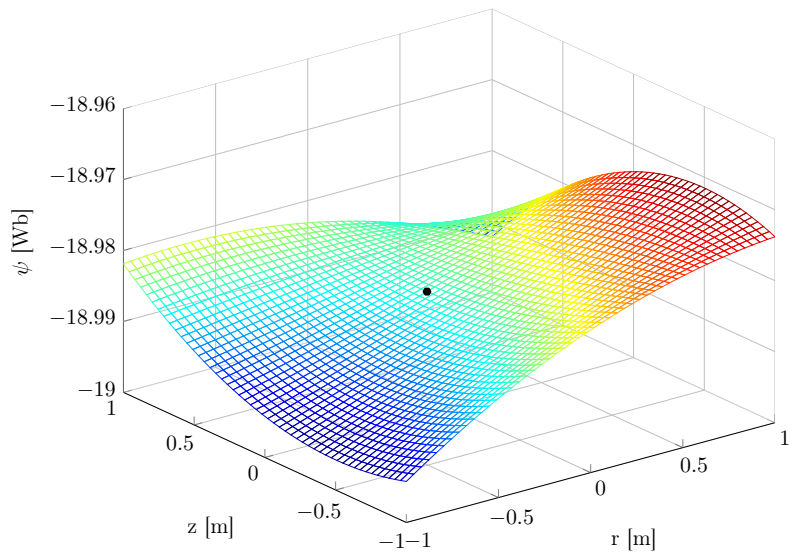


Figura B.4: Andamento di  $\hat{\psi}(\xi, \eta)$  nell'elemento base.

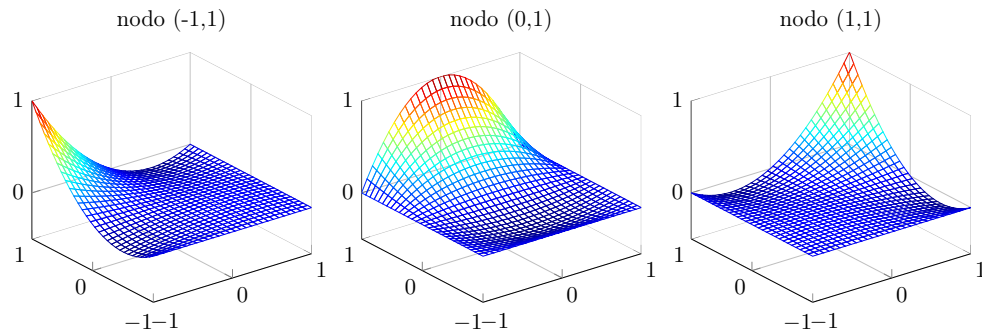


Figura B.5: Polinomi base dei 3 nodi con  $\eta = 1$ .

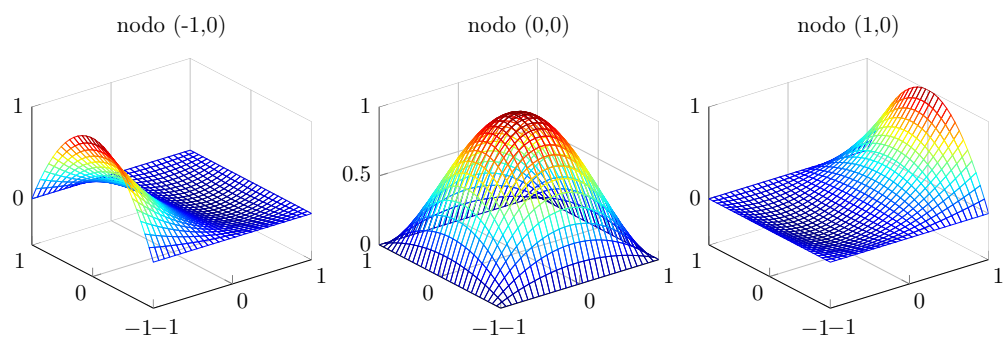


Figura B.6: Polinomi base dei 3 nodi con  $\eta = 0$ .

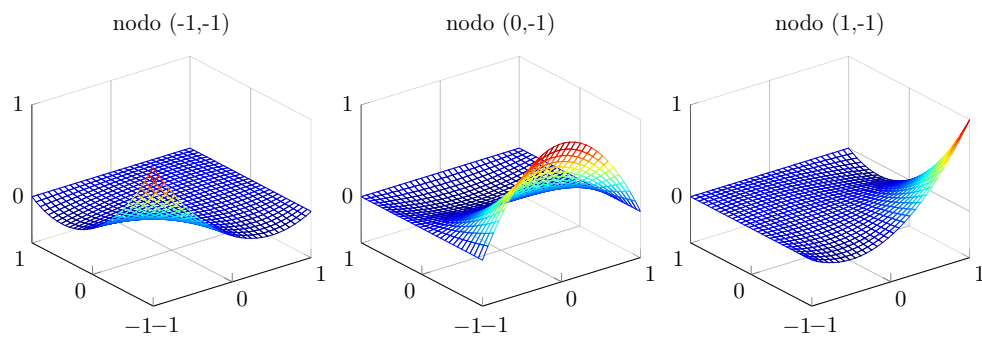


Figura B.7: Polinomi base dei 3 nodi con  $\eta = -1$ .

## BIBLIOGRAFIA

- [1] *World energy outlook*, IEA, 2009.
- [2] Duderstadt, J. J., Moses, G. A., *Inertial Confinement Fusion*, John Wiley & Sons, New York, 1982.
- [3] *The ITER project*, EFDA, European Fusion Development Agreement, 2006.
- [4] Ariola, M., Pironti, A., *Plasma shape control for the JET Tokamak*, IEEE Trans. Contr. Syst. Technol., vol. 25, no. 5, pp. 65-75, Oct. 2005.
- [5] Wesson, J., *Tokamaks*, Oxford University Press, New York, 2011.
- [6] Freidberg, J., *Plasma Physics and Fusion Energy*, Cambridge University Press, New York, 2007.
- [7] Aydin, S. H., Tezer-Sezge, M., *Numerical solution of Grad-Shafranov equation for the distribution of magnetic flux in nuclear fusion devices*, Turkish J. Eng. Env. Sci. No. 32, 2008.
- [8] Zheng, S. B., Wootton, A. J., Solano, E. R., *Analytical tokamak equilibrium for shaped plasmas*, Fusion Research Center, University of Texas Austin, Austin, 1995.
- [9] Guarnieri, M., Malesani, G., *Elettromagnetismo stazionario e quasi-stazionario: Elementi di elettrotecnica*, Edizioni Progetto, Padova, 1999.
- [10] Durand, E. *Magnétostatique*, Masson et C., Pasis, 1968.
- [11] Abramowitz, M., Stegun, I. A., *Handbook of Mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables*, National Bureau of standards, Washington, 1964.
- [12] Grad, H., Rubin, H., *Hydromagnetic Equilibria and Force-Free Fields*, Proceedings of the 2nd UN Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy, Vol. 31, Geneva, 1958.

- [13] Egorov, Y. V., Shubin, M. A., *Foundations of the classical theory of partial differential equations*, Springer, 1998.
- [14] Nath, D., Kalra, M. S., *Solution of Grad-Shafranov equation by the method of fundamental solutions*, Journal of Plasma Physics, vol. 80, part 3, 2014.
- [15] Quian Peng, *Equilibrium reconstruction with Grad-Shafranov equation*, 2011.
- [16] Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, New York, 1999.
- [17] Dini, F., Khorasani, S., Amhrollahi, R., *Green Function of Axisymmetric Magnetostatics*, Iranian Journal of Science & Technology, Transaction A, Vol. 28, No. A2, 2004.
- [18] Beghi, A., Cenedese, A., *Advances in real-time plasma boundary reconstruction*, IEEE Trans. Contr. Syst. Technol., vol. 25, no. 5, pp. 44–64, Oct. 2005.
- [19] Stangeby, P. C., *The plasma boundary of magnetic fusion devices*, IOP Publishing Ltd, London, 2000.
- [20] Haverkort, J. W., *Axisymmetric Ideal MHD Tokamak Equilibria*, 2009.
- [21] Van Milligen, B. Ph., *Exact relations between multipole moments of the flux and moments of the toroidal current density in tokamaks*, Nuclear Fusion, Volume 30, No. 1, 1990.
- [22] Cenedese, A., Sartori, F., Macuglia, M., *Development of a fixed position filamentary plasma model based on the current moment description*, IEE Proc.-Sci. Meas. Technol., 151 No. 6 (2004).
- [23] Reusch, M. F., Neilson, G. H., *Finite order polynomial solutions of the homogeneous Grad-Shafranov equation*, Princeton University, 1984.
- [24] Zakharov, L. E., Shafranov, V. D., *Equilibrium of a toroidal plasma with noncircular cross section*, Sov. Phys. Tech. Phys., Volume 18, Number 2, pp. 151-156, 1973.
- [25] Hutchinson, I. H., *Principles of plasma diagnostics*, Cambridge University Press, New York, 2002.
- [26] Griffiths, D. J., *Introduction to Electrodynamics*, Pearson Education, Dorling Kindersley, 2007.

- [27] Testa, D., et al., *The magnetic diagnostic set for ITER*, IEEE Transactions on Plasma Science 38, 2010.
- [28] de Boor, C., *Spline toolbox: for use with MATLAB*, User's Guide, The MathWorks, 2003.
- [29] Gambolati, G., *Lezioni di metodi numerici per ingegneria e scienze applicate*, Libreria Internazionale Cortina, Padova, 2003.
- [30] Zilli, G., *Lezioni di calcolo numerico*, Imprimerie, Padova, 2000.
- [31] Buffa, A., Giudicotti, L., *Dispense di fisica dei plasmi*, Padova, 2008.
- [32] Wootton, A. J., *Magnetic fields and magnetic diagnostic for Tokamak plasma*.
- [33] De Marco, G., *Analisi due. Teoria ed esercizi*, Zanichelli, 1999.
- [34] Lawson, C. L., Hanson, R. J., *Solving Least Squares Problems*, Prentice-Hall, 1974.
- [35] Bettini, P., Cavinato, M., Trevisan, F., *Dynamic identification of plasma magnetic contour in fusion machines*, Nuclear Fusion, Volume 45, Issue 1, January 2005, Pages 1-12, 10.1088/0029-5515/45/1/001.
- [36] Beghi, A., *An application of selective modal analysis to tokamak modeling and control*, IEEE Trans. Contr. Syst. Technol., vol. 9, no. 4, pp. 574–589, 2001.
- [37] Bettini, P., Cenedese, A., *Iterative Axisymmetric Identification Algorithm (IAIA) for real time reconstruction of the plasma boundary of ITER*, Fusion Engineering and Design, in press, 2012.
- [38] Bettini, P., Cenedese, A., *Expert contract to assist Fusion for Energy in the field of Evaluation of plasma boundary reconstruction errors in transients*, Service Contract: ref. F4E-2013-EXP-129 - F4E-2013-EXP-130, 2013.
- [39] Cenedese, A., *Engineering of a plasma boundary reconstruction code for real-time*, 2013.
- [40] Beghi, A., Cenedese, A., *Advances in real time plasma boundary reconstruction*, IEEE Trans. Contr. Syst. Technol., vol. 25, no. 5, pp. 44–64, Oct. 2005.
- [41] Ambrosino, G., Albanese, R., *Magnetic control of plasma current, position, and shape in tokamaks*, IEEE Trans. Contr. Syst. Technol., vol. 25, no. 5, pp. 76–92, Oct. 2005.

- [42] Braams, B. J., *Computational studies in tokamak equilibrium and transport*, Drukkerij Elinkwijk BV, Utrecht, 1986.