

Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Matematica “Tullio Levi Civita”

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo
Galilei”

Corso di Laurea in Fisica



TESI DI LAUREA IN FISICA

TEOREMI DI FROBENIUS E
CHOW-RASHEVSKY PER CAMPI
VETTORIALI LIPSCHITZIANI

Relatore: Prof. Franco Rampazzo

Correlatore: Prof. Pieralberto Marchetti

Laureando: Paolo Simonetti

ANNO ACCADEMICO 2015-2016

05/12/2016

Anche stavolta, è andata così.

Indice

1	Introduzione	3
2	Sistema di controllo	7
2.1	Definizioni di base di geometria differenziale	7
2.2	Sistema STLC e globalmente controllabile	8
3	Caso smooth	11
3.1	Parentesi di Lie	11
3.2	Teorema di commutatività	13
3.3	Distribuzioni e Teorema di Frobenius	17
3.4	Algebra di Lie e Teorema di Chow-Rashevsky	21
4	Caso non smooth	25
4.1	Ridefinizione degli oggetti di GD	26
4.2	Teorema di rettificabilità dei campi vettoriali lipschitziani . .	29
4.3	Parentesi di Lie multivoche	30
4.4	Teorema di Frobenius multivoco	32
4.5	<i>Generalized Differential Quotients</i> (GDQs)	33
4.6	Flusso di campi vettoriali continui	37
4.7	Teorema di Chow-Rashevsky (non smooth)	40
5	Applicazioni in Meccanica classica	43
5.1	Richiami di Fisica matematica	43
5.2	Legame tra parentesi di Lie e di Poisson	45
5.2.1	Primo legame	45
5.2.2	Secondo legame	47
5.3	Esempi di applicazione dei teoremi di Frobenius e Chow-Rashevsky	48
5.3.1	Tre esempi nel caso smooth: gamba robotica, missile, disco che rotola	48
5.3.2	Un esempio nel caso non-smooth: il non-holonomic integrator	53
5.3.3	Esempio di applicazione del teorema di Frobenius . . .	54
A	Fibrato vettoriale e sue sezioni	57

B	Proprietà del fibrato tangente	59
C	Algebra e campi tensoriali	61
D	Parentesi di Lie di due 1-forme	65
E	Campi F-correlati	69
F	Teoremi di Cauchy-Lipschitz locale e globale	71

Capitolo 1

Introduzione

La Teoria della Controllabilità entra davvero in molti ambiti della Fisica, dalla Meccanica classica (in cui gioca un ruolo fondamentale nella trattazione di sistemi dissipativi) alla Relatività generale, e sono stati scritti interi volumi in merito, come [Schulz, 2006], a cui si rimanda per approfondimenti. Questo lavoro di tesi si suddivide in quattro parti:

- nella prima si è introdotti al concetto di *Controllabilità*, un ambito della Teoria del Controllo; in sostanza, il problema cardine è cercare di studiare, tramite strumenti di Analisi Matematica, gli effetti dell'azione di un osservatore esterno che interagisce su un sistema - detto *sistema di controllo* - mediante una sorta di interruttore (il *controllo*, per l'appunto). In termini lievemente più tecnici, ci si trova davanti alla seguente situazione: si ha un'equazione differenziale della forma $\dot{x} = F(x, u(t), t)$, dove F è un campo vettoriale dipendente dal controllo $u(t)$ (che quindi si può pensare come un interruttore che viene acceso e spento secondo una certa funzione del tempo); in tutta la tesi ci si porrà sempre nelle condizioni per cui, fissato un certo dato iniziale $x(0) = x_0$, la soluzione di tale equazione differenziale esiste sempre ed è unica; ovviamente essa dipende dal controllo $u(t)$: è pertanto interessante studiare l'influenza che ha il controllo sulla soluzione, vedere come essa evolve, studiare la varietà su cui essa si muove, etc. In particolare, sono due i casi più interessanti: il primo corrisponde ad una soluzione che rimane confinata in una particolare sottovarietà dello spazio, la *sottovarietà integrale della distribuzione generata dai campi vettoriali*, e una condizione sufficiente affinché ciò si verifichi è data dal *Teorema di Frobenius*; il secondo è invece relativo ad una soluzione che può muoversi liberamente in tutto lo spazio e raggiungere una qualsiasi configurazione finale nell'intorno di x_0 (e il sistema sarà detto *controllabile*): una condizione sufficiente affinché ciò si verifichi è data dal *Teorema di Chow-Rashevsky*. L'idea di controllabilità può

essere allora espressa dicendo che "si può far fare al sistema ciò che si desidera".

- la seconda parte è volta a introdurre i risultati fondamentali nell'ambito della teoria della controllabilità nel caso di varietà differenziabili e campi vettoriali di classe \mathcal{C}^∞ . Si inizia allora con un breve ripasso dei concetti fondamentali di Geometria differenziale, dalle varietà alle *parentesi di Lie di due campi vettoriali*; in particolare, queste ultime costituiscono lo strumento fondamentale di tutta la trattazione, sia in questo capitolo che nel successivo: tra gli altri, il *teorema di commutatività* evidenzierà un'interpretazione geometrica delle parentesi di Lie, mostrandole come una sorta di misura di quanto i flussi di due campi vettoriali commutino o meno, e dove viene trasportato il punto iniziale nel momento in cui tali flussi vengono tra loro composti opportunamente. Alla luce di questa interpretazione, risulterà facile "visualizzare" i teoremi di Frobenius e di Chow-Rashevsky.
- l'obiettivo della terza parte è arrivare a generalizzare i teoremi di Frobenius e Chow al caso di varietà meno regolari (tipicamente, solo $\mathcal{C}^{(1,1)}$) (si ricordi che una *funzione* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^{(1,1)}$ è una funzione derivabile con derivata lipschitziana. Analogamente vengono definite le varietà di classe $\mathcal{C}^{(1,1)}$.) e di campi vettoriali lipschitziani; si ricordi che una mappa $f : X \rightarrow Y$ tra due spazi normati è *lipschitziana* se esiste una costante $L > 0$ (detta appunto *costante di Lipschitz per f*) tale che $\|f(x_1) - f(x_2)\|_Y \leq L \|x_1 - x_2\|_X, \forall x_1, x_2 \in X$. Sarà necessario ridefinire gli oggetti basilari della geometria differenziale, e in particolare il maggior impegno in questa fase verrà richiesto dallo *spazio tangente* $T_P M$ ad una varietà M in un punto $P \in M$; a metà degli anni '50 è stato infatti dimostrato che la costruzione classica, in base alla quale esso era isomorfo allo spazio delle derivazioni in P , non è più possibile, essenzialmente perché la derivata di una funzione di classe \mathcal{C}^r è una funzione di classe \mathcal{C}^{r-1} , cioè "ha perso un po' di regolarità" (al contrario di quanto accade nel caso \mathcal{C}^∞). Una volta che sarà stato ridefinito $T_P M$, la costruzione del fibrato tangente TM e dei campi vettoriali $X : M \rightarrow TM$ sarà effettuata in modo formalmente identico al caso \mathcal{C}^∞ . Il passo successivo sarà introdurre la parentesi di Lie di due campi vettoriali lipschitziani, detta *parentesi di Lie multivoca*, in modo che abbia proprietà analoghe a quelle già note nel caso classico: per farlo, è necessario fare una digressione sulla teoria delle *mappe set-valued* (poiché tale sarà la parentesi di Lie multivoca di due campi vettoriali) unitamente a una nozione di differenziale per tali mappe, noto come *Generalized Differential Quotient*. Un ruolo importante sarà inoltre svolto da un teorema dell'analisi matematica "classica", il *Teorema di Rademacher*, che garantisce che i campi vettoriali lipschi-

tziani sono differenziabili quasi ovunque, e di conseguenza ha misura di Lebesgue nulla l'insieme dei punti in cui due campi vettoriali non sono differenziabili, ed è in questi punti che vogliamo calcolare la parentesi di Lie multivoca; si prenderà allora una successione $\{P_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di punti regolari che tende ad un punto P di non differenziabilità; si calcola su ogni elemento di tale successione la parentesi di Lie nel modo classico e si considera il limite per $P_\alpha \rightarrow P$, ottenendo - se esiste - un certo campo vettoriale X_α ; si ripete la stessa operazione per un'altra successione $\{P_\beta\}_{\beta \in B}$ che tenda al punto P , ottenendo un altro campo vettoriale X_β (in generale, diverso da X_α); reiterando questo procedimento per ogni possibile successione di punti che tenda a P , si ottiene un insieme di campi vettoriali: tale insieme (o meglio, il suo *inviluppo convesso*, per far sì che la definizione "funzioni bene") costituisce proprio la parentesi di Lie multivoca. Dunque la parentesi di Lie nel caso *non-smooth* non è un campo vettoriale, ma un insieme di campi vettoriali, e ciò renderà necessario modificare lievemente l'enunciato del Teorema di Chow-Rashevsky. Definite le parentesi di Lie multivoche, sarà immediato introdurre il *Teorema di Frobenius multivoco* e, dopo aver introdotto una *formula esatta di composizione dei flussi di due campi vettoriali* (che lega la non commutatività dei due flussi al valore della parentesi di Lie dei due campi vettoriali), anche il *Teorema di Chow-Rashevsky multivoco*.

- l'ultima parte è totalmente incentrata su alcune applicazioni fisiche della teoria sviluppata; in particolare, si mostra come si adoperano i Teoremi di Frobenius e di Chow-Rashevsky in Meccanica classica, e si mostrano due legami fra le parentesi di Lie (oggetto ampiamente approfondito nei capitoli precedenti e introdotto anche per campi vettoriali poco regolari) e le parentesi di Poisson (operazione invece di fondamentale importanza in Fisica Matematica e Meccanica Hamiltoniana): quest'ultimo passaggio, in particolare, consente di generalizzare il calcolo delle parentesi di Poisson anche al caso di funzioni non regolari, e dunque di studiare classi di sistemi hamiltoniani decisamente più ampie di quanto si possa fare con una teoria limitata al solo caso \mathcal{C}^∞ .

In conclusione, questa tesi dà quindi tutti gli strumenti necessari per ampliare lo studio di sistemi hamiltoniani e fornisce inoltre un interessante spunto per la ricerca futura: un grande obiettivo a lungo termine potrebbe essere generalizzare tutti i concetti chiave di Geometria Differenziale (ad esempio la connessione di Levi-Civita), con evidenti applicazioni ad esempio in Relatività generale (così come in qualunque altro campo della Fisica in cui si studino analiticamente delle varietà).

Capitolo 2

Sistema di controllo

2.1 Definizioni di base di geometria differenziale

Di seguito si richiamano alcune definizioni basilari di geometria differenziale, che verranno poi usate nel resto della trattazione: in particolare, ricordiamo le definizioni di *varietà di classe C^s* e di *campo vettoriale*.

Definizione 2.1 (Varietà). *Siano X spazio topologico, $U \subset X$ aperto, e $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) = V \subset \mathbb{R}^n$ (V aperto di \mathbb{R}^n) tali che φ sia un omeomorfismo. La coppia (U, φ) è una carta e l'intero n è detto dimensione della carta; se la varietà X è connessa, tutte le carte devono avere la stessa dimensione, che sarà allora detta dimensione della varietà.*

Si dice varietà topologica uno spazio topologico X con una famiglia di carte $\{(U_i, \varphi_i)_{i \in I}\}$ tali che $X = \bigcup_{i \in I} U_i$.

Sia $\{(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ una famiglia di carte su una varietà di dimensione n . Per ogni coppia di indici $i, j \in I$, definiamo le funzioni di transizione (o di incollamento) come $\eta_{ij} : V_i \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V_j \subset \mathbb{R}^n$ $\eta_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$. Diremo che una varietà topologica è di classe C^s se tutte le funzioni di transizione η_{ij} sono di classe C^s ; in particolare, una varietà di classe C^∞ è detta varietà differenziabile.

Si ricordi inoltre che per ogni punto P di una varietà M è definito uno spazio vettoriale reale $T_P M$ della stessa dimensione di M , detto lo *spazio tangente a M in P* ; nel caso di varietà differenziabili, esso può essere definito in due modi: come classi di equivalenza di curve γ differenziabili passanti per P e come lo spazio delle derivazioni in P . Per una questione di eleganza formale, abitualmente si sceglie la seconda via nella trattazione delle varietà differenziabili; essa però risulta impraticabile nel caso di varietà di regolarità minore: si rimanda alla definizione [4.3] nel paragrafo [4.1] per questo. Per la definizione di campo vettoriale è necessario ricordare la nozione di *fibrato tangente* di una varietà:

Definizione 2.2 (Fibrato tangente). *Sia M una varietà. Poniamo*

$$TM := \bigsqcup_{P \in M} T_P M = \{(P, v) | P \in M, v \in T_P M\}.$$

Sia inoltre $\pi : TM \rightarrow M, (P, v) \mapsto P$ la proiezione. TM , con la mappa π , è detto il fibrato tangente di una varietà.

Per le proprietà del fibrato tangente si veda l'appendice [B] (mentre si consulti l'appendice [A] per la definizione e le proprietà di un *fibrato vettoriale*, oggetto di cui il fibrato rappresenta una sorta di prototipo).

La definizione appena data permette di introdurre la nozione di campo vettoriale:

Definizione 2.3 (Campo vettoriale). *Sia M una varietà e TM , dotato della proiezione π , il suo fibrato tangente. Un campo vettoriale X è una mappa $X : M \rightarrow TM$ tale che $\pi \circ X = id_M$, cioè $\forall P \in M, P \xrightarrow{X} (P, v) \xrightarrow{\pi} P$.*

La regolarità di un campo vettoriale è definita come la sua regolarità in quanto applicazione¹ $M \rightarrow TM$: nel secondo capitolo ci riferiremo esclusivamente a campi vettoriali C^∞ , mentre nel terzo ci si dedicherà a campi vettoriali lipschitziani.

2.2 Sistema STLC e globalmente controllabile

Un sistema di controllo può essere visto come un sistema dinamico il cui comportamento dipende da dei parametri, detti *controlli*, che possono variare per azione dall'esterno. E' naturale assumere che l'insieme di tutte le possibili configurazioni sia una varietà n -dimensionale M e che la dinamica del sistema sia descritta da campi vettoriali, che dipendono anch'essi dai parametri di controllo.

I sistemi di controllo trattati saranno sempre della forma seguente: l'insieme di controllo U sarà un arbitrario sottoinsieme di \mathbb{R}^m , e la dinamica sarà descritta da una funzione $F : M \times U \rightarrow TM$ tale che, $\forall u \in U$, la funzione $F_u : M \rightarrow TM$, definita da $F_u(x) := F(x, u)$, è un campo vettoriale su M . Le funzioni di controllo possono essere di diversi tipi:

Definizione 2.4 (Feedback open loop control). *Un controllo u è detto feedback control, o closed-loop control, se u è una mappa della forma*

$$u : M \rightarrow U.$$

¹Una funzione $f : U \subseteq M \rightarrow V \subseteq N$ tra due varietà di classe C^s si dice di classe C^r , $r \leq s$, se tale è la regolarità della sua rappresentazione $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ nelle carte locali (U, φ) e (V, ψ) (per la definizione data di varietà di classe C^s , questa nozione di regolarità della funzione f non dipende dalle carte locali).

Un controllo u è detto open-loop se u è una curva a valori in U , cioè una mappa della forma

$$u : \mathbb{R} \longrightarrow U.$$

Sono naturalmente possibili controlli di tipo misto, cioè mappe $u : M \times \mathbb{R} \longrightarrow U$. Le traiettorie che corrispondono a una tale scelta di controlli sono quindi le soluzioni dell'equazione differenziale dipendente dal tempo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, u(x, t)) \\ x(0) = \bar{x} \end{cases} \quad (2.1)$$

Definizione 2.5 (Sistema di controllo STLC). *Il sistema di controllo [2.1] è detto localmente controllabile in tempo piccolo (STLC) in $\bar{x} \in M$ se, $\forall t$, l'insieme raggiungibile partendo da \bar{x} , è un intorno di \bar{x} .*

Definizione 2.6 (Sistema di controllo globalmente controllabile). *Il sistema di controllo [2.1] è detto globalmente controllabile se, dati \bar{x} e \tilde{x} , esiste una traiettoria $x : [0, T] \longrightarrow M$ tale che $x(0) = \bar{x}$ e $x(T) = \tilde{x}$.*

I prossimi capitoli saranno dedicati a trovare condizioni necessarie e/o sufficienti per la STLC: in particolare, si dividerà lo studio nel caso in cui le varietà e i campi vettoriali sono molto regolari e in quello in cui tale regolarità non c'è. Nel primo la teoria è ormai consolidata da decenni, per cui sono ben noti i mezzi necessari alla comprensione delle dimostrazioni dei risultati al centro di questa trattazione; nel secondo invece sarà necessario dedicare ampio spazio alla ridefinizione di alcune nozioni fondamentali, come le *parentesi di Lie*, oltre che l'introduzione di nuovi oggetti, come i *GDQs*, per cui sarà necessaria un'ampia premessa in merito.

Capitolo 3

Caso smooth

In questo capitolo gli oggetti trattati saranno tutti "lisci": le varietà saranno differenziabili (cioè di classe C^∞), così come i campi vettoriali (che, come noto, possono allora essere visti come derivazioni, cioè - denotato con C^∞_P l'insieme delle funzioni C^∞ in un intorno aperto del punto P - mappe $X : C^\infty_P \rightarrow \mathbb{R}$ che siano \mathbb{R} -lineari e soddisfino la regola di Leibniz).

3.1 Parentesi di Lie

Definizione 3.1 (Parentesi di Lie). *Siano X, Y campi vettoriali su una varietà differenziabile M . La parentesi di Lie di X, Y è il campo vettoriale $[X, Y]$ su M definito ponendo $[X, Y] = XY - YX$. Diremo che X e Y commutano se $[X, Y] = 0$.*

Proposizione 3.1 (Proprietà della parentesi di Lie). *Siano X, Y, Z campi vettoriali su una varietà differenziabile M ; siano poi $a, b \in \mathbb{R}$, f, g funzioni C^∞ su M . Valgono le seguenti proprietà:*

1. $[X, Y] = -[Y, X]$ (antisimmetria);
2. $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ (bilinearità);
3. $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$ (Identità di Jacobi);
4. $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$;
5. Se, in coordinate locali (e usando la convenzione di somma sugli indici ripetuti di Einstein), scriviamo¹ $X = X^h \partial_h$ e $Y = Y^k \partial_k$, allora si ha $[X, Y] = (X^h \partial_h Y^k - Y^h \partial_h X^k) \partial_k$. In particolare, $[\partial_h, \partial_k] = 0$.

¹Le derivate parziali ∂_i formano un riferimento locale per lo spazio tangente alla varietà: in altre parole, in ogni aperto $U \subset M$ è possibile scrivere un campo vettoriale $X : U \rightarrow TM$ come $X = X^i \partial_i$ tramite delle funzioni $X^i \in C^\infty(U)$.

Dimostrazione. I primi due punti sono banali. Il terzo si verifica semplicemente con un calcolo diretto, esplicitando le parentesi di Lie secondo la loro definizione.

Per il quarto punto:

$$\begin{aligned}
[fX, gY] &= fX(gY) - gY(fX) \\
&= fX(g)Y + fgXY - gY(f)X - gfYX \\
&= fg(XY - YX) + fX(g)Y - gY(f)X \\
&= fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X
\end{aligned}$$

Infine per il quinto:

$$\begin{aligned}
[X^h \partial_h, Y^k \partial_k] &= X^h (\partial_h Y^k) \partial_k + X^h Y^k \partial_h \partial_k - Y^k (\partial_k X^h) \partial_h - Y^k X^h \partial_k \partial_h \\
&= (X^h \partial_h Y^k - Y^k \partial_k X^h) \partial_k + X^h Y^k (\partial_h \partial_k - \partial_k \partial_h) \\
&= (X^h \partial_h Y^k - Y^k \partial_k X^h) \partial_k
\end{aligned}$$

e ciò conclude la dimostrazione. \square

Per proseguire oltre, è necessario richiamare la nozione di *flusso locale di un campo vettoriale*, che viene introdotta dal teorema [3.1]. Si ricordi inoltre la seguente

Definizione 3.2 (Curva integrale). *Sia X un campo vettoriale su una varietà differenziale M . Dato $P \in M$, una curva $\sigma : I \rightarrow M$ (dove I è un intervallo di \mathbb{R} tale che $0 \in I$) tale che $\sigma(0) = P$ e $\sigma'(t) = X(\sigma(t))$, $\forall t \in I$, è detta una curva integrale di X uscente da P .*

Teorema 3.1 (Teorema del flusso). *Sia X un campo vettoriale su una varietà differenziabile M . Allora esistono un unico intorno aperto \mathcal{U} di $\{0\} \times M \subset \mathbb{R} \times M$ e un'unica funzione $\Theta : \mathcal{U} \rightarrow M$, di classe C^∞ , che soddisfano le seguenti proprietà:*

1. $\forall P \in M$, l'insieme $\mathcal{U}^P := \{t \in \mathbb{R} \mid (t, P) \in \mathcal{U}\}$ è un intervallo aperto contenente 0;
2. $\forall P \in M$, la curva integrale $\vartheta^P : \mathcal{U}^P \rightarrow M$ definita da $\vartheta^P(t) := \Theta(t, P)$ è l'unica curva integrale massimale di X uscente da P ;
3. $\forall t \in \mathbb{R}$, l'insieme $\mathcal{U}_t := \{P \in M \mid (t, P) \in \mathcal{U}\}$ è un sottoinsieme aperto di M ;
4. se $P \in \mathcal{U}_t$, allora $P \in \mathcal{U}_{t+s}$ se e solo se $\Theta(t, P) \in \mathcal{U}_s$ e in tal caso si ha

$$\vartheta_s \vartheta_t(P) = \vartheta_{s+t}(P)$$

ove $\vartheta_t : \mathcal{U}_t \rightarrow M$ è definita ponendo $\vartheta_t(P) = \Theta(t, P)$. In particolare, $\vartheta_0 = id$ e ϑ_t è un diffeomorfismo con inversa ϑ_{-t} ;

5. $\forall (t, P) \in \mathcal{U}$, si ha $d(\vartheta_t)_P(X) = X_{\vartheta_t(P)}$ (cioè il differenziale² di ϑ_t trasporta il campo vettoriale X valutato in P nel campo vettoriale X valutato in $\vartheta_t(P)$).
6. $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ e $\forall P \in M$, si ha

$$\frac{d}{dt}(f \circ \vartheta^P)|_{t=0} = X(f)(P).$$

(La dimostrazione del teorema [3.1], un po' lunga, tecnica e non interessante ai fini di questa trattazione, può essere trovata in [Bottacin, 2015]). La mappa $\Theta : \mathcal{U} \rightarrow M$ è detta *Ad essere rigorosi, in effetti, la mappa $P \rightarrow \vartheta_t(P) = \Theta(t, P)$ è detta flusso locale al tempo t ; con una lieve imprecisione di nomenclatura, tuttavia, nel seguito della trattazione con il termine "flusso di un campo vettoriale" ci si riferirà spesso alla mappa ϑ_t , anziché a Θ . il flusso locale del campo vettoriale X . Un campo vettoriale X su una varietà differenziale M è detto *completo* se $\mathcal{U} = \mathbb{R} \times M$, cioè se tutte le curve integrali di X sono definite per ogni $t \in \mathbb{R}$. Prima di passare alla sezione successiva, diamo inoltre la seguente*

Definizione 3.3 (Invarianza). *Dato un campo vettoriale X su una varietà differenziale M , un campo vettoriale Y su M è detto X -invariante se*

$$d(\vartheta_t)_P(Y) = Y_{\vartheta_t(P)}$$

$\forall (t, P)$ nel dominio del flusso locale Θ di X .

In particolare, quindi, il punto 5 del Teorema [3.1] dice che ogni campo vettoriale X è X -invariante.

3.2 Teorema di commutatività

In questa sezione verrà dimostrato il legame tra parentesi di Lie e flusso di due campi vettoriali su una varietà differenziabile M , introducendo la nozione di *derivata di Lie* di un campo vettoriale. Successivamente verrà dimostrato il *teorema di commutatività*, che mostra l'equivalenza tra commutatività di due campi vettoriali e dei rispettivi flussi locali.

Definizione 3.4 (Derivata di Lie). *Siano X, Y due campi vettoriali su una varietà differenziale M e indichiamo con Θ il flusso locale del campo vettoriale X . Il vettore*

$$(\mathcal{L}_X Y)_P := \frac{d}{dt}[d(\vartheta_{-t})(Y_{\vartheta_t(P)})] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d(\vartheta_{-t})(Y_{\vartheta_t(P)}) - Y_P}{t}$$

²Sia $F : X \rightarrow Y$ una funzione tra varietà. Essa induce un omomorfismo di anelli

$$F^*_P : \mathcal{C}^\infty_{Y, F(P)} \rightarrow \mathcal{C}^\infty_{X, P}, f \rightarrow F^*(f) = f \circ F.$$

La funzione lineare $dF_P : T_P X \rightarrow T_{F(P)} Y, D \mapsto D \circ F^*_P$, che per ogni $f \in \mathcal{C}^\infty_{Y, F(P)}$ è tale che si abbia $(D \circ F^*_P)(f) = D(f \circ F)$, è detta *differenziale di F in P* .

è detto la derivata di Lie di Y lungo X in P . Si può dimostrare che se X e Y sono campi vettoriali lisci su una varietà differenziabile, allora $(\mathcal{L}_X Y)_P$ esiste per ogni $P \in M$ e l'assegnazione $P \mapsto (\mathcal{L}_X Y)_P$ definisce un campo vettoriale liscio.

Il seguente teorema mostra come il calcolo della derivata di Lie $(\mathcal{L}_X Y)_P$ si riduca al calcolo della parentesi di Lie $[X, Y]$:

Teorema 3.2 (Legame tra parentesi e derivata di Lie). *Per ogni coppia di campi vettoriali lisci X, Y su una varietà differenziabile M , $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$.*

Dimostrazione. Sia $R(X)$ l'insieme dei punti regolari di X (cioè l'insieme dei punti P tali che $X_P \neq 0$). Si noti che $R(X)$ è un aperto, e che la sua chiusura è il supporto di X . La dimostrazione si divide in tre parti, corrispondenti alla verifica che l'uguaglianza nell'enunciato vale dapprima in tutti i punti di $R(X)$, poi sul supporto di X , $\text{supp}X$, e infine su $M \setminus \text{supp}X$.

- *su $R(X)$.* Se $P \in R(X)$, possiamo scegliere³ delle coordinate lisce (u^i) in un intorno U di P in cui X si scrive localmente come $X = \partial_{u^1}$. In queste coordinate, il flusso di X si scrive come

$$\vartheta_t(u) = (u^1 + t, u^2, \dots, u^n)$$

Di conseguenza, la matrice jacobiana di ϑ_t localmente è l'identità. Di conseguenza, $\forall u \in U$,

$$\begin{aligned} d(\vartheta_{-t})Y_{\vartheta_t(u)} &= d(\vartheta_{-t})(Y^j(u^1 + t, u^2, \dots, u^n)\partial_j|_{\vartheta_t(u)}) \\ &= Y^j(u^1 + t, u^2, \dots, u^n)\partial_j|_u \end{aligned}$$

Usando la definizione di derivata di Lie, questo implica che

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X Y)_u &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Y^j(u^1 + t, u^2, \dots, u^n)\partial_j|_{\vartheta_t(u)} \\ &= \partial_1 Y^1(u^1, \dots, u^n)\partial_j|_u \end{aligned}$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned} [X, Y]_u &= [\partial_{u^1}, Y^j(u^1, \dots, u^n)\partial_j|_u] \\ &= (\partial_{u^1} Y^j(u^1, \dots, u^n))\partial_j|_u \end{aligned}$$

che coincide con l'espressione trovata per la derivata di Lie.

- *su $\text{supp}X$:* poiché la chiusura di $R(X)$ coincide con $\text{supp}X$, questo punto segue dal precedente per continuità.

³Ad essere rigorosi, questa possibilità deriva dal Teorema di Rettificabilità [4.1], che sarà enunciato e dimostrato al paragrafo [4.2], sebbene vi siano già adesso i mezzi per farlo; il motivo di questa disposizione è essenzialmente di compattezza, dato che al paragrafo suddetto si generalizzerà il discorso a campi lipschitziani.

- *su* $M \setminus \text{supp}X$: per definizione di $\text{supp}X$ e per continuità di X , se $P \in M \setminus \text{supp}X$ allora X è identicamente nullo in tutto un intorno U di P . Da un lato, questo implica che il suo flusso locale ϑ_t coincide con l'identità in U per qualsiasi t : si ha quindi $d(\vartheta_t)Y_{\vartheta_t(P)} = Y_P$, cioè $(\mathcal{L}_X Y)_P = 0$; d'altra parte, poiché $X \equiv 0$ in U , si ha che in U vale $[X, Y]_P = 0$.

□

Grazie al Teorema [3.2] diventa immediato calcolare la derivata di Lie di un campo vettoriale liscio Y lungo un altro campo vettoriale liscio X ; come si vede nell'appendice [D], è possibile forzare la regola di Leibniz per definire la derivata di Lie $\mathcal{L}_X \omega$ di una 1-forma differenziale ω rispetto a un campo vettoriale X , e nella stessa appendice, si userà questo risultato per il calcolo della parentesi di Lie $[\omega_1, \omega_2]$ di due 1-forme ω_1 e ω_2 ; ciò tornerà utile nel capitolo [5], dove si mostrerà il collegamento tra parentesi di Lie e parentesi di Poisson e lo si userà in un esempio fisico. Per arrivare a dimostrare il teorema di commutatività, è opportuno ricordare la definizione di *push-forward di un campo vettoriale*:

Definizione 3.5 (Push-forward). *Se M e N sono varietà differenziabili e $F : M \rightarrow N$ è una mappa liscia, per ogni punto $P \in M$ definiamo la mappa $F_* : T_P M \rightarrow T_{F(P)} N$, chiamata il push-forward associato a F , ponendo $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(N)$*

$$(F_* X)(f) = X(f \circ F)$$

Tale mappa è un omomorfismo di spazi tangenti, che diventa un isomorfismo se F è un diffeomorfismo.

Servirà ora il seguente

Lemma 3.1. *Sia $F : M \rightarrow N$ un diffeomorfismo⁴ tra due varietà differenziali M e N , e sia X un campo vettoriale su M con flusso locale φ_t . Allora il campo vettoriale $F_* X$ ha come flusso locale la mappa $F \circ \varphi_t \circ F^{-1}$.*

Dimostrazione. Si ha, $\forall Q \in N, \forall f \in \mathcal{C}^\infty(N)$,

$$(F_* X)_Q(f) = X_{F^{-1}(Q)}(f \circ F) \quad (3.1)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \circ F)(\varphi_h(F^{-1}(Q))) - (f \circ F)(F^{-1}(Q))}{h} \quad (3.2)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(F \circ \varphi_h \circ F^{-1}(Q)) - f(Q)}{h} \quad (3.3)$$

che è esattamente equivalente a dire che $F \circ \varphi_h \circ F^{-1}$ è il flusso locale di $F_* X$. □

⁴Tale richiesta è motivata banalmente dal fatto che si deve applicare il campo vettoriale liscio X alla composizione $F \circ \varphi \circ F^{-1}$, quindi ognuna di queste mappe deve essere definita e differenziabile, in particolare F e F^{-1} .

Corollario 3.1. *Se $F : M \rightarrow M$ è un diffeomorfismo, allora $F_*X = X$ se e solo se $\varphi_t \circ F = F \circ \varphi_t \forall t$.*

Dimostrazione. Grazie al calcolo effettuato nel lemma precedente si era trovato che, $\forall Q \in F(M) \subseteq M, \forall f \in \mathcal{C}^\infty(F(M)) \supseteq \mathcal{C}^\infty(M)$, vale

$$(F_*X)_Q(f) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(F \circ \varphi_h \circ F^{-1}(Q)) - f(Q)}{h}$$

D'altra parte, poiché φ_t è il flusso locale di X , si deve avere

$$X_{F^{-1}(Q)}(f) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\varphi_h(Q)) - f(Q)}{h}$$

Si vede così che le due espressioni coincidono, $\forall Q \in F(M), \forall f \in \mathcal{C}^\infty(F(M))$, se e solo se

$$\varphi_h = F \circ \varphi_h \circ F^{-1}$$

che è equivalente alla tesi (essendo F invertibile). \square

Possiamo ora enunciare il

Teorema 3.3 (Teorema di commutatività). *Siano φ_t e ψ_t i flussi locali di due campi vettoriali lisci X e Y rispettivamente. Allora $[X, Y] = 0$ se e solo se $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t \forall s, t$.*

Dimostrazione. Se $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t \forall s, t$, allora - in riferimento alla notazione del corollario [3.1], posto $F =: \varphi_t : M \rightarrow M$ (che è un diffeomorfismo) - $\varphi_{t*}Y = Y$ per il corollario [3.1] $\forall t$, che chiaramente implica $0 = \mathcal{L}_X Y \stackrel{[3.2]}{=} [X, Y]$.

Viceversa, si supponga $0 = [X, Y] = \mathcal{L}_X Y$, cioè

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\varphi_{h*}Y)_Q - Y_Q}{h}$$

$\forall Q$. Dato $P \in M$, si consideri la curva $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M_P$ (intorno di P in M) definita ponendo, $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon), c(t) := (\varphi_{t*}Y)_P$. Per la derivata prima di tale curva, si ha:

$$\begin{aligned} c'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(t+h) - c(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\varphi_{t+h*}Y)_P - (\varphi_{t*}Y)_P}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_{t*} \circ (\varphi_{h*}Y)_{\varphi_{-t}(P)} - \varphi_{t*} \circ (Y_{\varphi_{-t}(P)})}{h} \\ &= \varphi_{t*} \circ \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\varphi_{h*}Y)_{\varphi_{-t}(P)} - Y_{\varphi_{-t}(P)}}{h} \right) \\ &= \varphi_{t*}(\mathcal{L}_X Y)_{\varphi_{-t}(P)} \\ &\stackrel{hp}{=} \varphi_{t*}(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Di conseguenza, $\forall t, c(t) = c(0)$, cioè $\varphi_{t*}Y = Y$, e si conclude con il corollario [3.1]. \square

3.3 Distribuzioni e Teorema di Frobenius

Scopo di questa sezione è arrivare a dimostrare il Teorema di Frobenius; tale risultato dà una condizione sufficiente per la foliazione dello spazio dello spazio nelle sottovarietà integrali di una distribuzione (oggetto che verrà definito nelle prossime righe): questo significa che un sistema dinamico, soggetto a leggi dinamiche che soddisfano il Teorema di Frobenius, non avrà modo di uscire dalla sottovarietà integrale su cui si trova, il che è totalmente il contrario di ciò che si vuole quando si chiede che il sistema sia controllabile.

Vengono di seguito introdotte le nozioni necessarie per l'enunciato e la dimostrazione del Teorema di Frobenius.

Definizione 3.6 (Distribuzione). *Una distribuzione k -dimensionale su una varietà M (di dimensione $m \geq k$) è un sottoinsieme $\mathcal{D} \subset TM$ del fibrato tangente tale che $\mathcal{D}_P = \mathcal{D} \cap T_P M$ è un sottospazio k -dimensionale di $T_P M, \forall P \in M$. Diremo che la distribuzione k -dimensionale \mathcal{D} è liscia se $\forall P \in M$ esiste un intorno aperto U di P e k campi vettoriali lisci Y_1, \dots, Y_k su U tali che $\mathcal{D}_P = \text{Span}(Y_1(P), \dots, Y_k(P)), \forall P \in U$. La k -upla (Y_1, \dots, Y_k) è detta riferimento locale per \mathcal{D} su U .*

Definizione 3.7 (Involutività). *Una sezione locale di una distribuzione liscia \mathcal{D} su un aperto $U \subseteq M$ di una varietà M è un campo vettoriale X su U tale che $X_P \in \mathcal{D}_P \forall P \in U$. Diremo che la distribuzione liscia \mathcal{D} è involutiva se $[X, Y]$ è una sezione locale di \mathcal{D} su $U, \forall X, Y$ sezioni locali di \mathcal{D} su $U, \forall U$ aperto di M .*

Definizione 3.8 (Sottovarietà integrale). *Sia $\mathcal{D} \subseteq TM$ una distribuzione liscia. Una sottovarietà integrale di \mathcal{D} è una sottovarietà immersa⁵ $S \hookrightarrow M$ (cioè l'immagine di una immersione iniettiva) tale che $T_P S = \mathcal{D}_P, \forall P \in S$. Diremo che \mathcal{D} è integrabile se ogni punto di M è contenuto in una sottovarietà integrale di \mathcal{D} .*

Proposizione 3.2. *Ogni distribuzione liscia integrabile è involutiva.*

⁵ $F : X \rightarrow Y$ è una:

- *immersione* se $dF_P : T_P X \rightarrow T_{F(P)} Y$ è iniettivo, $\forall P \in X$;
- *sommersione* se dF_P è suriettivo, $\forall P$;
- *embedding* se F è un'immersione ed è un omeomorfismo sull'immagine.

Una *sottovarietà embedded* di una varietà X è un insieme $Z \subset X$, dotato di una struttura di varietà differenziabile, tale che la mappa di inclusione $\iota : Z \rightarrow X$ sia un embedding. Una *sottovarietà immersa* è l'immagine di una immersione iniettiva $F : X \rightarrow Y$, considerata con la struttura di varietà indotta da quella di X tramite F .

Dimostrazione. Prima di procedere con la dimostrazione, si ricordi che, se $F : M \rightarrow N$ è una funzione di classe C^∞ tra due varietà differenziali M e N , un campo vettoriale liscio Y su N si dice F -correlato a un campo vettoriale X su M se $Y_{F(P)} = dF_P(X_P), \forall P \in M$. E' facile mostrare (vedasi l'appendice [E]) che, se X_1 e X_2 sono rispettivamente F -correlati a Y_1 e Y_2 , allora $[X_1, X_2]$ è F -correlato a $[Y_1, Y_2]$, risultato che servirà nel seguito di questa dimostrazione.

Sia $\mathcal{D} \subseteq TM$ una distribuzione integrabile, e X, Y due sezioni locali di \mathcal{D} su U . Preso $P \in U$, sia S una sottovarietà integrale di \mathcal{D} su U contenente P . Poiché X e Y sono sezioni locali di \mathcal{D} su U , si ha $X_Q, Y_Q \in T_Q S$ per ogni $Q \in U \cap S$; si può dimostrare (vedasi ad esempio [Lee, 2002], Proposizione 8.27 pag 192) che esistono inoltre dei campi vettoriali \tilde{X}, \tilde{Y} su S tali che X è ι -correlato a \tilde{X} e Y è ι -correlato a \tilde{Y} , dove ι è l'inclusione $\iota : S \rightarrow M$. Di conseguenza, $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ è ι -correlato a $[X, Y]$, cioè $[X, Y]_P \in T_P S, \forall P \in U$, cioè \mathcal{D} è involutiva. \square

Le sottovarietà integrali sono a due a due disgiunte e, in un certo senso, parallele. Per precisare questo concetto, servono un altro paio di definizioni:

Definizione 3.9 (Carta locale piatta). *Sia $\mathcal{D} \subseteq TM$ una distribuzione liscia k -dimensionale in una varietà di dimensione n . Una carta locale (U, φ) è detta piatta per \mathcal{D} se*

- $\varphi(U) = V' \times V''$ con V' aperto in \mathbb{R}^k e V'' aperto in \mathbb{R}^{n-k} ;
- $(\partial_1, \dots, \partial_k)$ è un riferimento locale per \mathcal{D} su U .

Se (U, φ) è una carta locale piatta per \mathcal{D} su U , gli insiemi della forma

$$\{x \in U | x^{k+1} = c^{k+1}, \dots, x^n = c^n\},$$

con $c^{k+1}, \dots, c^n \in \mathbb{R}$ fissati, sono chiamati fette di U .

Definizione 3.10 (Distribuzione completamente integrabile). *Una distribuzione \mathcal{D} liscia è completamente integrabile se per ogni punto $P \in M$ esiste una carta locale (U, φ) in P piatta per \mathcal{D} .*

Ne segue in modo piuttosto ovvio il seguente

Lemma 3.2. *Ogni distribuzione liscia completamente integrabile è involutiva.*

Dimostrazione. Infatti, se (U, φ) è una carta piatta per una distribuzione k -dimensionale liscia \mathcal{D} , allora le fette di U sono chiaramente delle sottovarietà integrali di \mathcal{D} . \square

Si ha quindi la catena di implicazioni *completamente integrabile* \implies *involutiva* \implies *integrabile* \implies *involutiva*. Il Teorema di Frobenius Locale chiude la catena, mostrando che in realtà queste sono equivalenze:

Teorema 3.4 (Teorema di Frobenius (Locale)). *Ogni distribuzione liscia involutiva è completamente integrabile.*

Dimostrazione. Sia \mathcal{D} una distribuzione k -dimensionale liscia involutiva su una varietà differenziale M di dimensione n . Si può dimostrare (vedasi ad esempio [Abate M., 2011], Teorema 3.7.4 pag 173) che per verificare che \mathcal{D} è completamente integrabile basta trovare nell'intorno di ogni punto di M un riferimento locale per \mathcal{D} costituito da campi vettoriali che commutano.

Dato $P \in M$, scegliamo una carta locale (U, φ) centrata in P tale che esista un riferimento locale (X_1, \dots, X_k) per \mathcal{D} su U . Inoltre, a meno di permutare le coordinate, possiamo supporre che

$$\{X_1(P), \dots, X_k(P), \partial_{k+1}|_P, \dots, \partial_n|_P\}$$

sia una base di $T_P M$. Per comodità di notazione, poniamo $X_j := \partial_j$ per $j = k+1, \dots, n$ e, $\forall i = 1, \dots, k$, scegliamo $a_i^j \in \mathcal{C}^\infty(U)$ tali che $X_i = \sum_{j=1}^n a_i^j \partial_j$. La matrice $(a_i^j)_{i,j}$ è invertibile in P (perché (X_1, \dots, X_n) è una base di $T_P M$), quindi $\det(a_i^j) \neq 0$; a meno di restringere U , possiamo supporre che tale determinante sia non nullo in tutto U , e quindi che (a_i^j) sia invertibile in tutto U ; sia $(b_j^i)_{i,j}$ la sua inversa. Allora, $\forall j = 1, \dots, n$

$$\partial_j = \sum_{i=1}^n b_j^i X_i = \sum_{i=1}^k b_j^i X_i + \sum_{i=k+1}^n b_j^i \partial_i.$$

Definiamo allora, $\forall j = 1, \dots, k$, delle sezioni locali su U

$$Y_j := \sum_{i=1}^k b_j^i X_i$$

. Ci basta mostrare che (Y_1, \dots, Y_k) è un riferimento per \mathcal{D} composto da campi vettoriali che commutano.

Sia $\tilde{\varphi} := \pi \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^k$, dove $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ è la proiezione sulle prime k coordinate. Allora, $\forall Q \in U$ e $\forall j = 1, \dots, k$, abbiamo

$$\partial_j|_{\tilde{\varphi}(Q)} = d(\tilde{\varphi})_Q(\partial_j) = d(\tilde{\varphi})_Q Y_j + \sum_{i=k+1}^n b_j^i d(\tilde{\varphi})_Q \partial_i = d(\tilde{\varphi})_Q(Y_j) \quad (3.4)$$

Poiché le $\partial_1|_{\tilde{\varphi}(Q)}, \dots, \partial_k|_{\tilde{\varphi}(Q)}$ sono linearmente indipendenti, anche le Y_1, \dots, Y_k devono essere linearmente indipendenti in ogni punto di U e pertanto formano un riferimento locale per \mathcal{D} su U . Ciò mostra che $d\tilde{\varphi}|_{\mathcal{D}_Q}$ è iniettivo, $\forall Q \in U$.

Si ha

$$d(\tilde{\varphi})_Q([Y_i, Y_j]) = [d(\tilde{\varphi})_Q(Y_i), d(\tilde{\varphi})_Q(Y_j)] \stackrel{[3.4]}{=} [\partial_i, \partial_j]|_{\tilde{\varphi}(Q)} = 0$$

$\forall i, j = 1, \dots, k$. Poiché la distribuzione \mathcal{D} è involutiva e Y_1, \dots, Y_k sono un riferimento locale per \mathcal{D} su U , si ha $[Y_i, Y_j] \in \mathcal{D}_P, \forall i, j$; avendo dimostrato che in \mathcal{D}_P $d\tilde{\varphi}_Q$ è iniettivo, la [3.3] implica $[Y_i, Y_j] = 0, \forall i, j = 1, \dots, k$. Si conclude così che Y_1, \dots, Y_k è un riferimento locale per \mathcal{D} su U costituito da campi vettoriali che commutano, come voluto. \square

Tale teorema ha anche una formulazione più generale, che richiede tuttavia la definizione di *foliazione* di una varietà e l'enunciazione del Lemma [3.3] e della Proposizione [3.3], dove quest'ultima descrive come sono disposte le sottovarietà integrali di \mathcal{D} :

Proposizione 3.3. *Sia $\mathcal{D} \subseteq TM$ una distribuzione k -dimensionale liscia involutiva in una varietà M , sia (U, φ) una carta piatta per \mathcal{D} , e S una sottovarietà integrale di \mathcal{D} . Allora $S \cap U$ è unione al più numerabile di aperti connessi di fette di U , ciascuno dei quali è aperto in S ed embedded in M .*

Dimostrazione. Siccome l'inclusione $\iota : S \hookrightarrow M$ è continua, l'intersezione $S \cap U = \iota^{-1}(U)$ è aperta in S e quindi è unione al più numerabile di componenti connesse, ciascuna delle quali è aperta in S .

Sia V una di queste componenti connesse; cominciamo col dimostrare che è contenuta in un'unica fetta di U . Essendo (U, φ) una carta piatta per \mathcal{D} , per ogni $P \in U$ abbiamo $\mathcal{D}_P = \ker(dx^{k+1}) \cap \dots \cap \ker(dx^n)$, quindi la restrizione di dx^{k+1}, \dots, dx^n a TV è identicamente nulla. Essendo V connesso, questo vuol dire che le funzioni x^{k+1}, \dots, x^n sono costanti in V , quindi V è contenuto in un'unica fetta N di U . Siccome N è una sottovarietà embedded di M , l'inclusione $V \hookrightarrow N$ è di classe \mathcal{C}^∞ , essendo a valori in M . Ma allora è un'immersione iniettiva fra varietà della stessa dimensione, cioè è un embedding. Essendo N embedded in M , ne segue che V è embedded in M . \square

Definizione 3.11 (Foliazione). *Una foliazione di dimensione k di una varietà di dimensione n è una partizione \mathcal{F} di M in sottovarietà immerse connesse, disgiunte e di dimensione k (dette foglie della foliazione) tali che $\forall P \in M$ esiste una carta locale (U, φ) in P che soddisfa le seguenti condizioni:*

- $\varphi(U) = V' \times V''$ con V' aperto in \mathbb{R}^k e V'' aperto in \mathbb{R}^{n-k} ;
- ogni foglia della foliazione interseca U o nell'insieme vuoto o in un'unione disgiunta, al più numerabile, di fette k -dimensionali di U della forma $\{x^{k+1} = c^{k+1}, \dots, x^n = c^n\}$ per opportune costanti $c^{k+1}, \dots, c^n \in \mathbb{R}$. Una tale carta locale sarà detta piatta per la foliazione \mathcal{F} .

Lemma 3.3. *Sia $\mathcal{D} \subseteq TM$ una distribuzione liscia involutiva in una varietà M , e sia $\{N_\alpha\}$ una collezione di sottovarietà integrali di \mathcal{D} connesse con intersezione non vuota. Allora $N = \bigcup_\alpha N_\alpha$ ha un'unica struttura di varietà*

rispetto alla quale è sottovarietà integrale connessa di \mathcal{D} tale che ciascun N_α sia aperto di N .

(La dimostrazione di questo lemma, un po' tecnica e non fondamentale alla fine della comprensione del discorso, può essere trovata ad esempio in [Abate M., 2011], lemma 3.7.16, pag. 179).

Possiamo ora enunciare e dimostrare il Teorema di Frobenius nella sua forma globale:

Teorema 3.5 (Teorema di Frobenius (Globale)). *Sia $\mathcal{D} \subseteq TM$ una distribuzione liscia involutiva in una varietà M . Allora la collezione di tutte le sottovarietà integrali massimali di \mathcal{D} forma una foliazione di M .*

Dimostrazione. Per ogni $P \in M$ indichiamo con L_P l'unione di tutte le sottovarietà integrali connesse di \mathcal{D} contenenti P ; grazie al lemma [3.3], L_P è una sottovarietà integrale connessa di \mathcal{D} , chiaramente massimale. Se $L_P \cap L_{P'} \neq \emptyset$, allora $L_P \cup L_{P'}$ è ancora una sottovarietà integrale connessa di \mathcal{D} , quindi per massimalità si deve avere $L_P = L_{P'}$. Quindi le sottovarietà integrali connesse di \mathcal{D} formano una partizione di M . Se (U, φ) è una carta locale piatta per \mathcal{D} , allora $L_P \cap U$ è unione al più numerabile di aperti di fette di U per la Proposizione [3.3]. Se per una di tali fette S si avesse $L_P \cap S \neq S$, allora $L_P \cup S$ sarebbe una sottovarietà integrale connessa di \mathcal{D} contenente propriamente L_P , contro la massimalità. Quindi $L_P \cap U$ è sempre unione di una quantità al più numerabile di fette di U , per cui $\{L_P | P \in M\}$ è una foliazione. \square

3.4 Algebra di Lie e Teorema di Chow-Rashevsky

Definizione 3.12 (Algebra di Lie). *Uno spazio vettoriale V è un'algebra di Lie se esiste una mappa $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ bilineare, antisimmetrica e soddisfacente l'identità di Jacobi.*

Naturalmente, si è visto nella Proposizione [3.1] che le parentesi di Lie godono di tali proprietà: di conseguenza, lo spazio vettoriale $F^\infty(M)$ di tutti i campi vettoriali lisci su una varietà M , dotato delle parentesi di Lie, è un'algebra di Lie. Per ogni famiglia finita di campi vettoriali (X_1, \dots, X_n) , $\text{Lie}(X_1, \dots, X_n)$ denoterà l'algebra di Lie generata da X_1, \dots, X_n . Ne segue che $\text{Lie}(X_1, \dots, X_n)$ è uguale al più piccolo sottospazio vettoriale S di $F^\infty(M)$ che soddisfa anche $[X, S] \subset S, \forall X \in (X_1, \dots, X_n)$. Per ogni $P \in M$, $\text{Lie}_P(X_1, \dots, X_n) = \{X(P) | X \in \text{Lie}(X_1, \dots, X_n)\}$ è un sottospazio vettoriale di $T_P M$, la cui dimensione si trova calcolando successivamente

$$[X_i, X_j]_P, \quad [X_i, [X_j, X_k]]_P, \quad [X_i, [X_j, [X_k, X_l]]]_P$$

e arrestandosi quando si ottengono elementi di $T_P M$ che sono combinazioni lineari dei precedenti. Se tale dimensione è indipendente da $P \in M$, essa

verrà definita come la dimensione di $\text{Lie}(X_1, \dots, X_n)$.

Il teorema di Chow-Rashevsky verrà enunciato nella forma più generale e poi dimostrato in un caso particolare. Prima di farlo, occorre introdurre alcune nozioni:

Definizione 3.13 (Compatibilità con una distribuzione). *Un campo vettoriale X su M si dice compatibile con una distribuzione $\mathcal{D} \subseteq TM$ se $X_P \in \mathcal{D}_P, \forall P \in M$. Denotiamo con $D_{\mathcal{D}}$ l'insieme dei campi compatibili con la distribuzione \mathcal{D} .*

Definizione 3.14 (Algebra involupante). *Se \mathcal{D} è una distribuzione e $D_{\mathcal{D}}$ l'insieme dei campi vettoriali compatibili con \mathcal{D} , allora è possibile definire l'algebra involupante $\bar{D}_{\mathcal{D}}$ di $D_{\mathcal{D}}$ come la minima sottoalgebra⁶ di $\Xi(M)$ contenente $D_{\mathcal{D}}$ (dove con $\Xi(M)$ si è denotata l'algebra dei campi vettoriali su M con il prodotto dato dalle parentesi di Lie).*

Per ogni $P \in M$ risulta allora determinato un sottospazio $\bar{D}_{\mathcal{D}P} \subseteq T_P M$ generato dai valori X_P di tutti i campi vettoriali $X \in \bar{D}_{\mathcal{D}}$. Se la dimensione di tutti questi spazi è la medesima per ogni $P \in M$, allora rimane definita la distribuzione $\bar{\mathcal{D}} := \bigcup_{P \in M} \bar{D}_{\mathcal{D}P}$ liscia e involutiva (perché $\bar{D}_{\mathcal{D}}$ è una sottoalgebra di $\Xi(M)$), dunque completamente integrabile. La distribuzione originaria \mathcal{D} verrà allora detta *distribuzione di Chow*.⁷ Possiamo ora enunciare una prima versione del Teorema di Chow-Rashevsky:

Teorema 3.6 (Teorema di Chow-Rashevsky). *Se \mathcal{D} è una distribuzione di Chow, allora:*

- *le sue classi di accessibilità (cioè le sue varietà integrali connesse massimali) sono le varietà integrali connesse di $\bar{\mathcal{D}}$;*
- *le sue funzioni integrali (cioè le funzioni F tali per cui $v(F) = 0, \forall v \in \mathcal{D}$) sono tutte e sole le funzioni integrali di $\bar{\mathcal{D}}$.*

Una formulazione più intuitiva del Teorema di Chow-Rashevsky richiede un paio di definizioni in più riguardanti una generica curva a valori su una varietà M di dimensione m :

⁶Quindi $\bar{D}_{\mathcal{D}}$ è chiuso rispetto all'operazione data dalle parentesi di Lie.

⁷L'idea alla base di tutto questo discorso è la seguente: si ha una certa distribuzione generata da k campi vettoriali X_1, \dots, X_k ; questa in generale non è chiusa rispetto alle parentesi di Lie (che è come dire che non è involutiva): si calcolano allora tutte le possibili parentesi di Lie dei campi vettoriali dati; in generale, alcune dipenderanno da combinazioni lineari degli X_1, \dots, X_k , altre saranno indipendenti dagli stessi e le denotiamo con \tilde{X}_j ; si prendono queste ultime e si calcolano nuovamente parentesi di Lie del tipo $[X_i, \tilde{X}_j]$, producendo nuovamente, in generale, alcuni campi vettoriali dipendenti dai precedenti e altri no; si reitera così il procedimento fino ad ottenere un insieme chiuso rispetto alle parentesi di Lie, che è proprio l'algebra involupante della distribuzione di partenza. Essendo chiusa rispetto all'operazione di parentesi di Lie, l'algebra involupante è una distribuzione involutiva e dunque completamente integrabile; fissata la configurazione iniziale del sistema, l'unica sottovarietà integrale di questa distribuzione costituisce l'insieme dei punti in cui il sistema può muoversi, cioè è la sola classe di accessibilità del sistema.

Definizione 3.15 (Curva ammissibile e subunitaria). *Sia $P \in M$, U un intorno di P e si consideri una famiglia di m campi vettoriali X_1, \dots, X_m (ognuno dei quali in U può essere scritto come $X_i = \sum_j X_i^j \partial_j$, $i = 1, \dots, m$, tramite delle funzioni $X_i^j \in C^\infty(U)$). Una curva $\gamma : [0, T] \rightarrow U$ si dice ammissibile se è assolutamente continua ed esiste una funzione misurabile $h : [0, T] \rightarrow U$ tale che $\dot{\gamma}(t) = \sum_{j=1}^m h_j(t) X_j(\gamma(t))$ per q.o. $t \in [0, T]$. La curva γ verrà poi detta subunitaria se è ammissibile e se $\|h\|_{L^\infty} \leq 1$.*

Definizione 3.16 (Distanza di Carnot-Carathéodory). *Definiamo la distanza di Carnot-Carathéodory d_{CC} su U come*

$$d_{CC}(x, y) := \inf\{T : \text{esiste } \gamma : [0, T] \rightarrow U \text{ tale che } \gamma(0) = x, \gamma(T) = y\}$$

con la convenzione $\inf \emptyset = \infty$ (cioè che la distanza tra due punti non connessibili è infinita). Lo spazio (U, d_{CC}) è detto spazio di Carnot-Carathéodory.

Definizione 3.17 (Condizione di Chow-Hörmander). *Si dice che m campi vettoriali X_1, \dots, X_m su una varietà differenziabile M di dimensione $n \geq m$ soddisfano la condizione di Chow-Hörmander se per ogni P in un intorno $U \subseteq M$ è massimo, pari a n , il rango del sottospazio $\text{Lie}_P(X_1, \dots, X_m)$. (M, d_{CC}) è detta varietà sub-Riemanniana se X_1, \dots, X_m soddisfano tale condizione.*

Il teorema di Chow-Rashevsky, nella seconda versione che verrà data a breve, dice che se X_1, \dots, X_m soddisfano la condizione di Chow-Hörmander, allora due punti qualsiasi di M sono connessibili tramite una curva ammissibile. E' tuttavia necessaria la seguente proposizione, che dà anche una stima della distanza di Carnot-Carathéodory tra due punti in un aperto U di M su cui sono definiti gli X_1, \dots, X_m ; si ricordi inoltre che la *lunghezza di un commutatore* è il numero di campi coinvolti nell'operazione (per esempio, il commutatore $[f, g]$ ha lunghezza 2, mentre il commutatore $[f, [g, h]]$ ha lunghezza 3).

Proposizione 3.4. *Sia K un insieme compatto rispetto alla topologia euclidea e contenuto in U , e supponiamo che per ogni $x \in K$ la condizione di Chow-Hörmander sia soddisfatta da commutatori di lunghezza minore o uguale a k . Allora esiste $C = C(K)$ tale che, $\forall x, y \in K$,*

$$d(x, y) \leq C|x - y|^{\frac{1}{k}}$$

La dimostrazione di questo teorema, piuttosto lunga e laboriosa, può essere trovata ad esempio in [Vittone, 2003].

Teorema 3.7 (Caso particolare del Teorema di Chow-Rashevsky).

Se X_1, \dots, X_m sono m campi vettoriali su una varietà differenziabile M soddisfacenti la condizione di Chow-Hörmander, allora $d_{CC}(x, y) < \infty$, $\forall x, y \in U$ (aperto di M); in particolare, esistono curve ammissibili che uniscono x e y .

Dimostrazione. Per ogni $x \in U$ esiste $k = k(x)$ tale che nel punto x l'intero spazio tangente è generato da commutatori di lunghezza minore o uguale a k dei campi X_1, \dots, X_m ; d'altra parte, la continuità di X_1, \dots, X_m (e dei loro commutatori) garantisce che k sarà tale che in tutto un intorno (euclideo) U_x di x i commutatori di lunghezza minore o uguale a k di tali campi hanno rango massimo. Sia dunque K un compatto (rispetto alla topologia euclidea) contenuto in U : ricoprendolo con una famiglia finita $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_q}\}$ di tali intorni deduciamo che la condizione di Chow-Hörmander è soddisfatta su tutto K da commutatori di lunghezza minore o uguale a $\sup\{k(x_1), \dots, k(x_q)\}$. Considerando allora una successione di compatti che invadono U , e tenendo conto del fatto che U è connesso, il teorema risulta dimostrato grazie alla Proposizione [3.4]. \square

Capitolo 4

Caso non smooth

Affrontiamo adesso il problema di ripetere la costruzione del precedente capitolo nel caso di campi vettoriali molto meno regolari di quelli usati finora: nello specifico, chiederemo che essi siano solo lipschitziani, in un senso che introdurremo a breve. Il motivo per cui si considera la lipschitzianità come richiesta minimale è sostanzialmente derivante dai teoremi noti di Cauchy-Lipschitz di esistenza e unicità locale o globale delle soluzioni di un'equazione differenziale: un breve richiamo a questi risultati è nell'appendice [F].

La trattazione successiva si articolerà dunque nei seguenti passaggi:

- ridefinizione dei concetti chiave della geometria differenziale, dalle varietà, al fibrato tangente, fino ai campi vettoriali;
- breve digressione sul teorema di rettificabilità dei campi vettoriali lipschitziani;
- introduzione di una nuova nozione di parentesi di Lie, e conseguente ridefinizione del concetto di distribuzione;
- teorema di Frobenius;
- ridefinizione del differenziale: nella fattispecie, introduzione delle mappe set-valued, del *Generalized Differential Quotients* (GDQs) e di un teorema di mappa aperta necessario per il punto finale;
- introduzione di una formula esatta riguardo la composizione di flussi di campi vettoriali;
- enunciato e dimostrazione del teorema di Chow-Rashevsky.

Il teorema di Chow-Rashevsky verrà enunciato e dimostrato in una versione (non-smooth) che coinvolge le parentesi di Lie di solo due sistemi di campi vettoriali, alcuni continui e altri solamente lipschitziani; una versione che coinvolga ordini più alti di parentesi di Lie può essere provata, ma richiede una regolarità maggiore e la ricerca è ancora attiva in merito, pertanto se ne darà solo un rapido accenno.

4.1 Ridefinizione dei concetti chiave di geometria differenziale

Definizione 4.1 (Atlante lipschitziano). *Sia M un insieme e I una famiglia di indici.*

Un atlante lipschitziano su M è una collezione \mathcal{A} di carte locali su M del tipo

$$\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i), i \in I\}$$

tale che

1. *le carte sono a due a due Lipschitz-compatibili, ovvero: per ogni coppia di carte $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$ tali che $\varphi_{i,j} : U_{i,j} \rightarrow W_{i,j} \subset \mathbb{R}^d$, si ha che $\varphi_i(U_i \cap U_j) =: W_{ij}$ e $\varphi_j(U_i \cap U_j) =: W_{ji}$ sono aperti - eventualmente vuoti - di \mathbb{R}^d e le funzioni di transizione $\varphi_{ij} : W_{ij} \rightarrow W_{ji}$ e $\varphi_{ji} : W_{ji} \rightarrow W_{ij}$, definite ponendo $\varphi_{ij} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ e $\varphi_{ji} := \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$, sono lipeomorfismi (cioè lipschitziane, invertibili e con inversa lipschitziana);*
2. $\bigcup_{i \in I} U_i = M$;

Due atlanti su M si dicono Lipschitz-equivalenti se la loro unione è ancora un atlante lipschitziano, cioè se ogni carta del primo atlante è Lipschitz-compatibile con qualsiasi carta del secondo; questa nozione introduce chiaramente una relazione di equivalenza sull'insieme degli atlanti lipschitziani. Una struttura di varietà lipschitziana su M sarà allora definita come una classe di equivalenza di atlanti lipschitziani su M .

In modo del tutto analogo si può definire la nozione di *varietà di classe $\mathcal{C}^{1,1}$* , semplicemente sostituendo alla richiesta (1) la condizione che le carte locali siano a due a due *compatibili di classe $\mathcal{C}^{1,1}$* (cioè chiedendo che le funzioni di transizione sull'intersezione di carte siano diffeomorfismi φ di classe \mathcal{C}^1 con derivate φ' e $(\varphi^{-1})'$ lipschitziane in \mathbb{R}^d).

Si ricordi che nel caso smooth un'applicazione differenziabile tra varietà era definita tale se era differenziabile la sua rappresentazione nelle carte locali. In modo del tutto analogo si introdurrà allora la seguente

Definizione 4.2 (Funzioni lipschitziane tra varietà). *Siano M_1 e M_2 due varietà differenziabili di classe $\mathcal{C}^{1,1}$ ed $P \in M_1$. Una mappa $F : M_1 \rightarrow M_2$ è lipschitziana in P se è lipschitziana la sua rappresentazione nelle carte locali, cioè se per ogni coppia di carte (U, φ) e (V, ψ) rispettivamente in M_1 e M_2 , tali che $P \in U$ e $F(U) \subset V$, l'applicazione composta $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^{d_1} \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^{d_2}$ è lipschitziana su $\varphi(U)$ nel senso usuale.*

Si ricordi che nel caso \mathcal{C}^∞ lo spazio tangente ad una varietà differenziabile M in un suo punto P ha una duplice definizione: da un lato lo si può

vedere come insieme di classi di equivalenza di curve differenziabili passanti per P , dall'altro come insieme di operatori di derivazione sullo spazio delle funzioni $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ in P (e nel capitolo precedente si era seguita la prima strada). Tale duplice costruzione (in particolare, la seconda) è possibile solo in questo caso: i problemi che nascono nel caso di una regolarità minore sono essenzialmente legati al fatto che, se una funzione è di classe \mathcal{C}^r , la sua derivata è di classe \mathcal{C}^{r-1} (per una spiegazione dettagliata, si consulti [Newns and Walker, 1956]).

Definizione 4.3 (Spazio tangente). *Sia M una varietà di classe $\mathcal{C}^{1,1}$ e $P \in M$. Denotiamo con Γ_P l'insieme delle curve differenziabili passanti per P e definiamo su tale insieme una relazione di equivalenza ponendo*

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \frac{d}{d\lambda}(\varphi \circ \gamma_1)|_0 = \frac{d}{d\lambda}(\varphi \circ \gamma_2)|_0$$

per ogni carta (U, φ) con $P \in U$.

Lo spazio tangente a M nel punto $P \in M$, che sarà denotato con $T_P M$ è l'insieme quoziente

$$T_P M := \Gamma_P / \sim = \{[\gamma], \gamma \in \Gamma_P\}$$

Anche in questo caso $T_P M$ eredita la struttura di spazio vettoriale di \mathbb{R}^d ; data una carta (U, φ) , si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra $T_P M$ e \mathbb{R}^d tramite l'applicazione

$$D_\varphi : T_P M \longrightarrow \mathbb{R}^d, [\gamma] \longmapsto D_\varphi([\gamma]) = \frac{d}{d\lambda}(\varphi \circ \gamma)$$

La definizione di fibrato tangente, con questa definizione di spazio tangente, segue in maniera fedele il caso già trattato nel capitolo precedente: si considera l'insieme delle coppie $(P \in M, T_P M)$ e si definisce il fibrato tangente TM come $TM := \bigcup_{P \in M} (\{P\} \times T_P M)$; anche in questo caso, TM eredita una struttura di varietà indotta da quella di M , e si definiscono nello stesso modo la proiezione di TM su M , le sezioni e le fibre di TM .

Definizione 4.4 (Campo vettoriale (localmente lipschitziano)). *Sia M una varietà differenziabile di classe $\mathcal{C}^{1,1}$. Un campo vettoriale X su M è definito come un'applicazione*

$$X : M \longrightarrow TM$$

tale che $\pi \circ X = \text{id}_M$, dove π è la proiezione di TM su M . Se $p \in M$, si denoterà con $pX := X(p)$ un vettore di $T_p M$.

X è un campo vettoriale (localmente) lipschitziano se esso è un'applicazione (localmente) lipschitziana da M in TM . Data una qualsiasi carta (U, φ) su

M con coordinate locali (x_1, \dots, x_d) , ogni campo vettoriale localmente lipschitziano X su U in coordinate si può scrivere

$$X = \sum_{i=1}^d a_i \partial_i$$

dove $a_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni localmente lipschitziane: dunque, $\forall p \in M$, il vettore $pX := X_p$ si può scrivere

$$pX = \sum_{i=1}^d a_i(p) \partial_i|_p.$$

Le curve integrali di un campo vettoriale X uscenti da un punto P di una varietà M di classe $\mathcal{C}^{1,1}$ si definiscono nello stesso modo del caso smooth (vedasi la definizione [3.2] nel paragrafo [3.1]). Dai teoremi classici sulle equazioni differenziali, si dimostra che, fissato un campo vettoriale lipschitziano X su M , per ogni punto $P \in M$ esiste un'unica curva integrale di X passante per P . Inoltre, risulta evidente che se il campo vettoriale X è lipschitziano, allora la curva integrale di X è $\mathcal{C}^{1,1}$. Essendo le curve integrali definite nello stesso modo del caso liscio, anche il flusso di un campo vettoriale lipschitziano avrà la stessa definizione e proprietà del caso classico (si veda il [3.1] nel paragrafo [3.1]), fatta ovviamente eccezione per la dipendenza \mathcal{C}^∞ dai dati iniziali: denoteremo il flusso di un campo vettoriale (localmente) lipschitziano X su una varietà M di classe $\mathcal{C}^{1,1}$ come

$$\cdot \exp(\cdot X) : \mathbb{R} \times M \rightarrow M, (t, P) \mapsto P \exp(tX) = \xi_{X,P}(t)$$

Con la definizione di campo vettoriale e di spazio tangente che è stata data, si possono re-introdurre le distribuzioni, definite allo stesso modo del caso liscio (definizione [3.6], paragrafo [3.3]), e in particolare si può quindi definire la nozione di *distribuzione lipschitziana*:

Definizione 4.5 (Distribuzione lipschitziana). *Una distribuzione \mathcal{D} di dimensione m si dice lipschitziana su $U \subset M$ se esistono m campi vettoriali lipschitziani X_1, \dots, X_m definiti su U tali da generare $\mathcal{D}_p, \forall p \in U$, cioè tali che*

$$D_p = \text{Span}\{pX_1, \dots, pX_m\}, \forall P \in U$$

La definizione di distribuzione *involutiva* dovrà invece attendere una introduzione di una nuova nozione di parentesi di Lie, che verrà data nel paragrafo [4.3]. Tale definizione sarà poi centrale in tutto il resto della trattazione, consentendo una riformulazione del Teorema di rettificabilità, del Teorema di Frobenius e del Teorema di Chow-Rashevsky.

4.2 Teorema di rettificabilità dei campi vettoriali lipschitziani

Il *Teorema di rettificabilità* è sostanzialmente il teorema di Frobenius in una dimensione. Nel caso smooth esso afferma:

Teorema 4.1 (Teorema di rettificabilità (smooth)). *Sia $P \in M$ un punto regolare di un campo vettoriale X su una varietà differenziabile M . Allora esiste una carta locale (U, φ) , centrata in P , tale che, dette (x^1, \dots, x^n) le coordinate locali su U , $X|_U = \frac{\partial}{\partial x^1}$.*

Dimostrazione. Il problema è locale, quindi possiamo supporre $M = \mathbb{R}^n$ (o un suo aperto) e $P \equiv O$, origine degli assi cartesiani.

Dato che $X_P \neq O$, a meno di permutare le coordinate, possiamo supporre che la prima coordinata di X non si annulli in P . Ci proponiamo di trovare una carta locale centrata in $P = O$, tale che si abbia

$$X_Q = d(\varphi^{-1})_{\varphi(Q)} \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_{\varphi(Q)} \right)$$

$\forall Q \in U$.

Sia $\Theta : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ il flusso locale di X e sia $\varepsilon > 0$ e U_O intorno di $O \in \mathbb{R}^n$ tali che $(-\varepsilon, \varepsilon) \times U_O \subset U$. Poniamo $S_O := U_O \cap \{x^1 = 0\}$ e $S := \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (0, x') \in S_O\} \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Definiamo $\psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times S \rightarrow \mathbb{R}^n$ ponendo $\psi(t, x') := \vartheta_t(0, x')$ (cioè ψ è la restrizione del flusso locale di X a S). Vogliamo mostrare che $d\psi(\frac{\partial}{\partial t}) = X \circ \psi$ e che $d\psi_{t=0, x'=\mathbf{0}_{n-1}}$ è invertibile. Allora ψ sarà localmente invertibile e l'inversa locale $\varphi = \psi^{-1}$ ci fornirà la carta locale cercata.

Dato $(t_0, x'_0) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times S$ e data $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} d\psi_{t_0, x'_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(t_0, x'_0)} \right) (f) &= \frac{\partial}{\partial t} (f \circ \psi) \Big|_{(t_0, x'_0)} \\ &= \frac{d}{dt} f(\vartheta_t(0, x'_0)) \Big|_{t=t_0} \\ &= X(f)(\psi(t_0, x'_0)) \end{aligned}$$

Poiché questo vale per ogni f , si ha $d\psi(\frac{\partial}{\partial t}) = X \circ \psi$, come volevamo. Siccome $\psi(0, x') = \vartheta_0(0, x') = (0, x')$, $\forall x' \in S$ (cioè $\psi|_S = \text{id}$), si ha

$$d\psi_{(0, \mathbf{0}_{n-1})} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_O, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

mentre abbiamo visto che

$$d\psi_{(0, \mathbf{0}_{n-1})} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = X_O$$

e ricordiamo che abbiamo supposto che la prima coordinata di X_O sia non nulla. Pertanto $d\psi_{(0, \mathbf{0}_{n-1})}$ manda la base $\{\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ di $T_{(0, \mathbf{0}_{n-1})}\mathbb{R}^n$ in una base di $T_P M = T_O \mathbb{R}^n$, e ciò significa che $d\psi_{(0, \mathbf{0}_{n-1})}$ è invertibile, come volevamo. \square

Questo teorema può essere generalizzato al caso di campi vettoriali lipschitziani in uno spazio di Banach (cioè uno spazio vettoriale normato completo rispetto a tale norma); un *campo vettoriale su uno spazio di Banach* M è definito come una mappa da un intorno $U \subset M$ in M ; un *lipeomorfismo su uno spazio di Banach* M è una mappa lipschitziana invertibile con inversa lipschitziana.

Prima di enunciare il teorema di rettificabilità nella versione non-smooth, si premette la seguente

Definizione 4.6 (Locale coniugazione topologica). *Siano U_1, U_2 due intorni in uno spazio di Banach M . Due campi vettoriali $X_1 : U_1 \rightarrow M$ e $X_2 : U_2 \rightarrow M$ sono detti localmente topologicamente coniugati in un intorno di $P_1 \in U_1$ e $P_2 \in U_2$ se esistono due intorni aperti W_1 di P_1 e W_2 di P_2 e un omeomorfismo $\varphi : W_1 \rightarrow W_2$ con $\varphi(P_1) = P_2$ tale che, $\forall P \in W_1$ una curva $\sigma_P : I \rightarrow W_1$ è curva integrale di X_1 se e solo se $\varphi \circ \sigma_P : I \rightarrow W_2$ è curva integrale di X_2 .*

Teorema 4.2 (Teorema di rettificabilità per campi lipschitziani). *Sia M uno spazio di Banach, U un suo sottoinsieme. Sia $X : U \rightarrow M$ un campo vettoriale lipschitziano. Sia v un vettore non nullo in M e $Y : M \rightarrow M$ il campo vettoriale costante definito da $Y(w) = v, \forall w \in M$. Allora, per ogni punto $P \in U$ con $X(P) \neq \mathbf{0}$, i campi vettoriali X e Y sono localmente topologicamente coniugati in un intorno di P e $P' \equiv O$; l'omeomorfismo che dà la coniugazione è un lipeomorfismo.*

La dimostrazione di questo teorema, articolata prima nel caso $M = \mathbb{R}^n$ e successivamente generalizzata ad un generico spazio di Banach, può essere trovata in [Calcaterra and Boldt, 2003].

4.3 Parentesi di Lie multivoche

Come nel caso smooth, la generalizzazione del teorema di rettificabilità per campi lipschitziani al teorema di Frobenius non liscio richiede l'introduzione delle parentesi di Lie (oggetto che poi naturalmente comparirà anche nel Teorema di Chow-Rashevsky). L'obiettivo di questo paragrafo è allora dare una buona definizione di parentesi di Lie per campi lipschitziani, che saranno chiamate *parentesi di Lie multivoche* e indicate con $[\cdot, \cdot]_{set}$ (mentre si continuerà ad usare la notazione $[\cdot, \cdot]$ per quelle classiche).

Prima di definire le parentesi di Lie multivoche, si ricorda la definizione di *inviluppo convesso di un insieme* e si enuncia il *Teorema di Rademacher*:

Definizione 4.7 (Inviluppo complesso di un insieme). *Un insieme A si dice convesso se, dati $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$ e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$ tali che $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, allora anche $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in A$.*

Dato un insieme B , si dirà inviluppo convesso di B l'intersezione di tutti i convessi contenenti di B e lo si denoterà con $\text{co}B$.

Teorema 4.3 (Teorema di Rademacher). *Siano M e N due varietà di classe \mathcal{C}^1 e $\psi : M \rightarrow N$ un'applicazione localmente lipschitziana. Allora esiste un sottoinsieme $\widetilde{M} \subset M$ di misura di Lebesgue nulla tale che ψ è differenziabile in ogni punto di $M \setminus \widetilde{M}$, cioè ψ è differenziabile quasi ovunque.*

Si veda [Nekvinda and Zajíček, 1988] per la dimostrazione.

Definizione 4.8 (Parentesi di Lie multivoiche). *Siano X e Y due campi vettoriali localmente lipschitziani su una varietà M . Si definiscono le parentesi di Lie multivoiche come segue: $\forall p \in M$ sia*

$$p[X, Y]_{\text{set}} := \text{co}\left\{ \lim_{s \rightarrow +\infty} p_s[X, Y] \right\}$$

dove la successione $\{p_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ soddisfa alle seguenti proprietà:

- $p_s \in \text{diff}(X) \cap \text{diff}(Y), \forall s \in \mathbb{N}$ (cioè all'insieme dei punti in cui X e Y sono differenziabili, insieme che per il Teorema di Rademacher [4.3] ha misura piena in M);
- $\lim_{s \rightarrow +\infty} p_s = p$;
- $\lim_{s \rightarrow +\infty} p_s[X, Y]$ esiste.

Quindi nel caso non smooth, per ogni punto P nel dominio di due campi vettoriali lipschitziani X_1, X_2 , la parentesi di Lie multivoca $[X_1, X_2]_{\text{set}}(P)$ è un insieme non vuoto di vettori, anziché un singolo vettore come nel caso \mathcal{C}^1 .

Proposizione 4.1 (Proprietà di $[\cdot, \cdot]_{\text{set}}$). *L'operatore $[\cdot, \cdot]_{\text{set}}$ gode delle seguenti proprietà, che discendono da quelle di $[\cdot, \cdot]$:*

1. per ogni $p \in M$ si verifica che $p[X, Y]_{\text{set}}$ è un sottoinsieme convesso, compatto e non vuoto dello spazio tangente $T_p M$.
2. le parentesi di Lie multivoiche sono antisimmetriche, cioè $p[X, Y]_{\text{set}} = -p[Y, X]_{\text{set}}, \forall p \in M$. Ciò significa che

$$p[X, Y]_{\text{set}} = \{v : -v \in p[Y, X]_{\text{set}}\};$$

3. ogni campo vettoriale localmente lipschitziano X soddisfa $p[X, X] = \{0\}$

4. se $p \in \text{diff}(X) \cap \text{diff}(Y)$, $\{p[X, Y]\} \subseteq p[X, Y]_{\text{set}}$ (in generale si ha inclusione stretta).
5. vale una versione modificata dell'identità di Jacobi: se X_1, X_2, X_3 sono campi vettoriali di classe almeno $\mathcal{C}^{1,1}$, si ha, $\forall p \in M$,

$$\begin{aligned} & p[[X_1, X_2]_{\text{set}}, X_3]_{\text{set}} + p[[X_3, X_1]_{\text{set}}, X_2]_{\text{set}} \\ & + p[[X_2, X_3]_{\text{set}}, X_1]_{\text{set}} \supseteq \{0\} \end{aligned}$$

Ora che sono state introdotte le nuove parentesi di Lie, la definizione di *involuntività* per una distribuzione lipschitziana è formalmente identica a quella data per una distribuzione classica:

Definizione 4.9 (Distribuzione lipschitziana involutiva). *Sia \mathcal{D} una distribuzione localmente lipschitziana su una varietà M (definizione [4.5] al paragrafo [4.1]). La distribuzione \mathcal{D} si dice involutiva in senso multivoco o multi-involutiva se per ogni coppia di campi vettoriali localmente lipschitziani X, Y appartenenti a \mathcal{D} si ha che $p[X, Y]_{\text{set}} \subset \mathcal{D}_P, \forall p \in M$.*

4.4 Teorema di Frobenius multivoco

Avendo introdotto le parentesi di Lie multivoche e le distribuzioni lipschitziane involutive, è ora possibile enunciare il *Teorema di Frobenius multivoco*, che verrà esposto in una forma più completa di quella in cui è stato presentato per il caso smooth al paragrafo [3.3]. Per tale completezza è bene ricordare la definizione di *distribuzione completamente integrabile* e specializzarla al caso di distribuzioni lipschitziane:

Definizione 4.10 (Completa $\mathcal{C}^{1,1}$ -integrabilità). *Siano n, k due interi non negativi tali che $k \leq n$. Sia \mathcal{D} una distribuzione k -dimensionale e lipschitziana su una varietà n -dimensionale M . Diciamo che \mathcal{D} è completamente $\mathcal{C}^{1,1}$ -integrabile se per ogni $Q \in M$ esiste un intorno aperto U di Q , due sottoinsiemi aperti $X \subseteq \mathbb{R}^k, Y \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ e una carta lipschitziana (U, ψ) che soddisfa $\psi(U) = X \times Y$ tale che sia soddisfatta la seguente condizione: se $\bar{Q} \in U$ e $(\bar{x}, \bar{y}) = \psi(\bar{q})$, allora*

- la controimmagine $\psi^{-1}(X \times \{\bar{y}\})$ è una sottovarietà di classe $\mathcal{C}^{1,1}$;
- $T_{\bar{q}}(\psi^{-1}(X \times \{\bar{y}\})) = \mathcal{D}_{\bar{q}}$

Teorema 4.4 (Teorema di Frobenius multivoco). *Siano n, k interi non negativi tali che $k \leq n$ e sia \mathcal{D} una distribuzione k -dimensionale lipschitziana su una varietà n -dimensionale M . Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- \mathcal{D} è completamente $\mathcal{C}^{1,1}$ -integrabile;

- \mathcal{D} è multi-involutiva;
- per ogni punto $P \in M$ esiste un intorno aperto $U \subseteq M$ di P e un riferimento locale per \mathcal{D} su U composto da campi vettoriali lipschitziani che commutano (cioè tali che la loro parentesi di Lie multivoca, valutata in uno qualsiasi dei punti di U , contiene il solo vettore nullo);

La dimostrazione di tale teorema è data in [Rampazzo, 2007]; l'enunciato qui sopra è stato riportato in forma ridotta rispetto a quella in cui si trova nell'articolo appena citato: una sua versione più completa richiede l'introduzione del concetto di *Generalized Differential Quotients* (GDQs), che viene riportato qui di seguito.

4.5 Generalized Differential Quotients (GDQs)

Di seguito viene introdotto innanzitutto il concetto di mappa *set-valued* (in contrapposizione al quale le funzioni "classiche" verranno chiamate *single-valued*), dando una nozione di convergenza del grafico di tali mappe. Tramite quest'ultima saranno definite le mappe set-valued *regolari*, che introducono i GDQs.

Definizione 4.11 (Mappa set-valued). *Una mappa set-valued (SVM) è una terna $F = (A, B, G)$ tale che A e B sono insiemi e $G \subseteq A \times B$ (in alternativa, si adotta anche la notazione $F : A \rightrightarrows B$); A , B e G sono rispettivamente detti la sorgente, l'obiettivo e il grafico di F , indicati rispettivamente con $\text{so}(F)$, $\text{ta}(F)$ e $\text{gr}(F)$. Si denota con $\text{SVM}(A, B)$ l'insieme di tutte le mappe set-valued da A a B ; se A e B sono spazi metrici, $\text{SVM}_{\text{comp}}(A, B)$ denota l'insieme di tutte le mappe set-valued con grafico compatto; inoltre, $F = (A, B, G)$ è detta essere graficata in modo compatto se, per qualunque sottoinsieme compatto K di A , la restrizione di F a K ha grafico compatto.*

Si ricordi inoltre che, se A e B sono spazi topologici, $F = (A, B, G)$ è *superiormente semi-continua* se l'anti-immagine tramite F di un qualsiasi sottoinsieme chiuso di B è un sottoinsieme chiuso di A . Risulta allora semplice vedere che

Proposizione 4.2. *Se A e B sono spazi metrici (in particolare, dunque, con topologia indotta dalla metrica) e $F = (A, B, G)$ assume valori compatti, allora F è superiormente semi-continua se e solo se è graficata in modo compatto¹.*

Come anche nel caso delle funzioni classiche, per poter parlare di "differenziazione" bisogna innanzitutto definire una nozione di convergenza ad un certo limite e poi caratterizzare le funzioni "regolari":

¹Si noti che per le funzioni ordinarie vale una condizione analoga: una funzione continua manda insiemi compatti in insiemi compatti.

Definizione 4.12 (Convergenza interna secondo il grafico). *Si dice che una successione $\{F_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ di elementi di $SVM_{\text{comp}}(A, B)$ converge internamente secondo il grafico a un $F \in SVM_{\text{comp}}(A, B)$ - e si scrive $F_j \xrightarrow{\text{igr}} F$ - se, per ogni sottoinsieme aperto Ω di $X \times Y$ contenente il grafico di F , esiste un $j_\Omega \in \mathbb{N}$ tale che il grafico di F_j è contenuto in Ω per ogni $j \geq j_\Omega$.*

La definizione precedente è un caso speciale di un'idea più generale. Dato un insieme X , si indichi con $\text{Comp}^0(X)$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi compatti di X . Si può definire una topologia $\mathcal{T}_{\text{Comp}^0(X)}$ su $\text{Comp}^0(X)$ dichiarando che un sottoinsieme $U \subset \text{Comp}^0(X)$ è aperto se, $\forall K \in U$, $\exists \tilde{U}$ sottoinsieme aperto di X tale che $K \subseteq \tilde{U}$ e $\{J \in \text{Comp}^0(X) : J \subseteq \tilde{U}\} \subseteq U$. La convergenza interna secondo il grafico di una successione $\{F_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ di elementi di $SVM_{\text{comp}}(K, Y)$ a un elemento $F \in SVM_{\text{comp}}(K, Y)$ è equivalente alla convergenza al grafico di F dei grafici delle F_j nella topologia $\mathcal{T}_{\text{Comp}^0(X)}$.

Definizione 4.13 (Mappa set-valued regolare). *Siano X e Y spazi metrici. Una mappa set-valued regolare da X a Y è una mappa set-valued da X a Y è una mappa set-valued $F \in SVM(X, Y)$ che sia graficata in modo compatto e, per ogni sottoinsieme K di X , che sia limite - nel senso della convergenza interna secondo il grafico - di una successione di funzioni classiche da K in Y . L'insieme di tutte le mappe set-valued regolari da X a Y è denotato con $\text{REG}(X; Y)$.*

In un certo senso, la nozione di mappa set-valued regolare generalizza quella di funzione classica continua; si vede in particolare che una funzione classica è una mappa set-valued regolare se e solo se essa è una funzione continua. Inoltre, è semplice provare che $\text{REG}(X; Y)$ è un insieme chiuso rispetto alla composizione fra suoi elementi (vedasi [Andrei A. Agrachev, 2008], Teorema 3.6 pag 233, per la dimostrazione di questo fatto). Inoltre, è possibile dimostrare il seguente fatto importante, che sostanzialmente richiama un po' il Teorema del punto fisso di Brouwer per le funzioni ordinarie²:

Teorema 4.5 (Teorema del punto fisso). *Sia K un sottoinsieme (non vuoto) compatto e convesso in uno spazio normato X e sia $F = (K, K, G)$ una mappa set-valued regolare. Allora F ha un punto fisso, cioè un punto $k \in K$ tale che $k \in F(k)$.*

²Il teorema di Brouwer è un risultato della topologia che mette in relazione il concetto di funzione continua con la proprietà di avere un punto fisso; esso può essere enunciato in diversi modi, a seconda dell'ambito in cui lo si usa:

- ogni funzione continua che manda un sottoinsieme compatto, convesso e non vuoto di \mathbb{R}^n in sé ha un punto fisso;
- in uno spazio euclideo ogni campo vettoriale continuo sulla palla unitaria tale che sul bordo della palla punta verso l'interno o è tangente al bordo deve avere un punto di singolarità all'interno della sfera.

Le mappe set-valued regolari sono insomma un analogo delle funzioni continue, ma questa generalizzazione ha caratteristiche più forti su domini particolari rispetto alle rispettive caratteristiche di quest'ultime. Ora è possibile introdurre il corrispettivo del concetto di differenziazione per le mappe set-valued:

Definizione 4.14 (Generalized Differential Quotient). *Siano X e Y spazi vettoriali reali normati finito-dimensionali, $F(X, Y, G)$ una mappa set-valued, $\bar{x}_* \in X, \bar{y}_* \in Y$ e $S \subseteq X$. Un generalized differential quotient (GDQ) di F in $(\bar{x}_* \in X, \bar{y}_*)$ nella direzione di S è un sottoinsieme compatto di $\text{Lin}(X, Y)$ (insieme delle applicazioni lineari da X a Y), con la proprietà che, per ogni intorno $\hat{\Lambda}$ di Λ in $\text{Lin}(X, Y)$, esistono U e G tali che:*

- U è un intorno di \bar{x}_* in X ;
- G è una mappa set-valued regolare da $U \cap S$ in $\hat{\Lambda}$.
- $\bar{y}_* + G(x)(x - \bar{x}_*) \subseteq F(x) \forall x \in U \cap S$;

Il simbolo $GDQ(F, \bar{x}_*, \bar{y}_*, S)$ denoterà l'insieme di tutte i GDQs di F in $(\bar{x}_* \in X, \bar{y}_*)$ nella direzione di S .

Come per il caso della derivata di una funzione ordinaria, vale un teorema di "differenziazione della funzione composta" anche per il GDQ; prima di enunciarlo, occorre introdurre la definizione di *sottoinsieme retratto* e *quasi-retratto* S di uno spazio topologico T :

Definizione 4.15 (Sottoinsieme retratto e quasi-retratto). *Sia T uno spazio topologico e S un sottoinsieme di T . Una retrazione da T a S è una funzione continua $\rho : T \rightarrow S$ tale che $\rho(s) = s, \forall s \in S$ (cioè $\rho|_S \equiv id_S$). Diciamo che S è un retratto di T se una tale retrazione esiste; non è difficile mostrare che un sottoinsieme retratto S di uno spazio topologico di Hausdorff T è necessariamente chiuso.*

Si dirà invece che S è un quasi-retratto di T se, per ogni sottoinsieme compatto K di S esiste un intorno U di K e una mappa continua $\rho : U \rightarrow S$ tale che $\rho(s) = s, \forall s \in K$.

Infine, se $\bar{s}_ \in T$, si dirà che S è un quasi-retratto locale in $\bar{s}_* \in T$ se esiste un intorno U di $\bar{s}_* \in T$ tale che $S \cap U$ sia un quasi-retratto di U .*

Esempio 4.1. *L'insieme $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \cup \{(0, 0)\}$ è un quasi-retratto di \mathbb{R}^2 . Infatti, se K è un sottoinsieme compatto di S , allora anche l'involuppo convesso \hat{K} di K è compatto, e $\hat{K} \subseteq S$, essendo quest'ultimo convesso: ciò implica che \hat{K} sia un quasi-retratto di \mathbb{R}^2 . D'altro canto, S non è un retratto di \mathbb{R}^2 , perché S non è un insieme chiuso di \mathbb{R}^2 (in generale, non può esistere una funzione continua $S \rightarrow \mathbb{R}^2$, visto che S non è né aperto né chiuso). Ciò mostra che la nozione di quasi-retratto è più generale di quella di retratto (e lo stesso si può dire del retratto e quasi-retratto locali); in particolare, ogni sottoinsieme retratto è anche quasi-retratto.*

Con queste nozioni, è possibile enunciare la *regola della catena* per il GDQ:

Teorema 4.6 (Regola della catena). *Per $i = 1, 2, 3$, sia X_i spazio vettoriale normato reale di dimensione finita e $\bar{x}_{*,i}$ un punto di X_i . Si assuma che, per $i = 1, 2$,*

1. $F_i : X_i \rightarrow X_{i+1}$ sia una mappa set-valued;
2. S_i sia un sottoinsieme di X_i ;
3. $\Lambda_i \in GDQ(F_i, \bar{x}_{*,i}, \bar{x}_{*,i+1}, S_i)$;
4. $F_1(S_1) \subseteq S_2$;

Sia inoltre valida una delle seguenti due ipotesi:

1. S_2 è un quasi-retrato di X_2 in $\bar{x}_{*,2}$;
2. esiste un intorno $U \subset X_1$ di $\bar{x}_{*,1}$ tale che la restrizione di F_1 a $U \cap S_1$ è una funzione ordinaria.

Allora $\Lambda_2 \circ \Lambda_1 \in GDQ(F_2 \circ F_1, \bar{x}_{*,1}, \bar{x}_{*,3}, S_1)$.

La dimostrazione di questo risultato è piuttosto articolata (si veda ad esempio [Andrei A. Agrachev, 2008], pagg. 248-252, Teorema 4.14), e per lo scopo di questa trattazione è interessante unicamente sapere che anche per i GDQs vale una regola della catena, segno che questa generalizzazione del concetto di differenziale di una funzione è ben costruita.

Così come per le funzioni ordinarie si aveva il *Teorema di invertibilità locale*³ (diretta conseguenza del Teorema di Dini) strettamente legato alle proprietà del differenziale di tali funzioni, allo stesso modo qui si ha un risultato analogo, detto *Teorema di mappa aperta*:

Teorema 4.7 (Teorema di mappa aperta). *Siano X, Y due spazi vettoriali reali normati di dimensione finita, e sia C un cono convesso in X (cioè un sottoinsieme di X chiuso rispetto a combinazioni lineari di elementi di X tramite coefficienti positivi). Sia $F : X \rightarrow Y$ una mappa set-valued, e $\Lambda \in GDQ(F, 0, 0, C)$. Sia $\bar{y} \in Y$ tale che $\bar{y} \in \text{Int}(LC)$ per ogni $L \in \Lambda$ (dove $LC := \{Ly | y \in C\}$). Allora esiste un cono convesso chiuso D in X , tale che $\bar{y} \in \text{Int}(D)$, ed esistono delle costanti $\bar{\alpha}, k$ con la proprietà che, $\forall y \in D$ tale che $\|y\| \leq \bar{\alpha}$, $\exists x \in C$ tale che $\|x\| \leq k\|y\|$ e $y \in F(x)$.*

³Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n , $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$; sia $x_0 \in \Omega$ e supponiamo che $Df(x_0)$ sia una matrice invertibile. Il Teorema di invertibilità locale afferma allora che esiste un aperto U di x_0 e un aperto V di $f(x_0)$ per cui $f(U) = V$ e $f|_U : U \rightarrow V$ è biettiva, la sua inversa f^{-1} è differenziabile e se $f(x) =: y$ (con $x \in U$), si ha $D(f^{-1}(y)) = [D(f(x))]^{-1}$.

Nota Bene 4.1. Per $\bar{y} \neq 0$, tale teorema enuncia la proprietà di mappa aperta direzionale con crescita lineare e angolo fissato per la restrizione di F a C , dato che asserisce che esiste un intorno aperto N della semiretta $H_{\bar{y}} := \{r\bar{y} : r \geq 0\}$ (nello spazio H_Y di tutte le semirette chiuse passanti per l'origine e per un punto di Y) tale che, se D_N è l'unione di tutti gli elementi di N , allora, per ogni palla sufficientemente piccola $B_Y(0, \alpha)$, l'insieme $(B_Y(0, \alpha) \cap D_N) \setminus \{0\}$ è contenuto nell'immagine tramite F di un intorno $B_X(0, r) \cap C$ di 0 in C , il cui raggio può essere scelto proporzionale ad α . Per $\bar{y} = 0$, il teorema enuncia la proprietà di mappa aperta forata con crescita lineare per la restrizione di F a C , perché in tal caso il cono D è necessariamente l'intero spazio Y , quindi il teorema asserisce che per ogni palla sufficientemente piccola $B_Y(0, \alpha)$, l'intorno bucato $(B_Y(0, \alpha) \setminus \{0\})$ è contenuto nell'immagine tramite F di un intorno $B_X(0, r) \cap C$ di 0 in C , il cui raggio può essere scelto proporzionale ad α .

4.6 Flusso di campi vettoriali continui

La definizione di *flusso di un campo vettoriale* era stata data all'interno del Teorema [3.1] al paragrafo [3.1]; tale definizione era tuttavia inserita nel contesto dei campi vettoriali lisci, per cui ne viene ridata una adesso usando il linguaggio delle mappe set-valued.

Si assuma, in tutto il resto di questo paragrafo, che n sia un numero intero non negativo e Ω un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n .

Definizione 4.16 (Flusso di un campo vettoriale). *Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un campo vettoriale continuo su Ω , il flusso di f , φ^f , è la mappa set-valued $\varphi^f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \Omega$, il cui valore, per un dato $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$, è l'insieme di tutti gli $y \in \Omega$ con la proprietà che esista una curva integrale $\xi : I \rightarrow \Omega$ di f , definita su un qualche intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, $0, t \in I$, tale che $\xi(0) = x$ e $\xi(t) = y$.*

Dato $x_* \in \Omega$, si ponga $L^f(x_*) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $L^f(x_*)(v, r) = v + rf(x_*)$. Se f è un campo vettoriale continuo su Ω , allora l'insieme $\{L^f(x_*)\}$ è un GDQ di φ^f in $((x_*, 0), x_*)$ nella direzione di \mathbb{R}^n (per la dimostrazione di questa affermazione, si veda ad esempio [Rampazzo and Sussmann, 2001]).

Siano ora f un campo vettoriale localmente lipschitziano, $x \in \Omega$ e $t \in \mathbb{R}$, e si denoti con xe^{tf} il valore della curva integrale ξ di f al tempo t , con $\xi(0) = x$. Dati due campi vettoriali localmente lipschitziani f, g , un punto $x \in \Omega$ e due numeri reali $t, s \in \mathbb{R}$, si ponga

$$\psi^{f,g}(x, t, s) - x = xe^{tf}e^{sg}e^{-tf}e^{-sg}$$

Si ha allora

$$\begin{aligned}
\psi^{f,g}(x, t, s) - x &= xe^{tf}e^{sg}e^{-tf}e^{-sg} \\
&= \int_0^s (xe^{tf}e^{\sigma g}ge^{-tf}e^{-\sigma g} - xe^{tf}e^{\sigma g}e^{-tf}ge^{-\sigma g}) d\sigma \\
&= \int_0^s (xe^{tf}e^{\sigma g}e^{-tf}(e^{tf}ge^{-tf} - g)e^{-\sigma g}) d\sigma \\
&= \int_0^s d\sigma \int_0^t (xe^{tf}e^{\sigma g}e^{-tf}(e^{\tau f}[f, g]e^{-\tau f})e^{-\sigma g}) \\
&= \int_0^s d\sigma \int_0^t (xe^{tf}e^{\sigma g}e^{(\tau-t)f}[f, g]e^{-\tau f}e^{-\sigma g}) \quad (4.1)
\end{aligned}$$

L'integrando nella formula precedente è il vettore determinato come segue: si valutano le parentesi di Lie $[f, g]$ nel punto $\vartheta(x, \sigma, t, \tau) := xe^{tf}e^{\sigma g}e^{(\tau-t)f}$ e le si trasporta nel punto $\psi^{f,g}(x, t, \sigma) = xe^{tf}e^{\sigma g}e^{-tf}e^{-\sigma g} = \vartheta(x, \sigma, t, \tau)e^{-\tau f}e^{-\sigma g}$ tramite il differenziale in $\vartheta(x, \sigma, t, \tau)$ del diffeomorfismo $y \mapsto ye^{-\tau f}e^{-\sigma g}$. Dalla disuguaglianza di Gronwall segue che esiste una costante C - che maggiora $\|f(y)\|, \|g(y)\|$ e le loro derivate in ogni y - tale che

$$\begin{aligned}
&\|xe^{tf}e^{\sigma g}e^{(\tau-t)f}[f, g]e^{-\tau f}e^{-\sigma g} - [f, g](\vartheta(x, \sigma, t, \tau))\| \\
&\leq C|s|e^{|s|C}(1 + C|t|e^{|t|C})\|[f, g](\vartheta(x, \sigma, t, \tau))\|
\end{aligned}$$

da cui si ricava che

$$\begin{aligned}
&\|\psi^{f,g}(x, t, s) - x - \int_0^s d\sigma \int_0^t ([f, g](\vartheta(x, \sigma, t, \tau)))\| \\
&\leq 2C^3|s|^2|t|e^{|s|C}(1 + C|t|e^{|t|C}) \quad (4.2)
\end{aligned}$$

Questo discorso vale nell'esplicita ipotesi in cui f, g siano campi vettoriali lisci. Se ne può fare uno anche per campi vettoriali lipschitziani, in cui torna utile la stima [4.2].

Siano infatti f, g campi vettoriali lipschitziani, e si fissi un punto $x_* \in \Omega$. Si scelga poi un numero positivo $\hat{\rho}$ tale che la palla compatta

$$\hat{V} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_*\| \leq \hat{\rho}\}$$

sia contenuta in Ω . Sia C_1 un maggiorante di $\|f(x)\|$ e $\|g(x)\|$ per tutti gli $x \in \hat{V}$, e C_2 una costante di Lipschitz per f e g su \hat{V} , e si ponga $C := \max(C_1, C_2)$.

Per $0 < \rho < \hat{\rho}$, sia

$$\gamma(\rho) := \sup_{x \in DIFP(f) \cap DIFP(g)} d(D[g(x)]f(x) - D[f(x)]g(x), [f, g](x_*))$$

con la condizione $\|x - x_*\| \leq \rho$. Si vede facilmente che $\lim_{\rho \rightarrow 0} \gamma(\rho) = 0$. Il teorema di Rademacher [4.3] al paragrafo [4.3] afferma che f, g sono differenziabili quasi ovunque: siano allora f^ξ, g^ξ le loro regolarizzazioni; allora, a meno di sostituire \hat{V} con una palla più piccola e prendendo uno

ξ sufficientemente piccolo, C è una costante di Lipschitz anche per f^ξ e g^ξ e un maggiorante per $\|f^\xi(x)\|$ e $\|g^\xi(x)\| \forall x$, quindi si applica la [4.2], in cui al posto di f, g basta scrivere f^ξ, g^ξ rispettivamente. La distanza $\Delta(y, \xi) := d([f^\xi, g^\xi](y), [f, g](x_*))$, tramite dei calcoli un po' laboriosi, è stimabile come

$$\Delta(y, \xi) \leq \gamma(C(2|t| + |s|) + \|x - x_*\| + \xi) + 4C^2\xi$$

Ora, ponendo $y = \vartheta^\xi(x, \sigma, t, \tau)$, se $st > 0$ si ha

$$\begin{aligned} & d((ts)^{-1}(\psi^{f^\xi, g^\xi}(x, t, s) - x), [f, g](x_*)) \\ & \leq 2C^3|s|e^{|s|C}(1 + C|t|e^{|t|C}) + \gamma(C(2|t| + |s|) + \|x - x_*\| + \xi) + 4C^2\xi \end{aligned}$$

e nel limite $\xi \rightarrow 0$ si conclude

$$\begin{aligned} & d((ts)^{-1}(\psi^{f, g}(x, t, s) - x), [f, g](x_*)) \\ & \leq 2C^3|s|e^{|s|C}(1 + C|t|e^{|t|C}) + \gamma(C(2|t| + |s|)) \\ & \leq \Gamma(\max(|t|, |s|), x) \end{aligned} \tag{4.3}$$

dove $\Gamma(r, x) := 2C^3re^{rC}(1 + Cre^{rC}) + \gamma(3rC + \|x - x_*\|)$.

Si definisca ora una mappa

$$\Xi^{f, g}(x, \varepsilon) = \begin{cases} \psi^{f, g}(x, \sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon}) & \text{se } \varepsilon \geq 0 \\ \psi^{f, -g}(x, \sqrt{-\varepsilon}, \sqrt{-\varepsilon}) & \text{se } \varepsilon \leq 0 \end{cases}$$

La mappa $\Xi^{f, g}$ è continua. Inoltre, dalla [4.3] si trova

$$d\left(\frac{\Xi^{f, g}(x, \varepsilon) - x}{\varepsilon}, [f, g](x_*)\right) \leq \Gamma(\sqrt{|\varepsilon|}, x)$$

valida per ε sufficientemente piccolo (in modulo).

Equivalentemente, si è dimostrato che

$$\inf\{\|\Xi^{f, g}(x, \varepsilon) - x - \varepsilon v\| : v \in [f, g](x_*)\} = o(\varepsilon + \|x - x_*\|) \tag{4.4}$$

Per un dato vettore $w \in \mathbb{R}^n$, sia $Q^w : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n, Q^w(v, r) := v + rw$ e, se W è un sottoinsieme di \mathbb{R}^n , si denoti $Q^W := \{Q^w | w \in W\}$; dalla [4.4] discende allora il seguente risultato:

Teorema 4.8. *Sia n un intero non negativo e Ω un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n . Siano f, g campi vettoriali lipschitziani su Ω . Sia $x_* \in \Omega$. Allora l'insieme $Q^{[f, g](x_*)}$ è un GDQ di $\Xi^{f, g}$ in $(x_*, 0)$ nella direzione di \mathbb{R}^n .*

4.7 Teorema di Chow-Rashevsky (non smooth)

Sono ora a disposizione tutti gli strumenti per provare il teorema di Chow-Rashevsky: si sono definiti i campi vettoriali lipschitziani e le loro parentesi di Lie; si è generalizzato il concetto di differenziale a mappe set-valued, mostrando che per esso vale una regola di composizione della catena e un teorema di mappa aperta; si è trovata una formula esatta per la non commutatività dei flussi dei campi vettoriali (vedasi la formula [4.2] al paragrafo precedente).

Di seguito verrà allora enunciato e dimostrato il teorema di Chow-Rashevsky nel caso in cui l'ordine delle parentesi di Lie coinvolte sia pari a uno (cioè se ne abbiano solo della forma $[f_i, f_j]$ per certi campi vettoriali lipschitziani f_i, f_j); il teorema verrà poi enunciato in una forma più generale, per parentesi di Lie di ordine maggiore (un esempio di parentesi di Lie di ordine 3 è $[f_i, [f_j, f_k]]$). Verrà inoltre riportato anche un esempio di applicazione del teorema per campi non lisci, il *non-holonomic integrator*.

Teorema 4.9 (Teorema di Chow-Rashevsky non-smooth).

Siano $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0, \Omega$ un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n , $f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_r$ campi vettoriali su Ω ; siano f_1, \dots, f_m continui e g_1, \dots, g_r localmente lipschitziani. Sia Σ il sistema di controllo definito da:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^m u_i f_i(x) + \sum_{j=1}^r v_j g_j(x)$$

con i vincoli $|u_i| \leq 1$ per $i = 1, \dots, m$ e $|v_j| \leq 1$ per $j = 1, \dots, r$. Sia x_* un punto di Ω tale che, per ogni scelta $V = \{v_{kl}\}_{1 \leq k < l \leq r}$ di membri $v_{kl} \in [g_k, g_l](x_*)$, l'insieme di vettori

$$\begin{aligned} & \{f_i(x) : i = 1, \dots, m\} \cup \{g_j(x) : j = 1, \dots, r\} \\ & \cup \{v_{kl}(x) : k = 1, \dots, r-1, l = k+1, \dots, r\} \end{aligned}$$

genera \mathbb{R}^n . Allora Σ è localmente controllabile in tempo piccolo.

Dimostrazione. Facendo riferimento alla notazione usata alla fine del paragrafo [4.6] prima che fosse enunciato il Teorema [4.8], si cambia lievemente la notazione, ponendo

$$\varphi^{f,\varepsilon}(x) := \varphi^f(x, \varepsilon), \quad \Xi^{f,g,\varepsilon}(x) := \Xi^{f,g}(x, \varepsilon)$$

Sia $S = \{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 1, \leq i < j \leq r\}$, $s = \frac{r(r-1)}{2}$ (quindi $|S| = s$). Si fissi una biiezione $\{1, \dots, s\} \rightarrow S, k \mapsto (i_k, j_k)$. Sia $X = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$. Sia U intorno di $\mathbf{0}_{m+n+s}$ in X , e si definisca una mappa $\Theta : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ponendo

$$\begin{aligned} & \Theta(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, \alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s) = \\ & = (\Xi^{g_{i_s}, g_{j_s}, \beta_s} \circ \dots \circ \Xi^{g_{i_1}, g_{j_1}, \beta_1} \circ \varphi^{g_r, \alpha_r} \circ \\ & \circ \dots \circ \varphi^{g_1, \alpha_1} \circ \varphi^{f_m, \varepsilon_m} \circ \dots \circ \varphi^{f_1, \varepsilon_1})(x_*) \end{aligned}$$

Sia \tilde{V} l'insieme di tutte le famiglie indicizzate $V = \{v_k\}_{k=1,\dots,s}$ di vettori v_k tali che $v_k \in [g_{i_k}, g_{j_k}](x_*)$. Per ogni elemento V di \tilde{V} , sia $L^V : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'applicazione lineare definita da

$$L^V(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, \alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s) = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i f_i(x_*) + \sum_{j=1}^r \alpha_j g_j(x_*) + \sum_{k=1}^s \beta_k v_k$$

Allora $\Theta(\mathbf{0}_{m+n+s}) = x_*$, e i risultati al paragrafo [4.6], nonché il Teorema [4.8], insieme alla regola della catena per i GDQs [4.6], implicano che l'insieme $\{L^V : V \in \tilde{V}\}$ è un GDQ di Θ in $\mathbf{0}_{m+n+s}$ nella direzione di X . L'ipotesi nell'enunciato del Teorema [4.9] implica che tutte le mappe L^V , al variare di V , siano suriettive. Il risultato allora segue dal Teorema di mappa aperta [4.7]. \square

Come già anticipato, il teorema potrà essere generalizzato al caso in cui nell'algebra di Lie $\text{Lie}(X_1, \dots, X_n)$ si considerino anche elementi ottenuti iterando ripetutamente le parentesi di Lie (per esempio, elementi della forma $[X_1, [X_2, X_3]]$), non appena una nozione di parentesi di Lie multivoca iterata soddisferà la formula asintotica per la composizione dei flussi. Questo argomento è ancora in fase di studio.

Capitolo 5

Applicazioni in Meccanica classica

In questo capitolo si mostrerà il legame tra le parentesi di Poisson e le parentesi di Lie, che verrà sfruttato per usare la teoria finora sviluppata al fine di determinare le costanti del moto di un sistema fisico. Si premette dunque un breve richiamo delle nozioni di Fisica matematica necessarie alla comprensione della trattazione; successivamente, si evidenzierà il legame tra parentesi di Lie e parentesi di Poisson, sfruttando quanto riportato nell'appendice [D]; infine, si studieranno alcuni esempi classici di interesse fisico-ingegneristico.

5.1 Richiami di Fisica matematica

Chiameremo *sistema hamiltoniano* di Hamiltoniana¹ $H(q, p, t)$ su un aperto $W \subset \mathbb{R}^{2n} \ni (q, p)$ il sistema dinamico su W dato dalle equazioni

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p, t), \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p, t) \quad (5.1)$$

Introduciamo ora il vettore $z = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$ delle coordinate nello spazio delle fasi. Introduciamo inoltre la matrice $2n \times 2n$

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & 1_{n \times n} \\ -1_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{pmatrix},$$

detta *unità simplettica*. Con questa notazione, le equazioni [5.1] per una hamiltoniana $f(q, p, t)$ si scrivono

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & 1_{n \times n} \\ -1_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial q} \\ \frac{\partial f}{\partial p} \end{pmatrix} = \mathbb{J} \frac{\partial f}{\partial z}$$

¹In questa definizione l'Hamiltoniana può essere una funzione qualunque, non per forza ottenuta a partire da un sistema lagrangiano con una trasformazione di Legendre.

Il campo vettoriale $X_f = \mathbb{J} \frac{\partial f}{\partial z}$ si chiama *campo vettoriale hamiltoniano* della funzione f . In coordinate (q, p) , esso ha le componenti

$$X_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial p} \\ -\frac{\partial f}{\partial q} \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Consideriamo ora due funzioni $f(q, p, t)$ e $g(q, p, t)$; utilizzando il campo vettoriale Hamiltoniano di una delle due possiamo costruire una terza funzione, chiamata la loro *parentesi di Poisson* e denotata con $\{f, g\}$. Precisamente, definiamo tale operazione ponendo

$$\{f, g\} := \mathcal{L}_{X_f} g \quad (5.3)$$

Da questa definizione e dalla [5.2] discende allora che

$$\{f, g\} := -(\mathbb{J}f') \cdot g' = f' \cdot \mathbb{J}g' = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right].$$

Le parentesi di Poisson sono una mappa

$$\text{Funzioni} \times \text{Funzioni} \longrightarrow \text{Funzioni}$$

che gode delle seguenti proprietà:

1. è *antisimmetrica*:

$$\{f, g\} = -\{g, f\}, \quad \forall f, g;$$

2. è \mathbb{R} -bilineare;

3. soddisfa la regola di Leibniz:

$$\{f, g_1 g_2\} = g_1 \{f, g_2\} + g_2 \{f, g_1\}, \quad \forall f, g_1, g_2;$$

4. soddisfa l'identità di Jacobi.

Le parentesi di Poisson permettono di caratterizzare gli integrali primi di un sistema hamiltoniano: dalla definizione [5.3] discende infatti che $\{H, f\} = -\mathcal{L}_{X_H} f$, dunque

Proposizione 5.1. *Una funzione $f(q, p)$ (indipendente dal tempo) è integrale primo di un sistema hamiltoniano di Hamiltoniana $H(q, p)$ se e solo se*

$$\{H, f\} = 0$$

5.2 Legame tra parentesi di Lie e di Poisson

La relazione tra parentesi di Lie e di Poisson può essere illustrata in almeno due modi, che saranno presentati qui di seguito: il primo coinvolge le parentesi di Lie di due 1-forme, e per poter essere esposto in modo completo è opportuno premettere un paio di nozioni algebriche importanti; il secondo invece coinvolge le parentesi di Lie di due campi vettoriali e non richiede alcuna nozione in più rispetto a quelle già richiamate al paragrafo precedente.

5.2.1 Primo legame

Definizione 5.1 (Algebroidi di Lie). ² Un algebroidi di Lie su una varietà X è un fibrato vettoriale reale A su X unitamente ad una mappa di fibrati $a : A \rightarrow TX$ (detta ancora) e ad una struttura di algebra di Lie $[\cdot, \cdot]_A$ sull'insieme $\Gamma(A)$ delle sezioni di A , tali che:

- la mappa indotta $a : \Gamma(A) \rightarrow \Gamma(TX)$ è un morfismo di algebre di Lie;
- per ogni $f \in C^\infty(X)$ e $v, w \in \Gamma(A)$, sussiste la seguente identità di Leibniz:

$$[v, fw]_A = f[v, w]_A + (a(v)f)w$$

La struttura di algebra di Lie presente sul fibrato A permette di definire una derivata di Lie sull'algebroidi ponendo

$$\mathcal{L}_v w = [v, w]_A \quad \mathcal{L}_v f = a(v)f.$$

Definizione 5.2 (Morfismo di algebroidi di Lie). Un morfismo di algebroidi di Lie $(A, a) \rightarrow (A', a')$ è un morfismo di fibrati vettoriali $\varphi : A \rightarrow A'$ tale che:

- la mappa $\varphi : \Gamma(A) \rightarrow \Gamma(A')$ è un morfismo di algebre di Lie;

²In termini semplici, un algebroidi di Lie può essere visto come segue: innanzitutto, costruire un fibrato vettoriale su una varietà M corrisponde ad "incollare" in ogni punto di essa un certo spazio vettoriale; nel caso del fibrato tangente, questo spazio vettoriale è lo spazio tangente alla varietà in quel punto, ma ovviamente in generale lo spazio vettoriale può essere scelto con una caratterizzazione arbitraria. Accanto a questo fibrato vettoriale, si chiede che sia definita una mappa che, per ogni punto della varietà, associ ad ogni elemento dello spazio vettoriale "incollato" un vettore tangente in quel punto; questa mappa è l'ancora dell'algebroidi. Si chiede poi che, per ogni punto P fissato della varietà, sia definita un'operazione di parentesi di Lie $[\cdot, \cdot]_A$ dei vettori dello spazio vettoriale che è stato incollato in quel punto, così come è definita la parentesi di Lie $[\cdot, \cdot]_{TM}$ di due vettori X_P, Y_P dello spazio tangente in esso; inoltre, sappiamo che $[X, Y]_{TM}(f) = \mathcal{L}_X Y(f)(P)$ per ogni funzione f su M , così si usa questa uguaglianza per definire la derivata di Lie anche sul fibrato vettoriale A .

- il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & A' \\ & \searrow a & \downarrow a' \\ & & TM \end{array}$$

Infine, per definire bene il tipo di varietà su cui si lavora, è necessaria la seguente

Definizione 5.3 (Varietà di Poisson). *Sia data una varietà differenziabile M . Un'operazione bilineare*

$$\begin{aligned} \{\cdot, \cdot\} : \mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M) \\ (F, G) &\longrightarrow \{F, G\} \end{aligned}$$

tale per cui

- $(\mathcal{C}^\infty(M), \{\cdot, \cdot\})$ sia un'algebra di Lie (ossia $\{\cdot, \cdot\}$ sia antisimmetrica e soddisfi l'identità di Jacobi);
- $\forall F \in \mathcal{C}^\infty(M)$ la mappa $ad(F) : \mathcal{C}^\infty(M) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M), G \longmapsto \{F, G\}$ soddisfi la regola di Leibniz, e dunque, essendo \mathbb{R} -lineare, sia una derivazione,

si dirà struttura di Poisson. La coppia $(M, \{\cdot, \cdot\})$ prenderà allora il nome di varietà di Poisson.

Usando la notazione della definizione [5.1], si ha che se $(M, \{\cdot, \cdot\}, P)$ è una varietà di Poisson (dove P è il bivettore di Poisson), allora $A = T^*M$ con la parentesi di Lie delle forme differenziali:

$$[\alpha, \beta]_A = -\mathcal{L}_{P(\alpha)}\beta + \mathcal{L}_{P(\beta)}\alpha - dP(\alpha, \beta)$$

e l'ancora è il bivettore di Poisson, a meno del segno. Tale parentesi è compatibile con le parentesi di Poisson, nel senso che

$$[df, dg]_A = d\{f, g\} \tag{5.4}$$

L'equazione [5.4] mostra esplicitamente il legame tra parentesi di Lie e parentesi di Poisson, permettendo quindi di estendere tutta la trattazione svolta nei precedenti capitoli alle parentesi di Poisson: dato l'uso pressoché ubiquitario che si fa di quest'ultime in Fisica Matematica (specialmente in Meccanica Hamiltoniana), tutta la teoria finora sviluppata si applica poi in fisica matematica anche a casi più generali di quelli tradizionalmente studiati (che tipicamente coinvolgono funzioni, varietà e campi vettoriali molto regolari).

5.2.2 Secondo legame

Esplicitare il legame di cui sopra è stato possibile solo in seguito all'introduzione di diversi concetti avanzati, tipo gli algebroidi di Lie. Esiste un'altra relazione simile alla [5.4], che può essere provata senza introdurre nuove nozioni rispetto ai richiami effettuati al paragrafo [5.1], e che rende altresì immediata l'estensione alla Meccanica Hamiltoniana della trattazione finora effettuata.

Date due funzioni f, g di classe $\mathcal{C}^{1,1}$ (cioè derivabili con derivata lipschitziana) su una varietà di Poisson M , i loro rispettivi campi vettoriali hamiltoniani sono, per la definizione [5.2]:

$$X_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial p} \\ -\frac{\partial f}{\partial q} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p}$$

$$X_g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial p} \\ -\frac{\partial g}{\partial q} \end{pmatrix} = \frac{\partial g}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial g}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p}$$

La parentesi di Poisson $\{f, g\}$ è, per la definizione [5.3]:

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q}$$

e il campo vettoriale hamiltoniano ad essa associato è allora

$$X_{\{f,g\}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \{f,g\}}{\partial p} \\ -\frac{\partial \{f,g\}}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} \frac{\partial g}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial^2 g}{\partial p^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial q} \\ -\frac{\partial^2 f}{\partial q^2} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial p} + \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial p} \frac{\partial g}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial^2 g}{\partial q^2} \end{pmatrix}$$

La parentesi di Lie di X_f e X_g è

$$[X_f, X_g] = \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial^2 g}{\partial q \partial p} \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial^2 g}{\partial q^2} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial^2 g}{\partial p^2} \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial q} \frac{\partial}{\partial p} \\ - \frac{\partial g}{\partial p} \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial p} \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial g}{\partial p} \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial g}{\partial q} \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial g}{\partial q} \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} \frac{\partial}{\partial q}$$

I conti appena svolti rendono evidente la validità della relazione:

$$X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g] \quad (5.5)$$

Si noti che, al fine di rendere vera tale uguaglianza, non è stato necessario richiedere l'uguaglianza delle derivate seconde miste (cioè chiedere $[\partial_q, \partial_p] = 0$), condizione che è verificata se f e g sono di classe \mathcal{C}^2 , per il lemma di Schwarz; si è in realtà richiesta questa regolarità solo al fine di poter calcolare la parentesi di Lie $[X_f, X_g]$ nel modo classico, senza ricorrere cioè alle parentesi di Lie multivoche, ma è sostanzialmente una questione di semplicità dei conti.

Usando l'equazione [5.5] è possibile quindi mostrare i seguenti fatti:

- se $\{f, g\} = 0$, allora $[X_f, X_g] = 0$, dunque anche i flussi associati ai campi vettoriali X_f, X_g commutano; in particolare, la distribuzione da essi generata è completamente integrabile;
- se $[X_f, X_g] = 0$, allora $\{f, g\} = \text{cost}$; in particolare, se H è l'hamiltoniana di un sistema hamiltoniano, $[X_f, X_H] = 0$ implica $\{f, H\} = \text{cost}$: poiché è noto che la derivata totale rispetto al tempo di f lungo il moto, $\frac{df}{dt}$, coincide proprio con $\{f, H\}$, si ha allora che se $[X_f, X_H] = 0$ allora $\frac{df}{dt} = \text{cost}$.
- la distribuzione generata da X_f e X_g è involutiva se e solo se esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$[X_f, X_g] = \alpha X_f + \beta X_g = \begin{pmatrix} \alpha \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial g}{\partial p} \\ -\alpha \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial g}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial p}(\alpha f + \beta g) \\ -\frac{\partial}{\partial q}(\alpha f + \beta g) \end{pmatrix}$$

e dalla [5.5] discende allora che ciò equivale a $\{f, g\} = \alpha f + \beta g$; in altre parole, la distribuzione generata da X_f e X_g è involutiva se e solo se la parentesi di Poisson $\{f, g\}$ è lineare in f e g .

Quanto visto finora costituisce dunque un esempio di come si possa estendere lo studio di sistemi hamiltoniani al caso in cui essi siano particolarmente poco regolari, basandosi sulla generalizzazione delle parentesi di Lie effettuata nel precedente capitolo. Nel prossimo paragrafo si mostreranno invece esempi di applicazione dei Teoremi di Frobenius e di Chow-Rashevsky in Meccanica classica, studiando sistemi sia in ambito smooth che nel caso lipschitziano, e determinando se i sistemi considerati siano localmente controllabili in tempo piccolo, oppure se essi siano integrabili.

5.3 Esempi di applicazione dei teoremi di Frobenius e Chow-Rashevsky

5.3.1 Tre esempi nel caso smooth: gamba robotica, missile, disco che rotola

Gamba robotica

Il sistema considerato - rappresentato in figura [5.1] -

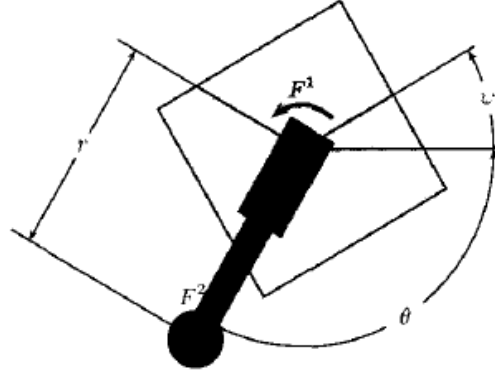


Figura 5.1: Gamba robotica

è formato da un corpo, fissato nel suo baricentro ad una gamba estendibile: le variabili in gioco sono cioè la lunghezza r della gamba, l'angolo φ fra il corpo e il terreno e l'angolo ϑ tra la gamba e il terreno; in altre parole, la varietà delle configurazioni è $Q = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ che ha dimensione su \mathbb{R} pari a 3. Consideriamo che agiscano solo due forze: la prima, F_1 , che regola l'angolo $\vartheta - \varphi$ tra il corpo e la gamba, e la seconda, F_2 , che invece agisce sulla lunghezza della gamba. Sia J il momento di inerzia del corpo rispetto al centro di rotazione fissato alla gamba (mentre quello della gamba rispetto a tale punto di fissaggio è pari a mr^2); le forze di input sono chiaramente $F_1 = d\vartheta - d\varphi$ e $F_2 = dr$, che danno luogo ai campi vettoriali

$$Y_1 = \frac{1}{mr^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad Y_2 = \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial r}$$

I due campi vettoriali sono chiaramente linearmente indipendenti, per cui generano una distribuzione bidimensionale. Lo spazio tangente $T_P Q$ alla varietà ha ovviamente dimensione pari a 3 per ogni punto $P \in Q$, non essendo presenti vincoli su Q . La parentesi di Lie di tali campi vettoriali è

$$[Y_1, Y_2] = \frac{2}{m^2 r^3} \frac{\partial}{\partial \vartheta}$$

I tre campi vettoriali sono chiaramente linearmente indipendenti: ad essi sono infatti associati i vettori di \mathbb{R}^3

$$\tilde{Y}_1 = \left(\frac{1}{mr^2}, -\frac{1}{J}, 0 \right), \quad \tilde{Y}_2 = \left(0, 0, \frac{1}{m} \right), \quad \tilde{Y}_3 = \left(\frac{2}{m^2 r^3}, 0, 0 \right)$$

e il determinante della matrice 3×3 ad essi associata è

$$\det(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}_3) = -\frac{2}{m^3 r^3 J}.$$

Di conseguenza, $\text{Lie}(Y_1, Y_2, [Y_1, Y_2]) = 3 = \dim Q$, quindi il Teorema di Chow-Rashevsky (smooth) garantisce che il sistema è STLC.

Missile

Consideriamo un missile che si muove su un piano (x, y) ; la forza motrice sarà applicata ad una certa distanza h dal baricentro dell'auto, come in figura:

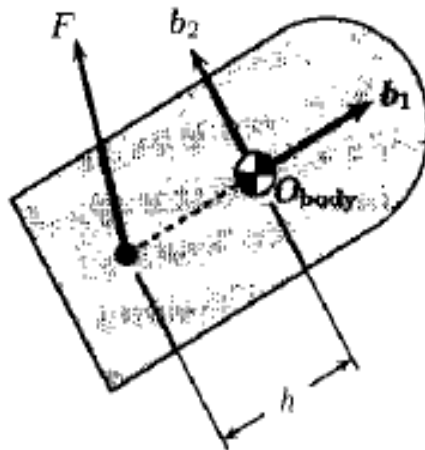


Figura 5.2: Missile con motore che può spingere in direzione variabile.

Le variabili in gioco sono la posizione del missile nel piano e l'angolo di inclinazione rispetto all'asse x : la varietà delle configurazioni è, in altre parole, $Q = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$, che ha dimensione su \mathbb{R} pari a 3. La forza può essere scomposta nelle due direzioni b_1 e b_2 : denoteremo con F_1 la prima e con F_2 la seconda. Si vede facilmente che

$$F_1 = \cos\vartheta dx + \sin\vartheta dy \quad F_2 = -\sin\vartheta dx + \cos\vartheta dy - h d\vartheta$$

pertanto

$$Y_1 = \frac{\cos\vartheta}{m} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sin\vartheta}{m} \frac{\partial}{\partial y}$$

$$Y_2 = -\frac{\sin\vartheta}{m} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\cos\vartheta}{m} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{h}{J} \frac{\partial}{\partial \vartheta}$$

che sono evidentemente linearmente indipendenti. La loro parentesi di Lie è

$$[Y_1, Y_2] = -\frac{h \sin\vartheta}{Jm} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{h \cos\vartheta}{Jm} \frac{\partial}{\partial y}$$

I tre campi vettoriali sono indipendenti: ad essi sono infatti associati i vettori di \mathbb{R}^3

$$\tilde{Y}_1 = \left(\frac{\cos\vartheta}{m}, \frac{\sin\vartheta}{m}, 0 \right)$$

$$\tilde{Y}_2 = \left(-\frac{\sin\vartheta}{m}, \frac{\cos\vartheta}{m}, -\frac{h}{J} \right)$$

$$\tilde{Y}_3 = \left(-\frac{h \operatorname{sen} \vartheta}{Jm}, \frac{h \operatorname{cos} \vartheta}{Jm}, 0 \right)$$

e si ha

$$\det(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}_3) = \frac{h^2}{J^2 m^2}.$$

Per il teorema di Chow-Rashevsky, il sistema è localmente controllabile in tempo piccolo.

Disco che ruota

Consideriamo un disco di raggio R , su cui è tracciato un raggio con una tacca, appoggiato perpendicolarmente a un piano (O, x, y) in una certa configurazione iniziale x_0 , come in figura [5.3]. Fissata un'altra configurazione x_1 , ci chiediamo se sia possibile passare dall'una all'altra configurazione facendo rotolare il disco sul piano, senza strisciamento, e tenendolo sempre perpendicolare al piano stesso.

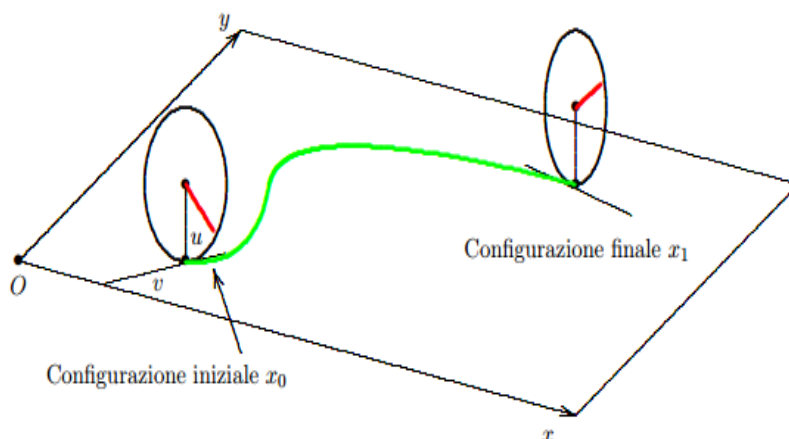


Figura 5.3: Esempio [5.3.1]

Osserviamo che ogni possibile configurazione del disco è determinata dalle seguenti coordinate lagrangiane:

$$\begin{array}{ll} x^1 = x & \text{coordinata } x \text{ del punto di contatto (ovvero del centro del disco),} \\ x^2 = y & \text{coordinata } y \text{ del punto di contatto,} \\ x^3 = u & \text{angolo di rotazione della tacca rispetto alla verticale,} \\ x^4 = v & \text{angolo tra piano del disco e asse } x. \end{array}$$

La varietà delle configurazioni M è quindi

$$M = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}_2$$

Il vincolo di puro rotolamento è espresso dalla velocità che il punto del disco a contatto col piano sia sempre nulla. Applicando noti teoremi di cinematica del corpo rigido si trova che questa condizione equivale al sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} + R \sin v \dot{u} = 0 \\ \dot{y} + R \cos v \dot{u} = 0 \end{cases}$$

Essendo lineari nelle velocità lagrangiane e indipendenti, queste due equazioni definiscono una distribuzione $\mathcal{D} \subset TM$ di rango 2, essendo $\dim M = 4$. Posto che la rappresentazione di un generico campo vettoriale X su M è del tipo

$$X = X^x \partial_x + X^y \partial_y + X^u \partial_u + X^v \partial_v$$

i campi compatibili con \mathcal{D} sono caratterizzati dalle due equazioni

$$\begin{cases} X^x + R \sin v X^u = 0 \\ X^y + R \cos v X^u = 0 \end{cases}$$

Se si pone $X^u = -\alpha$, si trova

$$\begin{cases} X^x = \alpha R \sin v \\ X^y = \alpha R \cos v \end{cases}$$

quindi i campi compatibili con \mathcal{D} sono del tipo

$$X = \alpha(R \sin v \partial_x + R \cos v \partial_y - \partial_u) + X^v \partial_v$$

Ciò mostra che i due campi vettoriali

$$\begin{cases} X_1 = \partial_v \\ X_2 = R \sin v \partial_x + R \cos v \partial_y - \partial_u \end{cases}$$

formano una base di generatori di \mathcal{D} . La loro parentesi di Lie

$$X_3 = [X_1, X_2] = R(\cos v \partial_x - \sin v \partial_y)$$

non è una combinazione lineare di X_1 e X_2 (banalmente perché X_1 e X_2 contengono rispettivamente ∂_v e ∂_u , termini che non riesco ad annullare tramite combinazioni lineari), dunque la distribuzione \mathcal{D} non è involutiva. Procediamo alla costruzione dell'algebra involupante $\bar{\mathcal{D}}$, calcolando le parentesi di Lie

$$\begin{aligned} [X_1, X_3] &= -R(\sin v \partial_x + \cos v \partial_y) = -X_2 - \partial_u \\ [X_2, X_3] &= 0 \end{aligned}$$

I campi X_1 , X_2 e $X_3 = [X_1, X_2]$ non formano ancora una sottoalgebra di Lie per la presenza di ∂_u in $[X_1, X_3]$. Aggiungiamo³ allora questo quarto vettore

³Può venire il dubbio che sia lecito aggiungere campi vettoriali *ad libitum*, il che implicherebbe che la possibilità di generare tutto lo spazio a partire da qualunque distribuzione. Non è tuttavia così: la definizione di algebra involupante come *minima* sottoalgebra di $\Xi(M)$ prevede infatti che si possano aggiungere campi vettoriali solo fino a quando non si ottiene un insieme chiuso rispetto alle parentesi di Lie. Nell'esempio qui riportato si verifica in effetti che $[X_4, X_i] = 0, \forall i = 1, 2, 3$, quindi si è ottenuta effettivamente una sottoalgebra di $\Xi(M)$.

$X_4 = \partial_u$. I quattro vettori così determinati

$$\begin{cases} X_1 = \partial_v \\ X_2 = R \sin v \partial_x + \alpha R \cos v \partial_y - \partial_u \\ X_3 = R(\cos v \partial_x - \sin v \partial_y) \\ X_4 = \partial_u \end{cases}$$

sono indipendenti in ogni punto di M : generano quindi l'algebra involupante $\bar{D}_{\mathcal{D}}$; sono esattamente quattro, come la dimensione di M . Dunque $\bar{D}_{\mathcal{D}}$ coincide con tutto lo spazio dei campi vettoriali su M e la distribuzione \bar{D} coincide con l'intero fibrato tangente TM . Conclusione: la distribuzione \mathcal{D} è di Chow, la distribuzione \bar{D} coincide con TM e ammette quindi una sola sottovarietà integrale: l'intera varietà delle configurazioni M . Questa, sempre per il teorema di Chow-Rashevsky, è la sola classe di accessibilità. Pertanto, qualunque sia la configurazione finale x_1 , si può sempre raggiungerla partendo da una qualsiasi configurazione iniziale x_0 , facendo rotolare il disco lungo un opportuno cammino. Questo "opportuno" è ignoto e non è in generale unico, ma esiste.

5.3.2 Un esempio nel caso non-smooth: il non-holonomic integrator

Il *non-holonomic integrator*, o *sistema di Heisenberg*, non rappresenta nessun sistema fisico particolare, ma costituisce una sorta di prototipo può essere visto come una sorta di spunto per lo studio di molti sistemi fisici interessanti, anche per quanto riguarda problemi tipici della Teoria del controllo ottimo.

Tale sistema è detto "di Heisenberg" perché in Meccanica Quantistica si incontra l'algebra di Heisenberg, nella quale i due operatori posizione e momento hanno commutatore non banale (in questo caso, un multiplo dell'identità), cioè generano un'algebra di Lie tridimensionale (se prendiamo $q, p \in \mathbb{R}$); il caso considerato in questa sezione avrà una struttura simile.

Normalmente, quando ci si riferisce al sistema di Heisenberg, lo si considera nella forma

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{y} = v \\ \dot{z} = vx - uy \end{cases}$$

che può essere scritto come $\dot{q} = u_1 g_1 + u_2 g_2$, con $g_1 = (1, 0, -y)^T$ e $g_2 = (0, 1, x)^T$; si ha $[g_1, g_2] = 2(0, 0, 1) =: g_3$; come noto, questo vuol dire che il sistema è localmente controllabile in tempo piccolo. Si modifichi ora leggermente il sistema di Heisenberg nel modo in cui segue. Siano $f_1 = (1, 0, -y + \frac{|y|}{2})$, $f_2 = (0, 1, x + \frac{|x|}{2})$ campi vettoriali a valori in \mathbb{R}^3 . Questi due campi vettoriali sono ovviamente non differenziabili ognuno lungo un intero asse cartesiano, ma sono comunque lipschitziani. Inoltre, essi

sono indipendenti in ogni punto di \mathbb{R}^2 , quindi, in ogni punto di \mathbb{R}^2 , generano uno spazio vettoriale bidimensionale (dunque non l'intero \mathbb{R}^3).

È bene ora ricordare come si calcolano le parentesi di Lie multivoche di due campi vettoriali lipschitziani: innanzitutto, l'insieme dei punti del piano in cui f_1 e f_2 sono entrambi differenziabili coincide con tutto \mathbb{R}^2 , esclusi gli assi cartesiani. E' necessario dunque calcolare le parentesi di Lie multivoche in un punto giacente su un asse cartesiano, prendendo successioni di punti al di fuori dagli assi; si esplicitano i valori dei campi vettoriali nelle quattro regioni $\{(x, y) | x > 0, y > 0\}, \{(x, y) | x > 0, y < 0\}, \{(x, y) | x < 0, y > 0\}$ e $\{(x, y) | x < 0, y < 0\}$. Si trova rispettivamente:

- $x > 0, y > 0$: $f_1 = (1, 0, -\frac{y}{2}), f_2 = (0, 1, \frac{3x}{2}) \Rightarrow [f_1, f_2] = (0, 0, 2)$;
- $x > 0, y < 0$: $f_1 = (1, 0, -\frac{3y}{2}), f_2 = (0, 1, \frac{3x}{2}) \Rightarrow [f_1, f_2] = (0, 0, 3)$;
- $x < 0, y > 0$: $f_1 = (1, 0, -\frac{y}{2}), f_2 = (0, 1, \frac{x}{2}) \Rightarrow [f_1, f_2] = (0, 0, 1)$;
- $x < 0, y < 0$: $f_1 = (1, 0, -\frac{3y}{2}), f_2 = (0, 1, \frac{x}{2}) \Rightarrow [f_1, f_2] = (0, 0, 2)$;

da cui $[f, f_2]_{set} = \{(0, 0, 1), (0, 0, 2), (0, 0, 3)\}$. Evidentemente, qualunque elemento f_{ij} si scelga al suo interno, i tre campi vettoriali f_1, f_2, f_{ij} sono linearmente indipendenti in ogni punto, dunque $\dim Lie(f, f_2, [f_1, f_2]_{set}) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Per il teorema [4.9], il sistema $\dot{x} = u_1 f_1 + u_2 f_2$ è localmente controllabile.

5.3.3 Esempio di applicazione del teorema di Frobenius

In questo ambito gioca un ruolo precipuo il Teorema di Frobenius, la cui eventuale applicabilità garantisce che il sistema rimanga confinato sulle sottovarietà integrali di una distribuzione data.

E' bene chiarire il significato della (completa) integrabilità di una distribuzione tramite un'analogia con il caso unidimensionale: il problema di determinare le curve integrali di un campo vettoriale X si riduce localmente al problema di risolvere un'equazione differenziale ordinaria. Si tratta infatti di trovare una curva σ tale che $\frac{d\sigma}{dt}(t) = X(\sigma(t))$. Analogamente, il problema di integrare una distribuzione $D = \langle X_1, \dots, X_k \rangle$ si traduce in un problema che coinvolge sistemi di equazioni di derivate parziali.

Esempio 5.1. Sia $\mathcal{D} \subset T\mathbb{R}^3$ la distribuzione generata dai campi di vettori

$$X_1 = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + x(y+1) \frac{\partial}{\partial z} \longleftrightarrow \tilde{X}_1 = (x, 1, x(y+1))$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial z} \longleftrightarrow \tilde{X}_2 = (1, 0, y)$$

Trovare le sottovarietà integrali di \mathcal{D} significa trovare una funzione

$$(u, v) \mapsto \sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

tale che

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) = \alpha_1 X_1(\sigma(u, v)) + \alpha_2 X_2(\sigma(u, v)) \\ \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) = \beta_1 X_1(\sigma(u, v)) + \beta_2 X_2(\sigma(u, v)) \end{cases}$$

Controlliamo se la distribuzione generata da X_1 e X_2 è involutiva:

$$[X_1, X_2] = -\partial_x - y\partial_z = -X_2$$

quindi la parentesi di Lie dei due campi vettoriali appartiene ancora alla distribuzione da essi generata, il che equivale a dire che quest'ultima sia involutiva, cioè completamente integrabile. Ci proponiamo allora di determinare una carta piatta in un intorno di un qualche punto P : per fare ciò è sufficiente seguire la dimostrazione del teorema di Frobenius locale (caso smooth).

Si noti che $\{X_1, X_2, \partial_z\}$ è una base di $T_Q\mathbb{R}^3$, per ogni $Q \in \mathbb{R}^3$. Se poniamo $X_3 = \partial_z$ e scriviamo $X_i = \sum_{j=1}^3 a_i^j \partial_j$, la matrice $A = (a_i^j)$ è:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ x(y+1) & y & 1 \end{pmatrix}$$

Come detto anche nella dimostrazione del Teorema di Frobenius, la matrice A è invertibile in ogni punto. La matrice B , inversa di A , è

$$B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -x & 0 \\ -y & -x & 1 \end{pmatrix}$$

Seguendo la dimostrazione del Teorema di Frobenius, si pone

$$Y_1 = \sum_{i=1}^2 b_1^i X_i = 0X_1 + 1X_2 = X_2$$

$$Y_2 = \sum_{i=1}^2 b_2^i X_i = X_1 - xX_2 = \partial_y + x\partial_z$$

e sappiamo che $[Y_1, Y_2] = 0$. Abbiamo così trovato un riferimento locale per \mathcal{D} costituito da campi vettoriali Y_1, Y_2 che commutano. Calcoliamo il flusso di $Y_1 = \partial_x + y\partial_z \iff \dot{Y}_1 = (1, 0, y)$, cioè cerchiamo quella mappa α tale che

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = Y_1 \\ \alpha(0) = (x_0, y_0, z_0) \end{cases}$$

Questo sistema equivale a

$$\begin{cases} x'(t) = 1, x(0) = x_0 \\ y'(t) = 0, y(0) = y_0 \\ z'(t) = y, z(0) = z_0 \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + t \\ y(t) = y_0 \\ z(t) = z_0 + ty \end{cases}$$

quindi il flusso di Y_1 è $\alpha_t(x, y, z) = (x + t, y, z + ty)$. Analogamente, per $Y_2 = \partial_y + x\partial_z \longleftrightarrow \tilde{Y}_2 = (0, 1, x)$ si trova $\beta_t(x, y, z) = (x, y + t, z + tx)$. A questo punto, per trovare le sottovarietà integrali, basta partire da un punto P qualsiasi (ad esempio da un punto dell'asse z) e seguire i flussi di Y_1 e Y_2 . Sia $P = (0, 0, w)$: la composizione dei due flussi trasporta P nel punto $\alpha_u \circ \beta_v(0, 0, w) = (u, v, w + uv)$; ciò significa che la sottovarietà integrale per P è la superficie parametrizzata da

$$(u, v) \mapsto (u, v, w + uv)$$

Una carta piatta per la distribuzione \mathcal{D} si ottiene semplicemente invertendo la funzione $(u, v, w) \mapsto (x, y, z)$: la funzione inversa si calcola facilmente e risulta $(x, y, z) \mapsto (u = x, v = y, w = z - xy)$. Ne segue che le sottovarietà integrali di \mathcal{D} sono gli insiemi di livello di $w(x, y) = z - xy$.

Esempio 5.2 (Teorema di Frobenius multivoco). Siano X, Y campi vettoriali lipschitziani su \mathbb{R}^2 definiti da

$$X = |x + 3y|\partial_x, \quad Y = |x + 3y|\partial_x - 2y\partial_z$$

Questi due campi sono ovviamente linearmente indipendenti; avremo poi

- se $x + 3y > 0$, allora si ha $X = (x + 3y)\partial_x$ e $Y = (x + 3y)\partial_x - 2y\partial_z$ e si trova facilmente $[X, Y] = 0$;
- se $x + 3y = 0$, allora si ha $X = 0$ e $Y = -2y\partial_z$, quindi $[X, Y] = 0$;
- se $x + 3y < 0$, allora si ha $X = -(x + 3y)\partial_x$ e $Y = -(x + 3y)\partial_x - 2y\partial_z$ e si trova facilmente $[X, Y] = 0$;

Pertanto, le parentesi di Lie multivocche $[X, Y]_{\text{set}}$ contengono il solo vettore nullo: per il Teorema di Frobenius multivoco, la distribuzione generata da X e Y è completamente integrabile.

Appendice A

Fibrato vettoriale e sue sezioni

Definizione A.1 (Fibrato vettoriale). *Un fibrato vettoriale (reale) di rango r su una varietà differenziabile X è una varietà differenziabile E , con una funzione differenziabile suriettiva $\pi : E \rightarrow X$, tale che:*

- $\forall P \in X$, la fibra $E_P := \pi^{-1}(P)$ è uno spazio vettoriale (reale) di dimensione r ;
- $\forall P \in X$, esiste un intorno aperto $U \subseteq X$ di P e un diffeomorfismo $\chi : E|_U = \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$ (detto *trivializzazione locale*) tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} E|_U & \xrightarrow{\chi} & U \times \mathbb{R}^r \\ & \searrow \pi & \swarrow p_1 \\ & U & \end{array}$$

dove p_1 è la proiezione sul primo fattore; inoltre χ è tale che $\forall P \in U$ la funzione indotta $\chi|_P : E_P = \pi^{-1}(P) \rightarrow \{P\} \times \mathbb{R}^r$ sia un isomorfismo di spazi vettoriali. E è detto lo spazio totale del fibrato vettoriale; $E = X \times \mathbb{R}^r$ è detto il fibrato banale (o triviale).

- $\forall i, j$ esistono delle funzioni differenziabili $\eta_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ tali che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} & E|_{U_i \cap U_j} & \\ \psi_i \swarrow & & \searrow \psi_j \\ (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n & \xleftarrow{\eta_{ij}} & (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \end{array}$$

Si noti che l'identificazione determinata da η_{ij} è un isomorfismo di spazi vettoriali (cioè le $\eta_{ij}(P)$ sono funzioni lineari). Le "funzioni di transizione" η_{ij} soddisfano le solite identità:

1. $\eta_{ii}(P) = \text{id}$ (matrice identica);
2. $\eta_{ji}(P) = \eta_{ij}(P)^{-1}$;
3. $\eta_{ij}(P) \circ \eta_{jk}(P) = \eta_{ik}(P)$ su $U_i \cap U_j \cap U_k$.

Le operazioni che si possono fare sugli spazi vettoriali si possono estendere ai fibrati vettoriali (basta farle sulle fibre, che sono spazi vettoriali):

Definizione A.2 (Somma diretta di fibrati vettoriali). *Siano E, F fibrati vettoriali su una varietà X . Il fibrato vettoriale $E \oplus F$ è ottenuto effettuando la somma diretta delle fibre di E e di F :*

$$E \oplus F = \bigsqcup_{P \in X} E_P \oplus F_P.$$

Definizione A.3 (Fibrato duale). *Sia E un fibrato vettoriale su X . Il fibrato vettoriale duale E^* è ottenuto prendendo il duale di ogni fibra di E :*

$$E^* = \bigsqcup_{P \in X} E_P^* = \bigsqcup_{P \in X} \text{Hom}(E_P, \mathbb{R})$$

Appendice B

Proprietà del fibrato tangente

La struttura del fibrato tangente TX su una varietà X di dimensione n è il prototipo di quella di fibrato vettoriale, descritta nell'appendice [A]:

- è *localmente triviale*, cioè esiste un ricoprimento aperto $\{U\}_i$ di X tale che

$$TX|_{U_i} \xrightarrow{\psi_i} U_i \times \mathbb{R}^n;$$

- per ogni i, j sono definite delle funzioni differenziabili

$$\eta_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow GL(n, \mathbb{R})$$

con proprietà del tutto analoghe a quelle già viste per i fibrati vettoriali;

- le identificazioni

$$TX|_U \xrightarrow{\text{triv.loc.}} U \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{carta locale}} \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$$

permettono di identificare $TX|_U$ con un aperto di \mathbb{R}^{2n} , e quindi definiscono delle carte locali per TX . Si può verificare facilmente che esse definiscono su TX una struttura di varietà di dimensione $2n$.

- per quanto riguarda la proiezione $\pi : TX \longrightarrow X$, localmente si ha

$$\begin{array}{ccccc} TX|_U & \longrightarrow & U \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n} \\ \downarrow \pi & & \downarrow p_1 & & \downarrow p_1 \\ X \supset U & \xrightarrow{id} & U & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \end{array}$$

in cui p_1 è la proiezione sul primo fattore. Da questo diagramma si deduce che $\pi : TX \longrightarrow X$ è una funzione differenziabile tra varietà.

Appendice C

Algebra e campi tensoriali

In questa sezione verrà svolto un breve richiamo sul prodotto tensoriale di spazi vettoriali e sul suo utilizzo per costruire l'algebra tensoriale ad essi associata, entrambi oggetti molto usati in Geometria differenziale (e non solo). Le dimostrazioni dei risultati che verranno di seguito enunciati possono essere trovati ad esempio nelle prime pagine di [Abate M., 2011].

Definizione C.1 (Prodotto tensoriale). *Siano V_1, \dots, V_p spazi vettoriali sul campo \mathbb{K} . Un prodotto tensoriale di V_1, \dots, V_p è una coppia (T, F) , dove T è uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e $F : V_1 \times \dots \times V_p \rightarrow T$ un'applicazione p -lineare per cui vale la proprietà universale del prodotto tensoriale:*

- per ogni spazio vettoriale W su \mathbb{K} e ogni applicazione multilineare $\varphi : V_1 \times \dots \times V_p \rightarrow W$ esiste un'unica applicazione lineare $\tilde{\varphi} : T \rightarrow W$ tale che $\varphi = \tilde{\varphi} \circ F$.

Lo spazio T viene usualmente denotato con il simbolo $V_1 \otimes \dots \otimes V_p$ ed è chiamato prodotto tensoriale. Gli elementi della forma $F(v_1, \dots, v_p)$ vengono denotati con $v_1 \otimes \dots \otimes v_p$ e sono detti tensori decomponibili.

Il prodotto tensoriale di spazi vettoriali esiste sempre, siano essi di dimensione finita o meno. La dimostrazione di questo fatto è diversa nei due casi: precisamente, nel caso di spazi vettoriali di dimensione finita, essa è di tipo costruttivo, cioè mostra un modo esplicito di costruire il prodotto tensoriale di spazi vettoriali.

Proposizione C.1 (Esistenza del prodotto tensoriale). *Dati $p \geq 2$ spazi vettoriali V_1, \dots, V_p di dimensione finita su \mathbb{K} , siano $T := \text{Mult}(V_1^*, \dots, V_p^*)$ e $F : V_1 \times \dots \times V_p \rightarrow T$ data definendo $F(v_1, \dots, v_p) : V_1^* \times \dots \times V_p^* \rightarrow \mathbb{K}$ tramite*

$$F(v_1, \dots, v_p)(\varphi^1, \dots, \varphi^p) = \varphi^1(v_1) \dots \varphi^p(v_p)$$

per ogni $v_1 \in V_1, \dots, v_p \in V_p$ e ogni $\varphi^1 \in V_1^*, \dots, \varphi^p \in V_p^*$. Allora (T, F) è un prodotto tensoriale di V_1, \dots, V_p . In particolare, $V_1 \otimes \dots \otimes V_p = \text{Mult}(V_1^*, \dots, V_p^*)$, per cui

$$\dim(V_1 \otimes \dots \otimes V_p) = \dim V_1 \cdot \dots \cdot \dim V_p$$

Il prodotto tensoriale è *essenzialmente unico*, cioè unico a meno di isomorfismi:

Proposizione C.2 (Unicità del prodotto tensoriale). *Se (T, F) e (T', F') sono prodotti tensoriali di V_1, \dots, V_p , allora esiste un unico isomorfismo $L : T \rightarrow T'$ tale che $F' = L \circ F$.*

In Geometria Differenziale sono particolarmente utili alcuni spazi ottenibili come prodotti tensoriali i cui fattori sono tutti uguali ad uno spazio vettoriale fissato o al suo duale.

Definizione C.2 (Tensori (contro/)varianti e algebra tensoriale). *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo \mathbb{K} . Allora possiamo costruire i seguenti spazi vettoriali:*

$$\begin{aligned} T_0^0(V) &= T_0(V) = T^0(V) = \mathbb{K}, & T^1(V) &= T^1_0(V) = V \\ T^p(V) &= T^p_0(V) = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{p \text{ volte}} & T_q(V) &= T^0_q(V) = \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{q \text{ volte}} \\ & & T^p_q(V) &= T^p(V) \otimes T_q(V) \\ T^\bullet(V) &= \bigoplus_{p \geq 0} T^p(V), & T_\bullet(V) &= \bigoplus_{q \geq 0} T_q(V) & T(V) &= \bigoplus_{p, q \geq 0} T^p_q(V) \end{aligned}$$

Un elemento di $T^p_q(V)$ è detto tensore p -covariante e q -controvariante, o tensore di tipo $\binom{p}{q}$, mentre $T(V)$ è detta algebra tensoriale di V .

Si è visto nella proposizione [C.1] che il prodotto tensoriale di spazi vettoriali di dimensione finita si costruisce tramite opportune applicazioni multilinearari: tra queste ovviamente si distinguono quelle *simmetriche*, cioè tali che

$$t(\alpha^{\sigma(1)}, \dots, \alpha^{\sigma(p)}) = t(\alpha^1, \dots, \alpha^p)$$

per ogni permutazione σ di $\{1, \dots, p\}$, e quelle *alternanti*, cioè tali che

$$t(\alpha^{\sigma(1)}, \dots, \alpha^{\sigma(p)}) = \text{sign}(\sigma) \cdot t(\alpha^1, \dots, \alpha^p).$$

Ci sono quindi tensori $t \in T^p(V)$ simmetrici e alternanti (o *antisimmetrici*); indicheremo con $S^p(V)$ il sottospazio di $T^p(V)$ generato dai primi, e con $\Lambda^p(V)$ quello generato dai secondi, e si può mostrare che:

- $\dim S^p(V) = \binom{n+p-1}{p}$;
- $\dim \Lambda^p(V) = \begin{cases} \binom{n}{p} & \text{se } 0 \leq p \leq n \\ 0 & \text{se } p > n \end{cases}$
- $T^2(V) = S^2(V) \oplus \Lambda^2(V)$, cioè ogni tensore $t \in T^2(V)$ può essere scritto in modo unico come somma di un tensore simmetrico e di uno antisimmetrico.

Introduciamo ora un nuovo simbolo, \wedge , detto *prodotto antisimmetrico* o *prodotto esterno*, tale che per definizione si abbia $v \wedge w = -w \wedge v$.

Definizione C.3 (Algebra esterna). *Lo spazio vettoriale $\Lambda(V) = \bigoplus_{p=0}^n \Lambda^n(V)$, dotato del prodotto esterno \wedge è detto algebra esterna di V .*

Tutte queste costruzioni si possono naturalmente estendere al caso di un fibrato vettoriale E su una varietà X (come già visto nell'appendice [A], è sufficiente farlo sulle fibre $E_P, \forall P \in X$). Si può quindi definire l'algebra esterna $\Lambda(E)$. Se $E = TX$ è il fibrato tangente e il suo duale $E^* = T^*X$ è il fibrato cotangente, si avranno allora tensori antisimmetrici del tipo $\Lambda^p(TX)$ o del tipo $\Lambda^p(T^*X)$, etc.

Definizione C.4 (Algebra esterna di una varietà). *L'algebra esterna $\Lambda(T^*X) = \bigoplus_{p=0}^n \Lambda^p(T^*X)$ è detta l'algebra esterna di X .*

Si è già visto che i campi vettoriali su X sono definiti come sezioni del fibrato tangente TX . Analogamente, si avranno le seguenti definizioni:

Definizione C.5 (k -forme differenziali e campi tensoriali). *Una k -forma differenziale su una varietà X è una sezione di $\Lambda^k(T^*X)$; l'insieme delle k -forme differenziali viene indicato con $\Omega^k(X)$. Un campo tensoriale di tipo $\binom{r}{s}$ è una sezione del fibrato $T^r_s(TX)$.*

Capita spesso che strutture definite su uno spazio vettoriale V possano essere estese all'intera algebra tensoriale. Un esempio tipico è quello del prodotto scalare:

Proposizione C.3. *Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ un prodotto scalare definito positivo su uno spazio vettoriale V di dimensione finita su \mathbb{R} . Allora esiste un unico prodotto scalare definito positivo $\langle \cdot, \cdot \rangle_{T(V)} : T(V) \times T(V) \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa le seguenti condizioni:*

1. $T^p_q(V)$ è ortogonale a $T^h_k(V)$ se $p \neq h$ o $q \neq k$;
2. $\langle \lambda, \mu \rangle_{T(V)} = \lambda\mu, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} = T^0(V)$;
3. $\langle v, w \rangle_{T(V)} = \langle v, w \rangle, \forall v, w \in V = T^1(V)$;
4. $\langle v^*, w^* \rangle_{T(V)} = \langle v, w \rangle, \forall v, w \in V$;
5. $\langle \alpha_1 \otimes \alpha_2, \beta_1 \otimes \beta_2 \rangle_{T(V)} = \langle \alpha_1, \beta_1 \rangle_{T(V)} \langle \alpha_2, \beta_2 \rangle_{T(V)}, \forall \alpha_1, \beta_1 \in T^{p_1}_{q_1}(V), \forall \alpha_2, \beta_2 \in T^{p_2}_{q_2}(V)$.

Infine, si introduce un'ultima operazione su $T(V)$:

Definizione C.6 (Contrazione). *La contrazione su $T^p_q(V)$ di tipo $\binom{i}{j}$ con $1 \leq i \leq p$ e $1 \leq j \leq q$ è l'applicazione lineare $C^i_j : T^p_q(V) \rightarrow T^{p-1}_{q-1}(V)$ definita sui tensori decomponibili da*

$$\begin{aligned} & C^i_j(v_1 \otimes \dots \otimes v_p \otimes w^1 \otimes \dots \otimes w^q) = \\ & = w^j(v_i)v_1 \otimes \dots \otimes v_{i-1} \otimes v_{i+1} \otimes \dots \otimes v_p \otimes w^1 \otimes \dots \otimes w^{j-1} \otimes w^{j+1} \otimes \dots \otimes w^q \end{aligned}$$

Appendice D

Parentesi di Lie di due 1-forme

L'obiettivo di questa sezione è dare un significato alla parentesi di Lie di due 1-forme e calcolarne l'espressione: ciò torna utile nel paragrafo [5.2], in quanto permette di esplicitare in un primo modo il collegamento tra parentesi di Lie e parentesi di Poisson.

Per prima cosa, è necessario introdurre la *derivata di Lie di una 1-forma* ω lungo un campo vettoriale X su una varietà M , e per farlo sostanzialmente si forza la regola di Leibniz. Dato un altro campo vettoriale Y su M , in altre parole, si impone che

$$\mathcal{L}_X(\langle \omega, Y \rangle) = \langle \mathcal{L}_X \omega, Y \rangle + \langle \omega, \mathcal{L}_X Y \rangle$$

Ora, $\langle \omega, Y \rangle$ è una funzione (di classe C^∞ se ω e Y sono tali come 1-forma e campo vettoriale, rispettivamente), quindi la sua derivata di Lie lungo X è semplicemente l'applicazione del campo vettoriale X ad essa, cioè $X(\langle \omega, Y \rangle) = X(\omega(Y))$; il primo addendo del membro a destra contiene invece proprio l'oggetto a cui vogliamo dare significato, $\mathcal{L}_X \omega$; il secondo addendo invece è un oggetto che sappiamo già calcolare e che può essere equivalentemente scritto come $\langle \omega, [X, Y] \rangle = \omega([X, Y])$. Si può allora dare la seguente

Definizione D.1 (Derivata di Lie di una 1-forma). *Siano X, Y due campi vettoriali su una varietà differenziale M e ω una 1-forma differenziale su M . La derivata di Lie di ω lungo X è definita dalla relazione*

$$\langle \mathcal{L}_X \omega, Y \rangle = (\mathcal{L}_X \omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega([X, Y]) \quad (\text{D.1})$$

In coordinate locali, se $X = X^i \partial_i, Y = Y^j \partial_j$ e $\omega = \omega_l dx^l$, la relazione precedente può essere riscritta come:

$$\langle \mathcal{L}_X \omega, Y \rangle = Y^j (X^i \partial_i \omega_j - \omega_i \partial_j X^i) = \langle Y^j \partial_j, X^i \partial_i \omega_l - \omega_i \partial_l X^i \rangle$$

per cui in coordinate locali l'espressione di $\mathcal{L}_X \omega$ può anche essere scritta come

$$\mathcal{L}_X \omega = (X^i \partial_i \omega_l - \omega_i \partial_l X^i) dx^l \quad (\text{D.2})$$

Re-iterando tale *escamotage*, può essere facilmente definita la derivata di Lie di un campo tensoriale qualsiasi (sebbene ciò non sia interessante ai fini di questa trattazione, quindi non ci si dilungherà in merito).

Si vuole ora passare allo step successivo, cioè dare un senso all'espressione $[\omega_1, \omega_2]$, dove naturalmente ω_1 e ω_2 sono due 1-forme sulla varietà M .

La prima idea che viene in mente è seguire un procedimento analogo al precedente, ma già in partenza si commette un passo falso: la parentesi di Lie sopra scritta non può essere equivalentemente calcolata come $\mathcal{L}_{\omega_1}\omega_2$ - espressione che peraltro non ha nessun senso, per cui bisognerebbe prima dare un significato a quest'ultima, magari con un procedimento analogo al precedente, e poi postulare che essa sia uguale alla parentesi di Lie cercata. Questa strada è tuttavia molto tortuosa, se non impraticabile: si è precedentemente riusciti a dare un senso all'espressione $\mathcal{L}_X\omega$, mentre espressioni come $\mathcal{L}_\omega X$ non hanno senso (e postulare la validità di relazioni come $\mathcal{L}_X\omega = -\mathcal{L}_\omega X$, in analogia a quanto avviene con due campi vettoriali X e Y , complica solamente la trattazione, arricchendola di ipotesi e postulati arbitrari.) - per cui tale idea va scartata.

Il secondo *ansatz* è molto *naïve*: porre $[\omega_1, \omega_2] = \omega_1 \circ \omega_2 - \omega_2 \circ \omega_1$. Bisogna allora capire cosa significa comporre tra loro due forme differenziali: ricordando quanto visto nella Proposizione [C.3] (in particolare, il punto 4), si porrà

$$\omega_1 \circ \omega_2 = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle_{T(V)} = \langle \omega_1^*, \omega_2^* \rangle = \omega_1^* \circ \omega_2^*$$

e si avrà allora

$$[\omega_1, \omega_2] = [\omega_1^*, \omega_2^*]$$

Tuttavia, anche in questo caso si è commesso un passo falso, che porta ad un risultato in realtà poco "gradevole": se l'ultima relazione trovata vale, $[\omega_1, \omega_2]$ risulta essere un campo vettoriale (come lo è il membro a destra), e non è una proprietà che ci piacerebbe che avessero le parentesi di Lie di due 1-forme; ci piacerebbe che, come la parentesi di Lie di due campi vettoriali è un campo vettoriale, allo stesso modo la parentesi di Lie di due 1-forme fosse una 1-forma. Si decide così di scartare anche questa seconda strada.

La via seguita finora nella letteratura (vedasi ad esempio [Modesti, 1997]) prevede l'introduzione di un oggetto detto *bivettore*, che permette di conservare le proprietà di antisimmetria delle parentesi di Lie e quelle di "preservazione dell'ordine dei tensori coinvolti":

Definizione D.2 (Bivettore di Poisson). *Sia M una varietà differenziabile: un campo tensoriale P antisimmetrico a due indici controvarianti per cui valga la relazione*

$$\{f, g\} = P(df, dg) = P^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}, \forall f, g \in C^\infty(M),$$

dove $\{\cdot, \cdot\}$ sono le parentesi di Poisson, si dice bivettore di Poisson associato alla coppia $(M, \{\cdot, \cdot\})$.

Essendo un tensore 2–controvariante, la sua applicazione ad una 1–forma differenziale restituisce un oggetto 1–controvariante, che si vede facilmente essere un campo vettoriale. Con questa osservazione in mente, diventa allora chiara la seguente definizione di parentesi di Lie di due 1–forme:

Definizione D.3 (Parentesi di Lie di due 1–forme). *Sia $\{M, \{\cdot, \cdot\}, P\}$ una varietà di Poisson con bivettore P . La parentesi di Lie di due 1–forme differenziali $\alpha, \beta \in T^*M$ è*

$$[\alpha, \beta] = -\mathcal{L}_{P(\alpha)}\beta + \mathcal{L}_{P(\beta)}\alpha - dP(\alpha, \beta) \quad (\text{D.3})$$

Si vede subito che è una 1–forma differenziale, come voluto: i primi due addendi sono le derivate di Lie lungo un campo vettoriale di una 1–forma differenziale, cioè gli oggetti visti nell’equazione [D.1], che sono 1–forme differenziali; il terzo addendo è il differenziale di una funzione, quindi è anch’esso una 1–forma differenziale. Inoltre, essendo P antisimmetrico, è immediato verificare che anche queste parentesi di Lie sono antisimmetriche.

Appendice E

Campi F-correlati

Definizione E.1 (Push-forward). Sia $F : M \rightarrow N$ un diffeomorfismo¹. Dato un campo vettoriale X su M , indicheremo con $dF(X)$ o $F_*(X)$ il push-forward di X su N , cioè il campo vettoriale su N definito ponendo, $\forall Q \in N$,

$$dF(X)_Q := dF_{F^{-1}(Q)}(X_{F^{-1}(Q)})$$

Definizione E.2 (Campo F -correlato). Sia $F : M \rightarrow N$ una funzione di classe C^∞ . Diremo che un campo vettoriale liscio Y su N è F -correlato a un campo vettoriale X su M se $Y_{F(P)} = dF_P(X_P), \forall P \in M$.

Per costruzione si ha allora che, se F è un diffeomorfismo, $dF(X)$ è l'unico campo vettoriale F -correlato a X .

Lemma E.1. Sia $F : M \rightarrow N$, X campo vettoriale su M , Y campo vettoriale su N .

- Y è F -correlato a X se e solo se

$$X(f \circ F) = Y(f) \circ F,$$

per ogni funzione $f \in C^\infty(U)$, con U aperto di N ;

- se Y_1 è F -correlato a X_1 e Y_2 è F -correlato a X_2 , allora $[Y_1, Y_2]$ è F -correlato a $[X_1, X_2]$;
- se F è un diffeomorfismo, allora $[dF(X_1), dF(X_2)] = dF([X_1, X_2])$; in altre parole, il push-forward è compatibile con le parentesi di Lie.

Dimostrazione.

¹Questa condizione è ovviamente necessaria al fine di avere tutto ben definito e regolare nel secondo membro

- si ha $X(f \circ F)(P) = dF_P(X_P)(f)$, $(Y(f) \circ F)(P) = Y_{F(P)}(f)$, ove f è una funzione di classe C^∞ in un intorno di $F(P) \in N$. Pertanto $X(f \circ F) = Y(f) \circ F$ se e solo se $dF_P(X_P) = Y_{F(P)}$, $\forall P \in M$, cioè se e solo se Y è F -correlato a X .

- Il punto precedente afferma che, $\forall f \in C^\infty(U)$ con U aperto di N , si ha:

$$X_1 X_2 (f \circ F) = X_1 (Y_2 (f) \circ F) = Y_1 Y_2 (f) \circ F$$

$$X_2 X_1 (f \circ F) = X_2 (Y_1 (f) \circ F) = Y_2 Y_1 (f) \circ F$$

quindi $[X_1, X_2](f \circ F) = [Y_1, Y_2](f) \circ F$. Sempre per il punto precedente, ciò significa che $[Y_1, Y_2]$ è F -correlato a $[X_1, X_2]$.

- se F è un diffeomorfismo, poniamo $Y_1 = dF(X_1)$ e $Y_2 = dF(X_2)$. Y_1 e Y_2 sono gli unici campi F -correlati a X_1 e X_2 rispettivamente. Il punto precedente afferma che $[Y_1, Y_2] = [dF(X_1), dF(X_2)]$ è F -correlato a $[X_1, X_2]$. Ma poiché F è un diffeomorfismo, l'unico campo vettoriale F -correlato a $[X_1, X_2]$ è $dF([X_1, X_2])$, quindi si ha $[dF(X_1), dF(X_2)] = dF([X_1, X_2])$.

□

Appendice F

Teoremi di Cauchy-Lipschitz locale e globale

In questa sezione verranno richiamate alcune nozioni classiche di Analisi matematica, in particolare: i teoremi di Cauchy-Lipschitz per l'esistenza e l'unicità locale/globale delle soluzioni di un fissato problema di Cauchy e il teorema di Peano per la sola esistenza di tali soluzioni. Per le dimostrazioni di tali risultati si rimanda ad un qualsiasi testo di Analisi matematica, ad esempio [Marastoni, 2012].

Se $f : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ è una funzione continua definita in un aperto $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$, dato un punto $(t_0, y_0) \in U$ si cercano le soluzioni di

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (\text{F.1})$$

ovvero le funzioni $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ di classe \mathcal{C}^1 su un intervallo I di \mathbb{R} contenente t_0 , tali che $\forall t \in I$ si abbia $(t, \varphi(t)) \in U$ e $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ e che $\varphi(t_0) = y_0$. Risulta utile scegliere fin da subito $a, b > 0$ tali che, denotando per brevità qui e nel seguito

$$I_a = [t_0 - a, t_0 + a], \quad J_b = \{y \in \mathbb{C}^n : \|y - y_0\| \leq b\}$$

l'intorno rettangolare compatto $I_a \times J_b$ di (t_0, y_0) sia contenuto in U .

È immediato mostrare che il problema di Cauchy [F.1] è equivalente al *problema integrale di Volterra*

$$y = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) \, d\tau \quad (\text{F.2})$$

Si può così mostrare il seguente teorema:

Teorema F.1 (Cauchy-Lipschitz, esistenza e unicità locale). *Se in $I_a \times J_b$ la funzione continua f è anche lipschitziana rispetto a y uniformemente rispetto a t , cioè se*

$$\exists L > 0 : \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\|, \quad \forall t \in I_a, \quad \forall y_1, y_2 \in J_b$$

allora esistono $0 < \delta \leq a$ e un'unica soluzione $\varphi : I_b \rightarrow J_b$ di classe \mathcal{C}^1 di [F.1]-[F.2].

Proposizione F.1. *Si assuma che l'equazione $y' = f(t, y)$ abbia esistenza e unicità locale in ogni punto di U . Allora:*

- due soluzioni definite su un medesimo intervallo I che coincidono in un punto di I sono necessariamente uguali su tutto I ;
- una soluzione massimale ha come dominio un intervallo aperto;
- una soluzione massimale esce definitivamente da ogni sottoinsieme compatto di U , nel senso che, data una soluzione massimale $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ (dove, come detto nel punto precedente, I è un intervallo aperto) e un compatto $C \subset U$, esistono $t_-, t_+ \in I$ tali che $(t, \varphi(t)) \notin C$ per ogni $t < t_-$ e ogni $t > t_+$.

Il Teorema [F.1] fornisce una condizione sufficiente per l'esistenza e l'unicità locale della soluzione del problema di Cauchy (ovvero $f(t, y)$ continua e localmente y -lipschitziana). Tuttavia per la sola esistenza locale (senza garanzia di unicità) della soluzione è già sufficiente che $f(t, y)$ sia continua:

Teorema F.2 (Peano, esistenza locale). *Se in $I_a \times J_b$ la funzione f è continua, allora esistono $0 < \delta \leq a$ e una (non necessariamente unica) soluzione $\varphi : I_\delta \rightarrow J_b$ di classe \mathcal{C}^1 di [F.1]-[F.2].*

È di grande interesse avere maggiori informazioni sul dominio della soluzione del problema di Cauchy: in particolare, sarebbe importante sapere sotto quali condizioni la soluzione sia definita sul più ampio intervallo possibile.

Teorema F.3 (Cauchy-Lipschitz, esistenza e unicità globale). *Sia I un intervallo di \mathbb{R} tale che $I \times \mathbb{C}^n \subset U$, e si supponga valida una delle due seguenti ipotesi¹:*

1. Per ogni intervallo compatto $K \subset I$ si ha che

$$\exists L_K > 0 : \| f(t, y_1) - f(t, y_2) \| \leq L_K \| y_1 - y_2 \|, \quad \forall t \in K, \forall y_1, y_2 \in \mathbb{C}^n$$

2. La funzione f è localmente lipschitziana rispetto a y (dunque ammette esistenza e unicità locale) e per ogni intervallo compatto $K \subset I$ si ha che

$$\exists A_K, B_K > 0 : \| f(t, y) \| \leq A_K \| y \| + B_K, \quad \forall (t, y) \in K \times \mathbb{C}^n.$$

Allora, per ogni $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{C}^n$ il problema [F.1] ha una e una sola soluzione definita su tutto I .

¹La prima è più forte della seconda, dunque dà luogo ad una versione più debole del risultato.

Bibliografia

- [Abate M., 2011] Abate M., T. F. (2011). *Geometria Differenziale*. Springer.
- [Andrei A. Agrachev, 2008] Andrei A. Agrachev, Héctor J. Sussmann, V. I. U. (2008). *Nonlinear and Optimal Control Theory: Lectures*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [Benenti, 2013] Benenti, S. (2013). Capitoli di meccanica analitica - distribuzioni e teoremi di frobenius, chow, sussmann. Dispense scritte dal professore per gli studenti del corso.
- [Bottacin, 2015] Bottacin, F. (2015). Dispense per il corso di geometria differenziale. Dispense scritte a mano dal professore per gli studenti del corso.
- [Bullo and Lewis, 2004] Bullo, F. and Lewis, A. D. (2004). *Geometric control of mechanical systems: modeling, analysis, and design for simple mechanical control systems*, volume 49. Springer Science & Business Media.
- [Calcaterra and Boldt, 2003] Calcaterra, C. and Boldt, A. (2003). Flow-box theorem for lipschitz vector fields. *arXiv preprint math.DS/0305207*.
- [De Blasi and Myjak, 1983] De Blasi, F. and Myjak, J. (1983). Generic flows generated by continuous vector fields in banach spaces. *Advances in Mathematics*, 50(3):266–280.
- [Fasso', 2013] Fasso', F. (2013). Dispense per il corso di istituzioni di fisica matematica.
- [Jurdjevic, 1997] Jurdjevic, V. (1997). *Geometric Control Theory*. Cambridge University Press.
- [K.M. Lynch, 1996] K.M. Lynch, M. M. (1996). Stable pushing: Mechanics, controllability, and planning. *The International Journal of Robotics*.
- [Laumond, 1998] Laumond, J.-P. (1998). Robot motion planning and control. lectures notes in control and information sciences 229. *Springer*, 3:155.

- [Lee, 2002] Lee, J. M. (2002). *Introduction to smooth manifolds*. Springer.
- [Marastoni, 2012] Marastoni, C. (2012). *Analisi matematica 3*.
- [Modesti, 1997] Modesti, P. (1997). *Metodi geometrici per sistemi integrabili e analisi di Gel'fand - Zakharevich*. PhD thesis, Università degli studi di Roma.
- [Nekvinda and Zajíček, 1988] Nekvinda, A. and Zajíček, L. (1988). A simple proof of the rademacher theorem. *Časopis pro pěstování matematiky*, 113(4):337–341.
- [Newns and Walker, 1956] Newns, W. and Walker, A. (1956). Tangent planes to a differentiable manifold. *Journal of the London Mathematical Society*, 1(4):400–407.
- [Rampazzo, 2007] Rampazzo, F. (2007). Frobenius-type theorems for lipschitz distributions. *Journal of Differential Equations*, 243(2):270–300.
- [Rampazzo, 2015a] Rampazzo, F. (2015a). Commutator of smooth and non-smooth vector fields. Slides presentate al Symposium of Nonlinear Analysis a Torun, Polonia.
- [Rampazzo, 2015b] Rampazzo, F. (2015b). Controllabilità. Note sulla Teoria della Controllabilità scritte da due studenti.
- [Rampazzo and Sussmann, 2001] Rampazzo, F. and Sussmann, H. J. (2001). Set-valued differentials and a nonsmooth version of chow's theorem. In *Decision and Control, 2001. Proceedings of the 40th IEEE Conference on*, volume 3, pages 2613–2618. IEEE.
- [Rossi, 2004] Rossi, P. (2004). *Coomologia Equivariante degli Algebroidi di Lie e Teorie Super Yang-Mills*. PhD thesis, Università degli Studi di Genova.
- [Schulz, 2006] Schulz, M. (2006). *Control Theory in Physics and other Fields of Science: Concepts, Tools, and Applications*. Springer.
- [Vittone, 2003] Vittone, D. (2003). Regolarità delle geodetiche nei gruppi di carnot.