**Università degli Studi di Padova**

**Dipartimento di Matematica**

Corso di Laurea in Matematica


Tesi di Laurea

# *Gestione ottima dei dividendi con iniezione di capitale, a tempo discreto.*


*Relatrice*: **Giorgia Callegaro**
*Candidato*: **Tomaso Reghelin**
*Matricola*: **1190537**



*Data sessione di laurea 24/02/2022*

*Anno Accademico 2021/2022*

# Indice

# Introduzione

Nel mercato finanziario esistono due tipi di titoli: i titoli primari o sottostanti ed i titoli secondari o derivati. I primi sono titoli presenti nel mercato e per questo hanno già un prezzo determinato dalle leggi del mercato e dalla teoria di non arbitraggio, mentre i secondi, come detto dalla parola stessa, sono strumenti finanziari il cui prezzo deriva dal valore di mercato dei titoli primari o sottostanti. Ogni investitore ha la possibilità di comprare due tipi di titoli derivati: quelli non rischiosi, detti *risk-free*, e quelli rischiosi. I titoli possono dare il diritto di ricevere, alla scadenza definita in questi, la somma versata con in più una remunerazione con interessi (detta dividendo) che può essere più o meno grande in base all'entità del rischio di fallimento del venditore del titolo. Aquistando un titolo *risk-free*, dopo un certo periodo di tempo il guadagno che verrà percepito sarà con certezza una piccola percentuale del denaro che era stato investito; al contrario, acquistando titoli rischiosi il guadagno sarà maggiore rispetto al caso risk-free, ma con probabilità strettamente minore di 1, a causa dell'esistente possibilità di perdita (che ha una certa probabilità maggiore di 0) o che il valore del titolo rimanga invariato (che comporterebbe un guadagno nullo).
Analizzeremo un modello di mercato rischioso, in particolare per il processo di surplus di una compagnia assicuratrice. L'obiettivo è quello di massimizzare il valore di una strategia di dividendi versati dall'assicuratore tenendo conto della possibilità da parte di questo di fare iniezioni di capitale quando necessario. Studieremo il modello nel caso in cui non vengano applicate delle tasse ai dividendi e successivamente quello in cui ci siano delle tasse, osservandone le analogie.
Mostreremo che per il problema di massimizzazione del valore dei dividendi, la strategia ottima da adottare è di tipo barriera, cioè i valori che può assumere la strategia dei dividendi sono limitati dall'alto e/o dal basso. Questo tipo di strategia è utile in ambito finanziario, in quanto serve a limitare il range dei possibili rendimenti (positivi o negativi) ad un intervallo preciso.
Infine come caso particolare di strategia, considereremo quello in cui il premio è di al massimo un'unità di capitale: il premio al rischio è il ritorno in

più (rispetto al tasso senza rischio) che la persona si aspetta dall'investire in una situazione rischiosa. Vedremo che in questo caso la funzione che rappresenta il valore dei dividendi avrà altre proprietà particolari, ma soprattutto riusciremo a trovare la forma esplicita della strategia di dividendi che la compagnia di assicurazione dovrà adottare istante per istante. Questa strategia sarà di tipo barriera doppia, e calcoleremo i valori precisi che determineranno gli estremi dell'intervallo di ottimalità.

# Capitolo 1

# Il modello senza tasse

Questo lavoro è tratto dal paper [4].

## 1.1 Descrizione del problema

Si considera uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ composto da un insieme $\Omega$, che racchiude i risultati possibili di un determinato esperimento aleatorio, una $\sigma - algebra$ $\mathcal{F}$ ed una misura di probabilità $P$. Sia $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d (indipendenti e identicamente distribuite), dove $Y_i$ descrive il profitto di un portafoglio di assicurazione nel periodo da $t_{i-1}$ a $t_i$. Lavoriamo in un contesto in cui l'assicuratore deve decidere come usare il capitale al fine di massimizzare i dividendi su un orizzonte di tempo infinito. I dividendi sono quella parte di utile che la società dà ai suoi azionisti periodicamente.
Tuttavia, studiare questo problema di ottimizzazione tenendo conto solo dei dividendi non sarebbe di alcun interesse, in quanto la strategia ottima sarebbe banalmente pagare tutto il capitale in dividendi all'istante finale. Uno strumento introdotto da De Finetti [2] per risolvere questo problema del momento del pagamento fu quello del valore atteso dei dividendi *scontati* (fino al fallimento). Il *tasso di sconto* deve essere visto come un parametro di preferenza, nel senso che, per esempio a causa dell'impazienza dell'investitore o dell'inflazione che subirebbe il capitale dell'assicuratore, ricevere/pagare i dividendi oggi è meglio che farlo domani (vedi anche [5]).
C'è però un ulteriore difetto nell'usare solo i dividendi scontati: il deficit dell'assicuratore non è tenuto in considerazione; questo comporterebbe che la strategia ottima sarebbe continuare a pagare dividendi, non essendo vincolato (l'assicuratore) in nessun modo dal fatto di mantenere un capitale positivo. Questa fu la ragione per cui Kulenko e Schmidli [1] introdussero

le *iniezioni di capitale*. All'assicuratore non è permesso fallire e deve fare un'iniezione ogni qualvolta il surplus diventi negativo.

Allora il surplus post−iniezione e pre−dividendo al tempo $n$, $X_n$, sarà dato da:

$$X_n = X_{n-1} - U_{n-1} + Y_n + L_n, \quad X_0 = x,$$

dove $x$ è il capitale iniziale, $U_{n-1}$ il dividendo al tempo $n-1$, $L_n$ il capitale iniettato al tempo $n$ e $Y_n$ la variabile aleatoria che descrive il profitto del portafoglio da $t_{n-1}$ a $t_n$. Questo perchè il surplus che possiede adesso l'assicuratore al tempo $n$ è la somma di quello che aveva prima all' istante $n-1$ con il profitto che ha fatto durante il periodo da $n-1$ a $n$, a cui si deve aggiungere altro denaro pari a quello che ha iniettato e sottrarne tanto quanto ne ha pagato in dividendi. Notiamo quindi che abbiamo tenuto conto dei dividendi al tempo $n-1$ e da tutto quello che è successo prima, tramite $X_{n-1}$, e che quindi il surplus dipende anche dalle scelte prese nel periodo precedente.
Avendo definito $X_n$ per ricorsione, possiamo esprimerlo in funzione del capitale iniziale $x$ come $X_n = x + \sum_{k=1}^{n}(Y_k - U_{k-1} + L_k)$. Allora

$$\sum_{k=1}^{n} U_{k-1} = x - X_n + \sum_{k=1}^{n}(Y_k + L_k),$$

e quindi abbiamo trovato la relazione presente tra la strategia dei dividendi e il capitale iniziale.
Affinchè il problema di ottimizzazione della strategia dei dividendi sia ben definito e non triviale, assumiamo che $P[Y < 0] > 0$ e $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$, dove $Y$ è la variabile aleatoria che modellizza il profitto del portafoglio in un periodo, e ha legge $p_k$. Denotiamo con $p_k := P[Y = k]$ per $k \in \mathbb{Z}$, dove $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$. L' informazione disponibile disponibile al tempo $n$ è data dalla filtrazione naturale di $\{Y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. I processi $U$ e $L$ sono adattati a $\mathcal{F}$, ossia:

**Definizione 1.1.** *Dato $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_{t_k})_{t_k\in T}, P)$ un processo stocastico a tempo discreto $X_k$ si dice adattato a $(\mathcal{F}_{t_k})_{t_k\in T}$ se ogni $X_{t_k}$ è $\mathcal{F}_{t_k}-$ misurabile.*

Dal momento che non è vantaggioso pagare i dividendi e fare un'iniezione di capitale allo stesso tempo in quanto ci sono dei costi per le iniezioni che sono più alti di quelli dei dividendi, consideriamo solo dividendi tali che $X_n - U_n \geqslant 0$. Il processo di iniezione di capitale, cioè il processo $L$, che per stressarne la dipendenza da $U$ denoteremo con $L^U$, sarà quindi il minimo processo che mantiene il surplus positivo, cioè $L_n^U$ è dato da

$$L_n^U = (X_{n-1} - U_{n-1} + Y_n)^-,$$

dove $a^- := max\{-a, 0\}$ e $a^+ := max\{a, 0\}$ denotano rispettivamente la parte negativa e positiva di $a$ (ricordiamo che vale $a^+ + a^- = |a|$ e $a^+ - a^- = a$).

**Osservazione 1.1.** *In questa sezione siamo riusciti a capire in modo esplicito la dipendenza di $L$ da $U$, il che significa che le iniezioni che faccio dipendono da quanto ho pagato in dividendi negli istanti precedenti.*

## 1.2 La funzione valore

Definiamo innanzitutto il valore di una strategia di dividendi, chiamata anche funzione obiettivo; questa dipenderà da $U$ ma anche da $L$, in quanto il compito dell'assicuratore riguarda anche scegliere le quantità delle iniezioni, intervenendo negli istanti $t_k$, $k = 1, \dots, n$.

**Definizione 1.2.** *Il valore di una strategia di dividendi $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ con ricchezza iniziale $x$ ad orizzonte infinito è:*

$$V^{U,L}(x) = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \zeta^k (U_k - \eta L_k)\right], \tag{1.1}$$

*dove $\eta > 1$ è un fattore di penalità (ci sono costi amministrativi sia per i dividendi che per le iniezioni, ma quelli per le iniezioni sono più alti, quindi $\eta$ è il rapporto tra i costi per le iniezioni e quelli per i dividendi) e la costante $\zeta \in (0, 1)$ è il fattore di preferenza (pagare dividendi oggi è meglio di farlo domani).*

Notiamo che se scegliessimo $\eta = 1$ avremmo $X_n - U_n \equiv 0$ come strategia ottima, cioè ogni surplus verrebbe pagato come dividendi. Denotiamo con $\mathbb{U}$ l'insieme delle strategie ammissibili $U, L$, dove una strategia si dice ammissibile se $P[X_n^{U,L} \geq 0 \,\text{per ogni}\, n] = 1$, con $X_n^{U,L}$ il processo di surplus $X_n$ al tempo $n$ dell'assicuratore che ha adottato la strategia $U, L$. Cerchiamo ora la funzione valore, che è il massimo delle funzioni obiettivo di strategie ammissibili. Osserviamo che in realtà fare delle iniezioni prima che sia necessario non può di sicuro essere ottimale (poichè $\eta > 1$), quindi queste dipendono dalla scelta dei dividendi. In particolare, come abbiamo visto sopra, la relazione tra le due è $L_n^U = (X_{n-1} - U_{n-1} + Y_n)^-$. Questo implica che nella ricerca dell'estremo superiore ci possiamo limitare alle strategie di dividendi $U$; detto in simboli:

$$V(x) = \sup_{U,L\in\mathbb{U}} V^{U,L}(x) = \sup_{U\in\mathbb{U}} V^{U,L^U}(x).$$

D'ora in poi per comodità useremo $V^U(x)$ al posto di $V^{U,L}(x)$ quando non ci saranno possibili ambiguità. Infine, quello a cui siamo interessati è la strategia ottima $\{U_k^*\}$, tale per cui $V(x) = V^{U^*}(x)$, cioè quella strategia che ha il valore maggiore tra i valori di tutte le altre strategie ammissibili.

**Lemma 1.1.** *Sia* $W_n := \sum_{k=0}^{n}(U_k - \eta L_k)$ *il valore della strategia dei dividendi accumulati al periodo* $n$. *Allora:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \zeta^k (U_k - \eta L_k) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}(1-\zeta)\zeta^n(U_k - \eta L_k) = (1-\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\zeta^n W_n. \quad (1.2)$$

*In particolare questo implica che non può essere ottimale iniettare capitale prima che sia necessario in quanto le iniezioni fatte più avanti sono scontate di più (questo si vede dal fatto che la strategia dei dividendi fino al tempo* $n$ *è minore di quella che si ha aspettando "all' infinito").*

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \zeta^k (U_k - \eta L_k) &= \sum_{k=0}^{\infty}\left[(1 - 1 + \zeta^k)(U_k - \eta L_k)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left[U_k - \eta L_k - (1-\zeta)(U_k - \eta L_k)\frac{1-\zeta^k}{1-\zeta}\right] \\
&\text{e dato che } \quad \sum_{n=0}^{k-1}\zeta^n = \frac{1-\zeta^{(k-1)+1}}{1-\zeta} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left[(1-\zeta)\frac{1}{1-\zeta}(U_k - \eta L_k) - \sum_{n=0}^{k-1}(1-\zeta)\zeta^n(U_k - \eta L_k)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(1-\zeta)\zeta^n(U_k - \eta L_k) - \sum_{n=0}^{k-1}(1-\zeta)\zeta^n(U_k - \eta L_k)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}(1-\zeta)\zeta^n(U_k - \eta L_k) = (1-\zeta)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\zeta^n(U_k - \eta L_k) \\
&= (1-\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\zeta^n(U_k - \eta L_k) = (1-\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\zeta^n W_n,
\end{aligned}$$

usando la proprietà della serie geometrica $\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ , con $r \in (0,1)$, dove in questo caso $r = \zeta$ che sappiamo essere un valore appartenente all'intervallo $(0,1)$, e l'equivalenza

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} a_{i,j}.$$

Ci si convince della validità di questa uguaglianza con la seguente tabella formata dai termini delle doppie sommatorie:

$$\begin{array}{ccccc} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0n} \\ & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{array}$$

Ogni riga "perde" un elemento in quanto l'indice interno inizia da un valore che cresce con l'indice esterno. Quindi la seconda riga inizia da 1 ($j = 1$), la terza da 2 e così via, l' ultima da $n$ e quindi contiene un solo elemento. Si osserva poi che la doppia sommatoria di sinistra corrisponde alla somma degli elementi "per riga", mantre quella di destra corrisponde alla loro somma "per colonna".

□

Procediamo dimostrando alcune utili proprietà della funzione valore $V(x)$ come per esempio la concavità, che verrà usata più avanti per dimostrare che la strategia ottima per il problema della gestione dei dividendi è di tipo barriera (Teorema 1.1).

**Osservazione 1.2.** *La funzione valore, per come l'abbiamo definita, può dare un'idea della stabilità di una strategia: infatti, più grande è il valore assunto da questa, più dividendi vuol dire che sono stati pagati. Se una strategia comporta il pagamento di molti dividendi allora significa che il surplus dell'assicuratore è grande, quindi lui si trova in una situazione di stabilità nel senso che rischia meno di fallire rispetto al caso in cui il suo surplus sia piccolo.*

**Lemma 1.2.** *La funzione valore $V(x)$ gode delle seguenti proprietà:*

*(i)*

$$x + \frac{\zeta(\mathbb{E}[Y^+] - \eta\mathbb{E}[Y^-])}{1-\zeta} \leq V(x) \leq x + \frac{\zeta\mathbb{E}[Y^+]}{1-\zeta}. \tag{1.3}$$

*(ii)* *$V(x)$ è strettamente crescente e concava; inoltre $V(x) - V(y) \geq x - y$ per ogni $x \geq y \geq 0$.*

*Dimostrazione.* (i) Per il limite superiore consideriamo la pseudo-strategia $\overline{U}$ con $\overline{U}_0 = x$ e $\overline{U}_n = Y_n^+$ con $n \geq 1$ e $\overline{L}_n = 0$. Essendo il surplus $\overline{X}_n = X_{n-1} - \overline{U}_{n-1} + Y_n + \overline{L}_n$ minore o uguale a zero ho che con questa strategia pago di più in dividendi rispetto a quanto non paghi con qualsiasi strategia, cioè abbiamo che per ogni strategia $\overline{W}_n \geq W_n$, dove $W_n = \sum_{k=0}^{n}(U_k - \eta L_k)$. Dall' uguaglianza (1.2) otteniamo:

$$\begin{aligned}
V^U(x) &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\zeta^n(U_n - \eta L_n^U)\right] \leq \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\zeta^n(\overline{U}_n - \eta L_n^{\overline{U}})\right] \\
&= x + \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\zeta^n Y_n^+\right] = x + \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}[\zeta^n]\mathbb{E}[Y_n^+] = x + \mathbb{E}[Y^+]\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}[\zeta^n] \\
&= x + \mathbb{E}[Y^+]\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\zeta^n\right] = x + \mathbb{E}[Y^+]\mathbb{E}\left[-1 + \frac{1}{1-\zeta}\right] \\
&= x + \mathbb{E}[Y^+]\mathbb{E}\left[\frac{\zeta}{1-\zeta}\right] = x + \frac{\zeta\mathbb{E}[Y^+]}{1-\zeta}.
\end{aligned}$$

Valendo la disuguaglianza $V^U(x) \leq x + \frac{\zeta\mathbb{E}[Y^+]}{1-\zeta}$ per ogni strategia $U$ allora vale anche per quella maggiore, cioè $V(x)$.
Cerchiamo ora il limite inferiore; cambiando la strategia di iniezione ponendo $L_n^{\overline{U}} = Y_n^-$ otteniamo una strategia ammissibile. Facendo conti analoghi a quelli fatti sopra otteniamo il suo valore

$$V(x) \geq V^{\overline{U}}(x) = x + \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\zeta^n(Y_n^+ - \eta Y_n^-)\right] = x + \frac{\zeta(\mathbb{E}[Y^+] - \eta\mathbb{E}[Y^-])}{1-\zeta},$$

che è proprio il valore del limite inferiore.

(ii) Per la strategia $U$ con capitale iniziale $y$ definiamone una $U'$ con capitale iniziale $x$, con $x \geq y$, come $U_0' = U_0 + x - y$ e $U_n' = U_n$ per $n \geq 1$ e $L_n^U = L_n^{U'}$ per ogni $n$. Allora per $n \geq 1$ ho $X_n = X_n'$. Questo implica $V(x) \geq V^{U'}(x) = V^U(y) + x - y$ e si conclude prendendo l' estremo superiore di $V^U(y)$, che è $V(y)$. Mostriamo ora la concavità. Siano $x, y \in \mathbb{R}$ e $\alpha, \beta \in (0,1)$ con $\alpha + \beta = 1$. Consideriamo le strategie $(U^x, L^x)$ e $(U^y, L^y)$ per i capitali iniziali $x$ e $y$. Definiamo $\tilde{U} := \alpha U_k^x + \beta U_k^y$ e $\tilde{L} := \alpha L_k^x + \beta L_k^y$. Avendo definito $X_n$ per ricorsione possiamo esplicitarlo in funzione del capitale iniziale $x$ come $X_n = x + \sum_{k=1}^{n}(Y_k - U_{k-1} + L_k)$. Allora $\sum_{k=1}^{n} U_{k-1} = x - X_n + \sum_{k=1}^{n}(Y_k + L_k)$, quindi possiamo definire in ogni istante la strategia $U_k = \frac{1}{n}x - \frac{1}{n}X_n + Y_{k+1} + L_{k+1}$. Notiamo che:

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_k &= \alpha\frac{1}{n}x + \alpha(-\frac{1}{n}X_n + Y_{k+1} + L_{k+1}) + \beta\frac{1}{n}y + \beta(-\frac{1}{n}X_n + Y_{k+1} + L_{k+1}) \\
&= \alpha\frac{1}{n}x + \beta\frac{1}{n}y + (\alpha+\beta)(-\frac{1}{n}X_n + Y_{k+1} + L_{k+1}) \\
&= \alpha\frac{1}{n}x + \beta\frac{1}{n}y - \frac{1}{n}X_n + Y_{k+1} + L_{k+1} = U_k^{\alpha x+\beta y},
\end{aligned}$$

ma in generale $\tilde{L}_k \neq L_k^{\alpha x+\beta y}$ (in quanto $L_k$ è la parte negativa di una funzione, quindi l'uguaglianza ci sarà solo in alcuni casi). In generale però $L_k^{\alpha x+\beta y} \leq \alpha L_k^x + \beta L_k^y$. Infatti, se fosse il contrario avrei che il valore della strategia $(\tilde{U}, L^{\alpha x+\beta y})$ sarebbe strettamente minore di quello di $(\tilde{U}, \tilde{L})$, essendoci $-L_k$ nella definizione del valore. Questo significherebbe che $V$ sarebbe convessa in $L$, ma sapendo che $V$ è concava in $L$ a causa del fattore $\zeta^k$, con $\zeta \in (0,1)$, troviamo un assurdo, quindi deve essere $L_k^{\alpha x+\beta y} \leq \alpha L_k^x + \beta L_k^y$. Segue che, avendo definito la funzione valore di una strategia $(U, L)$ come

$$V^{U,L}(x) = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \zeta^k (U_k - \eta L_k)\right],$$

vale

$$\begin{aligned}
V(\alpha x+\beta y) \geq V^{U^{\alpha x+\beta y}, L^{\alpha x+\beta y}}(\alpha x+\beta y) &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \zeta^k (U^{\alpha x+\beta y} - \eta L^{\alpha x+\beta y})\right] \\
&\geq \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \zeta^k (\tilde{U} - \eta\tilde{L})\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \zeta^k (\alpha U_k^x + \beta U_k^y - \eta(\alpha L_k^x + \beta L_k^y))\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\alpha\sum_{k=0}^{\infty} \zeta^k (U_k^x - \eta L_k^x) + \beta\sum_{k=0}^{\infty} \zeta^k (U_k^y - \eta L_k^y)\right] \\
&= \alpha V^{U^x}(x) + \beta V^{U^y}(y).
\end{aligned}$$

Prendendo l' estremo superiore di tutte le strategie ammissibili $U$ otteniamo:

$$V(\alpha x+\beta y) \geq \alpha \sup_{U^x \in \mathbb{U}_x} V^{U^x}(x) + \beta \sup_{U^y \in \mathbb{U}_y} V^{U^y}(y) = \alpha V(x) + \beta V(y)$$

dove $\mathbb{U}_x$ e $\mathbb{U}_y$ sono gli insiemi delle strategie ammissibili con capitali iniziali $x$ e $y$ rispettivamente.

□

**Osservazione 1.3.** *Il fatto che la funzione valore possa assumere solo certi valori in un intervallo significa che scegliere una strategia di dividendi ottima implica limitare il rischio di fallimento dell'assicuratore.*

Nella seguente proposizione definiamo la funzione valore nel caso di $x$ negativi come $V(x) = V(0) + \eta x$ per $x < 0$ e sia $Y$ la variabile aleatoria con la stessa distribuzione delle $\{Y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

**Proposizione 1.1.** *La funzione valore corrispondente alla ricchezza $x$ soddisfa l'equazione di Bellman*

$$\begin{aligned} V = V(x) &= \sup_{u\in[0,x]} \{u + \zeta\mathbb{E}[V(x-u+Y)]\} \\ &= \sup_{u\in[0,x]} \left\{ u + \zeta\left( \sum_{k=\lfloor u-x\rfloor}^{\infty} p_k V(x-u+k) + \sum_{k=-\infty}^{\lfloor u-x-1\rfloor} p_k[V(0)+\eta(x+k-u)] \right) \right\}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

*Dimostrazione.* Sia $V_T^U(x) := \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{T} \zeta^k (U_k - \eta L_k)\right]$ la funzione valore di $x$ sotto la strategia $U$ al tempo finito $T$ e mostriamo che vale
$V(x) = \sup_{u\in[0,x]} \left\{u + \zeta\mathbb{E}[V(x-u+Y)]\right\}$. Sia $U$ una strategia arbitraria ammissibile. Con $X_1 = x - U_0 + Y_1$ e $L_0 = 0$ ho

$$\begin{aligned} V_T^U(x) &= \mathbb{E}[U_0 - \eta L_0] + \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{T-1} \zeta^{k+1}(U_{k+1} - \eta L_{k+1})\right] \\ &= \mathbb{E}[U_0] + \zeta\mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{T-1} \zeta^{k}(U_{k+1} - \eta L_{k+1})\right]. \end{aligned}$$

Chiamiamo $\tilde{U_k} = U_{k+1}, \tilde{L_k} = L_{k+1}$, $\tilde{Y_k} = Y_{k+1}$ e $\tilde{X_k} = X_{k+1}$ , così $\tilde{X}_{k+1} = \tilde{X_k} - \tilde{U_k} + \tilde{Y}_{k+1} + \tilde{L}_{k+1}$ e

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{T-1} \zeta^{k}(U_{k+1} - \eta L_{k+1})\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{T-1} \zeta^{k}(\tilde{U_k} - \eta \tilde{L_k})\right] &= V_{T-1}^{\tilde{U}}(\tilde{x}) \\ &= V_{T-1}^{\tilde{U}}(X_1) \le V_{T-1}(X_1), \end{aligned}$$

essendo $V_{T-1}(X_1) = \sup_{U,L} V_{T-1}^{U,L}(X_1)$. Quindi

$$\begin{aligned} V_T^U(x) &\le \mathbb{E}[U_0 + \zeta V_{T-1}(X_1)] = \mathbb{E}[U_0 + \zeta V_{T-1}(x - U_0 + Y_1)] \\ &\le \sup_{u[0,x]} \left\{u + \zeta\mathbb{E}[V_{T-1}(x-u+Y)]\right\}, \end{aligned}$$

dove il primo dividendo $U_0 \leq x = X_0$ perchè, non essendo vantaggioso pagare i dividendi e fare un'iniezione allo stesso tempo, considero solo i dividendi tali per cui $X_n - U_n \geq 0$.

Dato che non ho esplicitamente usato la finitezza di $T$, posso passare al limite:

$$\lim_{T\to\infty} V_T^U(x) = \lim_{T\to\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{T} \zeta^k (U_k - \eta L_k)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \zeta^k (U_k - \eta L_k)\right] = V^U(x).$$

Allo stesso modo $\lim_{T\to\infty} V_{T-1}(x) = V(x)$. Infine, poichè $U$ è arbitrario ho

$$V(x) \leq \sup_{u[0,x]} \left\{u + \zeta\mathbb{E}[V(x-u+Y)]\right\}.$$

Fisso ora $\epsilon > 0$ e considero la strategia $\tilde{U}$ tale che , condizionata a $X_1 = x - u + Y_1$ , $V_{T-1}(X_1) < V_{T-1}^{\tilde{U}}(X_1) + \epsilon$. Sia $U_0 = u$ e $U_n = \tilde{U}_{n-1}$. Allora

$$u + \zeta\mathbb{E}[V_{T-1}(x-u+Y_1)] < u + \zeta\mathbb{E}[V_{T-1}^{\tilde{U}}(X_1)] + \epsilon = V_T^U(x) + \epsilon \leq V_T(x) + \epsilon$$

Quindi

$$\sup_{u\in[0,x]} \left\{u + \zeta\mathbb{E}[V_{T-1}(x-u+Y)]\right\} \leq V_T(x) + \epsilon$$

e concludo essendo $\epsilon$ arbitrario e passando al limite per $T \to \infty$ come prima. Ho quindi mostrato entrambe le disuguaglianze.
L'altra uguaglianza deriva in modo banale dalla definizione di valor medio.

□

**Osservazione 1.4.** *Nella dimostrazione appena fatta si vede che $u$ può assumere valori solo in un intervallo compatto $[0, x]$. Dal momento che $V(x)$ è concava, la funzione $u \mapsto \mathbb{E}[V(x-u+Y)]$ è concava, quindi continua in $[0, x]$ e quindi, per il teorema di Weierstrass, esiste un $u(x)$ dove $V(x-u+Y)$ assume il massimo. Se esiste più di un valore $u$ in cui $V(x-u+Y)$ raggiunge il massimo, allora dalla concavità deriva che il massimo è raggiunto in tutti gli altri valori compresi nell'intervallo di estremi $[\tilde{u}, \overline{u}]$, dove $\tilde{u}$ è il valore minore in cui viene raggiunto il massimo e $\overline{u}$ il maggiore. Perciò possiamo scegliere $u(x)$ come il più grande valore in cui $V(x-u+Y)$ assume il massimo, ossia la funzione che rappresenta la strategia ottima dei dividendi.*
*Quindi la Proposizione 1.1 ci dice che dobbiamo massimizzare la somma tra i divedendi presenti $u$ e il valore di quelli futuri; se facciamo questo in ogni istante $k \geq 1$, allora troveremo il valore ottimo $V(x)$ della strategia di dividendi.*

## 1.3 La strategia ottima dei dividendi

In questo paragrafo caratterizzeremo la strategia ottima dei dividendi $u(x)$. Innanzitutto, prima di vedere un importante teorema (Teorema 1.1), enunciamo e dimostriamo il seguente risultato, che ci sarà utile per dimostrarne i punti (iii) e (iv).

**Proposizione 1.2.** *Supponiamo $V(x) < \infty$ e che per ogni $x$ esista un $u^*(x)$ che realizza $V(x) = \sup_{u \in [0,x]}\{u + \zeta\mathbb{E}[V(x-u+Y))]\}$. Supponiamo inoltre che*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{U' \in \mathcal{U}} \left[\sum_{k=n}^{\infty} |U_k^{'} - \eta L_k|\zeta^k\right] = 0, \tag{1.5}$$

*dove $X_1 = x - U_0^{'} + Y_1$ e $L_0 = 0$. Sia $U_n = u(X_n)$. Allora $V^U(x) = V(x)$.*

La proposizione dice che se la strategia dei dividendi $U_n$ non soddisfa l' equazione di Bellman allora questa non può essere ottimale, in quanto la funzione valore sarebbe diversa dal valore associato alla strategia $U_n$.

*Dimostrazione.* Mostriamo prima che per ogni strategia $U'$ con valore iniziale $U_0^{'}$ che non realizza $V(x) = \sup_{u\in[0,x]}\{u + \zeta\mathbb{E}[V(x-u+Y)]\}$, esiste una strategia $U^{''}$ con valore iniziale $U_0^{''} = u(x)$ che ha un valore maggiore di quello di $U'$. Scegliamo $\epsilon > 0$; so che per ogni valore iniziale $\tilde{x}$ esiste una strategia $\tilde{U}^{''}$ tale che $V(\tilde{x}) < V^{\tilde{U}^{''}}(\tilde{x}) + \epsilon$. Sia ora $U''$ la strategia con $U_0^{''} = u(x)$ e $U_{n+1}^{''} = \tilde{U}_n^{''}$, dove il capitale iniziale è $\tilde{x} = x - u(x) + Y_1$. Allora, usando il simbolo tilde col significato $\tilde{U}_n = U_{n+1}$ e che il capitale iniziale di $\tilde{U}'$ è $\tilde{x}^{'} = x - U_0^{'} + Y_1$),

$$\begin{aligned}
V^{U^{'}}(x) &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(U_n^{'} - \eta L_n)\zeta^n\right] = \mathbb{E}\left[(U_0^{'} - \eta L_0) + \zeta\sum_{n=0}^{\infty}(U_{n+1}^{'} - \eta L_{n+1})\zeta^n\right] \\
&= \mathbb{E}[U_0^{'}] + \zeta\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[V^{\tilde{U}^{'}}(x - U_0^{'} + Y_1)|U_0^{'}\right]\right] \\
&\le \mathbb{E}[U_0^{'}] + \zeta\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[V(x - U_0^{'} + Y_1)|U_0^{'}\right]\right] \\
&< u(x) + \zeta\mathbb{E}[V(x - u(x) + Y_1)] = V(x) \\
&< u(x) + \zeta\mathbb{E}[V^{\tilde{U}^{''}}(x - u(x) + Y_1)] + \epsilon = V^{U''}(x) + \epsilon.
\end{aligned}$$

Se poi $\epsilon < V(x) - V^{U'}(x)$ allora $V^{U'}(x) < V^{U''}(x)$.
Sia $\mathcal{U}_n$ l' insieme delle strategie $U'$ dove $U_k^{'} = u(X_k)$ per $0 \le k \le n$. Abbiamo appena mostrato che $V(x) = \sup_{U'\in\mathcal{U}_0} V^{U^{'}}(x)$. Ragioniamo ora per induzione su $n$ supponendo che $V(x) = \sup_{U'\in\mathcal{U}_n} V^{U^{'}}(x)$. Prendiamo la strategia $U'$ tale che $U_k^{'} = u(X_k)$ per $k \le n$ e $U_{n+1}^{'}$ non realizza l'equazione:

$V(x) = \sup_{u\in[0,x]}\{u + \zeta\mathbb{E}[V(x-u+Y)]\}$, dove $x = X_{n+1}$. Poniamo infine $\tilde{U}'_k = U'_{n+1+k}$. Ora, applicando lo stesso ragionamento usato per il caso $n = 0$, esiste una strategia $\tilde{U}''$ con $\tilde{U}''_0 = u(X_{n+1})$ tale che $V^{\tilde{U}''}(X_{n+1}) > V^{\tilde{U}'}(X_{n+1})$. Sia $U''$ similmente a $U'$ la strategia con $U''_k = U'_k$ e $U''_{n+1+k} = \tilde{U}''_k$. Dato che

$$\begin{aligned}
V^{U'}(x) &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\zeta^k(U'_k - \eta L_k)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n}(u(X_k)-\eta L_k)\zeta^k + \sum_{k=n+1}^{\infty}\zeta^k(U'_k-\eta L_k)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n}\zeta^k(u(X_k)-\eta L_k) + \zeta^{n+1}V^{\tilde{U}'}(X_{n+1})\right] \\
&< \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n}\zeta^k(u(X_k)-\eta L_k) + \zeta^{n+1}V^{\tilde{U}''}(X_{n+1})\right] = V^{U''}(x),
\end{aligned}$$

$V(x) = \sup_{U'\in\mathcal{U}_{n+1}} V^{U'}(x)$ (essendo $U'_k = u(X_k)$ valido anche per $k = n+1$), e quindi ho mostrato l'induzione. Dato che $\forall n \quad V(x) = \sup_{U'\in\mathcal{U}_n} V^{U'}(x)$, possiamo ora mostrare che $U_n = u(X_n)$ è ottimale.
Prendiamo un $\epsilon > 0$. Allora per l' ipotesi (1.5), $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $\mathbb{E}\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}|U'_k - \eta L_k|\zeta^k\right] < \epsilon$ per ogni strategia $U'$. Scegliamo una strategia $U'$ in $\mathcal{U}_n$ tale che $V(x) - V^{U'}(x) < \epsilon$. Allora:

$$\begin{aligned}
V(x) < V^{U'}(x) + \epsilon &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(U'_k - \eta L_k)\zeta^k\right] + \epsilon \\
&< \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n}(U'_k - \eta L_k)\zeta^k\right] + 2\epsilon \\
U'_k &= u(X_k) = U_k \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n}(U_k - \eta L_k)\zeta^k\right] + 2\epsilon \leq V^U(x) + 3\epsilon.
\end{aligned}$$

Dato che $\epsilon$ è arbitrario ho $V(x) \leq V^U(x)$, quindi $V(x) = V^U(x)$.

□

Possiamo quindi dimostrare alcune proprietà sulla funzione $u(x)$. Mostreremo come la strategia ottima dei dividendi sia di tipo barriera, limitata solo dal basso. Il valore $x_0$ che definiremo nell' enunciato sarà di cruciale importanza anche nel caso del modello con tasse.

**Teorema 1.1.** *La funzione $u(x)$ ha le seguenti proprietà:*

*(i)* *Il numero reale* $x_0 := \sup\{x : u(x) = 0\}$ *è finito; questo significa che per* $x$ *grande abbastanza un dividendo deve essere pagato immediatamente*

*(ii)* $u(x) = (x - x_0)^+$*; cioè la strategia ottima è di tipo barriera*

*(iii)* $U_n = u(X_n)$ *è una strategia ottima*

*(iv)* *Se* $f(x)$ *è una funzione continua che soddisfa l'equazione di Bellman con* $f(x) \leq x + \kappa$ *per qualche* $\kappa$*, allora* $f(x) = V(x)$*.*

*Dimostrazione.* (i) Se $u(x) = 0$ da (1.3) abbiamo

$$\begin{aligned} x + \zeta \frac{\mathbb{E}[Y^+] - \eta \mathbb{E}[Y^-]}{1-\zeta} &\leq V(x) = \zeta \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k V(x+k) \\ &\leq \zeta \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k \left( x + k + \frac{\mathbb{E}[Y^+]\zeta}{1-\zeta} \right) \\ &= \zeta x + \zeta \left( \mathbb{E}[Y] + \frac{\mathbb{E}[Y^+]\zeta}{1-\zeta} \right) \\ &= \zeta x + \zeta \frac{\mathbb{E}[Y] + \zeta \mathbb{E}[Y^-]}{1-\zeta}, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato che il limite superiore vale anche per $x < 0$. Questo implica

$$x \leq \frac{\zeta(\zeta + \eta - 1)}{(1-\zeta)^2} \mathbb{E}[Y^-].$$

La parte a destra dell' ultima disequazione è finita e per ogni valore $y$ più grande di questa vale $u(y) \neq 0$. Ho quindi dimostrato che il più grande $x$ tale per cui $u(x) = 0$ è finito.

(ii) Sia $\tilde{x} = x - u(x)$. Allora, usando che $V(x) \geq u + \zeta \mathbb{E}[V(x - u + Y)]$ $\forall x, \forall u$ e prendendo $u = 0$:

$$\begin{aligned} u(x) = x - \tilde{x} &\leq V(x) - V(\tilde{x}) \leq V(x) - \zeta \mathbb{E}[V(\tilde{x} + Y)] \\ &= V(x) - \zeta \mathbb{E}[V(x - u(x) + Y)] = u(x). \end{aligned}$$

Quindi sono tutte uguaglianze, in particolare $V(\tilde{x}) = \zeta \mathbb{E}[V(\tilde{x} + Y)]$ e $V(x) - V(\tilde{x}) = u(x)$. Notiamo che

$$\begin{aligned} V(x) &= u(x) + \zeta \mathbb{E}[V(\tilde{x} + Y)] \\ &= u(x) + u(\tilde{x}) + \zeta \mathbb{E}[V(x - u(x) - u(\tilde{x}) + Y)]. \end{aligned}$$

Poichè $u(x)$ è il valore più grande in cui è raggiunto il massimo, abbiamo $u(\tilde{x}) = 0$. Infatti $V(x)$ si potrebbe scrivere in un altro modo in cui $u(x) + u(\tilde{x})$ sarebbe il più grande valore dove ha il massimo, che è possibile solo se $u(\tilde{x}) = 0$, altrimenti avremmo trovato un valore maggiore di $u(x)$. Supponiamo che $u(x) > 0$ e scegliamo $y > x$. Allora dalla concavità segue

$$V(\tilde{x}) + x - \tilde{x} = V(x) \geq \frac{x - \tilde{x}}{y - \tilde{x}} V(y) + \frac{y - x}{y - \tilde{x}} V(\tilde{x}),$$

o equivalentemente, $V(y) \leq y - \tilde{x} + V(\tilde{x})$. Dal Lemma 1.2 abbiamo l' uguaglianza e questo implica che $u(y) \geq y - \tilde{x}$. Infatti, dalla concavità di $V$ in $u$, so che $V(y) - V(\tilde{x}) \leq u(y) - u(\tilde{x}) = u(y)$, essendo $u(\tilde{x}) = 0$ e $y > x > \tilde{x}$. Quindi $V(y) - V(\tilde{x}) - y \leq u(y) - y$, e dato che $V(y) - V(\tilde{x}) - y = -\tilde{x}$, ottengo $u(y) \geq y - \tilde{x}$.
Ora, dal fatto che per ogni $x$ vale $V(x) - V(\tilde{x}) = u(x) = x - \tilde{x}$, deriva, sostituendo $\tilde{x}$ con $x - u(x)$, $V(x - u(x)) + x - x + u(x) = V(x)$ e quindi per ogni $x$ ho $V(x) = V(x - u(x)) + u(x)$. Dato che vale $\forall x$ allora $V(y) = V(y - u(y)) + u(y)$. Mettendo questa insieme a $V(y) = y - \tilde{x} + V(\tilde{x})$ ottengo $V(\tilde{x}) = \tilde{x} - (y - u(y)) + V(y - u(y))$. Quindi $u(y) - y + \tilde{x} = V(\tilde{x}) - V(y - u(y))$; dal fatto che $V$ è concava in $u$ e che $\tilde{x} \geq y - u(y)$, ho $V(\tilde{x}) - V(y - u(y)) \leq u(\tilde{x}) - u(y - u(y))$, dove i termini a destra della disuguaglianza sono entrambi nulli. Infatti che $u(\tilde{x})$ sia nullo l'abbiamo già mostrato, mentre l'altro si mostra con la doppia disuguaglianza: da $u(y) \geq y - \tilde{x}$ e dalla crescenza di $u$ ho che $u(y - u(y)) \leq u(y - y + \tilde{x}) = u(\tilde{x}) = 0$. Inoltre so che $u(x) \in [0, x]$, quindi in particolare è sempre maggiore o uguale a zero e concludo prendendo $x = y - u(y)$. Troviamo allora $u(y) - y + \tilde{x} \leq 0$ e quindi $u(y) = y - \tilde{x} = y - x + u(x)$.
So ora che $u(x) \geq 0$ e $u(x) - u(y) = x - y$, quindi $u(x)$ è una funzione lineare definita a tratti nulla fino ad un certo punto $\tilde{x}_0$ e da lì in poi una retta di coefficiente angolare $m = 1$, cioè $u(x) = (x - \tilde{x}_0)^+$. Avendo definito $x_0$ come il punto maggiore in cui $u(x)$ si annulla, troviamo che $\tilde{x}_0$ è proprio $x_0$.

(iii) Vogliamo ora usare la Proposizione 1.2 per mostrare che $U_n = u(X_n)$ è una strategia ottima. Allo stesso modo che nella dimostrazione dell' equazione (1.2), troviamo che per ogni strategia

$$\sum_{k=n}^{\infty} \zeta^k (U_k - \eta L_k) = (1 - \zeta^k) \sum_{m=n}^{\infty} \sum_{k=n}^{m} (U_k - \eta L_k) \zeta^m.$$

La pseudo-strategia

$$U_k^{'} = \begin{cases} 0 & \text{se } k < n \\ X_n^{'\,+} & \text{se } k = n \\ Y_k^{+} & \text{se } k > n \end{cases}$$

maggiora $\sum_{k=n}^{m}(U_k - \eta L_k)$ per ogni strategia $U$ (la seconda perchè $X_n - U_n \geq 0$, quindi $X_n$ è anche maggiore di $U_n - \eta L_n$, e la terza perchè per fare iniezioni il più tardi possibile il profitto in $k$ non può essere minore della somma dei dividendi meno le iniezioni da quel momento fino a $m$), perciò:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{k=n}^{\infty}\zeta^k(U_k - \eta L_k)\right] &= \mathbb{E}\left[(1-\zeta^k)\sum_{m=n}^{\infty}\sum_{k=n}^{m}\zeta^m(U_k - \eta L_k)\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[(1-\zeta^k)\sum_{m=n}^{\infty}\zeta^m(U_m^{'} - \eta L_m)\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\sum_{m=n}^{\infty}\zeta^m(U_m^{'} - \eta L_m)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=n}^{\infty}\zeta^k(U_k^{'} - \eta L_k)\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[(X_n^{'})^{+}\right]\zeta^n + \mathbb{E}\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\zeta^k Y_k^{+}\right].
\end{aligned}$$

L' ultimo pezzo, sfruttando il fatto che $\sum_{k=1}^{n}\zeta^k$ è una serie geometrica e quindi $\sum_{k=1}^{n}\zeta^k = \frac{1-\zeta^{n+1}}{1-\zeta}$, diventa:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\zeta^k Y_k^{+}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\zeta^k Y_k^{+}\right] - \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n}\zeta^k Y_k^{+}\right] \\
&= \frac{\zeta}{1-\zeta}\mathbb{E}[Y^{+}] - \mathbb{E}[Y^{+}]\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n}\zeta^k\right] \\
&= \frac{\zeta}{1-\zeta}\mathbb{E}[Y^{+}] - \mathbb{E}[Y^{+}]\frac{\zeta-\zeta^{n+1}}{1-\zeta} \\
&= \mathbb{E}[Y^{+}]\frac{\zeta^{n+1}}{1-\zeta}.
\end{aligned}$$

Quindi $\mathbb{E}\left[\sum_{k=n}^{\infty}\zeta^k U_k\right] \leq \mathbb{E}[(X_n^{'})^{+}]\zeta^n + \frac{\zeta^{n+1}}{1-\zeta}\mathbb{E}[Y^{+}]$. Scriviamo $X_n^{'}$ come $X_n^{'} = x + \sum_{k=1}^{n}(Y_k - U_{k-1}^{'} + L_k)$.
Poi $\mathbb{E}\left[(X_n^{'})^{+}\right] \leq \mathbb{E}\left[\left(\ x + \sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^{\ +}\right] \leq x^{+} + \sum_{k=1}^{n} Y_k^{+} = x + n\mathbb{E}[Y^{+}]$.

Percui l' asserzione segue dalla Proposizione 1.2 dato che per $n \to \infty$ entrambi i termini $\mathbb{E}\left[(X'_n)^+\right]\zeta^n$ e $\mathbb{E}\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\zeta^k Y_k^+\right]$ tendono a 0 e quindi sono soddisfatte tutte le ipotesi.

(iv) Sia $\tilde{u}(x)$ l'ottimo sostituendo $V$ con $f$. Le considerazioni fatte sopra nel punto (iii) si possono applicare anche ad $f$, quindi questo $\tilde{u}(x)$ esiste. Ripetendo la dimostrazione della Proposizione 1.2 usando $\tilde{u}(x)$ al posto di $u^*(x)$ segue che $f$ è la funzione valore ottima, cioè $f(x) = V(x)$.

□

Mostriamo ora che dobbiamo considerare solo capitali iniziali interi.

**Lemma 1.3.** *Possiamo scegliere $x_0 \in \mathbb{N}$. In particolare, se $x \in \mathbb{N}$, allora $X_n \in \mathbb{N}$ per ogni $n$. Inoltre, sotto la strategia ottima il processo visita punti interi solo dopo la prima iniezione o il primo dividendo.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione di questo risultato richiede l'utilizzo di argomenti avanzati di teoria di processi stocastici e si può trovare in [4] a pagina 249.

□

## 1.4 Tutto il surplus in dividendi

Una possibile strategia è pagare tutto il capitale positivo in dividendi e fare un'iniezione ogni volta che il surplus diventa negativo. Si può dimostrare che questa è ottima se la funzione valore è

$$V(x) = x + c := x + (1-\zeta)^{-1}\zeta(\mathbb{E}[Y^+] - \eta\mathbb{E}[Y^-]) =: f(x).$$

Vediamo ora quali sono le condizioni per cui vale. Per farlo, dobbiamo mostrare che $f(x)$ soddisfa l' equazione di Bellman. Per $\tilde{x} = x - u$ (così $x + c - u = \tilde{x} + c$ ) questo è equivalente a:

$$\begin{aligned}
\tilde{x} + c \geq \zeta&\left( \sum_{k=-\tilde{x}}^{\infty} p_k f(\tilde{x}+k) + \sum_{k=-\infty}^{-\tilde{x}-1} p_k[c + \eta(\tilde{x}+k)] \right) \\
&= \zeta\left( \sum_{k=-\tilde{x}}^{\infty} p_k[\tilde{x}+k+c] + \sum_{k=-\infty}^{-\tilde{x}-1} p_k[c + \eta(\tilde{x}+k)] \right) \\
&= \zeta\left( \sum_{k=-\tilde{x}}^{\infty} p_k k + \sum_{k=-\tilde{x}}^{\infty} p_k(\tilde{x}+c) + \sum_{k=-\infty}^{-\tilde{x}-1} p_k c + \eta \sum_{k=-\infty}^{-\tilde{x}-1} p_k(\tilde{x}+k) \right) \\
&= \zeta\left( \sum_{k=-\tilde{x}}^{\infty} p_k k + \sum_{k=-\tilde{x}}^{\infty} p_k(\tilde{x}+c) + \sum_{k=-\infty}^{-\tilde{x}-1} p_k c + \sum_{k=-\infty}^{-\tilde{x}-1} p_k(\tilde{x}+k) + (1-\eta)\mathbb{E}[(\tilde{x}+Y)^-] \right),
\end{aligned}$$

dove l' ultima uguaglianza deriva dalla definizione di valor medio della parte negativa di una funzione: $\mathbb{E}[(\tilde{x}+Y)^-] = -\sum_{k=-\infty}^{-\tilde{x}-1} p_k(\tilde{x}+k)$. Quindi usando che $\mathbb{E}[Y] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k k$, ottengo

$$\frac{1-\zeta}{\zeta}(\tilde{x}+c) + (\eta-1)\mathbb{E}[(\tilde{x}+Y)^-] \geq \mathbb{E}[Y].$$

La parte a sinistra della disequazione è convessa in $\tilde{x}$ essendo lineare in questa e con tutti i termini che moltiplicano $\tilde{x}$ positivi, e per $\tilde{x} = 0$ otteniamo l' uguaglianza, per come abbiamo definito $c$. Infatti sostituendo ho

$$\frac{1-\zeta}{\zeta}\frac{\zeta}{1-\zeta}(\mathbb{E}[Y^+] - \eta\mathbb{E}[Y^-]) + (\eta-1)\mathbb{E}[Y^-] = \mathbb{E}[Y].$$

Affinchè la disuguaglianza sia quindi soddisfatta basta che lo sia per $\tilde{x} = 1$, cioè se $\frac{1-\zeta}{\zeta}(1+c) + (\eta-1)\mathbb{E}[(1+Y)^-] \geq \mathbb{E}[Y]$. Vediamo quando questo succede:

$$\begin{aligned}
\frac{1-\zeta}{\zeta} &\geq -\mathbb{E}[Y^+] + \eta\mathbb{E}[Y^-] + \mathbb{E}[Y] - \eta\mathbb{E}[(1+Y)^-] + \mathbb{E}[(1+Y)^-] \\
&= \mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[Y^-] + \eta\mathbb{E}[Y^-] - \eta\mathbb{E}[(1+Y)^-] + \mathbb{E}[(1+Y)^-] \\
&= (\eta-1)(\mathbb{E}[Y^-] - \mathbb{E}[(1+Y)^-]).
\end{aligned}$$

So che $Y^- = -Y\mathbb{1}_{\{Y<0\}}$ , quindi $\mathbb{E}[Y^-] = -\mathbb{E}[Y]P[Y < 0]$. Inoltre $|Y| > 1$ in quanto il processo visita i punti interi e solo con la prima iniezione o il primo dividendo, cioè rispettivamente quando il profitto è minore di $-1$ o supera 1. Infine la probabilità che $Y$ sia minore di $-1$ è la stessa che sia minore di 0. Riprendendo la disequazione di prima ho:

$$\begin{aligned}\frac{1-\zeta}{\zeta} &\geq (\eta-1)\big( -\mathbb{E}[Y]P[Y<0]+\mathbb{E}[1+Y]P[Y<-1]\big)\\ &= (\eta-1)\big( P[Y<0](-\mathbb{E}[Y]+\mathbb{E}[1+Y])\\ &= (\eta-1)P[Y<0].\end{aligned}$$

Abbiamo perciò la condizione

$$(1-\zeta) \geq \zeta(\eta-1)P[Y<0]. \tag{1.6}$$

Per esempio se $P[Y < 0] = 0$ la condizione è sempre soddisfatta, mentre se $P[Y < 0] = 1$ allora lo è se $\eta\zeta \leq 1$. Notiamo quindi che le condizioni affinché la funzione $f(x)$ soddisfi l'equazione di Bellman dipendono dalla distribuzione di $Y$.

# Capitolo 2

# Il modello con tasse

## 2.1 La funzione valore

In questo capitolo il modello sarà quasi del tutto analogo a quello trattato nel Capitolo 1, con l'unica differenza dell'inserimento di tasse sui dividendi. Questo strumento fu introdotto in [3] con l'obiettivo di escludere la possibilità che la quantità di capitale iniettato venisse contabilizzata dall'azienda come riserva e in seguito pagata al contrario in dividendi, eludendo la tassazione. Vedremo come in questo modello migliorato riusciremo a trovare una soluzione esplicita per la strategia ottima dei dividendi.
Sia $1-\delta \in (0,1)$ la percentuale di tasse applicate ai dividendi e supponiamo che ci sia un'esenzione dalle tasse fino alla prima iniezione di capitale $L_1$. Con $Z_n$ denotiamo la quantità che possiamo pagare immediatamente come dividendi senza dover pagare tasse, cioè $Z_{n+1} := (Z_n - U_n)^+ + L_{n+1}$, dove $Z_0 = z$ è l' esenzione iniziale. Il valore di una strategia di dividendi è definito come

$$V^U(x,z) = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \zeta^k (\min\{U_k, Z_k\} + \delta(U_k - Z_k)^+ - \eta L_k)\right]. \tag{2.1}$$

Non può essere ottimale iniettare più capitale di quanto sia necessario, perciò omettiamo la dipendenza da $L$ in $V^U$, dato che la strategia di iniezione è determinata dalla strategia di dividendi $U$. Rispetto al valore trovato nel caso senza tasse si nota che il termine $U_k$ è stato rimpiazzato da $\min\{U_k, Z_k\} + \delta(U_k - Z_k)^+$. Il motivo è che nei periodi in cui la parte che possiamo pagare in dividendi senza tasse è maggiore dei dividendi tassati, allora la strategia rimane invariata (infatti si prende il minimo tra $U_k$ e $Z_k$ e il secondo termine si annulla); al contrario, nei momenti in cui $U_k \geq Z_k$, il prezzo che paghiamo in dividendi è dato dalla somma di quelli esenti dalle

tasse con la differenza $U_k - Z_k$, a cui viene applicata la percentuale di tassa $\delta$. Anche in questo caso si vede che tutto torna, in quanto se fosse $\delta = 1$ (cioè la percentuale di tasse applicata ai dividendi fosse nulla), avrei che la somma sarebbe nuovamente $U_k$.
La funzione valore è definita come $V(x,z) = \sup_U V^U(x,z)$, dove la strategia $U$ è presa tra tutte quelle adattate alla filtrazione $\mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ è la $\sigma - algebra$ dello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, dove $P$ è la misura di probabilità tale che $P[Y = k] = p_k$ sia la distribuzione della variabile aleatoria $Y$ che rappresenta il profitto della compagnia assicurativa in un periodo. Le strategie ammissibili sono tutte quelle che mantengono il processo di surplus $X_n$ positivo, dove $X_n = X_{n-1} - (\min\{U_{n-1}, Z_{n-1}\} + \delta(U_{n-1} - Z_{n-1})^+) + Y_n + L_n$. A causa delle tasse, in questo modello possiamo considerare anche il caso $\eta = 1$.
Procedendo nello stesso ordine del primo capitolo, caratterizziamo con un lemma la funzione valore, mostrando i range di valori che questa può assumere:

**Lemma 2.1.** *(i) $V(x,z)$ è limitata da*

$$\min\{x,z\} + \delta(x-z) + \zeta\frac{\delta\mathbb{E}[Y^+] - \eta\mathbb{E}[Y^-]}{1-\zeta} \leq V(x,z)$$

$$\leq \min\{x,z\} + \delta(x-z) + \frac{\zeta\mathbb{E}[Y^+]}{1-\zeta}.$$

*(ii) $V(x,z)$ è strettamente crescente in entrambe le variabili e concava in $x$*

*(iii) $V(x,z)$ è Lipschitz-continua.*

*Dimostrazione.* (i) Il limite inferiore si trova se tutto il profitto positivo è pagato in dividendi (cioè $U_k = Y_k^+$) e le tasse vengono pagate su tutti i dividendi eccetto per la quantità $z$ (cioè $Z_k = 0$ con $k = 1, \ldots, n$). Come strategia di iniezione poniamo che copro tutto il deficit con iniezioni $L_k = Y_k^-$. Infatti così avremmo che:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \min\{U_k, Z_k\} = \min\{U_0, Z_0\} + \sum_{k=1}^{\infty} \min\{U_k, 0\} = \min\{x,z\}$$

e

$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta(U_k - Z_k)^+ = \delta(x-z) + \sum_{k=1}^{\infty} \delta U_k.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
V^U(x,z) &= \min\{x,z\} + \delta(x-z) + \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\infty} \zeta^k (\delta U_k - \eta L_k)\right] \\
&= \min\{x,z\} + \delta(x-z) + \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\infty} \zeta^k (\delta Y_k^+ - \eta Y_k^-)\right] \\
&= \min\{x,z\} + \delta(x-z) + \sum_{k=1}^{\infty} \zeta^k (\delta \mathbb{E}[Y_k^+] - \eta \mathbb{E}[Y_k^-]) \\
&= \min\{x,z\} + \delta(x-z) + (\delta \mathbb{E}[Y^+] - \eta \mathbb{E}[Y^-]) \sum_{k=1}^{\infty} \zeta^k \\
&= \min\{x,z\} + \delta(x-z) + \zeta \frac{\delta \mathbb{E}[Y^+] - \eta \mathbb{E}[Y^-]}{1-\zeta}.
\end{aligned}$$

Per il limite superiore notiamo innanzitutto che, con $f(k) = \min\{U_k, Z_k\} + \delta(U_k - Z_k)^+ - \eta L_k$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \zeta^k f(k) = (1-\zeta) \sum_{l=0}^{\infty} \zeta^l \sum_{k=0}^{l} f(k).$$

Infatti questo segue direttamente dal teorema sulla somma del prodotto di Cauchy che dice che, date due serie convergenti $S = \sum_{l=0}^{\infty} a_l$ e $T = \sum_{l=0}^{\infty} b_l$, se almeno una delle due è assolutamente convergente risulta $ST = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{l} a_k b_{l-k}\right]$. Sfruttando il fatto che $\sum_{l=0}^{\infty} \zeta^l = \frac{1}{1-\zeta}$ e ponendo $\zeta^l f(l) = a_l$ e $\zeta^l = b_l$, otteniamo

$$\sum_{l=0}^{\infty} \zeta^l f(l) \frac{1}{1-\zeta} = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{l} \zeta^k f(k) \zeta^{l-k}\right] = \sum_{l=0}^{\infty} \zeta^l \sum_{k=0}^{l} f(k).$$

Indicizzando infine con $k$ il membro di sinistra e moltiplicando da entrambe le parti dell' equazione per $1-\zeta$ ho concluso.
Quindi la parte a destra può essere massimizzata se tutto il capitale viene pagato in dividendi (cioè $U_k = Y_k^+$), non vengono fatte iniezioni ($L_k = 0 \quad \forall k$) e non devono essere pagate tasse per tutti i dividendi dopo il primo (ossia $U_k = Z_k$ per $k \geq 1$). Ora, usando argomenti analoghi a quelli appena visti e applicando due volte l'uguaglianza dimostrata (abbiamo anche sfruttato il fatto che $Y_0^+ = 0$ per definizione, quindi quando si trova all' interno di una sommatoria, farla partire da 0 o da

1 non cambia):

$$
\begin{aligned}
V^U(x,z) &= \min\{x,z\} + \delta(x-z) + (1-\zeta)\mathbb{E}\left[\sum_{l=0}^{\infty}\zeta^l \sum_{k=1}^{l} Y_k^+\right] \\
&= \min\{x,z\} + \delta(x-z) + \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\zeta^k Y_k^+\right] \\
&= \min\{x,z\} + \delta(x-z) + \frac{\zeta\mathbb{E}[Y^+]}{1-\zeta}.
\end{aligned}
$$

(ii) Sia $x < y$ e $\nu = (1-\alpha)x + \alpha y$ con $\alpha \in (0,1)$. Consideriamo le strategie $(U^x, L^x)$ e $(U^y, L^y)$ per i capitali iniziali $x$ e $y$ rispettivamente. Definisco $\tilde{U} = (1-\alpha)U_k^x + \alpha U_k^y$ e $\tilde{L} = (1-\alpha)L_k^x + \alpha L_k^y$. Sia $T_n = \sum_{k=0}^{n}(U_k - Z_k)^+$ i dividendi accumulati per cui le tasse vengono pagate e mostriamo ora che

$$
\sum_{k=0}^{n} U_k + Z_{n+1} = z + \sum_{k=1}^{n+1} L_k + T_n.
$$

Infatti essendo $L_{k+1} = Z_{k+1} - (Z_k - U_k)^+$ ho:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} L_k &= \sum_{k=1}^{n+1}\Big( Z_k - (Z_{k-1} - U_{k-1})^+\Big) = \sum_{k=0}^{n}\Big( Z_{k+1} - (Z_k - U_k)^+\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} Z_{k+1} - \sum_{k=0}^{n}(Z_k - U_k)^+ = \sum_{k=0}^{n} Z_{k+1} - \sum_{k=0}^{n}(U_k - Z_k)^- \\
&= \sum_{k=0}^{n} Z_{k+1} - \sum_{k=0}^{n}(U_k - Z_k)^+ + \sum_{k=0}^{n}(U_k - Z_k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} Z_{k+1} - T_n + \sum_{k=0}^{n} U_k - \sum_{k=0}^{n} Z_k = \sum_{k=0}^{n} U_k - T_n - z + Z_{n+1}.
\end{aligned}
$$

Questo implica che $T_n \geq \sum_{k=0}^{n} U_k - z - \sum_{k=1}^{n+1} L_k$.
$T_n^\nu$ cresce solo nei punti in cui $U_n > Z_n$ (cioè quando sommo cose positive), e a quel punto $Z_{n+1}^\nu = L_{n+1}^\nu = 0$ dato che non ha senso iniettare più capitale di quanto sia necessario. Allora:

$$
\begin{aligned}
T_n^\nu &= \sum_{k=0}^{n} U_k^\nu - z - \sum_{k=0}^{n+1} L_k^\nu \\
&= (1-\alpha)\left[\sum_{k=0}^{n} U_k^x - z - \sum_{k=0}^{n+1} L_k^x\right] + \alpha\left[\sum_{k=0}^{n} U_k^y - z - \sum_{k=0}^{n+1} L_k^y\right] \\
&\leq (1-\alpha)T_n^x + \alpha T_n^y.
\end{aligned}
$$

Questo significa che il valore della tassa pagata nel caso con capitale iniziale $\nu$ è minore della combinazione convessa del valore delle tasse nei casi con capitali iniziali $x$ e $y$ rispettivamente. Ora per mostrare che $V(\nu,z) \geq (1-\alpha)V(x,z)+\alpha V(y,z)$ si procede allo stesso modo come nel caso senza tasse, osservando che anche qui $L_k^{(1-\alpha)x+\alpha y} \leq (1-\alpha)L_k^x+\alpha L_k^y$.

(iii) Mostriamo la Lipschitz-continuità in entrambe le variabili. Sia $x < y$ e $z \geq 0$ e scegliamo un $\epsilon > 0$. Allora esiste una strategia $U$ tale per cui $V(y,z) < V^U(y,z)+\epsilon$. Usando questa strategia $U$ con capitale iniziale $x$ può succedere che vengano fatte delle iniezioni (o che per esempio vengano pagati meno dividendi nel momento in cui il surplus diventi negativo), ossia $V^U(x,z) \geq V^U(y,z) - \eta(y-x)$. Quindi $V(x,z) \geq V^U(x,z) \geq V^U(y,z)-\eta(y-x) > V(y,z)-\eta(y-x)-\epsilon$, e dal momento che $\epsilon$ è arbitrario, $V(y,z) - V(x,z) \leq \eta(y-x)$. Quindi $V(x,z)$ è Lipschitz-continua in $z$ di costante $\eta < 1$.
Sia ora $x \geq 0$ e $z_1 < z_2$. In modo analogo otteniamo $V(x,z_2) - V(x,z_1) \leq (1-\delta)(z_2-z_1)$ in quanto usando la stessa strategia potrebbe succedere che si paghino più tasse sui dividendi.

□

Vediamo ora un teorema che mostra qual è la forma della funzione valore in relazione al segno della variabile $x$.

**Teorema 2.1.** *Supponiamo che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia continua e che soddisfi:*

- $f(x,z) \leq x+\kappa$ *per ogni* $x$ *e per qualche* $\kappa > 0$
- $f(x,z) = f(0,z-x)+\eta x$ *per* $x \leq 0$
- *per* $x \geq 0$

$$\begin{aligned} f(x,z) = \sup_{0\leq u\leq x} & \min\{u,z\} + \delta(u-z)^+ \\ & + \zeta \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k f(x+k-u,(z-u)^+). \end{aligned} \tag{2.2}$$

*Allora $f(x,z) = V(x,z)$. Viceversa, $V(x,z)$ soddisfa (2.2).*

*Dimostrazione.* Sia $\{U_n\}$ una strategia arbitraria. Osservando che la somma delle differenze di termini consecutivi di una successione è il termine di grado massimo meno quello di grado minimo (in quanto tutti quelli intermedi si semplificano essendo uguali in modulo ma di segni opposti) ho

$$\zeta^n f(X_n, Z_n) - f(x, z) = \sum_{k=0}^{n-1} [\zeta^{k+1} f(X_{k+1}, Z_{k+1}) - \zeta^k f(X_k, Z_k)]$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \zeta^k [\zeta f(X_k + L_{k+1} - U_k + Y_{k+1}, (Z_k - U_k)^+ + L_{k+1}) - f(X_k, Z_k)].$$

Dall'equazione caratterizzante $f(x, z)$ con $x \geq 0$ (cioè la (2.2)), e sostituendo $x, k, u, z$ con $X_k, Y_{k+1}, U_k, Z_k$ rispettivamente, so che

$$\mathbb{E}[\zeta f(X_k - U_k + Y_{k+1}, (Z_k - U_k)^+)] \leq f(X_k, Z_k) - \min\{U_k, Z_k\} - \delta(U_k - Z_k)^+,$$

e quindi

$$f(X_k, Z_k) \geq \min\{U_k, Z_k\} + \delta(U_k - Z_k)^+ + \mathbb{E}[\zeta f(X_k - U_k + Y_{k+1}, (Z_k - U_k)^+)].$$

All'inizio della dimostrazione avevamo visto che

$$f(x, z) = \zeta^n f(X_n, Z_n) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \left( \zeta^k f(X_k, Z_k) - \zeta^k [\zeta f(X_k + L_{k+1} - U_k + Y_{k+1}, (Z_k - U_k)^+ + L_{k+1})] \right)$$

e quindi mettendo insieme risulta

$$f(x, z) \geq \zeta^n f(X_n, Z_n) + \sum_{k=0}^{n-1} \Bigg( \zeta^k \Big( \min\{U_k, Z_k\} + \delta(U_k - Z_k)^+ +$$
$$+ \mathbb{E}[\zeta f(X_k - U_k + Y_{k+1}, (Z_k - U_k)^+)] - \zeta f(X_k - U_k + Y_{k+1}, (Z_k - U_k)^+ + L_{k+1}) \Big) \Bigg) .$$

Applico il valor medio ambo i lati della disuguaglianza e poi osservo che

$$\mathbb{E}[\zeta f(X_k - U_k + Y_{k+1}, (Z_k - U_k)^+ + L_{k+1}]$$
$$= \mathbb{E}[\zeta f(X_k - U_k + Y_{k+1}, (Z_k - U_k)^+)] + \mathbb{E}[\zeta f(0, L_{k+1})].$$

Ora $L_{k+1} = (X_k - U_k + Y_{k+1})^- \geq 0$ e per la seconda condizione $f(-L_{k+1}, 0) = f(0, L_{k+1}) - \eta L_{k+1}$ essendo $-L_{k+1} \leq 0$. Quindi $f(0, L_{k+1}) = \eta L_{k+1} + f(-L_{k+1}, 0)$. Ma per la prima condizione so che $f(-L_{k+1}, 0) \leq -L_{k+1} + \kappa$ , e scegliendo $\kappa$ piccolo ho $f(-L_{k+1}, 0) \leq 0$. Quindi $f(0, L_{k+1}) \leq \eta L_{k+1}$ e quindi $-f(0, L_{k+1}) \geq -\eta L_{k+1}$. A questo punto tutta la disequazione diventa

$$f(x, z) \geq \mathbb{E} \left[ \zeta^n f(X_n, Z_n) + \sum_{k=0}^{n-1} \zeta^k \big( \min\{U_k, Z_k\} + \delta(U_k - Z_k)^+ - \zeta\eta L_{k+1} \big) \right].$$

Scrivendo $X_n$ in funzione di $x$ ottengo $X_n = x + \sum_{k=1}^{n}(Y_k + L_k - U_{k-1}) = x+\sum_{k=1}^{n}(Y_k^+ - Y_k^- - U_{k-1} + L_k) \leq x + \sum_{k=1}^{n} Y_k^+$ essendo $\sum_{k=1}^{n} L_k \leq \sum_{k=1}^{n} Y_k^-$ dal momento che non ha senso iniettare denaro quando c' è un profitto.

$$\zeta^n \mathbb{E}[f(X_n, Z_n)] \leq \zeta^n \mathbb{E}[f(x + \sum_{k=1}^{n} Y_k^+, Z_n)] \leq \zeta^n \mathbb{E}[x + \sum_{k=1}^{n} Y_k^+ + \kappa]$$
$$= \zeta^n(x + n\mathbb{E}[Y^+] + \kappa) \Rightarrow \zeta^n \mathbb{E}[f(X_n, Z_n)] \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to \infty.$$

Facendo tendere quindi la sommatoria di prima a infinito ho:

$$f(x,z) \geq \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \zeta^k \big(\ \min\{U_k, Z_k\} + \delta(U_k - Z_k)^+ - \zeta\eta L_{k+1}\big)\ \right] \geq V(x,z).$$

Mostriamo ora la disuguaglianza opposta. Dal momento che $f$ è continua esiste un $u(x)$ che la massimizza, cioè tale che

$$\min\{u(x), z\} + \delta(u(x) - z)^+ + \zeta \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k f(x - u(x), (z - u(x))^+)$$
$$\|$$
$$\sup_{0 \leq u \leq x} \min\{u, z\} + \delta(u - z)^+ + \zeta \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k f(x - u, (z - u)^+).$$

Ripetendo i calcoli fatti in precedenza usando $u(X_n)$ al posto di $U_n$ otterrò $f(x,z) = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \zeta^k \big(\ \min\{u(X_k), Z_k\} + \delta(u(X_k) - Z_k)^+ - \eta L_k\right]$
e quindi $f(x,z) = V^U(x,z)$. Essendo però $V(x,z) = \sup_U V^U(x,z)$ ho mostrato che $f(x,z) \leq V(x,z)$, da cui l' uguaglianza. Ci rimane da mostrare il viceversa, cioè che $V(x,z)$ soddisfa (2.2). Questo significa che la funzione valore $V(x,z)$ realizza l'equazione di Bellman ma nel caso di dividendi con tasse, dove quindi $U_k$ è stato sostituito da $\min\{U_k, Z_k\} + \delta(U_k - Z_k)^+$. Quindi bisogna procedere in modo analogo a quanto fatto nella dimostrazione della Proposizione 1.1, in cui avevamo mostrato che la strategia per massimizzare la funzione valore era quella di massimizzare i dividendi al tempo presente più il valore atteso scontato di quelli all'istante successivo. Qui il massimo dei dividendi al tempo presente $n$ è $\sup_{u \in [0,x]} \min\{u, z\} + \delta(u - z)^+$, e il valore atteso scontato di quelli al momento $n+1$ è $\zeta\mathbb{E}[V(x - u + Y, (z - u)^+)]$, dove l'ultimo termine $(z - u)^+$ rappresenta proprio quella parte di dividendi che possiamo pagare immediatamente senza tasse all'istante $n+1$. Quindi $V(x,z)$ soddisfa:

$$V(x,z) = \sup_{u \in [0,x]} \min\{u, z\} + \delta(u - z)^+ + \zeta\mathbb{E}[V(x - u + Y, (z - u)^+)].$$

□

## 2.2 La strategia ottima

Analogamente a quanto visto nell'Osservazione 1.3 alla fine della Sezione 1.1, segue che esiste una strategia ottima. Denotiamo con $u(x, z)$ quella ottimale per i dividendi e prendiamo il più grande valore di $u$ se l'elemento massimizzante non è unico.

**Teorema 2.2.** *La strategia ottima $u(x, z)$ ha le seguenti proprietà:*

*(i) Il numero reale $x_1 := \sup\{x : u(x, z) = 0 \quad \text{per qualche} \quad z \geq 0\}$ è finito; cioè per $x$ grande abbastanza si deve pagare un dividendo*

*(ii) Per ogni $z$ esiste un $x_0(z)$ tale che $u(x, z) = (x - x_0(z))^+$.*

*Dimostrazione.* La $(i)$ si dimostra nello stesso modo visto nel caso senza tasse per il Teorema 1.1 sfruttando il fatto che $V(x, z)$ è limitata dal basso e prendendo uno $z \geq x$. La $(ii)$ deriva dalla concavità di $V(x, z)$ in $x$ e si mostra allo stesso modo che nel Teorema 1.1.

□

Ne deriva quindi che anche nel caso con tasse la strategia ottima è di tipo barriera, dove quest' ultima può dipendere da $z$. Inoltre, analogamente a quanto visto nel Lemma 1.3, i valori $x_1$ e $x_0(z)$ sono numeri naturali, quindi più avanti assumeremo che $x, z, u \in \mathbb{N}$.

## 2.3 Soluzione del problema in un caso particolare

Consideriamo un modello rischioso a tempo discreto dove il premio, ossia il guadagno che l'assicuratore si aspetta di ottenere dal fatto che si trova in una situazione di rischio, non può superare l'unità di capitale. Facciamo quindi le ulteriori assunzioni $P[Y \geq 2] = 0$ e $p_1 = P[Y = 1] > 0$, cioè che la variabile aleatoria $Y$ può assumere solo valori compresi nell'intervallo $[-\infty, 1]$.
Sia $\xi > 1$ la soluzione dell'equazione $\zeta\mathbb{E}[\xi^Y] = 1$ e $f_0(x)$ la funzione che risolve per $x \geq 0$:

$$f_0(x) = \zeta \left[ \sum_{k=-x}^{1} p_k f_0(x + k) + \sum_{k=-\infty}^{-x-1} p_k (f_0(0) + \eta(x + k)) \right] \tag{2.3}$$

dove $f_0(0)$ è il valore quando $x = 0$ nel modello senza tasse. Più precisamente noto che, per $x \leq x_0 + 1$, $f_0(x)$ è il valore nel modello senza tasse, dove

avevamo già definito $x_0 = \sup\{x : u(x) = 0\}$.
Dalla (2.3) si vede facilmente che, spezzando la prima sommatoria come somma indicizzata nei valori di $k$ che vanno da $-x$ a 0 con il caso $k = 1$,

$$f_0(x+1) = \frac{1}{\zeta p_1}\left( f_0(x) - \zeta \left[ \sum_{k=-x}^{0} p_k f_0(x+k) + \sum_{k=-\infty}^{-x-1} p_k(f_0(0) + \eta(x+k)) \right] \right).$$

Vediamo un lemma che ci mostra che nel modello senza tasse dobbiamo scegliere il valore iniziale $x$ tale che il minimo incremento della funzione valore sia 1. Un'immediata conseguenza di questo fatto è che la funzione $f_0(x)$ è strettamente crescente, con $f_0(x) \to \infty$ per $x \to \infty$.

**Lemma 2.2.** $f_0(x+1) - f_0(x) \geq 1$.

*Dimostrazione.* Dimostriamolo per assurdo: supponiamo che $x_2$ sia un punto in cui $\gamma := f_0(x_2+1) - f_0(x_2) < 1$ e lavoriamo in un modello senza tasse. Di sicuro $x_2 > x_0$ essendo $x_0$ il massimo $x$ tale per cui $u(x) = 0$, quindi non possono essere uguali. Consideriamo la strategia $U_n = \mathbb{1}_{\{X_n = x_2+1\}}$ e supponiamo $x = X_0 \leq x_0 + 1$. Allora, usando la (2.3) per spezzare la $f_0$ nelle due sommatorie:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\zeta f_0(X_k + L_{k+1} - U_k + Y_{k+1})|\mathcal{F}_k] \\
&\quad = \mathbb{E}[\zeta\big(\ f_0(X_k - U_k + Y_{k+1}) + \eta L_{k+1}\big)\ |\mathcal{F}_k] \\
&\quad = f_0(X_k) - \gamma \mathbb{1}_{X_k = x_2+1} + \eta\zeta\mathbb{E}[L_{k+1}|\mathcal{F}_k] \\
&\quad = f_0(X_k) - \gamma U_k + \eta\zeta\mathbb{E}[L_{k+1}|\mathcal{F}_k]
\end{aligned}$$

Poi, come visto in precedenza:

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= \mathbb{E}\left[\zeta^n f_0(X_n) - \sum_{k=0}^{n-1}\{\zeta^{k+1} f_0(X_{k+1}) - \zeta^k f_0(X_k)\}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\zeta^n f_0(X_n) - \sum_{k=0}^{n-1}\zeta^k\{\zeta f_0(X_k + L_{k+1} - U_k + Y_{k+1}) - f_0 X_k\}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\zeta^n f_0(X_n) + \sum_{k=0}^{n-1}\big(\ \zeta^k \gamma U_k - \eta\zeta^{k+1} L_{k+1}\big)\ \right],
\end{aligned}$$

e facendo tendere $n$ all' infinito $\big(\ f_0(X_n) \to 0$ perchè $\{X_n\}$ è limitata da $x_2 + 1\big)$ ,

$f_0(x) = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\big(\ \zeta^k\gamma U_k - \eta\zeta^{k+1}L_{k+1}\big)\ \right].$

Questo è il valore della strategia proposta ma con tutti i dividendi tassati di $1-\gamma$, percui la funzione valore nel modello senza tasse è strettamente maggiore di $f_0(x)$, contraddicendo il fatto che $f_0(x)$ è la funzione valore per $x \leq x_0+1$ ( cioè nel caso senza tasse, vista appena prima del lemma ).

□

Definiamo $f(x,z)$ in un altro modo come $f(x,z) = f_0(x) - C\xi^{x-z}$, dove $C$ è la costante tale per cui per gli $x \geq 0 \quad \min\{f(x+1,0) - f(x,0)\} = \delta$. Sia inoltre $x_1$ l' argomento per cui è raggiunto il minimo. Facciamo un' ultima osservazione preliminare. Da $f_0(x_0+1) - f_0(x_0) = 1$ deriva la seguente disuguaglianza:

$$\begin{aligned}
1 - C\xi^{x_0}(\xi-1) &= f_0(x_0+1) - f_0(x_0) - C\xi^{x_0}(\xi-1)\\
&= f_0(x_0+1) - (f_0(x_0) - C\xi^{x_0}) - C\xi^{x_0+1}\\
&= f_0(x_0+1) - f(x_0,0) - C\xi^{x_0+1}\\
&= f(x_0+1,0) - f(x_0,0) \geq \delta\\
&= f_0(x_1+1) - f_0(x_1) - C\xi^{x_1}(\xi-1) \geq 1 - C\xi^{x_1}(\xi-1).
\end{aligned}$$

Ne deriva che $x_0 \leq x_1$.

Il seguente teorema ci mostra come è fatta la funzione valore in funzione dei valori di $x$ e $z$.

**Teorema 2.3.** *Se* $\mathbb{P}[Y \geq 2] = 0$ *e* $\mathbb{P}[Y=1] > 0$ *allora* $V(x,z)$

$$= \begin{cases}
f(0, z-x) + \eta x & \text{se } x < 0\\
f(x,0) & \text{se } 0 \leq x \leq x_1 \text{ e } z = 0\\
f(x_1,0) + \delta(x - x_1) & \text{se } x > x_1 \text{ e } z = 0\\
f(x,z) & \text{se } 0 \leq x \leq x_0 \text{ e } z \geq 1\\
f\big(\ \max\{x_0, x-z\}, (z-x+x_0)^+\big)\ + \min\{x - x_0\} & \text{se } x > x_0 \text{ e } z \geq 1
\end{cases}$$

Prima di dimostrarlo vediamo l'importanza di questo teorema e un suo immediato corollario che ci dice qual è effettivamente la strategia ottima. Il Teorema 2.3 implica che quella ottima è una strategia con due barriere. Se un dividendo immediato non è tassato allora si usa come barriera $x_0$, che in termini economici vuol dire che tutto il capitale sopra $x_0$ è pagato in dividendi. Se invece è tassato si usa la barriera $x_1$ in questo modo: se partiamo con un capitale iniziale inferiore a $x_0$ allora finchè $z$ è maggiore di 0, il premio viene pagato in dividendi, mentre quando raggiunge lo 0 smettiamo di pagare dividendi fino al momento in cui il surplus arriva ad essere $x_1$. Da quel momento il premio viene nuovamente pagato in dividendi. Il seguente corollario riassume il discorso appena fatto:

**Corollario 2.1.** *La strategia ottima è data da*

$$u(x,z) = \max\{x - x_1, \min\{(x - x_0)^+, z\}\}$$

*Dimostrazione.* Per dimostrare il Teorema 2.3 dobbiamo verificare che la funzione $V(x,z)$ soddisfi l'equazione di Bellman. Ricordiamo che $x_1 = \sup\{x : u(x,z) = 0 \quad \text{per qualche} \quad z \geq 0\}$ e $f(x,z) = f_0(x) - C\xi^{x-z}$. Poi

$$\zeta\mathbb{E}[\xi^Y] = 1 \Rightarrow \zeta \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k \xi^k = 1 \Rightarrow \zeta \sum_{k=-\infty}^{1} p_k \xi^k = 1,$$

poichè avevamo assunto che $P[Y \geq 2] = 0$. Quindi $-C\xi^x = -\zeta \sum_{k=-\infty}^{1} p_k C\xi^{x+k}$ e allora, se $z = 0$ e $x \leq x_1$,

$$\begin{aligned} f(x,0) &= f_0(x) - C\xi^x \\ &= \zeta \left[ \sum_{k=-x}^{1} p_k(f_0(x+k) - C\xi^{x+k}) + \sum_{k=-\infty}^{-x-1} p_k(f_0(0) + \eta(x+k) - C\xi^{x+k}) \right]. \end{aligned}$$

Se sostituisco $x$ con $x-u$ le ipotesi sono ancora soddisfatte (poichè $x-u \leq x$) e quindi l'equazione vale ugualmente. Ora

$$\begin{aligned} \delta u + f(x-u,0) = \delta u + \zeta \Bigg[ & \sum_{k=-x+u}^{1} p_k(f_0(x-u+k) - C\xi^{x-u+k}) + \\ & + \sum_{k=-\infty}^{-x+u-1} p_k(f_0(0) + \eta(x-u+k) - C\xi^{x-u+k}) \\ & = \delta u + \zeta\mathbb{E}[f_0(x-u+Y) - C\xi^{x-u+Y}] \leq \delta u + \zeta\mathbb{E}[f_0(x-u+Y)] \\ & = \delta u + \zeta\mathbb{E}[V(x-u+Y)], \end{aligned}$$

perché $f_0$ è il valore nel modello senza tasse se $x \leq x_0 + 1$ (e qui $x_0 = x_1$, quindi se $x \leq x_1$ allora $x \leq x_1 + 1 = x_0 + 1$), dove cioè $z = 0$. Dato che in un modello senza tasse $V(x) = V(x,0) = f(x,0)$ per il Teorema 2.1, ed essendo $\sup_{u\in[0,x]} \min\{u,z\} = 0$ e $(z-u)^+ = 0$,

$$\begin{aligned} \delta u + f(x-u) &= \sup_{u\in[0,x]} \min\{u,z\} + \delta(u-z)^+ + \zeta\mathbb{E}[f(x-u+Y),(z-u)^+] \\ &= f(x,0). \end{aligned}$$

Il fatto che per ogni $x \in [0,x_1]$ valga $f(x,0) \geq \delta u + f(x-u,0)$ significa che il valore dei dividendi deve sempre essere maggiore della somma dei dividendi tassati al tempo presente con il valore di quelli al tempo successivo, cioè che

$f(x, 0)$ soddisfa l'equazione di Bellman, e quindi $f(x, 0)$ è la funzione valore ottima.
Per tutti gli altri casi si ragiona allo stesso modo fatto per $0 \leq x \leq x_1$ e $z = 0$, cioè: si scrive la funzione nel modo $f(x, z) = f_0(x) - C\xi^{x-z}$ e facendo cambi di variabili oppurtuni la si porta nella forma in cui si vuole mostrare essere ottima. Usando argomenti precedentemente dimostrati, per esempio le definizioni di $x_0$ e $x_1$, le quali comportano che $u(x) = 0$ nei casi in cui $x \leq x_0$ o $x \leq x_1$ rispettivamente, si ricavano utili disuguaglianze. A questo punto si mostra come l'espressione della funzione ottenuta soddisfi l'equazione di Bellman, ossia che la funzione massimizza il valore dei dividendi presenti sommato a quello dei dividendi all'istante successivo, ed è quindi ottima (la si può trovare in [4] a pagina 254).

$\square$

# Conclusione

Abbiamo considerato un modello rischioso a tempo discreto in cui una compagnia assicuratrice poteva pagare dividendi e fare iniezioni di capitale al fine di mantenere il surplus positivo. Abbiamo determinato la strategia ottima di dividendi che massimizza il valore atteso scontato dei dividendi meno le iniezioni penalizzate da un fattore $\eta$, nei casi con e senza tasse. Il metodo utilizzato è stato quello della programmazione dinamica, in cui per massimizzare una strategia da un istante iniziale $t_0$ ad uno finale $t_n$ bisogna massimizzare in ogni intervallo $t_k$ ,con $k = 0, \dots, n-1$, la strategia dei dividendi presenti, più il valore atteso di quella dei dividendi all' istante successivo. Nel caso particolare in cui i premi siano minori o uguali all'unità di capitale siamo riusciti a trovare esplicitamente la forma della strategia ottima.
I pagamenti in dividendi devono essere interpretati come una misura del profitto dell'assicuratore: più dividendi può pagare, più disponibilità di capitale ha e quindi vuol dire che ha avuto un profitto maggiore. Al contrario, le iniezioni di capitale ne rappresentano le perdite; infine, la funzione valore che abbiamo studiato deve essere interpretata come una misura di stabilità, essendo definita come la somma in tutti gli istanti dei vari profitti meno le perdite.
Il fattore di penalità $\eta$ riflette il fatto che grosse perdite causano la necessità di azioni amministrative, portando quindi ad avere costi addizionali; inoltre, la scelta di questo fattore da la possibilità di pesare diversamente i profitti e le perdite.
Affinchè la strategia sia ottima è necessario che sia di tipo barriera. Le barriere dei dividendi infatti ci fanno intuire quanto grandi sia ragionevole tenere le fluttuazioni delle riserve di denaro: se queste fluttuazioni sono troppo piccole allora per avere grandi perdite bisogna che il denaro sia molto. Inoltre, avere una grande riserva di denaro significa perdere soldi; infatti il pagamento delle tasse avviene nel momento in cui il processo di surplus senza dividendi e iniezioni (cioè dato dalla somma del surplus all'istante precedente con il profitto all'istante presente) raggiunge un nuovo massimo. Tenendo in considerazione questi fatti si capisce che le riserve di capitale non devono crescere troppo.

# Bibliografia


[1] Kulenko N, Schmidli H (2008) Optimal dividend strategies in a Cramér–Lundberg model with capi- tal injections. Insur. Math. Econ. 43:270–278

[2] de Finetti B (1957) Su un'impostazione alternativa della teoria collettiva del rischio. Trans XVth Int Congress Actuar 2:433–443

[3] Schmidli H (2017) On capital injections and dividends with tax in a diffusion approximation. Scand Actuar J 9:751–760

[4] Bata-Schmidli2020 Optimal capital injections and dividends with tax in a risk model in discrete time. Eur. Actuar. J., 10 (1). S. 235 - 260.

[5] Schmidli H (2008) Stochastic control in insurance. Springer, London

# Appendice A

# risultati utili

Quest'appendice contiene alcuni concetti di teoria della probabilità. Uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ è una terna composta da un insieme $\Omega$, che racchiude i risultati possibili di un determinato esperimento aleatorio, una $\sigma - algebra$ $\mathcal{F}$ ed una misura di probabilità $P$. Con $\mathbb{E}[\cdot]$ si indica il valore atteso di una variabile aleatoria rispetto alla misura del mondo reale $P$, che in un modello a tempo discreto non è altro che la somma dei prodotti tra i valori dei singoli eventi e le relative probabilità che tali valori vengano assunti. Questo operatore gode di alcune proprietà :

- linearità: per ogni $X, Y$ variabili aleatorie vale $\mathbb{E}[\alpha X + \beta Y] = \alpha\mathbb{E}[x] + \beta\mathbb{E}[y]$, con $\alpha, \beta$ scalari.
- $\mathbb{E}[C] = C$ per ogni costante $C$.

Questo perché somma e prodotto sono operatori lineari e perchè, se una variabile aleatoria assume un valore sempre costante, allora assume solo quello e con probabilità 1.
Allo stesso modo della probabilità di un'evento, anche il valore atteso può essere condizionato: in questo caso si usa il simbolo $\mathbb{E}[\cdot|\mathcal{F}]$, dove $\mathcal{F}$ rappresenta l' informazione che conosciamo da cui può dipendere l' evento. $\mathcal{F}$ è una $\sigma - algebra$, cioè:

**Definizione A.1.** *Dato $\Omega$ lo spazio dei campioni (cioè i possibili risultati di un'esperimento aleatorio), $\mathcal{F}$ è una $\sigma - algebra$ di sottoinsiemi di $\Omega$ se per ogni insieme $A$:*

*(i)* $\Omega \in \mathcal{F}$

*(ii)* $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

*(iii)* $A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i\geq 1} A_i \in \mathcal{F}$, *con* $i \in \mathbb{N}$

Useremo un'importante proprietà del valore atteso condizionato, cioè:

**Lemma A.1.** *:* $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]] = \mathbb{E}[X]$.

*Dimostrazione.* : Sia $\Omega$ un insieme discreto di cardinalità $n$, $X$ variabile aleatoria misurabile rispetto a $\mathcal{F}$ e $x_i, f_j \in \Omega$ con $i, j = 1, \dots, n$ . Allora:

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]] = \sum_j \mathbb{E}[X|\mathcal{F} = f_j]P[\mathcal{F} = f_j] = \sum_j \sum_i x_i P[X = x_i|\mathcal{F} = f_j]P[\mathcal{F} = f_j]$$

usando la proprietà della probabilità condizionata $P[A|B] = \dfrac{P[A \cap B]}{P[B]}$

$$= \sum_i \sum_j x_i P[X = x_i \cap \mathcal{F} = f_j] = \sum_i x_i \sum_j P[X = x_i \cap \mathcal{F} = f_j]$$

$$= \sum_i x_i P[X = x_i] = \mathbb{E}[X].$$

□

Per concludere la caratterizzazione del valor medio, diamone il significato in caso di *parte positiva* o *parte negativa* di una funzione:

$$\mathbb{E}[X^+] = \sum_{x \in (0,\infty)} xP[X = x], \qquad \mathbb{E}[X^-] = -\sum_{x \in (-\infty,0)} xP[X = x].$$

Queste derivano direttamente dal fatto che sommare sugli altri indici (cioè sulle $x$ negative e positive rispettivamente) aggiungerebbe solo una serie di zeri.