



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea Magistrale in Fisica

**Crescita in economia come problema di dinamica di
sistemi complessi**

Relatore:

Prof. Attilio Stella

Correlatore:

Dott. Michele Caraglio

Laureando: Gianluca Teza

Anno Accademico 2015/2016

Indice

Capitolo 1. Introduzione	1
Capitolo 2. Presentazione dei dati e del modello	7
2.1. NBER-UN database e classificazione dei prodotti	7
2.2. Modello ed equazioni per la dinamica	8
2.2.1. Ranking	9
2.2.2. Matrice di correlazione	9
2.2.3. Matrice J_{ij}	11
2.2.4. Rumore	15
2.2.5. Drift ed inflazione	16
2.3. Integrazione e dinamica	18
Capitolo 3. Calibrazione	21
3.1. Calibrazione di G	21
3.2. Calibrazione di σ e τ	22
3.3. Calibrazione di $\bar{\mu}$	25
Capitolo 4. Risultati analisi a livello globale	27
4.1. Riproduzione del ranking	28
4.2. Riproduzione della matrice di correlazione	29
4.3. Crescita ottimale	30
4.4. Crescita per $T \gg \tau_s$	32
Capitolo 5. Analisi per Stato singolo	35
5.1. Network degli Stati studiati	37
5.2. Calibrazione dei modelli per le network di Stato singolo	39
5.3. Crescita delle network di singolo Stato	41
5.4. Crescita ottimale per le network di Stato singolo	42
5.5. Correlazione tra le network di Stato e la network Globale	45
Capitolo 6. Prospettive di crescita di uno Stato	47
6.1. Distribuzione del ranking delle merci z_i a livello globale	47
6.2. Genericità della network globale	50
6.3. Genericità per le network di Stato singolo	52
6.4. Database sintetico e calibrazione alternativa di $\bar{\mu}$	57
6.5. Studio della genericità sul database sintetico	57
Capitolo 7. Conclusioni	63
Appendice A. Moto Browniano geometrico ed integrazione di SDE	67
A.1. Moto Browniano geometrico (GBM)	67

A.2. Integrazione secondo Stratonovich	68
A.3. Integrazione secondo Itô	69
A.4. Confronto tra Itô e Stratonovich	70
Appendice B. Integrazione numerica di SDE	73
B.1. Metodo di Euler-Mayurama	73
B.2. Convergenza forte di metodi risolutori di SDE	74
B.3. Convergenza debole di metodi risolutori di SDE	76
B.4. Metodo di Runge-Kutta	77
Appendice C. Decomposizione di Cholesky	79
C.1. Decomposizione LLT	79
C.2. Decomposizione LDLT	81
Bibliografia	83

CAPITOLO 1

Introduzione

Lo studio dei sistemi complessi ha permesso negli ultimi anni di estendere l'applicabilità di leggi utilizzate nella descrizione di problemi di interesse prettamente fisico ad ambiti apparentemente lontani. I temi toccati da questo ramo della fisica spaziano in numerosi e differenti campi, quali dinamiche di popolazione [1, 2], ecosistemi [3], automi cellulari [4], il sistema nervoso nel corpo umano [5], etc...

Il cardine su cui poggiano le analisi di questi diversi fenomeni è costituito da una ricerca iniziale in cui si prova a capire quali siano i meccanismi di interazione a livello locale del sistema, per poi procedere con una modellizzazione che ci permetta di riprodurre quei comportamenti e quelle dinamiche collettive che riscontriamo nella realtà [6]. Questo campo ha la fortuna di poter spesso coniugare teoria ed analisi dei dati sperimentali, che possono procedere di pari passo permettendo di avere un confronto immediato.

In questa tesi andremo ad analizzare l'economia degli import e degli export in un periodo di quattro decenni (dal 1962 al 2000) sia a livello globale che riducendo l'analisi al caso di singoli Stati. Cercheremo quindi di capire come un Paese si colloca all'interno del panorama mondiale e quali sono le sue prospettive di crescita.

I primi tentativi di formalizzare il sistema di scambio di prodotti tra nazioni furono presentati in un articolo svedese del 1919 scritto da Heckscher [7], a cui seguì una formalizzazione della teoria da parte di Ohlin (suo studente) in un libro del 1933 [8]. Questo modello aveva due obiettivi principali: dimostrare che una nazione esporta le merci che riesce a produrre in quantità elevate e trovare le condizioni di equilibrio che si stabiliscono nello scambio di beni tra due Paesi.

Diversi anni dopo, il modello di Heckscher-Ohlin fu rielaborato ed esteso con una generalizzazione che ora è conosciuta col nome di *modello economico standard* [9, 10]. In esso il processo di sviluppo economico (corrispondente ad un aumento della quantità di merce esportata) riconosceva nei fattori capitali economici, lavorativi ed infrastrutturali gli elementi determinanti per la crescita, ma solo da un punto di vista passivo, senza prevedere che gli export potessero modificare a loro volta la struttura dei capitali determinanti.

Una raffinazione del modello [11] mostrò come un accumulo di capitale economico possa provocare un cambiamento nelle merci esportate sia in quantità che in tipologia, introducendo quindi la possibilità di una modifica strutturale nell'insieme dei prodotti esportati (anche se queste nuove merci restavano comunque strettamente legate e dipendenti dai fattori infrastrutturali e lavorativi già propri dello Stato). Si inizia dunque a riconoscere che nello sviluppo di uno Stato vi è una differenza non banale tra la produzione di beni completamente nuovi e la produzione in maggiore quantità di beni già presenti: la capacità di migliorare lo status economico viene identificata in un trasferimento dalla produzione di beni semplici (tipici di nazioni

sottosviluppate) in beni più complessi (propri solo dei Paesi meglio sviluppati).

Tuttavia vi sono diverse ragioni per cui la modifica strutturale degli export di un Paese possa essere più complicata di quanto previsto in [11]. Infatti, come era stato già fatto notare in diversi lavori [12, 13, 14, 15], lo sviluppo di nuovi settori potrebbe anche dipendere da conoscenze indisponibili ad uno Stato in quanto legate ad un processo di *learning by doing* (imparare dall'esperienza), o più semplicemente dalla mancanza delle materie prime necessarie. In questi casi non sarà più sufficiente trasferire gli investimenti in queste nuove direzioni per elevare il grado di sviluppo del Paese. Un altro importante problema deriva dal fatto che con una descrizione di questo genere vengono trascurate le correlazioni che intercorrono tra i prodotti, negando la possibilità di tenere conto delle ricadute (positive e negative) che possono avere degli sviluppi di un settore su un altro. Tutte queste dinamiche contribuiscono a rendere insoddisfacente questo metodo di analisi per la previsione di crescita (o crisi) economica di un Paese [16].

Per risolvere questi problemi è necessario quindi analizzare più approfonditamente sia i legami che intercorrono tra le varie nazioni che i processi di modifica strutturale che possono portare un Paese a migliorare la propria condizione economica, riconoscendo quali siano i beni caratterizzanti uno Stato sviluppato.

In [17] troviamo il primo tentativo di organizzare il mercato globale in questo senso, con un modello di network (il *World Trade Web*) in cui le varie nazioni sono messe in relazione tra loro attraverso il flusso di denaro scambiato. Dalla topologia di questa network emerge chiaramente come gli Stati più sviluppati si trovino al centro di questa rete, essendo caratterizzati da un elevato numero di interconnessioni. Con il World Trade Web è stato possibile capire come le eventuali crisi o momenti favorevoli di crescita di un Paese si diffondano nella network andando ad influenzare le altre nazioni.

Successivamente, in due lavori da parte di Hausmann, Barabasi e collaboratori [16, 18], si è data la prima definizione del concetto di "similarità" tra prodotti, definendo una grandezza a cui si dà il nome di *prossimità*. Questa grandezza permette di definire una connessione tra due prodotti partendo dalla probabilità condizionata che un Paese esporti una determinata merce se già ne esporta un'altra¹. Nasce così una network (il *Product Space*) in cui i nodi rappresentano i beni esportati e le connessioni indicano la vicinanza di un prodotto con un altro. In questo modo è possibile capire quale sia la probabilità che un Paese inizi a produrre un certo bene a lui nuovo, così da poter discriminare i Paesi con un buon potenziale di crescita e sviluppo da quelli che avranno difficoltà ad emergere. La network di Barabasi, pur rappresentando un buon passo in avanti rispetto alla modellizzazione del World Trade Web, presenta ancora delle carenze. La prima critica è indirizzata all'incapacità di connettere delle materie che sono distanti in termini di infrastrutture e metodi di produzione, ma per cui vi può essere una dipendenza unidirezionale. Prendiamo in esame il caso di petrolio e frutta: queste sono merci che il modello di Barabasi identifica come distanti, ma basta osservare che la frutta è fortemente dipendente dal petrolio per il trasporto e la distribuzione sul territorio per capire che vi è una prossimità non banale in questa direzione. Da questa critica emerge

¹Nella definizione impiegata da Barabasi della matrice di prossimità tra due merci i e j si utilizza il valore minimo tra le probabilità condizionate che uno Stato esporti i se esporta j e viceversa: la matrice così definita ha quindi una natura simmetrica.

subito un'altra osservazione sempre concernente la matrice di prossimità, in quanto spicca la necessità di costruire una matrice asimmetrica per descrivere relazioni del tipo frutta-petrolio.

Bisogna attendere fino al 2016 per la formulazione di un modello alternativo a quello di Barabasi che permettesse di risolvere le problematiche relative alla costruzione di un'adeguata matrice di prossimità. In [19] (che è l'articolo che costituisce il punto di partenza per il lavoro di questa tesi) viene proposto un modo alternativo di quantificare le relazioni che intercorrono tra le merci, definendo una matrice di trasferimento ispirata al *modello gravitazionale*² (già impiegato in ambito economico [20]), in cui il concetto di "distanza" tra due beni viene calcolato sulla base dei ritorni logaritmici delle quantità di merci esportate a livello globale.

Il modello presentato in [19] propone inoltre una chiave di lettura dinamica del sistema, introducendo per la prima volta esplicitamente la nozione di *tempo* nella descrizione del Product Space: ai nodi della network viene infatti attribuita una dinamica definita da un sistema di equazioni differenziali stocastiche (SDE), che descrivono l'evoluzione delle crescita delle quantità di merci esportate a livello globale. Il supporto dato dalla dinamica stocastica rappresenta uno step importante nella comprensione di quello che è a tutti gli effetti un sistema complesso, in quanto ci fornisce nuovi strumenti per l'interpretazione dei fenomeni di crescita che ci permettono di distinguere i vari contributi che ne sono responsabili.

La modellizzazione teorica tramite SDE di sistemi collegati al problema della crescita viene per altro utilizzata ormai da tempo, e nei campi più vari: dalle dinamiche evuzionistiche e di popolazione [21], strategie di ottimizzazione di portafoglio [22], crescita disordinata su una superficie [23, 24] e studio di polimeri diretti in un mezzo casuale [25].

In [19] si prende spunto da un'equazione introdotta da Bouchaud e Mézard nel 2000 in un articolo in cui si studiava il ben noto problema della distribuzione della ricchezza all'interno della società [26], che recentemente (nel 2014) fu ripresa dallo stesso Bouchaud ed altri per lo studio del problema generico della crescita di un reticolo regolare [27]. In questo lavoro gli autori non si limitarono alla modellizzazione di una semplice network regolare, ma ricercarono anche quali fossero le migliori condizioni per la crescita, inquadrando il problema nell'ambito economico di ottimizzazione del portafoglio [28]. Per massimizzare la crescita, bisogna infatti trovare un giusto compromesso tra il continuare ad investire e sfruttare le tecnologie già a disposizione piuttosto che esplorare nuove possibilità, potenzialmente più redditizie ma al contempo rischiose. È bene notare che l'equazione impiegata nell'analisi (nel caso di un reticolo regolare d -dimensionale) è una versione discretizzata dell'*equazione stocastica del calore* che, sottoposta ad una trasformazione di Cole-Hopf, ci dà la famosa *equazione di Kardar-Parisi-Zhang* (KPZ), introdotta da questi autori per lo studio della crescita di superfici [23].

Dobbiamo comunque sottolineare il fatto che l'approccio impiegato da Bouchaud e collaboratori non affronta il problema dell'ottimizzazione in un contesto

²Il modello gravitazionale fu formulato da Jan Timbergen nel 1962, premio Nobel per l'economia nel 1969. Fu uno dei primi fisici (si era formato all'Università di Leiden sotto la guida di Herenfest) che tentò di applicare un modello fisico ad un ambito apparentemente lontano come quello economico.

dove la complessità della network è realistica: solamente in [19] ritroviamo un primo tentativo di applicare questo tipo di trattazione su dei dati reali come quelli del Product Space.

Il problema della crescita in ambito economico è un tema attuale, che nell'ultimo decennio è stato affrontato anche con approcci differenti. Altri tipi di analisi, ad esempio, che hanno come obiettivo il valutare lo status economico e le prospettive di un Paese, prendono in esame l'insieme delle tipologie di prodotti esportati. In un lavoro del 2012, Pietronero e collaboratori osservano che generalmente i Paesi invece piuttosto di specializzarsi nella produzione di pochi beni (come predetto dai modelli classici) tendono piuttosto a produrre qualsiasi bene che non sia precluso dal loro grado di sviluppo economico [29]. Da questa osservazione è stato possibile stilare una classifica dei prodotti in funzione della loro complessità, e determinare la "fitness" di una nazione studiandone l'insieme dei prodotti esportati.

Questo lavoro è proseguito in diversi altri, fra cui un articolo del 2015 in cui la fitness degli Stati studiati viene combinata con il GDP relativo, per ricercare una relazione che permetta di capire quali siano le prospettive di crescita di uno Stato[31]. Dallo studio dell'evoluzione nel tempo di queste grandezze emerge una caratterizzazione della dinamica ben definita sul piano GDP-fitness, che, oltre a fornire delle previsioni sulla crescita, permette di distinguere i Paesi in base al loro grado di sviluppo economico: i Paesi sviluppati rientrano in una zona relativamente "calma", o laminare, dal punto di vista dell'evoluzione, mentre i Paesi sottosviluppati si ritrovano in una zona caotica, o turbolenta, in cui è impossibile stabilire un trend per fare previsioni di alcun genere.

In questo lavoro di tesi magistrale ci occuperemo in primo luogo dello studio della network degli export a livello globale dal 1962 al 2000 applicando il modello del sistema di SDE definito in [19]. Presenteremo nel dettaglio tutti gli elementi del modello, e descriveremo quindi la procedura di calibrazione (analoga a quella dell'articolo) che ci ha fornito i valori dei parametri liberi che permettono di riprodurre più accuratamente i dati reali. Seguirà uno studio approfondito in cui verificheremo la capacità del modello di riprodurre correttamente tramite simulazioni le caratteristiche della network dei dati storici, ricercheremo le condizioni ottimali di crescita e determineremo infine un tempo di rilassamento della network riconducibile alla durata di un periodo di crisi economica a livello globale.

Il lavoro proseguirà con dei contributi completamente originali, in cui andremo a studiare il caso di Stato singolo³: il medesimo modello dinamico impiegato nello studio della network globale verrà adattato (tramite ulteriori procedure di calibrazione) ai dati storici delle network di singolo Stato. In questo modo avremo la possibilità di testare il modello su set di dati nuovi che non sono più relativi ad un sistema chiuso (il mondo esporta verso sé stesso), ed eventualmente di comprendere quali siano le sue limitazioni.

Un altro fatto importante derivante dalla specializzazione del modello a livello locale è che quest'analisi ci fornisce la possibilità di eseguire dei confronti diretti tra delle quantità ben definite (i parametri liberi), per capire al meglio come è strutturata l'economia di un Paese rispetto ad un altro, cosa contribuisce maggiormente

³In questa analisi verranno studiati gli Stati membri del G7, cioè USA, Germania, Giappone, Francia, UK, Italia e Canada.

alla crescita e quali sono le sue potenzialità (potremo verificare se cambiando la struttura della network sarebbe potuto crescere di più).

Nell'ultima parte del lavoro cambieremo approccio, dedicandoci ad un'analisi della distribuzione delle merci nella network per cercare di caratterizzare uno Stato in base a come distribuisce gli investimenti sulle merci che esporta ed importa. Quest'analisi è un tentativo di formalizzare l'idea emersa nei più recenti modelli economici per cui l'economia di uno Stato sviluppato è contraddistinta da un'elevata differenziazione di prodotti piuttosto che da una specializzazione nella produzione in grandi quantità di pochi beni [16, 18, 29, 31]. Per fare questo definiremo una grandezza chiamata *genericità* rifacendoci al concetto di entropia utilizzata in teoria dell'informazione [30]: riusciremo così a caratterizzare in maniera più semplice le proprietà di uno Stato che erano emerse dalla fitness introdotta da Pietronero e collaboratori in [31], potendo cioè discriminare lo status economico (Stato sviluppato, in via di sviluppo o sottosviluppato) in base al valore assunto da questa quantità.

Dopo aver verificato che la genericità vista come un'entropia riesce a riprodurre gli stessi risultati mostrati in [31], procederemo col testare nuovamente il nostro modello dinamico di network definito in [19]: utilizzeremo tale modello per costruire un intero database sintetico con i dati di 90 Stati a partire dalle condizioni iniziali del 1962, e su di esso ripeteremo l'analisi della genericità effettuata sui dati reali. Da quest'ultima analisi emergerà chiaramente la capacità del nostro modello di riprodurre correttamente da un punto di vista qualitativo (ed anche quantitativo per gli Stati sviluppati) gli effetti osservati sui dati reali, rafforzando ulteriormente la validità delle scelte effettuate in tutta la sua costruzione.

Presentazione dei dati e del modello

2.1. NBER-UN database e classificazione dei prodotti

I dati utilizzati per costruire la network dei prodotti sono stati presi del database della NBER-UN [32] (*National Bureau of Economic Research - United Nations*), creato a partire dal dataset dell'UN-Comtrade (*United Nations Commodity Trade Statistics Database*) [33]. In esso vengono registrate ogni anno circa il 95% delle merci prodotte ed esportate a livello mondiale. Il database NBER-UN copre gli anni dal 1962 al 2000 ed è frutto di un lavoro di "bonifica" del dataset originario, in cui si è cercato di rendere congruenti i dati di export di ogni paese con quelli di import dei Paesi interessati.

La classificazione dei prodotti segue la codifica SITC Rev. 2 (*Standard International Trade Classification*), che consiste in un raggruppamento dei prodotti all'interno di circa 1300 classi rappresentative [34]. Ogni classe è identificata da un codice di 4 caratteri, in cui il primo indica la classe globale di appartenenza ed i successivi rappresentano via via sottoclassi più specifiche. Riportiamo di seguito alcuni esempi a titolo illustrativo:

- 0000: Food and live animals;
 -
- 1000: Beverages and tobacco;
 - 1100: Beverages;
 - * 1110: Non-alcoholic beverages, n.e.s.;
 - * 1120: Alcoholic beverages;
 - 1121: Wine of fresh grapes;
 - 1123: Beer made from malt;
 -
 - 1200: Tobacco;
 - * 1210: Tobacco unmanufactured, tobacco refuse;
 - 1211: Tobacco, not stripped;
 -
- 3000: Mineral fuels, lubricants and related materials;
 -

Con questa notazione, vengono dunque riportate per ogni anno le quantità (esprese in migliaia di dollari) di prodotti esportati da ciascun paese verso gli altri. Purtroppo per alcuni Paesi i dati disponibili non coprono tutto il periodo preso in considerazione. Questo problema non va ad inficiare l'analisi della network a livello globale, ma, come vedremo, può creare problemi nello studio della network di un singolo Stato. Per una spiegazione più accurata degli accorgimenti utilizzati nella creazione del database e dei problemi relativi ai dati si rimanda a [32].

Per il lavoro di analisi, abbiamo infine rielaborato il database NBER-UN tramite una procedura di coarse-graining, unendo in un'unica classe i prodotti caratterizzati dalle prime tre cifre di codice SITC identiche. In questo modo abbiamo ridotto a poco più di 300 le classi di prodotti disponibili (nel caso specifico dell'analisi dell'export a livello globale le classi rimaste ammontano a 226).

2.2. Modello ed equazioni per la dinamica

Come già accennato nell'introduzione, per simulare la dinamica all'interno della network dei prodotti dobbiamo utilizzare un sistema di equazioni differenziali stocastiche (SDE). L'equazione prende spunto da un modello introdotto per la prima volta da Bouchaud e collaboratori nel 2000 in un articolo [27] in cui si trattava il ben noto problema della distribuzione della ricchezza all'interno della società.

In quel caso i nodi della network sono identificati dalla variabile stocastica $Z_{i,t}$, rappresentativa della ricchezza di un ente (individuo o società) i -esimo ad un certo istante t . La sua evoluzione nel tempo è definita in primo luogo dal termine deterministico dell'interazione con gli altri nodi (j -esimi), rappresentato da una matrice di trasferimento J_{ij} , mentre per la componente stocastica si introduce un rumore gaussiano $\eta_{i,t}$ correlato solo nel tempo:

$$(2.2.1) \quad \frac{\partial Z_{i,t}}{\partial t} = \sum_{j \neq i} (J_{ij} Z_{j,t} - J_{ji} Z_{i,t}) + \eta_{i,t} Z_{i,t}$$

$$(2.2.2) \quad \langle \eta_{i,t_1} \eta_{j,t_2} \rangle = \delta_{ij} \frac{\sigma^2}{\tau} e^{-\frac{|t_2 - t_1|}{\tau}}$$

Successivamente l'equazione viene ripresa in mano dallo stesso Bouchaud recentemente nel 2014 in un articolo [27] in cui si affronta, in un contesto opportunamente semplificato, lo studio della crescita in un sistema complesso in assenza di drift. Il problema (di carattere economico ma estendibile facilmente ad altri ambiti [21, 22, 24, 25]) è quello di riuscire a capire fino a che punto sia conveniente investire capitali nella produzione di uno specifico bene piuttosto che ricercare guadagni in nuove direzioni con un trasferimento di risorse: vista la mancanza di un termine deterministico di drift la crescita infatti sarà determinata unicamente dall'organizzazione degli investimenti e dalle condizioni iniziali.

Possiamo notare che l'equazione 2.2.1, nel caso di un reticolo regolare d -dimensionale in cui $J_{ij} \equiv J$, è una versione discretizzata dell'equazione stocastica del calore

$$(2.2.3) \quad \frac{\partial Z(\vec{x}, t)}{\partial t} = J \nabla^2 Z(\vec{x}, t) + \eta(\vec{x}, t) Z(\vec{x}, t)$$

che sottoposta alla trasformazione di Cole-Hopf diventa la famosa equazione di Kardar-Parisi-Zhang per lo studio della crescita delle superfici [23]

$$(2.2.4) \quad Z(\vec{x}, t) = e^{h(\vec{x}, t)} \implies \frac{\partial h(\vec{x}, t)}{\partial t} = J \nabla^2 h(\vec{x}, t) + J \left(\vec{\nabla} h(\vec{x}, t) \right)^2 + \eta(\vec{x}, t)$$

ove $h(\vec{x}, t)$ ha il significato di altezza della superficie studiata.

Nel nostro caso (come in [19]), prendendo spunto da questo modello, si definisce un'equazione simile alla 2.2.1

$$(2.2.5) \quad \frac{\partial Z_{i,t}}{\partial t} = \sum_{j \neq i} (J_{ij} Z_{j,t} - J_{ji} Z_{i,t}) + (\eta_{i,t} + \mu_t) Z_{i,t}$$

in cui le Z_i rappresenteranno il valore degli export di un bene i -esimo e si introduce un termine deterministico aggiuntivo μ_t che rappresenta un drift che tiene conto della crescita media degli export (inflazione compresa).

Sarà inoltre necessario considerare una correlazione "spaziale" tra i nodi, per tener conto del problema che le diverse $Z_{i,t}$ possano risentire di fasi favorevoli o sfavorevoli alla crescita in maniera correlata. Per far questo dobbiamo modificare il rumore 2.2.2 sostituendo alla delta di Kronecker una matrice di correlazione d_{ij} che specificheremo in seguito.

$$(2.2.6) \quad \langle \eta_{i,t_1} \eta_{j,t_2} \rangle = d_{ij} \frac{\sigma^2}{\tau} e^{-\frac{|t_2-t_1|}{\tau}}$$

In 2.2.2 la forma diagonale sulle i, j era sufficiente perchè in quel caso non ci si pone il problema che le diverse $Z_{i,t}$ possano risentire di fasi favorevoli o sfavorevoli alla crescita in maniera correlata.

Per risolvere il sistema di equazioni sarà quindi necessario procedere con un'integrazione. Una soluzione analitica del problema non esiste, e dovremo di conseguenza sfruttare tecniche di calcolo numerico (spiegate e giustificate esaurientemente negli appendici A e B) per ricercare soluzioni approssimate del sistema di SDE che assume la forma

$$(2.2.7) \quad d\vec{Z}_t = (\mathbf{J} - \mathbf{J}^T)\vec{Z}_t dt + (\bar{\eta}_t + \mu_t)\vec{Z}_t dt$$

ove $\bar{\eta}_t$ è una matrice diagonale che ha per elementi gli $\eta_{i,t}$.

Nei paragrafi seguenti diamo una descrizione dettagliata degli elementi che compongono l'equazione e del processo seguito per ottenerli.

2.2.1. Ranking. Le classi di prodotti sembrano essere caratterizzate da un ordine nei valori assunti dalle $Z_{i,t}$ che si mantiene abbastanza regolare negli anni (figura 2.2.1): possiamo definire una sorta di "classifica" delle merci, collegata al valore che assumono le $Z_{i,t}$. La scelta operata è stata quella di valutare la frazione di merce esportata rispetto al totale di quell'anno, e di mediare queste frazioni nell'ultimo decennio (cioè nel periodo 1991-2000). Definiamo dunque il *ranking* della merce i -esima come:

$$(2.2.8) \quad z_i = \frac{1}{10} \sum_{n=29}^{38} \frac{Z_{i,n}}{\sum_{k=1}^{219} Z_{k,n}}$$

In questo modo i prodotti sono ordinati in base alla loro importanza nella network negli ultimi anni. Un primo risultato che si può ottenere dalla definizione del ranking delle merci lo si vede associando ad ogni merce un colore la cui lunghezza d'onda è proporzionale al ranking definito dalle z_i : in figura 2.2.1 si può notare come ci sia un effetto arcobaleno che viene mantenuto nel corso di tutti gli anni. Vi è l'eccezione di qualche bene (risaltano particolarmente quelli elettronici) che si distingue dagli altri per una crescita anomala e più rapida.

2.2.2. Matrice di correlazione. Nella caratterizzazione di una network di prodotti solitamente si usa un concetto di prossimità [18], basato sulle similitudini che intercorrono tra due beni nel senso di metodi e strutture di produzione. Ad esempio, mele e pere sono strettamente connesse in quanto necessitano di infrastrutture e processi di produzione simili, mentre petrolio e mele non lo sono. Qui invece è stato scelto di sostituire questa quantità con considerazioni legate al concetto di investimento: in questo modo si riesce a connettere anche prodotti che

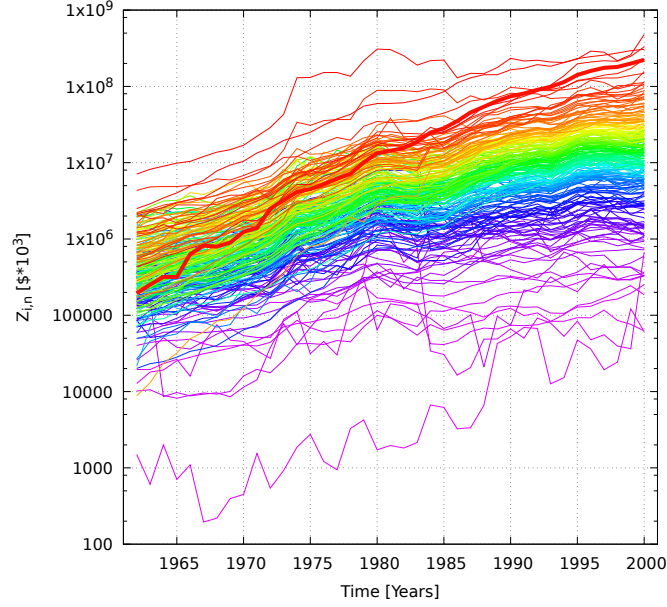


FIGURA 2.2.1. Evoluzione annuale degli export a livello globale dal 1962 al 2000. La linea spessa evidenzia le merci relative ai beni elettronici.

nella definizione di prossimità erano distanti. Infatti, ad esempio, per la produzione di mele e pere è necessario anche disporre di petrolio per il trasporto, e con tale scelta si riesce a tener conto di questa connessione. Il nuovo accoppiamento fra prodotti basato su queste considerazioni risulta più adeguato a descrivere fenomeni di crescita.

Per introdurre la matrice di correlazione dovremo innanzitutto definire una quantità conosciuta in finanza col nome di *ritorno logaritmico*¹

$$(2.2.9) \quad R_{i,n} = \log(Z_{i,n}/Z_{i,n-1})$$

Possiamo normalizzarla nel tempo definendo

$$(2.2.10) \quad r_{i,n} = \frac{R_{i,n} - \langle R_{i,n} \rangle_n}{\sqrt{\text{Var}(R_{i,n})_n}}$$

ove media e la varianza sono calcolate sugli anni, cioè definite come

$$(2.2.11) \quad \langle R_{i,n} \rangle_n = \frac{1}{38} \sum_{n=1}^{38} R_{i,n}$$

¹In finanza si utilizzano i ritorni logaritmici invece che i ritorni netti perché in questo modo qualsiasi sia il valore del ritorno il valore del prezzo corrispondente resta sempre positivo. Un altro motivo è dovuto al fatto che spesso i prezzi seguono nel tempo una distribuzione log-normale, ed un ritorno così definito seguirà di conseguenza una distribuzione gaussiana.

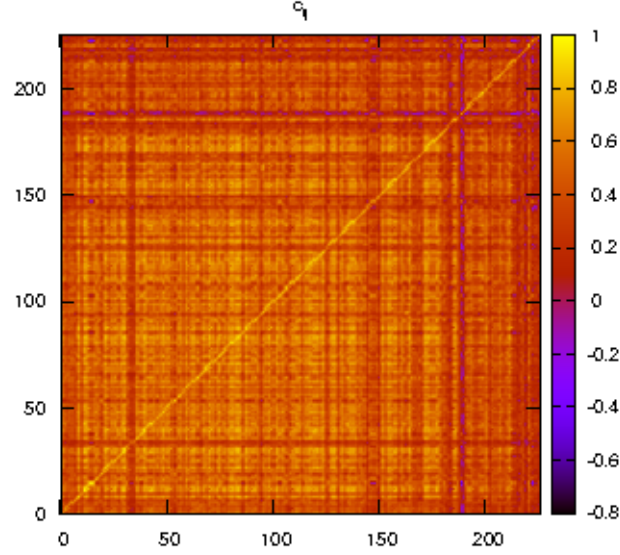


FIGURA 2.2.2. Matrice di correlazione c_{ij} per le 226 merci della network globale.

$$(2.2.12) \quad \text{Var}(R_{i,n})_n = \frac{1}{38} \sum_{n=1}^{38} R_{i,n}^2 - \left(\frac{1}{38} \sum_{n=1}^{38} R_{i,n} \right)^2$$

La traslazione rispetto al valor medio nel ritorno normalizzato è stata eseguita in quanto a seconda del bene considerato nel ranking i ritorni hanno valori assoluti diversi, ma quello che interessa a noi è quanto questi si discostano dal loro valor medio nel tempo.

Possiamo definire quindi una correlazione empirica tra due beni semplicemente come

$$(2.2.13) \quad c_{ij} = \frac{1}{38} \sum_{n=1}^{38} r_{i,n} r_{j,n}$$

Come vedremo nei paragrafi successivi, tale matrice verrà sfruttata sia per definire la matrice di trasferimento J_{ij} che per definire il rumore correlato $\eta_{i,n}$.

2.2.3. Matrice J_{ij} . In diverse applicazioni (si veda [27] e le citazioni al suo interno), la matrice di trasferimento è generalmente a corto raggio e riflette la regolarità del reticolo su cui è definita, cosicché tutte le Z_i siano equivalenti. Nel nostro caso ciò evidentemente non si verifica (basti considerare l'effetto arcobaleno illustrato in figura 2.2.1). Pertanto la matrice J_{ij} deve adeguarsi ad una network che non è regolare e svolgere l'importante ruolo di stabilire e mantenere nel tempo il ranking dei vari Z_i .

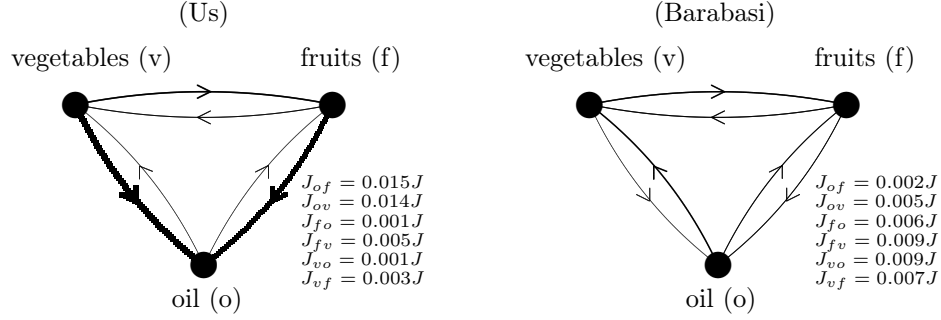


FIGURA 2.2.3. Matrice di trasferimento J_{ij} tra petrolio (o), verdure (v) e frutta (f) ottenuta col nostro modello di network e col modello di Barabasi [18]. Lo spessore delle linee è proporzionale al valore assunto da J_{ij} . Da questo confronto emerge la capacità del nostro modello di correlare prodotti che nella network di Barabasi sono distanti. Nel nostro modello è inoltre ben visibile l'asimmetria della matrice di trasferimento.

Per definire la matrice di trasferimento guardiamo intanto l'equazione 2.2.5 in assenza di rumore

$$(2.2.14) \quad \frac{\partial Z_{i,t}}{\partial t} = \sum_{j \neq i} (J_{ij} Z_{j,t} - J_{ji} Z_{i,t}) + \mu_t Z_{i,t} = \sum_j A_{ij} Z_{j,t} + \mu_t Z_{i,t}$$

ove è stata definita la matrice \mathbf{A} che ha come elementi $A_{ij} = J_{ij}$ per $i \neq j$ e $A_{ii} = -\sum_{j \neq i} J_{ji}$ sulla diagonale². Le soluzioni dell'equazione tendono dunque nel tempo ad un attrattore in cui il ranking è definito dal kernel della matrice \mathbf{A} stessa. Possiamo quindi sfruttare questo fatto scegliendo

$$(2.2.15) \quad J_{ij} \propto z_i$$

cosicché z_i sia nel kernel di \mathbf{A} . Con questa scelta, in media, il ranking di una soluzione dell'equazione 2.2.5 si avvicinerà al ranking dei dati reali stessi. Si noti come con questa scelta la matrice sia asimmetrica (per un esempio tra tre prodotti si veda la figura 2.2.3). In questo modo modo si tiene conto di un problema che si presenta per i prodotti connessi debolmente: se ad esempio l'export di mele aumenta, anche il petrolio (impiegato come carburante) comprato dai produttori di mele deve aumentare, mentre il contrario è comunque vero ma in misura minore.

L'equazione 2.2.5 con la scelta 2.2.15 ha inoltre la proprietà di essere consistente, almeno in senso medio, con il *modello gravitazionale* per la parte relativa alla massa. Tale modello è impiegato in economia [20] per predire una relazione positiva tra i flussi di commercio internazionale e l'ampiezza del Paese, misurata dal suo prodotto interno lordo, da un lato, e dalla distanza tra Paesi, dall'altro.

Per trovare una piena consistenza con questo modello è necessario dunque introdurre un concetto di distanza tra i prodotti, solitamente elusivo in ambito economico. Nel nostro caso, dovrebbe fornire una misura di quanto un prodotto sia

²Questa matrice è un analogo delle matrici di transizione definite nelle catene di Markov continue, in quanto ha somma nulla sugli elementi delle colonne [35].

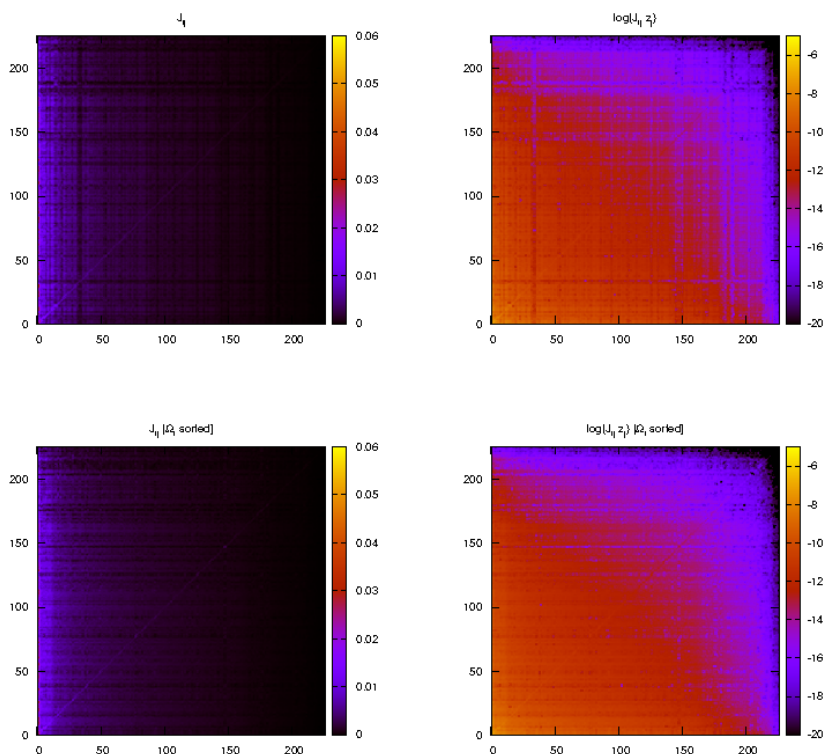


FIGURA 2.2.4. Matrici di trasferimento J_{ij} (a sinistra) e $\log [J_{ij} z_j]$ (a destra) con $G = 1$ a. Nelle figure in basso la matrice è stata ordinata in base alla connettività Ω_i di ciascun prodotto.

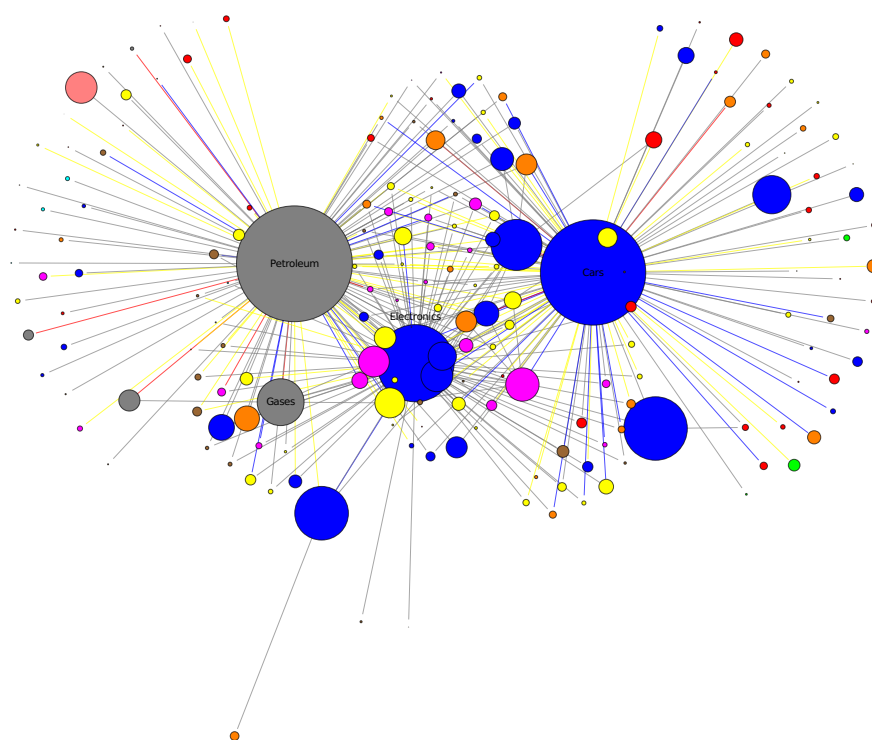
lontano da un altro nel senso di poter influenzare il suo export. Una possibilità è quella di utilizzare la matrice di correlazione empirica c_{ij} come un inverso della distanza: più alta sarà la correlazione più vicini saranno i prodotti e viceversa. La scelta di definizione della matrice di trasferimento ricade quindi su

$$(2.2.16) \quad J_{ij} = G z_i |c_{ij}|$$

ove G è una costante di accoppiamento, che dovrà essere determinata nella procedura di calibrazione del modello. La validità di questa scelta verrà mostrata più avanti con una comparazione con i dati empirici.

In figura 2.2.4 sono riportati i grafici delle matrici J_{ij} e $\log [J_{ij} z_j]$ nel caso in cui $G = 1$. Nei due grafici in basso le entrate delle matrici sono stati ordinati in base alla connettività di ogni prodotto i -esimo, definita come $\Omega_i = \sum_{k \neq i} J_{ik}$.

Infine in figura 2.2.5 riportiamo il grafo della network limitato alle merci connesse da un link definito (per $G = 1$) come $L_{ij} = (J_{ij} + J_{ji})/2$. Come si può notare ci sono due nodi dominanti (rappresentanti i prodotti relativi a petrolio ed automobili) ai quali sono connesse gran parte delle merci rimanenti.



■ Food and live animals	■ Beverages and tobacco
■ Crude materials, inedible, except fuels	■ Mineral fuels, lubricants and related materials
■ Animal and vegetable oils, fats and waxes	■ Chemicals and related products, n.e.s.
■ Manufactured goods classified chiefly by material	■ Machinery and transport equipment
■ Miscellaneous manufactured articles	■ Commodities and transactions not classified elsewhere in the SITC

FIGURA 2.2.5. Grafo della network globale dei prodotti. Sono riportati solo le connessioni con un peso $L_{ij} = (J_{ij} + J_{ji})/2 > 0.01$. La grandezza dei nodi è proporzionale al ranking della merce, mentre il colore è associato in base alle categorie di appartenenza definite dal codice SITC4 come mostrato in legenda. Il colore dei link dipende dal peso L_{ij} : grigio se $L_{ij} < 0.015$, giallo se $0.015 < L_{ij} < 0.0175$, blu se $0.0175 < L_{ij} < 0.02$ e rosso se $L > 0.02$.

2.2.4. Rumore. In gran parte dei modelli di crescita [27, 25] non è presente una correlazione tra i nodi, e si assume che il rumore abbia una forma simile a 2.2.2. Tuttavia definendo un rumore di questo tipo si trova che simulando la dinamica della network non si riesce a riprodurre quantitativamente un corretto sviluppo degli export. Per questo motivo è necessario cercare un'alternativa per rimpiazzare la delta di Kronecker con una matrice d_{ij}

$$(2.2.17) \quad \langle \eta_{i,t_1} \eta_{j,t_2} \rangle = d_{ij} \frac{\sigma^2}{\tau} e^{-\frac{|t_2-t_1|}{\tau}}$$

Il termine τ serve a parametrizzare la correlazione temporale, che si manifesta nella durata di una crisi o di un'opportunità da sfruttare, mentre σ caratterizza il peso della parte stocastica nella dinamica. Entrambi questi parametri saranno determinati nella procedura di calibrazione del modello.

Per quanto riguarda la scelta per la correlazione dei nodi, questa ricade in $d_{ij} = c_{ij}$, cioè nella stessa matrice di correlazione utilizzata in precedenza per definire la matrice di trasferimento. Anche in questo caso, la validità di tale scelta è verificata in ultimo dalla riproduzione dei dati quando si riproduce il modello calibrato.

Per la realizzazione di un rumore con queste caratteristiche utilizziamo un approccio ricorsivo, in quanto successivamente dovremo risolvere numericamente le equazioni discretizzandole nel tempo.

Occupiamoci innanzitutto della correlazione spaziale tra i nodi: sarà necessario produrre un rumore gaussiano $\xi_i(t)$ con media nulla e correlato secondo la matrice c_{ij} e non temporalmente, cioè tale che

$$(2.2.18) \quad \langle \xi_i(t) \rangle = 0$$

$$(2.2.19) \quad \langle \xi_i(t_1) \xi_j(t_2) \rangle = c_{ij} \delta(t_1 - t_2)$$

Per realizzare questo rumore è necessario partire da un rumore gaussiano scorrelato $\langle \tilde{\xi}_i(t_1) \tilde{\xi}_j(t_2) \rangle = \delta_{ij} \delta(t_1 - t_2)$ e decomporre la matrice \mathbf{C} in modo da trovare una sorta di "radice" che applicata al rumore scorrelato genera quello correlato. La decomposizione utilizzata in questo caso è una variante della decomposizione di Cholesky chiamata *decomposizione LDLT* (per una spiegazione approfondita dell'algoritmo si veda l'appendice C). Tale scomposizione consente di decomporre la matrice originaria nel prodotto di una matrice triangolare inferiore (\mathbf{L}) una diagonale (\mathbf{D}) e la trasposta della prima (\mathbf{L}^T), cioè

$$(2.2.20) \quad \mathbf{C} = \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^T$$

In questo modo scegliendo $\xi(t) = \mathbf{L} \mathbf{D}^{1/2} \tilde{\xi}(t)$ otteniamo un rumore che soddisfa anche le richieste di correlazione spaziale.

Bisogna comunque fare attenzione nell'implementare questa decomposizione al computer perché per quantità troppo piccole si può incorrere in errori di approssimazione che generano termini nulli o negativi nella diagonale. Nel nostro caso abbiamo una matrice \mathbf{C} di dimensioni 219×219 ed il problema si presenta a partire dal 39-esimo elemento (i vari Z_i erano stati ordinati in base al ranking, quindi i valori di d_{ii} sono decrescenti all'aumentare di i). La scelta operata è stata semplicemente quella di porre uguali a zero i termini successivi e completare la decomposizione, visto che i valori che avrebbero assunto tali termini sono comunque trascurabili.

Anno	I_t	Anno	I_t	Anno	I_t	Anno	I_t
1963	2.66	1973	9.01	1983	9.25	1993	7.15
1964	2.99	1974	13.85	1984	9.03	1994	8.29
1965	3.28	1975	13.75	1985	8.07	1995	8.46
1966	3.72	1976	11.47	1986	5.30	1996	7.26
1967	3.56	1977	12.15	1987	5.13	1997	6.94
1968	4.11	1978	10.85	1988	6.75	1998	6.83
1969	4.90	1979	12.53	1989	7.64	1999	5.26
1970	5.69	1980	16.70	1990	8.00	2000	5.44
1971	6.92	1981	13.27	1991	8.52		
1972	6.79	1982	11.28	1992	8.04		

TABELLA 1. Percentuale del tasso di inflazione globale dal 1963 al 2000.

Studiamo ora la correlazione temporale. Applichiamo la seguente trasformazione alle $\xi(t)$ ottenute in precedenza:

$$(2.2.21) \quad \begin{cases} \eta_i(t_0) = \frac{\sigma}{\sqrt{\tau}}\xi(t_0) \\ \eta_i(t) = \rho\eta_i(t-dt) + \sqrt{1-\rho^2}\frac{\sigma}{\tau}\xi_i(t) \end{cases}$$

ove t_0 rappresenta l'estremo inferiore dell'intervallo temporale su cui andremo ad integrare l'equazione e si è posto $\rho = e^{-dt/\tau}$.

Verifichiamo ora che un rumore così definito soddisfi 2.2.17, prendendo in esame il caso $t_1 = t$ e $t_2 = 0$ senza perdere di generalità in quanto la correlazione è invariante per traslazioni temporali. Sviluppiamo i due termini in questo modo:

$$(2.2.22) \quad \eta_j(0) = \frac{\sigma}{\sqrt{\tau}}\xi_j(0)$$

$$(2.2.23) \quad \begin{aligned} \eta_i(t) &= \rho\eta_i(t-t) + \sqrt{1-\rho^2}\frac{\sigma}{\tau}\xi_i(t) = \\ &= \rho\frac{\sigma}{\sqrt{\tau}}\xi_i(0) + \sqrt{1-\rho^2}\frac{\sigma}{\tau}\xi_i(t) \end{aligned}$$

ove in questo caso $\rho = e^{-t/\tau}$ e calcoliamo la loro correlazione

$$(2.2.24) \quad \begin{aligned} \langle \eta_i(t)\eta_j(0) \rangle &= \rho\frac{\sigma^2}{\tau} \langle \xi_i(0)\xi_j(0) \rangle + \sqrt{1-\rho^2}\frac{\sigma^2}{\tau} \langle \xi_i(t)\xi_j(0) \rangle = \\ &= \rho\frac{\sigma^2}{\tau} c_{ij} + \sqrt{1-\rho^2}\frac{\sigma^2}{\tau} c_{ij}\delta(t) \end{aligned}$$

che coincide con 2.2.17.

2.2.5. Drift ed inflazione. Il termine μ_t è la componente deterministica che contribuisce al tasso di crescita, presente per ogni export indipendentemente dall'esistenza dei trasferimenti della network. In linea di principio ogni merce dovrebbe avere il proprio tasso di crescita ed essere dipendente dal tempo, ma per limitare il numero di parametri utilizzati è stato scelto di considerare un rate medio di crescita $\bar{\mu}$ comune a tutti i prodotti e di restringere la dipendenza temporale alla componente inflativa I_t scrivendo

$$(2.2.25) \quad \mu_t = \bar{\mu} + I_t$$

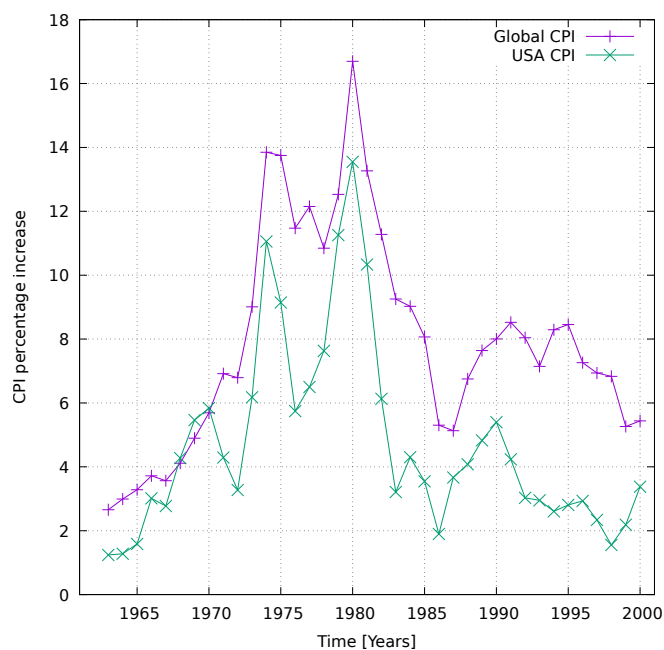


FIGURA 2.2.6. Inflazione globale e degli USA a confronto dal 1962 al 2000.

Questa assunzione è ragionevolmente compatibile con l'andamento storico dei prodotti osservato in figura 2.2.1.

Il modello si riduce così ad avere un unico parametro per la crescita dovuta ad input esterni, in quanto l'inflazione non è altro che una funzione a scalino con cadenza annuale di cui conosciamo i valori.

Si pone però il problema della scelta dell'inflazione da utilizzare, in quanto solitamente questa è una quantità che viene definita Stato per Stato. In linea di principio sarebbe quindi lecito utilizzare come inflazione rappresentativa l'inflazione dello Stato che nel corso degli anni studiati esporta più degli altri (cioè gli USA), e questo è quanto fatto in [19]. Tuttavia, prendendo spunto da un lavoro trovato su una rivista di economia [36] è stata definita una sorta di inflazione globale eseguendo una media ponderata delle inflazioni dei Paesi più importanti utilizzando come i pesi i prodotti interni lordi (GDP). Il risultato ottenuto è riportato graficamente in figura 2.2.6 e numericamente nella tabella 1.

$$(2.2.26) \quad I_t^{global} = \frac{\sum_{c \in \{countries\}} I_t^c \cdot GDP_t^c}{\sum_{c \in \{countries\}} GDP_t^c}$$

I dati per le inflazioni sono stati prese dalla banca dati della OECD (Organization for Economic Cooperation and Development), mentre quelli dei prodotti interni lordi dalla banca dati del World Bank Group [37, 38].

2.3. Integrazione e dinamica

Per risolvere l'equazione 2.2.5 è necessario procedere con un'integrazione numerica del sistema di SDE

$$(2.3.1) \quad dZ_{i,t} = \sum_{j \neq i} (J_{ij} Z_{j,t} - J_{ji} Z_{i,t}) dt + (\bar{\mu} + I_t + \eta_{i,t}) Z_{i,t} dt$$

con le quantità definite in precedenza.

Nell'ipotesi (verificata) in cui $dt \ll \tau$ diversi metodi di integrazione portano agli stessi risultati. La scelta ricade nell'interpretazione di Itô che è la più utilizzata in ambito economico (si veda l'appendice A per un confronto delle integrazioni secondo Itô e secondo Stratonovich).

Definendo un moto browniano a partire dal rumore gaussiano correlato

$$(2.3.2) \quad dW_{i,t} = \sqrt{dt} \xi_{i,t}$$

possiamo riscrivere il rumore $\eta_{i,t}$ come

$$(2.3.3) \quad \eta_{i,t} = \rho \eta_{i,t-dt} + \sqrt{1 - \rho^2} \frac{\sigma}{\sqrt{\tau}} dW_{i,t}$$

Sostituendo questo termine all'interno della SDE e separando la parte deterministica da quella stocastica troviamo

$$(2.3.4) \quad dZ_{i,t} = \left[\sum_{j \neq i} \left(J_{ij} \frac{Z_{j,t}}{Z_{i,t}} - J_{ji} \right) + \rho \eta_{i,t-dt} + \bar{\mu} + I_t \right] Z_{i,t} dt + \sqrt{1 - \rho^2} \frac{\sigma}{\sqrt{\tau}} Z_{i,t} \sqrt{dt} dW_{i,t}$$

Per integrare numericamente questa equazione esistono diversi metodi, che dipendono dal tipo di convergenza che si desidera ottenere e dal grado di precisione desiderata. Nel caso di SDE in finanza solitamente si predilige l'utilizzo di schemi realizzati per ottenere una buona convergenza debole perché quello che ci interessa è riprodurre *in media* la soluzione esatta più che la corretta riproduzione di una singola storia. La scelta, spiegata e motivata approfonditamente nell'appendice B, è ricaduta su un metodo di Runge-Kutta al II ordine adattato ai sistemi di SDE che fornisce sia una convergenza forte che una convergenza debole di ordine 1.

Seguendo tale metodo, definiamo i coefficienti $\vec{a}(t, \vec{Z}_t)$ per la componente deterministica e $\vec{b}(t, \vec{Z}_t)$ per quella stocastica

$$(2.3.5) \quad \vec{a}(t, \vec{Z}_t) = \left[\sum_{j \neq i} \left(J_{ij} \frac{Z_{j,t}}{Z_{i,t}} - J_{ji} \right) + \rho \eta_{i,t-dt} + \bar{\mu} + I_t \right] \vec{Z}_t$$

$$(2.3.6) \quad \vec{b}(t, \vec{Z}_t) = \sqrt{1 - \rho^2} \frac{\sigma}{\sqrt{\tau}} \sqrt{\Delta t} \vec{Z}_t$$

ove Δt è l'analogo del differenziale dt nel caso di una discretizzazione finita e rappresenta lo step di integrazione.

Indicando con $\{\vec{w}_n\}_{n=0,N}$ l'approssimazione valutata sui punti della partizione dell'intervallo di integrazione $[0, T]$, lo schema da seguire sarà dunque

$$(2.3.7) \quad \begin{cases} \vec{w}_0 = \vec{X}_0 \\ \vec{w}_{n+1} = \vec{w}_n + \frac{\vec{K}_{1,n} + \vec{K}_{2,n}}{2} \\ \vec{K}_{1,n} = \vec{a}(t_n, \vec{w}_n) \Delta t + \vec{b}(t_n, \vec{w}_n) (\Delta W_n - S_n \sqrt{\Delta t}) \\ \vec{K}_{2,n} = \vec{a}(t_{n+1}, \vec{w}_n + \vec{K}_{1,n}) \Delta t + \vec{b}(t_{n+1}, \vec{w}_n + \vec{K}_{1,n}) (\Delta W_n + S_n \sqrt{\Delta t}) \end{cases}$$

ove S_n è una variabile casuale che può assumere i valori ± 1 entrambi con probabilità $1/2$.

Metodi con ordini di convergenza superiori sono conosciuti, ma visto l'elevato numero (226) di equazioni da integrare il costo computazionale cresce rapidamente. Con questo schema, scegliendo uno step di integrazione $\Delta t = 1/1000$, il tempo necessario per eseguire una simulazione della dinamica è all'incirca di 8 secondi su un processore single-thread con velocità di clock di 3.1 GHz.

CAPITOLO 3

Calibrazione

Il modello sviluppato nel capitolo 2 per la network degli export è descritto da un sistema di SDE in cui sono presenti quattro parametri liberi: G , $\bar{\mu}$, σ e τ . Sarà dunque necessario trovare valori dei parametri consistenti con i dati empirici, che ci permettano di riprodurre i dati in maniera verosimile con il nostro modello.

Dividiamo l'equazione 2.3.4 per $Z_{i,t}$ senza esplicitare $\eta_{i,t}$ ricorsivamente

$$(3.0.1) \quad \frac{dZ_{i,t}}{Z_{i,t}} = \left[\sum_{j \neq i} \left(J_{ij} \frac{Z_{j,t}}{Z_{i,t}} - J_{ji} \right) + \eta_{i,t} + \bar{\mu} + I_t \right] dt$$

ed integriamo nell'intervallo $[n_1, n_2]$ ottenendo

$$(3.0.2) \quad \log \frac{Z_{i,n_1}}{Z_{i,n_2}} = \int_{n_1}^{n_2} \sum_{j \neq i} \left(J_{ij} \frac{Z_{j,t}}{Z_{i,t}} - J_{ji} \right) dt + \int_{n_1}^{n_2} (\eta_{i,t} + \bar{\mu} + I_t) dt$$

Per semplificare la scrittura, conviene definire le seguenti funzioni

$$(3.0.3) \quad f_i(n_1, n_2) = \frac{1}{n_2 - n_1} \left(\log \frac{Z_{i,n_1}}{Z_{i,n_2}} - \int_{n_1}^{n_2} I_t dt \right)$$

$$(3.0.4) \quad g_i(n_1, n_2) = \frac{1}{n_2 - n_1} \int_{n_1}^{n_2} \sum_{j \neq i} \left(z_i |c_{ij}| \frac{Z_{j,t}}{Z_{i,t}} - z_j |c_{ij}| \right) dt$$

ove si è sviluppato $J_{ij} = Gz_i |c_{ij}|$. In questo modo si può riscrivere 3.0.2 come

$$(3.0.5) \quad f_i(n_1, n_2) = Gg_i(n_1, n_2) + \bar{\mu} + \frac{1}{n_2 - n_1} \int_{n_1}^{n_2} \eta_{i,t} dt$$

Per il calcolo di g_i dobbiamo approssimare l'integrale con una sommatoria, in quanto le Z_i non sono una variabile continua ma hanno cadenza annuale. Scriviamo dunque

$$(3.0.6) \quad g_i(n_1, n_2) = \frac{1}{n_2 - n_1} \sum_{j \neq i} \sum_{n=n_1+1}^{n_2} \left[z_i |c_{ij}| \left(\frac{Z_{j,n-1}}{Z_{i,n-1}} + \frac{Z_{j,n}}{Z_{i,n}} \right) - z_j |c_{ij}| \right]$$

Definite queste funzioni, la procedura di calibrazione prosegue nell'ordine con la stima di G, σ, τ e $\bar{\mu}$.

3.1. Calibrazione di G

Per trovare G è sufficiente osservare che esso non è altro che il coefficiente angolare nell'equazione 3.0.5. Basta quindi calcolare tutte le coppie $f_i(n_1, n_2)$ e $g_i(n_1, n_2)$ facendo variare gli indici $i = 1, \dots, 219$, $n_1 = 0, \dots, 37$ e $n_2 = n_1 + 1, \dots, 38$ ed eseguire una regressione lineare.

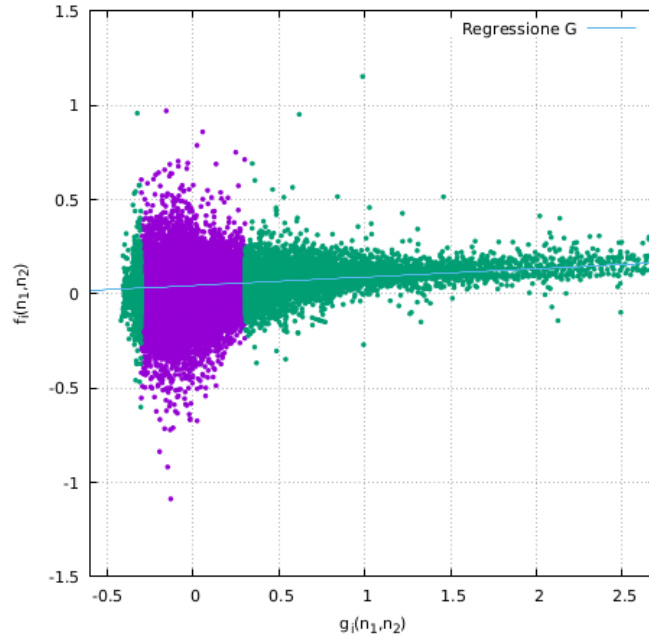


FIGURA 3.1.1. Calibrazione del parametro G . Scatter plot di $f_i(n_1, n_2)$ vs. $g_i(n_1, n_2)$, con $i = 1, \dots, 226$, $n_1 = 0, \dots, 37$ e $n_2 = n_1 + 1, \dots, 38$. In verde sono riportati il 10% dei punti con $|g_i|$ più grande, ed in viola il restante 90%. La linea blu rappresenta la regressione lineare $y = Gx + k$.

Il problema con questa procedura è che quando $|g_i|$ è troppo piccolo la componente stocastica del rumore non permette una corretta stima di G . Tramite simulazioni sintetiche di 39 anni a partire dalle stesse condizioni iniziali, con un valore di G fissato arbitrariamente, si verifica che limitando la regressione lineare a circa 1/10 dei punti con $|g_i|$ più alto si ritrova il valore corretto di G con un livello di confidenza del 10% (figura 3.1.1).

Visto l'elevato numero di dati¹ è necessario procedere con un algoritmo di ordinamento efficiente. La scelta è ricaduta sull'algoritmo quicksort, che ha una complessità media di $O(n \log n)$.

Il coefficiente angolare e l'intercetta ottenuti con questa regressione sono

$$(3.1.1) \quad G = 0.042 \pm 0.001 \text{ y}^{-1}$$

$$(3.1.2) \quad k = 0.044 \pm 0.001 \text{ y}^{-1}$$

3.2. Calibrazione di σ e τ

Questi ultimi due parametri vengono calibrati nella stessa procedura. Si sfrutta il fatto che la varianza dell'integrale del rumore è una funzione diretta di σ e τ .

¹Per I merci ed una finestra temporale di N anni le coppie di dati sono $K \frac{N(N-1)}{2}$. Con 226 merci e 39 anni troviamo dunque 167466 coppie.

Isolando il rumore nell'equazione 3.0.5 valutata nell'intervallo $[0, n]$ troviamo

$$(3.2.1) \quad \int_0^n \eta_{i,t} dt = n [f_i(0, n) - Gg_i(0, n) - \bar{\mu}]$$

e valutando la varianza scompare il termine costante $\bar{\mu}$

$$(3.2.2) \quad \text{Var} \left[\int_0^n \eta_{i,t} dt \right] = n^2 \text{Var} [f_i(0, n) - Gg_i(0, n)]$$

Il termine destro dell'equazione si ricava a partire dai dati, mentre il sinistro si può calcolare una forma esplicita. Ricordando che la varianza può essere espressa come differenza tra la media quadratica e la media al quadrato, troviamo che vale

$$(3.2.3) \quad \text{Var} \left[\int_0^n \eta_{i,t} dt \right] = \mathbb{E} \left[\left(\int_0^n \eta_{i,t} dt \right)^2 \right] - \mathbb{E} \left[\int_0^n \eta_{i,t} dt \right]^2$$

In primo luogo dimostriamo che l'aspettazione dell'integrale del rumore è identicamente nulla. Sfruttando la sua forma ricorsiva (equazione 2.2.21) troviamo che la sua aspettazione è

$$(3.2.4) \quad \begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_{n_1}^{n_2} \eta_{i,t} dt \right] &= \mathbb{E} \left[\int_{n_1}^{n_2} \left[\rho \eta_{i,t-dt} - \sqrt{1-\rho^2} \frac{\sigma}{\sqrt{\tau}} \xi_{i,t} \right] dt \right] \\ &= \rho \mathbb{E} \left[\int_{n_1}^{n_2} \eta_{i,t-dt} dt \right] - \sqrt{1-\rho^2} \frac{\sigma}{\sqrt{\tau}} \int_{n_1}^{n_2} \underbrace{\mathbb{E} [\xi_{i,t}]}_{=0} dt \\ &= \rho \int_{n_1}^{n_2} \mathbb{E} [\eta_{i,t-dt}] dt \end{aligned}$$

ove si è sfruttato il fatto che $\xi_{i,t} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ e quindi $\mathbb{E} [\xi_{i,t}] = 0$. Iterando il processo si arriva in ultimo a dover calcolare l'aspettazione del termine $\eta_{i,0} = \xi_{i,0} \rho \sigma / \sqrt{\tau}$ che è identicamente nulla sempre per lo stesso motivo. In definitiva si prova quindi che

$$(3.2.5) \quad \mathbb{E} \left[\int_{n_1}^{n_2} \eta_{i,t} dt \right] = 0$$

Studiamo ora l'altro termine presente nella varianza dell'integrale del rumore, esplicitando il quadrato:

$$(3.2.6) \quad \begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^n \eta_{i,t} dt \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\int_0^n \int_0^n \eta_{i,t} \eta_{i,t'} dt dt' \right] \\ &= \int_0^n \int_0^n \mathbb{E} [\eta_{i,t} \eta_{i,t'}] dt dt' \end{aligned}$$

e sfruttando la correlazione per il rumore 2.2.17 con $c_{ii} \equiv 1$ otteniamo

$$(3.2.7) \quad \mathbb{E} \left[\left(\int_0^n \eta_{i,t} dt \right)^2 \right] = \frac{\sigma^2}{\tau} \int_0^n \int_0^n e^{-\frac{|t-t'|}{\tau}} dt dt'$$

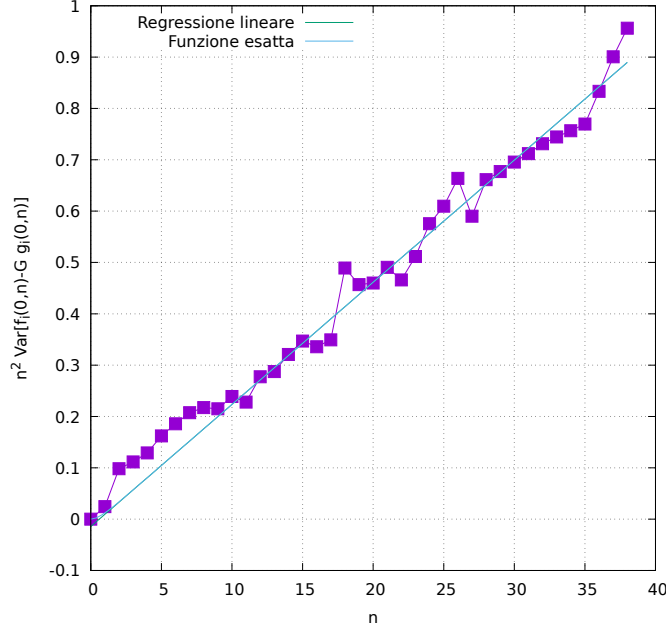


FIGURA 3.2.1. Calibrazione dei parametri σ e τ . Come si può vedere già dal primo anno è impossibile distinguere la retta della regressione lineare dalla funzione esatta che definisce la varianza.

Effettuiamo ora il cambio di variabile $t - t' = t''$ nell'integrale e scomponiamo il modulo nella parte positiva e negativa:

$$\begin{aligned}
 (3.2.8) \quad \mathbb{E} \left[\left(\int_0^n \eta_{i,t} dt \right)^2 \right] &= \frac{\sigma^2}{\tau} \int_0^n dt' \int_{-t'}^{n-t'} e^{-\frac{|t''|}{\tau}} dt'' \\
 &= \frac{\sigma^2}{\tau} \int_0^n dt' \left(\int_{-t'}^0 e^{\frac{t''}{\tau}} dt'' + \int_0^{n-t'} e^{-\frac{t''}{\tau}} dt'' \right) \\
 &= \sigma^2 \int_0^n dt' \left(2 - e^{-\frac{t'}{\tau}} - e^{-\frac{n-t'}{\tau}} \right) \\
 &= 2\sigma^2 \left[n + \tau \left(e^{-\frac{n}{\tau}} - 1 \right) \right]
 \end{aligned}$$

In definitiva abbiamo trovato che vale la relazione

$$(3.2.9) \quad n^2 \text{Var} [f_i(0, n) - G g_i(0, n)] = 2\sigma^2 \left[n + \tau \left(e^{-\frac{n}{\tau}} - 1 \right) \right]$$

Possiamo dunque calcolare a partire dai dati la quantità al primo membro e tramite una regressione estrapolare i valori di σ e τ (figura 3.2.1). Tuttavia eseguire un fit con una funzione di questa forma porta a problemi di convergenza perché con il metodo dei minimi quadrati si trovano diversi minimi relativi, e quindi il risultato della regressione dipende dai valori iniziali di test dei parametri.

Per ovviare a questo problema si nota che al crescere di n il termine esponenziale si riduce rapidamente, e la funzione si avvicina ad una retta

$$(3.2.10) \quad 2\sigma^2 [n + \tau (e^{-\frac{n}{\tau}} - 1)] \rightarrow_{n \gg \tau} 2\sigma^2 [n - \tau]$$

La regressione lineare ha il vantaggio di avere un unico minimo, per cui il risultato converge sempre allo stesso valore indipendentemente dalla scelta di test iniziale.

Il criterio utilizzato per definire la soglia oltre cui era lecito trascurare gli effetti dell'esponenziale è il seguente: si definiscono delle finestre temporali per la regressione con l'estremo inferiore variabile ed il superiore fisso al 38-esimo anno. Si procede dunque ad eseguire delle regressioni in cui si riduce la finestra aumentando di volta in volta di un anno l'estremo inferiore. La riduzione di questa finestra procede fino a che il valore assunto dalla regressione sull'estremo inferiore non si discosta per più dell'1% dal valore del dato reale.

Si trova che questa condizione è verificata già a partire dal dodicesimo anno, quindi si scartano solamente 13 valori dei 39 totali. I risultati della regressione sono:

$$(3.2.11) \quad \sigma = 0.109 \pm 0.002 \text{ y}^{-1/2}$$

$$(3.2.12) \quad \tau = 0.607_{-0.5}^{+0.4} \text{ y}$$

L'errore su τ è stato espresso in questo modo perché se effettuiamo delle simulazioni per la network troviamo che qualsiasi valore di τ compreso tra 0.1 ed 1 riproduce le stesse evoluzioni per le $Z_{i,t}$.

Dal grafico in figura 3.2.1 vediamo anche a posteriori che è praticamente impossibile distinguere la retta della regressione lineare dalla funzione corretta della varianza, quindi l'approssimazione effettuata risulta valida.

3.3. Calibrazione di $\bar{\mu}$

Il parametro $\bar{\mu}$ rappresenta il rate di crescita medio comune a tutte le merci. Una corretta stima di tale parametro dovrebbe permettere quindi di riprodurre la crescita media al termine dei 38 anni studiati.

Per definire la crescita media utilizziamo nuovamente la crescita logaritmica (utilizzata in precedenza per definire i ritorni annuali) in quanto gode della proprietà additiva. La crescita di una merce i -esima in un intervallo temporale $[T_1, T_2]$ sarà definita come:

$$(3.3.1) \quad \lambda_{i,T_2-T_1} = \frac{1}{T_2 - T_1} \log \frac{Z_{i,T_2}}{Z_{i,T_1}}$$

Potremo dunque definire la crescita media nell'intervallo temporale $[0, 38]$ per i dati reali come

$$(3.3.2) \quad \lambda_{38}^{real} = \frac{1}{38 \cdot 226} \sum_{i \in \text{merci}} \log \frac{Z_{i,38}^{real}}{Z_{i,0}^{real}} = 0.0889 \text{ y}^{-1}$$

L'obiettivo sarà quindi riprodurre correttamente questa quantità per i dati simulati, e per ottenere questa stima sarà necessario capire quale sia la crescita intrinseca della network in assenza di drift deterministici. Per questo motivo

definiamo la crescita privata dalla componente inflativa come

$$(3.3.3) \quad c_{38} = \lambda_{38} - \frac{1}{38} \int_0^{38} I_t dt$$

che per i dati reali vale $c_{38}^{real} = 9.77 \times 10^{-3} y^{-1}$.

Utilizzando le funzioni definite in precedenza per la calibrazione di G notiamo che la crescita così definita non è altro che la media della funzione f

$$(3.3.4) \quad c_{38} = \langle f_i(0, 38) \rangle$$

Se calcoliamo quindi questa quantità a partire dai dati reali troveremo proprio 3.3.2.

Sfruttando l'equazione 3.0.5 troviamo dunque che vale

$$(3.3.5) \quad c_{38}^{real} = G \langle g_i^{real}(0, 38) \rangle + \bar{\mu}$$

Per ottenere una stima di $\bar{\mu}$, procediamo con l'eseguire delle simulazioni in cui utilizziamo i parametri calibrati G , σ e τ imponendo $\bar{\mu} = 0$. Se identifichiamo con la tilde (\sim) le quantità relative a queste simulazioni, l'equazione che dovranno soddisfare sarà

$$(3.3.6) \quad \tilde{f}_i(0, 38) = G \tilde{g}_i(0, 38) + \frac{1}{38} \int_0^{38} \eta_t dt$$

che sostituita nell'equazione $\tilde{c}_{38} = \langle \tilde{f}_i(0, 38) \rangle$ ci da

$$(3.3.7) \quad \tilde{c}_{38} = G \langle \tilde{g}_i(0, 38) \rangle$$

Facendo infine la differenza tra le equazioni 3.3.5 e 3.3.7 troviamo quindi una relazione per $\bar{\mu}$:

$$(3.3.8) \quad \bar{\mu} = c_{38}^{real} - \tilde{c}_{38} + G (\langle \tilde{g}_i(0, 38) \rangle - \langle g_i^{real}(0, 38) \rangle)$$

Il termine fra parentesi è trascurabile in quanto dipende direttamente dalle differenze tra rapporti di $Z_{i,t}^{real}$ e $Z_{i,t}^{tilde}$ che assumono valori molto grandi, quindi in definitiva una buona approssimazione per $\bar{\mu}$ sarà data da

$$(3.3.9) \quad \bar{\mu} = c_{38}^{real} - \tilde{c}_{38}$$

Per stimare il corretto valore di \tilde{c}_{38} abbiamo quindi eseguito 100000 simulazioni con $\bar{\mu}$ identicamente nullo e mediato i valori, trovando

$$(3.3.10) \quad \tilde{c}_{38} = (3.46 \pm 0.05) \times 10^{-3} y^{-1}$$

che ci da in definitiva

$$(3.3.11) \quad \bar{\mu} = (6.31 \pm 0.05) \times 10^{-3} y^{-1}$$

Risultati analisi a livello globale

Il primo risultato che si ottiene dal modello formulato è la riproduzione tramite simulazioni della figura 2.2.1. Partendo dalle Z_i reali dell'anno 1962, utilizzando i valori dei parametri G , $\bar{\mu}$, σ e τ ottenuti nella procedura di calibrazione e l'inflazione globale I_t possiamo generare delle storie sintetiche di dati fino all'ultimo anno osservato, cioè il 2000.

I risultati di una simulazione (realizzata con step di integrazione $\Delta t = 1/1000$) sono riportati in figura 4.0.1: come si può notare non solo l'effetto arcobaleno è stato

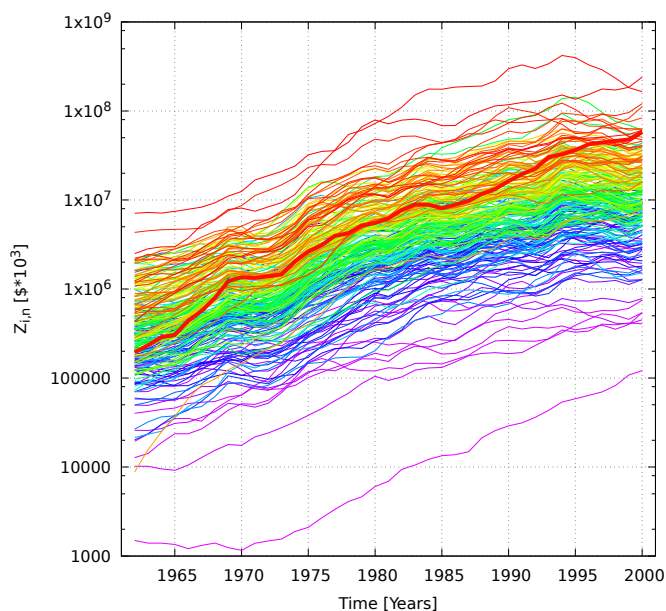


FIGURA 4.0.1. Simulazione dell'evoluzione degli export a livello globale a partire dai dati reali del 1962. La lunghezza d'onda dei colori è stata assegnata come in figura 2.2.1, e la linea più spessa evidenzia le merci relative ad i beni elettronici. I valori dei parametri utilizzati sono quelli ottenuti nella procedura di calibrazione, cioè: $G = 0.042 \text{ y}^{-1}$, $\bar{\mu} = 6.31 \times 10^{-3} \text{ y}^{-1}$, $\sigma = 0.109 \text{ y}^{-1/2}$ e $\tau = 0.607 \text{ y}$.

riprodotto, ma anche i prodotti che nel 1962 sono fuori dal ranking (come quelli elettronici) negli ultimi anni vengono attratti nella giusta posizione tramite una crescita anomala rispetto alla media (questo risultato viene analizzato quantitativamente nella sezione 4.1).

4.1. Riproduzione del ranking

Un modo per verificare la convergenza del raking delle soluzioni dell'integrazione numerica a quello dei dati reali è quello di valutare di anno in anno il *coefficiente di correlazione per ranghi di Spearman* r_s [39]. Questo coefficiente, a differenza del coefficiente di correlazione lineare di Pearson [40], asserisce l'esistenza di una correlazione monotona e non necessariamente lineare. Questa proprietà deriva dal fatto che per valutare la correlazione che intercorre tra due insiemi di elementi non si guarda il valore in sé assunto dalla variabile ma appunto il suo rango (in inglese rank).

I valori che può assumere il coefficiente di Spearman sono compresi tra -1 e +1:

- $r_s = +1$ indica una perfetta correlazione positiva nei ranghi, che dunque coincidono;
- $r_s = -1$ indica una perfetta correlazione negativa nei ranghi, che quindi sono esattamente l'uno l'opposto dell'altro;
- $r_s = 0$ indica una completa scorrelazione nei ranghi.

Definiti due insiemi di N elementi $\{X_i\}_{i=0\dots N}$ e $\{Y_i\}_{i=0\dots N}$, nel caso in cui il ranking sia costituito da numeri interi distinti la forma assunta dal correlatore è

$$(4.1.1) \quad r_s = 1 - \frac{6 \sum_i (\text{rg}(X_i) - \text{rg}(Y_i))^2}{n(n^2 - 1)}$$

ove con la funzione $\text{rg}()$ si indica il rango della variabile nel suo insieme di appartenenza.

Per verificare che il modello di network impiegato attragga nel tempo il ranking delle soluzioni dell'equazione $z_i^{\text{simul}}(t)$ ad il ranking dei dati reali z_i^{real} eseguiamo una serie di simulazioni con condizioni iniziali i dati del 1962 e confrontiamo anno per anno il ranking dei due insiemi ottenendo l'evoluzione nel tempo del correlatore r_s .

Come si può notare in figura 4.1.1 l'evoluzione di correlatore r_s tende nel tempo a mostrare una netta correlazione positiva (il fatto che r_s non sia esattamente 1 è dovuto semplicemente alle fluttuazioni), pertanto si prova che con questo modello si riescono a riprodurre correttamente anche le evoluzioni di merci che subiscono crescita anomala, che vengono attratte nella posizione di ranking corretta.

Sempre nella stessa figura viene riportata l'evoluzione del correlatore nel caso in cui si ponga $G = 0$: risulta evidente come in questo caso il correlatore tenda nel tempo a diminuire il suo valore avvicinandosi a 0, indicando l'assenza di una correlazione tra i due insiemi. Questo fatto fa comprendere quanto importante sia il ruolo della matrice di trasferimento J_{ij} nell'attrarre i dati iniziali al corretto ranking, e quindi giustifica ulteriormente la validità della sua costruzione.

L'analisi dell'evoluzione del coefficiente di correlazione di Spearman rivela inoltre una sorta di tempo caratteristico τ_s che in economia dovrebbe corrispondere alla risposta ad un'alterazione al ranking dei prodotti (che nel nostro modello corrisponde ad un cambiamento nella matrice di trasferimento J_{ij}). Infatti l'andamento

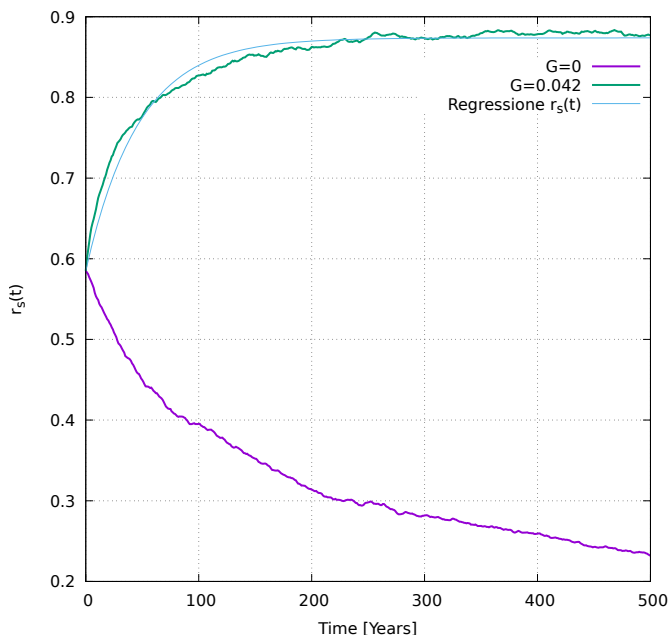


FIGURA 4.1.1. Evoluzione nel tempo del coefficiente di correlazione per ranghi di Spearman. Entrambe le linee verdi (G ottenuto dalla calibrazione) e viola ($G = 0$) sono state ottenute mediando 100 simulazioni fatte evolvere per un tempo di 500 anni (nel caso di singola simulazione troviamo che $r_s(t)$ fluttua intorno a questa curva). La linea azzurra rappresenta la regressione esponenziale che fornisce $\tau_s \simeq 47$ anni.

di $r_s(t)$ è molto ben approssimato dalla legge esponenziale

$$(4.1.2) \quad r_s(t) - r_s(\infty) = [r_s(0) - r_s(\infty)] e^{-t/\tau_s}$$

Possiamo stimare questo tempo caratteristico tramite una regressione, ottenendo

$$\tau_s = 46.7 \pm 0.5 \text{ y}$$

Questo risultato può essere interpretato pensando che un cambio strutturale nell'economia globale che consiste nel rimpiazzare i prodotti dominanti (ad esempio quelli richiesti per trasformare un'economia basata sul petrolio in una più ecosostenibile) richiede un tempo che è dell'ordine di alcune decine di anni.

Più in generale possiamo dire che con questo modello, a partire dalle medesime condizioni iniziali del 1962, ritroviamo un τ_s inversamente proporzionale rispetto a G a parità di valori per gli altri parametri.

4.2. Riproduzione della matrice di correlazione

Un altro risultato a favore della validità del modello riguarda la matrice di correlazione c_{ij} definita in 2.2.13. Possiamo infatti costruire una matrice c_{ij}^{simul} a posteriori su delle simulazioni numeriche. In figura 4.2.1 è raffigurato un confronto

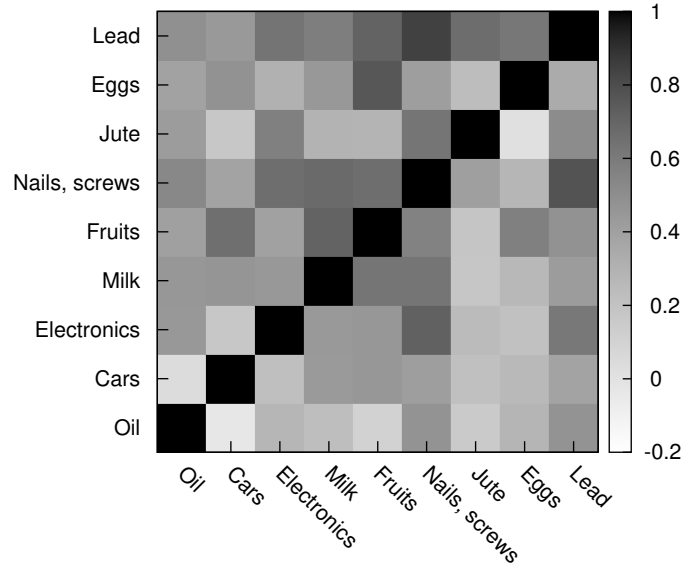


FIGURA 4.2.1. Confronto tra i correlatori ottenuti dai dati reali (sopra la diagonale) e tra i correlatori sintetici (sotto la diagonale) ottenuti mediando i dati di 20 storie generate a partire dai dati iniziali del 1962 utilizzando i parametri del modello calibrato. Le nove merci sono state ripartite equamente nella zona alta, media e bassa del ranking.

tra i correlatori stimati a partire dai dati storici e quelli ottenuti da simulazioni sintetiche.

Il confronto è stato eseguito su un sottoinsieme di 9 merci (petrolio, automobili, beni elettronici, latte, frutta, viti, iuta, uova e piombo) scelti in modo che i primi tre si collocassero nella zona alta del ranking, i secondi tre nella media e gli ultimi nella bassa.

Come si può evincere dalla figura vi è un'alta simmetria rispetto alla diagonale, che sta ad indicare che i dati simulati sono consistenti anche nella riproduzione di una matrice di correlazione sintetica c_{ij}^{simul} .

4.3. Crescita ottimale

Una peculiarità del modello di network descritto dall'equazione 2.2.5 è che la crescita osservata non è interamente dovuta al drift deterministico dato da $\mu_t = \bar{\mu} + I_t$. Infatti, in virtù della natura moltiplicativa dei termini dell'equazione, delle fluttuazioni stocastiche favorevoli a livello locale dovrebbero diffondersi più efficientemente nella network rispetto a quelle sfavorevoli.

Questo fatto è strettamente correlato al problema di decidere se sfruttare un'opportunità locale (di intensità media σ e di durata attesa τ) piuttosto che esplorare

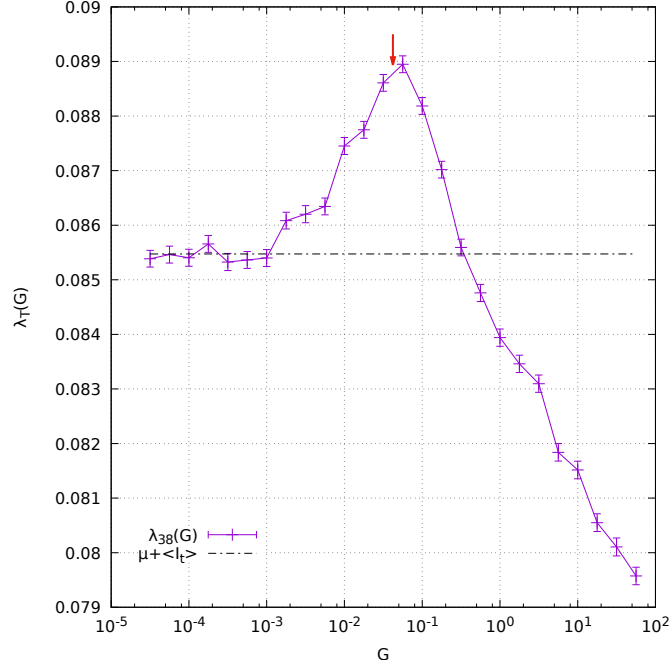


FIGURA 4.3.1. Tasso di crescita medio λ_{38} al variare del parametro G . La linea nera tratteggiata corrisponde al tasso di crescita medio deterministico $\bar{\mu} + \sum_{i=1}^{38} I_t/38$, mentre la freccia indica il valore calibrato $G = 0.042 \pm 0.001$ a partire dai dati reali. Per ciascun punto del grafico sono state eseguite 10000 simulazioni.

possibilità offerte da altri prodotti nella network trasferendo una porzione del valore locale (ad una velocità di trasferimento controllata da G) [27].

Definito il rate di crescita medio della network dal 1962 al 2000 come

$$(4.3.1) \quad \lambda_{38} = \frac{1}{38 \cdot 226} \sum_{i \in \text{merci}} \log \frac{Z_{i,38}}{Z_{i,0}}$$

viene quindi naturale chiedersi come questa vari in funzione del rate di trasferimento G . Fissati quindi i valori per $\bar{\mu}$, σ e τ ottenuti nella procedura di calibrazione, e partendo sempre dalle medesime condizioni iniziali del 1962, eseguiamo delle simulazioni variando di volta in volta il valore di G e osservando il rate di crescita media.

I risultati ottenuti sono riportati in figura 4.3.1. Per valori molto piccoli di G la crescita è unicamente dovuta ai contributi deterministici, infatti l'equazione 2.2.5 diventa

$$(4.3.2) \quad \frac{\partial Z_{i,t}}{\partial t} \xrightarrow{G \rightarrow 0} (\eta_{i,t} + \bar{\mu} + I_t) Z_{i,t}$$

che integrata tra 0 e 38 da

$$(4.3.3) \quad \log \frac{Z_{i,38}}{Z_{i,0}} = \int_0^{38} (\eta_{i,t} + \bar{\mu} + I_t) dt$$

Mediando sulle i la componente stocastica $\eta_{i,t}$ scompare e ritroviamo la crescita

$$(4.3.4) \quad \lambda_{38}|_{G=0} = \bar{\mu} + \frac{1}{38} \sum_{t=0}^{38} I_t \simeq 0.0855 \text{ y}^{-1}$$

che coincide con il drift deterministico sommato alla media dell'inflazione nel tempo.

All'aumentare del valore di G risulta evidente quindi come ci sia un aumento del tasso di crescita medio fino al raggiungimento di un punto di massimo, dopo il quale decresce arrivando addirittura a valori inferiori rispetto alla crescita data dalla componente deterministica. Questo effetto è dovuto a delle specificità delle condizioni iniziali, che implicano alcuni trasferimenti molto grandi nelle prime fasi della dinamica. Questo fenomeno infatti non si verifica se le condizioni iniziali sono di stato stazionario, come vedremo nella sezione successiva.

Un fatto peculiare che emerge da questa analisi è che il valore calibrato a partire dai dati reali $G \simeq 0.04 \text{ y}^{-1}$ si trova appena prima del punto di massimo: ciò fa pensare che la network globale si sia in qualche modo auto-organizzata per mettersi nelle condizioni migliori per la crescita sul periodo osservato di 39 anni.

Tenendo conto del peso medio dei link della matrice di trasferimento $\sum_{i \neq j} J_{ij}/N$, il valore assunto da G corrisponde ad un trasferimento medio annuale del 2% per ogni prodotto.

4.4. Crescita per $T \gg \tau_s$

Potremmo ora chiederci se l'analisi effettuata nella sezione precedente sia valida anche per tempi più grandi, per capire se a lungo termine il valore di G che ottimizza la crescita cambi o resti invariato.

Per effettuare simulazioni per tempi $T \gg \tau_s$ ovviamente non abbiamo a disposizione l'inflazione per gli anni futuri, quindi assumeremo che ogni anno vi sia un'inflazione pari all'inflazione media $\sum_{t=0}^{38} I_t/38 \simeq 0.079 \text{ y}^{-1}$.

In figura 4.4.1 è riportato (in verde) lo studio della curva $\lambda_{400}(G)$ a partire dalle condizioni iniziali dei dati reali del 1962. Il primo fatto che emerge è che la "campana" del punto di massimo si sia allargata ed alzata, permettendo quindi una maggiore crescita in generale indipendentemente dal valore di G . Dopodiché notiamo che la posizione del punto di massimo si sia spostata di quasi un ordine di magnitudine in avanti, indicando quindi una maggiore distanza dal massimo per il valore di G ottenuto calibrando la network globale.

Un altro fatto che emerge dall'analisi per $T = 400 \text{ y}$ è che per grandi valori di G la crescita non va più al di sotto del valore definito dalla componente deterministica, ma si assesta su di esso da valori superiori. Questo effetto si ritrova solitamente nello studio della crescita di network che partono da uno stato stazionario, infatti (se non vi sono grosse perturbazioni nel corso di tutto il periodo) ci si aspetta che dopo tempi molto lunghi una network raggiunga uno stato vicino a quello di stazionarietà.

Cerchiamo dunque le condizioni di stazionarietà per la crescita della network. Per trovarle dovremo ovviamente studiare il caso in assenza di drift deterministico, perché con un termine di drift è impossibile raggiungere uno stato stazionario. Valutando l'equazione della dinamica delle $Z_{i,t}$ 2.2.5 per $\mu_t = 0$ troviamo:

$$(4.4.1) \quad \frac{\partial \log Z_{i,t}}{\partial t} = \sum_{j \neq i} \left(J_{ij} \frac{Z_{j,t}}{Z_{i,t}} - J_{ji} \right) + \eta_{i,t}$$

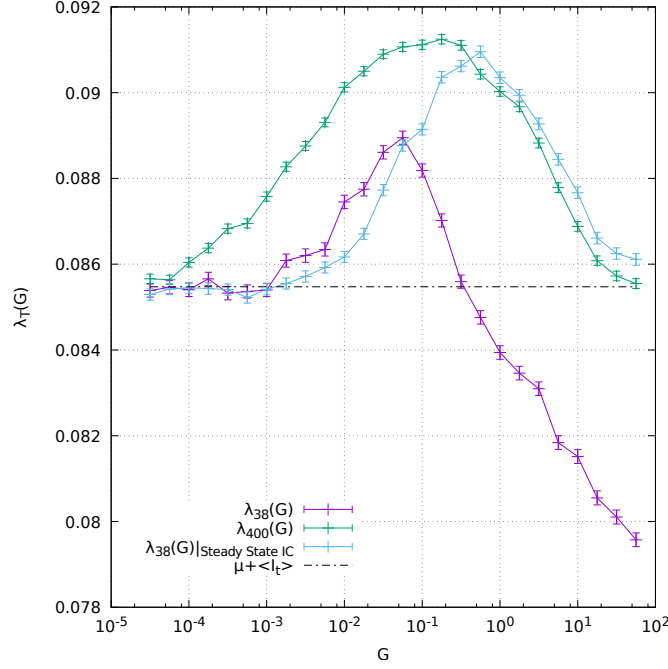


FIGURA 4.4.1. Confronto del tasso di crescita medio λ_T al variare del parametro G per $T = 38$ y (in viola) e $T = 400$ y (in verde) con le condizioni iniziali dei dati reali del 1962 e per $T = 38$ y con le condizioni iniziali di stato stazionario (in azzurro). La linea nera tratteggiata corrisponde al tasso di crescita medio deterministico $\bar{\mu} + \sum_{i=1}^{38} I_t/38$.

Mediando sulle i il termine stocastico $\eta_{i,t}$ scompare, dandoci

$$(4.4.2) \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \log Z_{i,t} \right\rangle = \left\langle \sum_{j \neq i} \left(J_{ij} \frac{Z_{j,t}}{Z_{i,t}} - J_{ji} \right) \right\rangle$$

A sinistra ritroviamo la crescita media non normalizzata, che in condizioni stazionarie dovrà essere nulla. Imponendo questa condizione troviamo che viene rispettata se

$$(4.4.3) \quad Z_{i,t} = \frac{\sum_{i \neq j} J_{ij} Z_{j,t}}{\sum_{i \neq j} J_{ji}}$$

che sono appunto le condizioni di stato stazionario.

Per trovare delle $Z_{i,t}$ così definite è sufficiente partire dalle condizioni iniziali del 1962 ed evolvere la network con il criterio

$$(4.4.4) \quad Z_{i,t} = \frac{\sum_{i \neq j} J_{ij} Z_{j,t-1}}{\sum_{i \neq j} J_{ji}}$$

fino a che i valori non convergono allo stato stazionario restando invariati nel tempo.

Partendo con le condizioni di stato stazionario così ottenute abbiamo studiato nuovamente la crescita λ_{38} al variare del parametro G , ottenendo la curva in azzurro

riportata in figura 4.4.1. Abbiamo così verificato l'idea che un'evoluzione per tempi lunghi possa approssimare gli effetti di un regime di stato stazionario: in analogia al caso studiato per $T \gg \tau_s$ ritroviamo infatti che il punto di massimo è spostato in avanti di un ordine di grandezza, ed inoltre che per grandi valori di G la crescita non va al di sotto della linea definita dal drift deterministico.

Il motivo per cui le due curve differiscono per valori piccoli di G è probabilmente dovuto alla relazione di proporzionalità inversa che intercorre tra G e τ_s : per G piccoli un tempo $T = 400 \text{ y}^{-1}$ non sarà più sufficientemente grande per questo tipo di analisi. D'altra parte per valori di G grandi (corrispondenti ad un τ_s piccolo) troviamo infatti un accordo tra la curva generata per a partire da condizioni stazionarie e quella valutata con $T = 400 \text{ y}^{-1}$.

Analisi per Stato singolo

Il database NBER-UN da cui sono stati presi i dati storici utilizzati per la formulazione e la calibrazione del modello di evoluzione degli export a livello globale contiene ovviamente al suo interno anche i dati relativi ai singoli Stati [32]. Più precisamente sono riportati annualmente sia i dati degli export di uno Stato verso il resto del Mondo che gli import dal Mondo verso quello Stato. In questo capitolo ci proponiamo dunque di capire se il modello di network sviluppato a livello globale sia o meno adattabile al caso di Stato singolo e di comprendere eventualmente quali siano i suoi limiti di applicabilità: ci attendiamo che un'applicazione effettuata con successo possa permettere in primo luogo di caratterizzare le network di singolo Stato in base ai valori assunti dai parametri liberi (G , $\bar{\mu}$, σ e τ), così da avere delle basi su cui effettuare un confronto diretto.

Procediamo dunque con la costruzione di una network caratteristica di ogni Stato, sia per gli import che per gli export, i cui nodi saranno identificati dalle variabili $Z_{i,t}^{c,I}$ e $Z_{i,t}^{c,E}$ (ove l'apice c sta per "country", mentre I ed E identificano rispettivamente l'import e l'export).

In figura 5.0.1 è riportato un esempio di confronto delle network di import ed export per gli USA: per la costruzione la medesima procedura di coarse graining eseguita per i dati dell'analisi a livello globale (3 cifre di codice SITC) è stata

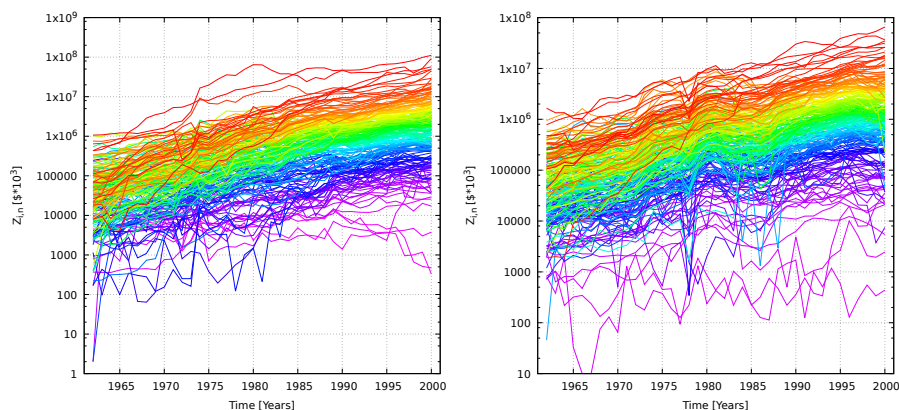


FIGURA 5.0.1. Confronto tra le network di import (figura a sinistra) ed export (figura a destra) degli USA tra il 1962 ed il 2000. La lunghezza d'onda del colore con cui sono riportati i dati di ogni merce è proporzionale alla sua posizione nel ranking.

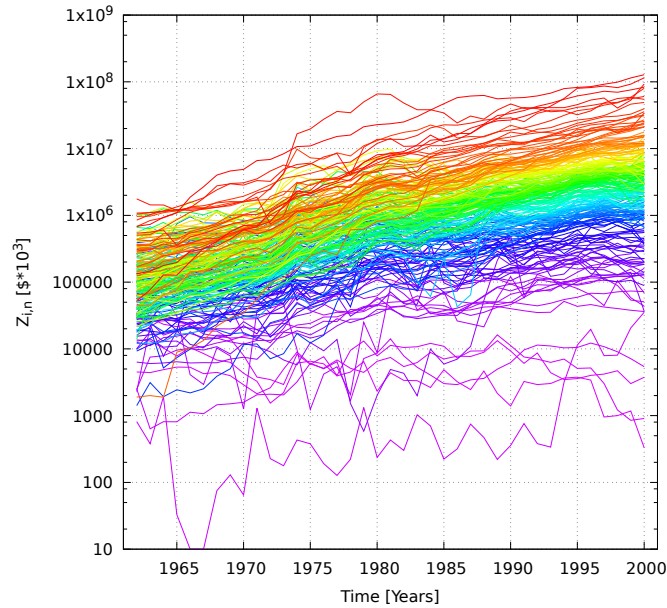


FIGURA 5.0.2. Network di unione import+export degli USA tra il 1962 ed il 2000.

effettuata in entrambe le network, riducendo il numero di classi di merci a 202 per l'import ed a 221 per l'export.

Purtroppo però con questo tipo di analisi si cominciano ad incontrare alcuni ulteriori problemi con i dati. Capita infatti di imbattersi in buchi temporali in cui mancano interamente i dati di un Paese per qualche anno, rendendo impossibile effettuare l'analisi dello Stato. Un altro problema in cui si incorre spesso è l'assenza dei dati di una merce singola per qualche anno, il che causa dei buchi nel grafico con delle $Z_{i,t} = 0$ per qualche t : queste merci vanno quindi rimosse, e non vengono considerate per tutti i 38 anni di analisi.

L'analisi degli Stati con dei dati buoni può risultare comunque compromessa da un numero troppo basso di merci "sopravvissute" alla scrematura e per questo motivo abbiamo deciso di costruire una network caratteristica di ogni Stato che contenga al suo interno sia i contributi dati dall'import che dall'export (figura 5.0.2), i cui nodi saranno dati da

$$(5.0.1) \quad Z_{i,t}^c = Z_{i,t}^{c,I} + Z_{i,t}^{c,E}$$

Il fatto di considerare la somma tra import ed export di un paese per costruire la relativa network è giustificata inoltre dal fatto che sommando su tutti i paesi si riottiene (a meno di un fattore 2) il set di dati utilizzati in precedenza nell'analisi degli export aggregati a livello globale.

Un'altra ragione a supporto di questa scelta è che intuitivamente essa dovrebbe descrivere meglio le caratteristiche proprie di uno Stato, in quanto congloba al

suo interno tutte le merci che circolano nello Stato indipendentemente dalla loro provenienza.

5.1. Network degli Stati studiati

La scelta per le nazioni su cui effettuare l'analisi è ricaduta sul gruppo degli Stati membri del G7, che comprendono: USA, Giappone, Germania¹, Francia, UK, Italia e Canada².

Nella tabella 1 sono riportati il numero di classi di prodotti delle network di import ed export per ciascuno Stato, ed anche il numero di classi risultanti dall'unione delle due.

Nelle figure 5.1.1, 5.1.2 e 5.1.3 sono riportate le evoluzioni delle network di Import-Export per ogni Stato del G7 sempre nel periodo 1962-2000 (il grafico per gli USA è nella figura 5.0.2).

Sulle network di singolo Stato potremo seguire dunque una procedura di calibrazione del modello dinamico analoga a quella eseguita per la network Globale, così da trovare i valori dei parametri che le caratterizzano e quindi eseguire un confronto tra i parametri.

¹Per la Germania, si intende per il periodo 1962-1990 la Repubblica Federale Tedesca (BRD), e per il periodo 1991-2000 la Germania riunificata.

²L'intenzione iniziale era di studiare tutti i Paesi del G8 che comprende anche la Russia, ma mancando per intero i dati dell'import dal 1992 al 1995 l'analisi viene eccessivamente compromessa ed abbiamo quindi scelto di non effettuarla.

	USA	Giappone	Germania	Francia	UK	Italia	Canada
Import	201	212	219	220	205	217	101
Export	221	201	221	219	219	225	218
Import+Export	224	220	224	222	221	221	219

TABELLA 1. Numero di merci disponibili per l'analisi delle network di singolo Stato.

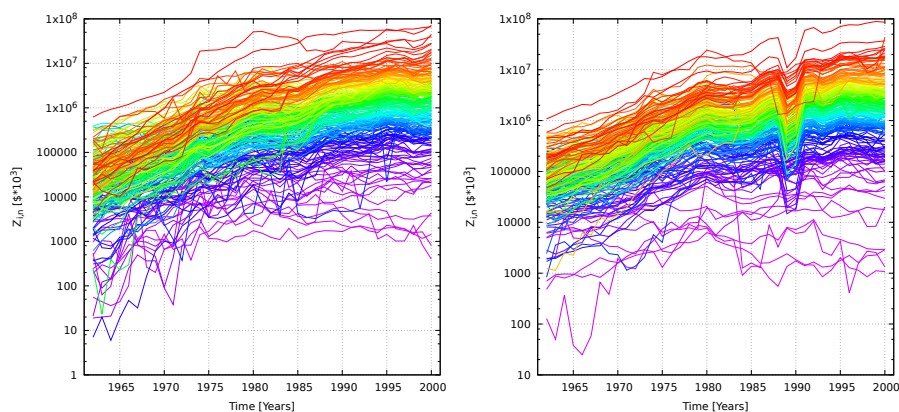


FIGURA 5.1.1. Network import+export per il Giappone (a sinistra) e la Germania (a destra).

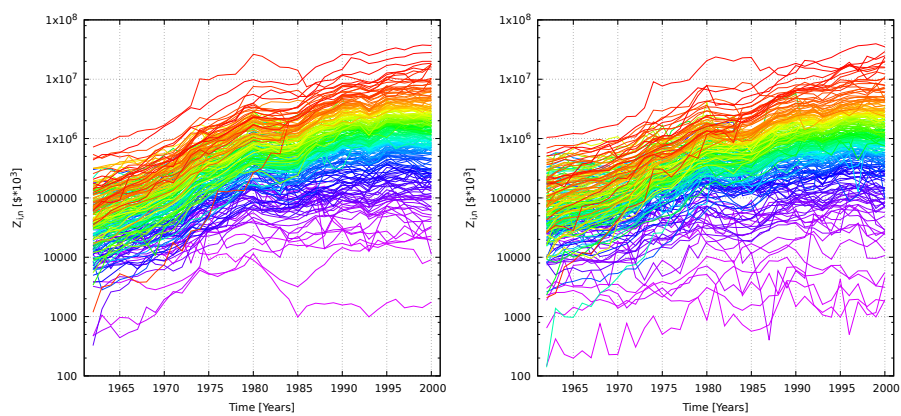


FIGURA 5.1.2. Network import+export per la Francia (a sinistra) e l'UK (a destra).

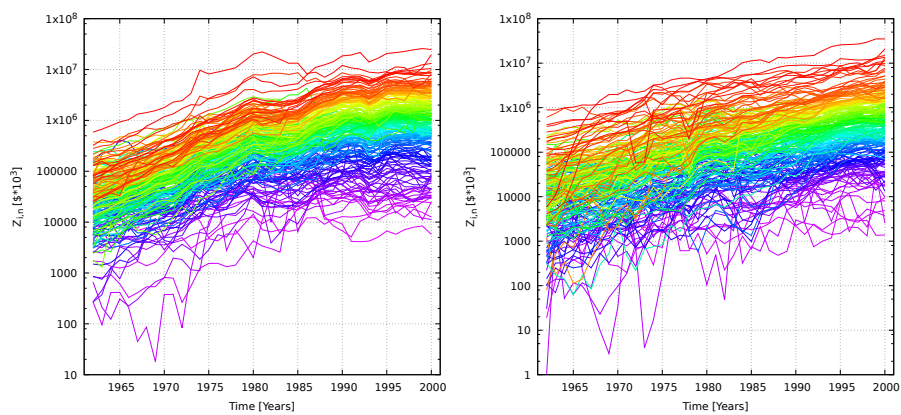
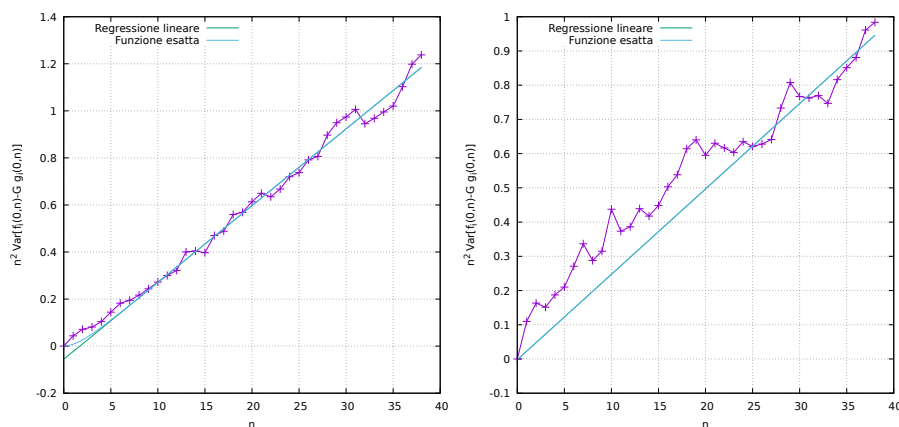


FIGURA 5.1.3. Network import+export per l'Italia (a sinistra) e il Canada (a destra).

	G^c [y^{-1}]	$\bar{\mu}^c$ [y^{-1}]	σ^c [$y^{-1/2}$]	τ^c [y]
Mondo	0.042 ± 0.001	$(6.31 \pm 0.05) \times 10^{-3}$	0.109 ± 0.002	$0.607^{+0.4}_{-0.5}$
USA	0.034 ± 0.001	$(2.25 \pm 0.07) \times 10^{-3}$	0.153 ± 0.005	2.64 ± 2.67
Giappone	0.011 ± 0.001	$(2.33 \pm 0.01) \times 10^{-2}$	0.203 ± 0.009	5.5 ± 3.6
Germania	0.023 ± 0.001	$(4.28 \pm 0.04) \times 10^{-3}$	0.137 ± 0.001	1.67 ± 0.48
Francia	0.042 ± 0.001	$(3.53 \pm 0.07) \times 10^{-3}$	0.128 ± 0.001	1.70 ± 0.58
UK	0.035 ± 0.001	$(-1.192 \pm 0.001) \times 10^{-2}$	0.18 ± 0.01	12.7 ± 3.9
Italia	0.068 ± 0.002	$(7.67 \pm 0.09) \times 10^{-3}$	0.112 ± 0.004	0.09 ± 3.6
Canada	0.007 ± 0.001	$(1.40 \pm 0.01) \times 10^{-2}$	0.188 ± 0.001	1.02 ± 0.65

TABELLA 2. Risultati delle calibrazioni delle network di Stato singolo.

FIGURA 5.2.1. Calibrazione dei parametri σ^c e τ^c per la Francia (a sinistra) e per l'Italia (a destra). Come si può vedere nel caso dell'Italia la varianza assume valori troppo elevati nei primi anni.

5.2. Calibrazione dei modelli per le network di Stato singolo

Per ogni network di singolo Stato possiamo eseguire una procedura di calibrazione analoga a quella fatta per la network a livello globale, ottenendo dunque i valori dei parametri G^c , $\bar{\mu}^c$, σ^c e τ^c che permettono di riprodurre al meglio l'evoluzione temporale della network relativa al Paese tramite storie sintetiche.

Nella tabella 2 riportiamo i valori (con i relativi errori) dei quattro parametri ottenuti per ciascuno Stato durante le procedure di calibrazione.

Osservando i valori si può subito notare come gli errori per il parametro τ^c siano molto alti. Questo fatto è dovuto ad un problema che insorge nella procedura di calibrazione dei parametri σ e τ in network in cui gli export presentano fluttuazioni troppo elevate nei primi anni osservati.

Se prendiamo in esame uno dei casi più patologici che è quello dell'Italia (con un errore relativo per τ^{Italia} di circa 40 volte il valore del parametro³) ed il caso migliore che è quello della Francia (con un errore relativo del 30%), si trova che i valori per la

³Questi errori permetterebbero al parametro di assumere anche valori negativi, privi di senso per un tempo caratteristico.

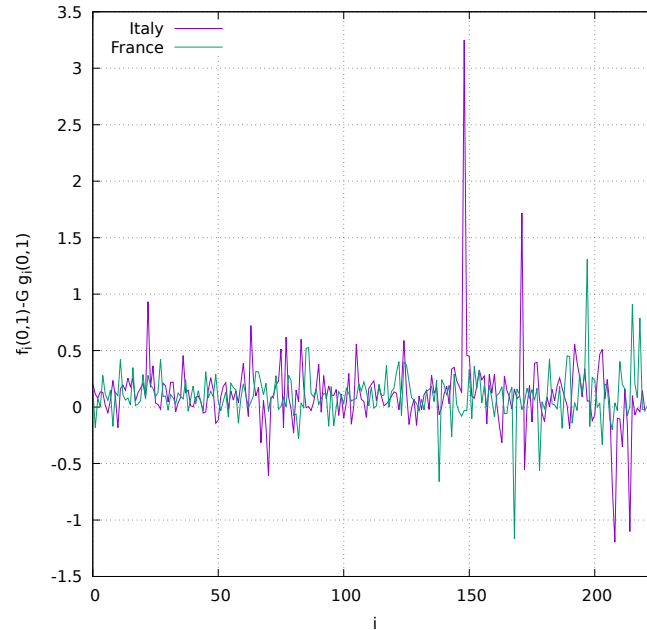


FIGURA 5.2.2. Confronto tra le quantità $(f_i(0,1) - Gg_i(0,1))$ valutate merce per merce tra Italia e Francia. Come si vede facilmente le fluttuazioni nel caso dell'Italia sono molto più alte che nel caso della Francia.

varianza dell'integrale del rumore definita nell'equazione 3.2.9 assumono nel primo caso valori abbastanza elevati rispetto alla tendenza definita dagli anni successivi (figura 5.2.1 a destra).

Sembra infatti che le varianze abbiano subito una sorta di traslazione verso l'alto che andando avanti col tempo sparisce per ritornare ad assumere i valori attesi. Questo è principalmente dovuto ad un eccesso di fluttuazioni di anno in anno nella fase iniziale dell'evoluzione dell'Italia, riportata in figura 5.1.3 a sinistra.

Possiamo giustificare questo fatto riportando su un grafico il confronto della quantità $(f_i(0,1) - Gg_i(0,1))$ tra Italia e Francia: questo termine (a meno dei termini di drift deterministico e di crescita intrinseca della network) ci da una misura delle fluttuazioni a cui sono sottoposte tutte le merci dal 1962 al 1963. Calcolandone la varianza si ritrova infatti l'integrale del rumore utilizzato nei grafici in figura 5.2.1 per la stima di σ^c e τ^c .

In figura 5.2.2 viene riportato tale confronto, e risulta chiaro come nel caso dell'Italia le fluttuazioni siano più alte.

Si presume che questo fatto sia principalmente dovuto ad un problema di correttezza dei dati riportati, in quanto nell'analisi a livello globale questi problemi si fanno sentire meno a causa della mole superiore di dati considerati, ed infatti non incidono sulla procedura di calibrazione.

Per eliminare questo problema sarebbe necessario eseguire un'analisi di questo

	Mondo	USA	Germania	Giappone	Francia	UK	Italia	Canada
\tilde{c}_{38}^c	3.89%	5.51%	3.24%	5.90%	5.22%	6.69%	6.34%	7.01%
$\bar{\mu}^c$	7.09%	2.61%	4.96%	21.39%	4.04%	-16.45%	8.27%	13.99%
$\frac{1}{38} \int_0^{38} I_t dt$	89.02%	91.88%	91.80%	72.71%	90.74%	109.76%	85.39%	79.00%

TABELLA 3. Contributi in percentuale alla crescita totale λ_{38}^{real} di ogni Stato.

genere ed a posteriori rimuovere di volta in volta le merci che presentano picchi troppo elevati nelle fluttuazioni, ma una procedura del genere ridurrebbe ulteriormente il numero di classi di merci studiate allontanandolo ancor di più dalla situazione reale. Una soluzione potrebbe essere l'introduzione di qualche altro parametro nel modello, che possa tener conto di questi effetti e migliorare la procedura di calibrazione di σ e τ , ma questo cambierebbe la struttura del modello e richiederebbe di reimpostare tutto lo studio su altre basi.

Per quanto riguarda gli altri parametri notiamo che σ^c non varia di molto da Stato a Stato, ed assume valori che vanno nell'intervallo di $[0.1, 0.2] y^{-1/2}$, con il minimo dato nel caso del Mondo ed il massimo dato dal Giappone. Questo fatto è in accordo col discorso fatto in precedenza per la varianza, in quanto ci aspettiamo che gli effetti causati dall'assenza di dati si facciano sentire meno nella network globale in quanto attenuati dall'elevato numero di Stati che la compongono.

I valori del parametro G^c invece non si discostano molto dal valore ottenuto per il Mondo, e rientrano tutti all'interno della campana del picco di massimo nel grafico di figura 4.3.1 per l'ottimizzazione della crescita della network globale. Nella sezione 5.4 riprodurremo questa curva per ogni Stato, così da poter vedere quanto il valore di G^c di ciascun Paese si discosti dal suo valore di ottimizzazione.

L'ultimo parametro da considerare è $\bar{\mu}^c$, che verrà studiato in dettaglio nel paragrafo seguente.

5.3. Crescita delle network di singolo Stato

Per la calibrazione di $\bar{\mu}^c$ è necessario stimare in primo luogo la crescita intrinseca della network \tilde{c}_{38}^c tramite la generazione di storie sintetiche in cui si pongono nulli i drift deterministici. In figura 5.3.1 a sinistra riportiamo un grafico in cui in ascissa sono presenti gli Stati studiati⁴ ed in ordinata i relativi valori di crescita intrinseca della network.

Per avere un termine di confronto abbiamo anche riportato il caso globale studiato in precedenza: come si può notare i valori di tutti i \tilde{c}_{38}^c sono dello stesso ordine di grandezza di quello globale, quindi da questo punto di vista possiamo dire che le network sono abbastanza simili.

I valori più alti osservati appartengono a Canada e Giappone, infatti se guardiamo la crescita media dell'import-export reale dei Paesi (cioè il parametro $\lambda_{38}^{real,c}$, riportato nel grafico a destra di figura 5.3.1) si vede per l'appunto che sono questi i due Paesi che hanno riportato nel 2000 una crescita media superiore rispetto alle condizioni iniziali del 1962.

⁴Gli Stati sono ordinati (in scala logaritmica) in base alla frazione di quantità totale di merce importata ed esportata rispetto a quella globale, mediata nell'ultimo decennio 1991-2000.

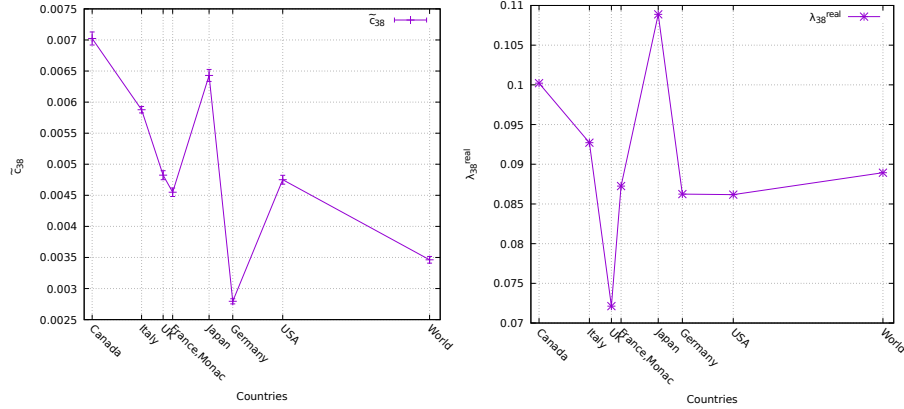


FIGURA 5.3.1. Confronto delle \tilde{c}_{38}^c (a sinistra) e dei λ_{38}^{real} (a destra). Gli Stati sono stati ordinati (in scala logaritmica) secondo la frazione di merci importate ed esportate rispetto a quella globale.

Ricordando che le componenti che contribuiscono alla crescita totale sono

$$(5.3.1) \quad \lambda_{38}^{real,c} = \underbrace{\tilde{c}_{38}^c}_{\text{crescita intrinseca}} + \underbrace{\bar{\mu}^c + \frac{1}{38} \int_0^{38} I_t dt}_{\text{drift deterministico}}$$

è bene notare che le \tilde{c}_{38}^c sono circa un ordine di grandezza al di sotto della componente deterministica, che è evidentemente quella dominante.

Per esplicitare questo fatto riportiamo nella tabella 3 quanto rispettivamente ogni componente dell'equazione 5.3.1 contribuisce in percentuale alla crescita totale $\lambda_{38}^{real,c}$.

Il fatto di avere un valore di $\bar{\mu}^c$ negativo per l'UK è probabilmente dovuto alle condizioni iniziali del 1962, caratterizzate da una quantità totale di import-export più elevata rispetto a quella degli altri Paesi in quell'anno. Partendo da queste condizioni, l'UK non è comunque riuscito a sfruttare al meglio le relazioni di import-export col resto del Mondo, realizzando una crescita inferiore rispetto agli altri Paesi nonostante una buona organizzazione intrinseca della network (figura 5.3.1).

5.4. Crescita ottimale per le network di Stato singolo

Come fatto in precedenza per la network globale (figura 4.3.1), possiamo studiare la crescita al variare del parametro G^c per vedere quanto il valore ottenuto dalla calibrazione si discosti dall'atteso picco di massimo.

Nel grafico di figura 5.4.1 abbiamo riportato il calcolo della crescita totale $\lambda_{38}^c(G)$ della network di ogni Stato analizzato, realizzato eseguendo 5000 simulazioni per stimare ciascun punto di ogni curva. Le frecce indicano dove si colloca la network reale relativa allo Stato, cioè i punti con coordinate i valori calibrati di G^c e le crescite $\lambda_{38}^{c,real}$ valutate sui dati reali.

La prima cosa che notiamo è le curve presentano tutte la stessa struttura trovata nel caso di network globale (riportata anche qui col colore viola per un confronto):

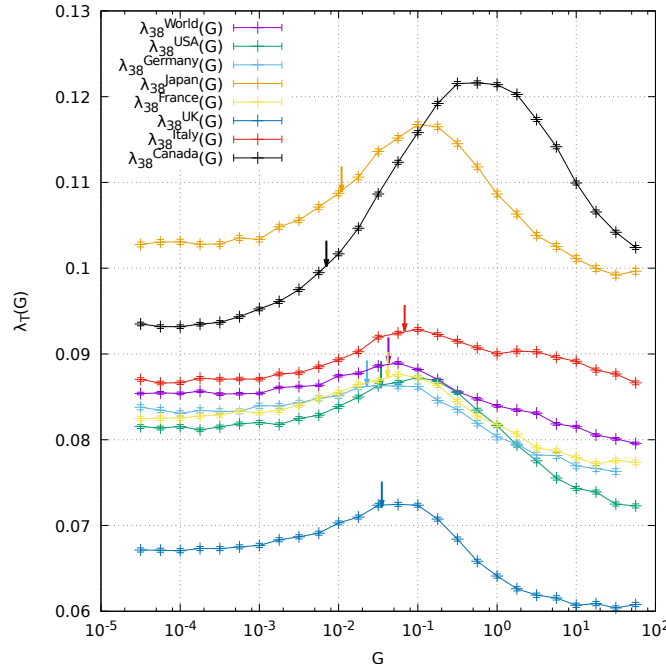


FIGURA 5.4.1. Studio della crescita totale λ_{38}^c in funzione del parametro G^c . Le frecce indicano per ciascuno Stato la situazione della network reale con in ascissa il valore calibrato di G^c ed in ordinata il valore di $\lambda_{38}^{c,real}$.

si parte da G piccoli con una crescita data dalla componente deterministica $\bar{\mu}^c + \sum_{t=1}^{38} I_t/38$, procedendo dunque verso un chiaro punto di massimo individuato da valori di G nel range $0.05 \div 0.5 \text{ y}^{-1}$, e terminando infine con valori di crescita inferiori a quella data dalla componente di crescita deterministica per valori di G grandi. In quest'ultima fase l'unica eccezione è il Canada, che resta comunque al di sopra di tale valore, probabilmente grazie al fatto che parte da delle condizioni iniziali vicine al suo stato stazionario.

Per poter eseguire meglio un confronto trasliamo verso il basso le curve togliendo la parte di crescita data dalla componente deterministica. Ciò che resta è quindi la crescita intrinseca della network che in precedenza era stata definita come $\tilde{\lambda}_{38}^c$ (grafico di figura 5.4.2).

Emerge subito come ogni network sia caratterizzata da una potenziale crescita massima differente, con il Canada (caso migliore) che presenta un picco circa 10 volte più alto rispetto a quello dell'UK (caso peggiore). Un altro Stato con un buon potenziale è il Giappone: questi due Paesi sono infatti quelli che nel periodo 1962-2000 hanno riportato la crescita totale λ_{38}^c più ampia (figura 5.3.1), ed è noto che nel contesto mondiale della seconda metà del XX secolo siano state due realtà emergenti che allo stato attuale si sono ormai consolidate (infatti rientrano nel gruppo degli Stati membri del G7). Se inoltre osserviamo i grafici per l'evoluzione delle $Z_{i,t}^c$ (per il Giappone figura 5.1.1 a sinistra e per il Canada figura 5.1.3 a destra) notiamo come numerose merci di alto ranking presentino delle condizioni iniziali

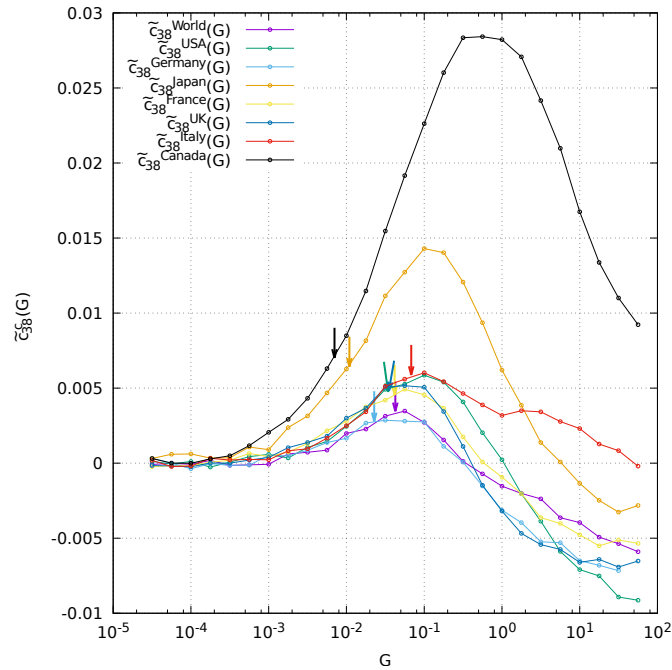


FIGURA 5.4.2. Studio della crescita intrinseca della network (in assenza di drift deterministico) \tilde{c}_{38}^c in funzione del parametro G^c . Le frecce indicano per ciascun Stato la situazione della network reale con in ascissa il valore calibrato di G^c ed in ordinata il valore di $\tilde{c}_{38}^{c,real}$. Non abbiamo riportato le barre d'errore per facilitare la lettura del grafico (sono comunque riportate nel grafico di figura 5.4.1).

fuori ranking con $Z_{i,1962}^c$ basse, e che subiscono un brusco aumento che le porta ad attraversare la fascia centrale verso l'alto. Ciò è anche in accordo con i risultati della calibrazione del parametro libero σ^c riportati in tabella 2, infatti notiamo che Canada e Giappone presentano i valori più alti nell'insieme dei Paesi osservati: il fatto di avere un'evoluzione con fluttuazioni elevate, coniugato ad una buona organizzazione dei trasferimenti della network, permette una migliore "diffusione" di eventi casuali favorevoli (fluttuazioni positive) rispetto agli eventi sfavorevoli (fluttuazioni negative) che vengono contenuti e limitati.

Per quanto riguarda gli altri Paesi (USA, UK, Germania, Francia ed Italia), troviamo invece un'ampiezza del picco leggermente superiore ma dello stesso ordine di grandezza di quella riportata dalla network globale. D'altra parte per questi ultimi paesi riconosciamo la stessa capacità di auto-organizzazione riscontrata nella network globale che consiste in una vicinanza del valore calibrato di G^c al picco di massimo, mentre il valore di G^c di Canada e Giappone sono circa due ordini di grandezza più piccoli del punto relativo al picco: ciò lascia trasparire il fatto che questi due Stati abbiano attuato una politica economica troppo conservativa, che non gli ha permesso di sfruttare al meglio le possibilità di crescita che gli erano state date dalle condizioni iniziali ed i parametri della loro network. Un fattore che è

invece comune a tutti gli Stati è il fatto che il valore calibrato di G^c , lontano o vicino che sia, è sempre e comunque inferiore al punto relativo al massimo: questo fatto sta ad indicare la strutturazione di un'economia più conservativa che rischiosa, nel senso che si riscontra la tendenza delle network di prediligere un prudente sfruttamento delle risorse piuttosto che il reinvestimento in nuove direzioni (il punto di massimo corrisponde infatti al compromesso ottimale tra "explore-exploit" ricercato in [27]).

5.5. Correlazione tra le network di Stato e la network Globale

Un'altra analisi che possiamo effettuare per confrontare le network di singolo Stato con quella globale si basa su un confronto tra le posizioni delle merci nei ranking delle network.

Analogamente a quanto fatto per la network globale, possiamo definire per ogni Paese un ranking z_i^c come

$$(5.5.1) \quad z_i^c = \frac{1}{10} \sum_{n=29}^{38} \frac{Z_{i,n}^c}{\sum_{k=1}^{219} Z_{k,n}^c}$$

Un'idea per eseguire il confronto sarebbe quella di calcolare il coefficiente di correlazione di Spearman r_s tra i due ranking: se la network di uno Stato è simile a quella globale ci attendiamo un valore per r_s prossimo ad 1.

Tuttavia un confronto così diretto non è possibile effettuarlo, in quanto le network di singolo Stato possono avere un numero diverso (minore) di merci dalla network globale, ed r_s può essere valutato solamente tra due insiemi con lo stesso numero di elementi.

Per eseguire il confronto è quindi necessario effettuare un'intersezione tra i due ranking selezionando solamente le merci presenti in entrambe le network.

Questa analisi viene fatta direttamente a partire dai dati del database, quindi possiamo facilmente implementarla per tutti i Paesi presenti nel database.

Nel grafico di figura 5.5.1 sono riportati in ordinata il coefficiente di correlazione di Spearman tra le network di singolo Stato e quella globale, mentre in ascissa la frazione di merce esportata ed importata da un Paese rispetto a quella globale (in scala logaritmica): nella parte destra del grafico saranno collocati gli Stati che contribuiscono di più all'economia globale, mentre a sinistra ci saranno quelli meno importanti.

Emerge chiaramente una disposizione lungo una fascia diagonale, in accordo con l'idea che più un Paese risulti importante nell'economia del Mondo più mostri una network simile a quella globale.

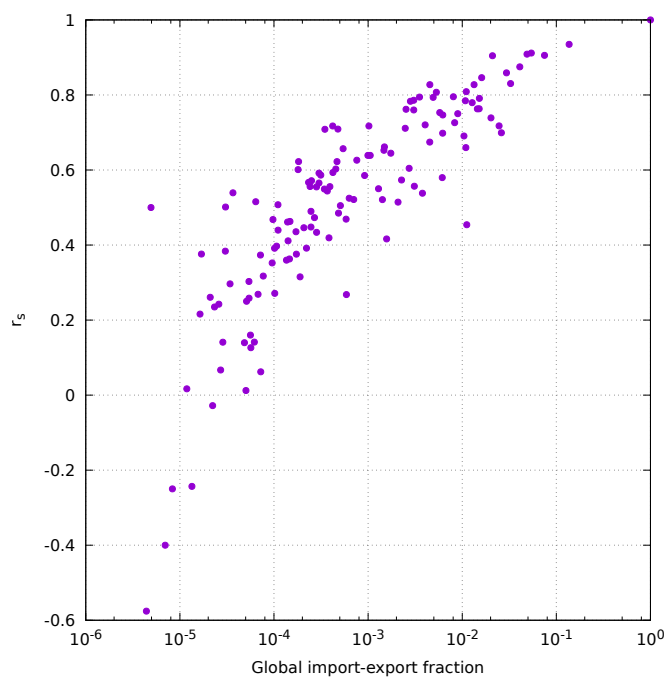


FIGURA 5.5.1. Coefficiente di correlazione per ranghi di Spearman in funzione della frazione di merce esportata ed importata da uno Stato rispetto a quella globale.

Prospettive di crescita di uno Stato

Le analisi effettuate nel capitolo precedente ci permettono di capire come la network di import-export di uno Stato sia organizzata in base alla calibrazione sui dati reali secondo l'equazione 2.2.5. Un altro approccio per studiare la network di prodotti può derivare dallo studio della distribuzione del valore assunto dalle $Z_{i,t}^c$ ogni anno.

L'idea di base è che la network di un Paese ben sviluppato sia organizzata in modo da avere un numero totale di merci simile a quella globale (che ne ha 226) e che al contempo non vi sia una sproporzione troppo elevata tra le merci che occupano un posto alto nel ranking e le altre.

Per distinguere una "buona" network (relativa ai Paesi sviluppati) da una "cattiva" bisognerà quindi tenere conto non solo della quantità totale di merci esportate ed importate, ma sarà necessario definire una quantità che permetta di distinguere i Paesi in cui gli investimenti delle merci sono ben ripartiti da quelli che invece fanno affidamento su un numero ristretto di beni (ad esempio, Arabia Saudita ed Iraq esportano una grande quantità di merci, ma il contributo dominante è dato dai prodotti strettamente legati al petrolio).

In questo capitolo ci occuperemo quindi in un primo momento dello studio della distribuzione degli investimenti nei prodotti, cercando poi di capire quale quantità si possa definire per distinguere le network in base al criterio appena illustrato, ed infine di trovare un modo per ricollegare quest'analisi al modello di network iniziale.

6.1. Distribuzione del ranking delle merci z_i a livello globale

Studiamo prima a titolo esemplificativo il caso della network globale, così da introdurre tutti gli strumenti necessari ad analizzare le distribuzioni delle merci nelle network di Stato singolo.

Per avere un'idea di come siano distribuiti gli investimenti sulle merci studiate, possiamo calcolare la quantità

$$(6.1.1) \quad S_n = \sum_{i=1}^n z_i$$

che non è altro che l'investimento cumulativo normalizzato (le z_i sono i ranking definiti in 2.2.8) delle prime n merci. In una situazione in cui gli investimenti sono equamente distribuiti uno si aspetta una relazione lineare $S_n \propto n$, in quanto ogni merce contribuirà con la stessa quantità di investimento. Quello che si ritrova è invece la situazione in figura 6.1.1: sono evidenti degli "scalini" nella funzione che stanno ad indicare dei grandi salti dovuti a delle merci con un alto numero di ranking, che quindi dominano rispetto alle altre.

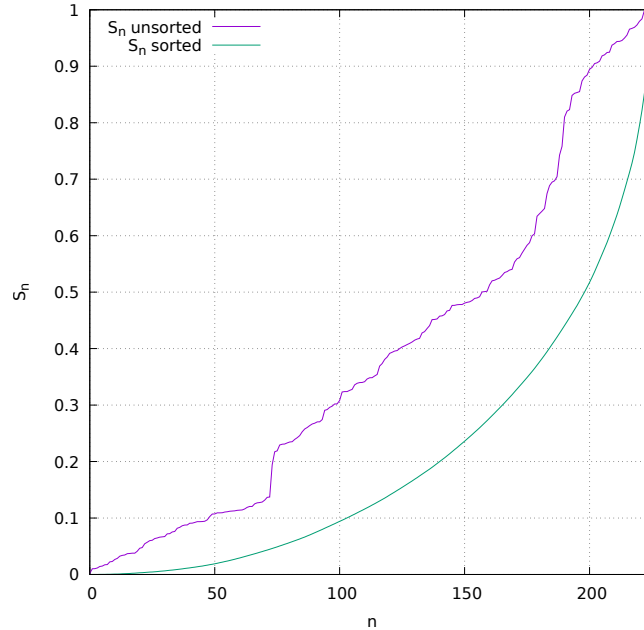


FIGURA 6.1.1. Investimento cumulativo calcolato sui ranking delle 226 merci della network a livello globale. Nella curva viola le merci non seguono nessun ordine particolare (sono ordinate in base al codice SITC) mentre nella curva verde sono ordinate in ordine crescente di ranking.

Sempre in figura 6.1.1 è riportata la curva cumulativa calcolata sulla medesima lista di merci ordinata però in base al ranking. Quello che si ottiene è una curva che sembra seguire una legge di potenza ben definita.

Questo fatto ci fa intuire che la distribuzione delle merci in base agli investimenti possa seguire una *distribuzione di Pareto*, descritta dalla funzione di densità di probabilità

$$(6.1.2) \quad f_Z(z) = \begin{cases} \frac{\alpha z_m^\alpha}{z^{\alpha+1}} & z \geq z_m \\ 0 & z < z_m \end{cases}$$

ove z_m rappresenta il valore minimo che può assumere la variabile casuale Z e α è quello che viene chiamato *indice di Pareto* e caratterizza l'ampiezza delle code della distribuzione per z grandi (si veda ad esempio [22]).

La distribuzione di Pareto si ritrova spesso in ambito economico, infatti inizialmente era stata introdotta per spiegare il ben noto fenomeno di distribuzione della ricchezza tra la popolazione (il 20% della popolazione detiene l'80% della ricchezza) [26], ma ritrova applicazioni anche nelle dinamiche di popolazione (esistono poche grandi città e tanti piccoli paesi [41]), cluster di condensati di Bose-Einstein a temperature prossime allo zero assoluto [42], in astrofisica con la grandezza dei meteoriti (tanti piccoli e pochi molto grandi) etc...

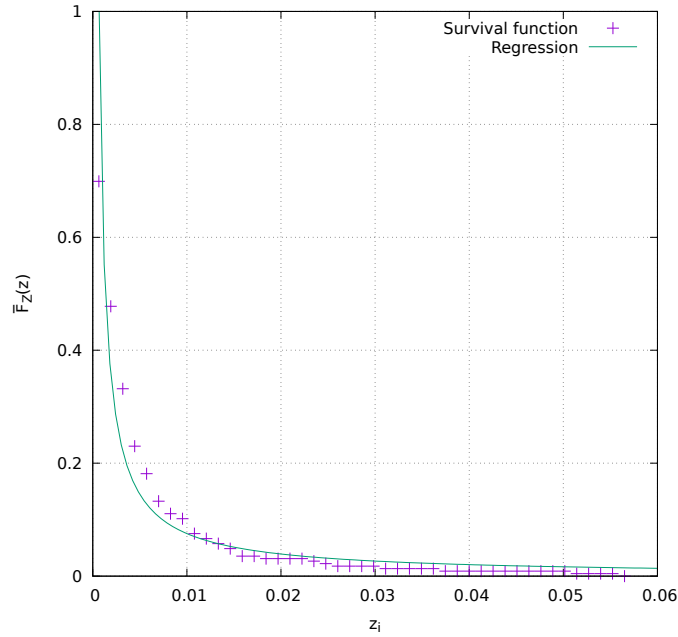


FIGURA 6.1.2. Funzione di sopravvivenza calcolata a partire dalla distribuzione dei valori dei ranking z_i a livello globale. In verde è riportata la regressione che fornisce un indice di pareto $\alpha \simeq 0.9$.

Procediamo dunque con l'organizzare i ranking z_i dell'import-export a livello globale all'interno di un istogramma¹ e calcoliamo la funzione di sopravvivenza (cioè il complemento della funzione di ripartizione $F_Z(z)$). Nel caso di un andamento di potenza secondo Pareto uno si aspetta un andamento del tipo

$$(6.1.3) \quad \bar{F}_Z(z) = \Pr[Z > z] = \begin{cases} \left(\frac{z_m}{z}\right)^\alpha & z \geq z_m \\ 1 & z < z_m \end{cases}$$

in cui le quantità definite sono le medesime della funzione di densità di probabilità definita in 6.1.2.

In figura 6.1.2 abbiamo riportato la funzione di sopravvivenza valutata per la distribuzione dei ranking delle merci a livello globale: si ritrova l'andamento di potenza atteso, e da una regressione in cui abbiamo imposto che z_m assuma il valore della z_i con ranking più basso otteniamo per l'indice di Pareto il valore

$$(6.1.4) \quad \alpha = 0.943 \pm 0.017$$

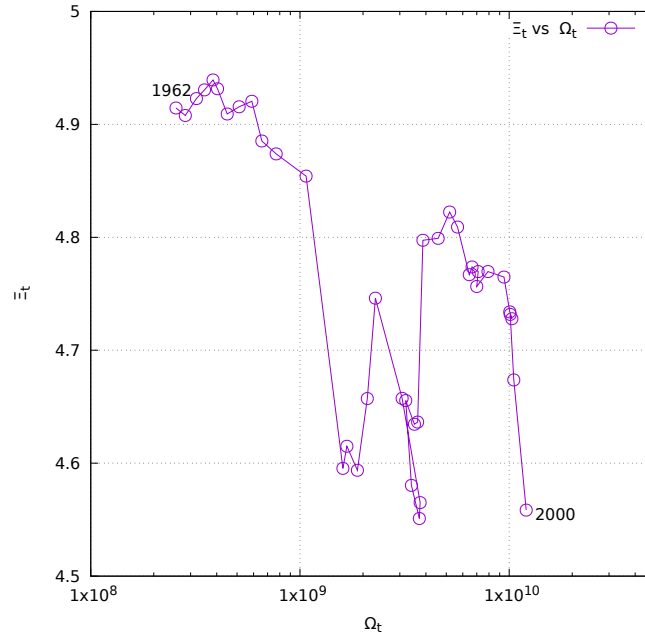


FIGURA 6.2.1. Evoluzione delle genericità in funzione del GDP della network globale dall'anno 1962 al 2000.

6.2. Genericità della network globale

Come accennato nell'introduzione del capitolo, vogliamo definire una quantità che ci permetta di capire quanto bene è organizzato ciascun Paese in quanto a distribuzione degli investimenti sui prodotti.

Iniziamo con un'analisi dei dati a livello globale. Innanzitutto procediamo col definire una quantità (che nell'analisi per singolo Stato potrà essere intesa come rappresentativa del GDP del Paese in oggetto) che è semplicemente la somma dei valori di tutte le merci esportate in un determinato anno:

$$(6.2.1) \quad \Omega_t = \sum_{i \in \text{merci}} Z_{i,t}$$

L'altro parametro necessario, che chiamiamo Ξ_t , dovrà permetterci di distinguere una network ben organizzata, in cui la sproporzione tra le merci è piccola, caratterizzandola con un valore alto, mentre identificare con un valore basso una network mal organizzata in cui gli investimenti sono concentrati principalmente su pochi nodi. Un modo di definire tale quantità prende spunto dall'entropia di Shannon utilizzata in teoria dell'informazione [30], che per un segnale in cui i caratteri

¹Per la scelta del numero di bin da impiegare abbiamo utilizzato la regola di Friedman-Diaconis, secondo la quale

$$\text{bin size} = 2 \frac{\text{IQR}(x)}{(N)^{1/3}}$$

ove $\text{IQR}(x)$ è il range *interquartile*, ed N il numero totale di dati.

sono di b bit ed hanno una probabilità di comparire nella stringa p_i è definita come

$$(6.2.2) \quad H = - \sum_i p_i \log_b p_i$$

Sostituendo le probabilità con la frazione di una merce esportata rispetto al totale, cioè $Z_{i,t}/\Omega_t$, definiamo una quantità a cui diamo il nome di *genericità* come

$$(6.2.3) \quad \Xi_t = - \sum_{i \in \text{merci}} \frac{Z_{i,t}}{\Omega_t} \log \left[\frac{Z_{i,t}}{\Omega_t} \right]$$

ove nel logaritmo si sottointende l'utilizzo della base naturale.

Data una network composta da N nodi, il valore minimo che può assumere la genericità è 0, dato dal caso banale in cui tutte le $Z_{i,t}$ sono nulle tranne una che assume il valore totale Ω_t , mentre il valore massimo lo ritroviamo nel caso in cui gli investimenti sono ripartiti equamente tra le N merci, con un valore di $\log N$ (per $N = 226$ troviamo un valore massimo $\log 226 \simeq 5.42$).

Notiamo che è importante non normalizzare sul numero totale di merci in quanto successivamente andremo a confrontare le genericità per le network di Stato singolo, per cui una normalizzazione ci impedirebbe di apprezzare la differenza di genericità tra un Paese con un numero di merci superiore rispetto ad un altro.

In figura 6.2.1 abbiamo riportato in un grafico l'evoluzione nel tempo delle coppie di dati (Ω_t, Ξ_t) per la network globale. Dal grafico emerge un lieve trend negativo per la genericità, che sta ad indicare una specializzazione sempre maggiore nella network globale. Il calo improvviso di genericità che si vede nel grafico corrisponde al picco delle merci di alto ranking del 1973 ben visibile in figura 2.2.1, quindi la genericità così definita sembra essere in accordo col concetto di sproporzione della distribuzione degli investimenti studiato in precedenza.

Per verificare questa ipotesi possiamo studiare le distribuzioni delle $Z_{i,t}$ della network globale di anno in anno. Prendiamo in esame i due casi in cui abbiamo Ξ_t massima e minima, trovate rispettivamente negli anni 1966 e 1979 (si veda figura 6.2.1). In riferimento al ranking definito nell'equazione 2.2.8 (costruito con una media nell'ultimo decennio), definiamo un ranking annuale normalizzando le $Z_{i,t}$ di ogni anno rispetto al GDP del medesimo anno Ω_t

$$(6.2.4) \quad z_{i,t} = \frac{Z_{i,t}}{\Omega_t}$$

e definiamo l'investimento cumulativo normalizzato delle merci per l'anno t come

$$(6.2.5) \quad S_{n,t} = \sum_{i=1}^n z_{i,t}$$

Se le merci sono ordinate in ordine crescente rispetto alle $z_{i,t}$ troviamo che la funzione $S_{n,t}$ assume la forma riportata nel grafico di sinistra di figura 6.2.2. Come si può notare, nel caso di Ξ_t massima la curva seguita da $S_{n,t}$ è caratterizzata da un esponente inferiore rispetto al caso di Ξ_t minima, indicando quindi una ripartizione più equa degli investimenti sui prodotti in quanto più vicina al caso lineare.

Troviamo quindi una conferma dell'idea iniziale che, a parità di prodotti, una network con un basso indice di genericità è caratterizzata da una sproporzione elevata nella distribuzione degli investimenti sulle merci.

Potremmo procedere come fatto nella sezione precedente per i ranking globali z_i con lo studio della distribuzione delle $z_{i,t}$ ed il calcolo dell'indice di Pareto α .

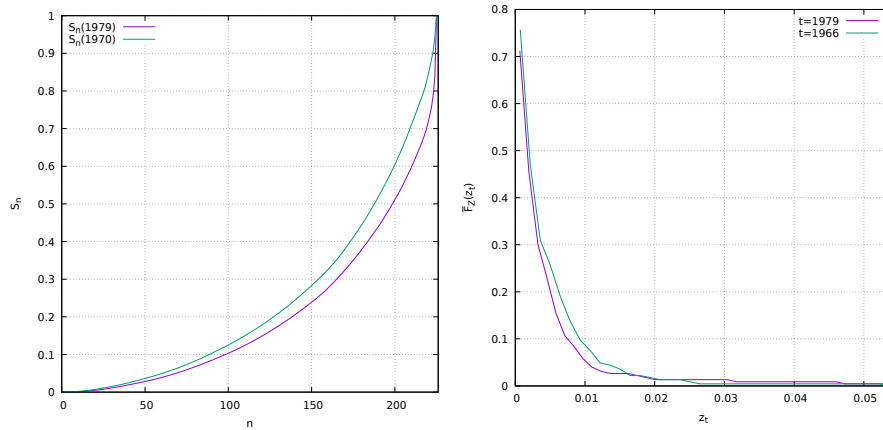


FIGURA 6.2.2. Nella figura a sinistra è riportata la funzione cumulativa degli investimenti $S_{n,t}$ valutata negli anni 1966 e 1979: risulta chiara la maggiore sproporzione che caratterizza la condizione di Ξ_t minimo del 1979. Nella figura di destra sono invece riportate le funzioni di sopravvivenza per la distribuzione delle $z_{i,t}$. Un indice di Pareto più piccolo descrive la curva con Ξ_t minimo, in accordo con quanto atteso.

Nel grafico di destra di figura 6.2.2 è riportato il confronto tra le due distribuzioni relative alle condizioni di minimo e massimo di Ξ_t , e come si può vedere la curva relativa al massimo ($t = 1966$) è descritta da un esponente α maggiore rispetto alla curva relativa al minimo ($t = 1979$)². Un indice di Pareto inferiore sta ad indicare una maggiore sproporzione, quindi ciò è in accordo con l'ipotesi iniziale. Tuttavia una regressione sui dati per estrapolare gli indici non può tornare utile in quanto gli errori degli indici ottenuti superano la loro differenza, rendendo impossibile un confronto.

6.3. Genericità per le network di Stato singolo

L'analisi sull'evoluzione della genericità effettuata nella sezione precedente per la network globale può essere ripetuta per tutte le network di Stato singolo. Per ogni anno t e Stato c possiamo infatti calcolare la quantità Ω_t^c (che sarà una sorta di indicatore del GDP dello Stato in oggetto) e la sua genericità Ξ_t^c .

Mettendo insieme questi termini, valutati di anno in anno e Stato per Stato, avremo l'evoluzione nel tempo degli Stati sul piano (Ω_t, Ξ_t) , che è riportata in figura 6.3.1.

I Paesi riportati nel grafico sono quelli che presentano una network di prodotti caratterizzata almeno da una merce non nulla lungo tutto l'arco di tempo 1962-2000, ed ammontano ad un totale di 133 (Mondo escluso).

L'alto numero di Stati studiati rende difficile la lettura del grafico, anche se già si riescono a distinguere nella zona in alto a destra degli andamenti abbastanza

²Per z sufficientemente piccoli si nota che la curva del 1979 assume valori superiori a quella del 1966: ciò indica una dipendenza da un esponente inferiore per la prima curva rispetto alla seconda.

regolari (caratteristici dei Paesi sviluppati) ed in quella in basso a sinistra delle evoluzioni molto più caotiche (proprie dei Paesi in via di sviluppo). Notiamo inoltre come i Paesi quali Arabia Saudita, Iran, Kuwait e Venezuela, che possiedono un alto GDP ma concentrano tutti gli investimenti sul petrolio sono in una zona con genericità più bassa rispetto ai Paesi sviluppati, rafforzando dunque la validità della formulazione di tale quantità.

Per avere un'idea delle tendenze dell'evoluzione in base alla posizione di uno Stato nel piano (Ω_t, Ξ_t) possiamo creare una griglia (logaritmica nell'ascissa) a cui associamo ad ogni cella un vettore rappresentativo del flusso medio caratteristico di tale cella.

Per calcolare le componenti del vettore procediamo in questo modo: definiti gli estremi della cella $Cella = [\Xi_{min}, \Xi_{MAX}] \times [\Omega_{min}, \Omega_{MAX}]$ prendiamo in considerazione tutti i punti per tutti gli Stati e tutti i tempi con $(\Omega_t^c, \Xi_t^c) \in Cella$. Definiamo la componente orizzontale come la media della differenza tra il GDP dell'anno successivo di tale punto e quello dell'anno in considerazione:

$$(6.3.1) \quad \Delta\Omega_{Cella} = \frac{1}{n_{Cella}} \sum_{(\Omega_t^c, \Xi_t^c) \in Cella} [\Omega_{t+1} - \Omega_t]$$

ove n_{Cella} indica il numero di punti appartenenti alla cella. Analogamente per la componente verticale definiremo

$$(6.3.2) \quad \Delta\Xi_{Cella} = \frac{1}{n_{Cella}} \sum_{(\Omega_t^c, \Xi_t^c) \in Cella} [\Xi_{t+1} - \Xi_t]$$

Il risultato di questa analisi è riportato in figura 6.3.2. Emerge chiaramente la distinzione in zone che già avevamo intuito dal grafico in figura 6.3.1. Nella zona in alto a destra ritroviamo i Paesi sviluppati, che sono caratterizzati da quello che possiamo definire un "flusso laminare": le frecce puntano tutte verso una crescita del GDP, e sono lievemente inclinate verso il basso, indicando un abbassamento di genericità in accordo con quanto già riscontrato nella network globale. Questo fatto ci suggerisce quindi che la network dei Paesi sviluppati è simile a quella globale in quanto a distribuzione degli investimenti e numero di merci.

Una seconda zona che possiamo identificare è nella fascia media di genericità a destra: qui sono collocati i Paesi in via di sviluppo, con un buon GDP ma una genericità non ottimale a causa di una distribuzione degli investimenti poco equilibrata (indirizzata solitamente verso il petrolio).

Infine in basso a sinistra si distingue una zona di "flusso turbolento" dove sono collocati i Paesi sottosviluppati. Qui è impossibile distinguere una tendenza: le frecce variano molto sia di intensità che di direzione tra celle adiacenti.

Questo risultato è in accordo con quanto trovato da L. Pietronero e collaboratori in un lavoro del 2015, in cui si studiano gli export di Stato per Stato dal 1995 al 2010 [31]. Definendo una funzione chiamata *fitness*, che in modo ricorsivo permette di stabilire la bontà di una network in base a quanti altri Paesi esportano merci simili, ritrova dei risultati simili sulle prospettive di crescita del GDP di un Paese e sulla distinzione in zone ben delineate per il flusso nel tempo.

Per ricollegare quest'analisi al nostro modello di dinamica della network procederemo con la creazione di un database sintetico per gli Stati che ci permettono di eseguire la procedura di calibrazione. Su questo database procederemo quindi con

l'eseguire un'analisi analoga a quella effettuata in questo capitolo, per verificare se il modello è in grado di riprodurre gli effetti osservati.

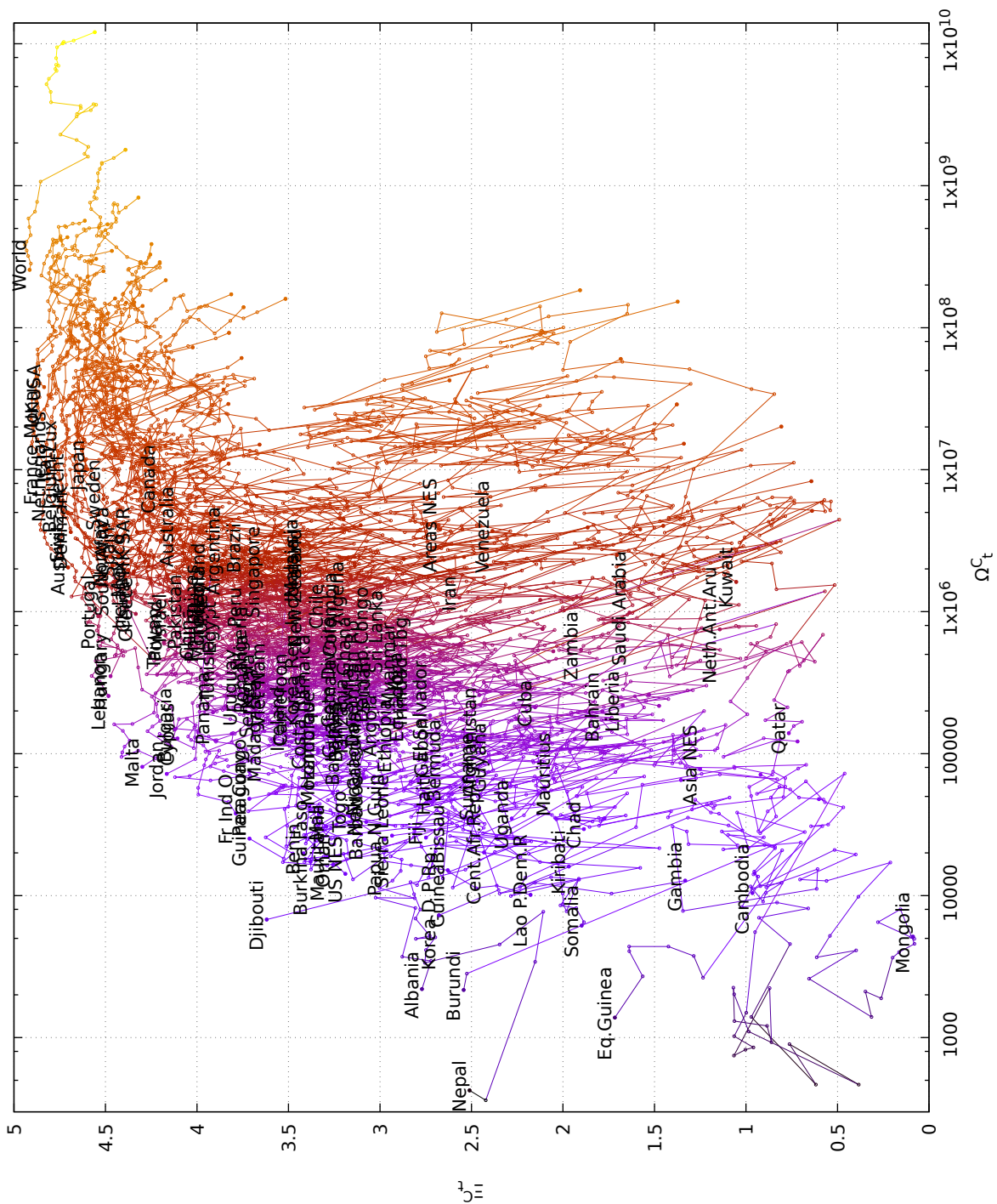


FIGURA 6.3.1. Evoluzione nel piano (Ω_t, \bar{E}_t) delle network di singolo Stato. Il nome del Paese è posizionato sopra il primo punto dell'evoluzione, corrispondente all'anno 1962. Il colore usato per le linee dipende dal valore di GDP Ω_t^c .

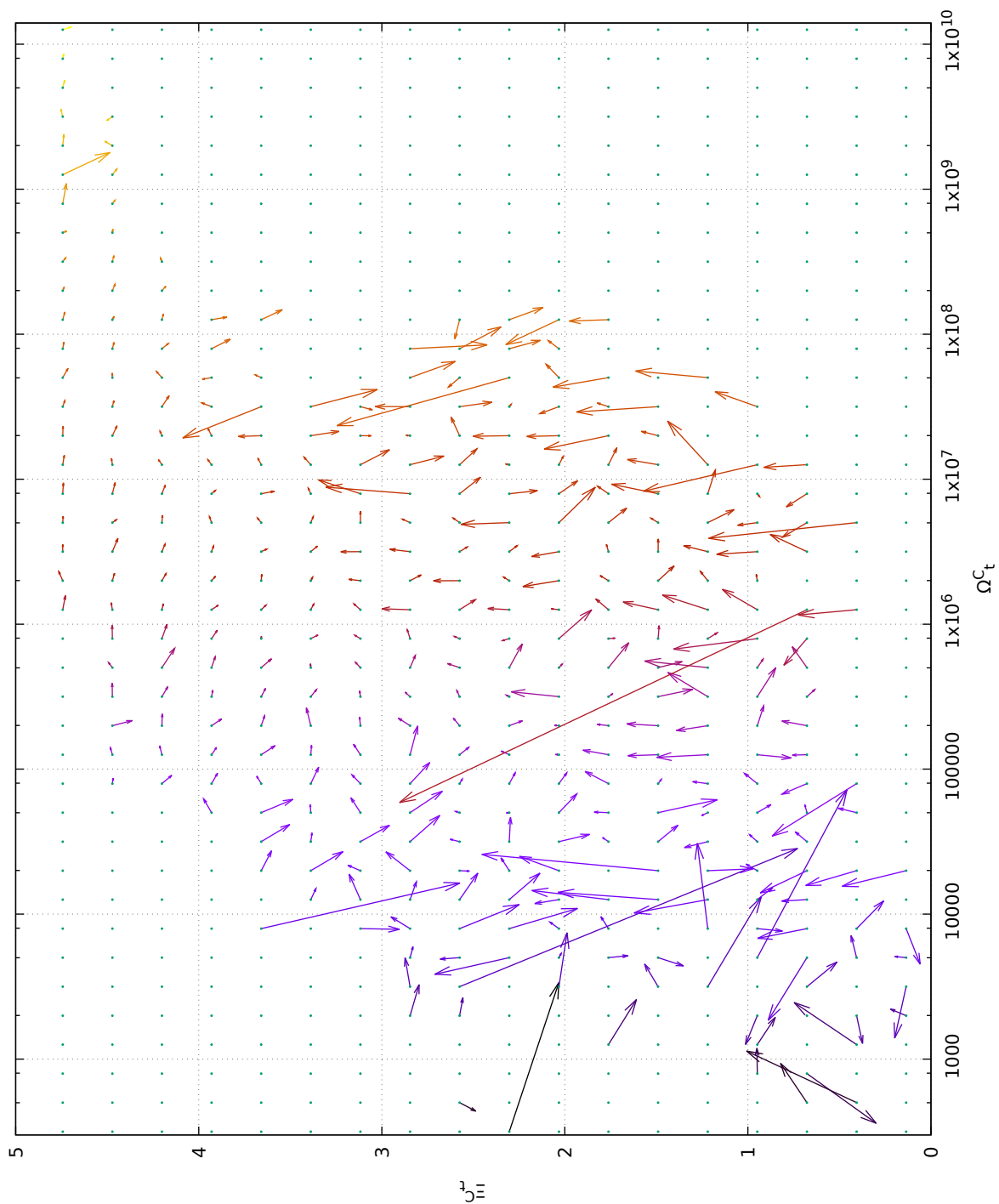


FIGURA 6.3.2. Campo vettoriale per l'evoluzione nel tempo delle network di Stato singolo nel piano (Ω_t^c, Ξ_t^c) . Il colore usato per le frecce dipende dal valore di GDP Ω_t^c .

6.4. Database sintetico e calibrazione alternativa di $\bar{\mu}$

Per creare un database sintetico completo è necessario eseguire la calibrazione di tutte le network di singolo Stato. Per quanto riguarda la calibrazione di G , σ e τ la procedura è relativamente rapida (16 secondi su di un processore single thread con un clock di circa 3 GHz), mentre per la calibrazione di $\bar{\mu}$ è necessario effettuare un gran numero di simulazioni (circa 100000) per trovare \tilde{c}_{38} .

In questa analisi abbiamo dunque scelto di utilizzare un metodo alternativo per calibrare $\bar{\mu}$, non altrettanto accurato ma che ci fornisce una buona stima del parametro senza comportare un aumento apprezzabile del tempo di calcolo.

Se valutiamo il valore d'aspettazione dei termini dell'equazione 3.0.5 rispetto alle merci:

$$(6.4.1) \quad \mathbb{E}[f_i(n_1, n_2)] = G\mathbb{E}[g_i(n_1, n_2)] + \bar{\mu} + \frac{1}{n_2 - n_1} \mathbb{E} \left[\int_{n_1}^{n_2} \eta_{i,t} dt \right]$$

e ricordandoci che l'integrale del rumore ha valore di aspettazione identicamente nullo, troviamo che vale l'identità

$$(6.4.2) \quad \bar{\mu} = \mathbb{E}[f_i(n_1, n_2)] - G\mathbb{E}[g_i(n_1, n_2)]$$

Anche qui (come per la stima di G) possiamo variare $n_1 = 0, \dots, 37$ e $n_2 = n_1 + 1, \dots, 38$, metre i spazia sull'insieme delle merci della network. Nel caso della network globale abbiamo $I = 226$ merci, che ci forniscono quindi un totale di 167466 valori da mediare. Il valore di $\bar{\mu}$ così ottenuto è

$$(6.4.3) \quad \bar{\mu} = (7.35 \pm 0.19) \times 10^{-3}$$

che risulta sovrastimato di circa il 10% rispetto al valore trovato in precedenza col calcolo di \tilde{c}_{38} (avevamo trovato $\bar{\mu} \simeq 6.31 \times 10^{-3}$).

È comunque bene notare che $\bar{\mu}$ così calcolato non è l'intercetta di una regressione lineare di tutti i punti dello scatter plot di figura 3.1.1, perché in tal caso il coefficiente angolare impiegato sarebbe stato valutato anch'esso su tutti i punti. In questo modo si è mantenuto il valore di G valido trovato in precedenza con il 10% di dati con $|g_i|$ più grande.

6.5. Studio della genericità sul database sintetico

Per generare il database sintetico abbiamo scelto di limitarci ad utilizzare i Paesi con una network composta da almeno 100 merci (per evitare di incorrere in problemi nella procedura di calibrazione) riducendo il numero di Stati studiati a 90 (Mondo compreso).

Effettuata la calibrazione di tutte le network, abbiamo proceduto quindi con l'eseguire una simulazione indipendente³ per ogni Stato c in modo da ottenere le $Z_{i,t}^c$ di ogni merce che lo caratterizzano dal 1962 al 2000.

Infine abbiamo ripetuto su questi dati la medesima procedura di analisi effettuata sul database reale nel capitolo precedente, ottenendo l'evoluzione di ogni Stato nel piano (Ω_t, Ξ_t) .

³È stato volutamente scelto di lasciare ogni network libera di evolvere indipendentemente in quanto utilizzare lo stesso insieme di numeri casuali per generare le fluttuazioni per ogni Stato è un'assunzione troppo forte: è più probabile che vi siano eventi casuali a livello locale che non vi sia un unico evento casuale che influenzi allo stesso modo tutti i Paesi del Mondo.

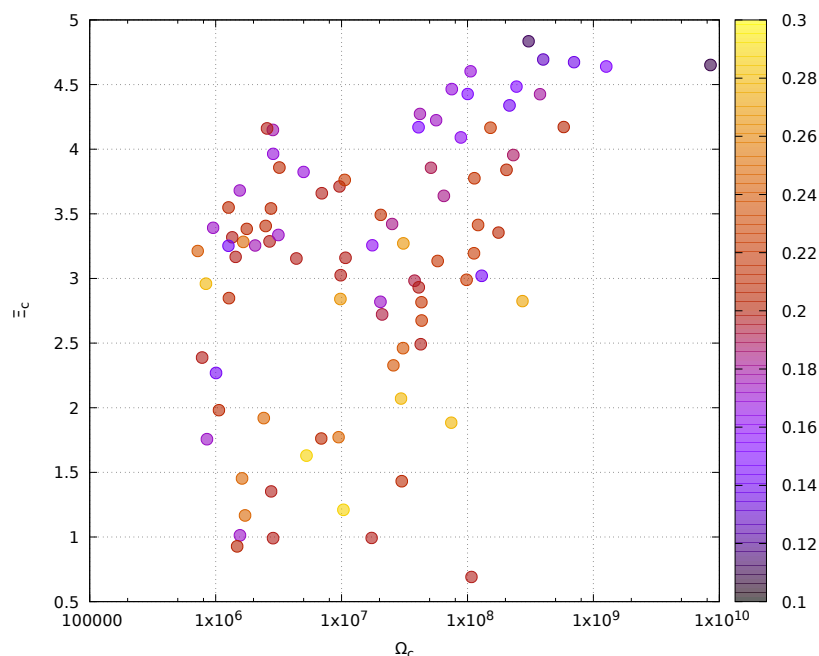


FIGURA 6.5.1. Valori ottenuti dalla calibrazione di σ^c per la network di ogni Stato riportati nel piano (Ω_t, Ξ_t) . I colori usati sono relativi ai valori assunti da σ^c nella legenda colorata.

Nel grafico di figura 6.5.3 sono riportate le evoluzioni sintetiche per i 90 Paesi osservati, e per avere un confronto in figura 6.5.4 abbiamo riportato il grafico di figura 6.3.1 limitato agli stessi 90 Stati.

Come si può notare si riesce a riprodurre bene l'effetto della lieve perdita di genericità tipico dei Paesi sviluppati, mentre risultano molto attenuate le fluttuazioni delle network dei Paesi in via di sviluppo. Questi effetti sono difficili da riprodurre con un modello di SDE a 4 parametri, ed essendo consci di questa limitazione abbiamo deciso di eseguire un'unica simulazione per ogni network per generare il database sintetico, e non di eseguirne più di una per poi mediarle tra di loro.

In questo modo le riproduzioni saranno meno accurate in termini di riproduzione di un corretto GDP, col vantaggio però di poter riprodurre l'andamento caotico (anche se attenuato) tipico dei Paesi in via di sviluppo. In figura 6.5.1 sono riportati i vari valori delle σ^c ottenuti dalle calibrazioni di network di singolo Stato nel piano (Ω_t, Ξ_t) . La zona in alto a destra è caratterizzata generalmente da bassi valori di σ^c mentre la zona centrale e bassa ad valori più alti.

In figura 6.5.2 abbiamo infine ricreato il campo vettoriale del piano (Ω_t, Ξ_t) , mettendo a confronto il grafico sintetico e quello reale generato sempre con i 90 Stati impiegati nel sintetico. In accordo con quanto detto prima, le frecce rispettano bene le direzioni indicate dai dati reali, mentre notiamo una generale intensità più piccola nella regione dei Paesi sottosviluppati. Ciò è dovuto all'incapacità di riprodurre le fluttuazioni troppo elevate di questa zona.

Abbiamo quindi mostrato che il nostro modello dinamico di network è in grado

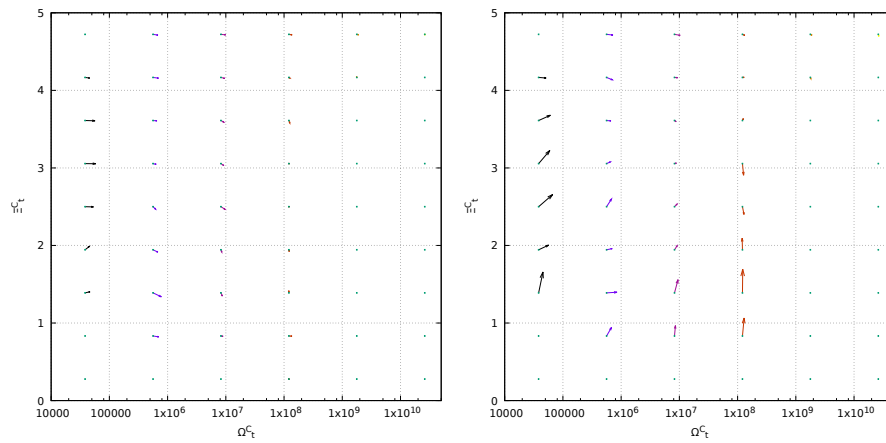


FIGURA 6.5.2. Confronto tra i flussi nel piano (Ω_t, Ξ_t) generati dai dati sintetici (a sinistra) e reali (a destra) dei 90 Stati caratterizzati da una network di almeno 100 merci.

di riprodurre correttamente i dati storici anche da un punto di vista della distribuzione degli investimenti: tutto questo va a rafforzare ulteriormente la validità del modello, dimostrando la possibilità di riprodurre consistentemente degli effetti su un campo in cui non era ancora stato testato.

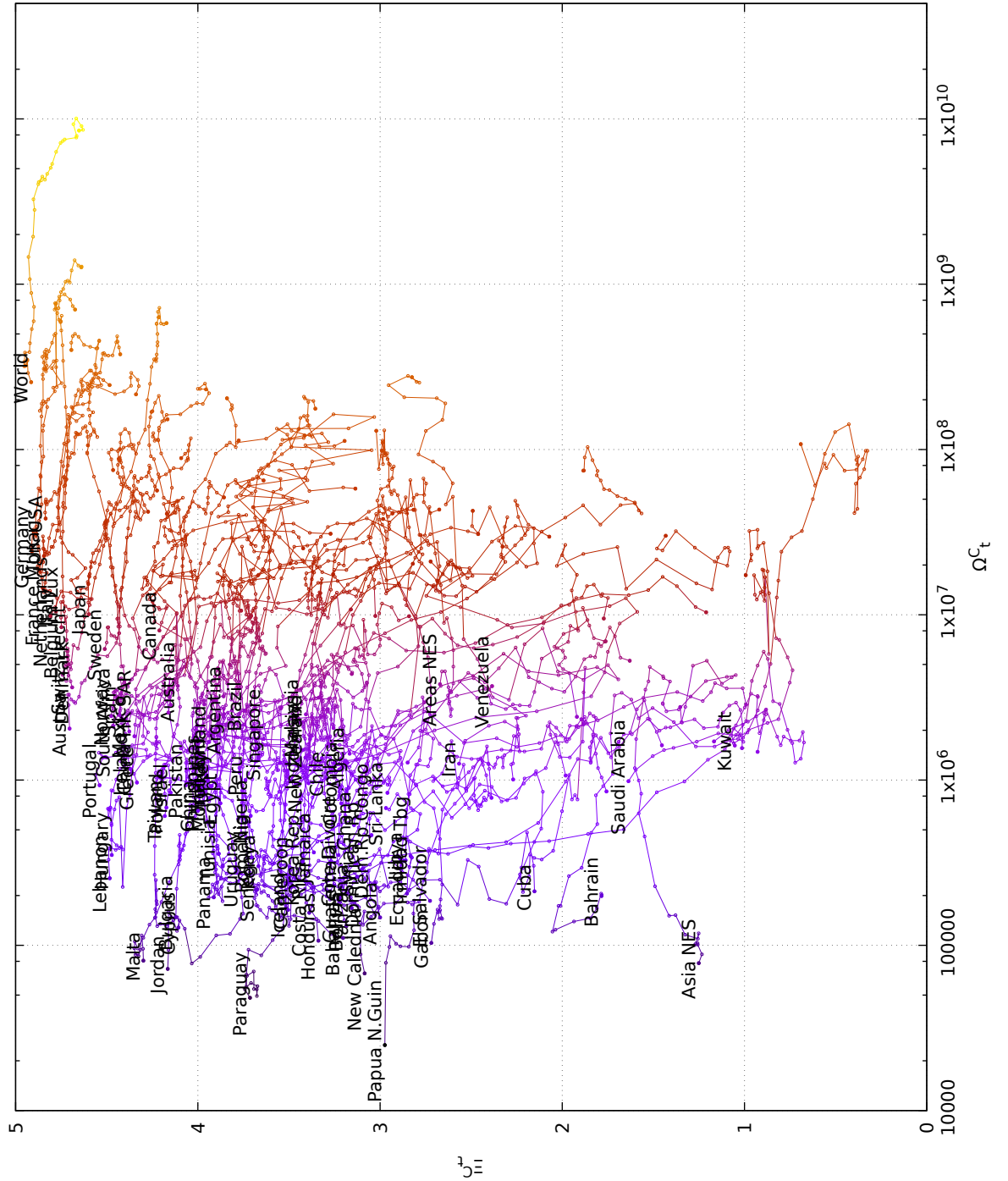


FIGURA 6.5.3. Evoluzione nel piano (Ω_t, Ξ_t) delle network simulate di singolo Stato. Il nome del Paese è posizionato sopra il primo punto dell'evoluzione, corrispondente all'anno 1962. Il colore usato per le linee dipende dal valore di GDP Ω_t^c .

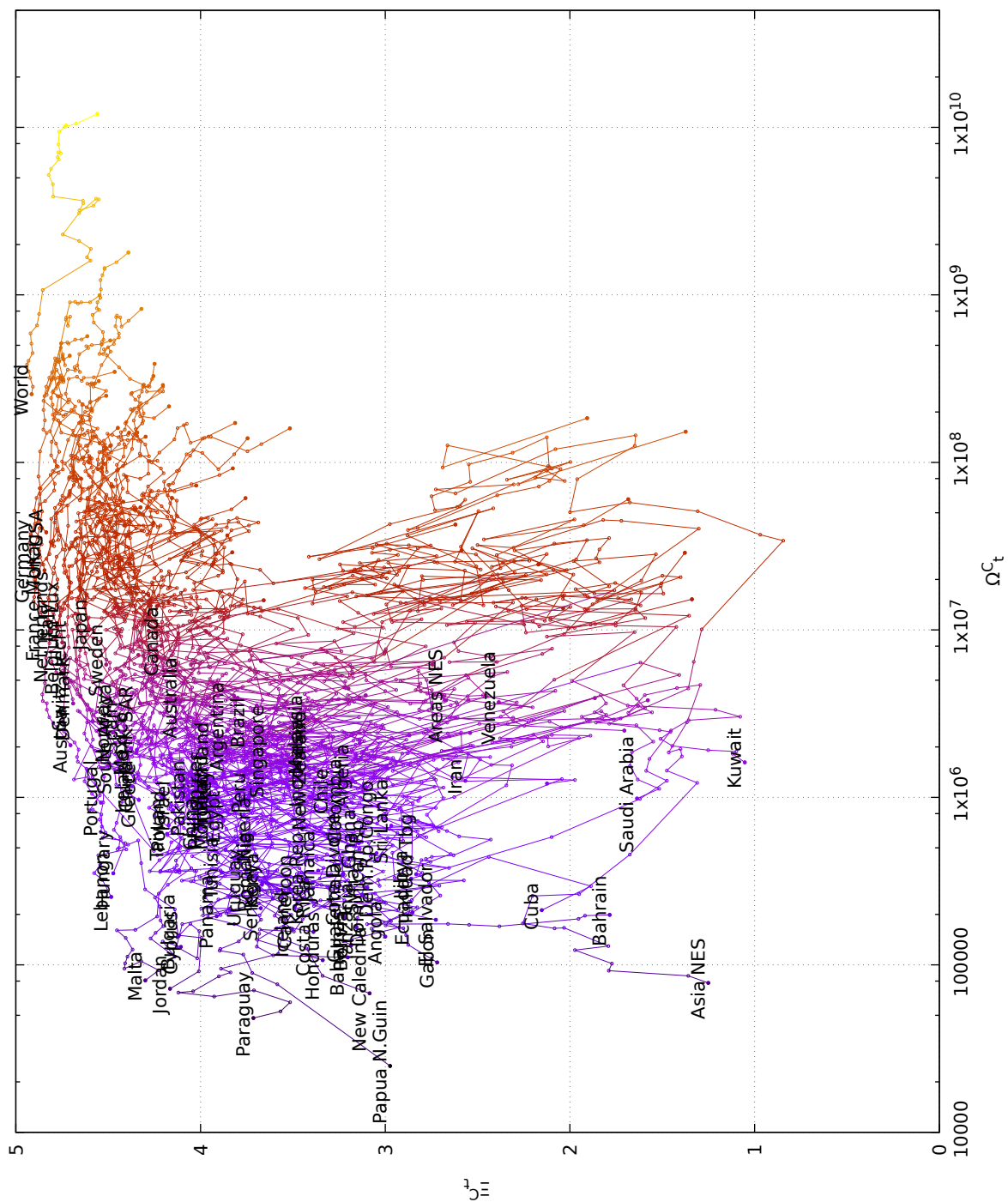


FIGURA 6.5.4. Evoluzione nel piano (Ω_t, Ξ_t) delle network reali di singolo Stato di cui è stata eseguita la simulazione (figura 6.5.3). Il nome del Paese è posizionato sopra il primo punto dell'evoluzione, corrispondente all'anno 1962. Il colore usato per le linee dipende dal valore di GDP Ω_t^c .

Conclusioni

In questa tesi abbiamo studiato l'applicazione di un recente modello dinamico del Product Space [19], approfondendo l'analisi con uno sguardo alle network locali relative ai singoli Stati. L'equazione impiegata nella descrizione della dinamica ha come fondamento la famosa equazione di Kardar-Parisi-Zhang [23], nata per lo studio della crescita delle superfici ma con un seguito in numerosi e svariati ambiti [21, 25], fra cui, per l'appunto, l'econofisica [22, 26, 27].

Le scelte effettuate nella costruzione del modello sono sempre state mirate a mantenere ridotto il numero di parametri liberi (4 in totale), cercando invece di estrapolare il maggior numero possibile di informazioni dai 39 anni di dati storici a disposizione. Partendo dai ritorni logaritmici delle merci $Z_{i,t}$ abbiamo infatti ricavato la matrice di correlazione c_{ij} che è stata impiegata nella definizione del rumore $\eta_{i,t}$ e nella matrice che quantifica il trasferimento degli investimenti da una merce all'altra J_{ij} . Le scelte effettuate nella costruzione di questi termini sono state fondamentali per risolvere i problemi di inadeguatezza della prossimità definita nel modello di Barabasi [18] ed hanno inoltre permesso di implementare una dinamica stocastica che riproducesse accuratamente i dati reali: nonostante il basso numero di parametri utilizzati, le simulazioni effettuate generano dei dati consistenti da un punto di vista del ranking (anche per quelle merci soggette ad una crescita anomala), delle fluttuazioni, dei tempi caratteristici di risposta e della distribuzione seguita dagli investimenti nell'insieme dei prodotti.

Un vantaggio importante che è emerso dalla parsimonia nel numero di parametri liberi, è stato quello di poter evidenziare agevolmente i meccanismi intrinseci che portano alla crescita dell'esportazione dei prodotti, capendo in che percentuale ciascun termine contribuisca alla crescita totale.

Nello specifico, abbiamo innanzitutto isolato un termine di drift deterministico $\mu_t = \bar{\mu} + I_t$ comune a tutte le merci, in cui la dipendenza temporale è legata ad un'inflazione globale, calcolata a partire dallo storico di GDP e CPI degli Stati più importanti nell'economia mondiale. Il termine $\bar{\mu}$ è quindi una misura della crescita media a cui sarebbe soggetta l'intera economia se non vi fossero influenze mutuali di alcun genere tra le merci.

Il secondo parametro libero (G) è stato impiegato nella definizione della matrice J_{ij} : è una costante moltiplicativa di accoppiamento che da una stima della percentuale di investimento che mediamente viene trasferita ogni anno da un prodotto agli altri. Questo termine è quindi strettamente legato a quella che sarà la crescita intrinseca della network, indipendente dai drift deterministici ed unicamente determinata dall'organizzazione dei trasferimenti e dalle condizioni iniziali del 1962.

I restanti due parametri liberi del modello sono legati alle fluttuazioni a cui sono costantemente sottoposte le merci nei corso degli anni: σ da una stima dell'ampiezza delle fluttuazioni, mentre τ è una sorta di tempo di rilassamento che ci

permette di capire quanto sia larga in media la finestra temporale legata ad una opportunità di crescita (o crisi) inattesa.

Una procedura di calibrazione ci ha quindi fornito i valori dei parametri che permettono di riprodurre sinteticamente al meglio i dati reali, stabilendo inoltre un punto di riferimento per il confronto delle network di singolo Stato studiate successivamente. Tramite delle simulazioni abbiamo potuto verificare la validità del modello, riscontrando una consistenza nella riproduzione della crescita media, nei ranking (formalizzata tramite il calcolo del coefficiente di correlazione per ranghi di Spearman) e nella matrice di correlazione c_{ij} calcolata a posteriori sui dati sintetici.

Studiando la dipendenza della crescita in funzione del parametro G abbiamo osservato una curva caratterizzata da un chiaro punto di massimo. Un fatto sorprendente emerso da quest'analisi è che la situazione reale non si discosta di molto da tale condizione, facendo pensare che esista una sorta di capacità auto-organizzativa della network globale verso la crescita ottimale. Un altro risultato significativo è stato ottenuto nella stima (con un valore di circa 40 anni) del tempo di rilassamento di cui la network necessita per riorganizzarsi dopo grandi cambi strutturali, riconducibili ad esempio ad una crisi economica globale come quella della grande recessione che stiamo vivendo tutt'ora a partire dal 2007.

Il lavoro è proseguito quindi con una specializzazione al caso di network di Stato singolo per i Paesi membri del G7. Questa analisi a livello locale ci ha permesso di testare la validità del modello su altri dati per comprenderne sia la potenzialità che le limitazioni, anche se i problemi riscontrati sono spesso imputabili ad una carenza di dati nel database.

A prima vista le network di singolo Stato ripresentano l'effetto arcobaleno osservato in quella globale, tuttavia un'analisi più attenta fa emergere per alcuni paesi delle fluttuazioni molto ampie nell'evoluzione dei primi anni. Questa inconsistenza del database rende difficoltosa l'esecuzione di una corretta procedura di calibrazione dei parametri σ e τ , fornendo valori caratterizzati da errori eccessivamente elevati. In ciò riconosciamo una limitazione del modello dovuta all'impiego di 4 parametri: una possibile soluzione potrebbe essere infatti l'impiego di un parametro addizionale che ci permetta di tenere conto di questi effetti. Tale modifica, se attuabile, cambierebbe tuttavia il modello alla radice, richiedendo uno studio completamente originale. Per quanto riguarda i parametri G e $\bar{\mu}$ la calibrazione non presenta problemi di alcun genere, restando valida ed affidabile come per la network globale.

Questo fatto è in accordo con quanto visto successivamente durante le simulazioni per la creazione di un database sintetico, in cui abbiamo osservato che riusciamo a riprodurre correttamente ranking e crescita media delle network dei Paesi, mentre le fluttuazioni risultano in genere più attenuate di quelle dei dati reali.

Due risultati positivi sono emersi dallo studio dei ranking e delle curve di ottimizzazione della crescita in funzione del parametro G . Il primo deriva dal calcolo del coefficiente di correlazione per ranghi di Spearman tra i ranking delle network di singolo Stato e la network globale, da cui si manifesta un chiaro legame che indica che più un Paese è importante nell'economia globale, più alta sarà la correlazione tra i due ranking. Questo fatto è in accordo con l'idea che uno Stato ben sviluppato avrà una network "simile" a quella globale.

Il secondo risultato è stato invece ottenuto dallo studio delle curve di ottimizzazione della crescita in funzione di G : abbiamo visto che i Paesi emergenti della seconda metà del XX secolo hanno una curva di ottimizzazione con un picco di quasi un'ordine di grandezza superiore rispetto ai Paesi che nel 1962 erano già ben affermati. Inoltre abbiamo potuto stabilire che nel contesto di ricerca di un compromesso tra "explore" ed "exploit" [27] vale per tutti gli Stati una tendenza a sottoutilizzare la possibilità di ricerca di investimenti in nuove direzioni optando piuttosto per una politica economica più conservativa.

Gli ultimi risultati della tesi sono stati ottenuti con un approccio diverso, volto all'analisi della distribuzione degli investimenti nell'insieme delle merci della network di ogni Stato. Studiando questi insiemi emerge infatti una distribuzione che segue una legge di potenza, conosciuta in economia come curva di Pareto. Rispetto ad una distribuzione normale, una legge di potenza presenta delle code molto più ampie nella funzione di distribuzione, indicando una disparità elevata nella ripartizione degli investimenti tra le varie merci.

Questa osservazione può essere collegata con l'idea che un Paese sviluppato non si specializzi nella produzione in quantità elevate di pochi beni, ma che piuttosto cerchi di differenziare le classi di merci producendo tutto ciò che il suo status economico gli permette [16]. Se infatti definiamo la funzione genericità Ξ_t^c (ispirata all'entropia di Shannon) per avere la misura di una buona o cattiva ripartizione degli investimenti, insieme al GDP Ω_t^c dei Paesi ci permette di discriminare tra Stati sviluppati, in via di sviluppo e sottosviluppati. Se inoltre riportiamo nel piano (Ω_t, Ξ_t) l'evoluzione negli anni di tutte le nazioni si distingue una zona di "flusso laminare" dove sono collocati i Paesi sviluppati, una zona di "flusso turbolento" dove ritroviamo tutti i Paesi in via di sviluppo, ed una zona per i Paesi emergenti caratterizzati da un alto GDP ma bassa genericità in quanto specializzati nella produzione di pochi beni (come Arabia Saudita, Iran e Venezuela, nazioni con un'economia fondata sul petrolio). Questo risultato è in accordo con quanto trovato da Pietronero e collaboratori con metodi di analisi differenti in un articolo pubblicato di recente nel 2015 [31]. Da questo studio abbiamo potuto inoltre notare una seppur leggera, ma ben definita, tendenza nel tempo ad una specializzazione più elevata per le network dei Paesi più sviluppati (network globale compresa).

Questo tipo differente di analisi ci ha permesso di testare da un altro punto di vista il modello dinamico di network iniziale. Per gli Stati con dei dati sufficientemente buoni da permetterci di eseguire la procedura di calibrazione, abbiamo eseguito delle simulazioni per generare un database sintetico analogo a quello originale. Su questo database abbiamo quindi rieseguito la medesima analisi nel piano (Ω_t, Ξ_t) effettuata sui dati reali: è emersa la capacità del modello di riprodurre bene la zona laminare dei paesi sviluppati ed il leggero calo di genericità nel tempo che gli è proprio. La zona turbolenta invece presenta più difficoltà nella riproduzione, che risulta più attenuata. Ciò è in accordo con quanto osservato in precedenza riguardo l'incapacità del modello di riprodurre accuratamente evoluzioni caratterizzate da fluttuazioni troppo elevate.

È bene sottolineare che nell'approccio usato da Pietronero in [31] non vi è l'impiego di un modello dinamico. Il risultato importante emerso dall'analisi alternativa che abbiamo sviluppato non si riduce quindi al solo fatto di descrivere in modo più semplice (e vicino al concetto fisico di entropia) quanto già era stato osservato, ma

mostra la possibilità di caratterizzare questi effetti sul supporto di una dinamica stocastica ben definita introdotta in [19].

I risultati ottenuti sembrano dunque proporre un nuovo valido approccio per lo studio della network nota come il *Product Space*, con un modello consistente nella riproduzione dei dati storici sotto numerosi e diversi punti di vista: ranking, crescita, correlazione tra i prodotti, distribuzione degli investimenti etc...

L'unico problema riscontrato è emerso nella trattazione di Paesi con dati caratterizzati da fluttuazioni troppo elevate, ma una limitazione in questo senso era facilmente prevedibile visto il basso numero di parametri liberi impiegati nella descrizione del fenomeno.

Vista la validità mostrata su numerose network differenti (per creare il database sintetico nell'analisi della genericità sono stati impiegati 90 Paesi) riteniamo possibile un impiego anche su altri database, che non riguardino necessariamente l'importazione o l'esportazione di merci, ma anche la produzione in sé dei beni.

Più in generale, possiamo dire che questo modello possa essere facilmente applicato ed adattato a qualsiasi problema caratterizzato da una network che necessiti di una dinamica stocastica con correlazioni sia di sito in sito che temporali.

Moto Browniano geometrico ed integrazione di SDE

A.1. Moto Browniano geometrico (GBM)

Un moto Browniano geometrico (GBM) è un processo stocastico continuo nel tempo in cui il logaritmo della variabile stocastica segue un processo di Wiener (cioè un moto Browniano semplice). È un importante esempio di processo che risolve un'equazione differenziale stocastica ben nota, usata spesso in matematica finanziaria per modellizzare il prezzo degli stock secondo il metodo di Black-Scholes [43].

Un processo stocastico Z_t segue un GBM se soddisfa la seguente equazione differenziale stocastica:

$$(A.1.1) \quad dZ_t = \mu Z_t dt + \sigma Z_t dW_t$$

Qui W_t è un processo di Wiener, e μ e σ rappresentano rispettivamente la *velocità di deriva* e la *volatilità* e sono costanti. Il primo termine nell'equazione rappresenta la parte deterministica, mentre il secondo termine viene utilizzato per modellizzare gli eventi non prevedibili che si possono verificare durante questo processo.

L'integrale di questa equazione può essere eseguito in diversi modi, a seconda di come viene definita la corrispondente somma di Riemann-Stieljes. Le integrazioni più utilizzate sono quelle di Itô e Stratonovich (figura A.1.1), che vedremo nei paragrafi che seguono.

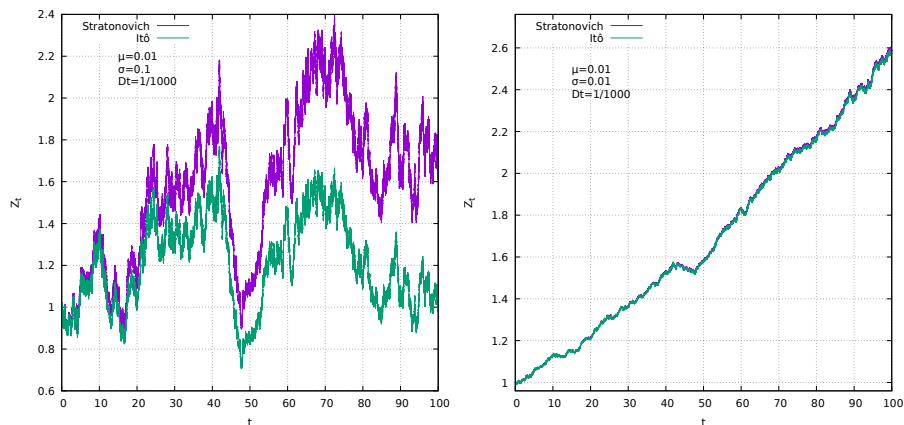


FIGURA A.1.1. Simulazione di un GBM secondo Itô e Stratonovich per due diversi set di parametri (per entrambi è stato utilizzato uno step di integrazione $\Delta t = 1/1000$).

A.2. Integrazione secondo Stratonovich

L'interpretazione di un'equazione differenziale stocastica secondo Stratonovich è quella solitamente più utilizzata in ambito fisico. L'integrazione può essere definita in maniera simile all'integrale di Riemann, cioè come limite della somma di Riemann.

Riportiamo di seguito alcune definizioni necessarie per costruire l'integrale di un processo stocastico, partendo dalla definizione di *filtrazione*.

Ad ogni processo stocastico $(X_t, t \geq 0)$ si può associare per ogni t una σ -algebra $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$, cioè la più piccola σ -algebra dell'insieme degli eventi che rende il processo misurabile per ogni $0 \leq s \leq t$. Questa σ -algebra è l'insieme più piccolo di sottoinsiemi di Ω (insieme dei risultati) che ci permette di calcolare tutte le probabilità relative ad eventi che riguardano X_t .

DEFINIZIONE 1. La famiglia di σ -algebre $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ viene chiamata *filtrazione naturale* del processo ed è tale per cui $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ per $s < t$.

Definiamo dunque cosa si intende per un processo *adattato ad una filtrazione*.

DEFINIZIONE 2. Dato un processo $(X_t, t \geq 0)$ ed una filtrazione $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$, si dice che X è *adattato* ad $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ se per ogni $t \geq 0$, X_t è \mathcal{F}_t -misurabile.

Infine definiamo definiamo cosa sia una *semimartingala*, che è il processo stocastico che utilizzeremo per definire le integrazioni stocastiche. Prima però è necessario dire cosa sia una *martingala*: è un processo stocastico X_t con una proprietà ben definita, ossia che per ogni $s \leq t$ l'attesa di X_t condizionata rispetto ai valori $X_r, r \leq s$ sia uguale ad X_s . Formalizzata, la definizione recita come segue:

DEFINIZIONE 3. Un processo stocastico $X_t : T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ adattato ad una filtrazione \mathcal{F}_t rispetto ad una misura di probabilità P è una *martingala* se $\mathbb{E}_P(|X_t|) < \infty \forall t$ e $\mathbb{E}_P(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s \forall s < t$.

Segue dunque la definizione di semimartingala:

DEFINIZIONE 4. Un processo stocastico X_t viene detto *semimartingala* se può essere decomposto come $X_t = M_t + A_t$ ove M è una martingala locale ed A_t è un processo adattato a variazione finita.

Possiamo ora procedere con la definizione di integrale secondo Stratonovich:

DEFINIZIONE 5. Se $W : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è un processo di Wiener e $X : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è una semimartingala adattata alla filtrazione naturale del processo di Wiener, l'*integrale di Stratonovich* è una variabile stocastica $\int_0^T X_t \circ dW_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definito come limite in media quadratica della sommatoria

$$(A.2.1) \quad \sum_{i=0}^{k-1} \frac{X_{t_{i+1}} + X_{t_i}}{2} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

quando la grana della partizione $0 = t_0 < t_1 \dots < t_k = T$ di $[0, T]$ tende a 0.

Vista la somiglianza con l'integrazione di Riemann, per il calcolo degli integrali si ritrovano molte analogie, ad esempio, una proprietà sullo stile della *regola della catena*: se $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione liscia, allora vale

$$(A.2.2) \quad \int_0^T \frac{\partial f}{\partial W}(W_t, t) \circ dW_t + \int_0^T \frac{\partial f}{\partial t}(W_t, t) \circ dt = f(W_T, T) - f(W_0, 0)$$

Sfruttiamo dunque questa regola per integrare l'equazione A.1.1. Riarrangiamo l'equazione dividendo per il processo Z_t e portiamolo all'interno dell'operatore di differenziazione. Troviamo:

$$(A.2.3) \quad d[\log Z_t] = \mu dt + \sigma dW_t$$

Rifacendoci alla regola della catena introdotta in precedenza, riconosciamo in $f(W_t, t)$ la funzione $\log Z_t$, e quindi nelle derivate parziali rispetto a t e W_t rispettivamente i termini μ e σ . Otteniamo dunque:

$$(A.2.4) \quad \log \frac{Z_T}{Z_0} = \mu T + \sigma W_T$$

che esponenziata da

$$(A.2.5) \quad Z_T^{Strat} = Z_0 e^{\mu T + \sigma W_T}$$

A.3. Integrazione secondo Itô

Nell'interpretazione di Itô si segue una procedura analoga a quella usata per Stratonovich, con la differenza che la somma di Riemann viene definita in un modo diverso.

DEFINIZIONE 6. Dati gli stessi presupposti per la definizione dell'integrale di Stratonovich, si definisce l'*integrale di Itô* una variabile stocastica $\int_0^T X_t dW_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ come limite della sommatoria

$$(A.3.1) \quad \sum_{i=0}^{k-1} X_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

per la grana della partizione che tende a zero.

L'unica differenza sta quindi nell'aver cambiato la scelta del valore del processo X_t all'interno di ogni intervallo: X_{t_i} invece che $(X_{t_{i+1}} + X_{t_i})/2$.

Avendo definito l'integrale in questo modo, non si applicano più le solite regole per il calcolo dell'integrale, ed in particolare non vale più la regola della catena. Questa viene rimpiazzata dalla *Formula di Itô* che deriviamo di seguito nel caso bidimensionale (che è quello di nostro interesse).

Per semplicità la deriviamo prima nel caso in cui ci sia un processo di diffusione di Itô X_t , che soddisfa l'equazione differenziale stocastica

$$(A.3.2) \quad dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

ove W_t è il solito processo di Wiener.

Data $f(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione scalare differenziabile due volte, espandendola in serie di Taylor al primo ordine in t e secondo ordine in x troviamo

$$(A.3.3) \quad df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \dots$$

Supponiamo ora di sostituire alla variabile reale x il nostro processo di Itô X_t . Troviamo:

$$\begin{aligned}
(A.3.4) \quad df(X_t) &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial X_t} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2} dX_t^2 + \dots = \\
&= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial X_t} (\mu_t dt + \sigma_t dW_t) + \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2} (\mu_t^2 dt^2 + 2\mu_t \sigma_t dt dW_t + \sigma_t^2 dW_t^2) + \dots
\end{aligned}$$

Ricordandoci ora che $dW_t = \mathcal{O}(t^{1/2})$ troviamo che $dt dW_t = \mathcal{O}(t^{3/2})$ che va dunque trascurato insieme al termine in dt^2 , mentre $dW_t^2 = \mathcal{O}(t)$ e possiamo quindi rimpiazzarlo con dt . In definitiva

$$(A.3.5) \quad df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu_t \frac{\partial f}{\partial X_t} + \frac{\sigma_t^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2} \right) dt + \sigma_t \frac{\partial f}{\partial X_t} dW_t + \dots$$

Nel nostro caso (equazione A.1.1) al processo di Itô si sostituisce il processo di GBM Z_t . Seguendo una procedura analoga troviamo che al secondo ordine deve valere la relazione

$$(A.3.6) \quad df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu Z_t \frac{\partial f}{\partial Z_t} + \frac{\sigma^2 Z_t^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial Z_t^2} \right) dt + \sigma Z_t \frac{\partial f}{\partial Z_t} dW_t + \dots$$

Abbiamo infine che la funzione è $f(Z_t, t) = \log Z_t$. Calcoliamo dunque le quantità presenti all'interno della formula di Itô:

$$(A.3.7) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial Z_t} = \frac{1}{Z_t}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial Z_t^2} = -\frac{1}{Z_t^2}$$

che sostituite ci danno

$$(A.3.8) \quad d[\log Z_t] = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t$$

Ora possiamo procedere semplicemente col calcolo dell'integrale in $[0, T]$ ottenendo

$$(A.3.9) \quad Z_T^{It\hat{o}} = Z_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)T + \sigma W_T}$$

A.4. Confronto tra Itô e Stratonovich

Confrontando le due soluzioni (equazione A.2.5 vs. A.3.9), si nota che di diverso c'è semplicemente un termine moltiplicativo $e^{-\sigma^2 T/2}$. In generale, i due metodi di integrazione sono legati infatti dalla relazione

$$(A.4.1) \quad \int_0^T f(W_t, t) \circ dW_t = \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\partial f}{\partial W_t}(W_t, t) dt + \int_0^T f(W_t, t) dt$$

Bisogna quindi chiedersi se seguire un metodo piuttosto che un altro possa portare a risultati diversi.

Nel caso specifico di un GBM questo risultato dipenderà dai valori che assumono i parametri μ e σ , o meglio dal loro rapporto. Notiamo infatti che nel limite $\mu \gg \sigma$ le due soluzioni coincidono, infatti

$$(A.4.2) \quad \lim_{\mu \gg \sigma} Z_t^{It\hat{o}} = \lim_{\mu \gg \sigma} Z_0 e^{\mu(1 - \sigma^2/2\mu)t + \sigma W_t} = Z_0 e^{\mu t + \sigma W_t} \equiv Z_t^{strat}$$

Se abbiamo μ e σ con valori inferiori ad uno, questa condizione si verifica già quando μ è dello stesso ordine di σ . In figura A.1.1 sono riportate due simulazioni

di GBM per due set di parametri differenti: come si può notare, nel caso in cui si ha $\mu \sim \sigma$ i due tipi di integrazione essenzialmente coincidono.

Integrazione numerica di SDE

Un'equazione differenziale stocastica (SDE) ammette soluzioni che, a differenza delle equazioni differenziali ordinarie (ODE), non sono univocamente determinate dalle condizioni iniziali, ma sono dei processi stocastici continui nel tempo. I metodi numerici per risolvere le SDE sono basati su tecniche simili a quelle utilizzate per la risoluzione delle ODE, ma si differenziano da queste in quanto devono tenere conto della dinamica stocastica che le è propria.

Come per le ODE, anche in questo caso sarà possibile definire la *convergenza* di una soluzione numerica. In questo potremo però definire due tipi di convergenze, chiamati *forte* e *debole*: la convergenza forte è l'analogo della convergenza per le ODE, e guarda cioè ad una media dell'errore, mentre la convergenza debole non ha un corrispettivo e da una stima dell'errore della media.

Nei paragrafi seguenti verranno definiti i due criteri di convergenza e diversi metodi di integrazione numerica per SDE interpretate secondo Itô, spiegando le ragioni che hanno portato alla scelta di un metodo piuttosto che un altro per l'integrazione dell'equazione di Black-Scholes.

B.1. Metodo di Euler-Mayurama

Il modo più semplice per approssimare numericamente le soluzioni di ODE è il metodo di Eulero. Il metodo di Euler-Mayruana (EM) è il suo analogo per le SDE.

Per ottenere una soluzione approssimata in un interallo $[0, T]$, lo partizioniamo in n sottointervalli delimitati dai punti

$$(B.1.1) \quad 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T$$

Indicheremo con $\{w_i\}_{i=1,n}$ i valori che assume la soluzione approssimata valutata in ciascuno dei punti della griglia di partizione. Dato dunque il problema di risolvere una SDE con la condizione iniziale

$$(B.1.2) \quad \begin{cases} dX_t = a(t, X_t) dt + b(t, X_t) dW_t \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

La soluzione di Euler-Mayurana sarà data da

$$(B.1.3) \quad \begin{cases} w_0 = 0 \\ w_{i+1} = w_i + a(t_i, w_i)\Delta t_i + b(t_i, w_i)\Delta W_i \end{cases}$$

ove le quantità introdotte sono

$$(B.1.4) \quad \Delta t_i = t_{i+1} - t_i$$

$$(B.1.5) \quad \Delta W_i = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$$

Per simulare il moto Browniano ΔW_i è sufficiente generare un numero casuale z_i che segue $\mathcal{N}(0, 1)$ (cioè la distribuzione normale con media 0 e varianza 1), e porre

$$(B.1.6) \quad \Delta W_i = z_i \sqrt{\Delta t_i}$$

In questo termine la soluzione si differenzia dal caso deterministico. Ogni insieme di $\{w_0, \dots, w_n\}$ prodotti dalla risoluzione di Euler-Maruyama è una realizzazione approssimata del processo stocastico X_t che dipende dai numeri casuali z_i che sono stati scelti: dato che W_t è un processo stocastico, ogni realizzazione sarà differente, e lo saranno quindi anche le approssimazioni.

Come esempio, vediamo la soluzione numerica del modello di Black-Scholes (equazione A.1.1) che ammette soluzione esatta: l'equazione di Euler-Maruyama in questo caso assume la forma

$$(B.1.7) \quad \begin{cases} w_0 = X_0 \\ w_{i+1} = w_i + \mu w_i \Delta t_i + \sigma w_i \Delta W_i \end{cases}$$

Ora definiamo i criteri di convergenza, che ci permettono di capire perché sia necessario introdurre un metodo di integrazione più efficiente per il caso dell'equazione di Black-Scholes.

B.2. Convergenza forte di metodi risolutori di SDE

La definizione di convergenza è simile allo stesso concetto per metodi di integrazione di ODE, con la differenza causata dal fatto che la soluzione di una SDE è

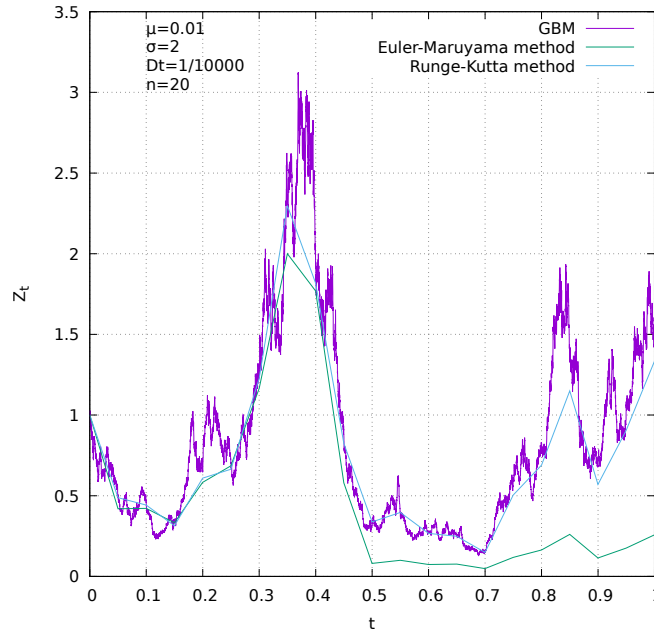


FIGURA B.0.1. Confronto dei metodi di integrazione di Euler-Maruyama e Runge-Kutta nel caso di una realizzazione di GBM (soluzione dell'equazione di Black-Scholes A.1.1)

un processo stocastico, ed ogni soluzione è solo una realizzazione di tale processo. Ogni soluzione approssimata w_t valutata su un punto qualsiasi della partizione è definita in funzione di una variabile stocastica, e quindi lo è anche essa a sua volta. Fissato dunque un istante \bar{t} , la differenza tra il processo che risolve l'equazione e l'approssimazione sarà a sua volta una variabile stocastica che definiamo

$$(B.2.1) \quad e_{\bar{t}}(\Delta t) = X_{\bar{t}} - w_{\bar{t}}$$

ove Δt rappresenta la lunghezza dei sottointervalli con cui abbiamo partizionato $[0, T]$.

DEFINIZIONE 7. Diremo che un'approssimazione w_t caratterizzata da uno step di integrazione Δt *converge fortemente* alla soluzione X_t al tempo t se

$$(B.2.2) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbb{E} \{|e_t(\Delta t)|\} = 0$$

ove \mathbb{E} denota il valore di aspettazione per diverse realizzazioni del processo.

Per quantificare la velocità con cui un metodo converge alla soluzione introduciamo il concetto di ordine.

DEFINIZIONE 8. Un'approssimazione di una risoluzione di un SDE avrà una *convergenza forte di ordine m rispetto allo step di integrazione* se

$$(B.2.3) \quad \mathbb{E} \{|e_t(\Delta t)|\} = \mathcal{O}((\Delta t)^m)$$

per Δt sufficientemente piccoli.

Questa definizione generalizza il criterio di convergenza per metodi risolutori di ODE, riducendosi ad esso nel caso in cui vengano a mancare le componenti stocastiche.

Per le ODE il metodo di Eulero ha convergenza di ordine 1, tuttavia è stato provato che la convergenza forte di Euler-Maruyama per le SDE è 1/2 (Gikham e Skorokhod, 1972 [44]) con determinate condizioni poste sulle funzioni a e b definite in B.1.2.

Per ottenere metodi di ordine forte superiore è necessario aggiungere un termine nella serie di Taylor stocastica del metodo usato. Un esempio di ordine forte 1 è stato formulato da Milstein [45]:

$$(B.2.4) \quad \begin{cases} w_0 = & X_0 \\ w_{i+1} = & w_i + a(t_i, w_i)\Delta t_i + b(t_i, w_i)\Delta W_i + \\ & + \frac{1}{2}b(t_i, w_i)\frac{\partial b}{\partial X}(t_i, w_i)(\Delta W_i^2 - \Delta t_i) \end{cases}$$

Il problema di questi metodi è che contengono derivate, che devono quindi essere calcolate prima di implementare il metodo oppure definite come rapporti incrementali, con il rischio però di trovare valori infiniti a causa di approssimazioni per Δt troppo piccoli. Per risolvere questo problema bisogna sfruttare altre informazioni per rimpiazzare quelle date dalle derivate, come ad esempio valutare ulteriori valori assunti dalla funzione nel punto medio dell'intervallo: questo approccio è quello seguito dai metodi di Runge-Kutta, che tratteremo in dettaglio nel paragrafo B.4.

Metodi di ordine superiore sono stati sviluppati, ma diventano di volta in volta più complicati al crescere dell'ordine, col risultato di avere un costo computazionale troppo eccessivo e tempi di calcolo troppo lunghi.

Inoltre è anche giusto chiedersi se abbia senso andare a ricercare soluzioni di ordine superiore per il nostro problema: nelle ODE di solito si assume che le condizioni iniziali e le equazioni da studiare siano conosciute con precisione elevata. In questo caso ha quindi senso chiedersi se sia possibile calcolare soluzioni che abbiano la stessa accuratezza delle condizioni iniziali, e quindi ricercare metodi risolutori di ordine superiore. Nel contesto delle SDE (soprattutto se le condizioni iniziali vengono scelte da una distribuzione di probabilità) i benefici portati dall'utilizzo di metodi di ordine forte superiore sono meno importanti, e bisogna quindi sempre mettere sulla bilancia anche il costo computazionale richiesto.

Un altro criterio che invece può rendersi più utile nel caso delle SDE è quello della *convergenza debole*, che viene trattato nel paragrafo seguente.

B.3. Convergenza debole di metodi risolutori di SDE

La convergenza forte permette di calcolare approssimazioni accurate di singole realizzazioni del processo stocastico in oggetto. In alcune applicazioni, una conoscenza così dettagliata del percorso è richiesta, ed ha quindi senso utilizzare metodi con alto ordine di convergenza forte. In altri campi, come ad esempio in finanza, è più importante riprodurre accuratamente la distribuzione di probabilità della soluzione X_t ad un dato tempo, e le singole realizzazioni non sono quindi di interesse primario.

Per formalizzare questa richiesta viene introdotto il concetto di *convergenza debole*. I metodi deboli spesso hanno forma più semplice rispetto ai metodi forti, in quanto viene solo richiesto di riprodurre accuratamente la distribuzione di probabilità.

DEFINIZIONE 9. Si dice che una approssimazione $w_t(\Delta t)$ (caratterizzata dall'incremento finito Δt) *converge debolmente* alla soluzione X_t se

$$(B.3.1) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbb{E} \{f(w_t(\Delta t))\} = \mathbb{E} \{f(X_t)\}$$

per ogni $f(x)$ funzione polinomiale.

Data questa definizione, segue che tutti i momenti convergono per $\Delta t \rightarrow 0$, che era quello che volevamo formalizzare. Notiamo anche che nel caso che la parte stocastica dell'equazione sia zero la definizione è in accordo con il criterio di convergenza forte per le SDE e quello di convergenza per le ODE.

Come per la convergenza forte, anche in questo caso è possibile definire per un metodo un ordine di convergenza debole.

DEFINIZIONE 10. Diremo che un metodo risolutore di SDE *ha una convergenza debole di ordine m rispetto allo step di integrazione* se

$$(B.3.2) \quad |\mathbb{E} \{f(X_t)\} - \mathbb{E} \{f(w_t(\Delta t))\}| = \mathcal{O}((\Delta t)^m)$$

per Δt sufficientemente piccoli.

Dato un metodo risolutore, in generale, i due ordini di convergenza non sono gli stessi. Per esempio si trova che il metodo di Euler-Maruyama, che ha una convergenza forte di ordine $1/2$, ha una convergenza debole di ordine 1 .

Di seguito riportiamo un metodo di Runge-Kutta che ha entrambi gli ordini di convergenza pari a 1 e che può essere esteso ad equazioni vettoriali fra loro correlate (che è il caso che si presenta nel nostro problema).

B.4. Metodo di Runge-Kutta

Questo metodo è un adattamento dello schema di Runge-Kutta al II ordine per le ODE. È stato esteso per le SDE da Kloeden e Platen nel 1992 [46] alla ricerca di un metodo che non implicasse l'utilizzo del calcolo di derivata. Un lavoro preliminare era già stato fatto da Chang per metodi risolutori deboli nel 1987 [47]. Di seguito riportiamo lo schema:

$$(B.4.1) \quad \begin{cases} w_0 = & X_0 \\ w_{i+1} = & w_i + a(w_i)\Delta t_i + b(w_i)\Delta W_i + \\ & + \frac{1}{2}[b(\tilde{w}_i) - b(w_i)] (\Delta W_i^2 - \Delta t_i) / \sqrt{\Delta t_i} \\ \tilde{w}_i = & w_i + b(w_i)\sqrt{\Delta t_i} \end{cases}$$

Questo metodo si presta bene al nostro caso in quanto fornisce sia un ordine di convergenza forte, sia un ordine di convergenza debole pari ad 1.

Altra peculiarità di questo metodo è il fatto che può essere esteso [48] al caso in cui si abbia a che fare con una SDE vettoriale d -dimensionale (cioè un sistema di d equazioni stocastiche) in cui le equazioni sono correlate le une con le altre.

Se ora indichiamo con \vec{X}_t il processo stocastico vettoriale che dovrà soddisfare all'equazione

$$(B.4.2) \quad d\vec{X}_t = \vec{a}(t, \vec{X}_t) dt + \vec{b}(t, \vec{X}_t) dW_t$$

e con $\{\vec{w}_i\}_{0=1,N}$ l'approssimazione valutata sui punti della solita partizione dell'intervallo $[0, T]$, lo schema di Runge-Kutta da seguire è

$$(B.4.3) \quad \begin{cases} \vec{w}_0 = \vec{X}_0 \\ \vec{w}_{i+1} = \vec{w}_i + \frac{\vec{K}_{1,i} + \vec{K}_{2,i}}{2} \\ \vec{K}_{1,i} = \vec{a}(t_i, \vec{w}_i)\Delta t_i + \vec{b}(t_i, \vec{w}_i) (\Delta W_i - S_i\sqrt{\Delta t_i}) \\ \vec{K}_{2,i} = \vec{a}(t_{i+1}, \vec{w}_i + \vec{K}_{1,i})\Delta t_i + \vec{b}(t_{i+1}, \vec{w}_i + \vec{K}_{1,i}) (\Delta W_i + S_i\sqrt{\Delta t_i}) \end{cases}$$

ove S_i è una variabile casuale che può assumere i valori ± 1 entrambi con probabilità $1/2$.

Notiamo la vicinanza col metodo analogo per le ODE: se eliminiamo il termine stocastico (basta porre $\vec{b} = 0$) ritroviamo esattamente il caso deterministico ben noto di Runge-Kutta al II ordine. Questa connessione ci dice anche qualcosa in più: ci aspettiamo infatti che per sistemi con basso rumore l'integrazione della SDE sia solo di poco peggiore rispetto a quella per le ODE. Infatti si può dimostrare con degli esempi applicativi [48] che nonostante la convergenza forte sia $\mathcal{O}(\Delta t)$, gli errori che si ottengono sono ulteriormente ridotti.

Il sistema è facilmente adattabile al caso di SDE integrate secondo Stratonovich semplicemente ponendo tutti gli $S_i = 0$ nel corso di tutta l'evoluzione.

Valutiamo ora questo metodo nel caso specifico dell'equazione di Black-Scholes A.1.1. Dimostriamo innanzitutto la consistenza del metodo, cioè che lo schema per l'equazione vettoriale B.4.3 si riduce a quello scalare B.4.1 nel caso in oggetto.

Lo schema risolutore di dato dal metodo scalare è

$$(B.4.4) \quad \begin{cases} w_0 = X_0 \\ w_{i+1} = w_i + \mu w_i \Delta t_i + \sigma w_i \Delta W_i + \frac{1}{2} \sigma^2 w_i (\Delta W_i^2 - \Delta t_i) \end{cases}$$

Valutiamo ora i due K_i dati dal metodo vettoriale con $a(w_i) = \mu w_i$ e $b(w_i) = \sigma w_i$:

$$(B.4.5) \quad \begin{aligned} K_{1,i} &= w_i \left(\mu \Delta t_i + \sigma \left(\Delta W_i - S_i \sqrt{\Delta t_i} \right) \right) \\ K_{2,i} &= (w_i + K_{1,i}) \left(\mu \Delta t_i + \sigma \left(\Delta W_i + S_i \sqrt{\Delta t_i} \right) \right) \end{aligned}$$

Ora dobbiamo valutare la quantità $K_{1,i} + K_{2,i}$ ed in questo calcolo troviamo che i termini in cui compare S_i si eliminano, e che resta un termine S_i^2 che però è identicamente 1 in ogni caso:

$$(B.4.6) \quad \begin{aligned} K_{1,i} + K_{2,i} &= 2(\mu w_i \Delta t_i + \sigma w_i \Delta W_i) + \\ &\quad + w_i \left((\mu \Delta t_i + \sigma \Delta W_i)^2 - \sigma^2 \Delta t_i \right) \end{aligned}$$

Per procedere ora dobbiamo ricordarci che $\Delta W_i = \mathcal{O}(\sqrt{\Delta t_i})$ e che dobbiamo limitarci al più a termini di ordine 1, trascurando termini del tipo Δt_i^2 e $\Delta t_i \Delta W_i$. Con questi accorgimenti troviamo che

$$(B.4.7) \quad \begin{aligned} w_{i+1} &= w_i + \frac{K_{1,i} + K_{2,i}}{2} = \\ &= w_i + \mu w_i \Delta t_i + \sigma w_i \Delta W_i + \frac{1}{2} \sigma^2 w_i (\Delta W_i^2 - \Delta t_i) \end{aligned}$$

che coincide con il risultato trovato prima per il metodo scalare.

Per concludere applichiamo infine lo schema alla realizzazione di un GBM insieme al metodo di Euler-Mayurama, così da avere un riscontro grafico (figura B.0.1): sono ben evidenti le migliorie introdotte dal metodo di Runge-Kutta.

Decomposizione di Cholesky

In algebra lineare, la decomposizione (o fattorizzazione) di Cholesky è la decomposizione di una matrice Hermitiana definita positiva nel prodotto di una matrice triangolare inferiore per la sua trasposta coniugata.

Questa decomposizione è utilizzata soprattutto nell'ambito della risoluzione di sistemi di equazioni lineari (il suo algoritmo è numericamente più stabile e quasi due volte più efficiente di quello della ben nota *decomposizione LU*¹ [49]), per l'inversione di matrici e per simulazioni di Montecarlo di sistemi a più variabili tra loro correlate.

La tecnica formulata originariamente da Cholesky, vista la sua struttura prende anche il nome di *decomposizione LLT*, mentre una sua variante consiste nella decomposizione prende il nome di *decomposizione LDLT* (si introduce una matrice diagonale oltre alla triangolare). Questa variante permette di evitare il calcolo di radici quadrate, ed è quindi più indicata nel caso si abbia a che fare con sistemi con quantità troppo piccole che potrebbero generare termini negativi a causa di approssimazioni.

Di seguito riportiamo entrambi i metodi, con i relativi algoritmi da implementare in un codice di programmazione.

C.1. Decomposizione LLT

Ricordiamo brevemente alcune nozioni di base di algebra lineare che servono a comprendere l'applicabilità dell'algoritmo.

DEFINIZIONE 11. Una matrice quadrata $n \times n$ $A = \{a_{ij}\}$ si dice *Hermitiana* se le sue entrate coincidono con quelle della sua trasposta coniugata, cioè se $a_{ij} = a_{ji}^*$.

Nel caso di matrici reali si parlerà semplicemente di matrice simmetrica e di matrice trasposta.

DEFINIZIONE 12. Una matrice quadrata $n \times n$ $A = \{a_{ij}\}$ si dice *definita positiva* se per ogni vettore non identicamente nullo $x \in \mathbb{C}^n$ vale la relazione

$$(C.1.1) \quad x^* A x > 0$$

ove con x^* si indica il vettore coniugato trasposto di x .

Se una matrice A è sia Hermitiana che definita positiva, si può provare [50] che esiste un'unica matrice triangolare inferiore L tale che valga la decomposizione

$$(C.1.2) \quad A = LL^\dagger$$

¹La decomposizione LU decompone una matrice nel prodotto di una triangolare inferiore e di una triangolare superiore, quindi la decomposizione di Cholesky è un suo caso particolare in cui la seconda matrice è la trasposta della prima.

Creiamo ora un algoritmo per eseguire la decomposizione, partendo dall'esempio di una matrice 3×3 . Posto

$$(C.1.3) \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{12} & l_{22} & 0 \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ 0 & l_{22} & l_{23} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

eseguiamo la moltiplicazione al membro destro ed eguagliamo i termini corrispondenti ottenendo 6 equazioni. Per la prima colonna

$$(C.1.4) \quad l_{11} = \sqrt{a_{11}}; \quad l_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}}; \quad l_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}}$$

mentre per la seconda

$$(C.1.5) \quad l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{12}^2}; \quad l_{23} = \frac{a_{23} - l_{12}l_{13}}{l_{22}}$$

ed infine per la terza

$$(C.1.6) \quad l_{3,3} = \sqrt{a_{33} - l_{13}^2 - l_{23}^2}$$

L'estensione al caso $n \times n$ è immediata: si riconosce subito un pattern che si ripete per gli elementi diagonali ed uno per quelli fuori. Per i primi avremo

$$(C.1.7) \quad l_{i,i} = \left(a_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{k,i}^2 \right)^{1/2}$$

mentre per i restanti

$$(C.1.8) \quad l_{i,j} = \frac{a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{k,i}l_{k,j}}{l_{i,i}}$$

Si può notare che il numeratore dei termini fuori diagonale, nel caso $i = j$ diventi identico all'argomento della radice per i termini diagonali. Un algoritmo per fattorizzare il generico termine $l_{i,j}$ può essere quindi formulato in due semplici step [51]:

- (1) Calcolare il numeratore dell'equazione per i termini fuori diagonale.
- (2) Se $i < j$ allora $l_{i,j}$ sarà la radice di tale quantità, altrimenti basta dividere per $l_{i,i}$.

Quindi per fattorizzare il termine $l_{i,j}$ è necessario avere già fattorizzato tutti gli elementi della colonna i -esima (ricordiamo che $i < j$) e tutti i termini della colonna j -esima con indice di colonna $< j$. Quindi è sufficiente procedere a fattorizzare gli $l_{i,j}$ per colonne in ordine crescente per avere tutti i termini necessari².

Nel calcolo bisogna fare attenzione in quanto per i termini diagonali si calcola una radice quadrata. Il fatto che l'argomento sia positivo dovrebbe essere garantito dalla richiesta che la matrice A sia definita positiva. Tuttavia nelle risoluzioni numeriche bisogna stare attenti che (in caso di quantità troppo piccole in gioco) a causa di approssimazioni la quantità in oggetto non diventi negativa. Per questo motivo è meglio perfezionare la tecnica e sviluppare un altro metodo per evitare l'impiego di radici.

²Sempre in [51] si dimostra che il numero di flops eseguiti dall'algoritmo di Cholesky per una matrice $n \times n$ è $n^3/3$ con una precisione di $\mathcal{O}(n^2)$.

C.2. Decomposizione LDLT

La decomposizione LDLT offre una soluzione a questo problema, oltre al fatto di poter essere applicato a tutte le matrici simmetriche senza richiedere che siano definite positive. Inoltre il costo computazionale resta inalterato rispetto al metodo precedente.

Viene introdotta una matrice diagonale $D = \{d_{i,i}\}$ nella decomposizione, che permette di porre uguali ad 1 i termini diagonali della matrice L (e quindi L^\dagger). La decomposizione avrà la forma

$$(C.2.1) \quad A = LDL^\dagger$$

La connessione col metodo LLT la si trova definendo la matrice $D^{1/2}$ cioè la "radice" della matrice D , che soddisfa la relazione $D = D^{1/2} (D^\dagger)^{1/2}$. Questa matrice la si trova facilmente in quando D è diagonale. Sostituendo e riarrangiando i termini si trova

$$(C.2.2) \quad A = LD^{1/2}D^{1/2}L^\dagger = LD^{1/2} (D^\dagger)^{1/2} L^\dagger = LD^{1/2} (LD^{1/2})^\dagger$$

Come in precedenza, nel caso di una matrice reale 3×3 avremo questa situazione

$$(C.2.3) \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{12} & 1 & 0 \\ l_{13} & l_{23} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_{12} & l_{13} \\ 0 & 1 & l_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Moltiplicando il termine destro e ponendo le uguaglianze termine per termine si trovano facilmente delle relazioni analoghe a quelle precedenti:

$$(C.2.4) \quad d_{j,j} = a_{j,j} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{j,k}^2 d_{k,k}$$

$$(C.2.5) \quad l_{i,j} = \frac{a_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{i,k} d_{k,k} l_{j,k}}{d_{j,j}}$$

Il numero di termini da calcolare resta lo stesso del metodo LLT ($n(n+1)/2$) e le sommatorie per ogni termine sono sempre nello stesso intervallo (da 1 a $j-1$): il costo computazionale resta dunque invariato.

Notiamo infine che anche in questo caso il numeratore dei termini $l_{i,j}$ nel caso in cui $i = j$ diventa proprio il termine della matrice diagonale, e che quindi si può utilizzare lo stesso algoritmo risolutivo di prima con le nuove quantità.

Bibliografia

- [1] Bassett, Danielle S., David L. Alderson, and Jean M. Carlson. "Collective decision dynamics in the presence of external drivers." *Physical Review E* 86.3 (2012): 036105.
- [2] Leshansky, A. M., and L. M. Pismen. "Do small swimmers mix the ocean?." *Physical Review E* 82.2 (2010): 025301.
- [3] Adair, Robert K. "Stochastic contributions to global temperature changes." *Physical review letters* 100.14 (2008): 148501.
- [4] Wolfram, Stephen. "Statistical mechanics of cellular automata." *Reviews of modern physics* 55.3 (1983): 601.
- [5] Eguiluz, Victor M., et al. "Scale-free brain functional networks." *Physical review letters* 94.1 (2005): 018102.
- [6] Anderson, Philip W. "More is different." *Science* 177.4047 (1972): 393-396.
- [7] Heckscher, Eli F. "Utrikeshandelns verkan på inkomstfördelningen. Några teoretiska grundlinjer." *Ekonomisk tidskrift* (1919): 1-32.
- [8] Ohlin, Bertil. "Till frågan om penningteoriens uppläggning." *Ekonomisk tidskrift häft 2* (1933): 45-81.
- [9] Samuelson, Paul A. "International factor-price equalisation once again." *The economic journal* 59.234 (1949): 181-197.
- [10] Krugman, Paul R. "Increasing returns, monopolistic competition, and international trade." *Journal of international Economics* 9.4 (1979): 469-479.
- [11] Leamer, Edward E., and James Levinsohn. "International trade theory: the evidence." *Handbook of international economics* 3 (1995): 1339-1394.
- [12] Arrow, Kenneth. "Economic welfare and the allocation of resources for invention." *The rate and direction of inventive activity: Economic and social factors*. Princeton University Press, 1962. 609-626.
- [13] Bardhan, Pranab K. "Economic growth, development, and foreign trade." Wiley, New York (1970).
- [14] Jaffe, Adam B. "Technological opportunity and spillovers of R&D: evidence from firms' patents, profits and market value." (1986).
- [15] Jaffe, Adam B., Manuel Trajtenberg, and Rebecca Henderson. "Geographic localization of knowledge spillovers as evidenced by patent citations." *the Quarterly journal of Economics* (1993): 577-598.

- [16] Hausmann, Ricardo, and Bailey Klinger. "Structural transformation and patterns of comparative advantage in the product space." (2006).
- [17] Serrano, Ma Angeles, and Marián Boguná. "Topology of the world trade web." *Physical Review E* 68.1 (2003): 015101.
- [18] Hidalgo, César A., et al. "The product space conditions the development of nations." *Science* 317.5837 (2007): 482-487.
- [19] Caraglio, Michele, Fulvio Baldovin, and Attilio L. Stella. "Export dynamics as an optimal growth problem in the network of global economy." *Scientific Reports* 6 (2016).
- [20] Tinbergen, Jan. "Shaping the world economy; suggestions for an international economic policy." Books (Jan Tinbergen) (1962).
- [21] Nelson, David R., and Nadav M. Shnerb. "Non-Hermitian localization and population biology." *Physical Review E* 58.2 (1998): 1383.
- [22] Bouchaud, Jean-Philippe, and Marc Potters. *Theory of financial risk and derivative pricing: from statistical physics to risk management*. Cambridge university press, 2003.
- [23] Kardar, Mehran, Giorgio Parisi, and Yi-Cheng Zhang. "Dynamic scaling of growing interfaces." *Physical Review Letters* 56.9 (1986): 889.
- [24] AL-Barabasi, H. E. "Stanley, Fractal Concepts in Surface Growth." (1995).
- [25] Halpin-Healy, Timothy, and Yi-Cheng Zhang. "Kinetic roughening phenomena, stochastic growth, directed polymers and all that. Aspects of multidisciplinary statistical mechanics." *Physics reports* 254.4 (1995): 215-414.
- [26] J.P. Bouchaud e M. Mézard, Wealth condensation in a simple model of economy, *Physica (Amsterdam)* 282A, 536 (2000).
- [27] T. Guedré, A. Dobrinevski e J.P Bouchaud, Explore or Exploit? A Generic Model and an Exactly Solvable Case. *Physical Review Letters* 112, 050602 (2014).
- [28] March, James G. "Exploration and exploitation in organizational learning." *Organization science* 2.1 (1991): 71-87.
- [29] Tacchella, Andrea, et al. "A new metrics for countries' fitness and products' complexity." *Scientific reports* 2 (2012).
- [30] Shannon, Claude Elwood. "A mathematical theory of communication." *ACM SIGMOBILE Mobile Computing and Communications Review* 5.1 (2001): 3-55.
- [31] Cristelli, Matthieu, Andrea Tacchella, and Luciano Pietronero. "The heterogeneous dynamics of economic complexity." *PloS one* 10.2 (2015): e0117174.
- [32] Feenstra, Robert C., et al. *World trade flows: 1962-2000*. No. w11040. National Bureau of Economic Research, 2005.
- [33] <http://comtrade.un.org/>
- [34] <http://unstats.un.org/unsd/cr/registry/regcst.asp?CI=14>
- [35] Van Kampen, Nicolaas Godfried. *Stochastic processes in physics and chemistry*. Vol. 1. Elsevier, 1992.

- [36] Ciccarelli, Matteo, and Benoit Mojon. "Global inflation." *The Review of Economics and Statistics* 92.3 (2010): 524-535.
- [37] data.worldbank.org
- [38] data.oecd.org/proge/inflation_cpi.htm
- [39] Hogg, Robert Vincent, and Allen Thornton Craig. *Introduction to Mathematical Statistics*: 3d Ed. Macmillan, 1970.
- [40] Pearson, Karl. "Mathematical contributions to the theory of evolution. III. Regression, heredity, and panmixia." *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character* 187 (1896): 253-318.
- [41] Reed, William J., and Murray Jorgensen. "The double Pareto-lognormal distribution—a new parametric model for size distributions." *Communications in Statistics-Theory and Methods* 33.8 (2004): 1733-1753.
- [42] Ijiri, Yuji, and Herbert A. Simon. "Some distributions associated with Bose-Einstein statistics." *Proceedings of the National Academy of Sciences* 72.5 (1975): 1654-1657.
- [43] Black, Fischer, and Myron Scholes. "The pricing of options and corporate liabilities." *The journal of political economy* (1973): 637-654.
- [44] Gikhman, Iosif Il'ich, and Anatoliĭ Vladimirovich Skorokhod. "The theory of random processes(Russian book)." Moscow, Izdatel'stvo Nauka(Teoriia Veroiatnostei i Matematicheskaia Statistika. 3 (1975).
- [45] Milstein, Grigorii Noikhovich. *Numerical integration of stochastic differential equations*. Vol. 313. Springer Science & Business Media, 1995: 557-562.
- [46] Kloeden, Peter E., and Eckhard Platen. "Higher-order implicit strong numerical schemes for stochastic differential equations." *Journal of statistical physics* 66.1-2 (1992): 283-314.
- [47] Chang, Chien Cheng. "Numerical solution of stochastic differential equations with constant diffusion coefficients." *Mathematics of computation* 49.180 (1987): 523-542.
- [48] Roberts, A. J. "Modify the Improved Euler scheme to integrate stochastic differential equations." *arXiv preprint arXiv:1210.0933* (2012).
- [49] Press, William H., et al. "Numerical recipes in C: the art of scientific programming." Section 10 (1992): 408-412.
- [50] Fang, Haw-ren. "Analysis of Block LDL^T Factorizations for Symmetric Indefinite Matrices." (2007).
- [51] Watkins, David S. "Fundamentals of Matrix Computations John Wiley & Sons." Inc., New York, NY (1991).