

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA



DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

ANNO ACCADEMICO 2009-2010

TESI DI LAUREA SPECIALISTICA

SVILUPPO DI UN POLARIMETRO  
PER L'ANALISI  
DI UN CANALE QUANTISTICO  
FRA LA TERRA E LO SPAZIO

RELATORE: Ch.mo Prof. Paolo Villoresi

CORRELATORE: Ing. Andrea Tomaello

LAUREANDO: Alberto Dall'Arche

PADOVA, 9 MARZO 2010



*a mio nonno Giovanni*



---

# Indice

---

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>La polarizzazione</b>	<b>5</b>
2.1	Stato di polarizzazione di un'onda luminosa . . . . .	5
2.1.1	Rappresentazione generale . . . . .	5
2.1.2	Ellisse di polarizzazione . . . . .	6
2.2	Formalismo di Jones . . . . .	7
2.3	I parametri di Stokes . . . . .	8
2.3.1	Il vettore di Stokes . . . . .	8
2.3.2	Onda completamente polarizzata . . . . .	9
2.3.3	Onda non polarizzata . . . . .	10
2.3.4	Teorema di decomposizione . . . . .	10
2.4	La matrice di coerenza . . . . .	10
2.4.1	Definizione . . . . .	10
2.4.2	Grado di polarizzazione . . . . .	11
2.4.3	Il concetto di entropia . . . . .	12
2.5	La sfera di Poincaré . . . . .	13
2.5.1	La sfera di Poincaré e i parametri di Stokes . . . . .	13
2.5.2	Rappresentazione di alcuni stati di polarizzazione . . . . .	14
<b>3</b>	<b>La matrice di Mueller</b>	<b>17</b>
3.1	Introduzione . . . . .	17
3.2	La matrice di Mueller di un polarizzatore . . . . .	19
3.3	La matrice di Mueller di una lamina ritardatrice . . . . .	24

3.4	La matrice di Mueller di un rotatore . . . . .	27
3.5	La matrice di Mueller di un elemento polarizzante ruotato . . . . .	30
3.6	Generazione di uno stato di polarizzazione generico . . . . .	34
3.7	La sfera di Poincaré di alcuni dispositivi polarizzanti ruotati . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Analisi della matrice di Mueller</b>	<b>39</b>
4.1	La matrice di Mueller-Jones . . . . .	39
4.1.1	Definizione . . . . .	39
4.1.2	La decomposizione polare . . . . .	40
4.1.3	Condizioni sulla matrice di Mueller-Jones . . . . .	41
4.1.4	Sistemi ottici fisicamente realizzabili . . . . .	43
4.1.5	Analisi dei problemi di polarizzazione . . . . .	45
4.2	La depolarizzazione . . . . .	45
4.2.1	Definizione . . . . .	45
4.2.2	Depolarizzazione isotropica . . . . .	46
4.2.3	Depolarizzazione anisotropica . . . . .	48
4.2.4	Indice di depolarizzazione . . . . .	48
4.2.5	Entropia di una matrice di Mueller . . . . .	49
4.2.6	Rappresentazione di sistemi ottici depolarizzanti sulla sfera di Poincaré	49
<b>5</b>	<b>Polarimetria di Stokes</b>	<b>53</b>
5.1	Introduzione . . . . .	53
5.2	Polarimetria a elementi rotanti . . . . .	54
5.2.1	Polarizzatore ad analizzatore rotante . . . . .	55
5.2.2	Polarimetro ad analizzatore rotante e analizzatore fisso . . . . .	57
5.2.3	Polarimetro a ritardatore rotante e analizzatore fisso . . . . .	57
5.2.4	Polarizzatore a ritardatore e analizzatore rotanti . . . . .	58
5.2.5	Polarizzatore a ritardatore e analizzatore rotanti e analizzatore fisso	58
5.3	Polarimetria a elementi oscillanti . . . . .	58
5.4	Polarimetria a modulazione di fase . . . . .	59
5.4.1	Polarimetro ad analizzatore fisso e modulatore di fase . . . . .	59
5.4.2	Polarimetro ad analizzatore fisso e doppio modulatore di fase . . . . .	61
5.5	Tecniche di misura simultanea degli elementi del vettore di Stokes . . . . .	61

5.5.1	Polarimetria a divisione di fronte d'onda . . . . .	62
5.5.2	Polarimetria a divisione di ampiezza . . . . .	62
<b>6</b>	<b>Polarimetria della matrice di Mueller</b>	<b>71</b>
6.1	Introduzione . . . . .	71
6.1.1	Polarimetri a elementi rotanti . . . . .	72
6.1.2	Polarimetri a modulazione di fase . . . . .	74
6.2	Polarimetro a doppio ritardatore rotante . . . . .	75
6.2.1	Descrizione del polarimetro . . . . .	76
6.2.2	Analisi matematica del polarimetro . . . . .	76
6.3	Polarimetro di Mueller a quattro canali . . . . .	79
6.3.1	Analisi matematica del polarimetro . . . . .	80
<b>7</b>	<b>Scelta degli stati di polarizzazione per la misura della matrice di Mueller</b>	<b>83</b>
7.1	Metodo della massimizzazione del determinante della matrice di inversione	83
7.2	Metodo della minimizzazione della varianza equivalente ponderata . . . . .	88
7.3	Ottimizzazione dei componenti del polarimetro . . . . .	88
7.4	Valutazione del rumore in funzione del numero di stati di polarizzazione . .	89
7.5	Valutazione del rumore in funzione del numero di canali del polarimetro . .	93
<b>8</b>	<b>Stima della matrice di Mueller</b>	<b>95</b>
8.1	Metodo di stima della massima verosimiglianza . . . . .	96
8.2	Stima con l'algoritmo <i>Simulated Annealing</i> . . . . .	98
<b>9</b>	<b>Costruzione di un polarimetro di Stokes a quattro canali</b>	<b>101</b>
9.1	Progettazione del polarimetro . . . . .	101
9.2	Calibrazione del polarimetro . . . . .	105
9.2.1	Calibrazione dei fotodiodi . . . . .	105
9.2.2	Misura della matrice di calibrazione . . . . .	107
9.2.3	Misura di alcuni stati di prova . . . . .	114
9.2.4	Misura della matrice di Mueller di alcuni campioni . . . . .	114
<b>10</b>	<b>Utilizzo di un canale di <i>Satellite Laser Ranging</i> per la QC</b>	<b>125</b>
10.1	Introduzione . . . . .	125

---

10.2	Modello delle perdite per il canale di <i>Satellite Laser Ranging</i> . . . . .	125
10.3	Rapporto segnale rumore (SNR) . . . . .	128
10.4	Specifiche del <i>Matera Laser Ranging Observatory</i> (MLRO) . . . . .	129
10.5	Specifiche dei satelliti utilizzati per la misura . . . . .	130
10.6	Specifiche del ricevitore . . . . .	131
10.7	Simulazione delle perdite per la stazione di Matera . . . . .	131
10.8	Controllo retroazionato della polarizzazione in un canale quantistico . . . .	132
<b>11</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>135</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>139</b>



# CAPITOLO 1

---

## Introduzione

---

Le comunicazioni quantistiche (QC), o il trasporto degli stati quantistici nello spazio e nel tempo, sono state sviluppate come un metodo interessante per investigare le proprietà della meccanica quantistica come ad esempio la violazione delle teorie classiche di località. Successivamente le QC si sono affermate come un'applicazione per rinforzare la sicurezza nelle comunicazioni ottiche attraverso lo scambio sicuro di chiavi crittografiche (o Quantum Key Distribution QKD). Molti infatti sono i protocolli che si sono sviluppati a riguardo, come il *BB84*, il *B92*, il *Decoy State QKD* e altri ancora. Queste tecniche sono state dimostrate in primo luogo nei laboratori di ricerca, dove sono molto favorevoli le condizioni al contorno per quanto riguarda la soppressione del rumore e la sincronizzazione fra il trasmettitore e il ricevitore.

Già una decina di anni fa molti gruppi di ricerca hanno cercato di portare le comunicazioni quantistiche e in particolare la QKD al di fuori dei laboratori, nelle difficili condizioni esterne. Il passo finale nell'espansione delle QC è sicuramente lo Spazio, infatti nelle trasmissioni terrestri sono presenti restrizioni nella distanza causate dalla curvatura della terra e dalla turbolenza atmosferica. Sono stati fatti molti studi sulle comunicazioni quantistiche satellitari che riguardano la lunghezza del canale, il moto relativo, le perdite per diffrazione, la radiazione di fondo e la probabilità di errore.

Recentemente sono stati realizzati alcuni esperimenti di comunicazioni quantistiche terrestri nello spazio libero, come il link di 144 Km tra le due isole delle Canarie [1]. Al *Laser Ranging Observatory* di Matera è stata dimostrata inoltre la realizzabilità di una

comunicazione a singolo fotone tra la Terra e lo Spazio [2].

Una problema aperto sulle comunicazioni quantistiche nello Spazio riguarda la capacità di preservazione dello stato di polarizzazione da parte di telescopio e delle ottiche mobili annesse, nonché il controllo dell'allineamento tra le basi di polarizzazione del trasmettitore e del ricevitore.

In questo lavoro di tesi verrà trattato questo aspetto importante attraverso lo sviluppo di un polarimetro per analizzare le proprietà di polarizzazione di un canale quantistico fra la Terra e lo Spazio. Lo scopo principale di questo strumento è quello di misurare la matrice di Mueller di un canale classico di *Laser Ranging*. Per fare ciò verrà sfruttato il sistema messo a disposizione dal *Matera Laser Ranging Observatory* (MLRO) dell'Agenzia Spaziale Italiana (ASI).

Come si può osservare dalla figura 1.1, per misurare la matrice di Mueller del canale ottico spaziale è necessario avere un retroriflettore orbitante in maniera tale da chiudere il cammino ottico. Questo può essere fatto attraverso satelliti LEO comunemente utilizzati per gli studi di geodinamica nell'ambito del *Satellite Laser Ranging*. La sorgente laser del MLRO genera un treno di impulsi in un determinato stato di polarizzazione verso i retroriflettori orbitanti. I fasci luminosi che ritornano a Terra vengono analizzati dal polarimetro in maniera tale da determinare la matrice di Mueller del canale.

Nella prima parte di questo lavoro verrà trattata brevemente la teoria della luce polarizzata e della matrice di Mueller attraverso anche alcuni esempi di dispositivi polarizzanti. Successivamente verranno descritti alcuni metodi per la misurazione della matrice di Mueller di un dispositivo ottico e il metodo scelto per le misure a Matera. Verranno presi in considerazione alcuni procedimenti per stimare il rumore di misura e per stimare il *link budget* del canale. In conclusione verranno presentati i risultati della caratterizzazione del polarimetro in laboratorio.

Parte di questo lavoro di tesi è stato pubblicato in [12] e [13].

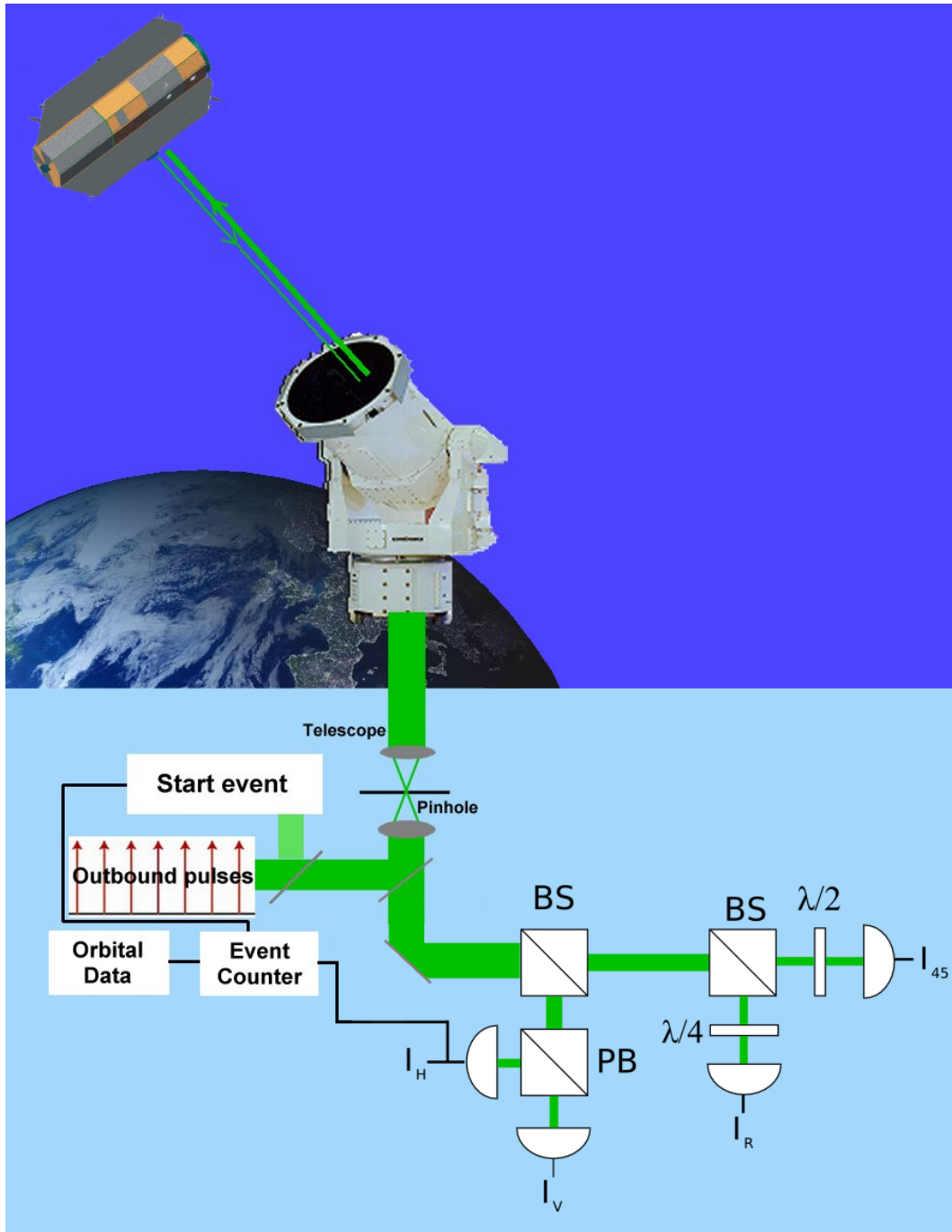


Figura 1.1: Schema del sistema di misura della matrice di Mueller



## CAPITOLO 2

---

### La polarizzazione

---

La polarizzazione è una proprietà della radiazione elettromagnetica che descrive la forma e l'orientazione del vettore campo elettrico in funzione del tempo, per un dato punto dello spazio. Quando la luce passa attraverso un mezzo o è riflessa da un campione, la sua polarizzazione viene modificata. La variazione dello stato di polarizzazione di un'onda permette di caratterizzare il sistema preso in considerazione.

#### 2.1 Stato di polarizzazione di un'onda luminosa

Nel concetto classico di luce polarizzata si rappresenta lo stato di polarizzazione di un'onda luminosa in funzione dell'evoluzione del suo vettore campo elettrico  $\vec{E}$ . Se l'andamento spaziale del vettore descrive una curva stazionaria durante il periodo di osservazione allora l'onda si definisce polarizzata. Diversamente un'onda si definisce non polarizzata se l'andamento spaziale del vettore  $\vec{E}$  non segue alcuna legge deterministica.

##### 2.1.1 Rappresentazione generale

Il vettore campo elettrico di un'onda elettromagnetica piana monocromatica (o quasi monocromatica) può essere rappresentato attraverso tre componenti ortogonali nel sistema di coordinate Cartesiane. Se si considera che la luce si propaga lungo l'asse  $z$  con direzione positiva, la componente reale istantanea del vettore campo elettrico può essere scritta

come:

$$\vec{\mathbf{E}}(z, t) = \begin{bmatrix} E_x(z, t) \\ E_y(z, t) \\ E_z(z, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ E_{0y} \cos(\omega t - kz + \varphi_y) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

dove  $E_{0x}$  e  $E_{0y}$  sono le ampiezze delle componenti  $E_x(z, t)$  e  $E_y(z, t)$  e  $\varphi_x$  e  $\varphi_y$  le loro rispettive fasi. Nel piano  $z = 0$ , l'equazione (2.1) si semplifica in:

$$\vec{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} E_x(t) \\ E_y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0x} \cos(\omega t + \varphi_x) \\ E_{0y} \cos(\omega t + \varphi_y) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

### 2.1.2 Ellisse di polarizzazione

L'equazione del luogo geometrico descritto dal vettore campo elettrico si ottiene eliminando la coordinata temporale  $t$  dalle componenti  $E_x(t)$  e  $E_y(t)$  nell'equazione (2.2):

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\frac{E_x E_y}{E_{0x} E_{0y}} \cos \varphi = \sin^2 \varphi \quad (2.3)$$

dove  $\varphi = \varphi_x - \varphi_y$ . Questa è l'equazione di un'ellisse che può degenerare in un cerchio o in un segmento. La polarizzazione corrispondente può quindi essere chiamata ellittica, circolare o lineare.

L'ellisse è contenuta all'interno di un rettangolo di lati  $2E_{0x}$  e  $2E_{0y}$  con  $(-E_{0x} \leq E_x \leq E_{0x})$  e  $(-E_{0y} \leq E_y \leq E_{0y})$ . L'orientazione del vettore campo elettrico  $\vec{\mathbf{E}}$  dipende dal segno della fase relativa  $\varphi$ . Per convenzione, se  $\sin \varphi < 0$  l'ellissi (e di conseguenza la polarizzazione) è detta destrorsa cioè la rotazione del campo elettrico è in senso orario per un osservatore che guarda verso la sorgente. Quindi si ha,

$$\begin{cases} -\pi < \varphi < 0 & \text{ellisse destrorsa} \\ 0 < \varphi < \pi & \text{ellisse sinistrorsa} \end{cases} \quad (2.4)$$

Quando  $\varphi = 2k\pi$  oppure  $\varphi = \pi + 2k\pi$  (con  $k \in \mathbb{Z}$ ) l'onda si dice polarizzata linearmente diversamente quando  $\varphi = (\pi/2)$  oppure  $\varphi = -(\pi/2)$  e  $E_{0x} = E_{0y}$  l'onda si definisce polarizzata circolarmente.

Lo stato di polarizzazione di un'onda piana può essere caratterizzato dai parametri geometrici dell'ellisse come rappresentato nella figura 2.1:

$$\begin{cases} \epsilon : \text{ellitticità} \\ \theta : \text{azimut (o orientazione)} \\ \nu : \tan \nu = \frac{E_{0y}}{E_{0x}} \quad (0 \leq \nu \leq \pi/2) \end{cases} \quad (2.5)$$

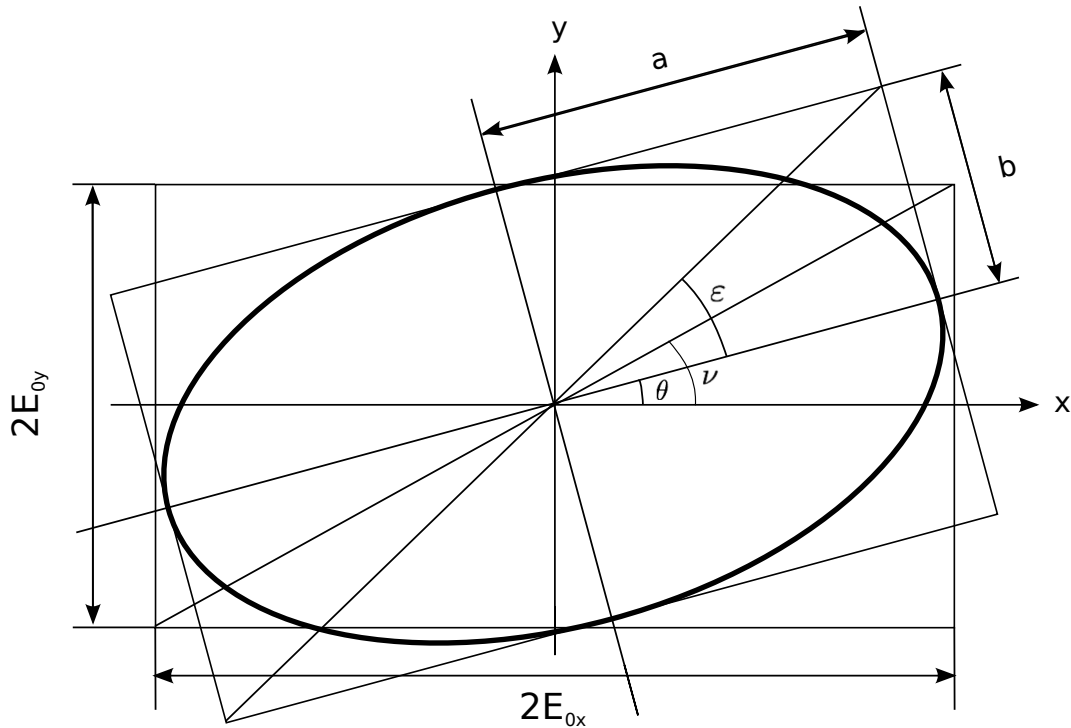


Figura 2.1: Ellisse di polarizzazione

Questi parametri sono collegati al vettore campo elettrico attraverso le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \tan 2\theta = \tan 2\theta\nu \cos \varphi & \text{con } \tan 2\nu = 2 \frac{E_{0x}E_{0y}}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} \\ \tan 2\epsilon = \pm \sin 2\theta \tan \varphi & \text{rapporto di ellitticit\`a} \\ \tan \epsilon = \frac{\pm E_{0y}}{E_{0x}} \end{cases} \quad (2.6)$$

## 2.2 Formalismo di Jones

Nel paragrafo precedente il vettore campo elettrico \u00e8 stato descritto attraverso l'uso della quantit\`a reale  $\vec{E}$ . Utilizzando il formalismo di Jones \u00e8 possibile rappresentare lo stato di polarizzazione di un'onda piana quasi monocromatica attraverso il vettore complesso  $\vec{e}$ :

$$\vec{e}(z) = \begin{bmatrix} E_{0x} e^{j\varphi_x} \\ E_{0y} e^{j\varphi_y} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Questa rappresentazione vettoriale dello stato di polarizzazione permette di descrivere i sistemi ottici attraverso le matrici. Un elemento ottico, come una lamina ritardatrice o un polarizzatore, pu\u00f2 essere rappresentato da una matrice due-per-due con elementi in

generale complessi. Se il vettore di Jones di un'onda incidente è descritto da  $\vec{\varepsilon}_i$  e la matrice di Jones di un polarizzatore è data da  $\mathbf{J}$ , l'onda uscente  $\vec{\varepsilon}_e$  è legata alla relazione:

$$\vec{\varepsilon}_e = \mathbf{J}\vec{\varepsilon}_i \quad (2.8)$$

Applicando la proprietà associativa delle matrici si ricava facilmente l'operatore matriciale che descrive la cascata di diversi sistemi ottici. Questo è dato dalla moltiplicazione delle matrici di ciascun dispositivo ottico, disposte nello stesso ordine nel quale vengono attraversate dall'onda luminosa. Quindi il vettore di Jones di un'onda uscente da un sistema formato da  $n$  operatori risulta:

$$\vec{\varepsilon}_e = \mathbf{J}_n \mathbf{J}_{n-1} \dots \mathbf{J}_2 \mathbf{J}_1 \vec{\varepsilon}_i \quad (2.9)$$

dove  $\mathbf{J}_1$  è il primo dispositivo attraversato e  $\mathbf{J}_n$  è l' $n$ -esimo.

## 2.3 I parametri di Stokes

Il paragrafo precedente prende in considerazione onde completamente polarizzate, cioè onde nelle quali  $E_{0x}$ ,  $E_{0y}$  e  $\varphi$  sono pressoché costanti durante il tempo di misura. Per poter trattare anche onde parzialmente polarizzate è necessario introdurre la notazione di Stokes.

### 2.3.1 Il vettore di Stokes

I parametri del vettore di Stokes, normalmente chiamati  $S_0$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$ , sono sufficienti a caratterizzare l'ampiezza, la fase e la polarizzazione di un'onda. Vengono definiti in funzione delle coordinate cartesiane del vettore campo elettrico come:

$$\begin{cases} S_0 = \langle E_x^2 \rangle + \langle E_y^2 \rangle \\ S_1 = \langle E_x^2 \rangle - \langle E_y^2 \rangle \\ S_2 = 2\langle E_x E_y \cos \varphi \rangle \\ S_3 = 2\langle E_x E_y \sin \varphi \rangle \end{cases} \quad (2.10)$$

dove  $\varphi = \varphi_x(t) - \varphi_y(t)$  e  $\langle \rangle$  rappresenta la media temporale della misura.

Questi quattro parametri sono quantità reali e dimensionalmente corrispondono a energie:



- $S_0$  è proporzionale alla densità totale di potenza dell'onda
- $S_1$  è proporzionale alla densità di potenza delle componenti di polarizzazione lineare verticale e orizzontale
- $S_2$  è proporzionale alla densità di potenza delle componenti di polarizzazione lineare a  $45^\circ$  e  $135^\circ$
- $S_3$  è proporzionale alla densità di potenza delle componenti di polarizzazione circolare destrorsa e sinistrorsa.

Il fatto che uno dei parametri  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$  abbia valore non nullo è dovuto alla presenza di una componente polarizzata nell'onda luminosa.

### 2.3.2 Onda completamente polarizzata

$$\begin{cases} S_0 = E_x^2 + E_y^2 \\ S_1 = E_x^2 - E_y^2 \\ S_2 = 2E_x E_y \cos \varphi \\ S_3 = 2E_x E_y \sin \varphi \end{cases} \quad (2.11)$$

Questi quattro parametri sono legati dalla relazione:  $S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ . Per convenzione  $S_0$  è sempre normalizzato. I parametri dell'ellisse di polarizzazione, definiti nel paragrafo 2.1.2, possono essere espressi in funzione dei parametri di Stokes come:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ S_1/S_0 \\ S_2/S_0 \\ S_3/S_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\varepsilon \cos 2\theta \\ \cos 2\varepsilon \sin 2\theta \\ \sin 2\varepsilon \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Si possono quindi definire queste relazioni:

- ellitticità  $\varepsilon$  ( $-\pi/4 < \varepsilon \leq \pi/4$ ):

$$\sin 2\varepsilon = \frac{S_3}{S_0}, \quad (2.13)$$

- azimut  $\theta$  ( $0 \leq \theta < \pi$ ):

$$\tan 2\theta = \frac{S_2}{S_1}, \quad (2.14)$$

- fase relativa  $\varphi$  ( $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ ):

$$\tan \varphi = \frac{S_3}{S_2} \quad (2.15)$$

### 2.3.3 Onda non polarizzata

In un'onda non polarizzata la posizione del vettore campo elettrico è indeterminata. Considerando la media temporale delle misure si può scrivere che:

$$\begin{aligned}\langle E_{0x}^2 \rangle &= \langle E_{0y}^2 \rangle \quad \text{quindi } S_1 = 0 \\ \langle E_{0x}E_{0y} \cos \varphi \rangle &= \langle E_{0x}E_{0y} \rangle \langle \cos \varphi \rangle \\ \langle E_{0x}E_{0y} \sin \varphi \rangle &= \langle E_{0x}E_{0y} \rangle \langle \sin \varphi \rangle\end{aligned}\tag{2.16}$$

Si ha inoltre che  $\langle \cos \varphi \rangle = \langle \sin \varphi \rangle = 0$  in quanto le variazioni di fase sono equidistribuite tra  $-\pi$  e  $\pi$  ( $E_x$  e  $E_y$  non sono correlate in fase). In conclusione si ottiene la seguente relazione:

$$\begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = S_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\tag{2.17}$$

### 2.3.4 Teorema di decomposizione

Il formalismo di Stokes permette di esprimere la sovrapposizione incoerente di due onde luminose. Il vettore di Stokes  $S^i$  di un'onda parzialmente polarizzata (PP) può quindi essere scomposto in due vettori, uno completamente polarizzato  $S_P$  (CP), uno non polarizzato  $S_D$  (CD); questa scomposizione è unica:

$$\begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_0 - \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}\tag{2.18}$$

onda PP =                      onda CD                      +                      onda CP

## 2.4 La matrice di coerenza

### 2.4.1 Definizione

E' possibile definire quantitativamente una luce parzialmente polarizzata introducendo la matrice di coerenza. Questa matrice, chiamata anche matrice di polarizzazione, viene

normalmente indicata con la lettera  $\mathbf{J}$  e si definisce come la media temporale del prodotto tensoriale tra il vettore di Jones e il suo complesso coniugato:

$$\Phi = \langle \vec{\mathbf{E}} \otimes \vec{\mathbf{E}}^+ \rangle = \begin{bmatrix} \langle E_x E_x^* \rangle & \langle E_x E_y^* \rangle \\ \langle E_y E_x^* \rangle & \langle E_y E_y^* \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{xx} & \phi_{xy} \\ \phi_{yx} & \phi_{yy} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

dove  $\otimes$  indica il prodotto di Kronecker,  $E^*$  il complesso coniugato di  $E$  e  $\vec{\mathbf{E}}^+$  il trasposto coniugato di  $\vec{\mathbf{E}}$ .

La matrice di coerenza  $\Phi$  si collega ai parametri di Stokes attraverso la seguente uguaglianza:

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 S_i \sigma_i \quad (2.20)$$

dove  $\sigma_i$  sono le matrici di Pauli:

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Quindi in definitiva si ha:

$$\Phi = \begin{bmatrix} S_0 + S_1 & S_2 - iS_3 \\ S_2 + iS_3 & S_0 - S_1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

## 2.4.2 Grado di polarizzazione

Il grado di polarizzazione è definito come il rapporto tra l'intensità della componente polarizzata e l'intensità totale dell'onda. Si può esprimere in funzione della matrice di coerenza come:

$$P = \frac{I_{\text{pol}}}{I_{\text{tot}}} = \left[ 1 - \frac{4 \det(\Phi)}{(\text{Tr}(\Phi))^2} \right]^{1/2} \quad (2.23)$$

$P$  può anche essere riscritto come:

$$P = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0}, \quad 0 \leq P \leq 1 \quad (2.24)$$

Quindi, se  $P = 0$ , l'onda è non polarizzata mentre se  $P = 1$  l'onda è completamente polarizzata.

### 2.4.3 Il concetto di entropia

La matrice di coerenza è Hermitiana per costruzione, si può quindi trovare una matrice unitaria in grado di diagonalizzarla. Gli autovalori  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  ottenuti dalla soluzione dell'equazione caratteristica sono:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\text{Tr}(\Phi) \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{4 \det(\Phi)}{(\text{Tr}(\Phi))^2}} \right] \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}\text{Tr}(\Phi) \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{4 \det(\Phi)}{(\text{Tr}(\Phi))^2}} \right] \quad (2.25)$$

La matrice di coerenza diagonalizzata ha quindi la seguente forma:

$$\Phi_D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Questa equazione permette di considerare un'onda parzialmente depolarizzata, la cui matrice di coerenza è  $\Phi_D$ , come la sovrapposizione incoerente di due onde completamente polarizzate indipendenti con intensità relativa data da  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . La prima di queste onde, che ha come matrice di coerenza  $\Phi_D^{(1)}$ , è completamente polarizzata lungo la direzione dell'autovettore associato a  $\lambda_1$ , mentre l'altra, che ha come matrice di coerenza  $\Phi_D^{(2)}$ , è completamente polarizzata lungo la direzione dell'autovettore associato a  $\lambda_2$ . La scomposizione è quindi data da:

$$\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \Phi_D = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \Phi_D^{(1)} + \Phi_D^{(2)} \quad (2.27)$$

Attraverso questa scomposizione si può dare un'interpretazione probabilistica degli autovalori  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Questo permette di introdurre il concetto di entropia per studiare la polarizzazione parziale. Infatti l'entropia  $E$  di un generico sistema descrive il grado del suo "disordine" come:

$$E = - \sum_{i=1}^N p_i \log_N p_i \quad , \quad p_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^N \lambda_j} \quad (2.28)$$

dove  $N$  è il grado della matrice di coerenza del sistema e  $0 \leq E \leq 1$ .

Considerando la condizione:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{const} = C \quad (2.29)$$

si può dedurre che la minima entropia  $E_{\min} = 0$  si ottiene per:

$$\lambda_j = C \quad , \quad \lambda_i = 0 \quad ; \quad i, j = 1, 2 \quad (2.30)$$

che corrisponde alla luce completamente polarizzata. Mentre la massima entropia  $E_{\max} = 1$  si ottiene per:

$$\lambda_j = \frac{C}{2} \quad \forall i = 1, 2 \quad (2.31)$$

che corrisponde a un'onda non polarizzata. Il concetto di entropia è quindi collegato al grado di polarizzazione dell'onda.

## 2.5 La sfera di Poincaré

La sfera di Poincaré è uno strumento utile che permette di rappresentare lo stato di polarizzazione e visualizzare facilmente una trasformazione di polarizzazione.

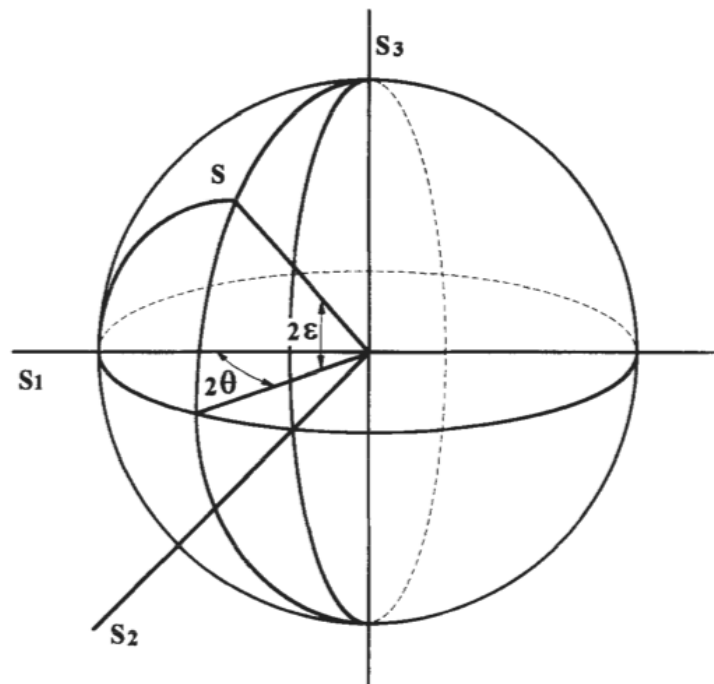


Figura 2.2: Rappresentazione della sfera di Poincaré

### 2.5.1 La sfera di Poincaré e i parametri di Stokes

Un dato stato di polarizzazione puro è descritto sulla sfera di Poincaré da un punto  $\underline{S}$ , le cui coordinate cartesiane sono i parametri di Stokes  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$ . Per ogni stato di polarizzazione puro di un'onda luminosa corrisponde un punto  $\underline{S}(S_1, S_2, S_3)$  sulla sfera

di Poincaré di raggio  $S_0$  e viceversa. Inoltre, come visualizzato nella Fig. 2.2, il punto  $\underline{S}$  può essere determinato in funzione dei parametri dell'ellisse di polarizzazione, dove  $\varepsilon$  rappresenta l'ellitticità,  $\theta$  l'azimut e  $\varphi$  l'orientazione dell'ellisse. Questa rappresentazione sferica degli stati di polarizzazione consente anche di verificare le relazioni (2.13), (2.14) e (2.15).

### 2.5.2 Rappresentazione di alcuni stati di polarizzazione

Nella figura 2.3 e nelle tabelle 2.1 e 2.2 sono rappresentati i principali stati di polarizzazione sulla sfera di Poincaré. Sull'equatore della sfera sono rappresentati gli stati con polarizzazione lineare (con ellitticità nulla). Nei poli (dove si ha ellitticità pari a  $\pm 1$  e azimut indeterminato) si trovano le polarizzazioni circolari: destrorsa al polo sud e sinistrorsa al polo nord. L'emisfero nord corrisponde alle polarizzazioni ellittiche sinistrorse mentre l'emisfero sud corrisponde alle polarizzazioni ellittiche destrorse.

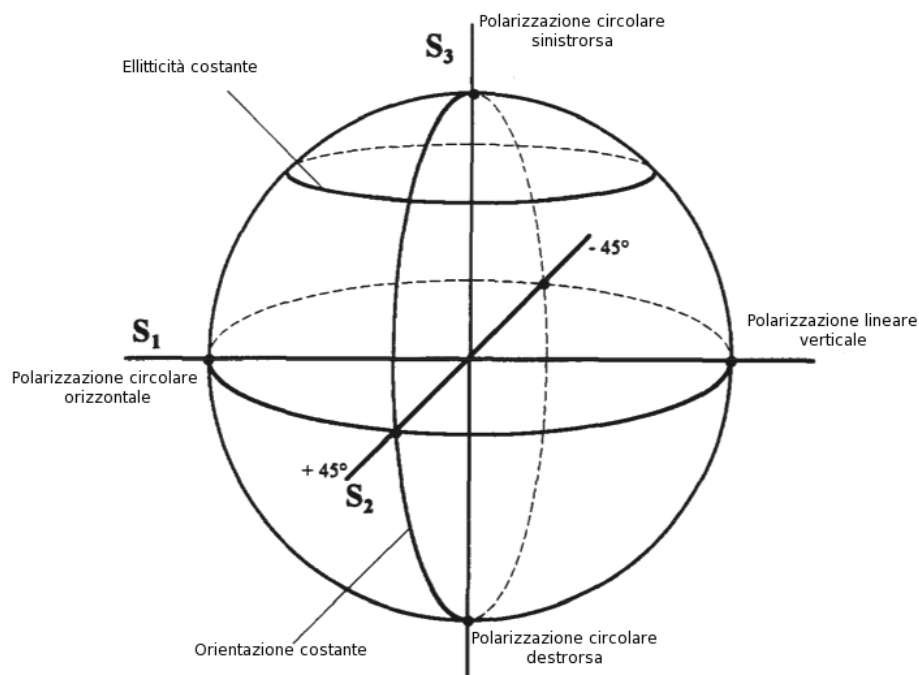


Figura 2.3: Rappresentazione dei principali stati di polarizzazione sulla sfera di Poincaré

Stato di polarizzazione	Vettore di Stokes	Rappresentazione sulla sfera di Poincaré
Lineare orizzontale	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	
Lineare verticale	$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	
Lineare $\pm 45^\circ$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	
Circolare sinistrorsa	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	
Circolare destrorsa	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$	

Tabella 2.1: Il formalismo di Stokes e la sfera di Poincaré

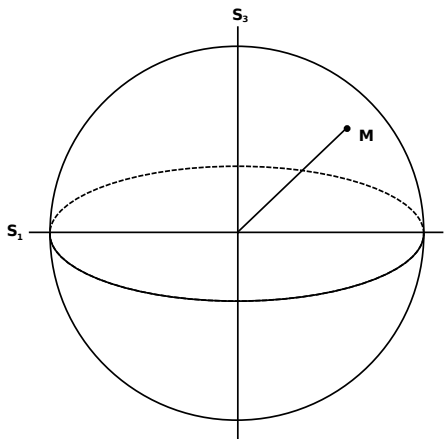
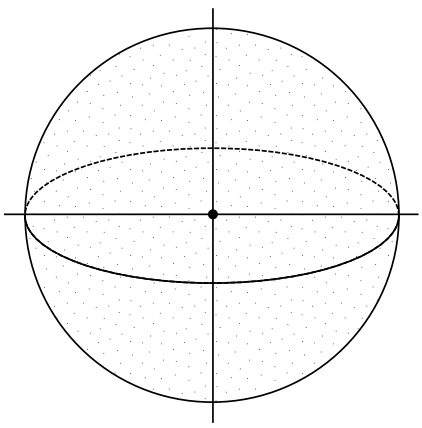
Stato di polarizzazione	Vettore di Stokes	Rappresentazione sulla sfera di Poincaré
<b>Ellittica</b>	$\begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\varepsilon \cos 2\theta \\ \cos 2\varepsilon \sin 2\theta \\ \sin 2\varepsilon \end{bmatrix}$	
<b>Non polarizzata</b>	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	

Tabella 2.2: Il formalismo di Stokes e la sfera di Poincaré



### La matrice di Mueller

---

#### 3.1 Introduzione

Nel capitolo precedente sono state trattate le proprietà fondamentali della luce polarizzata. In questo capitolo si prenderà in considerazione lo studio dell'interazione della luce polarizzata con elementi che possono cambiarne lo stato di polarizzazione. Per fare ciò si sfrutteranno le potenzialità matematiche permesse dalla rappresentazione matriciale dei parametri di Stokes. Nella figura 3.1 è raffigurato un fascio incidente che interagisce con un elemento polarizzante e il relativo fascio uscente, caratterizzato dai rispettivi parametri di Stokes  $S_i$ , dove  $i = 0, 1, 2, 3$ . Assumiamo ora che  $S'_i$  possa essere espresso come combinazione lineare dei quattro parametri di Stokes del fascio incidente attraverso le seguenti relazioni:

$$S'_0 = m_{00}S_0 + m_{01}S_1 + m_{02}S_2 + m_{03}S_3 \quad (3.1a)$$

$$S'_1 = m_{10}S_0 + m_{11}S_1 + m_{12}S_2 + m_{13}S_3 \quad (3.1b)$$

$$S'_2 = m_{20}S_0 + m_{21}S_1 + m_{22}S_2 + m_{23}S_3 \quad (3.1c)$$

$$S'_3 = m_{30}S_0 + m_{31}S_1 + m_{32}S_2 + m_{33}S_3 \quad (3.1d)$$

Le equazioni (3.1) scritte in forma matriciale risultano:

$$\begin{bmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

oppure

$$\mathbf{S}' = \mathbf{M}\mathbf{S} \quad (3.3)$$

dove  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{S}'$  sono i vettori di Stokes e  $\mathbf{M}$  è la matrice  $4 \times 4$  conosciuta anche come matrice di Mueller.

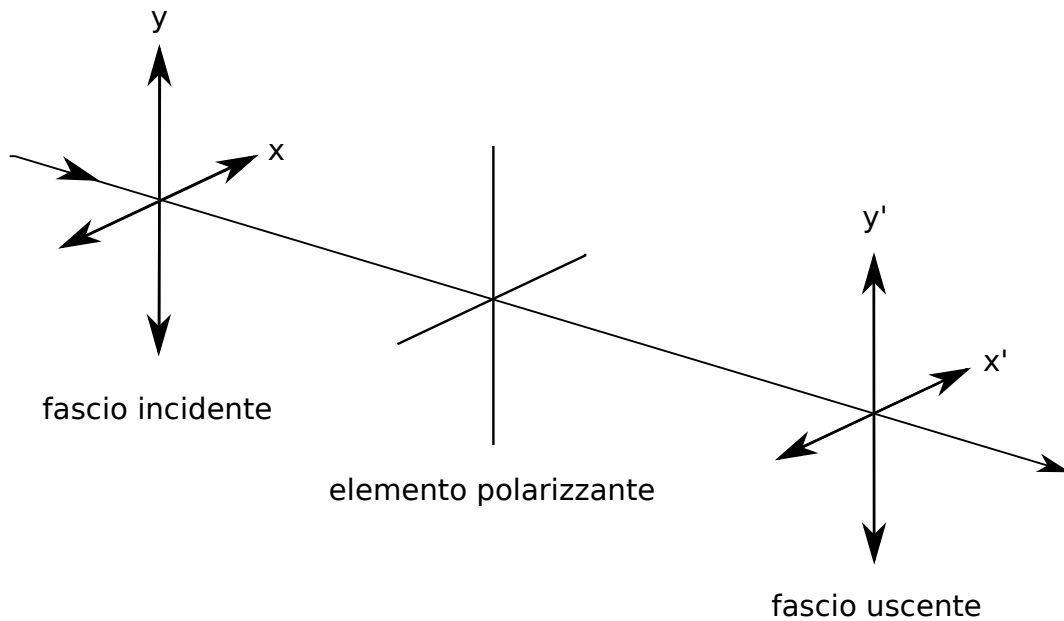


Figura 3.1: Interazione tra un fascio polarizzato e un elemento polarizzante

Quando un fascio ottico interagisce con la materia le sue caratteristiche di polarizzazione vengono spesso alterate. Lo stato di polarizzazione può essere modificato da:

- un cambiamento di intensità,
- un cambiamento di fase,
- un cambio di direzione delle componenti ortogonali del campo,
- un trasferimento di energia tra uno stato polarizzato e uno non polarizzato.

Un dispositivo ottico che modifica le ampiezze ortogonali in maniera non uniforme è anche detto *polarizzatore* o *diattenuatore*. Allo stesso modo, un dispositivo ottico che introduce uno sfasamento tra le componenti ortogonali del campo è chiamato *ritardatore* o *lamina ritardatrice*. Se l'elemento ottico ruota le componenti ortogonali del fascio di un certo angolo  $\theta$  si dice *rotatore*. Infine, se l'energia degli stati polarizzati si trasferisce verso uno stato non polarizzato l'elemento si definisce *depolarizzatore*. Questi effetti si possono comprendere facilmente analizzando le componenti trasverse del campo elettrico di un'onda piana:

$$E_x(z, t) = E_{0x} \cos(\omega t - kz + \delta_x) \quad (3.4a)$$

$$E_y(z, t) = E_{0y} \cos(\omega t - kz + \delta_y) \quad (3.4b)$$

Le equazioni (3.4) possono essere modificate variando le ampiezze  $E_{0x}$  e  $E_{0y}$ , le fasi  $\delta_x$  e  $\delta_y$  oppure le direzioni  $E_x(z, t)$  e  $E_y(z, t)$ . I dispositivi che generano questi cambiamenti al campo elettrico sono quelli descritti in precedenza, cioè polarizzatori, ritardatori e rotatori.

## 3.2 La matrice di Mueller di un polarizzatore

Un polarizzatore è un dispositivo ottico che attenua le componenti ortogonali di un fascio ottico in maniera non uniforme ovvero, un polarizzatore è un attenuatore anisotropico; i suoi due assi ortogonali di trasmissione vengono solitamente indicati con  $p_x$  e  $p_y$ . Se un polarizzatore viene utilizzato per polarizzare la luce allora viene anche chiamato generatore mentre se viene utilizzato per analizzare la luce polarizzata viene detto analizzatore. Se le componenti ortogonali del fascio incidente sono attenuate in maniera uniforme allora il polarizzatore si comporta come un filtro attenuatore. Nella figura 3.2 è rappresentato un fascio incidente su un polarizzatore e il corrispondente fascio in uscita. Le componenti del fascio incidente sono rappresentate da  $E_x$  e  $E_y$  mentre quelle del fascio uscente sono indicate come  $E'_x$  e  $E'_y$  e sono parallele a quelle iniziali. I campi sono legati dalle relazioni:

$$E'_x = p_x E_x \quad 0 \leq p_x \leq 1 \quad (3.5a)$$

$$E'_y = p_y E_y \quad 0 \leq p_y \leq 1 \quad (3.5b)$$

I fattori  $p_x$  e  $p_y$  sono i coefficienti di trasmissione degli assi ortogonali del polarizzatore. Quando si ha attenuazione nulla o completa trasmissione allora  $p_x(p_y) = 1$ , mentre quando si ha attenuazione totale  $p_x(p_y) = 0$ .

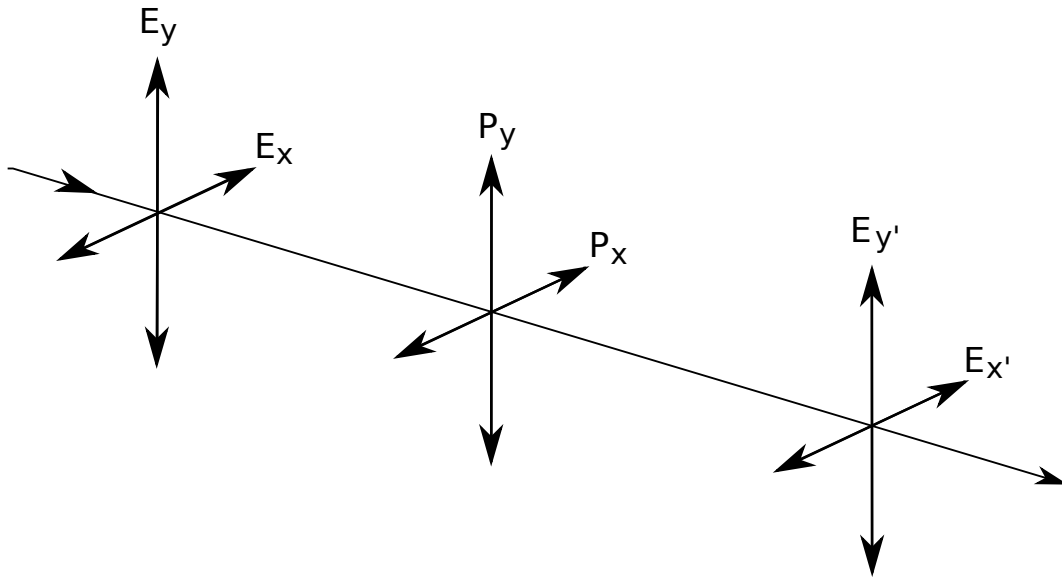


Figura 3.2: Rappresentazione di un elemento polarizzante con coefficienti di trasmissione  $p_x$  e  $p_y$

I parametri di Stokes del fascio incidente e del fascio uscente sono rispettivamente:

$$S_0 = E_x E_x^* + E_y E_y^* \quad (3.6a)$$

$$S_1 = E_x E_x^* - E_y E_y^* \quad (3.6b)$$

$$S_2 = E_x E_y^* + E_y E_x^* \quad (3.6c)$$

$$S_3 = i(E_x E_y^* - E_y E_x^*) \quad (3.6d)$$

e

$$S'_0 = E'_x E_x'^* + E'_y E_y'^* \quad (3.7a)$$

$$S'_1 = E'_x E_x'^* - E'_y E_y'^* \quad (3.7b)$$

$$S'_2 = E'_x E_y'^* + E'_y E_x'^* \quad (3.7c)$$

$$S'_3 = i(E'_x E_y'^* - E'_y E_x'^*) \quad (3.7d)$$

Sostituendo le equazioni (3.5) all'interno delle (3.7) e utilizzando le (3.6) si ottiene:

$$\begin{bmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p_x^2 + p_y^2 & p_x^2 - p_y^2 & 0 & 0 \\ p_x^2 - p_y^2 & p_x^2 + p_y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2p_x p_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2p_x p_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Riscrivendo la matrice  $4 \times 4$  dell'equazione (3.8) si ottiene:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p_x^2 + p_y^2 & p_x^2 - p_y^2 & 0 & 0 \\ p_x^2 - p_y^2 & p_x^2 + p_y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2p_x p_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2p_x p_y \end{bmatrix} \quad 0 \leq p_{x,y} \leq 1 \quad (3.9)$$

L'equazione (3.9) rappresenta la matrice di Mueller di un polarizzatore con coefficienti di trasmissione  $p_x$  e  $p_y$ . In generale, l'esistenza del termine  $m_{33}$  indica che la polarizzazione del fascio uscente è ellittica.

Per un filtro attenuatore neutro si ha che  $p_x = p_y = p$  e quindi la matrice (3.9) diventa:

$$\mathbf{M} = p^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

che è una matrice unitaria. L'equazione (3.10) mostra come lo stato di polarizzazione non venga modificato da un filtro attenuatore, ma venga solo ridotta l'intensità del fascio incidente di un fattore  $p^2$ . Osservando l'equazione (3.10) si può dedurre che l'intensità  $I'$  del fascio uscente è:

$$I' = p^2 I \quad (3.11)$$

dove  $I$  rappresenta l'intensità del fascio entrante.

Un polarizzatore lineare *ideale* trasmette lungo un solo asse mentre attenua completamente nell'asse ortogonale. Questo comportamento può essere descritto ponendo uno dei due coefficienti di trasmissione pari a zero, ad esempio  $p_y = 0$ . Di conseguenza l'equazione

(3.9) si riduce a:

$$\mathbf{M} = \frac{p_x^2}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

L'equazione (3.12) è la matrice di Mueller di un polarizzatore lineare ideale che polarizza la luce solo lungo l'asse  $x$ . Questo viene spesso chiamato anche polarizzatore lineare orizzontale, assegnando la dimensione orizzontale all'asse delle ascisse. Nel caso in cui il coefficiente di trasmissione  $p_x$  sia unitario ( $p_x = 1$ ) il polarizzatore si dice perfetto e la sua matrice di Mueller è data da:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Se il fascio incidente è completamente non polarizzato allora la massima intensità del fascio uscente da un polarizzatore lineare ideale perfetto è solo il 50 % dell'intensità originaria.

In generale, tutti i polarizzatori lineari si possono descrivere attraverso la relazione (3.9). In natura l'unico materiale che si avvicina molto alle caratteristiche del polarizzatore lineare ideale è la calcite. Viene spesso utilizzato anche un materiale sintetico, conosciuto come Polaroid, anche se le sue proprietà non sono così buone come quelle della calcite.

Nel caso in cui l'asse di trasmissione di un polarizzatore lineare sia parallelo all'asse delle ordinate si ottiene una matrice di Mueller pari a:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Per un polarizzatore lineare con asse orientato in maniera arbitraria è utile poter riscrivere la matrice di Mueller (3.9) attraverso le funzioni trigonometriche. Questo può essere fatto attraverso le seguenti relazioni:

$$p_x^2 + p_y^2 = p^2 \quad (3.15)$$

e

$$p_x = p \cos \gamma \quad p_y = p \sin \gamma \quad (3.16)$$

Sostituendo le (3.15), (3.16) nelle (3.9) si ottiene:

$$\mathbf{M} = \frac{p^2}{2} \begin{bmatrix} 1 & \cos 2\gamma & 0 & 0 \\ \cos 2\gamma & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin 2\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin 2\gamma \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

dove  $0 \leq \gamma \leq \pi/2$ . Per un polarizzatore lineare ideale perfetto si ha  $p = 1$ , per un polarizzatore lineare orizzontale  $\gamma = 0$  mentre per un polarizzatore lineare verticale  $\gamma = \pi/2$

Il motivo per il quale (3.13) e (3.14) si definiscono polarizzatori lineari è dovuto ai seguenti risultati. Supponendo di avere un fascio incidente di intensità e polarizzazione arbitraria con vettore di Stokes uguale a:

$$S = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Applicando il prodotto matriciale tra (3.18) e (3.13) o alternativamente (3.14) si può scrivere:

$$\begin{bmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \pm 1 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Svolgendo il prodotto nell'equazione (3.19) si trova:

$$\begin{bmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(S_0 \pm S_1) \begin{bmatrix} 1 \\ \pm 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Nell'equazione (3.20) si può osservare che il vettore di Stokes del fascio uscente è sempre polarizzato *linearmente* con orientamento orizzontale (+) o verticale (-). Quindi un polarizzatore lineare ideale crea sempre luce polarizzata linearmente qualunque sia la polarizzazione del fascio in ingresso. Tuttavia, siccome il fattore  $2p_x p_y$  nell'equazione (3.9) nella realtà non è mai nullo, tutti i polarizzatori lineari generano sempre luce polarizzata ellitticamente.

### 3.3 La matrice di Mueller di una lamina ritardatrice

Una lamina ritardatrice è un elemento polarizzante che modifica la fase del fascio ottico. Comunemente viene anche chiamata ritardatore o compensatore. La lamina ritardatrice introduce uno sfasamento  $\phi$  tra le componenti ortogonali del campo incidente. Questo può anche essere visto come uno sfasamento di  $\phi/2$  lungo l'asse  $x$  e uno sfasamento di  $-\phi/2$  lungo l'asse  $y$ . I due assi del compensatore vengono anche detti rispettivamente *asse veloce* e *asse lento*. Nella figura 3.3 sono rappresentati il fascio entrante e uscente da un ritardatore. Le componenti del fascio uscente sono legate a quelle del fascio incidente attraverso le relazioni:

$$E'_x(z, t) = e^{+i\phi/2} E_x(z, t) \quad (3.21a)$$

$$E'_y(z, t) = e^{-i\phi/2} E_y(z, t) \quad (3.21b)$$

Riferendosi di nuovo alla definizione dei parametri di Stokes (3.6) e (3.7) e sostituendo le equazioni (3.21a) e (3.21b) all'interno delle prime si trova che:

$$S'_0 = S_0 \quad (3.22a)$$

$$S'_1 = S_1 \quad (3.22b)$$

$$S'_2 = S_2 \cos \phi + S_3 \sin \phi \quad (3.22c)$$

$$S'_3 = -S_2 \sin \phi + S_3 \cos \phi \quad (3.22d)$$

Le equazioni (3.22) possono essere riscritte in forma matriciale nella seguente maniera:

$$\begin{bmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Si può notare che per un ritardatore ideale non c'è perdita di intensità, cioè  $S'_0 = S_0$ . Dall'equazione (3.23) si ricava che la matrice di Mueller di una lamina ritardatrice con uno sfasamento di  $\phi$  è uguale a:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (3.24)$$



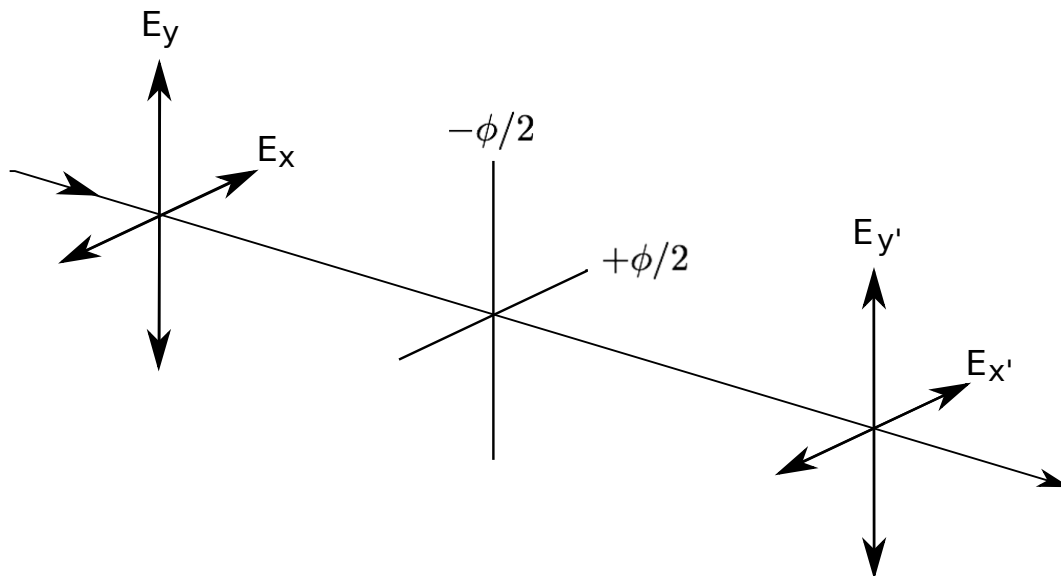


Figura 3.3: Propagazione di un fascio polarizzato attraverso una lamina ritardatrice

Esistono due casi speciali della matrice (3.24) che sono spesso utilizzati nell'ottica: quello della lamina a quarto d'onda o  $\lambda/4$  ( $\phi = \pi/2$ , cioè la fase di una delle componenti della luce è ritardata di un quarto d'onda rispetto alla sua componente ortogonale) e quello della lamina a mezz'onda o  $\lambda/2$  ( $\phi = \pi$ , cioè la fase di una delle componenti della luce è ritardata di mezz'onda rispetto alla sua componente ortogonale). Naturalmente una lamina ritardatrice dipende in maniera diretta dalla lunghezza d'onda della luce, anche se ne esistono alcune acromatiche che dipendono in maniera più debole. Per una lamina  $\lambda/4$  la (3.24) diventa:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

La lamina a quarto d'onda ha la proprietà di trasformare un fascio polarizzato linearmente con asse a  $+45^\circ$  o  $-45^\circ$  rispetto all'asse veloce del ritardatore in un fascio con polarizzazione circolare destrorsa o circolare sinistrorsa rispettivamente. Per dimostrare questa proprietà

e sufficiente considerare il vettore di Stokes per un fascio polarizzato linearmente a  $\pm 45^\circ$  :

$$S = I_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

e moltiplicarlo per la matrice (3.25), da cui si ottiene:

$$S' = I_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \mp 1 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

che rappresenta il vettore di Stokes per un fascio con polarizzazione circolare destrorsa (sinistrorsa). La trasformazione della luce polarizzata linearmente in luce polarizzata circolarmente è un'applicazione importante della lamina  $\lambda/4$ . Viceversa, se il fascio incidente su una lamina a quarto d'onda è polarizzato circolarmente, allora moltiplicando (3.27) per (3.25) si ottiene:

$$S' = I_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \mp 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

che rappresenta il vettore di Stokes per un fascio polarizzato linearmente a  $-45^\circ$  o  $+45^\circ$ .

Un'altra importante tipologia di lamine ritardatrici è quella delle lamine  $\lambda/2$  ( $\phi = \pi$ ). Per questa condizione la matrice (3.24) si riduce a:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Un lamina a mezz'onda è caratterizzata da una matrice diagonale. I termini  $m_{22} = m_{33} = -1$  rovesciano l'ellitticità e l'azimut dello stato di polarizzazione del fascio incidente. Come visto nel capitolo 2 l'angolo di azimut  $\theta$  e l'ellitticità  $\varepsilon$  si possono esprimere in funzione dei

parametri di Stokes come:

$$\tan 2\theta = \frac{S_2}{S_1} \quad (3.30a)$$

$$\sin 2\varepsilon = \frac{S_3}{S_0} \quad (3.30b)$$

Moltiplicando il generico vettore di Stokes  $S = [S_0, S_1, S_2, S_3]^T$  per la matrice (3.29) si ottiene:

$$S' = \begin{bmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ -S_2 \\ -S_3 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

dove

$$\tan 2\theta' = \frac{S'_2}{S'_1} \quad (3.32a)$$

$$\sin 2\varepsilon' = \frac{S'_3}{S'_0} \quad (3.32b)$$

Sostituendo la (3.31) nelle (3.32) si ha:

$$\tan 2\theta' = -\frac{S_2}{S_1} = \tan 2\theta \quad (3.33a)$$

$$\sin 2\varepsilon' = -\frac{S_3}{S_0} = \sin 2\varepsilon \quad (3.33b)$$

Perciò:

$$\theta' = \pi/2 - \theta \quad (3.34a)$$

$$\varepsilon' = \pi/2 + \varepsilon \quad (3.34b)$$

Quindi le lamine  $\lambda/2$  possiedono la proprietà di ruotare l'ellisse di polarizzazione.

### 3.4 La matrice di Mueller di un rotatore

Un'altra maniera per cambiare lo stato di polarizzazione di un campo ottico è quello di far passare il fascio attraverso un elemento polarizzante che ruota le componenti ortogonali del campo  $E_x(z, t)$  e  $E_y(z, t)$  di un angolo  $\alpha$ . Per ricavare la matrice di Mueller di questo elemento consideriamo la figura 3.4. L'angolo  $\alpha$  descrive la rotazione di  $E_x$  in  $E'_x$  e di  $E_y$  in  $E'_y$  e allo stesso modo l'angolo  $\beta$  è l'angolo tra  $E$  e  $E_x$ . Nella figura il punto  $P$  descritto

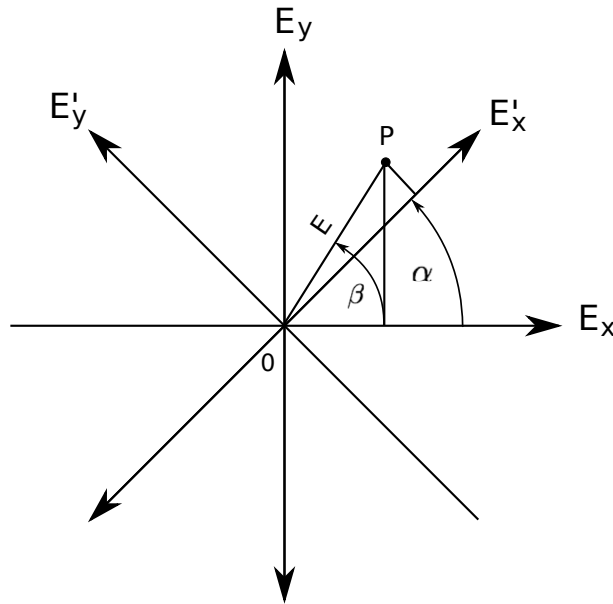


Figura 3.4: Rotazione del campo ottico da parte di un rotatore

nel sistema di coordinate  $E'_x, E'_y$  è:

$$E'_x = E \cos(\beta - \alpha) \quad (3.35a)$$

$$E'_y = E \sin(\beta - \alpha) \quad (3.35b)$$

mentre nel sistema di coordinate  $E_x, E_y$  si ha:

$$E_x = E \cos(\beta) \quad (3.36a)$$

$$E_y = E \sin(\beta) \quad (3.36b)$$

Utilizzando le relazioni trigonometriche nelle (3.35) si trova:

$$E'_x = E(\cos(\beta) \cos(\alpha) + \sin(\beta) \sin(\alpha)) \quad (3.37a)$$

$$E'_y = E(\sin(\beta) \cos(\alpha) - \sin(\alpha) \cos(\beta)) \quad (3.37b)$$

Raccogliendo i termini nelle (3.37) e utilizzando le (3.36) si ottiene:

$$E'_x = E_x \cos(\alpha) + E_y \sin(\alpha) \quad (3.38a)$$

$$E'_y = -E_x \sin(\alpha) + E_y \cos(\alpha) \quad (3.38b)$$

Le equazioni (3.38a) e (3.38b) descrivono le variazioni di ampiezza delle componenti del campo elettrico causate dal rotatore. Considerando quindi queste equazioni è possibile

ricavare la matrice di Mueller come fatto in precedenza per gli altri elementi polarizzanti. La matrice di Mueller di un rotatore è data da:

$$\mathbf{M}(2\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ 0 & -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

I rotatori vengono utilizzati per cambiare l'orientazione degli assi dell'ellisse di polarizzazione. Per osservare questo comportamento basta considerare un fascio che incide con un angolo  $\theta$  sul rotatore. Dal capitolo 2 si ha:

$$\tan 2\theta = \frac{S_2}{S_1} \quad (3.40)$$

Utilizzando la matrice (3.39) si trova che il fascio di uscita ha un angolo  $\theta'$  pari a:

$$\tan 2\theta' = \frac{-S_1 \sin 2\alpha + S_2 \cos 2\alpha}{S_1 \cos 2\alpha + S_2 \sin 2\alpha} \quad (3.41)$$

Riscrivendo l'equazione (3.40) come:

$$S_2 = S_1 \tan 2\theta \quad (3.42)$$

e sostituendola nella (3.41) si trova:

$$\tan 2\theta' = \tan(2\theta - 2\alpha) \quad (3.43)$$

quindi:

$$\theta' = \theta - \alpha \quad (3.44)$$

L'equazione (3.44) evidenzia come il rotatore ruoti semplicemente l'ellisse di polarizzazione del fascio incidente senza modificarne l'ellitticità. Il segno nella (3.44) è negativo perché la rotazione è in senso orario, mentre se fosse positivo la rotazione sarebbe in senso antiorario.

Nel ricavare le matrici di Mueller del polarizzatore, della lamina ritardatrice e del rotatore si è sempre assunto che gli assi di questi dispositivi fossero allineati lungo gli assi  $E_x$  e  $E_y$  rispettivamente. Nella pratica gli elementi polarizzanti sono spesso ruotati, di conseguenza è utile conoscere anche la matrice di Mueller dei dispositivi ruotati. Nel capitolo seguente verrà considerato questo problema.

### 3.5 La matrice di Mueller di un elemento polarizzante ruotato

Si consideri la figura 3.5 nella quale è rappresentato un elemento polarizzante con assi ruotati di un angolo  $\beta$  rispetto agli assi  $x$  e  $y$ . Per analizzare il comportamento del dispositivo si passa inizialmente al sistema di coordinate  $x'$  e  $y'$ , il vettore di Stokes quindi  $S$  diventa:

$$S' = \mathbf{M}_R(2\beta)S \quad (3.45)$$

dove  $\mathbf{M}_R(2\beta)$  è la matrice di Mueller di un rotatore e  $S'$  è il vettore di Stokes del fascio che ha componenti lungo  $x'$  e  $y'$ .

Il fascio  $S'$  incide successivamente sull'elemento polarizzante caratterizzato dalla propria matrice di Mueller  $\mathbf{M}$ , il vettore di Stokes  $S''$  uscente è dato da:

$$S'' = \mathbf{M}S' = \mathbf{M}\mathbf{M}_R(2\beta)S \quad (3.46)$$

Infine si riportano le componenti del fascio uscente al sistema di coordinate originale. Questa trasformazione può essere vista come una rotazione di  $S''$  in senso antiorario di un angolo  $-\beta$ , cioè:

$$S''' = \mathbf{M}_R(-2\beta)S'' \quad (3.47)$$

$$= [\mathbf{M}_R(-2\beta)\mathbf{M}\mathbf{M}_R(2\beta)]S \quad (3.48)$$

dove di nuovo  $\mathbf{M}_R(-2\beta)$  è la matrice di Mueller per la rotazione e  $S'''$  è il vettore di Stokes del fascio uscente. L'equazione (3.47) può essere riscritta come:

$$S''' = \mathbf{M}(2\beta)S \quad (3.49)$$

dove

$$\mathbf{M}(2\beta) = \mathbf{M}_R(-2\beta)\mathbf{M}\mathbf{M}_R(2\beta) \quad (3.50)$$

L'equazione (3.50) rappresenta la matrice di Mueller di un componente polarizzante ruotato. Come già visto la matrice di Mueller per un rotatore è data da:

$$\mathbf{M}(2\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\beta & \sin 2\beta & 0 \\ 0 & -\sin 2\beta & \cos 2\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

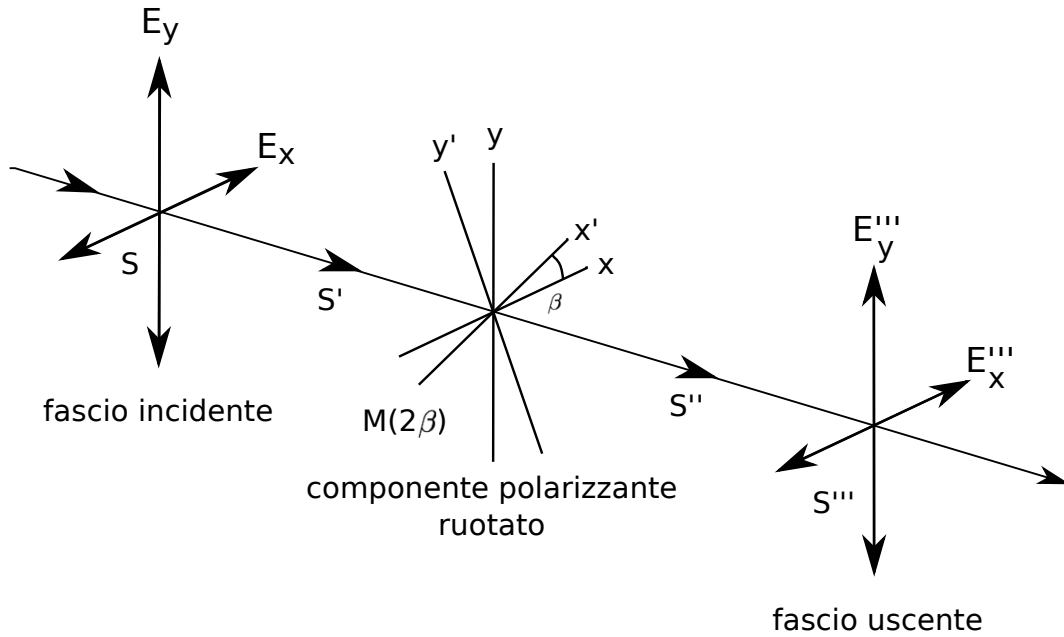


Figura 3.5: componente polarizzante ruotato

Di particolare interesse sono le matrici di Mueller del polarizzatore e della lamina ritardatrice ruotati. La matrice di Mueller di un rotatore “ruotato” è altrettanto interessante ma in una maniera diversa. Infatti sostituendo all’interno della (3.50) la matrice di Mueller del rotatore si ottiene  $\mathbf{M}(2\beta) = \mathbf{M}_R(2\beta)$  cioè il rotatore è invariante alle rotazioni meccaniche. Infatti l’ellisse di rotazione non può essere ruotata attraverso la rotazione di un rotatore in quanto la rotazione è una proprietà intrinseca del materiale da cui è composto. Tuttavia è possibile comunque ruotare l’ellisse di polarizzazione agendo meccanicamente su una lamina  $\lambda/2$  come verrà dimostrato in seguito.

La matrice di Mueller di un polarizzatore ideale con asse orientato in una direzione generica è data da:

$$\mathbf{M} = \frac{p^2}{2} \begin{bmatrix} 1 & \cos 2\gamma & 0 & 0 \\ \cos 2\gamma & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin 2\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin 2\gamma \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Sostituendo la (3.52) nella (3.50) si ottiene:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \cos 2\gamma \cos 2\beta & \cos 2\gamma \sin 2\beta & 0 \\ \cos 2\gamma \cos 2\beta & \cos^2 2\beta + \sin 2\gamma \sin^2 2\beta & (1 - \sin 2\gamma) \sin 2\beta \cos 2\beta & 0 \\ \cos 2\gamma \sin 2\beta & (1 - \sin 2\gamma) \sin 2\beta \cos 2\beta & \sin^2 2\beta + \sin 2\gamma \cos^2 2\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin 2\gamma \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

dove si è posto  $p^2 = 1$ . La forma più comune della (3.53) è la matrice di Mueller di un polarizzatore orizzontale ideale ruotato ( $\gamma = 0$ ). Per questi valori si ha:

$$\mathbf{M}_P(2\beta) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \cos 2\beta & \sin 2\beta & 0 \\ \cos 2\beta & \cos^2 2\beta & \sin 2\beta \cos 2\beta & 0 \\ \sin 2\beta & \sin 2\beta \cos 2\beta & \sin^2 2\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Si può verificare facilmente che ponendo  $\beta = 0^\circ, 90^\circ, \pm 45^\circ$  si ottengono le matrici di Mueller rispettivamente di un polarizzatore orizzontale, verticale e a  $\pm 45^\circ$ .

La matrice di Mueller di una lamina ritardatrice che induce uno sfasamento di  $\phi$  tra le componenti ortogonali del campo, come già visto, è data da:

$$\mathbf{M}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Dall'equazione (3.50) si ottiene che la matrice di Mueller di una lamina ritardatrice ruotata è data da:

$$\mathbf{M}(\phi, 2\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\beta + \cos \phi \sin^2 2\beta & (1 - \cos \phi) \sin 2\beta \cos 2\beta & -\sin \phi \sin 2\beta \\ 0 & (1 - \cos \phi) \sin 2\beta \cos 2\beta & \sin^2 2\beta + \cos \phi \cos^2 2\beta & \sin \phi \cos 2\beta \\ 0 & \sin \phi \sin 2\beta & -\sin \phi \cos 2\beta & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Un caso interessante si ha per la lamina  $\lambda/2$  ruotata, quando  $\phi = \pi$ , nel quale la matrice



(3.56) si riduce a:

$$\mathbf{M}(\pi, 2\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 4\beta & \sin 4\beta & 0 \\ 0 & \sin 4\beta & -\cos 4\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

La matrice (3.57) è molto simile alla matrice di Mueller del rotatore (3.51), per questo la lamina a mezz'onda è spesso utilizzata per ruotare la polarizzazione.

Se nella matrice (3.56) si pone  $\phi = \pi/2$  si ottiene la matrice di Mueller di una lamina a quarto d'onda ruotata:

$$\mathbf{M}(\pi/2, 2\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\beta & \sin 2\beta \cos 2\beta & -\sin 2\beta \\ 0 & \sin 2\beta \cos 2\beta & \sin^2 2\beta & \cos 2\beta \\ 0 & \sin 2\beta & -\cos 2\beta & 0 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Se si considera un fascio con polarizzazione lineare orizzontale con vettore di Stokes pari a:

$$S = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

e si fa incidere su una lamina  $\lambda/4$ , il vettore  $S'$  uscente che si ottiene moltiplicando (3.58) con (3.59) è:

$$S' = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos^2 2\beta \\ \sin 2\beta \cos 2\beta \\ \sin 2\beta \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

Dalla (3.60) osserva immediatamente che l'angolo di orientazione  $\theta'$  e l'ellitticità  $\varepsilon'$  del fascio uscente sono:

$$\tan 2\theta' = \tan 2\beta \quad (3.61a)$$

$$\sin 2\varepsilon' = \sin 2\beta \quad (3.61b)$$

Quindi la lamina a quarto d'onda ha la capacità di generare uno stato con qualsiasi orientazione ed ellitticità partendo da uno stato polarizzato orizzontalmente. Tuttavia non è

possibile modificare entrambi arbitrariamente ma solo uno dei due alla volta. Questo ci conduce al problema della generazione di uno stato di polarizzazione generico che verrà affrontato nel seguente paragrafo.

### 3.6 Generazione di uno stato di polarizzazione generico

Il metodo più semplice per generare un generico stato di polarizzazione è quello di mettere in cascata un polarizzatore rotante e una lamina a quarto d'onda rotante. Infatti, partendo da un generico stato di polarizzazione:

$$S = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

e moltiplicandolo per la matrice del polarizzatore lineare ruotato:

$$\mathbf{M}_P(2\beta) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \cos 2\beta & \sin 2\beta & 0 \\ \cos 2\beta & \cos^2 2\beta & \sin 2\beta \cos 2\beta & 0 \\ \sin 2\beta & \sin 2\beta \cos 2\beta & \sin^2 2\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

e della lamina  $\lambda/4$  ruotata:

$$\mathbf{M}(2\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\phi & \sin 2\phi \cos 2\phi & -\sin 2\phi \\ 0 & \sin 2\phi \cos 2\phi & \sin^2 2\phi & \cos 2\phi \\ 0 & \sin 2\phi & -\cos 2\phi & 0 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

si ottiene in uscita lo stato:

$$S' = I(\beta) \begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\beta \cos^2 2\phi \\ \cos 2\beta \sin 2\phi \cos 2\phi + \sin 2\beta \sin^2 2\phi \\ \cos 2\beta \sin 2\phi - \sin 2\beta \cos 2\phi \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

dove:

$$I(\beta) = \frac{1}{2}(S_0 + S_1 \cos 2\beta + S_2 \sin 2\beta) \quad (3.66)$$

L'equazione (3.65) definisce il vettore di Stokes di un fascio polarizzato ellitticamente; variando gli angoli di rotazione dei due elementi polarizzanti è possibile generare qualsiasi stato di polarizzazione. L'angolo di azimut dello stato uscente è dato da:

$$\tan 2\theta = \tan 2\phi + \tan 2\beta \tan^2 2\phi \quad (3.67)$$

mentre l'ellitticità è pari a:

$$\sin 2\varepsilon = \frac{\tan 2\phi - \tan 2\beta}{\cos 2\phi} \quad (3.68)$$

Generalmente uno stato polarizzato viene creato a partire da una sorgente di luce coerente (ad esempio un laser) che genera un fascio parzialmente polarizzato linearmente. Applicando a questo un polarizzatore lineare rotante c'è il forte rischio di avere delle forti disparità di intensità nei vari stati di polarizzazione generati o addirittura bloccare completamente il fascio. Per evitare ciò spesso si pone il polarizzatore davanti alla sorgente con asse parallelo alla direzione di polarizzazione del fascio incidente mentre per ruotare la polarizzazione lineare viene inserita una lamina  $\lambda/2$ . Si ottiene in questo modo un risultato simile al precedente ma con il vantaggio di avere intensità del fascio uscente pressoché uguale per ogni stato di polarizzazione.

### 3.7 La sfera di Poincaré di alcuni dispositivi polarizzanti ruotati

Come visto in precedenza sulla sfera di Poincaré è possibile rappresentare un generico stato di polarizzazione. Le polarizzazioni lineari vengono individuate sul piano dell'equatore della sfera. Ruotando quindi un polarizzatore lineare è possibile esplorare tutte le polarizzazioni che giacciono sull'equatore come si può vedere nella figura 3.6.

La matrice di una lamina a mezz'onda ruotata è data da:

$$\mathbf{M}(2\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 4\beta & \sin 4\beta & 0 \\ 0 & \sin 4\beta & -\cos 4\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

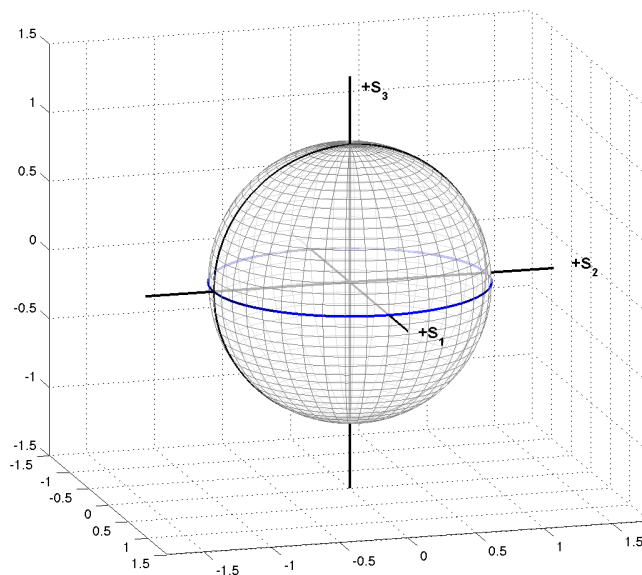


Figura 3.6: Sfera di Poincaré di un polarizzatore ruotato

Moltiplicando questa per il generico vettore di Stokes:

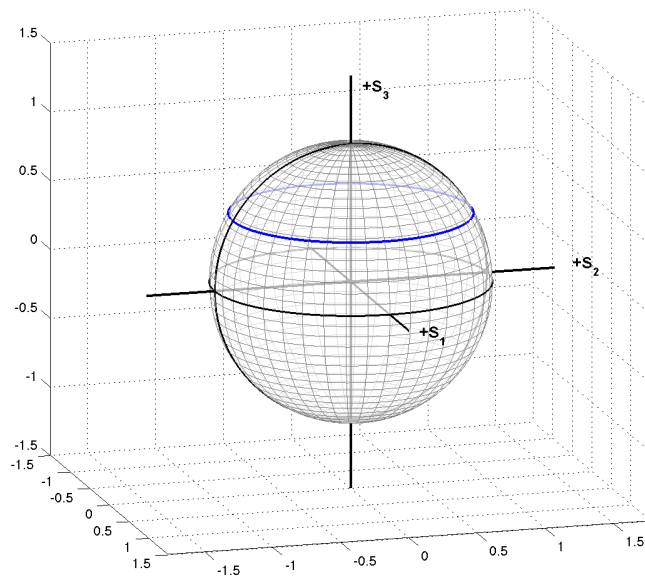
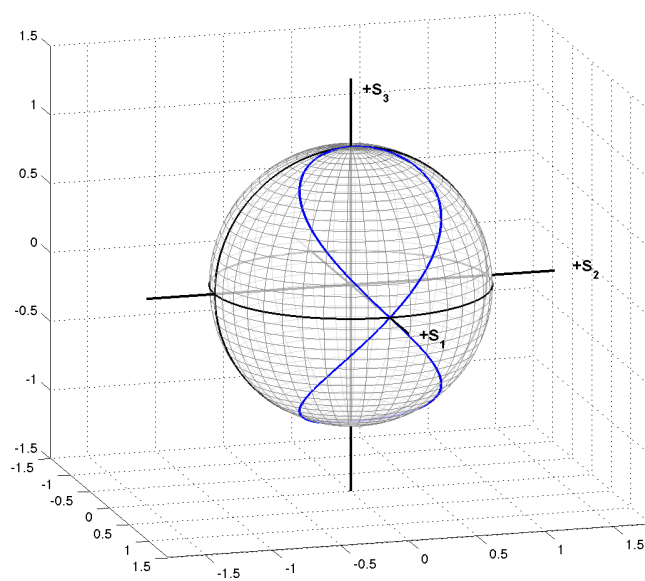
$$S = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

si ottiene il vettore:

$$S' = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \cos 4\beta + S_2 \sin 4\beta \\ S_1 \sin 4\beta - S_2 \cos 4\beta \\ -S_3 \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Come si può notare la coordinata  $S_3$  non viene modificata dalla rotazione, si ha solo uno spostamento sul piano  $(S_1, S_2)$ . Quindi, come si può vedere in figura 3.7, partendo da un generico punto sulla sfera, la lamina  $\lambda/2$  consente di spaziare tutte le polarizzazioni che giacciono alla stessa latitudine.

La lamina  $\lambda/4$  contrariamente alle precedenti consente di modificare la latitudine di uno stato di polarizzazione. Lo spostamento però non avviene lungo la direzione dei meridiani ma disegna una specie di papillon sulla sfera come si può osservare nella figura 3.8.

Figura 3.7: Sfera di Poincaré di una lamina  $\lambda/2$ Figura 3.8: Sfera di Poincaré di una lamina  $\lambda/4$



---

## Analisi della matrice di Mueller

---

### 4.1 La matrice di Mueller-Jones

#### 4.1.1 Definizione

La matrice di Jones  $\mathbf{J}$  è una matrice due per due complessa formata da otto parametri indipendenti (parte reale e parte complessa di ognuno dei quattro elementi della matrice) o al limite sette variabili se si esclude la fase assoluta. La matrice di Mueller  $\mathbf{M}$  può avere al massimo 16 parametri indipendenti, che comprendono anche l'informazione di depolarizzazione. Ogni matrice di Jones che descrive un sistema ottico non depolarizzante può essere trasformata in una matrice di Mueller equivalente mentre il contrario non è necessariamente possibile. Una matrice di Mueller che contiene solo sette parametri indipendenti, espressa partendo da una matrice di Jones viene definita anche matrice di Mueller-Jones  $\mathbf{M}_{\mathbf{J}}$ :

$$\mathbf{M}_{\mathbf{J}} = \mathbf{A}(\mathbf{J} \otimes \mathbf{J}^*)\mathbf{A}^{-1} \quad (4.1)$$

dove  $\mathbf{A}$  è la matrice seguente:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Se una matrice di Mueller di un mezzo è una matrice di Mueller-Jones  $\mathbf{M}_J$  allora si possono applicare le proprietà di decomposizione della matrice di Jones. Ad esempio, la decomposizione polare di una matrice di Jones permette di ricavare i suoi sette parametri indipendenti.

### 4.1.2 La decomposizione polare

Un dispositivo ottico costituito da uno svariato numero di componenti polarizzanti è equivalente a un sistema formato da quattro elementi, cioè due lamine ritardatrici, un polarizzatore parziale e un rotatore. La decomposizione polare di una matrice di Jones può essere fattorizzata come:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_P \mathbf{J}_R \quad \text{o} \quad \mathbf{J} = \mathbf{J}_P \mathbf{J}'_R \quad (4.3)$$

dove  $\mathbf{J}_P$ ,  $\mathbf{J}'_P$  sono matrici Hermitiane e  $\mathbf{J}_R$  è una matrice unitaria. Una matrice Hermitiana può essere legata ad un polarizzatore mentre una matrice unitaria può essere legata a un ritardatore di fase. Questa decomposizione è stata introdotta da J.J. Gil ed E. Bernabeu con lo scopo di ricavare le proprietà di ritardo e polarizzazione dalla matrice di Mueller di un sistema ottico non depolarizzante. Utilizzando il formalismo di Jones la matrice di Jones di un polarizzatore parziale ellittico può essere scritta come:

$$\mathbf{J}_P(P_1, P_2, \nu, \delta) = \begin{bmatrix} P_1 C_\nu^2 + P_2 S_\nu^2 & (P_1 - P_2) C_\nu S_\nu e^{-i\delta} \\ (P_1 - P_2) C_\nu S_\nu e^{+i\delta} & P_1 S_\nu^2 + P_2 C_\nu^2 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

dove  $C_\nu = \cos \nu$ ,  $S_\nu = \sin \nu$ ,  $P_1$  e  $P_2$  ( $P_1 \geq P_2$ ) sono i principali coefficienti di trasmissione dei due autostati di polarizzazione di  $\mathbf{J}_P$ . Questi autostati hanno rispettivamente azimut  $\theta$  e  $\theta + \pi/2$  ed ellitticità  $\varepsilon$  e  $-\varepsilon$ . Questo permette di definire gli angoli  $\nu$  e  $\delta$  come:

$$\tan 2\theta = \tan 2\nu \cos \delta \quad (4.5a)$$

$$\sin 2\varepsilon = \sin 2\nu \sin \delta \quad (4.5b)$$

La matrice di un ritardatore ellittico è data da:

$$\mathbf{J}_R(\eta, u, \Delta) = \begin{bmatrix} e^{i\eta/2} C_u^2 + e^{-i\eta/2} S_u^2 & (e^{i\eta/2} - e^{-i\eta/2}) C_u S_u e^{-i\Delta} \\ (e^{i\eta/2} - e^{-i\eta/2}) C_u S_u e^{i\Delta} & e^{i\eta/2} S_u^2 + e^{-i\eta/2} C_u^2 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

con  $C_u = \cos u$  e  $S_u = \sin u$  e dove  $\eta$  è il ritardo introdotto tra i due autostati ortogonali di polarizzazione ellittica di  $\mathbf{J}_R$ . Questi autostati hanno rispettivamente azimut  $\theta'$  e  $\theta' + \pi/2$



ed ellitticità  $\varepsilon'$  e  $-\varepsilon'$  e questo permette di definire gli angoli  $u$  e  $\Delta$  come:

$$\tan 2\theta' = \tan 2u \cos \Delta \quad (4.7a)$$

$$\sin 2\varepsilon' = \sin 2u \sin \Delta \quad (4.7b)$$

Una matrice di Mueller-Jones che rappresenta un sistema ottico può essere scomposta in elementi semplici (polarizzatori e ritardatori) nella seguente maniera:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_P \mathbf{M}_R \quad \text{o} \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}'_R \mathbf{M}'_P \quad (4.8)$$

Questa fattorizzazione permette di ricavare sette parametri  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $\nu$ ,  $\delta$ ,  $\eta$ ,  $u$  e  $\Delta$  in funzione degli elementi di  $\mathbf{M}_J$ . E' inoltre possibile quantificare le modifiche che un sistema ottico apporta a un'onda polarizzata in termini di attenuazione (per esempio per un mezzo dicroico) e ritardo (per esempio per un mezzo birifrangente). La decomposizione polare di una matrice di Jones può essere espressa in funzione degli elementi della matrice di Mueller. I principali coefficienti di trasmissione  $P_1$  e  $P_2$  si possono calcolare come:

$$P_1^2 = m_{00} + \sqrt{m_{01}^2 + m_{02}^2 + m_{03}^2} \quad (4.9a)$$

$$P_2^2 = m_{00} - \sqrt{m_{01}^2 + m_{02}^2 + m_{03}^2} \quad (4.9b)$$

Per ricavare il ritardo si possono avere due casi, che dipendono dal determinante della matrice  $\mathbf{M}$ . Se il determinante è non nullo si può scrivere che:

$$\cos^2(\eta/2) = \frac{1}{4} \text{Tr}(\mathbf{M}_R) \quad (4.10a)$$

$$\text{oppure} \quad \cos^2(\eta'/2) = \frac{1}{4} \text{Tr}(\mathbf{M}'_R) \quad (4.10b)$$

dove la derivazione di  $\mathbf{M}_R$  e  $\mathbf{M}'_R$  è ottenuta dall'equazione (4.8) e dal calcolo dei quattro parametri di  $\mathbf{M}_P$  e  $\mathbf{M}'_P$ . Nel caso in cui si abbia determinante di  $\mathbf{M}$  nullo la derivazione del parametro di ritardo è più complessa.

### 4.1.3 Condizioni sulla matrice di Mueller-Jones

Il calcolo sperimentale della matrice di Mueller  $\mathbf{M}$  di un sistema ottico permette di ottenere le sue proprietà di polarizzazione considerando  $\mathbf{M}$  come una matrice di Mueller-Jones. Nella realtà la matrice di Mueller misurata non corrisponde mai a una matrice di Mueller-Jones

in quanto un sistema ottico generico presenta anche depolarizzazione. Inoltre nel calcolo sperimentale di  $\mathbf{M}$  sono presenti errori di misura.

Molti sono gli studi fatti sulle condizioni di esistenza della matrice di Mueller. E. G. Fry e G. W. Kattawar hanno stabilito nove identità indipendenti tra i sedici coefficienti della matrice di Mueller e hanno dimostrato che queste uguaglianze diventano delle disuguaglianze se il sistema in questione è depolarizzante. Queste relazioni quadratiche possono essere utilizzate per testare la validità delle misure sperimentali dei coefficienti della matrice di Mueller.

La prima delle relazioni espresse da Fry e Kattawar è:

$$\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 m_{ij}^2 = 4m_{00}^2 \quad (4.11)$$

ed è valida se la matrice  $\mathbf{M}$  è una matrice di Mueller-Jones. Successivamente Gil e Bernabeu hanno dimostrato che  $\mathbf{M}$  descrive un sistema non depolarizzante se e solo se:

$$\text{Tr}(\mathbf{M}^T \mathbf{M}) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 m_{ij}^2 = 4m_{00}^2 \quad (4.12)$$

dove  $\mathbf{M}^T$  è la matrice trasposta di  $\mathbf{M}$ . La condizione (4.12) è stato dimostrato essere necessaria ma non sufficiente per descrivere un sistema ottico che può essere caratterizzato da una matrice di Jones. Bakarat ha inoltre stabilito una condizione matriciale su  $\mathbf{M}$  che è formata da nove uguaglianze tra i sedici elementi  $m_{ij}$ :

$$\mathbf{M}^T \mathbf{G} \mathbf{M} = -\frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{M}^T \mathbf{G} \mathbf{M}) = |\det(\mathbf{J})|^2 \mathbf{G} \quad (4.13)$$

dove  $\mathbf{G}$  è la matrice:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Anche questa condizione, come dimostrato da R. Simon, è necessaria ma non sufficiente. E' stato proposto quindi un nuovo criterio per analizzare le matrici di Mueller sperimentali. Considerando un sistema ottico rappresentato da una matrice di Jones si definisce la seguente relazione:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{J} \otimes \mathbf{J}^* \quad (4.15)$$

da questa si ricava la matrice  $\mathbf{N}$  come riordinamento dei suoi elementi in questo modo:

$$n_{ij,kl} = q_{ik,jl} \quad i, j, k, l = 1, 2 \quad (4.16)$$

Esprimendo  $\mathbf{N}$  in funzione della matrice di Mueller-Jones si ottiene:

$$N = \frac{1}{2} \left[ \begin{array}{cc} m_{00} + m_{11} + m_{01} + m_{10} & m_{02} + m_{12} + i(m_{03} + m_{13}) \\ m_{02} + m_{12} - i(m_{03} + m_{13}) & m_{00} - m_{11} - m_{01} + m_{10} \\ m_{20} + m_{21} + i(m_{30} + m_{31}) & m_{22} - m_{33} + i(m_{23} + m_{32}) \\ m_{22} + m_{33} - i(m_{23} - m_{32}) & m_{20} - m_{21} + i(m_{30} + m_{31}) \\ m_{20} + m_{21} - i(m_{30} + m_{31}) & m_{22} + m_{33} + i(m_{23} - m_{32}) \\ m_{22} - m_{33} - i(m_{23} + m_{32}) & m_{20} + m_{21} - i(m_{30} - m_{31}) \\ m_{00} - m_{11} + m_{01} - m_{10} & m_{02} - m_{12} + i(m_{03} - m_{13}) \\ m_{02} - m_{12} - i(m_{03} - m_{13}) & m_{00} + m_{11} - m_{01} - m_{10} \end{array} \right] \quad (4.17)$$

con

$$\text{Tr}(\mathbf{N}) = 2m_{00} \quad (4.18)$$

La matrice  $\mathbf{N}$  è Hermitiana per costruzione e verifica la relazione:

$$\mathbf{N}^2 = \text{Tr}(\mathbf{N})\mathbf{N} \quad (4.19)$$

se è una matrice di Mueller-Jones. Una condizione necessaria e sufficiente affinché  $\mathbf{N}$  soddisfi l'equazione (4.19) è che uno dei quattro autovalori di  $\mathbf{N}$  sia positivo e uguale alla relazione (4.18) e gli altri tre pari a zero.

#### 4.1.4 Sistemi ottici fisicamente realizzabili

Le condizioni che consentono ad un sistema ottico passivo di essere fisicamente realizzabile si ricavano attraverso i vettori di Stokes. Anderson e Barakat hanno dimostrato che un sistema ottico è fisicamente realizzabile se, per ogni vettore di Stokes incidente  $S^i$  che abbia  $S_0 > 0$  e  $S_0^2 \geq S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ , si ha un vettore di Stokes uscente che verifica le condizioni:

$$S'_0 > 0 \quad \text{e} \quad S_0'^2 \geq S_1'^2 + S_2'^2 + S_3'^2 \quad (4.20)$$

e il guadagno del sistema, definito come  $g = S_0/S_0'$ , è:

$$0 \leq g \leq 1 \quad (4.21)$$

Le condizioni sulla realizzabilità fisica di un sistema ottico possono essere espresse in forma matriciale attraverso la matrice (4.17) che può essere altrimenti definita come:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 m_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j^* \quad (4.22)$$

dove  $\sigma_i$  sono le matrici di Pauli e  $\sigma_i \otimes \sigma_j^*$  sono dette matrici di Dirac. Come visto in precedenza la condizione necessaria e sufficiente affinché  $\mathbf{M}$  sia una matrice di Mueller-Jones è che  $\mathbf{H}$  possieda un solo autovalore positivo e gli altri nulli. Applicando la scomposizione spettrale è possibile filtrare la matrice di Mueller dal rumore. Essendo  $\mathbf{H}$  una matrice Hermitiana possiamo scomporla come:

$$\mathbf{H} = \mathbf{W} \mathbf{\Lambda} \mathbf{W}^+ \quad (4.23)$$

dove  $\mathbf{\Lambda}$  è una matrice diagonale reale formata dagli autovalori  $|\lambda_0| \geq |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3|$  e  $\mathbf{W}$  è la matrice unitaria le cui colonne sono formate dagli autovettori  $\vec{W}_i$  di  $\mathbf{H}$ . Se  $\mathbf{M}$  è una matrice di Mueller-Jones allora  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  e la (4.23) può essere riscritta come:

$$\mathbf{H} = \lambda_0 \vec{W}_0 \vec{W}_0^+ \quad (4.24)$$

dove  $\vec{W}_0$  è l'autovettore associato all'autovalore  $\lambda_0$ . Se  $\mathbf{M}$  non è una matrice di Mueller-Jones (cioè il rango di  $\mathbf{H}$  è maggiore di 1), ma si ha che  $\lambda_0 \approx \text{Tr}(\mathbf{H}) = 2m_{00}$  e  $\lambda_i \approx 0$  per  $i = 1, 2, 3$ , allora si può costruire una matrice di Mueller-Jones  $\mathbf{M}_J$  dalla seguente matrice  $\mathbf{H}_J$ , di rango uno:

$$\mathbf{H}_J = \lambda_0 \vec{W}_0 \vec{W}_0^+ \quad (4.25)$$

In pratica, rimuovendo gli autovalori  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), è come se si facesse un filtraggio del rumore che è indipendente dal segnale. Il concetto di realizzabilità fisica di un sistema ottico può essere collegato agli autovalori dello spettro di  $\mathbf{H}$ . Affinché un sistema ottico sia fisicamente accettabile gli autovalori della matrice  $\mathbf{H}$  devono essere tutti non negativi.

Se il sistema ottico analizzato è fortemente depolarizzante è difficile eliminare il rumore all'interno della matrice di Mueller, infatti la matrice  $\mathbf{H}$  può avere comunque autovalori non negativi anche in presenza di forte rumore. In questi casi l'unica maniera per attenuare il rumore è fare misurazioni ripetute e utilizzare delle basi di misura che attenuano maggiormente il rumore. Di questo verrà discusso nei capitoli 5 e 7.

Il metodo appena esposto per eliminare il rumore è molto limitato e applicabile solo sotto ipotesi stringenti; nel capitolo 8 verranno trattati altri metodi per ricavare la matrice di Mueller fisicamente accettabile da una matrice di Mueller rumorosa.

### 4.1.5 Analisi dei problemi di polarizzazione

La realizzabilità fisica di un sistema ottico può anche essere espressa in termini di grado di polarizzazione tra l'onda trasmessa e l'onda incidente. Si considerino i vettori di Stokes:

$$S^i = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S' = \begin{bmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

che rappresentano rispettivamente il fascio incidente e il fascio trasmesso.  $S'$  si può calcolare attraverso la nota relazione (3.3):  $S' = \mathbf{M}S^i$ .

Il vettore  $S'$  può essere legato al grado di polarizzazione  $P$  definito precedentemente nella relazione (2.24):

$$P' = \frac{\sqrt{S_1'^2 + S_2'^2 + S_3'^2}}{S_0'} \quad (4.27)$$

Secondo le condizioni di Kumar e Simon una matrice quattro per quattro è una matrice di Mueller se e solo se mappa tutti i vettori di Stokes di stati puri con intensità unitaria ( $S_0 = 1$ ) in altri vettori di Stokes. Questo implica che:

$$m_{00} \geq \sqrt{m_{01}^2 + m_{02}^2 + m_{03}^2} \quad (4.28)$$

In aggiunta, parametrizzando secondo le coordinate della sfera di Poincaré  $\theta$  e  $\varepsilon$  si trova:

$$P'(\theta, \varepsilon)_{\max} \leq 1 \quad (4.29)$$

L'analisi della superficie descritta da  $P'(\theta, \varepsilon)_{\max}$  permette di determinare se ci sono delle aree o dei punti in cui il grado di polarizzazione è superiore all'unità e che quindi non verificano la condizione (4.27). Questa rappresentazione grafica è molto utile perché permette di evidenziare gli errori di misura e soprattutto permette di caratterizzare il comportamento di un sistema ottico.

## 4.2 La depolarizzazione

### 4.2.1 Definizione

La depolarizzazione della luce causata da un sistema ottico è in generale dovuta all'assorbimento selettivo o alla correlazione tra gli stati puri di polarizzazione. Questo è generato

dalla rugosità della superficie di un campione o dallo scattering delle impurità all'interno di un mezzo trasmissivo. La matrice di Mueller permette di caratterizzare la depolarizzazione di un sistema anche se spesso non è così semplice da ricavare, eccetto nel caso di depolarizzazione totale per la quale si ha:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

### 4.2.2 Depolarizzazione isotropica

La depolarizzazione si definisce isotropica se il grado di polarizzazione ( $0 \leq P' < 1$ ) dell'onda diffusa dal sistema ottico è sempre costante per ogni stato puro incidente. La matrice di Mueller può essere scomposta come:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_J + \mathbf{M}_D \quad (4.31)$$

dove  $\mathbf{M}_J$  è una matrice di Mueller-Jones e  $\mathbf{M}_D$  è la matrice di un depolarizzatore isotropico, che ha la forma:

$$\mathbf{M}_D = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

La matrice  $\mathbf{M}_J$  soddisfa le condizioni della traccia (4.12), questo permette di affermare che la scomposizione (4.31) è unica. Il coefficiente di depolarizzazione  $d$  si può ricavare dagli elementi  $m_{ij}$  di  $\mathbf{M}$  come:

$$d = m_{00} - \left[ \frac{1}{3} [\text{Tr}(\mathbf{M}^T \mathbf{M}) - m_{00}] \right]^{1/2} \quad (4.33)$$

Questa scomposizione porta a considerare lo stato di polarizzazione di un'onda luminosa uscente come la sovrapposizione incoerente di uno stato completamente polarizzato e uno stato non polarizzato e indipendente dalla polarizzazione incidente.

La matrice  $\mathbf{M}_D$  può essere legata attraverso l'equazione (4.22) a un operatore Hermitiano, che ha la caratteristica di essere diagonale:

$$\mathbf{H}_D = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Assumendo che una data matrice di Mueller possa essere scritta sotto la forma dell'equazione (4.31) e che  $\mathbf{H}$  sia l'operatore Hermitiano associato a  $\mathbf{M}$ , la scomposizione spettrale di  $\mathbf{H}$  può essere calcolata dalla (4.23) come:

$$\mathbf{H} = \mathbf{W}\mathbf{\Lambda}\mathbf{W}^+ \quad (4.35)$$

Siccome la corrispondenza tra la matrice di Mueller e il suo operatore Hermitiano è univoca, si può scrivere:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_J + \mathbf{H}_D \quad (4.36)$$

dove  $\mathbf{H}_D$  è una matrice diagonale.

La depolarizzazione non influisce sulla matrice unitaria  $\mathbf{W}$  dell'equazione (4.23) ma è presente in maniera eguale solo nei quattro autovalori di  $\mathbf{H}_D$ .

Di conseguenza, nel caso di polarizzazione isotropica, solo il primo elemento della matrice di Mueller trasporta l'informazione di depolarizzazione e influisce in maniera eguale sui quattro elementi diagonali di  $\mathbf{H}_D$ . La matrice diagonale  $\mathbf{\Lambda}$  ha quindi tre autovalori con lo stesso modulo  $|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3|$ . Il coefficiente di depolarizzazione  $d$  può essere ricavato dagli autovalori di  $\mathbf{H}$  attraverso la relazione:

$$d = \frac{2}{3}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \quad (4.37)$$

E' quindi possibile calcolare:

$$\mathbf{H}_J = \left( \lambda_0 - \frac{d}{2} \right) \vec{\mathbf{W}}_0 \vec{\mathbf{W}}_0^+ \quad (4.38)$$

che è il componente non depolarizzante di  $\mathbf{H}$  e di conseguenza ricavare la matrice di Jones  $\mathbf{J}$  riferita a  $\mathbf{H}_J$  in maniera tale da poter applicare la scomposizione polare.

### 4.2.3 Depolarizzazione anisotropica

La polarizzazione isotropica è solo un caso particolare del fenomeno di depolarizzazione. In generale, la depolarizzazione non influisce solo sul coefficiente  $m_{00}$  e la scomposizione (4.31) non può essere applicata. Non esiste infatti un modello definito come nel caso della depolarizzazione isotropica, inoltre dalla matrice di Mueller non si riescono ad ottenere delle informazioni dirette sulla depolarizzazione. E' quindi necessario introdurre nuovi parametri per poter caratterizzare la depolarizzazione causata dal sistema.

### 4.2.4 Indice di depolarizzazione

L'indice di depolarizzazione rappresenta un valore medio del potere di depolarizzazione di un sistema ottico:

$$P_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 m_{ij}^2 - m_{00}^2}{3m_{00}^2}} \quad (4.39)$$

$P_D$  può anche essere scritto in funzione dell'operatore Hermitiano  $\mathbf{H}$  del sistema ottico:

$$\|\mathbf{H}\|_F = \|\mathbf{M}\|_F = \left( \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 m_{ij}^2 \right)^{1/2} = [\text{Tr}(\mathbf{M}^T \mathbf{M})]^{1/2} \quad (4.40)$$

dove  $\|\cdot\|_F$  rappresenta la norma di Frobenius. Inoltre si può scrivere che:

$$m_{00}^2 \leq \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 m_{ij}^2 \leq 4m_{00}^2 \quad (4.41)$$

dove si ha:

$$\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 m_{ij}^2 = 4m_{00}^2 \quad (4.42)$$

se  $\mathbf{M}$  è una matrice di Mueller-Jones mentre:

$$\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 m_{ij}^2 = m_{00}^2 \quad (4.43)$$

se  $\mathbf{M}$  è la matrice di un sistema completamente depolarizzante:

$$m_{00}^2 \leq [ \|\mathbf{H}\|_F ]^2 \leq 4m_{00}^2 \quad (4.44)$$

Essendo la matrice  $\mathbf{H}$  ricavata dall'equazione (4.22) ed essendo  $\text{Tr}(\mathbf{H}) = 2m_{00}$ , allora l'equazione (4.44) risulta essere:

$$\left[ \frac{\text{Tr}(\mathbf{H})}{2} \right]^2 \leq [ \|\mathbf{H}\|_F ]^2 \leq 2 [\text{Tr}(\mathbf{H})]^2 \quad (4.45)$$



Infine il coefficiente di depolarizzazione diventa:

$$P_D = \left[ \frac{1}{3} \left( 4 \left[ \frac{\|\mathbf{H}\|_F}{\text{Tr}(\mathbf{H})} \right]^2 - 1 \right) \right]^{1/2} \quad (4.46)$$

L'indice di depolarizzazione di una matrice di Mueller  $\mathbf{M}$  è compreso fra 0 (per una matrice completamente depolarizzante) e 1 (per una matrice di Mueller-Jones).

### 4.2.5 Entropia di una matrice di Mueller

La scomposizione spettrale dell'operatore Hermitiano  $\mathbf{H}$  associato alla matrice  $\mathbf{M}$  permette di valutare l'entropia  $E$  del sistema ottico in esame:

$$E = - \sum_{i=0}^3 p_i \log_4 p_i \quad p_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=0}^3 \lambda_j} \quad (4.47)$$

dove i  $\lambda_i$  sono gli autovalori di  $\mathbf{H}$  e  $0 \leq E \leq 1$ .

I sistemi ottici non depolarizzanti, per i quali  $\mathbf{H}_J$  possiede un solo autovalore non negativo, hanno quindi una entropia nulla  $E = 0$ . Per i sistemi completamente depolarizzanti i quattro autovalori di  $\mathbf{H}_D$  sono uguali, di conseguenza  $E = 1$ .

### 4.2.6 Rappresentazione di sistemi ottici depolarizzanti sulla sfera di Poincaré

L'effetto della matrice di Mueller sullo stato di polarizzazione della luce può essere illustrato anche attraverso il formalismo della sfera di Poincaré. Nel capitolo 2 è stato illustrato come i tre parametri  $S_1, S_2, S_3$  di un vettore di Stokes normalizzato ( $S_0 = 1$ ) possono essere utilizzati in un sistema di coordinate Cartesiane per rappresentare lo stato di polarizzazione di un'onda luminosa. Uno stato completamente polarizzato quindi corrisponde a un punto nella sfera di raggio unitario e, da un punto di vista geometrico, uno stato parzialmente polarizzato è rappresentato da un punto all'interno della sfera mentre uno stato non polarizzato corrisponde all'origine degli assi. Si consideri la relazione:

$$S'(\varepsilon, \theta) = \mathbf{M}S^i(\varepsilon, \theta) \quad (4.48)$$

dove:

$$S^i(\varepsilon, \theta) = \begin{bmatrix} 1 \\ S_1/S_0 \\ S_2/S_0 \\ S_3/S_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\varepsilon \cos 2\theta \\ \cos 2\varepsilon \sin 2\theta \\ \sin 2\varepsilon \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Queste descrivono la sfera di Poincaré quando  $\varepsilon$  varia da  $-\pi/4$  a  $\pi/4$  e quando  $\theta$  varia da 0 a  $\pi$ . La superficie rappresentata dal vettore normalizzato  $S^i(\varepsilon, \theta)$  è ancora una sfera di raggio unitario se la matrice  $\mathbf{M}$  non è affetta da depolarizzazione; il grado di polarizzazione in uscita è quindi:

$$P'(\varepsilon, \theta) = \frac{\sqrt{S_1'^2 + S_2'^2 + S_3'^2}}{S_0'} = 1 \quad (4.50)$$

Quando si ha invece depolarizzazione si distinguono due casi. Il primo si ha quando il grado di depolarizzazione della luce diffusa dal sistema è costante ma minore di 1, il grado di depolarizzazione è quindi:

$$P'(\varepsilon, \theta) = \frac{\sqrt{S_1'^2 + S_2'^2 + S_3'^2}}{S_0'} < 1 \quad (4.51)$$

La trasformazione della sfera di Poincaré è ancora una sfera e la depolarizzazione è isotropica. Viceversa se la depolarizzazione non è omogenea, cioè è anisotropica, la superficie descritta da  $S^i(\varepsilon, \theta)$  non è più una sfera. La rappresentazione geometrica in questo caso permette di caratterizzare la depolarizzazione lungo direzioni specifiche. Non essendo la depolarizzazione costante si può misurare il grado di depolarizzazione medio ovvero l'indice di depolarizzazione definito nell'equazione (4.39):

$$P_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 m_{ij}^2 - m_{00}^2}{3m_{00}^2}} \quad (4.52)$$

Questo parametro può essere utilizzato in generale per calcolare la depolarizzazione di un sistema, infatti nel caso particolare di depolarizzazione isotropica  $P_D$  si riconduce al grado di depolarizzazione. Nella figura 4.1 è rappresentata la sfera di Poincaré di un sistema ottico ideale mentre nelle figure 4.2 e 4.3 è rappresentata la sfera di Poincaré di un sistema ottico reale descritto dalla matrice di Mueller sottostante:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0338 & 0.1587 & -0.0758 \\ 0.0490 & 0.6955 & 0.0001 & -0.0653 \\ 0.1590 & -0.0001 & 0.8138 & 0.2527 \\ -0.0729 & -0.0753 & -0.2361 & 0.6346 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

L'indice di depolarizzazione del sistema calcolato attraverso la matrice (4.53) è:

$$P_D = 0.7623 \quad (4.54)$$

Come si può osservare la sfera di Poincaré del sistema ottico reale ha raggio minore di 1 inoltre si nota una rotazione e una deformazione della sfera che indica come il sistema modifichi gli stati di polarizzazione in ingresso.

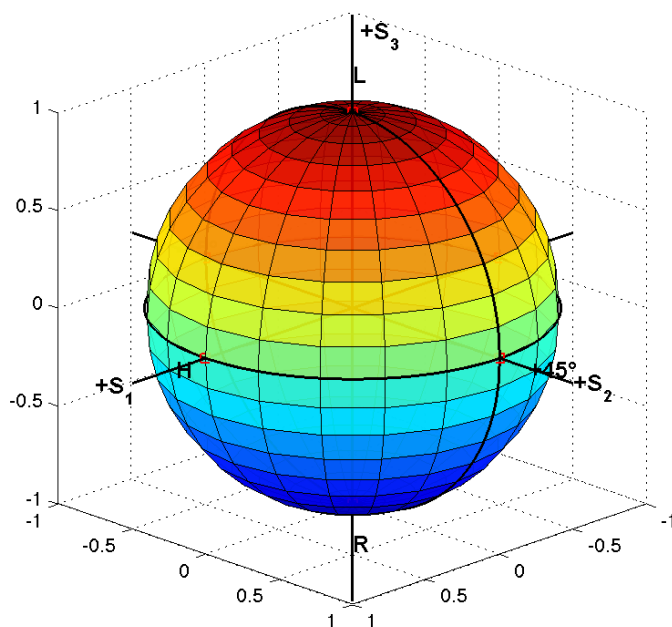


Figura 4.1: Sfera di Poincaré di un sistema ottico ideale

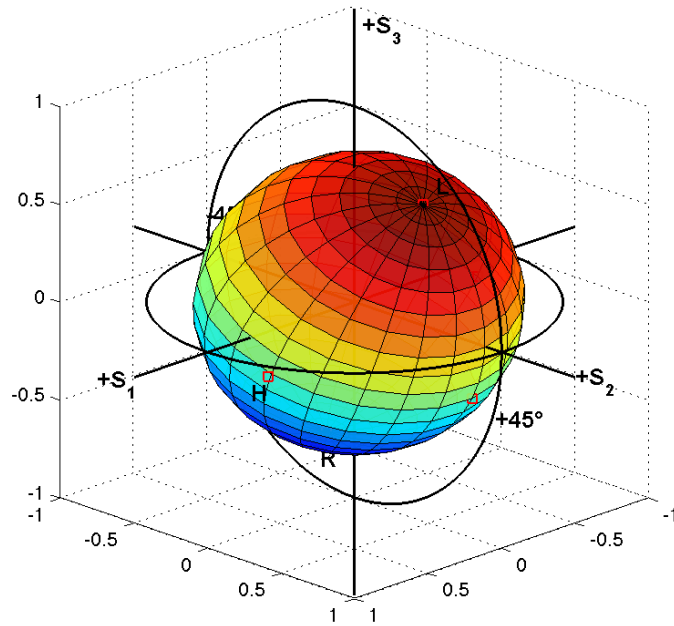


Figura 4.2: Sfera di Poincaré di un sistema ottico reale

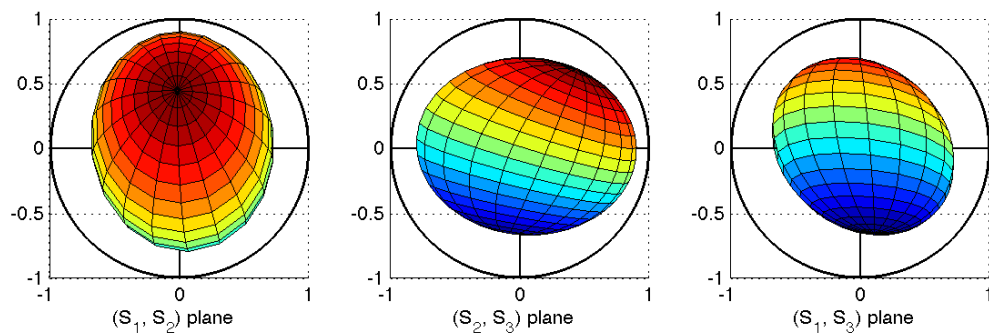


Figura 4.3: Proiezioni ortogonali della sfera sui piani  $(S_1, S_2)$ ,  $(S_2, S_3)$  e  $(S_1, S_3)$

---

## Polarimetria di Stokes

---

### 5.1 Introduzione

Il processo di misura del vettore di Stokes può essere rappresentato dall'equazione:

$$\mathbf{I} = \mathbf{A}S \quad (5.1)$$

dove  $\mathbf{I}$  è il vettore delle intensità misurate,  $\mathbf{A}$  è una matrice le cui dimensioni dipendono dal numero di misure e gli elementi dipendono dal sistema ottico, infine  $S$  è il vettore di Stokes del fascio incidente sul sistema di misura. Per determinare il vettore di Stokes incidente è necessario invertire l'equazione (5.1), in modo che  $S$  sia dato da:

$$S = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{I} \quad (5.2)$$

Questo sistema di equazioni è generato da una serie di misure e può essere risolto attraverso tecniche di Fourier o altre tecniche matematiche.

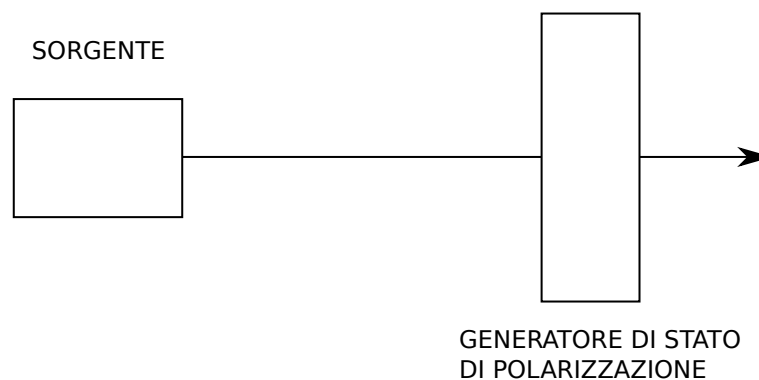
Un gruppo di elementi che analizza uno stato di polarizzazione di un fascio incidente si dice analizzatore di stati di polarizzazione (*polarization state analyzer* o PSA), mentre una serie di elementi che genera uno stato di polarizzazione viene detta generatore di stati di polarizzazione (*polarization state generator* o PSG). Il PSA e il PSG sono descritti funzionalmente nella figura 5.1.

Un polarimetro di Stokes si dice *completo* se misura tutti e quattro gli elementi del vettore di Stokes, viceversa è detto *incompleto* se ne misura meno di quattro. In questo

capitolo verranno trattate diverse tipologie di polarimetri di Stokes. Le polarimetrie a elementi rotanti, a elementi oscillanti e a modulazione di fase sono tutti metodi che permettono di ottenere il vettore di Stokes attraverso una serie di misure nel tempo. Altre tecniche, come la divisione di ampiezza e la divisione del fronte d'onda, descritte alla fine del capitolo, sono utilizzate per misurare simultaneamente i quattro elementi del vettore di Stokes.



(a) Analizzatore di stati di polarizzazione con rivelatore



(b) Generatore di stati di polarizzazione con sorgente

Figura 5.1: Diagramma funzionale della polarimetria di Stokes

## 5.2 Polarimetria a elementi rotanti

Polarimetri di Stokes che utilizzano elementi rotanti sono rappresentati nella figura 5.2. Gli elementi raffigurati sono tutti ritardatori lineari e polarizzatori (analizzatori). Gli elementi di Stokes misurati sono rappresentati nella casella alla destra di ogni diagramma, dove i punti in grassetto indicano i componenti di Stokes che vengono misurati.

### 5.2.1 Polarizzatore ad analizzatore rotante

Come illustrato nella figura 5.2(a), il polarizzatore (analizzatore) in questo polarimetro ruota generando un segnale modulato che viene rivelato dal sensore, l'intensità misurata è proporzionale a:

$$I = \frac{a_0}{2} + \frac{a_2}{2} \cos 2\theta + \frac{b_2}{2} \sin 2\theta \quad (5.3)$$

dove  $\theta$  è l'angolo di rotazione del polarizzatore. I coefficienti  $a_0$ ,  $a_2$  e  $b_2$  sono i primi tre elementi del vettore di Stokes. Per determinare i tre elementi misurabili del vettore di Stokes è necessario quindi compiere almeno tre misure.

L'equazione (5.3) e le espressioni di intensità che verranno ricavate in seguito per i segnali modulati sono tutte ricavate dalle equazioni algebriche che rappresentano questi sistemi di polarimetria. Per esempio, per il polarimetro ad analizzatore rotante si ha questa equazione:

$$\begin{bmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ \cos 2\theta & \cos^2 2\theta & \sin 2\theta \cos 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin^2 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

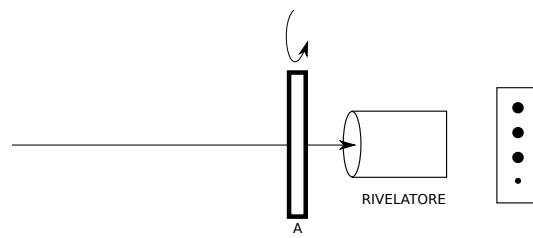
dove il vettore di Stokes entrante è stato moltiplicato per la matrice di Mueller di un polarizzatore lineare ruotato in modo da ottenere il vettore di Stokes uscente. Effettuando la moltiplicazione tra la prima riga della matrice di Mueller e il vettore di Stokes in ingresso si ottiene il primo elemento del vettore di Stokes uscente che corrisponde all'intensità misurata dal rivelatore:  $I = S'_0$ . Quindi,

$$I = \frac{S_0}{2} + \frac{S_1}{2} \cos 2\theta + \frac{S_2}{2} \sin 2\theta \quad (5.5)$$

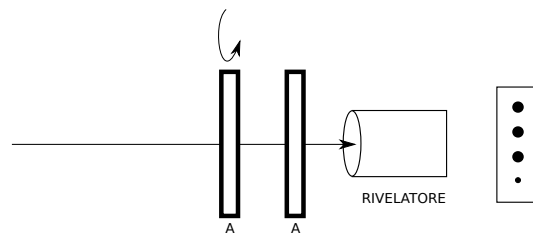
Eguagliando questa equazione con la (5.3) si ottiene:

$$\begin{aligned} S_0 &= a_0 \\ S_1 &= a_2 \\ S_2 &= b_2 \end{aligned} \quad (5.6)$$

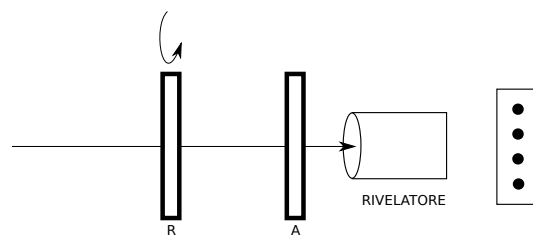
I coefficienti sono stati appositamente scritti come  $a$  e  $b$  in maniera tale da rappresentare il segnale modulato come una serie di Fourier dove la frequenza di modulazione e le sue armoniche sono l'angolo  $\theta$  e i suoi multipli.



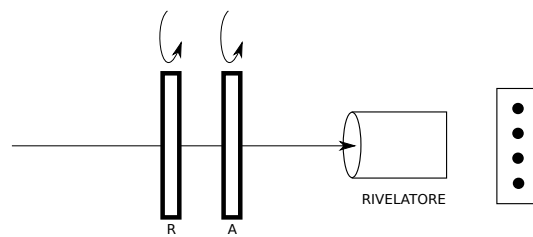
(a) Analizzatore rotante



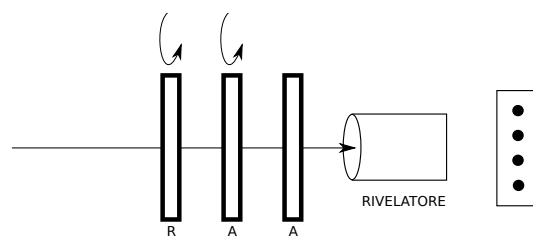
(b) Analizzatore rotante con analizzatore fisso



(c) Ritardatore rotante con analizzatore fisso



(d) Ritardatore rotante e analizzatore rotante



(e) Ritardatore rotante, analizzatore rotante e analizzatore fisso

Figura 5.2: Polarimetri a elementi rotanti



### 5.2.2 Polarimetro ad analizzatore rotante e analizzatore fisso

Come si può osservare dalla figura 5.2(b) questo polarimetro è simile al precedente solo che in questo caso davanti al rivelatore è presente un ulteriore polarizzatore che viene tenuto fisso. In questo modo si elimina la sensibilità del rivelatore rispetto ai cambiamenti di polarizzazione. L'intensità misurata è formata da un segnale modulato con due frequenze che espresso attraverso le serie di Fourier è pari a:

$$I = \frac{a_0}{4} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^2 (a_{2n} \cos 2n\theta + b_{2n} \sin 2n\theta) \quad (5.7)$$

I primi tre elementi del vettore di Stokes sono quindi:

$$\begin{aligned} S_0 &= a_0 - a_4 \\ S_1 &= \frac{2}{3}(a_2 - a_0 + 2a_4) \\ S_2 &= \frac{2}{5}(2b_2 + b_4) \end{aligned} \quad (5.8)$$

### 5.2.3 Polarimetro a ritardatore rotante e analizzatore fisso

Il polarimetro a ritardatore rotante e analizzatore fisso, illustrato nella figura 5.2(c), è il più semplice polarimetro di Stokes completo. Il rivelatore anche in questo caso misura una sola polarizzazione e il segnale modulato è composto ancora da due frequenze. Il segnale ricevuto espresso attraverso le serie di Fourier è dato da:

$$I = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^2 (a_{2n} \cos 2n\theta + b_{2n} \sin 2n\theta) \quad (5.9)$$

dove ora l'angolo  $\theta$  è l'angolo di rotazione della lamina ritardatrice. Se il ritardatore è a quarto d'onda (lamina  $\lambda/4$ ) il vettore di Stokes in funzione dei coefficienti di Fourier è pari a:

$$\begin{aligned} S_0 &= a_0 - a_4 \\ S_1 &= 2a_4 \\ S_2 &= 2b_4 \\ S_3 &= b_2 \end{aligned} \quad (5.10)$$

### 5.2.4 Polarizzatore a ritardatore e analizzatore rotanti

In questo polarimetro rappresentato nella figura 5.2(d) entrambi gli elementi polarizzanti ruotano. Il ritardatore è costituito da una lamina  $\lambda/4$  e ruota con un angolo che è di  $1/3$  rispetto all'angolo di rotazione del polarizzatore. Il segnale rivelato è quindi dato da:

$$I = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 (a_{2n} \cos 2n\theta + b_{2n} \sin 2n\theta) \quad (5.11)$$

dove  $\theta$  è l'angolo di rotazione della lamina. Il vettore di Stokes è uguale a:

$$\begin{aligned} S_0 &= a_0 \\ S_1 &= a_2 + a_6 \\ S_2 &= b_6 - b_2 \\ S_3 &= b_4 \end{aligned} \quad (5.12)$$

### 5.2.5 Polarizzatore a ritardatore e analizzatore rotanti e analizzatore fisso

Questo polarizzatore combina i due casi precedenti (come si può vedere nella figura 5.2(e)) e genera al più nove armoniche nel segnale misurato quando il polarizzatore è ruotato di  $5/3$ ,  $5/3$  o  $-3/2$  rispetto all'angolo del ritardatore. L'intensità misurata è:

$$I = \frac{a_0}{4} + \frac{1}{4} \sum_{n=1, n \neq 9}^{10} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (5.13)$$

Il vettore di Stokes espresso in funzione dei coefficienti di Fourier quando il fattore di rotazione è  $5/2$  e l'angolo di rotazione del polarizzatore è  $0^\circ$  è dato da:

$$\begin{aligned} S_0 &= a_0 - a_4 \\ S_1 &= 2a_1 \\ S_2 &= 2b_1 \\ S_3 &= b_3 \end{aligned} \quad (5.14)$$

## 5.3 Polarimetria a elementi oscillanti

I polarimetri a elementi oscillanti ruotano la polarizzazione della luce utilizzando alcuni dispositivi elettro-ottici o magneto-ottici come per esempio celle di Faraday o cristalli

liquidi. E' da notare che se il piano di polarizzazione viene ruotato di un angolo  $\theta$  da una cella di Faraday, questo corrisponde ad una rotazione meccanica di un angolo  $-\theta$  di tutti gli elementi successivi.

I vantaggi della polarimetria a elementi oscillanti sono l'assenza di parti mobili che disturbano l'allineamento del sistema e la possibilità di fare operazioni ad alta frequenza. Di contro però ci sono complicazioni dovute alla modulazione sinusoidale. Gli angoli di rotazione infatti sono sinusoidi e quindi le intensità rivelate contengono un numero infinito di armoniche la cui ampiezza dipende dalle funzioni di Bessel. I polarimetri a elementi oscillanti ricavano le componenti armoniche dalle seguenti relazioni di Bessel:

$$\begin{aligned}\sin(\theta \sin \omega t) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(\theta) \sin[(2n+1)\omega t] \\ \cos(\theta \sin \omega t) &= J_0(\theta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\theta) \cos(2n\omega t)\end{aligned}\tag{5.15}$$

La costruzione di questi polarimetri è molto complessa e richiede per ogni frequenza rivelata un amplificatore retroazionato.

## 5.4 Polarimetria a modulazione di fase

Nella figura 5.3 si possono osservare alcuni polarimetri a modulazione di fase. Questi polarimetri utilizzano dispositivi che variano il ritardo in base ad un segnale elettrico applicato. Un tipico modulatore di fase è il modulatore fotoelastico.

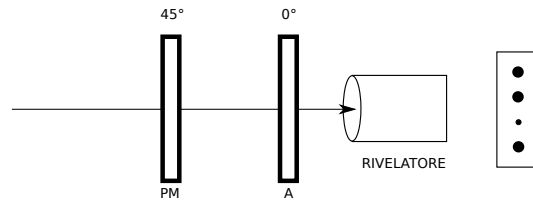
### 5.4.1 Polarimetro ad analizzatore fisso e modulatore di fase

Questo polarimetro, rappresentato nella figura 5.3(a), utilizza un unico modulatore in coppia con un analizzatore lineare fisso. Gli assi del modulatore e dell'analizzatore sono inclinati uno rispetto all'altro di  $45^\circ$ . Il segnale rivelato è dato da:

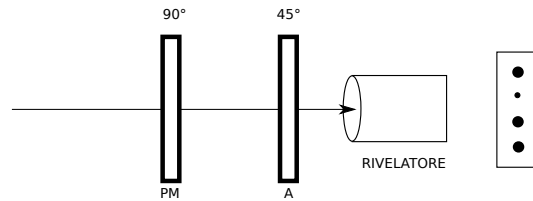
$$I = \frac{S_0}{2} + \frac{1}{2}(S_1 \cos 2\theta_A + S_2 \sin 2\theta_A) \cos \Delta + S_3 \sin \Delta\tag{5.16}$$

dove  $\theta_A$  è l'angolo di rotazione dell'analizzatore e  $\Delta$  è il ritardo indotto dal modulatore che è pari a:

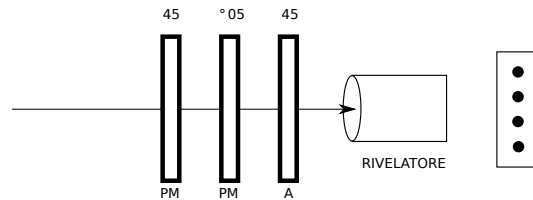
$$\Delta = \delta \sin \omega t\tag{5.17}$$



(a) Modulatore singolo con analizzatore fisso



(b) Modulatore singolo con analizzatore fisso



(c) Modulatore doppio con analizzatore fisso

Figura 5.3: Polarimetri a modulazione di fase

dove  $\omega$  è la frequenza di modulazione e  $\delta$  è il modulo dell'ampiezza di modulazione.

L'intensità misurata quindi diventa:

$$I = \frac{I_0}{2} + \frac{I_1}{2} \sin \omega t + \frac{I_2}{2} \cos 2\omega t \quad (5.18)$$

Se  $\delta = 137.8^\circ$  [ $J_0(\delta) = 0$  e  $\theta = 0^\circ$ ] il vettore di Stokes è dato da:

$$\begin{aligned} S_0 &= I_0 \\ S_1 &= \frac{I_2}{2J_2(\delta)} \\ S_3 &= \frac{I_1}{2J_1(\delta)} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Se entrambi gli elementi del polarimetro vengono ruotati di un angolo di  $45^\circ$  (vedi la figura 5.3(b)), il vettore di Stokes misurato diventa:

$$\begin{aligned} S_0 &= I_0 \\ S_2 &= \frac{I_2}{2J_2(\delta)} \\ S_3 &= \frac{I_1}{2J_1(\delta)} \end{aligned} \quad (5.20)$$

### 5.4.2 Polarimetro ad analizzatore fisso e doppio modulatore di fase

Il polarimetro ad analizzatore fisso e doppio modulatore di fase è rappresentato nella figura 5.3(c). Il primo modulatore (quello più vicino all'analizzatore) è inclinato di  $45^\circ$  rispetto all'analizzatore e ha un ritardo che varia nel tempo secondo la relazione:

$$\Delta_1 = \delta_1 \sin \omega_1 t \quad (5.21)$$

Il secondo modulatore è allineato con l'asse dell'analizzatore e ha un ritardo tempovariante che segue la relazione:

$$\Delta_2 = \delta_2 \sin \omega_2 t \quad (5.22)$$

Attraverso questo sistema si possono misurare tutti e quattro i parametri di Stokes. Il segnale misurato dal rivelatore è dato da:

$$I = \frac{S_0}{2} + \frac{S_1 \cos \Delta_2}{2} + \frac{S_2 \sin \Delta_2 \sin \Delta_1}{2} + \frac{S_3 \sin \Delta_2 \cos \Delta_1}{2} \quad (5.23)$$

e se si pone  $\delta_1 = \delta_2 = 137.8^\circ$  e si filtrano i termini ad alta frequenza si ottiene:

$$I = \frac{I_0}{2} + \frac{I_1 \cos 2\omega_2 t}{2} \pm \frac{I_2 \cos(\omega_2 \pm \omega_1)}{2} + \frac{I_3 \sin(\omega_2 \pm 2\omega_1)t}{2} \quad (5.24)$$

Il vettore di Stokes è dato da:

$$\begin{aligned} S_0 &= I_0 \\ S_1 &= \frac{I_1}{2J_2(\delta_2)} \\ S_2 &= \frac{I_2}{2J_1(\delta_1)J_1(\delta_2)} \\ S_3 &= \frac{-I_3}{2J_2(\delta_1)J_1(\delta_2)} \end{aligned} \quad (5.25)$$

## 5.5 Tecniche di misura simultanea degli elementi del vettore di Stokes

Tutte le tecniche polarimetriche che sono state espone fino ad ora dipendono da misure sequenziali nel tempo. Ovvero, nella polarimetria ad elementi rotanti si ha che i polarizzatori e i ritardatori vengono ruotati e le misure vengono fatte a diverse posizioni angolari

degli elementi; nella polarimetria ad elementi oscillanti si ha che i rotatori oscillano e le misure vengono fatte in vari momenti dell'oscillazione; nella polarimetria a modulazione di fase le misure vengono fatte per diversi valori di fase durante la modulazione. Può essere utile però compiere tutte le misure necessarie nello stesso momento in modo che il tempo non sia più un fattore determinante nei risultati. Per fare ciò si può dividere il fronte d'onda spazialmente e fare misure simultanee di quantità differenti in punti diversi nello spazio, oppure si possono separare le polarizzazioni dividendo l'ampiezza del fronte d'onda. I polarimetri di questa tipologia non hanno generalmente parti mobili.

### 5.5.1 Polarimetria a divisione di fronte d'onda

La divisione del fronte d'onda si basa sull'analisi di parti differenti del fronte d'onda attraverso elementi di polarizzazione separati. Questo tipo di sistema è stato realizzato per esempio sullo space shuttle con due telecamere allineate poste davanti a due polarizzatori lineari con assi ortogonali tra loro. Un'altro sistema è stato sviluppato da Chun attraverso una telecamera a infrarossi davanti alla quale è stato posto un polarizzatore a griglia metallica creato attraverso tecniche di microlitografia. Il disegno utilizzato per la griglia si può osservare nella figura 5.4. Il fronte d'onda incidendo quindi su elementi polarizzanti diversi viene diviso verso rivelatori differenti. Questi polarizzatori sono lineari e sono orientati lungo quattro direzioni diverse, inoltre lo schema di base è ripetuto sulla griglia lungo tutta la dimensione del sensore. Il polarimetro descritto non è in grado di misurare le polarizzazioni circolari quindi è di fatto incompleto.

Il vantaggio di questa tipologia di misure polarimetriche è la possibilità di misurare simultaneamente gli elementi del vettore di Stokes, di contro però si ha una minore precisione nella misura dovuta alla limitata risoluzione spaziale dei rivelatori.

### 5.5.2 Polarimetria a divisione di ampiezza

Nella polarimetria a divisione di ampiezza l'intensità dell'intero fronte d'onda del fascio incidente viene diviso e analizzato prima di arrivare sui rivelatori. Questo metodo può utilizzare al minimo due rivelatori per l'analisi con due polarizzazioni ortogonali o al più quattro o sei rivelatori per misurare l'intero vettore di Stokes. Ci sono diverse tipologie di

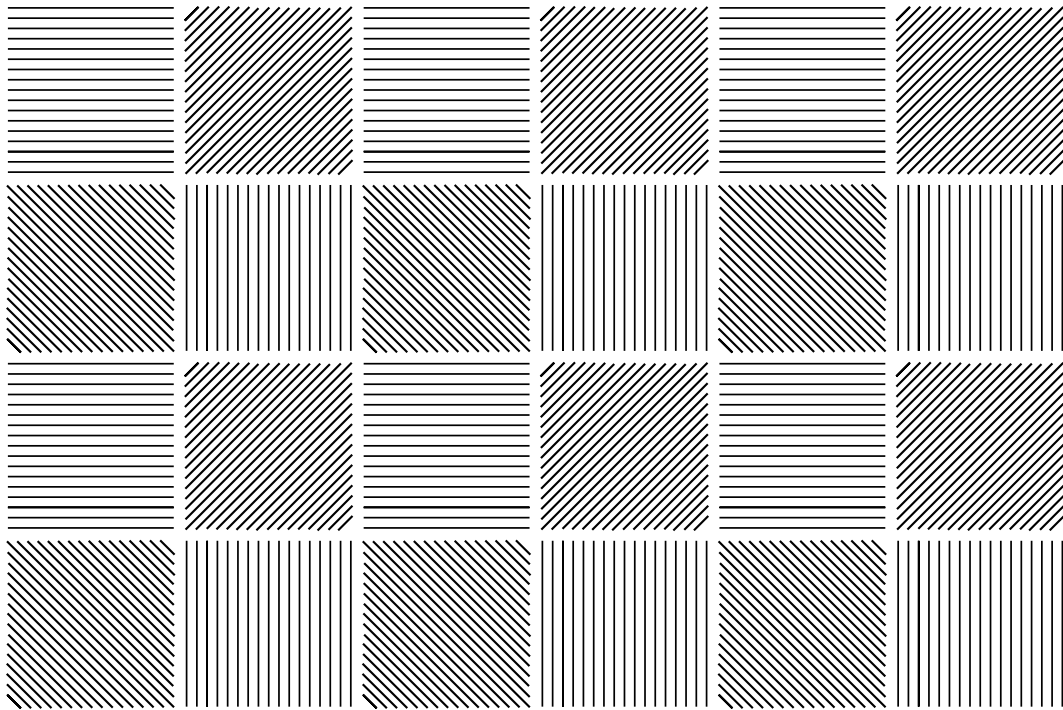


Figura 5.4: Maschera di micropolarizzatori di un polarimetro a divisione di fronte d'onda polarimetri a divisione di ampiezza, di seguito ne verranno presentate un paio che utilizzano quattro fotorivelatori.

### Polarimetro a quattro canali con l'utilizzo di beam splitter

Il diagramma del polarimetro a quattro canali si può osservare nella figura 5.5. Questo polarimetro utilizza due beam splitter non polarizzanti, un beam splitter polarizzante, una lamina a quarto d'onda e due polarizzatori (analizzatori). Il vettore di Stokes in ingresso viene determinato attraverso le misure dei quattro rivelatori e attraverso la matrice di Mueller del polarimetro calcolata durante la fase di calibrazione dello strumento. Ruotando di  $45^\circ$  l'analizzatore davanti al rivelatore (3), ruotando di  $45^\circ$  la lamina a quarto d'onda e ponendo orizzontalmente l'analizzatore davanti al rivelatore (4), si misurano nei quattro bracci del polarizzatore rispettivamente le intensità che corrispondono alle polarizzazioni orizzontale  $I_H$ , verticale  $I_V$ , a  $45^\circ$   $I_+$  e circolare destrorsa  $I_R$ . I segnali misurati dai quattro rivelatori sono legati al vettore di Stokes in ingresso attraverso la seguente relazione:

$$I = \mathbf{AKZS} \quad (5.26)$$

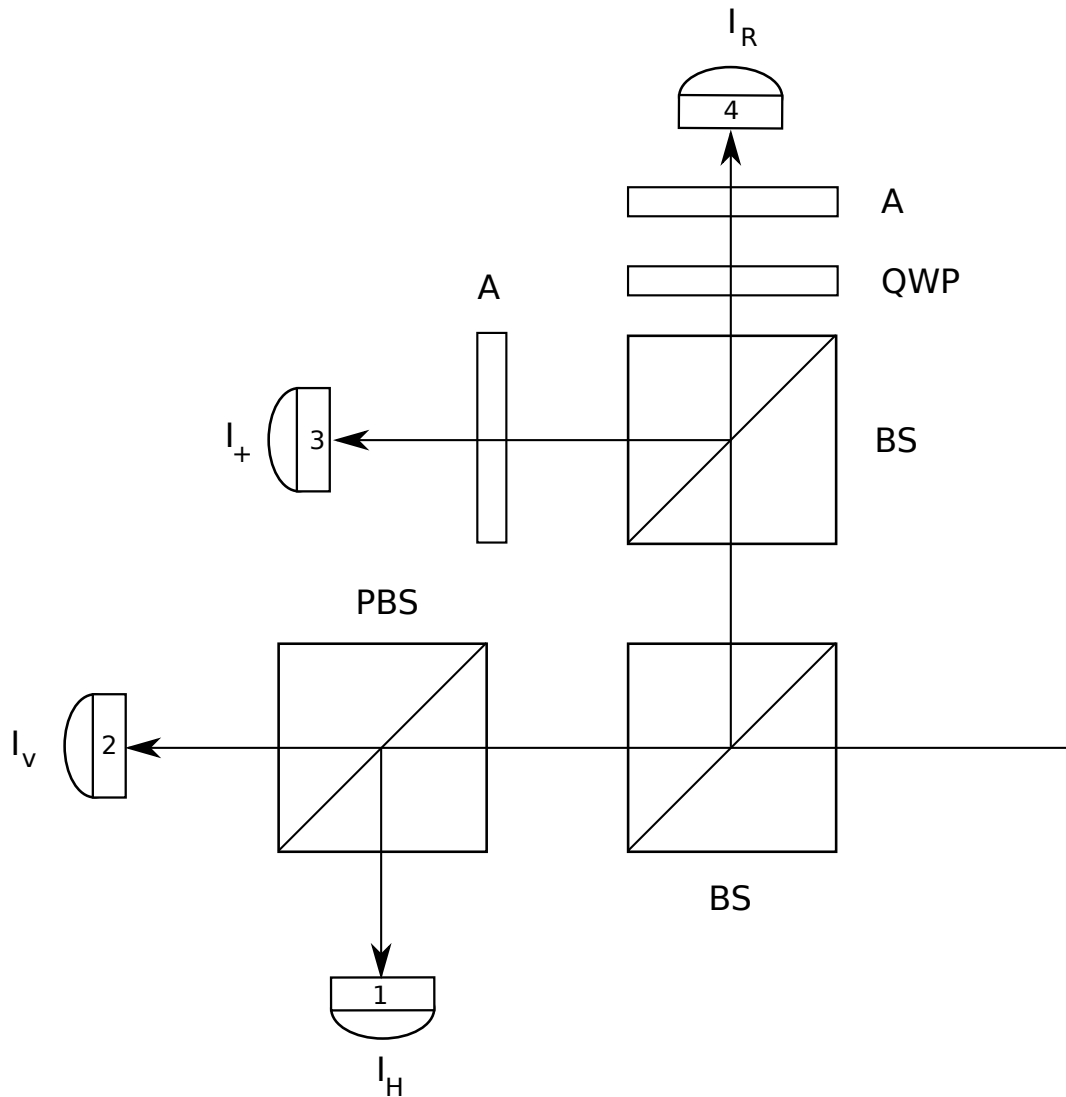


Figura 5.5: Polarimetro a quattro canali

dove  $\mathbf{Z}$  è la matrice di compensazione del polarizzatore (nel caso ideale è una matrice identità),  $\mathbf{K}$  è la matrice dei coefficienti di proporzionalità tra le intensità che è pari a:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Per ricavare la matrice  $\mathbf{A}$  è necessario scrivere le matrici di Mueller dei componenti polarizzanti che formano il polarimetro. Per il primo canale (polarizzazione orizzontale) si ha che il vettore di Stokes incidente attraversa il beam splitter polarizzante nella direzione



della polarizzazione orizzontale quindi è come se attraversasse un polarizzatore orizzontale, l'equazione del vettore di Stokes uscente è:

$$\begin{bmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{bmatrix} = \mathbf{H}S = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

dove  $S = [S_0 \ S_1 \ S_2 \ S_3]^T$  è il vettore di Stokes del fascio in ingresso e  $\mathbf{H}$  è la matrice di Mueller del polarizzatore orizzontale. Il secondo canale è simile al primo solo che la polarizzazione è verticale, l'equazione del vettore di Stokes uscente diventa:

$$\begin{bmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{bmatrix} = \mathbf{V}S = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

dove  $\mathbf{V}$  è in questo caso la matrice di Mueller del polarizzatore verticale. Nel terzo canale il fascio attraversa un polarizzatore lineare ruotato di  $45^\circ$ , il vettore di Stokes che esce è dato da:

$$\begin{bmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{bmatrix} = \mathbf{G}S = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

dove  $\mathbf{G}$  è la matrice di Mueller del polarizzatore lineare ruotato di  $45^\circ$ . Infine nel quarto canale il fascio attraversa una lamina a quarto d'onda ruotata di  $45^\circ$  e un polarizzatore lineare orizzontale, il vettore di Stokes emergente è pari a:

$$\begin{bmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{bmatrix} = \mathbf{QHS} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

dove  $\mathbf{Q}$  è la matrice di Mueller della lamina  $\lambda/4$  ruotata di  $45^\circ$  e  $\mathbf{H}$  è la matrice di Mueller del polarizzatore orizzontale. Prendendo il primo elemento dei quattro vettori di Stokes uscenti dai quattro canali del polarimetro si costruisce il vettore delle intensità misurate

dai rivelatori:

$$\begin{bmatrix} S_0^{(H)} \\ S_0^{(V)} \\ S_0^{(+)} \\ S_0^{(R)} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S_0 + S_1 \\ S_0 - S_1 \\ S_0 + S_2 \\ S_0 - S_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}S \quad (5.32)$$

Quindi la matrice  $\mathbf{A}$  è uguale a:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

Il vettore  $I$  è formato dalle intensità misurate per le polarizzazioni lineari verticale, orizzontale,  $+45^\circ$  e circolare destrorsa:

$$I = \begin{bmatrix} I_H \\ I_V \\ I_+ \\ I_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_0^{(H)} \\ S_0^{(V)} \\ S_0^{(+)} \\ S_0^{(R)} \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

Quindi per ricavare il vettore di Stokes in ingresso basta invertire l'equazione (5.26):

$$S = (\mathbf{AKZ})^{-1}I \quad (5.35)$$

In particolare se il polarimetro è ideale, cioè ha la matrice di compensazione  $\mathbf{Z}$  uguale alla matrice identità e la matrice  $\mathbf{K}$  è uguale a:

$$\mathbf{K} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

si ha che il vettore di Stokes misurato è dato da:

$$\begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(I_H + I_V) \\ 2(I_H - I_V) \\ 4(2I_+ - I_H - I_V) \\ 4(I_H + I_V - 2I_R) \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

### Polarimetro a quattro rivelatori di Azzam

Un altro tipo di polarimetro completo a divisione di ampiezza è il polarimetro a quattro rivelatori di Azzam.

In questo polarimetro, come si può vedere nella figura 5.6, la luce colpisce quattro rivelatori in sequenza. Parte della luce che colpisce i primi tre elementi viene riflessa specularmente ai rimanenti rivelatori mentre l'ultimo rivelatore sostanzialmente assorbe tutta la luce residua. Il segnale misurato da ogni rivelatore è proporzionale alla frazione di luce che assorbe e questa frazione è una combinazione lineare dei parametri di Stokes.

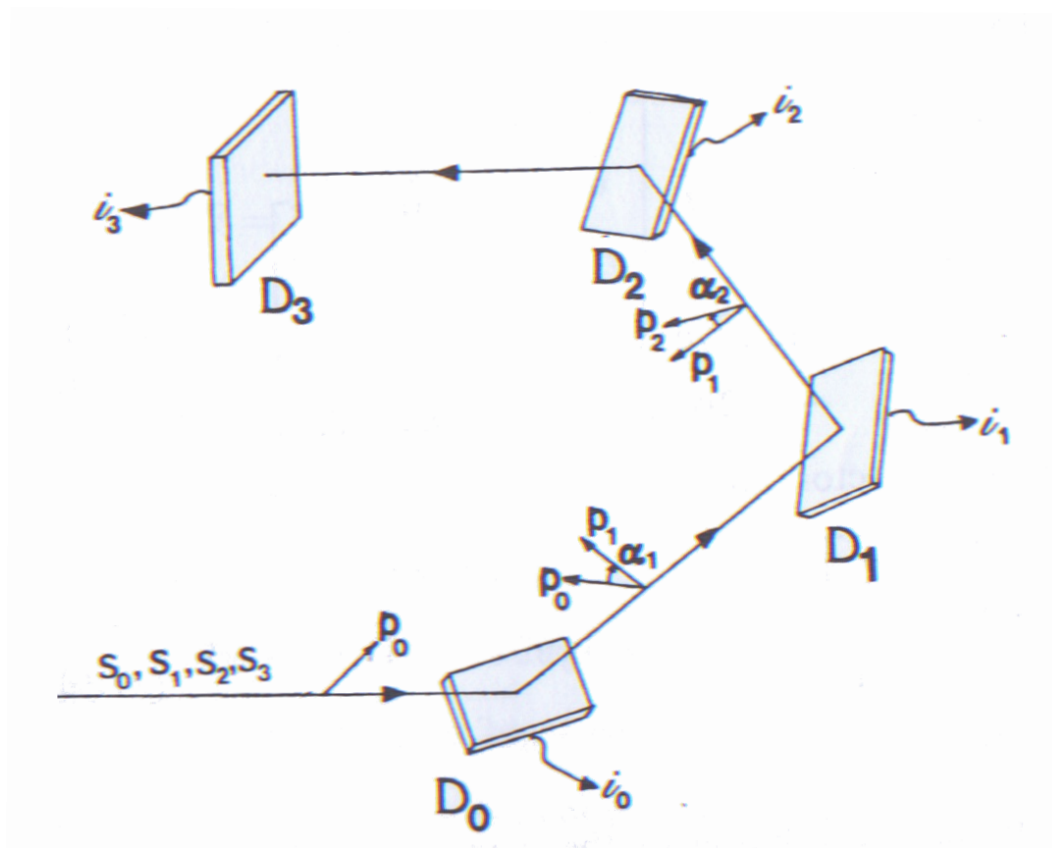


Figura 5.6: Polarimetro di Azzam

L'intensità luminosa misurata dai rivelatori è quindi linearmente correlata al vettore di

Stokes in ingresso attraverso la seguente relazione:

$$\begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}S \quad (5.38)$$

dove  $\mathbf{A}$  è la matrice di Mueller dello strumento. Il vettore di Stokes incidente si ottiene quindi dalla relazione:

$$S = \mathbf{A}^{-1}I \quad (5.39)$$

Per determinare in maniera univoca il vettore di Stokes la matrice di Mueller dello strumento deve essere non singolare. Nel seguito si ricaverà la matrice  $\mathbf{A}$  dello strumento.

I vettori di Stokes della luce riflessa dalle superfici dei fotorivelatori  $D_0$ ,  $D_1$  e  $D_2$  sono:

$$\begin{aligned} S^{(0)} &= \mathbf{M}_0 S \\ S^{(1)} &= \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{M}_0 S \\ S^{(2)} &= \mathbf{M}_2 \mathbf{R}_2 \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{M}_0 S \end{aligned} \quad (5.40)$$

dove si ha che  $S$  è il vettore di Stokes incidente,

$$\mathbf{M}_l = r_l \begin{bmatrix} 1 & -\cos 2\psi_l & 0 & 0 \\ -\cos 2\psi_l & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin 2\psi_l \cos \Delta_l & \sin 2\psi_l \sin \Delta_l \\ 0 & 0 & -\sin 2\psi_l \sin \Delta_l & \sin 2\psi_l \cos \Delta_l \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

è la matrice di Mueller dell'  $l$ -esimo rivelatore, infine

$$\mathbf{R}_l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\alpha_l & \sin 2\alpha_l & 0 \\ 0 & -\sin 2\alpha_l & \cos 2\alpha_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

è la matrice di rotazione che descrive la rotazione del piano di incidenza tra due riflessioni successive;  $r_l$  è la riflettanza dell'  $l$ -esimo rivelatore per la luce non polarizzata o polarizzata circolarmente mentre  $\tan \psi_l e^{i\Delta_l} = r_{pl}/r_{sl}$  è il rapporto tra i coefficienti di riflessione complessi della superficie per polarizzazioni parallele e perpendicolari al piano locale di incidenza.

Si definisce ora il vettore  $L$  formato dai primi elementi dei vettori di Stokes  $S$ ,  $S^{(0)}$ ,  $S^{(1)}$  e  $S^{(2)}$ , cioè gli elementi che sono proporzionali alle intensità. Questo può essere costruito moltiplicando ognuno di questi vettori di Stokes per il vettore riga:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

in questo modo si ha:

$$L = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_0^{(0)} \\ S_0^{(1)} \\ S_0^{(2)} \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

Il vettore  $L$  è linearmente correlato al vettore di Stokes in ingresso dalla relazione:

$$L = \mathbf{F}S \quad (5.45)$$

dove  $F$  descritta in funzione delle sue righe è pari a:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma \\ \Gamma \mathbf{M}_0 \\ \Gamma \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{M}_0 \\ \Gamma \mathbf{M}_2 \mathbf{R}_2 \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{M}_0 \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

Il segnale misurato da ogni rivelatore è proporzionale alla luce assorbita, questa è data dalla differenza tra il flusso incidente e il flusso uscente; perciò il segnale del primo rivelatore è pari alla differenza tra i primi due elementi del vettore  $L$  moltiplicata per una costante di proporzionalità che dipende dalla responsività del rivelatore; il segnale del secondo rivelatore è proporzionale alla differenza tra il secondo e il terzo elemento del vettore  $L$ ; il segnale del terzo rivelatore è proporzionale alla differenza tra il terzo e il quarto elemento del vettore  $L$ ; infine, siccome si presume che l'ultimo rivelatore assorba la luce rimanente, il segnale misurato da questo è proporzionale al flusso rimanente. Il segnale per ogni rivelatore si può esprimere come:

$$\begin{aligned} i_0 &= k_0(S_0 - S_0^{(0)}) \\ i_1 &= k_1(S_0^{(0)} - S_0^{(1)}) \\ i_2 &= k_2(S_0^{(1)} - S_0^{(2)}) \\ i_3 &= k_3 S_0^{(2)} \end{aligned} \quad (5.47)$$

In forma matriciale si può scrivere:

$$I = \mathbf{KDL} \quad (5.48)$$

dove  $\mathbf{K}$  è la matrice di responsività del rivelatore e  $\mathbf{D}$  è una matrice costruita in maniera tale da effettuare la differenza tra gli elementi del vettore  $L$ . Nella pratica si ha:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

e

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

Sostituendo la (5.45) all'interno della (5.48) si ottiene:

$$I = \mathbf{KDFS} \quad (5.51)$$

ed eguagliando questa con la (5.38) si ottiene la matrice di Mueller dello strumento:

$$\mathbf{A} = \mathbf{KDF} \quad (5.52)$$

Di questo polarimetro esistono diverse implementazioni tra cui una eseguita in fibra ottica e una che utilizza una configurazione di corner cube.

## Polarimetria della matrice di Mueller

### 6.1 Introduzione

La matrice reale quattro per quattro che descrive completamente le proprietà di polarizzazione di un materiale in riflessione o in trasmissione si può misurare attraverso la polarimetria della matrice di Mueller. Un polarimetro di Mueller si dice completo se vengono misurati tutti e 16 gli elementi della matrice, perché ciò avvenga il polarimetro deve essere formato da un analizzatore di stati di polarizzazione completo (PSA) e da un generatore di stati di polarizzazione completo (PSG). Nella figura 6.1 è rappresentato un diagramma concettuale di un polarimetro di Mueller. L'equazione che rappresenta un polarimetro di Mueller è:

$$\begin{bmatrix} I \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{bmatrix} = \mathbf{A} \mathbf{M} \mathbf{P} \mathbf{S} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

dove  $\mathbf{M}$  è la matrice di Mueller da misurare, il vettore  $S$  è il vettore di Stokes della luce in ingresso al sistema,  $\mathbf{P}$  è la matrice di Mueller del PSG,  $\mathbf{A}$  è la matrice di Mueller del PSA e  $I$  è il segnale misurato dal rivelatore. Si può notare che per effettuare la misura dell'intensità è necessaria solo la prima riga della matrice  $\mathbf{A}$  infatti viene rivelato solo il primo valore del vettore di Stokes uscente. Misurando almeno 16 valori di  $I$  con 16 configurazioni diverse del

PSG e del PSA si ottiene un sistema lineare di 16 equazioni linearmente indipendenti dal quale si ricavano i 16 elementi della matrice di Mueller. Molto spesso vengono effettuate più di 16 misure così da avere una buona stima della matrice di Mueller.

In questo capitolo verranno trattate alcune delle principali tipologie di polarimetri per misurare la matrice di Mueller, in particolare nella parte finale verrà presentato in maniera dettagliata il polarimetro progettato per misurare la matrice di Mueller di un canale tra la Terra e lo Spazio.

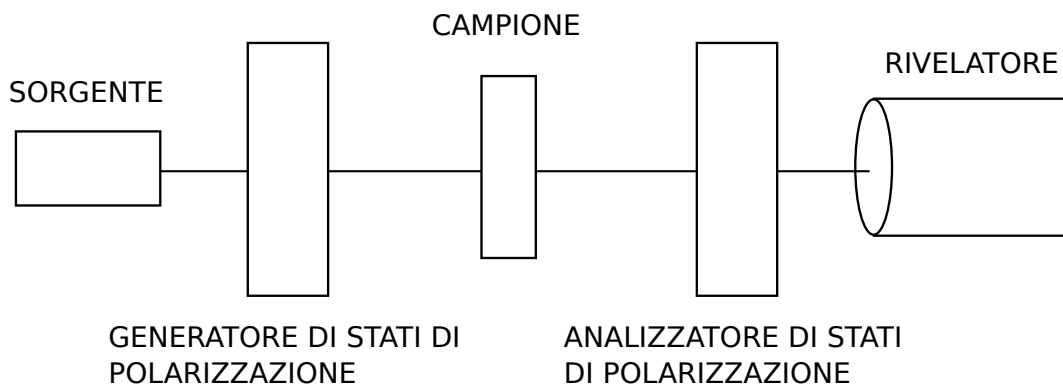


Figura 6.1: Diagramma concettuale di un polarimetro di Mueller

### 6.1.1 Polarimetri a elementi rotanti

La figura 6.2(a) mostra un polarimetro formato da un analizzatore rotante e da un polarizzatore rotante. Quando il polarizzatore è ruotato di un angolo  $\theta$  e l'analizzatore di un angolo  $3\theta$  simultaneamente, la serie di Fourier che rappresenta l'intensità normalizzata ha la forma ( $I_0$  è l'intensità della sorgente):

$$\frac{I}{I_0} = \frac{a_0}{4} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 (a_{2k} \cos 2k\theta + b_{2k} \sin 2k\theta) \quad (6.2)$$

Attraverso i nove coefficienti di Fourier è possibile ottenere i nove elementi della matrice di Mueller:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_0 & a_2 & b_2 & \cdot \\ a_6 & a_4 + a_8 & -b_4 + b_8 & \cdot \\ b_6 & b_4 + b_8 & a_4 - a_8 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

Nella figura 6.2(b) è rappresentato un polarimetro formato da un polarizzatore e un



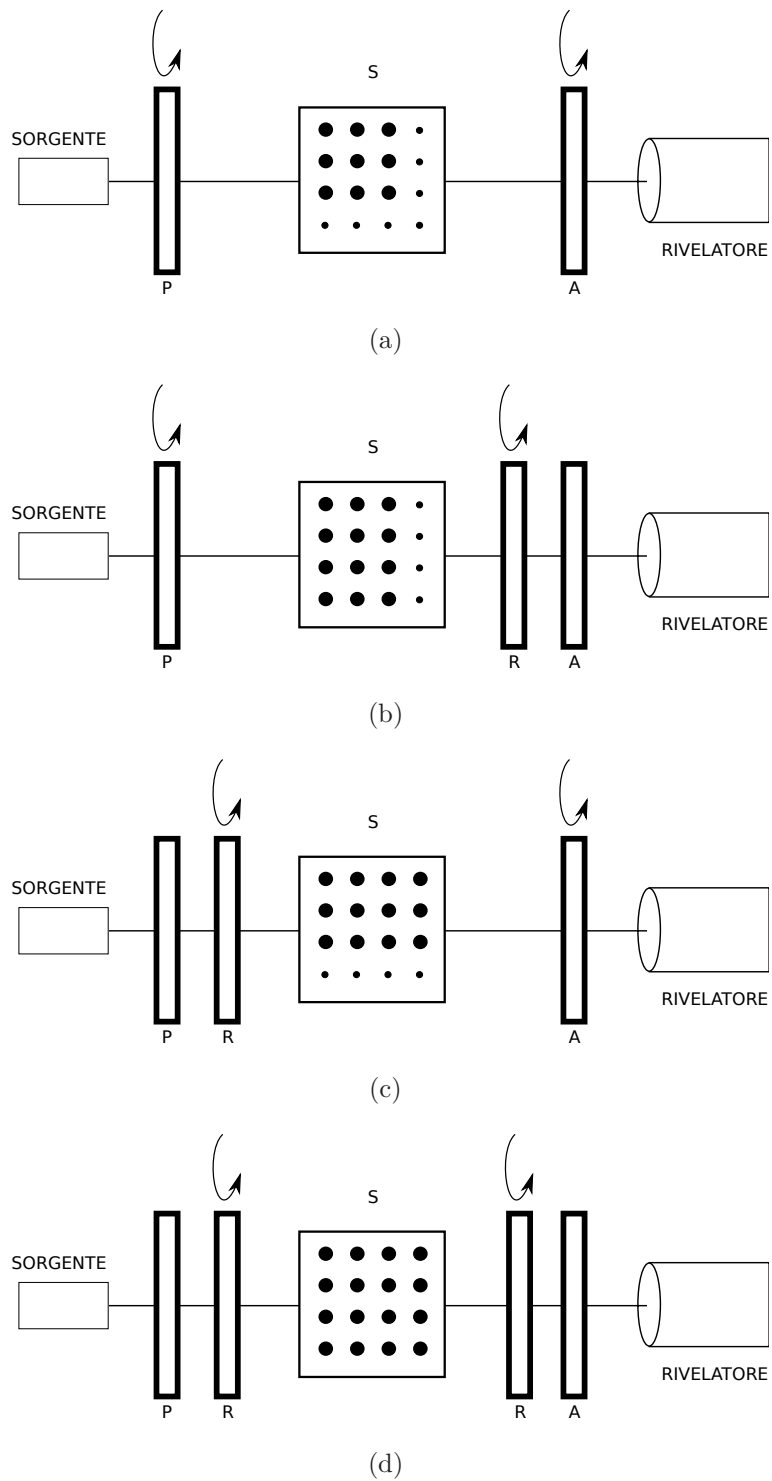


Figura 6.2: Polarimetri a elementi rotanti; **P** è un polarizzatore, **A** è un analizzatore, **R** è una lamina ritardatrice e **S** è il campione. Gli elementi misurati della matrice di Mueller sono indicati con i punti in grassetto

ritardatore rotanti e un analizzatore fisso. Se il polarizzatore e il ritardatore vengono ruotati simultaneamente di angoli che hanno rapporto 3:1, l'intensità normalizzata rivelata può essere sviluppata in serie di Fourier:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{a_0}{4} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^7 (a_{2k} \cos 2k\theta + b_{2k} \sin 2k\theta) \quad (6.4)$$

I 15 coefficienti di Fourier permettono di determinare i 12 elementi della matrice di Mueller delle prime tre colonne:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} (a_0 - a_6) & (a_1 - a_5 - a_7) & (b_1 - b_5 + b_7) & \cdot \\ 2a_6 & 2(a_5 + a_7) & 2(b_7 - b_5) & \cdot \\ 2b_6 & 2(b_5 + b_7) & 2(a_5 - a_7) & \cdot \\ -2b_3 & -2b_2 & -2a_2 & \cdot \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

Il polarimetro in figura 6.2(c) permette di ottenere le prime tre righe della matrice di Mueller attraverso calcoli simili a quelli del polarimetro precedente. L'ultimo polarimetro a elementi rotanti che è rappresentato nella figura 6.2(d) è il polarimetro a doppio ritardatore rotante che verrà discusso in dettaglio nel paragrafo 6.2.

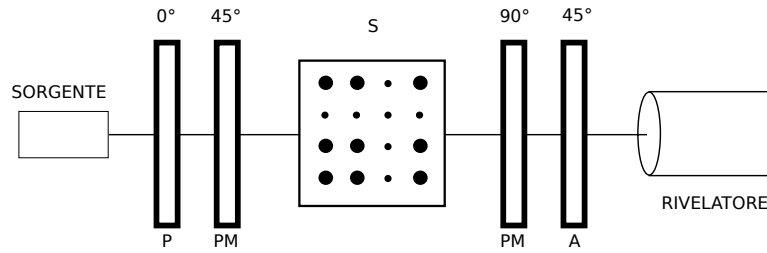
### 6.1.2 Polarimetri a modulazione di fase

Nella figura 6.3 sono presentate due configurazioni di polarimetri a modulazione di fase: uno ha un singolo modulatore in entrambi i lati del campione, l'altro ha due modulatori per ogni lato. Nel caso del singolo modulatore si può dimostrare che l'intensità rivelata, quando i modulatori sono inclinati di un angolo di  $45^\circ$  uno rispetto all'altro, è pari a:

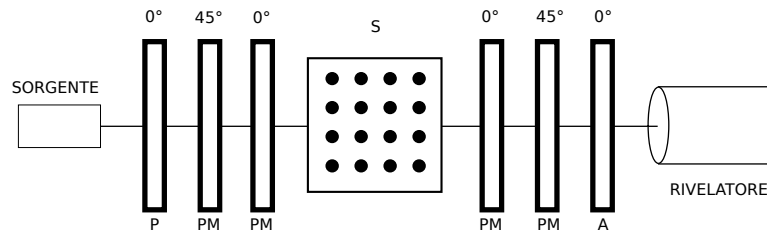
$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cos \Delta_2 & \sin \Delta_2 \end{bmatrix} \mathbf{M} \begin{bmatrix} 1 \\ \cos \Delta_1 \\ 0 \\ \sin \Delta_1 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

dove  $I_0$  è l'intensità della sorgente e:

$$\begin{aligned} \cos \Delta_i &= \cos(\delta_i \sin \omega_i t) \\ \sin \Delta_i &= \sin(\delta_i \sin \omega_i t) \end{aligned} \quad (6.7)$$



(a) Polarimetro a singolo modulatore di fase per lato del campione



(b) Polarimetro a doppio modulatore di fase per lato del campione

Figura 6.3: Polarimetri a modulazione di fase; **P** è un polarizzatore, **A** è un analizzatore, **PM** è un modulatore di fase e **S** è il campione. Gli elementi misurati della matrice di Mueller sono indicati con i punti in grassetto

nelle quali i pedici 1 e 2 identificano il primo e il secondo modulatore. Il segnale rivelato è uguale a:

$$\begin{aligned} \frac{I}{I_0} = \frac{1}{4} & (m_{00} + m_{01} \cos \Delta_1 + m_{20} \cos \Delta_2 + m_{21} \cos \Delta_1 \cos \Delta_2 \\ & + m_{23} \sin \Delta_1 \cos \Delta_2 + m_{30} \sin \Delta_2 + m_{31} \cos \Delta_1 \sin \Delta_2 \\ & + m_{33} \sin \Delta_1 \sin \Delta_2) \end{aligned} \quad (6.8)$$

Le frequenze  $\omega$  e le fasi  $\delta$  sono scelte così che i nove elementi della matrice siano misurati in maniera sequenziale o parallela da rivelatori sensibili alla fase.

## 6.2 Polarimetro a doppio ritardatore rotante

Il polarimetro a doppio ritardatore rotante è stato proposto originariamente da Azzam e successivamente migliorato da Hauge e Goldstein. Questo strumento è molto utilizzato nella spettro-polarimetria ma anche nel campo dell'oftalmologia per misurare la birifrangenza dell'occhio umano a lunghezze d'onda del visibile. Il polarimetro, come si può osservare

nella figura 6.4 è composto da cinque sezioni: la sorgente, l'ottica di polarizzazione, il campione, l'ottica di analisi e il rivelatore.

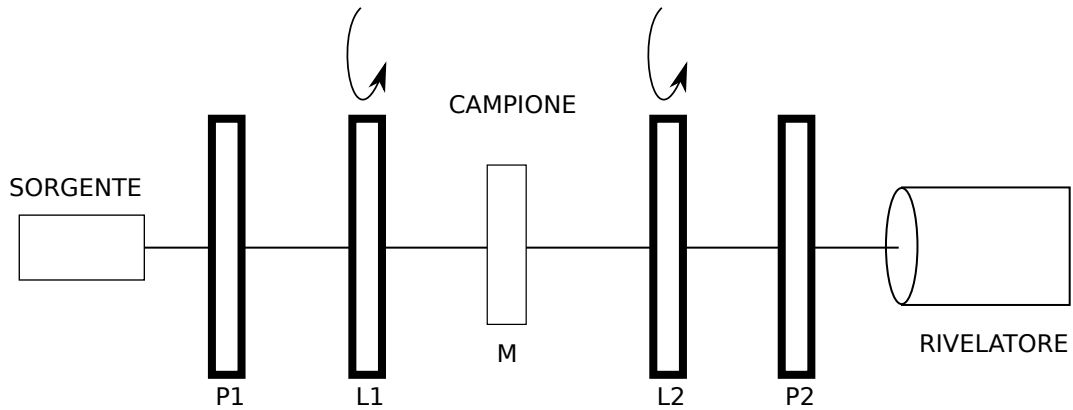


Figura 6.4: Polarimetro a doppio ritardatore rotante

### 6.2.1 Descrizione del polarimetro

L'ottica polarizzante è costituita da un polarizzatore lineare fisso e da una lamina a quarto d'onda rotante. Dopo la regione del campione è posta l'ottica di analisi che consiste in una lamina  $\lambda/4$  che ruota e da un polarizzatore lineare fisso. Uno dei principali vantaggi di questa configurazione è che la sensibilità alla polarizzazione del sensore non è rilevante in quanto l'orientazione del polarizzatore finale è fissa.

### 6.2.2 Analisi matematica del polarimetro

La matrice di Mueller del campione viene determinata attraverso le intensità misurate dal rivelatore che può essere un fotodiodo, una camera CCD o un altro tipo di sensore ottico. Se  $S^i$  è il vettore di Stokes del fascio incidente, il vettore di Stokes uscente  $S'$  è dato dalla relazione:

$$S' = \mathbf{P}_{L2} \mathbf{L}_{Q2}(\theta') \mathbf{M} \mathbf{L}_{Q1}(\theta) \mathbf{P}_{L1} S^i \quad (6.9)$$

dove  $\mathbf{P}_{L2}$ ,  $\mathbf{L}_{Q2}$ ,  $\mathbf{L}_{Q1}$  e  $\mathbf{P}_{L1}$  sono le matrici di Mueller dei diversi dispositivi ottici e  $\mathbf{M}$  è la matrice di Mueller del campione studiato. In particolare si ha che  $\mathbf{P}_{L1}$  è la matrice di

Mueller di un polarizzatore lineare orizzontale:

$$\mathbf{P}_{L2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

mentre  $\mathbf{P}_{L2}$  è la matrice di Mueller di un polarizzatore lineare verticale:

$$\mathbf{P}_{L2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Infine la matrice delle due lamine  $\lambda/4$  rotanti è data da:

$$\mathbf{L}_Q(\theta) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta & \sin 2\theta \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ 0 & \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin^2 2\theta & \cos 2\theta \\ 0 & \sin 2\theta & -\cos 2\theta & 0 \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

dove l'angolo  $\theta$  è l'orientazione dell'asse veloce della lamina a quarto d'onda rispetto al sistema di riferimento. Moltiplicando il vettore in ingresso  $S^i$  per la matrice del primo polarizzatore e normalizzando si ottiene:

$$\mathbf{P}_{L1} S^i = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

che rappresenta uno stato lineare orizzontale. Proseguendo la moltiplicazione con la lamina a quarto d'onda si ha:

$$\mathbf{L}_{Q1}(\theta) \mathbf{P}_{L1} S^i = \begin{bmatrix} 1 \\ C_\theta^2 \\ C_\theta S_\theta \\ S_\theta \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

dove:

$$\begin{aligned} C_\theta &= \cos 2\theta \\ S_\theta &= \sin 2\theta \end{aligned} \quad (6.15)$$

Il campione studiato è caratterizzato dalla matrice di Mueller  $\mathbf{M}$  quindi la moltiplicazione diventa:

$$\mathbf{M}\mathbf{L}_{Q1}(\theta)\mathbf{P}_{L1}S^i = \begin{bmatrix} m_{00} + m_{01}C_\theta^2 + m_{02}C_\theta S_\theta + m_{03}S_\theta \\ m_{10} + m_{11}C_\theta^2 + m_{12}C_\theta S_\theta + m_{13}S_\theta \\ m_{20} + m_{21}C_\theta^2 + m_{22}C_\theta S_\theta + m_{23}S_\theta \\ m_{30} + m_{31}C_\theta^2 + m_{32}C_\theta S_\theta + m_{33}S_\theta \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

Inoltre la matrice dell'analizzatore può essere scritta come:

$$\mathbf{P}_{L2}\mathbf{L}_{Q2}(\theta) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -C_{\theta'}^2 & -C_{\theta'}S_{\theta'} & S_\theta \\ -1 & C_{\theta'}^2 & C_{\theta'}S_{\theta'} & -S_\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

dove:

$$\begin{aligned} C_{\theta'} &= \cos 2\theta' \\ S_{\theta'} &= \sin 2\theta' \end{aligned} \quad (6.18)$$

Il rivelatore misura l'intensità trasmessa totale che è calcolata attraverso il prodotto tra la matrice (6.17) e il vettore (6.16) ed è pari a:

$$\begin{aligned} I(\theta, \theta') &= m_{00} + m_{01}C_\theta^2 + m_{02}C_\theta S_\theta + m_{03}S_\theta \\ &\quad m_{10} + m_{11}C_\theta^2 + m_{12}C_\theta S_\theta + m_{13}S_\theta(-C_{\theta'}) \\ &\quad m_{20} + m_{21}C_\theta^2 + m_{22}C_\theta S_\theta + m_{23}S_\theta(-C_{\theta'}S_{\theta'}) \\ &\quad m_{30} + m_{31}C_\theta^2 + m_{32}C_\theta S_\theta + m_{33}S_\theta(S_{\theta'}) \end{aligned} \quad (6.19)$$

Per poter calcolare i 16 elementi della matrice di Mueller è necessario avere al minimo 16 equazioni come la (6.19) e formare un sistema del tipo:

$$I = \mathbf{A}M_v \quad (6.20)$$

dove  $I$  è il vettore colonna con le intensità misurate,  $M_v$  è la vettorizzazione della matrice  $\mathbf{M}$  :  $M_v = \text{vec}(\mathbf{M})$  e  $\mathbf{A}$  è una matrice sedici per sedici le cui righe sono costituite da:

$$a_i = \begin{bmatrix} 1 \\ C_{\theta_i}^2 \\ C_{\theta_i} S_{\theta_i} \\ S_{\theta_i} \\ -C_{\theta'_i} \\ -C_{\theta'_i} C_{\theta_i}^2 \\ -C_{\theta'_i} C_{\theta_i} S_{\theta_i} \\ -C_{\theta'_i} S_{\theta_i} \\ -C_{\theta'_i} S_{\theta'_i} \\ -C_{\theta'_i} S_{\theta'_i} C_{\theta_i}^2 \\ -C_{\theta'_i} S_{\theta'_i} C_{\theta_i} S_{\theta_i} \\ -C_{\theta'_i} S_{\theta'_i} S_{\theta_i} \\ S_{\theta'_i} \\ S_{\theta'_i} C_{\theta_i}^2 \\ S_{\theta'_i} C_{\theta_i} S_{\theta_i} \\ S_{\theta'_i} S_{\theta_i} \end{bmatrix}^T \quad (6.21)$$

Ogni riga della matrice  $\mathbf{A}$  è costituita da una coppia di angoli  $(\theta_i, \theta'_i)$ , affinché le righe della matrice  $\mathbf{A}$  siano linearmente indipendenti è necessario scegliere 16 coppie di angoli diverse tra loro. Per ricavare la matrice di Mueller del campione basta invertire l'equazione (6.20):

$$M_v = \mathbf{A}^{-1} I \quad (6.22)$$

Nella pratica si è soliti effettuare più di 16 misure in maniera tale da ridurre il rumore sperimentale.

### 6.3 Polarimetro di Mueller a quattro canali

Un polarimetro di Mueller a quattro canali ha come analizzatore di stati di polarizzazione (PSA) un polarimetro di Stokes a quattro canali mentre il generatore di stati di polarizzazione (PSG) è formato da un polarizzatore e una lamina a quarto d'onda. In generale il

polarizzatore del PSG viene posto in una determinata posizione (tipicamente orizzontale o verticale) mentre la lamina ritardatrice viene fatta ruotare in modo da generare stati di polarizzazione diversi. Il segnale uscente dal polarimetro a quattro canali (un vettore di Stokes) è misurato in funzione dell'angolo di rotazione della lamina  $\lambda/4$ . In questo modo, effettuando almeno quattro misure è possibile determinare la matrice di Mueller del campione. Nella figura 6.5 è rappresentato lo schema di un polarimetro di Mueller a quattro canali. Il polarimetro che verrà in seguito analizzato utilizza come PSA il polarimetro di Stokes a quattro canali con beam splitter descritto al paragrafo 5.5.2 del capitolo precedente.

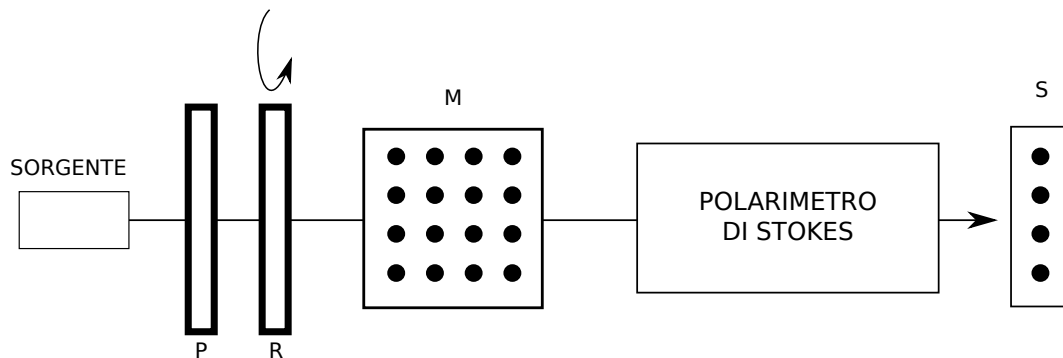


Figura 6.5: Schema del polarimetro di Mueller a quattro canali

### 6.3.1 Analisi matematica del polarimetro

In questo strumento la matrice di Mueller del campione viene determinata attraverso la misura dei vettori di Stokes da parte del polarimetro di Stokes posto dopo il campione. Se  $S'$  è il vettore di Stokes in ingresso, il vettore  $S$  misurato dal polarimetro di Stokes è uguale a:

$$S = \mathbf{M}\mathbf{R}(\theta)\mathbf{P}S' \quad (6.23)$$

dove  $\mathbf{M}$  è la matrice di Mueller del campione,  $\mathbf{R}(\theta)$  è la matrice di Mueller della lamina  $\lambda/4$  e  $\mathbf{P}$  è la matrice di Mueller del polarizzatore lineare orizzontale. Svolgendo il prodotto tra il vettore di Stokes, la matrice del polarizzatore e della lamina ritardatrice e normalizzando



si ottiene:

$$J = \mathbf{R}(\theta)\mathbf{P}S' = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos^2(2\theta) \\ \cos(2\theta)\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

Sostituendo la (6.24) nella (6.23) si ha:

$$S = \mathbf{M}J \quad (6.25)$$

Se vengono generati  $n$  differenti stati di polarizzazione dal PSG l'equazione (6.25) può essere riscritta in forma matriciale come:

$$\mathbf{S} = \mathbf{M}\mathbf{A} \quad (6.26)$$

dove  $\mathbf{S}$  è la matrice dei vettori di Stokes uscenti:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S^{(0)} & S^{(1)} & \dots & S^{(n)} \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

e  $\mathbf{A}$  è la matrice dei vettori di Stokes degli stati in ingresso:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} J^{(0)} & J^{(1)} & \dots & J^{(n)} \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

Invertendo l'equazione (6.26) è possibile ricavare la matrice di Mueller  $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{M} = \mathbf{S}\mathbf{A}^+ \quad (6.29)$$

dove  $\mathbf{A}^+$  è la matrice pseudo-inversa di  $\mathbf{A}$ . Questo tipo di polarimetro di Mueller permette di misurare la matrice di Mueller in maniera molto rapida. Infatti il PSA è in grado di misurare interamente il vettore di Stokes di qualsiasi fascio incidente quindi è possibile ricavare la matrice di Mueller sondando il campione con solo quattro stati di polarizzazione generati dal PSG. In generale vengono generati più di quattro stati di polarizzazione e per ogni stato viene effettuata più di una misura in modo da attenuare sensibilmente il rumore. La caratteristica di velocità di misura di questo polarimetro ne permette l'utilizzo nei sistemi che richiedono di calcolare la matrice di Mueller in maniera rapida.

Nel capitolo 7 verrà fatta l'analisi dell'andamento del rumore di misura in funzione degli stati di polarizzazione generati dal polarimetro di Mueller a quattro canali appena considerato. Nel capitolo 9 invece verrà presentato il progetto, la realizzazione e la calibrazione di un polarimetro di Mueller a quattro canali.



## CAPITOLO 7

---

### Scelta degli stati di polarizzazione per la misura della matrice di Mueller

---

In questo capitolo verranno trattati alcuni metodi per ottimizzare la misura della matrice di Mueller. In particolare verrà dimostrato come la scelta degli stati di polarizzazione generati dal polarimetro possa influenzare il rumore nella misura della matrice di Mueller. Il polarimetro preso in considerazione per questa analisi è il polarimetro di Mueller a quattro canali che è stato discusso nel paragrafo 6.3. Si cercherà anche di ottimizzare il polarimetro dal punto di vista della scelta dei componenti polarizzanti. Infine si presenterà la valutazione dell'andamento del rumore in funzione del numero di misure effettuate dal polarimetro e del numero di canali del polarimetro stesso.

#### 7.1 Metodo della massimizzazione del determinante della matrice di inversione

Come già visto in precedenza l'equazione che descrive la relazione tra i vettori di Stokes degli stati di polarizzazione in ingresso e i vettori di Stokes misurati è uguale a:

$$\mathbf{S} = \mathbf{M}\mathbf{A} \quad (7.1)$$

dove  $\mathbf{S}$  è la matrice dei vettori di Stokes misurati,  $\mathbf{A}$  è la matrice dei vettori di Stokes generati e  $\mathbf{M}$  è la matrice di Mueller del campione da misurare. Se consideriamo anche il

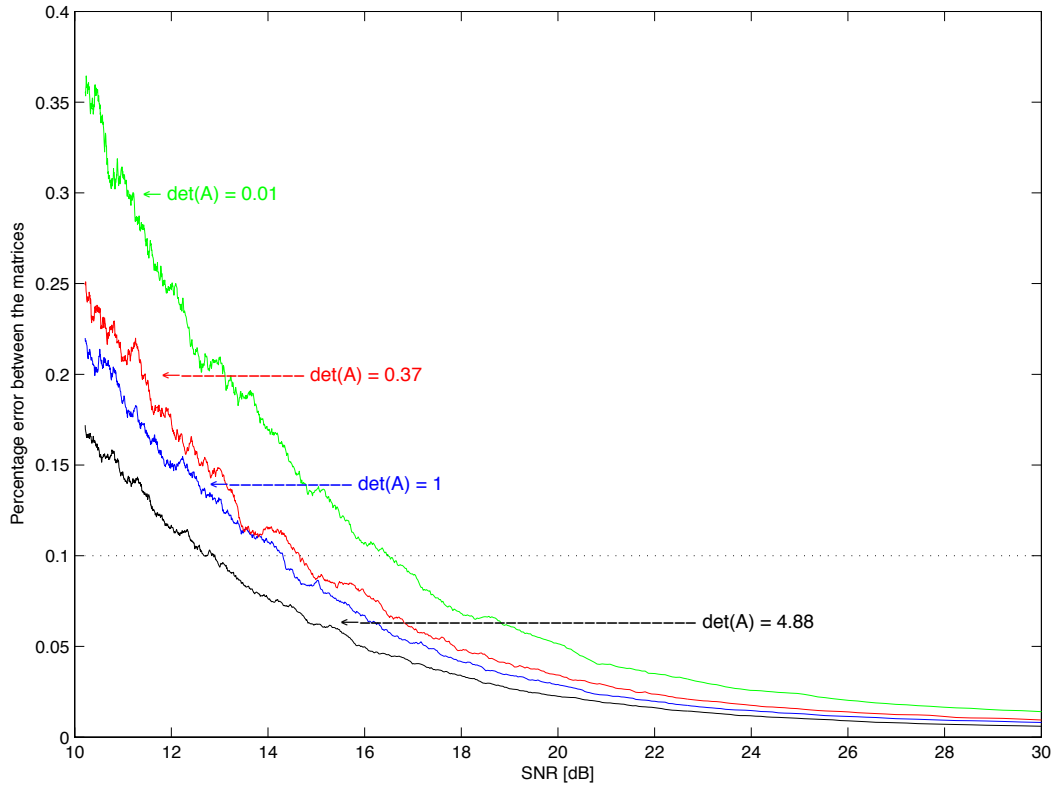


Figura 7.1: Andamento dell'errore percentuale matriciale in funzione dell'SNR

rumore di misura l'equazione (7.1) diventa:

$$\mathbf{S} = \mathbf{M}\mathbf{A} + \mathbf{N} \quad (7.2)$$

dove  $\mathbf{N}$  è la matrice del rumore additivo misurato (generalmente gaussiano bianco). Invertendo la (7.2) si ottiene:

$$\mathbf{M} = (\mathbf{S} - \mathbf{N})\mathbf{A}^+ \quad (7.3)$$

E' evidente quindi che per minimizzare l'errore nella misura è necessario minimizzare il prodotto:  $\mathbf{N}\mathbf{A}^+$ . Nel caso più semplice in cui si generano solo quattro stati di polarizzazione e quindi la matrice  $\mathbf{A}$  è una matrice quattro per quattro si può minimizzare l'errore massimizzando il determinante della matrice  $\mathbf{A}$ . Questo si può osservare anche nella figura 7.1 che rappresenta l'errore percentuale tra la matrice di Mueller ideale e la matrice di Mueller *rumorosa* in funzione del rapporto segnale rumore (SNR). Il grafico è stato ottenuto attraverso una matrice di Mueller dalla quale si è ricavata la matrice dei vettori

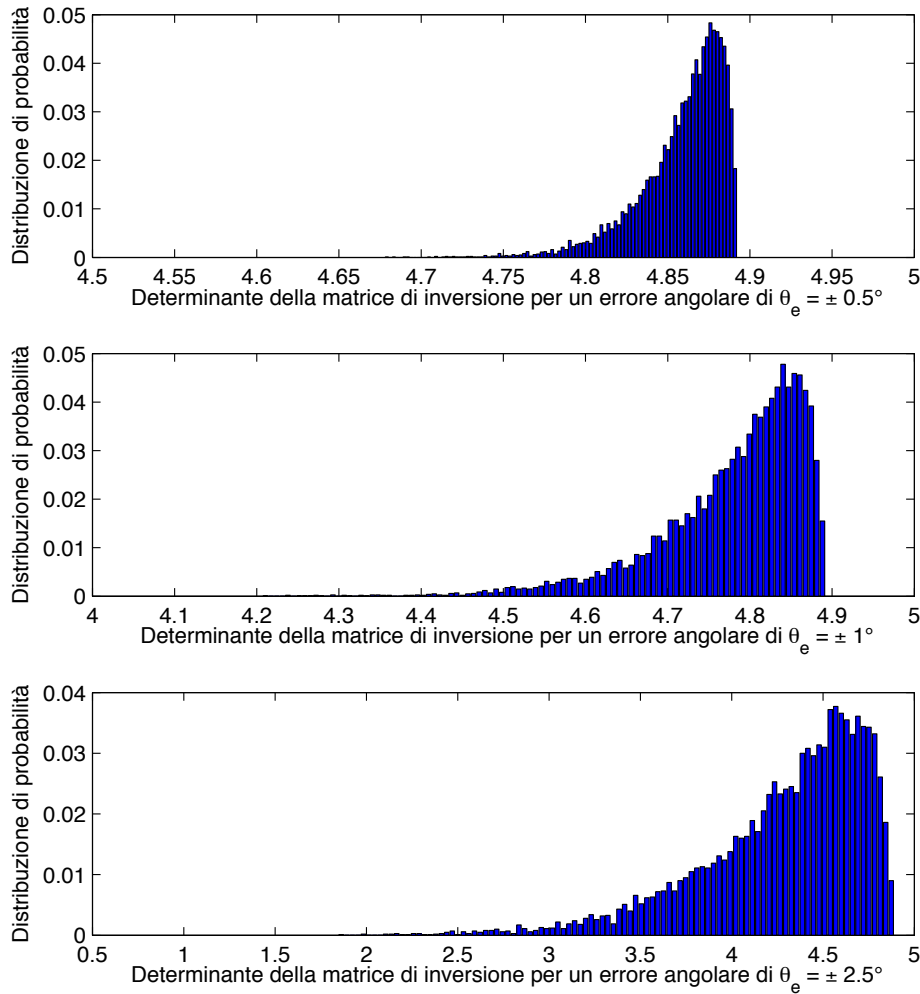


Figura 7.2: Andamento del determinante della matrice di inversione in funzione dell'errore angolare di misura

di Stokes  $\mathbf{S}$  attraverso la relazione (7.1), successivamente è stata aggiunta la matrice di rumore  $\mathbf{N}$  come nell'equazione (7.2) e da questa si è ricalcolata la matrice di Mueller attraverso l'equazione (7.3). L'errore percentuale tra le matrici è stato calcolato attraverso la seguente equazione:

$$e = \frac{\|\mathbf{M} - \mathbf{M}'\|_F}{\|\mathbf{M} + \mathbf{M}'\|_F} \quad (7.4)$$

dove  $\|\cdot\|_F$  è la norma di Frobenius,  $\mathbf{M}$  è la matrice di Mueller originaria e  $\mathbf{M}'$  è la matrice di Mueller con rumore aggiunto. Nel grafico sono presentate quattro curve per quattro

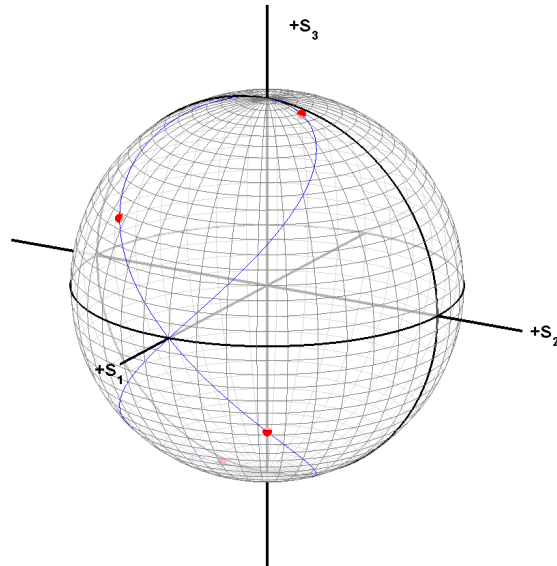
valori diversi del determinante della matrice  $\mathbf{A}$ : come si può osservare l'errore è minore quando il determinante è maggiore. La matrice di inversione  $\mathbf{A}$  che ha determinante uguale a 4.88 si ottiene con una base di quattro stati di polarizzazione che è generata ruotando la lamina  $\lambda/4$  del PSG rispettivamente di  $\theta = 38^\circ, 75^\circ, 105^\circ, 142^\circ$ . Questa base di stati è stata calcolata attraverso un metodo di ricerca del massimo della funzione:

$$\max_{\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3} [\det(\mathbf{A}(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3))] \quad (7.5)$$

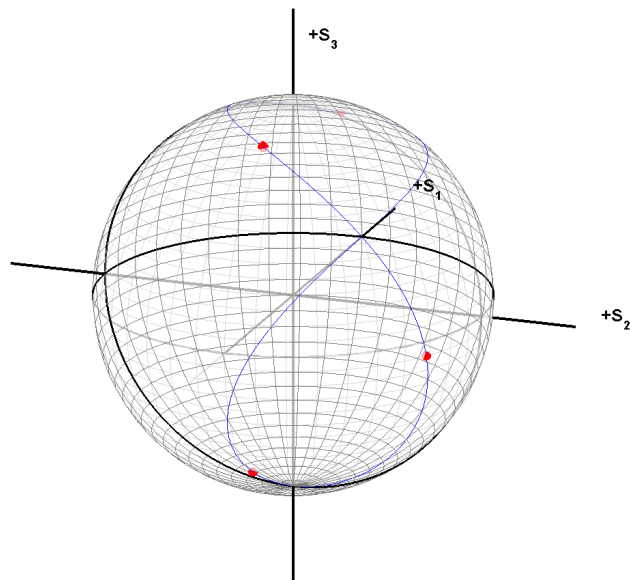
dove gli angoli  $\theta_i$  con  $i = 0, 1, 2, 3$  sono gli angoli di rotazione della lamina  $\lambda/4$ . Se si fissa come soglia massima un errore del 10 per cento si può affermare che il minimo rapporto segnale rumore per avere dei dati accettabili è di 13 dB.

Nella misura della matrice di Mueller si possono compiere errori anche sugli angoli di rotazione della lamina  $\lambda/4$ . Nella figura 7.2 è rappresentata la variazione del determinante della matrice di inversione per un errore angolare di  $\Delta\theta = \pm 0.5^\circ, \pm 1^\circ, \pm 2.5^\circ$ . I grafici sono stati ottenuti partendo da una matrice di inversione con determinante pari a 4.88. Come si può osservare, anche nel caso peggiore il determinante rimane sempre maggiore di 1.

Sulla sfera di Poincaré in figura 7.3 sono rappresentati i quattro stati di polarizzazione che generano la matrice con determinante pari a 4.88. Sulla sfera è disegnato anche l'andamento degli stati di polarizzazione al variare dell'angolo di rotazione della lamina a quarto d'onda. Si può osservare che gli stati scelti tendono a coprire una superficie con il massimo angolo solido possibile, questo perché la matrice di Mueller misurata corrisponde al sistema esaminato quanto più gli stati in ingresso coprono l'insieme degli stati di polarizzazione possibili.



(a) Sfera di Poincaré vista dall'alto



(b) Sfera di Poincaré vista dal basso

Figura 7.3: Stati di polarizzazione generati rappresentati sulla sfera di Poincaré

## 7.2 Metodo della minimizzazione della varianza equivalente ponderata

Considerando anche in questo caso l'equazione (7.2) e vettorizzando le sue matrici, si ottiene la relazione equivalente:

$$\text{vec}(\mathbf{S}) = (\mathbf{A}^T \otimes \mathbf{I})\text{vec}(\mathbf{M}) + \text{vec}(\mathbf{N}) \quad (7.6)$$

Per ottenere la matrice di Mueller  $\mathbf{M}$  è sufficiente invertire la (7.6):

$$\text{vec}(\mathbf{M}) = (\mathbf{A}^T \otimes \mathbf{I})^+ \text{vec}(\mathbf{S}) - (\mathbf{A}^T \otimes \mathbf{I})^+ \text{vec}(\mathbf{N}) \quad (7.7)$$

Come si può osservare nell'equazione (7.7) per minimizzare l'incidenza del rumore è necessario minimizzare la quantità  $(\mathbf{A}^T \otimes \mathbf{I})^+$ , questo si ottiene minimizzando la varianza equivalente ponderata, cioè:

$$\min_{\mathbf{A}} [\text{Tr}((\mathbf{A}^T \otimes \mathbf{I})^+ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{I})^+)] = \min_{\mathbf{A}} [\text{Tr}((\mathbf{A}^+)^T \mathbf{A}^+)] \quad (7.8)$$

Attraverso questo metodo si ottengono risultati simili al metodo illustrato precedentemente, il vantaggio di quest'ultimo è il fatto di poter essere applicato anche su sistemi con più di quattro stati di polarizzazione generati.

## 7.3 Ottimizzazione dei componenti del polarimetro

Fino a questo momento si è fatto riferimento all'utilizzo di lamine ritardatrici a quarto d'onda in quanto è relativamente semplice costruire un PSG impiegando questo tipo di ritardatori. Se nel processo di ottimizzazione delle misure oltre all'angolo di rotazione della lamina ritardatrice si considera anche lo sfasamento del ritardatore, si può ricavare il valore di ritardo ottimo per la lamina. Utilizzando i metodi di ottimizzazione precedenti si trova che il ritardo ottimo è pari a  $0.3661\lambda$  ( $\approx 132^\circ$ ) e gli angoli ottimi di rotazione del ritardatore sono  $\theta = 16^\circ, 52^\circ, 128^\circ, 164^\circ$  oppure come in precedenza per la lamina  $\lambda/4$ ,  $\theta = 38^\circ, 75^\circ, 105^\circ, 142^\circ$ . Nella figura 7.4 è rappresentato sulla sfera di Poincaré l'andamento degli stati di polarizzazione che si ottiene ruotando la lamina  $0.3661\lambda$ , come si può osservare la curva copre maggiormente lo spazio degli stati di polarizzazione rispetto al caso della lamina  $\lambda/4$  visto in precedenza.



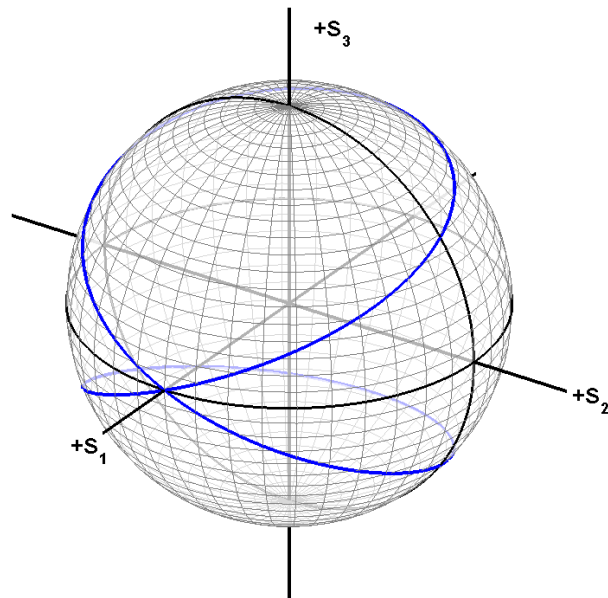


Figura 7.4: Andamento degli stati di polarizzazione per una lamina  $0.3661\lambda$

## 7.4 Valutazione del rumore in funzione del numero di stati di polarizzazione

Nelle analisi del rumore fatte in precedenza si sono sempre utilizzati non più di quattro stati di polarizzazione in ingresso. Aumentando il numero di stati di polarizzazione generati dal PSG si può migliorare la misura della matrice di Mueller, come si può vedere nella figura 7.5. Interpolando i valori di errore e passando alla scala lineare nell'asse delle ascisse si può osservare in figura 7.6 che la pendenza della retta dell'errore diminuisce all'aumentare del numero di stati. Questa decrescita però non è lineare, infatti come si osserva nella figura 7.7 il coefficiente angolare della retta tende ad assestarsi all'aumentare del numero di stati. Si può quindi affermare che non è molto conveniente aumentare il numero di stati generati al di sopra di 20.

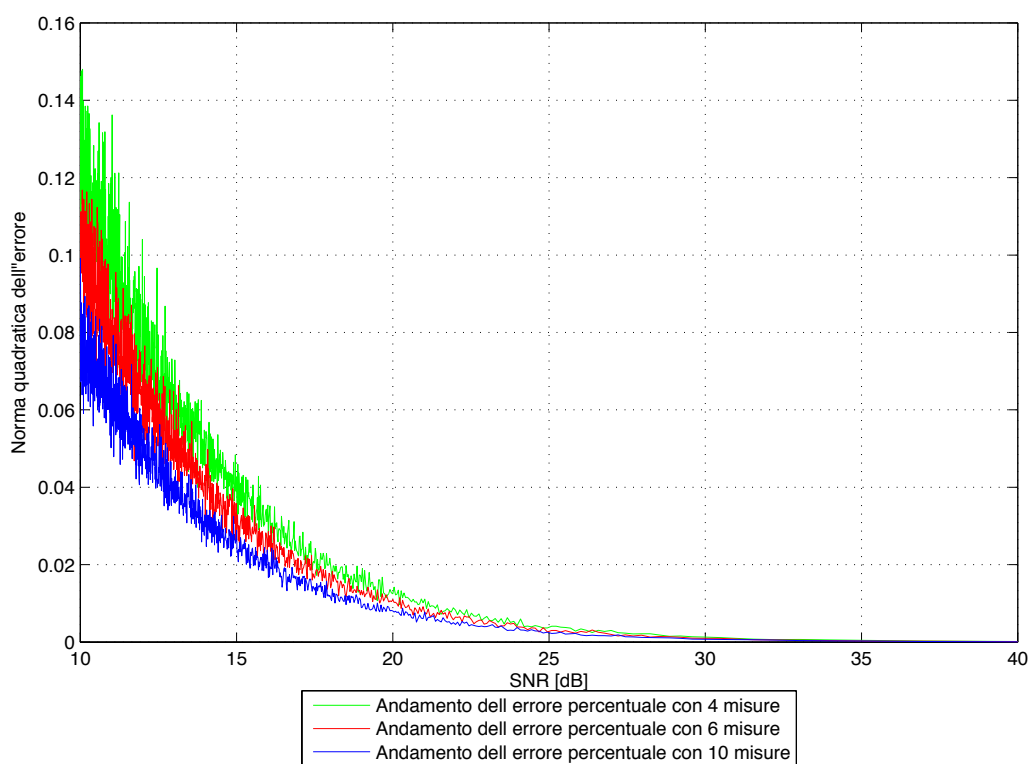


Figura 7.5: Andamento della percentuale d'errore matriciale in funzione del numero di stati di polarizzazione

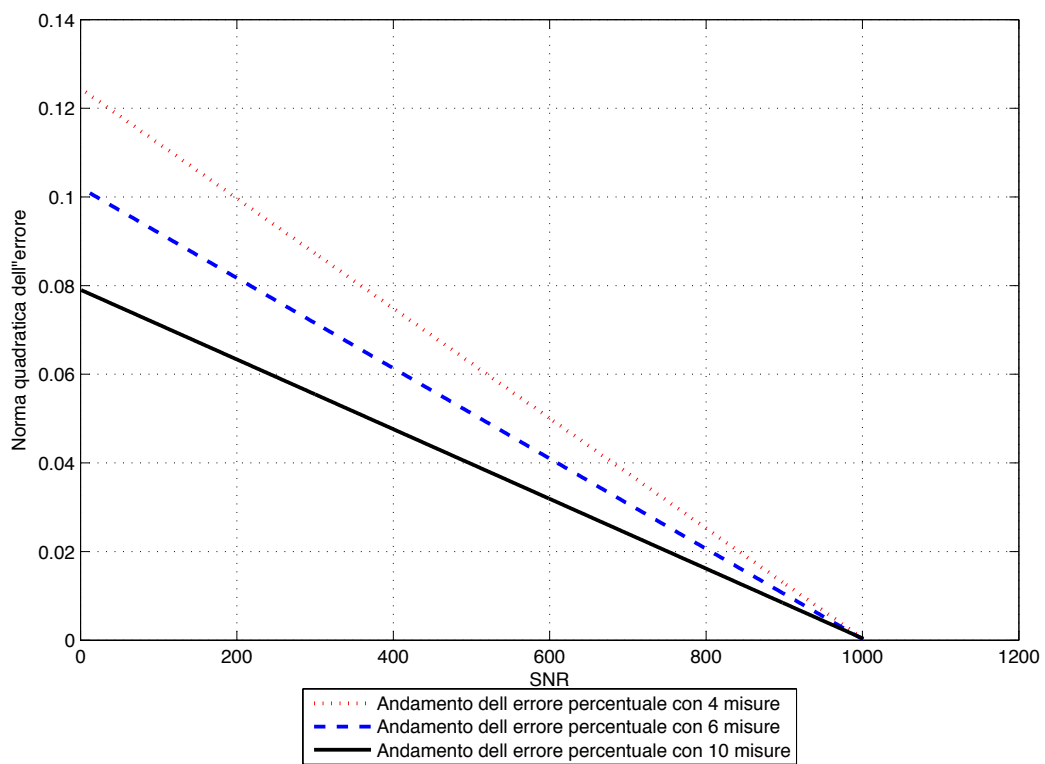


Figura 7.6: Andamento in scala lineare della percentuale d'errore matriciale in funzione del numero di stati di polarizzazione

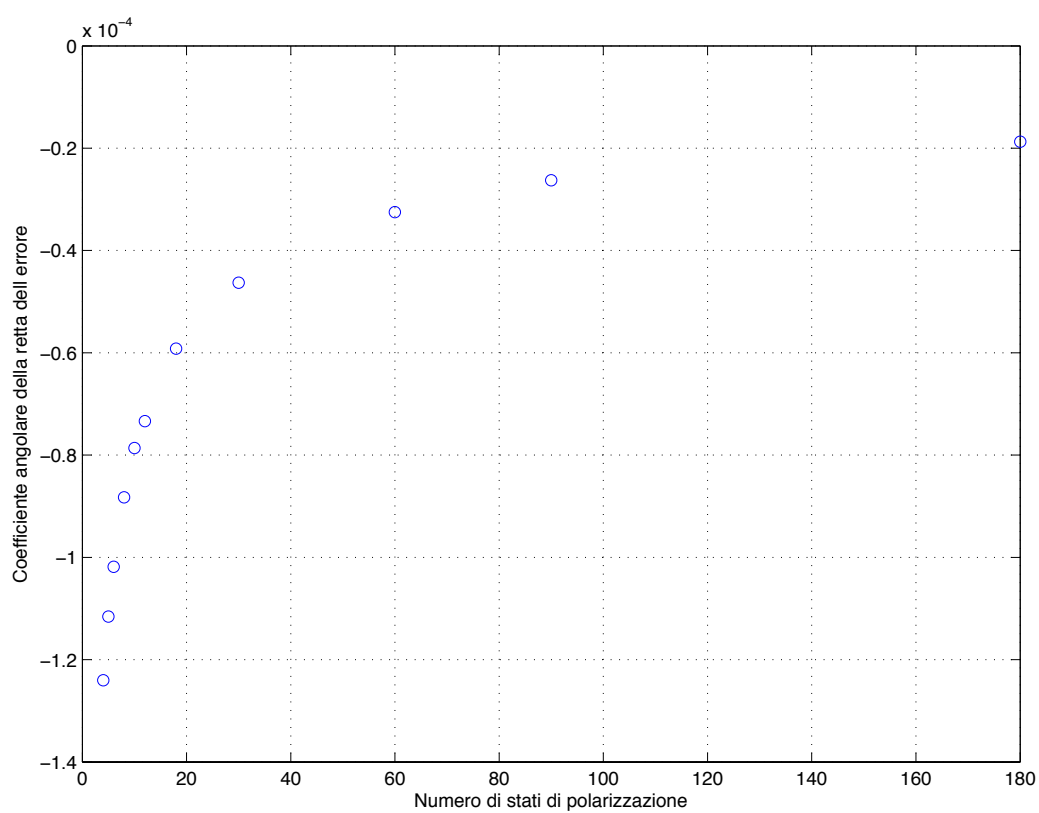


Figura 7.7: Pendenza della retta dell'errore in funzione del numero di stati di polarizzazione

## 7.5 Valutazione del rumore in funzione del numero di canali del polarimetro

Il polarimetro di Mueller che si è considerato fino ad ora è formato da un PSA a 4 canali. Utilizzando come PSA un polarimetro di Stokes a 6 canali è possibile migliorare la misura del vettore di Stokes in uscita, in particolare, come si osserva nella figura 7.8, per valori bassi di SNR si ha un miglioramento di 2 dB rispetto all'errore che si ha per il polarimetro a 4 canali. A fronte di questo miglioramento c'è però da considerare il fatto che, a parità

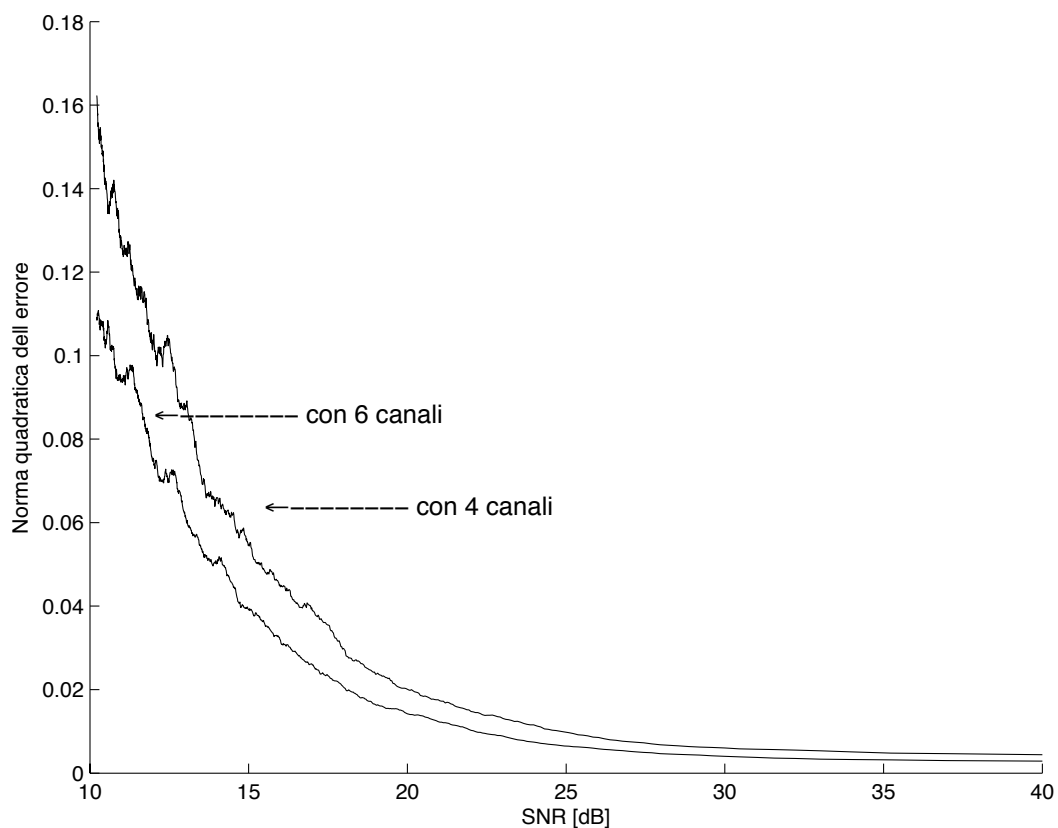


Figura 7.8: Andamento dell'errore percentuale matriciale in funzione dell'SNR nella misura con 4 canali e nella misura con 6 canali

di intensità luminosa entrante, nel polarimetro a 6 canali si misura un valore inferiore di 3 dB rispetto al polarimetro a 4 canali. Questo è dovuto al fatto che nel polarimetro a 6 canali è necessario dividere ulteriormente il fascio rispetto al polarimetro a 4 canali. In ultima analisi quindi aggiungere due canali al polarimetro a quattro canali non migliora la qualità delle misure.



### Stima della matrice di Mueller

---

Come si è visto la polarimetria di Stokes-Mueller è una tecnica molto efficace per investigare le proprietà di polarizzazione dei sistemi ottici. I polarimetri sono composti da elementi polarizzanti e da rivelatori che misurano l'intensità dei fasci in ingresso. Di conseguenza l'estrazione dei coefficienti della matrice di Mueller dai dati misurati diventa possibile a condizione che vengano effettuate almeno 16 misure. I metodi tradizionali utilizzati per stimare la matrice di Mueller sono implementati attraverso algoritmi di ricostruzione lineare: inversione matriciale o pseudo-inversione. Questi ricercano la soluzione che minimizza l'errore residuo della norma  $L^1$ ,  $L^2$ ,  $L^\infty$  o di Frobenius a seconda delle configurazioni. I principali difetti di questi metodi convenzionali sono l'incapacità sia di eliminare gli errori sistematici sia di preservare la stabilità della soluzione quando sono soggetti a perturbazioni. Pertanto, in presenza di rumore di misura la ricostruzione della matrice di Mueller spesso porta a dei risultati non fisicamente accettabili. In altre parole, questi metodi convenzionali sono efficaci nel cercare la soluzione che minimizza l'errore residuo, ma non riescono a garantire che la soluzione ottenuta sia robusta.

Nel capitolo 4 è stato presentato un metodo di filtraggio del rumore dalla matrice di Mueller. Questa tecnica si basa sull'eliminazione di tutti gli autovalori negativi presenti nella matrice Hermitiana associata alla matrice di Mueller non accettabile. In questo capitolo verranno affrontati due metodi di stima della matrice di Mueller che consentono di ottenere una matrice fisicamente accettabile partendo da una matrice non accettabile.

## 8.1 Metodo di stima della massima verosimiglianza

Questo metodo di stima consente di ricavare la matrice di Mueller attraverso la minimizzazione della funzione di massima verosimiglianza delle intensità misurate. Prendendo in considerazione il polarimetro di Mueller a quattro canali presentato nel paragrafo 6.3 la relazione ingresso-uscita delle intensità è data da:

$$\mathbf{I} = \mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{P} \quad (8.1)$$

dove  $\mathbf{I}$  è la matrice delle intensità misurate,  $\mathbf{M}$  è la matrice di Mueller del campione,  $\mathbf{P}$  è la matrice le cui colonne sono formate dagli stati generati, infine la matrice  $\mathbf{A}$  è uguale a:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

Normalizzando la matrice  $\mathbf{I}$  si ottiene una matrice i cui elementi sono compresi tra 0 e 1 e quindi possono essere considerati come dei valori di probabilità. Le probabilità teoriche possono quindi essere scritte come:

$$p_{ij}(\mathbf{M}) = \mathbf{I} = \mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{P} \quad (8.3)$$

Le intensità misurate sperimentalmente vengono anch'esse normalizzate e raggruppate in forma matriciale:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} I'_{00} & \cdots & I'_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ I'_{40} & \cdots & I'_{4n} \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

A questo punto, avendo calcolato le probabilità e avendo misurato le intensità si può ricavare la matrice di Mueller  $\mathbf{M}$  massimizzando la funzione di verosimiglianza  $\mathcal{L}[\mathbf{M}]$  definita come:

$$\mathcal{L}[\mathbf{M}] = \sum_{i,j} F_{ij} \ln(p_{ij}(\mathbf{M})) = \sum_{i,j} F_{ij} \ln((\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{P})_{ij}) \quad (8.5)$$

dove  $p_{ij}(\mathbf{M}) \geq 0$  per ogni processo fisicamente accettabile. L'equazione (8.5) contiene sia quantità teoriche  $[p_{ij}(\mathbf{M})]$  che quantità sperimentali ( $F_{ij}$ ).



Prima dell'operazione di massimizzazione è necessario imporre la condizione  $p_{ij}(\mathbf{M}) \geq 0$  affinché la matrice di Mueller stimata sia automaticamente fisicamente accettabile. Alla matrice di Mueller  $\mathbf{M}$  può essere associata la matrice Hermitiana  $\mathbf{H}$  attraverso la relazione:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} [\text{Tr} \{ \mathbf{H}(\sigma_i \otimes \sigma_j^*) \}] \epsilon_{(i+j)} \quad (8.6)$$

dove  $\epsilon_{(i+j)}$  sono gli elementi della base standard in  $\mathbb{R}^{4 \times 4}$ ,  $\sigma_i$  sono le matrici di Pauli definite nel paragrafo 2.4. Sostituendo la (8.6) all'interno della (8.3) si ottiene:

$$p_{ij}(\mathbf{M}) = \frac{1}{2} \mathbf{A} \left( \sum_{\mu,\nu} [\text{Tr} \{ \mathbf{H}(\sigma_\mu \otimes \sigma_\nu^*) \}] \epsilon_{(\mu+\nu)} \right) \mathbf{P} \quad (8.7)$$

Le probabilità  $p_{ij}(\mathbf{M})$  espresse nell'equazione (8.7) possono ancora essere negative infatti solo le matrici  $\mathbf{H}$  associate a matrici di Mueller fisicamente accettabili soddisfano la condizione  $p_{ij} \geq 0$ . Tuttavia, è noto dalla teoria delle matrici di Mueller che le matrici  $\mathbf{H}$  associate alle matrici di Mueller fisicamente accettabili sono semidefinite positive. Le matrici semidefinite positive possono essere scritte in termini della decomposizione di Cholesky come:

$$\mathbf{H} = \frac{2\mathbf{C}\mathbf{C}^*}{\text{Tr}(\mathbf{C}\mathbf{C}^*)} \quad (8.8)$$

dove  $\mathbf{C}$  è una matrice triangolare:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 \\ h_5 + ih_6 & h_2 & 0 & 0 \\ h_{11} + ih_{12} & h_7 + ih_8 & h_3 & 0 \\ h_{15} + ih_{16} & h_{13} + ih_{14} & h_9 + ih_{10} & h_4 \end{bmatrix} \quad (8.9)$$

formata da 16 parametri reali  $h_k$  ( $k = 1, \dots, 16$ ). Quindi, dopo aver sostituito l'equazione (8.8) all'interno della (8.7) si può trovare il massimo di  $\mathcal{L}$  utilizzando un algoritmo di massimizzazione standard. La ricerca del valore massimo viene eseguita all'interno dello spazio reale a 16 dimensioni dei parametri  $h_k$ . L'insieme dei valori  $h_1^{opt}, \dots, h_{16}^{opt}$  che massimizzano  $\mathcal{L}$  possono quindi essere sostituiti all'interno dell'equazione (8.8) in modo da ottenere la matrice  $\mathbf{H}^{opt}$  corrispondente. Infine, gli elementi cercati della matrice di Mueller fisicamente accettabile possono essere calcolati attraverso la relazione:

$$m_{ij} = \frac{1}{2} \text{Tr} \{ \mathbf{H}^{opt}(\sigma_i \otimes \sigma_j^*) \} \quad (8.10)$$

## 8.2 Stima con l'algoritmo *Simulated Annealing*

Questo metodo utilizza alcune tecniche di ottimizzazione globale vincolata per ottenere la soluzione fisica più probabile partendo dai dati sperimentali. Come nel paragrafo precedente il polarimetro preso in considerazione è il polarimetro di Mueller a quattro canali. Le intensità teoriche sono pari a:

$$\mathbf{I} = \mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{P} \quad (8.11)$$

Vettorizzando la matrice  $\mathbf{I}$  si ottiene la relazione:

$$\text{vec}(\mathbf{I}) = (\mathbf{P}^T \otimes \mathbf{A})\text{vec}(\mathbf{M}) = \mathbf{B}\text{vec}(\mathbf{M}) \quad (8.12)$$

dove  $\mathbf{B} = (\mathbf{P}^T \otimes \mathbf{A})$  è una matrice sedici per sedici. L'errore che si compie nella misura può essere espresso come:

$$\varepsilon = \text{vec}(\mathbf{I}) - \text{vec}(\mathbf{I}_e) = \mathbf{B}\text{vec}(\mathbf{M}) - \text{vec}(\mathbf{I}_e) \quad (8.13)$$

Una matrice di Mueller è fisicamente accettabile se per ogni vettore di Stokes incidente  $S_i$  il vettore uscente  $S_e = \mathbf{M}S_i$  è ancora un vettore di Stokes, cioè soddisfa le condizioni:

$$S_0 \geq 0, \quad S_0^2 - (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) \geq 0 \quad (8.14)$$

Una condizione necessaria e sufficiente affinché  $\mathbf{M}$  sia una matrice di Mueller ammissibile è che lo spettro di  $\mathbf{G}\mathbf{M}^T\mathbf{G}\mathbf{M}$  sia reale e che l'autovettore  $S_{\sigma_1}$ , associato all'autovalore più grande, sia un vettore di Stokes. La matrice  $\mathbf{G}$  è definita come  $\mathbf{G} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ .

Ponendo  $[S, \Sigma_k] = \text{eig}(\mathbf{G}\mathbf{M}^T\mathbf{G}\mathbf{M})$  dove  $\Sigma_{k=1\dots 4} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$  sono ordinati in ordine decrescente. L'estrazione rigorosa di una matrice di Mueller ammissibile può essere realizzata mediante l'implementazione di un algoritmo di ottimizzazione vincolata non lineare invece di una semplice inversione matriciale.

Questo processo di minimizzazione vincolata per estrarre la matrice di Mueller dai dati delle intensità può essere espresso nella seguente forma:

$$f(\mathbf{M}) = \min_{\mathbf{M}} \|\mathbf{B}\text{vec}(\mathbf{M}) - \text{vec}(\mathbf{I}_e)\|^2 \quad (8.15)$$

$$\text{vincolata a: } \begin{cases} \text{Im}(\Sigma_k)_{k=1\dots 4} = 0 \\ S_{\sigma_1}^T \mathbf{G} S_{\sigma_1} \geq 0 \\ S_0, \sigma_1 \geq 0 \end{cases} \quad (8.16)$$

La prima uguaglianza dei vincoli è necessaria affinché tutti gli autovalori siano reali. Le altre due disuguaglianze servono a garantire che l'autovettore  $S_{\sigma_1}$ , che corrisponde all'autovalore più grande, sia un vettore di Stokes. Nella dimostrazione seguente i vincoli verranno rappresentati come  $h_i(\mathbf{M})$  dove per l'uguaglianza si ha  $h_0(\mathbf{M}) = 0$  mentre le due disuguaglianze diventano:  $h_i(\mathbf{M}) \geq 0$  per  $i = 1, 2$ .

L'algoritmo utilizza il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per trovare il minimo della funzione (8.15). Nella pratica, questo metodo ricerca nello spazio congiunto della matrice di Mueller  $\mathbf{M}$  e del lagrangiano  $\lambda$ , dei punti di flesso che soddisfino sia l'obiettivo di minimo sia i vincoli imposti. Il problema può essere impostato attraverso la funzione Lagrangiana aumentata definita come:

$$\mathcal{L}(\mathbf{M}, \lambda) = f(\mathbf{M}) + \lambda^T |h(\mathbf{M})| + \frac{1}{2} \|h(\mathbf{M})\|^2 \quad (8.17)$$

dove  $f(\mathbf{M})$  è la funzione espressa nella (8.15). I vincoli espressi dalle disuguaglianze  $h_i(\mathbf{M}) \geq 0$  sono stati trasformati in uguaglianze attraverso la relazione  $h'_i(\mathbf{M}) = \max(0, h(\mathbf{M})) = 0$ .

Nell'algoritmo di *simulated annealing* (SA), ogni punto  $s$  dello spazio di ricerca è analogo a uno stato di un sistema fisico, e la funzione  $\mathcal{L}(s)$  che deve essere minimizzata è analoga all'energia interna del sistema in tale stato. L'obiettivo è quello di portare il sistema, da uno stato iniziale arbitrario, ad uno stato con il minimo di energia possibile.

Ad ogni passo, il SA considera dei punti  $s'$  adiacenti allo stato attuale  $s$  e decide probabilisticamente se spostarsi verso lo stato  $s'$  o rimanere nello stato  $s$ . Le probabilità sono scelte in modo tale che il sistema tenda a spostarsi verso stati a energia più bassa. In genere questi passaggi vengono ripetuti fino a quando il sistema non raggiunge uno stato che soddisfa i criteri stabiliti, oppure fino a quando non viene raggiunto il numero massimo di iterazioni.



### Costruzione di un polarimetro di Stokes a quattro canali

---

In questo capitolo verrà presentato il progetto, la realizzazione e la calibrazione di un polarimetro di Stokes a quattro canali presentato al paragrafo 5.5.2. Lo scopo di questo polarimetro è quello di misurare la matrice di Mueller di un canale quantistico fra la Terra e lo Spazio. Le misure verranno effettuate all'interno dell'osservatorio di *Laser Ranging* di Matera.

#### 9.1 Progettazione del polarimetro

Nella figura 9.3 è rappresentato lo schema del polarimetro di Stokes costruito. Il polarimetro è stato progettato in modo da essere inserito al posto del ricevitore dell'osservatorio di Matera. Particolare attenzione è stata posta sulla focalizzazione e collimazione del fascio ottico ricevuto. Attraverso test effettuati all'osservatorio e attraverso simulazioni si è stimato che il fascio ricevuto ha uno spot del diametro di circa  $D = 45$  mm. Il fascio entra focalizzato con una focale molto lunga, siccome il fascio all'interno del polarimetro deve essere collimato affinché si abbiano buone misure è stato progettato un beam-reducer da inserire prima del polarimetro. Il beam-reducer è formato da una lente da 2" con una focale di  $f = 500$  mm e una lente da 1" con una focale di  $f = 100$  mm posta a circa  $l = 450$  mm di distanza dalla prima. Il diametro medio del fascio che esce dal beam reducer e si

propaga all'interno del polarimetro è stato stimato di circa  $d = 3$  mm.

Il polarimetro è formato da un primo beam-splitter non polarizzante (BS) che divide il fascio nelle due coppie di canali (H,V) e (+,R). Nel prima prima coppia il fascio viene mandato su i due rivelatori da un beam-splitter polarizzante (PBS) che invia nei canali (H) e (V) rispettivamente la polarizzazione orizzontale e la polarizzazione verticale. Nell'altra coppia il fascio viene diviso da un ulteriore beam-splitter non polarizzante che divide il fascio nei canali (+) e (R) che misurano la polarizzazione lineare a  $+45^\circ$  e la polarizzazione circolare destrorsa rispettivamente. Il canale (+) è formato da un polarizzatore *Glan-Thompson* con asse veloce ruotato di  $+45^\circ$  rispetto al riferimento del sistema. Il canale (R) invece è formato da una lamina  $\lambda/4$  ruotata di  $+45^\circ$  e da un polarizzatore *Glan-Taylor* posto orizzontalmente. La luce entrante nei canali viene rivelata attraverso quattro fotodiodi, la tensione generata da questi è misurata attraverso un'oscilloscopio a quattro canali con banda di misura di 10 GHz e frequenza di campionamento di 40 Gsample/s.

Nelle figure 9.1 e 9.2 sono rappresentate due fotografie del polarimetro realizzato e del sistema di misura utilizzato.

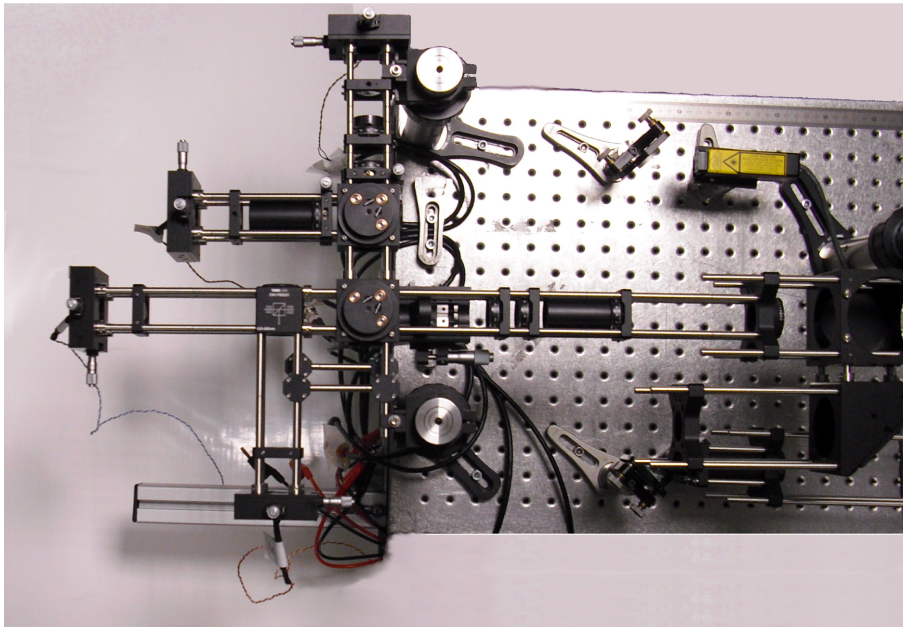


Figura 9.1: Foto del polarimetro

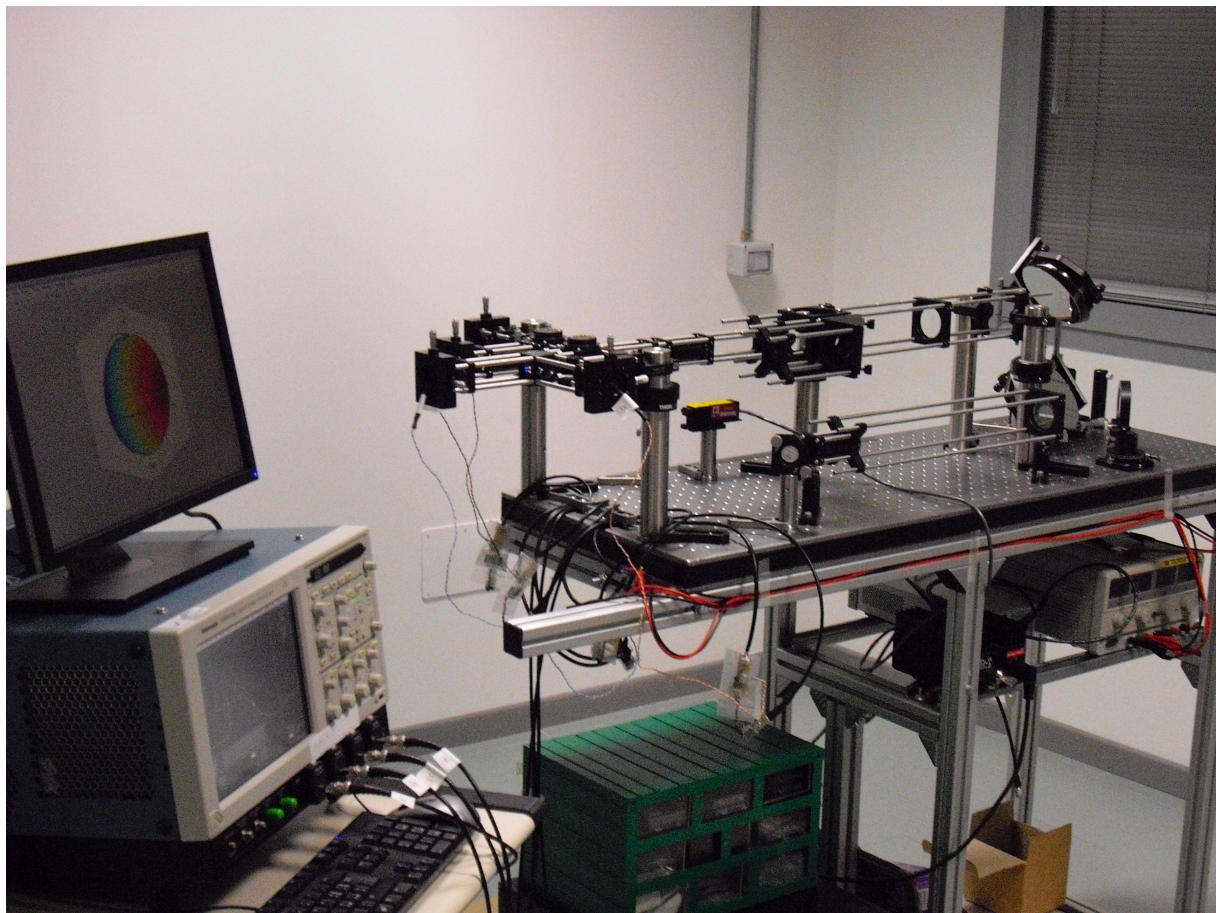


Figura 9.2: Foto del setup di misura

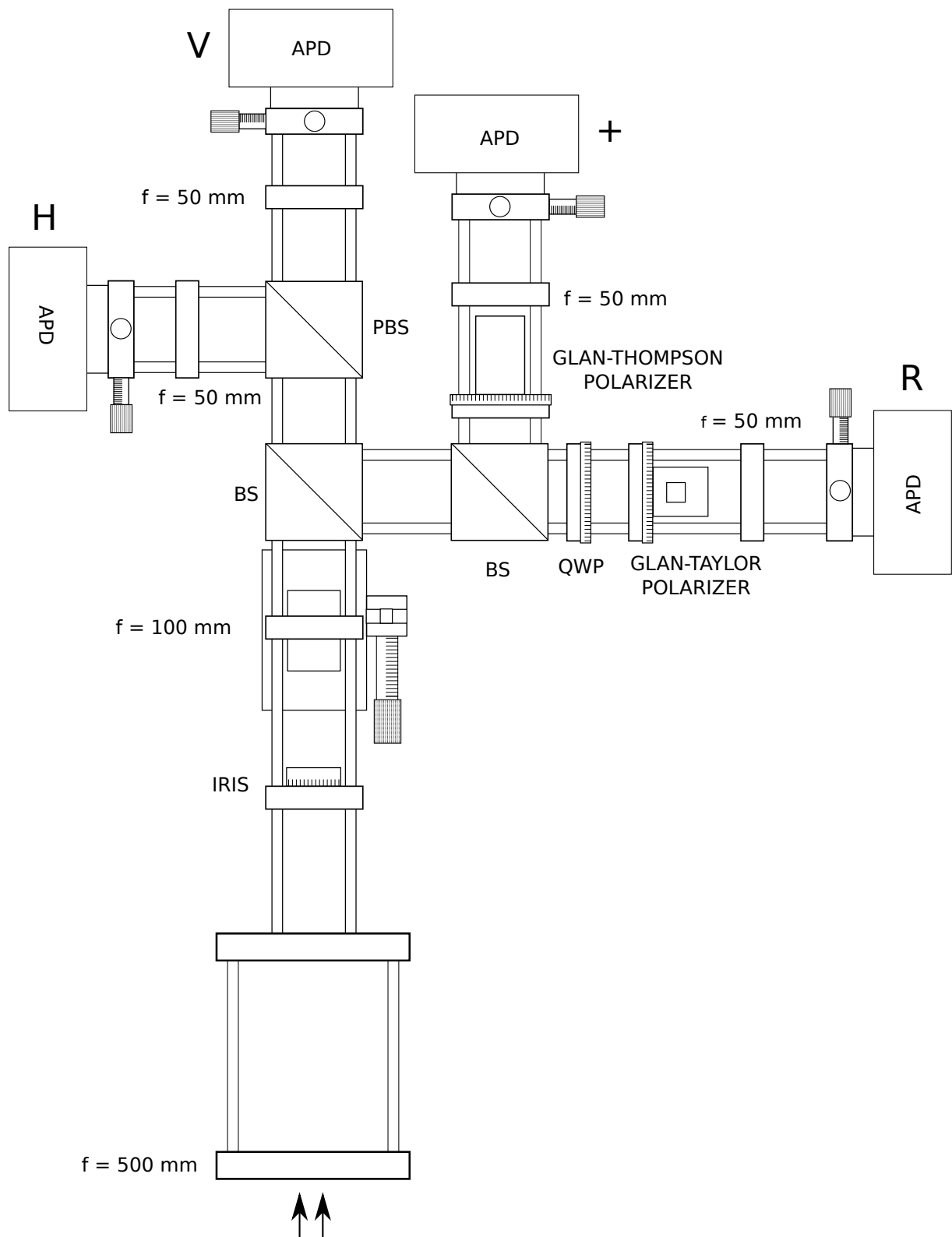


Figura 9.3: Schema del polarimetro



## 9.2 Calibrazione del polarimetro

La calibrazione del polarimetro è stata fatta in due momenti, da prima si è calibrata la risposta dei fotodiodi utilizzando come riferimento un fotodiodo calibrato, successivamente si è misurata la matrice di calibrazione attraverso l'utilizzo di un PSG.

### 9.2.1 Calibrazione dei fotodiodi

ND <sub>1</sub>	ND <sub>2</sub>	(H) [ $\mu$ A]	(V) [ $\mu$ A]	(R) [ $\mu$ A]	(+) [ $\mu$ A]	Fot. Cal. [ $\mu$ A]
0.2	0	43.24	42.8	44.4	43.05	34.2
0.5	0	17.45	17.31	17.91	17.45	12.8
0.8	0	13.51	13.44	14.17	13.44	10.64
0	1	6.22	6.12	6.523	6.12	4.228
0.5	1	1.488	1.48	1.529	1.483	1.045
0	2	0.67	0.662	0.699	0.667	0.443
0.5	2	0.16	0.159	163.85	0.16	0.096

Tabella 9.1: Coefficienti angolari e fattori di conversione dei quattro fotodiodi

La calibrazione dei fotodiodi è stata effettuata con una sorgente laser a He-Ne con lunghezza d'onda di  $\lambda = 543,5$  nm. Il fascio generato dal laser è stato fatto passare attraverso dei filtri attenuatori e quindi fatto incidere volta per volta sui fotodiodi da calibrare. Variando la densità dei filtri si è misurato il valore di corrente generata dal fotodiodo attraverso un Amperometro. Le stesse misure sono state effettuate anche per un fotodiodo calibrato del quale si conosce il fattore di conversione corrente-potenza. Nella tabella 9.1 sono riportate le misure di intensità effettuate mentre nella figura 9.4 sono riportati gli andamenti delle correnti misurate in funzione dell'intensità del fascio in ingresso. Come si può osservare i quattro fotodiodi hanno risposte quasi lineari e abbastanza simili tra loro. Nella tabella 9.2 sono rappresentati i valori del coefficiente angolare delle rette che meglio approssimano l'andamento dei valori di corrente misurati dai quattro fotodiodi non calibrati. Nella tabella è riportato anche il rapporto tra il coefficiente angolare e il fattore di conversione corrente-potenza del fotodiodo calibrato ( $k = 0.1912$ ). Moltiplicando i dati

Fotodiiodo	Coeff. Angolare $m_i$	$m_i/k$
(H)	0.2413	0.7924
(V)	0.2389	0.8
(R)	0.2477	0.7719
(+)	0.2404	0.79547

Tabella 9.2: Coefficienti angolari e fattori di conversione dei quattro fotodiiodi

di corrente misurati dai fotodiiodi per il coefficiente  $m_i/k$  si ottengono i valori calibrati di potenza per i quattro fotodiiodi.

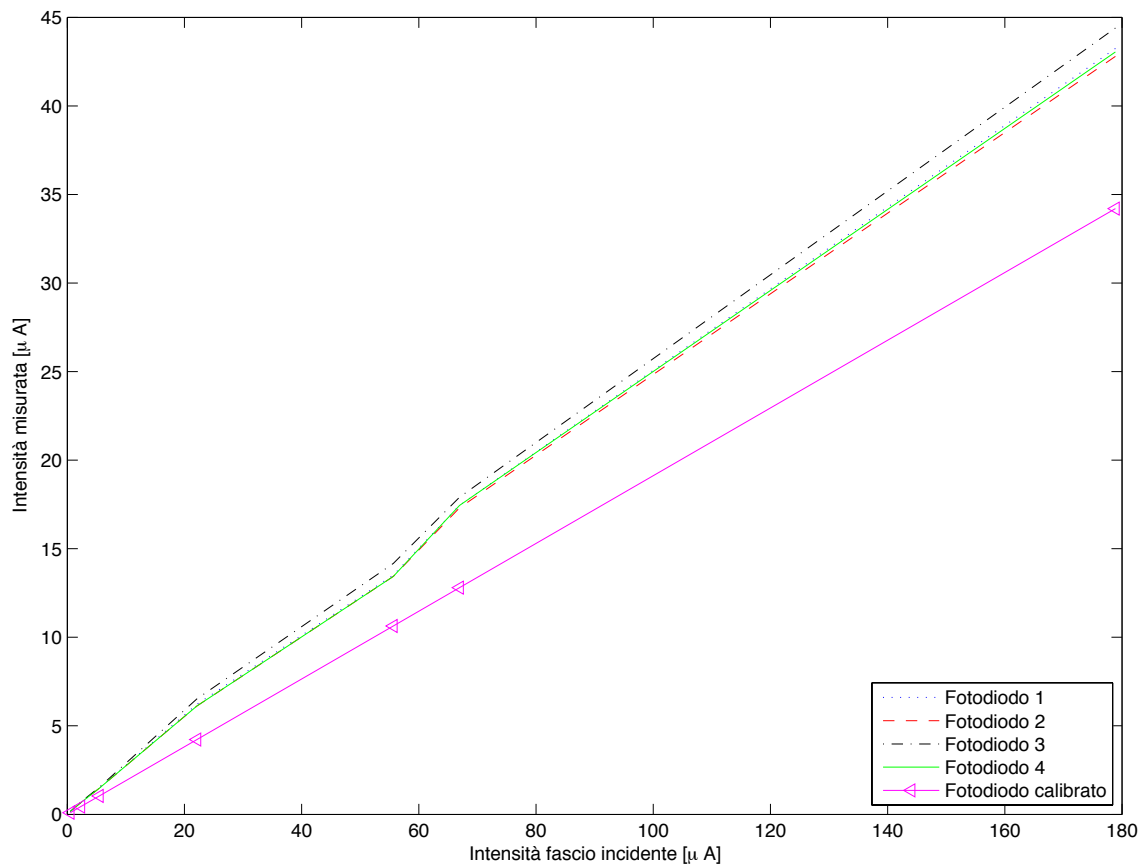


Figura 9.4: Rette di calibrazione dei fotodiiodi

### 9.2.2 Misura della matrice di calibrazione

La relazione ingresso-uscita di un polarimetro è data dall'equazione:

$$\mathbf{I} = \mathbf{TP} \quad (9.1)$$

dove  $\mathbf{I}$  è una matrice  $4 \times n$  le cui colonne sono formate dalle intensità degli stati misurati,  $\mathbf{P}$  è una matrice  $4 \times n$  le cui colonne sono formate dai vettori di Stokes degli stati inviati, infine  $\mathbf{T}$  è la matrice di calibrazione del polarimetro. Quest'ultima a sua volta può essere scomposta in tre matrici:

$$\mathbf{T} = \mathbf{AKZ} \quad (9.2)$$

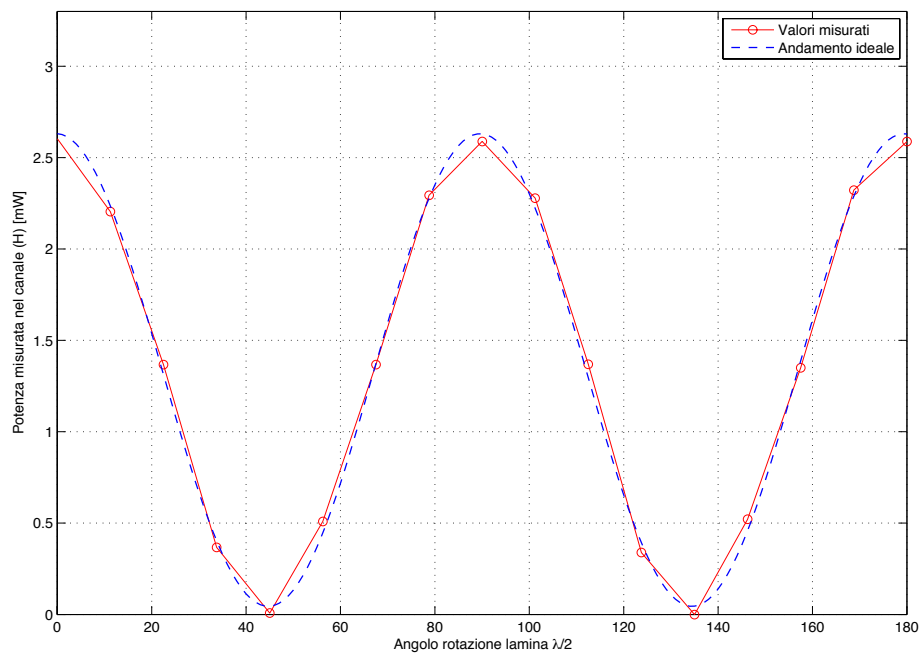
dove  $\mathbf{A}$  è la matrice di trasformazione descritta in (5.33),  $\mathbf{K}$  è la matrice dei coefficienti di proporzionalità delle intensità e  $\mathbf{Z}$  è la matrice di compensazione del polarimetro. Andando a misurare le intensità del fascio nei quattro canali per una serie di vettori di Stokes in ingresso è possibile quindi ricavarsi la matrice  $\mathbf{T}$  di calibrazione del polarimetro.

#### Procedura di calibrazione

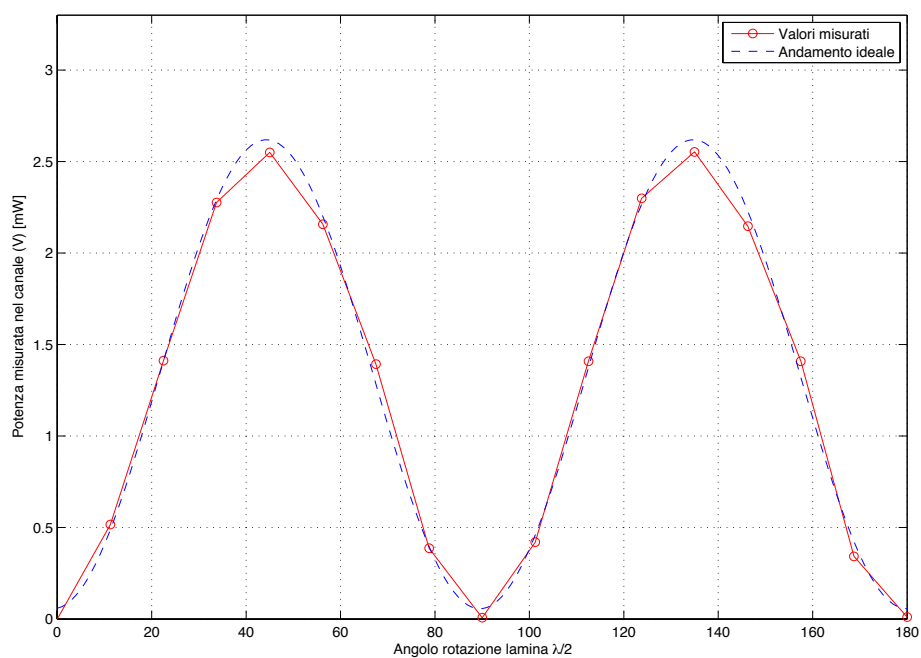
La calibrazione del polarimetro è stata effettuata con un laser a stato solido impulsato con lunghezza d'onda di  $\lambda = 532nm$  e una potenza di circa 10 mW. I vettori di Stokes in ingresso sono stati generati da un PSG formato da un polarizzatore *Glan-Thompson* con asse veloce orizzontale, una lamina  $\lambda/4$  rotante e una lamina  $\lambda/2$  rotante. Il PSG è stato posto davanti al primo beam splitter del polarimetro in maniera tale da inviare all'interno del polarimetro degli stati il più possibile puri.

Il primo passo della calibrazione è stato quello di tarare i canali (+) e (R) in modo da ottenere la giusta orientazione dei loro componenti polarizzanti. Il canale (+), cioè quello che misura la polarizzazione lineare a  $+45^\circ$ , è stato calibrato togliendo la lamina  $\lambda/4$  dal PSG e utilizzando solo la lamina  $\lambda/2$ . La posizione a  $+45^\circ$  del polarizzatore del canale (+) è stata trovata cercando il minimo di potenza nel canale per uno stato in ingresso con polarizzazione lineare a  $-45^\circ$ . Successivamente si è calibrato il canale (R) a polarizzazione circolare destrorsa utilizzando solo la lamina  $\lambda/4$ . Imponendo uno stato circolare sinistrorso in ingresso si è ricercata l'intensità minima ruotando la lamina  $\lambda/4$  e il polarizzatore del canale. Inserendo quindi entrambe le lamine all'interno del PSG si è fatta un'ulteriore taratura dei due canali, in particolare si sono aggiustati gli angoli dei due componenti

del canale (R) in maniera tale che imponendo una polarizzazione circolare destrorsa in ingresso e ruotando la lamina  $\lambda/2$  l'intensità misurata dal canale fosse il più possibile costante. Nei grafici 9.5 e 9.6 sono riportati gli andamenti delle intensità nei 4 canali in funzione della rotazione della lamina  $\lambda/2$ . Nel grafico 9.6(a), che rappresenta il canale (R), si può osservare che l'intensità misurata è pressoché costante al variare dell'angolo di rotazione della lamina  $\lambda/2$ , questo significa che la calibrazione del canale è buona.

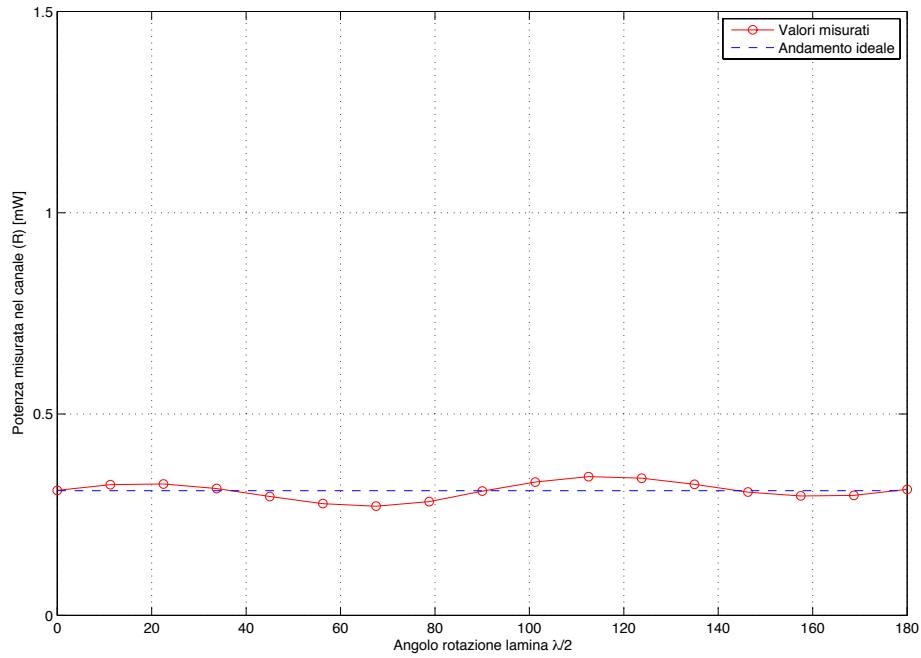


(a) Canale (H)

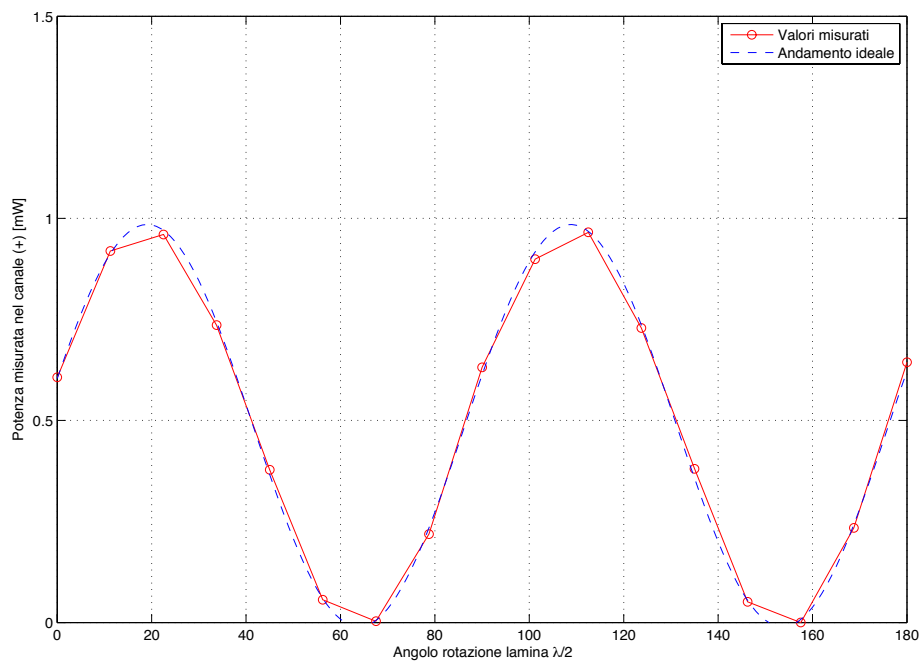


(b) Canale (V)

Figura 9.5: Andamento della potenza dei canali (H) e (V) in funzione dell'angolo di rotazione della lamina  $\lambda/2$



(a) Canale (R)



(b) Canale (+)

Figura 9.6: Andamento della potenza dei canali (R) e (+) in funzione dell'angolo di rotazione della lamina  $\lambda/2$

Dopo aver tarato i canali (+) e (R) si è proceduto con la misura della matrice di calibrazione del polarimetro. Utilizzando il PSG si sono generati 47 stati di polarizzazione differenti ruotando le due lamine e per ognuno di questi si sono misurate le intensità rivelate dai quattro canali del polarimetro. Nelle tabelle 9.3 e 9.4 sono riportate le potenze misurate dai fotodiodi per ciascuno degli stati di polarizzazione generati dalle rotazioni delle lamine a mezz'onda ( $\theta_H$ ) e a quarto d'onda ( $\theta_Q$ ). Da queste, utilizzando la relazione (9.1) ci si è ricavati la matrice di calibrazione del fotodiodo, che è pari a:

$$\mathbf{T} = c \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.9395 & -0.0454 & -0.0332 \\ 0.9590 & -0.9317 & 0.0519 & 0.0404 \\ 0.3407 & 0.0886 & 0.3329 & -0.0157 \\ 0.2367 & 0.0008 & 0.0200 & -0.2532 \end{bmatrix} \quad (9.3)$$

dove  $c$  è una costante di normalizzazione pari a  $c = 0.0014$ . Scomponendo la matrice  $\mathbf{T}$  attraverso la relazione (9.2) si sono ottenute le seguenti matrici:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0427 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.9351 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4.2241 \end{bmatrix} \quad (9.4)$$

e

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.0160 & 0.0043 & 0.0045 \\ 0 & 0.9555 & -0.0498 & -0.0377 \\ 0 & 0.2759 & 0.9727 & -0.0505 \\ 0 & -0.0192 & -0.0800 & 1.0739 \end{bmatrix} \quad (9.5)$$

Si può notare la matrice  $\mathbf{K}$  non corrisponde perfettamente alla matrice ideale, infatti si dovrebbe avere una matrice pari:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (9.6)$$

Il fatto che i coefficienti sulla terza e quarta colonna siano differenti al caso ideale è da implicare alla non idealità dei beam splitter non polarizzanti e alle attenuazioni introdotte dai componenti polarizzanti presenti sui canali (+) e (R). L'errore nella matrice di calibrazione

può essere espresso attraverso la matrice delle deviazioni standard calcolata attraverso i valori dell'errore di misura delle intensità acquisite. La matrice risulta essere pari a:

$$\mathbf{T}_\sigma = 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 2.2598 & 0.1027 & 0.0651 & 0.0828 \\ 0.0273 & 0.1819 & 0.0586 & 0.0543 \\ 2.9445 & 0.1973 & 0.0622 & 0.0661 \\ 1.6474 & 0.0623 & 0.1610 & 0.3590 \end{bmatrix} \quad (9.7)$$

L'errore medio percentuale che si compie nel misurare la matrice di calibrazione può essere calcolato mediando il rapporto tra gli elementi delle matrici della deviazione standard e di calibrazione. Il valore ottenuto è uguale a:

$$e = 3.3\% \quad (9.8)$$

$\theta_H = \lambda/2$	$\theta_Q = \lambda/4$	CH (H) [mW]	CH (V) [mW]	CH (R) [mW]	CH (+) [mW]
0	0	2,603	0	0,589	0,320
11,25	0	2,204	0,516	0,892	0,334
22,5	0	1,367	1,412	0,932	0,336
33,75	0	0,368	2,276	0,714	0,325
45	0	0,008	2,550	0,366	0,304
56,25	0	0,509	2,158	0,055	0,286
67,5	0	1,366	1,393	0,003	0,279
78,75	0	2,294	0,387	0,212	0,291
90	0	2,589	0,007	0,613	0,318
101,25	0	2,278	0,420	0,872	0,341
112,5	0	1,369	1,409	0,937	0,355
123,75	0	0,338	2,298	0,707	0,351
135	0	0	2,553	0,369	0,335
146,25	0	0,520	2,146	0,050	0,315
157,5	0	1,350	1,408	0	0,305
168,75	0	2,322	0,343	0,227	0,307
180	0	2,587	0,010	0,625	0,322

Tabella 9.3: Potenze misurate dai fotodiodi al variare degli stati in ingresso



$\theta_H = \lambda/2$	$\theta_Q = \lambda/4$	CH (H) [mW]	CH (V) [mW]	CH (R) [mW]	CH (+) [mW]
0	15	2,462	0,174	0,400	0,492
22,5	15	1,948	0,827	0,916	0,514
45	15	0,247	2,362	0,590	0,495
67,5	15	0,885	1,849	0,045	0,462
90	15	2,459	0,171	0,381	0,475
0	30	1,955	0,803	0,320	0,630
22,5	30	2,055	0,699	0,731	0,646
45	30	0,935	1,814	0,688	0,643
67,5	30	0,783	1,940	0,261	0,617
90	30	1,972	0,782	0,291	0,612
0	45	1,544	1,229	0,470	0,706
22,5	45	1,597	1,177	0,540	0,711
45	45	1,380	1,388	0,541	0,711
67,5	45	1,306	1,456	0,451	0,705
90	45	1,555	1,203	0,431	0,699
0	315	1,426	1,354	0,374	0,002
22,5	315	1,606	1,172	0,485	0,006
45	315	1,377	1,399	0,529	0,008
67,5	315	1,206	1,561	0,439	0,003
90	315	1,371	1,399	0,407	0
0	345	2,238	0,455	0,710	0,158
22,5	345	0,833	1,894	0,731	0,158
45	345	0,411	2,234	0,224	0,120
67,5	345	1,948	0,811	0,185	0,117
90	345	2,226	0,479	0,747	0,158
0	330	1,660	1,130	0,623	0,031
22,5	330	0,956	1,798	0,518	0,028
45	330	1,103	1,655	0,291	0,016
67,5	330	1,842	0,930	0,408	0,023
90	330	1,646	1,134	0,657	0,042

Tabella 9.4: Potenze misurate dai fotodiodi al variare degli stati in ingresso

### 9.2.3 Misura di alcuni stati di prova

Per provare l'efficienza della calibrazione del polarimetro sono state effettuate alcune misure su degli stati di polarizzazione casuali generati dal PSG utilizzato per la calibrazione. Nella tabella 9.5 sono riportati gli stati misurati e gli stati previsti inviati dal PSG, a lato di ogni coppia è riportato anche l'errore percentuale tra lo stato misurato e lo stato previsto calcolato attraverso la seguente relazione:

$$e = \frac{\|S' - S\|_F}{\|S' + S\|_F} \quad (9.9)$$

dove  $S'$  e  $S$  sono rispettivamente i vettori di Stokes dello stato misurato e dello stato previsto. L'errore percentuale medio sulle misure è del  $e = 3.35\%$  che è di poco superiore all'errore di calibrazione. Nella figura 9.7 è rappresentata la sfera di Poincaré dove in rosso sono raffigurati gli stati di polarizzazione misurati mentre in blu quelli previsti. Come si può notare gli stati misurati riproducono abbastanza fedelmente gli stati di polarizzazione previsti.

### 9.2.4 Misura della matrice di Mueller di alcuni campioni

Con il polarimetro calibrato si è di conseguenza misurata la matrice di Mueller di un campione in due configurazioni differenti. Il campione da misurare è stato posto tra il PSG e il polarimetro, si sono quindi misurate le intensità rivelate da quest'ultimo per 16 stati di polarizzazione differenti. Nella tabella 9.6 sono riportate le potenze misurate dai fotodiodi per ogni stato di polarizzazione inviato. Dalle intensità si è poi ricostruita la matrice di Mueller del campione attraverso le relazioni descritte nel paragrafo 6.3. Si è quindi trovato che la matrice di Mueller del campione è uguale a:

$$\mathbf{M}_c = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.0158 & 0.0008 & -0.0006 \\ 0.0001 & -0.9672 & -0.2751 & -0.1342 \\ -0.0411 & -0.2446 & 0.9673 & -0.0483 \\ -0.2201 & 0.1832 & 0.0170 & -1.0744 \end{bmatrix} \quad (9.10)$$

Nelle figure 9.8(a) e 9.9(a) è rappresentata la sfera di Poincaré della matrice di Mueller appena ricavata. Come si può osservare la sfera in alcuni punti ha raggio maggiore di 1, questo significa che la matrice trovata non è fisicamente accettabile. Per ricondurci alla matrice di Mueller accettabile si è applicato il metodo di stima della massima verosimiglianza

$\theta_H$	$\theta_Q$	Stato misurato	Stato previsto	Errore %
0	45	[1 0.049 -0.015 0.907]	[1 0 0 1 ]	3.86
0	-45	[1 0.063 -0.064 -1.015]	[1 0 0 -1]	3.2
0	0	[1 1.001 0.083 0]	[1 0 0 0]	2.94
22.5	0	[1 0.02 0.922 0.077]	[1 0 1 0]	4.01
90	0	[1 -1.015 0.066 0.018]	[1 -1 0 0]	2.46
-22.5	0	[1 -0.068 -0.956 0.076]	[1 0 -1 0]	3.97
-4.5	22.5	[1 0.405 -0.656 -0.746]	[1 0.321 -0.63 -0.707]	3.35
18.5	22.5	[1 0.672 0.398 -0.739]	[1 0.618 0.343 -0.707]	2.9
41	22.5	[1 -0.379 0.657 -0.708]	[1 -0.364 0.606 -0.707]	1.86
63.5	22.5	[1 -0.669 -0.389 -0.734]	[1 -0.618 -0.343 -0.707]	2.57
-4.5	-23	[1 0.553 0.222 0.707]	[1 0.613 0.326 0.719]	4.36
18.5	-23	[1 -0.312 0.502 0.711]	[1 -0.347 0.602 0.719]	3.8
41.5	-23	[1 -0.537 -0.262 0.697]	[1 -0.589 -0.368 0.719]	4.36
62.5	-23	[1 0.239 -0.563 0.696]	[1 0.304 -0.624 0.719]	3.34

Tabella 9.5: Misura di alcuni stati di polarizzazione

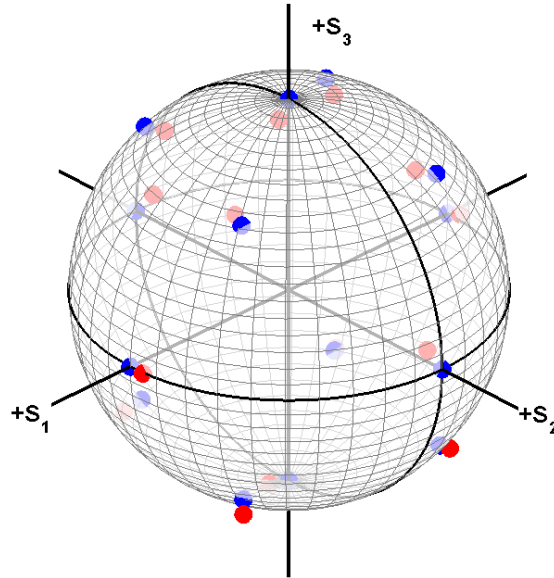


Figura 9.7: Sfera di Poincaré dove in rosso sono rappresentati gli stati di polarizzazione misurati e in blu gli stati previsti

descritto nel paragrafo 8.1. La matrice ottimizzata è pari a:

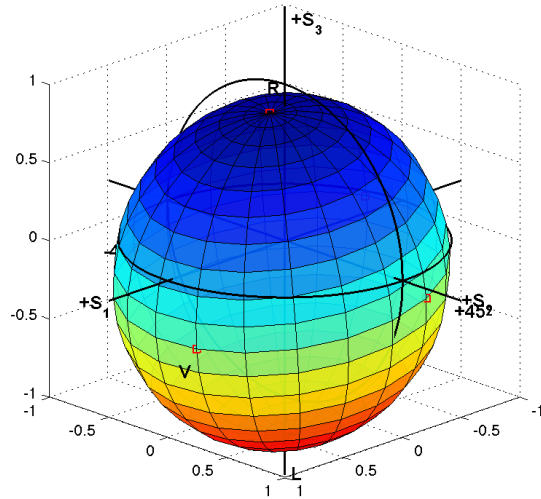
$$\mathbf{M}_{ML} = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.0925 & -0.0078 & 0.1009 \\ 0.0598 & -0.9209 & -0.2216 & -0.0598 \\ 0.0032 & -0.2216 & 0.9209 & -0.0032 \\ -0.1434 & 0.0925 & 0.0078 & -0.9574 \end{bmatrix} \quad (9.11)$$

Come si può verificare nelle figure 9.8(b) e 9.9(b) la matrice di Mueller ottimizzata è fisicamente accettabile. L'indice di depolarizzazione del campione è pari a:

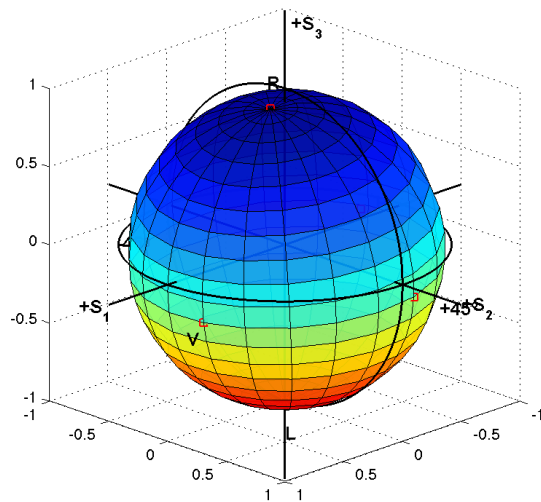
$$d = 0.9602 \quad (9.12)$$

$\theta_H = \lambda/2$	$\theta_Q = \lambda/4$	CH (H) [mW]	CH (V) [mW]	CH (R) [mW]	CH (+) [mW]
-4,5	6	0,386	1,632	0,041	0,195
17,5	6	0,239	1,784	0,520	0,239
39,5	6	1,678	0,419	0,687	0,322
63,5	6	1,818	0,237	0,168	0,280
-4,5	50	1,115	0,991	0,378	0,006
-4,5	-38	0,845	1,231	0,352	0,552
-4,5	28	1,141	0,938	0,134	0,044
17,5	28	0,462	1,568	0,311	0,043
39,5	28	1,118	0,989	0,594	0,092
63,5	28	1,818	0,238	0,404	0,102
-4,5	-16	0,186	1,802	0,259	0,427
17,5	-16	0,902	1,187	0,609	0,481
39,5	-16	1,754	0,314	0,449	0,495
63,5	-16	1,039	1,040	0,081	0,439
-4,5	36	1,235	0,849	0,233	0,016
-4,5	-24	0,400	1,631	0,339	0,493

Tabella 9.6: Potenze rivelate dai fotodiodi per il campione non ruotato

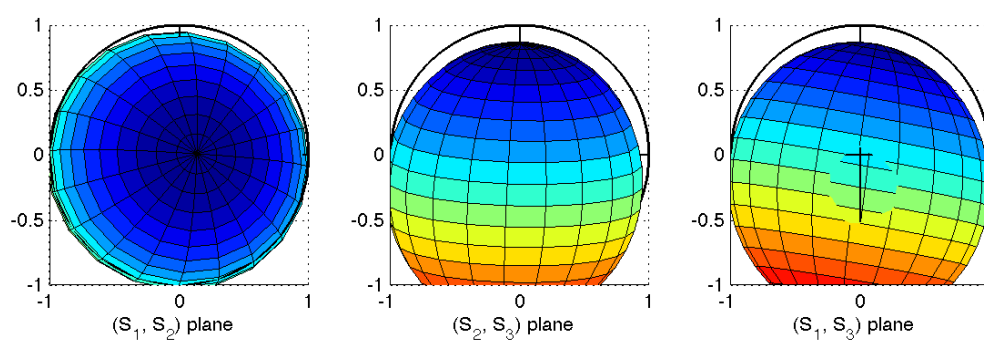


(a) Sfera di Poincaré della matrice di Mueller misurata

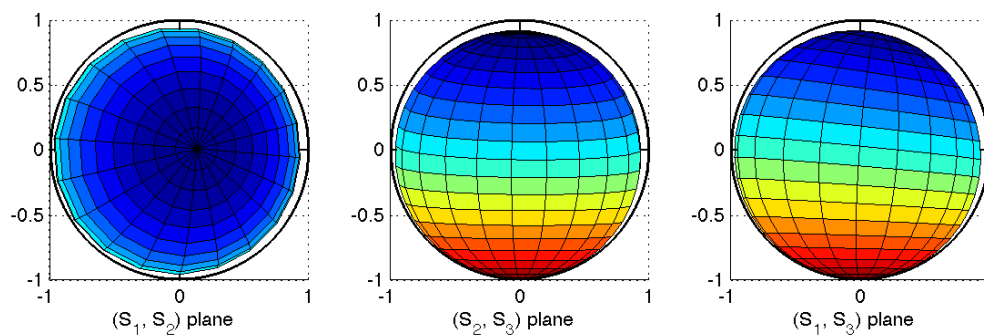


(b) Sfera di Poincaré della matrice di Mueller ottimizzata

Figura 9.8: Sfere di Poincaré delle misure



(a) Proiezioni della sfera di Poincaré della matrice di Mueller misurata



(b) Proiezioni della sfera di Poincaré della matrice di Mueller ottimizzata

Figura 9.9: Proiezioni delle sfere di Poincaré delle misure

Successivamente si è ruotato e inclinato il campione e applicato lo stesso procedimento utilizzato in precedenza. Le potenze misurate sono riportate nella tabella 9.7 e la matrice di Mueller misurata è pari a:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0130 & -0.0418 & -0.0352 \\ -0.0336 & 0.9289 & 0.2417 & -0.3156 \\ 0.0257 & 0.1847 & 0.2437 & 0.9568 \\ -0.0071 & 0.2803 & -0.9051 & 0.1963 \end{bmatrix} \quad (9.13)$$

Anche in questo caso come si può osservare nelle figure 9.10(a) e 9.11(a) la sfera di Poincaré indica che la matrice misurata non è fisicamente accettabile. Applicando il metodo di stima della massima verosimiglianza si ottiene la matrice ottimizzata:

$$\mathbf{M}_{ML} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0135 & -0.0270 & -0.0182 \\ -0.0157 & 0.9112 & 0.2319 & -0.2125 \\ 0.0135 & 0.1841 & 0.2036 & 0.9242 \\ -0.0060 & 0.2617 & -0.9098 & 0.1738 \end{bmatrix} \quad (9.14)$$

Nelle figure 9.10(b) e 9.11(b) si può verificare che la matrice ottenuta è fisicamente accettabile. L'indice di depolarizzazione introdotto dal campione è pari a:

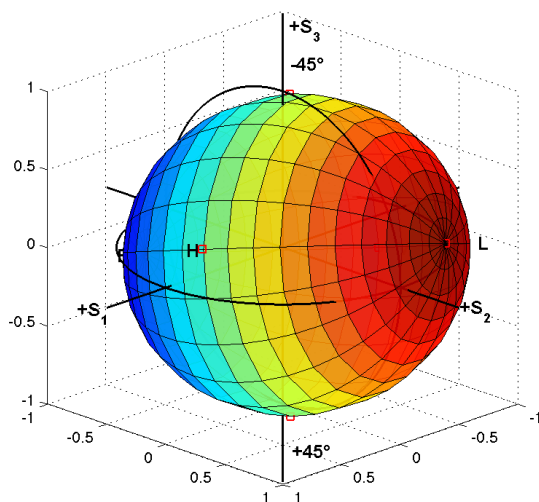
$$d = 0.9638 \quad (9.15)$$

Nelle matrici di Mueller acquisite e soprattutto nelle sfere di Poincaré ricavate si nota che il campione tende a ruotare la polarizzazione in ingresso, in particolare il comportamento è simile a quello di una lamina  $\lambda/4$ .

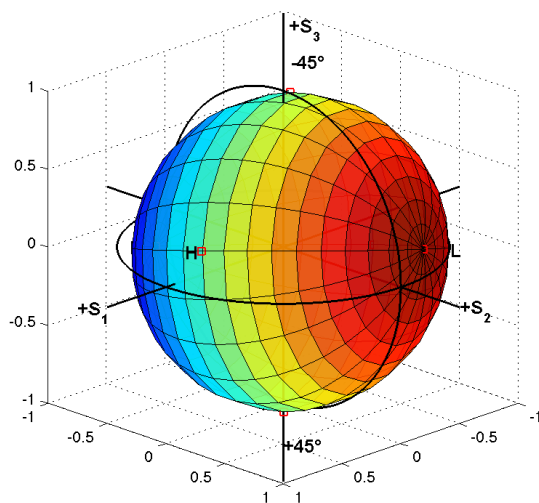


$\theta_H = \lambda/2$	$\theta_Q = \lambda/4$	CH (H) [mW]	CH (V) [mW]	CH (R) [mW]	CH (+) [mW]
-4,5	6	2,060	0,384	0,464	0,098
17,5	6	2,021	0,264	0,585	0,490
39,5	6	0,481	1,802	0,297	0,519
63,5	6	0,537	1,914	0,178	0,091
-4,5	50	1,750	0,723	0,091	0,359
-4,5	-38	0,916	1,419	0,742	0,266
-4,5	28	1,626	0,912	0,088	0,165
17,5	28	2,176	0,200	0,269	0,355
39,5	28	1,591	0,815	0,186	0,506
63,5	28	0,898	1,568	0,009	0,323
-4,5	-16	1,799	0,552	0,766	0,260
17,5	-16	1,029	1,248	0,679	0,492
39,5	-16	0,070	2,169	0,453	0,307
63,5	-16	0,977	1,467	0,554	0,053
-4,5	36	1,580	0,948	0,054	0,220
-4,5	-24	1,480	0,867	0,792	0,296

Tabella 9.7: Potenze rivelate dai fotodiodi per il campione ruotato

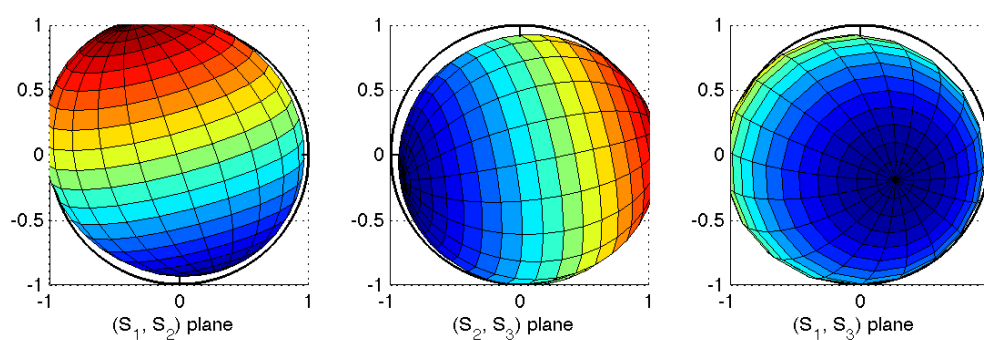


(a) Sfera di Poincaré della matrice di Mueller misurata

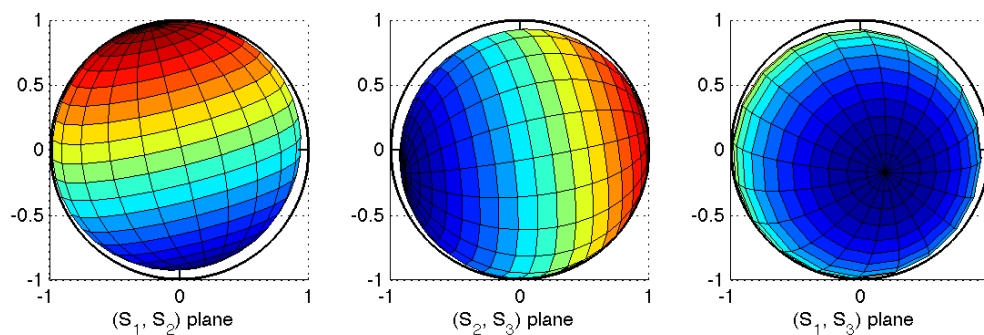


(b) Sfera di Poincaré della matrice di Mueller ottimizzata

Figura 9.10: Sfere di Poincaré delle misure



(a) Proiezioni della sfera di Poincaré della matrice di Mueller misurata



(b) Proiezioni della sfera di Poincaré della matrice di Mueller ottimizzata

Figura 9.11: Proiezioni delle sfere di Poincaré delle misure



## CAPITOLO 10

---

### Utilizzo di un canale di *Satellite Laser Ranging* per la QC

---

#### 10.1 Introduzione

In questo capitolo si farà un'analisi dettagliata di un canale di *Satellite Laser Ranging* (SLR), in particolare si farà riferimento al sistema dell'osservatorio di *Laser Ranging* di Matera. Nella figura 10.1 è illustrato un tipico sistema di *Satellite Laser Ranging*. L'analisi verrà estesa successivamente anche all'impiego del canale in un sistema di comunicazione quantistica. In particolare, utilizzando come trasmettitore un PSG formato da un polarizzatore lineare e da una lamina  $\lambda/4$  e come ricevitore un PSA costituita da un polarimetro di Stokes a quattro canali è possibile investigare le caratteristiche di polarizzazione del canale. Infine, verrà presentato un possibile controllo in retroazione sugli stati inviati al fine di compensare le modifiche di polarizzazione introdotte dal canale.

#### 10.2 Modello delle perdite per il canale di *Satellite Laser Ranging*

Il modello matematico comunemente utilizzato per analizzare e stimare le prestazioni di un canale di *Satellite Laser Ranging* è basato sulla *Radar Link Equation* proposta da Degnan [6]. Attraverso questa relazione classica è possibile stimare il flusso medio di fotoni rivelati

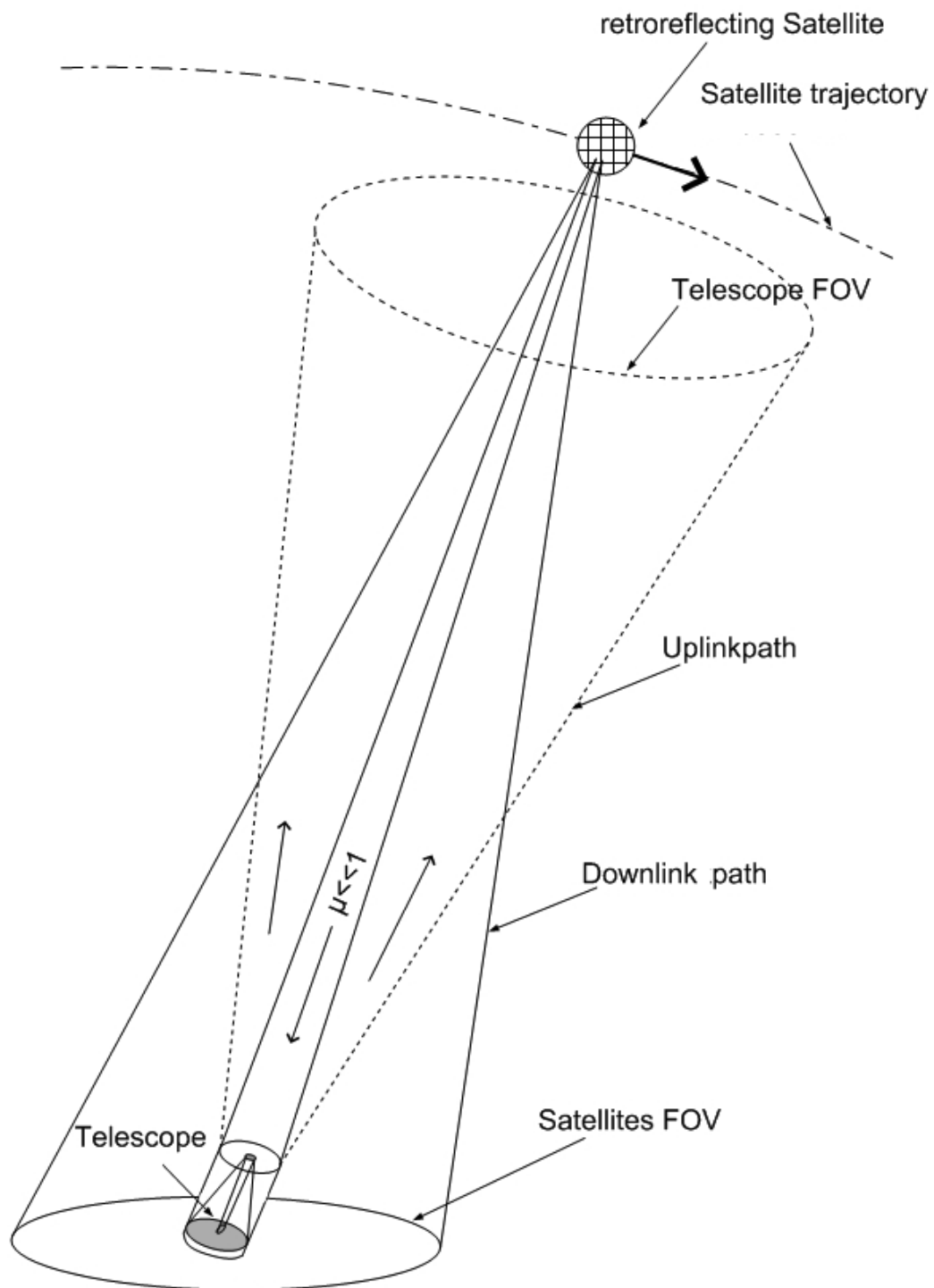


Figura 10.1: Schema di un sistema di *Satellite Laser Ranging*

dal ricevitore:

(10.1)

nella quale si ha che:

- $\eta_q$  è l'efficienza quantica del rivelatore;
- $E_T$  è l'energia dell'impulso laser;
- $\lambda$  è la lunghezza d'onda del laser;
- $h$  è la costante di Planck;
- $c$  è la velocità della luce;
- $\eta_t$  è l'efficienza ottica in trasmissione;
- $G_t$  è il guadagno del trasmettitore;
- $\sigma$  è la sezione d'urto (cross-section) ottica del satellite;
- $R$  è la distanza tra il satellite e la stazione terrestre;
- $A_r$  è l'area efficace dell'apertura del telescopio;
- $\eta_r$  è l'efficienza delle ottiche in ricezione;
- $T_a$  è la trasmittività dell'atmosfera;
- $T_c$  è la trasmittività degli strati nuvolosi.

La sezione d'urto del satellite è uno dei principali parametri di cui tener conto, questa è correlata alla geometria e alle proprietà dei *corner cube* installati sul satellite. Per un retroriflettore singolo, con luce in incidenza normale, si ha che la massima sezione d'urto è definita come:

$$\sigma_{cc} = \rho A_{cc} \left( \frac{4\pi}{\Omega} \right) \quad (10.2)$$

dove

- $\rho$  è la riflettività del corner cube;
- $A_{cc}$  è l'area illuminata sul corner cube;
- $\Omega$  è l'angolo solido efficace occupato dal pattern di diffrazione in campo lontano del retroriflettore.

Per una apertura circolare la cross section diventa:

$$\sigma(x) = \sigma_{cc} \left( \frac{2J_1(x)}{x} \right)^2 \quad (10.3)$$

nella quale:

$$x = kR_{cc} \sin(\theta) \quad (10.4)$$

e  $R_{cc}$  e  $\theta$  sono rispettivamente il raggio dell'area illuminata del corner cube e l'angolo rispetto alla normale alla faccia del corner cube.  $J_1$  è la funzione di Bessel del primo ordine. La distanza tra il satellite e la stazione terrestre può essere calcolata come:

$$R = -(R_E + h_t) \cos \theta_{ZEN} + \sqrt{(R_E + h_t)^2 \cos^2 \theta_{ZEN} + 2R_E(h_s - h_t) + h_s^2 - h_t^2} \quad (10.5)$$

dove:

- $R_E$  è il raggio terrestre;
- $h_t$  è l'altitudine della stazione terrestre rispetto al livello del mare;
- $h_s$  è l'altitudine del satellite rispetto al livello del mare;
- $\theta_{ZEN}$  è l'angolo di zenith del satellite osservato dalla stazione terrestre.

Il guadagno in trasmissione per un laser a mode-locking (il più utilizzato nei moderni sistemi di SLR) è dato da:

$$G_t(\theta) = \frac{8}{\theta_t^2} e^{-2\left(\frac{\theta}{\theta_t}\right)^2} \quad (10.6)$$

nella quale  $\theta_t$  è la metà dell'angolo di divergenza in campo lontano tra il massimo di intensità del fascio  $I_f$  e l'intensità  $I/I_f = 1/e^2$ . L'angolo  $\theta$  rappresenta invece l'angolo di errore di puntamento del fascio.

### 10.3 Rapporto segnale rumore (SNR)

Per completare l'analisi del canale si introduce il rapporto segnale rumore (SNR). Questo parametro gioca un ruolo fondamentale nello stabilire la bontà delle misure e quindi dei risultati. Per un ricevitore ottico costituito da APD il rapporto segnale rumore è definito come [11]:

$$SNR = \left( \frac{m_1 - m_0}{\sigma_1 + \sigma_0} \right)^2 \quad (10.7)$$



nella quale  $m_1$  e  $m_0$  sono i valori medi di coppie elettrone-lacuna generate rispettivamente quando l'impulso viene rivelato e quando non viene rivelato mentre  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$  sono le loro varianze. I valori medi sono definiti come:

$$\begin{aligned} m_1 &= (N_{APD} + \lambda_0 T + N_b T)G \\ m_0 &= (\lambda_0 T + N_b T)G \end{aligned} \quad (10.8)$$

dove  $N_{APD}$  sono i fotoni rivelati dall'APD,  $\lambda_0$  sono il numero di coppie che si generano spontaneamente nell'APD e che quindi non sono legate ai fotoni ricevuti,  $N_b$  è il numero di coppie generate dal rumore di fondo,  $G$  è il guadagno medio dell'APD e  $T$  è la durata dell'intervallo di misura. Allo stesso modo le varianze si possono esprimere come:

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= (N_{APD} + \lambda_0 T + N_b T)G_2 + N_A^2 \\ \sigma_0^2 &= (\lambda_0 T + N_b T)G_2 + N_A^2 \end{aligned} \quad (10.9)$$

nella quale  $G_2$  è la varianza del guadagno dell'APD e  $N_A$  è la figura di merito dell'amplificatore. Il guadagno dell'APD e la sua varianza sono legati tra loro attraverso il fattore di eccesso che è definito come:

$$F = \frac{G_2}{G^2} = \gamma G + \left(2 - \frac{1}{G}\right) (1 - \gamma) \quad (10.10)$$

dove  $\gamma$  è il fattore di ionizzazione dell'APD. La figura di merito dell'amplificatore si può esprimere attraverso la sua densità spettrale di rumore  $R_i$  come:

$$N_A = \frac{\sqrt{R_i T}}{e} \quad (10.11)$$

nella quale  $e$  è la carica dell'elettrone.

## 10.4 Specifiche del *Matera Laser Ranging Observatory* (MLRO)

Nella tabelle 10.1 e 10.2 sono rappresentati i parametri principali del sistema di *Satellite Laser Ranging* di Matera che successivamente verranno utilizzati per calcolare l'SNR del canale.

Diametro del telescopio	1.5 m
Energia dell'impulso laser $E_T$	30 mJ
Frequenza di ripetizione dell'impulso laser	10 Hz
Lunghezza d'onda del laser $\lambda$	532 nm
Angolo di divergenza del fascio $\theta_t$	45 $\mu$ rad
Efficienza ottica in trasmissione $\eta_t$	0.75
Efficienza ottica del ricevitore $\eta_r$	0.39 (con il filtro passa-banda)
Altitudine della stazione $h_t$	536.9 m
Area efficace del telescopio $A_r$	1.7662 m <sup>2</sup>

Tabella 10.1: Specifiche principali del sistema

	Min	Max
Trasmittività dell'atmosfera $T_a$	0.14	0.89
Trasmittività degli strati nuvolosi $T_b$	0.31	1
Errore di puntamento del fascio	14.6 $\mu$ rad	32.4 $\mu$ rad
Guadagno del trasmettitore	$1.4 \cdot 10^9$	$3.2 \cdot 10^9$

Tabella 10.2: Specifiche variabili del sistema

## 10.5 Specifiche dei satelliti utilizzati per la misura

Per fare l'analisi completa del canale è necessario conoscere anche le specifiche dei satelliti. Nella tabella 10.3 sono riportate la sezione d'urto e l'altitudine di due satelliti utilizzati nei sistemi SLR.

Satellite	Sezione d'urto $\sigma$ [10 <sup>6</sup> m <sup>2</sup> ]	Altitudine $h_s$ [Km]
Goce	0.7	295
Grace	3.03	487

Tabella 10.3: Parametri dei satelliti

## 10.6 Specifiche del ricevitore

Il sistema di misura considerato utilizza degli APD come ricevitori, nella tabella 10.4 sono presentate le caratteristiche di questi.

Efficienza quantica $\eta_q$	0.7
Guadagno $G$	100
Coefficiente di ionizzazione $\gamma$	0.05
Intervallo di tempo di misura $T$	10 ns
Coppie di buio generate dall'APD $\lambda_0$	$3.12 \cdot 10^8$ coppie/s
Densità spettrale di rumore $R_i$	$10^{-24}$ A <sup>2</sup> /Hz
Coppie generate dal rumore di fondo $N_b$	20 coppie/s

Tabella 10.4: Parametri del ricevitore

## 10.7 Simulazione delle perdite per la stazione di Matera

Attraverso il modello e i dati presentati si possono stimare le proprietà del canale nei due casi reali: stazione di Matera-Goce e stazione di Matera-Grace. Nelle simulazioni si è utilizzata un'area efficace del telescopio che è la metà rispetto a quella presentata nella tabella 10.1 in modo da tener conto delle non idealità del telescopio e della porzione dello specchio primario oscurata dallo specchio secondario. Nella tabella 10.5 sono riportati i casi di massima e minima visibilità. A causa delle ipotesi fatte sul sistema i risultati riportati sono solo una stima approssimativa del caso reale.

Satellite	SNR min [dB]	SNR max [dB]
Goce	25.9	56.1
Grace	23.5	53.8

Tabella 10.5: Risultati della simulazione

## 10.8 Controllo retroazionato della polarizzazione in un canale quantistico

Una caratteristica molto importante dei sistemi di comunicazione quantistica è il mantenimento di polarizzazione. Questa non è, in generale, verificata nei sistemi reali, a causa della non idealità di un canale. E' comunque possibile studiare le proprietà di polarizzazione del canale attraverso l'uso del formalismo delle matrici di Mueller e usare questo per compensare la distorsione del canale. Nella pratica, conoscendo la matrice Mueller del

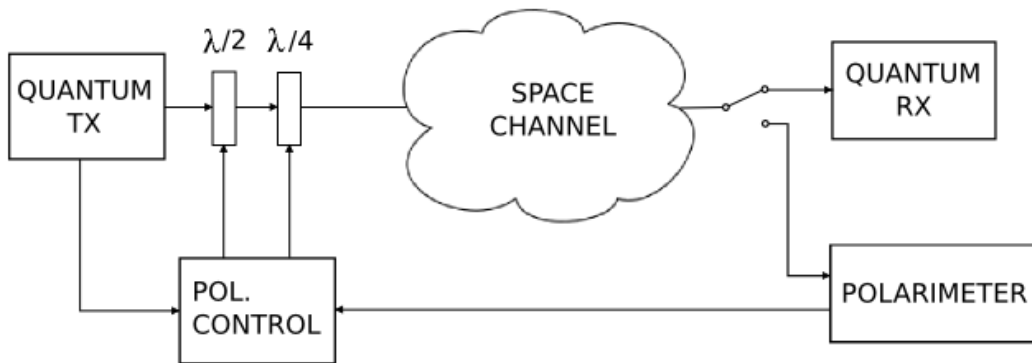


Figura 10.2: Schema di un sistema di *Schema di un sistema di comunicazione quantistico*

canale è possibile preparare uno stato da inviare in modo che questo venga ricevuto nello stato di polarizzazione desiderato. Utilizzando la cascata di una lamina a mezzo d'onda e una lamina quarto d'onda è possibile scegliere un qualsiasi tipo di stato di polarizzazione sulla sfera di Poincaré. In figura 10.2 è rappresentato un esempio di sistema di trasmissione quantistico. Come già visto nei capitoli precedenti nel formalismo Mueller la matrice della lamina a quarto d'onda ruotata è pari a:

$$\mathbf{Q}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta & \sin 2\theta \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ 0 & \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin^2 2\theta & \cos 2\theta \\ 0 & \sin 2\theta & -\cos 2\theta & 0 \end{bmatrix} \quad (10.12)$$

è la matrice della lamina a mezz'onda è uguale a:

$$\mathbf{H}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 4\theta & \sin 4\theta & 0 \\ 0 & \sin 4\theta & -\cos 4\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (10.13)$$

Considerando un sistema reale, si può pensare di partire da uno stato di polarizzazione lineare verticale e scegliendo gli angoli appropriati di rotazione delle lamine, inviare lo stato desiderato. L'equazione che rappresenta il sistema di trasmissione-ricezione può essere scritta come:

$$S = \mathbf{M}\mathbf{Q}(\theta_{\mathbf{Q}})\mathbf{H}(\theta_{\mathbf{H}})V \quad (10.14)$$

dove  $V$  è il vettore di Stokes dello stato di polarizzazione lineare verticale,  $S$  è il vettore di Stokes dello stato ricevuto e  $\mathbf{M}$  è la matrice di Mueller del canale. Un modo semplice per trovare i due angoli di rotazione delle lamine è quello di minimizzare la norma della differenza tra lo stato da inviare e lo stato che si desidera ricevere:

$$(\theta_{\mathbf{Q}}, \theta_{\mathbf{H}}) = \min_{\theta_{\mathbf{Q}}, \theta_{\mathbf{H}}} \| S - \mathbf{M}\mathbf{Q}(\theta_{\mathbf{Q}})\mathbf{H}(\theta_{\mathbf{H}})V \|_F \quad (10.15)$$

In questo maniera, conoscendo la matrice di Mueller del canale è possibile pre-compensare eventuali effetti di rotazione della polarizzazione introdotti dal canale. In un tipico sistema di trasmissione il test del canale e lo scambio dei dati avvengono attraverso lo stesso mezzo, ciò implica che la misura della matrice Mueller non deve interferire con la trasmissione delle informazioni. Perché questo avvenga si possono adottare due possibili soluzioni: il *time-multiplexing* e il *wavelength-multiplexing* proposti da [4].

Con il sistema appena proposto è quindi possibile prevedere l'evoluzione del canale tempo-variante e compensare queste attraverso un controllo in retroazione.



## Conclusioni

---

Un problema aperto sulle comunicazioni quantistiche nello Spazio è la capacità del canale di mantenere le caratteristiche di polarizzazione del segnale trasmesso. Misurando la matrice di Mueller del canale è possibile ricavare tutte le informazioni sulla polarizzazione del sistema trasmissivo formato dal telescopio utilizzato come trasmettitore e ricevitore, dal collegamento ottico in spazio libero e da un retroriflettore montato su un satellite. A questo scopo è stato sviluppato il polarimetro presentato in questo lavoro di tesi, il cui obiettivo è quello di misurare la matrice di Mueller di un canale di *Laser Ranging*. In particolare il polarimetro è stato progettato per essere inserito nel sistema di *Satellite Laser Ranging* dell'osservatorio di Matera.

L'analisi si è basata inizialmente sugli aspetti formali della polarizzazione e della matrice di Mueller. Sono stati quindi studiati i principali modelli di polarimetri utilizzati comunemente per misurare la matrice di Mueller di campioni sconosciuti. Essendo le caratteristiche di polarizzazione del canale quantistico tempovarianti si è scelto di sviluppare un polarimetro di Stokes a quattro canali in maniera tale da misurare il più rapidamente possibile la matrice di Mueller senza alterare troppo l'informazione ricevuta.

Nella misura della matrice di Mueller il rumore va accuratamente analizzato e il più possibile mitigato in quanto può portare a risultati fisicamente non accettabili. Per evitare questo si è studiata l'incidenza del rumore nella matrice di Mueller al variare degli stati di polarizzazione generati. Attraverso questa analisi è stato possibile ricavare alcune basi di stati per le quali si ha una migliore misura della matrice di Mueller. Si sono studiati e

simulati dei metodi che riescono ad ottenere delle matrici fisicamente accettabili a partire da matrici ottenute con il metodo classico dell'inversione, che potenzialmente non soddisfa i criteri di fisicità

Nel lavoro di analisi ci si è concentrati anche sul calcolo delle prestazioni del canale quantistico in termini di rapporto tra il segnale ricevuto e il rumore. Sono state effettuate diverse simulazioni e stime del *Link Budget* del canale trasmissivo in modo da stabilire le condizioni di operatività del polarimetro. Per la progettazione della parte ottica del polarimetro sono stati effettuati dei test e delle simulazioni all'osservatorio di Matera per stabilire le caratteristiche del fascio ottico trasmesso e ricevuto dal canale. Attraverso questi dati e alle analisi precedenti è stato possibile fare il disegno ottico del sistema e scegliere i componenti ottici più appropriati per il polarimetro.

La parte principale di questo lavoro di tesi è stata la costruzione la calibrazione dello strumento e la verifica del corretto funzionamento di questo. In particolare è stata ricavata la matrice di calibrazione del polarimetro attraverso la quale è stato possibile compensare le non idealità dei componenti che formano lo strumento. Per analizzare le prestazioni si è dapprima studiato il comportamento del polarimetro andando a misurare degli stati di polarizzazione noti a priori. Da questo test è emerso che l'errore introdotto dal polarimetro sulle misure è inferiore al 4%. Nella comunicazione degli stati quantici si ammette un errore, che influenza la comunicazione. Allo stato attuale - pionieristico - delle Q-Comm spaziali, errori sotto il 10 % sono da considerarsi accettabili.

L'efficienza del polarimetro nel misurare gli stati può essere ulteriormente migliorata attraverso l'utilizzo di fotodiodi più sensibili rispetto a quelli utilizzati, come ad esempio dei fotodiodi a valanga (APD). Anche la calibrazione del polarimetro può essere ulteriormente migliorata utilizzando un PSG con maggiore precisione sulla scelta degli stati e aumentando il numero delle misure di taratura.

Questo lavoro di tesi è stato motivato dallo stimolo a contribuire al miglioramento delle comunicazioni quantistiche (QC). Queste rappresentano la nuova frontiera dello scambio di informazioni, conseguente all'aver introdotto i principi della Meccanica Quantistica nei sistemi di trasmissione classici. In particolare lo scambio di chiavi crittografiche attraverso QC punta ad essere un valido sostituto della crittografia classica. Infatti, con l'avvento dei calcolatori quantistici, i sistemi di crittografia attuali diventeranno facilmente violabili. In prospettiva, ulteriori sviluppi della Q-Comm spaziale saranno basati sulla distribuzione



degli stati quantistici della materia grazie alla proprietà di condivisione dell'entanglement.



---

## Bibliografia

---

- [1] Ursin R. et al. *Entanglement-based quantum communication over 144 km*. Nature Phys. 3 481 (2007)
- [2] Villoresi P. et al. *Experimental verification of the feasibility of a quantum channel between space and earth*. New J. Phys. 10 033038, (2008). IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron. 9 1541, (2003).
- [3] P. Villoresi et al. *Space-to-ground quantum communication using an optical ground station: a feasibility study*. Quantum Communications and Quantum Imaging II Proc. SPIE 5551 113 (2004). arXiv:quant-ph/0408067v1.
- [4] C. Bonato, A. Tomaello, V. D. Deppo, G. Naletto, and P. Villoresi. *Feasibility of satellite quantum key distribution*. New J. Phys. 11, 045017, (2009).
- [5] Ursin R. et al. *Space-quest: experiments with quantum entanglement in space*. Int. Aeronautical Congress Proc. A2.1.3(2008). arXiv:0806.0945.
- [6] John J. Degnan. *Millimeter accuracy satellite laser ranging: A review*. Contributions of Space Geodesy to Geodynamics Technology. Smith, D.E. and Turcotte, D.L., Editors, AGU Geodynamics Series 25 133, (1993).
- [7] A. Aiello, G. Puentes, D. Voigt, and J. P. Woerdman. *Maximum-likelihood estimation of Mueller matrices*. Optics letters 31 6, (2006).
- [8] Dennis Goldstein, *Polarized Light*. Marcel Dekker, second edition, 2003.
- [9] Jawad Elsayed Ahmad and Yoshitane Takakura. *Estimation of physically realizable Mueller matrices from experiments using global constrained optimization*. OPTICS EXPRESS, vol. 16, No. 18, (28 Aug 2008).

- 
- [10] Morio Toyoshima, Hideki Takenaka, Yozo Shoji, Yoshihisa Takayama, Yoshisada Koyama, and Hiroo Kunimori. *Polarization measurements through space-to-ground atmospheric propagation paths by using a highly polarized laser source in space*. Optics express, (23 Nov 2009).
- [11] G. Cariolaro, *Comunicazioni ottiche*. (2006).
- [12] A. Dall'Arche, A. Tomaello, C. Bonato, P. Villoresi. *On the quantum communications between Earth and Space and on the characterization of the space quantum channel*. ICST Beijing, (Nov 2009).
- [13] A. Tomaello, A. Dall'Arche, C. Bonato, P. Villoresi. *On the polarization analysis of optical beams for use in quantum communications between Earth and Space*. PSATS Rome, (4 Feb 2010).
- [14] C. Bonato, P. Villoresi. *Probing the channel properties of the ground-satellite channel*. (Apr 2009)
- [15] F. Le Roy-Brehonnet, B. Le Jeune. *Utilization of Mueller matrix formalism to obtain optical targets depolarization and polarization properties*. Prog. Quant. Electr., Vol. 21, No. 2, (1997)
- [16] A. Aiello, G. Puentes, J. P. Woerdman. *Linear optics and quantum maps*. arXiv:quant-ph/0611179v1, (16 Nov 2006)
- [17] A. Aiello, J. P. Woerdman. *Linear Algebra for Mueller Calculus*. arXiv:math-ph/0412061v3, (16 Nov 2006)
- [18] Timothy C. Ralph, Ping K. Lam. *A bright future for quantum communications*. Nature Photonics, Vol. 3, (Dec 2009)