



# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Titolo

Diffusione e aggregazione di particelle in sistemi con iniezione esterna

Relatore

Prof. Amos Maritan

Laureando

Lorenzo Cassini

Anno Accademico 2019/2020

# **INDICE**

## **CAPITOLO 1: Introduzione**

- **Obiettivi e metodi**
- **Sezione 1.1: Processi stocastici**

## **CAPITOLO 2: Il fenomeno di aggregazione di masse in sistemi con e senza iniezione**

- **Sezione 2.1: Modello ed equazioni di base**
- **Sezione 2.2: Soluzione senza iniezione**
- **Sezione 2.3: Stati stazionari nel caso con iniezione**
- **Sezione 2.4: Unicità e stabilità**
- **Sezione 2.5: Rilassamento allo stato finale**
- **Sezione 2.6: Correlazioni spaziali**

## **CAPITOLO 3: Leggi di potenza e Criticità**

## **CAPITOLO 4: Conclusioni**

# **CAPITOLO 1: INTRODUZIONE**

## **OBIETTIVI E METODI:**

Lo studio dei processi stocastici è presente in fisica ormai dagli inizi del 900 quando, tramite gli studi teorici di Marian Smoluchowski, è stato possibile formalizzare teoricamente alcuni di questi processi. Dopo pochi anni nel 1926, grazie anche a un notevole sviluppo tecnologico, è stato possibile analizzare applicazioni reali delle teorie proposte da Smoluchowski, andando a esaminare con osservazioni dirette o simulazioni numeriche alcuni risultati che i modelli ci propongono. Questi studi portarono alla conferma della teoria discreta della materia e alla vincita di due premi Nobel, uno assegnato a Theodor Svedberg per la chimica e l'altro a Jean Baptiste Perrin per la fisica. È chiaro quindi che i processi stocastici e il loro studio abbia contribuito notevolmente allo sviluppo della fisica di inizio secolo, tuttavia lo studio e l'applicazione di questi modelli si è espanso con il tempo e tutt'ora sono di fondamentale importanza. Ad esempio, lo studio dei moti di tipo browniano, che sono stati a inizio secolo il prototipo di indagine per processi di natura stocastica, permise nel 1900 a Louis Bachelier di creare modelli per descrivere l'andamento della borsa di Parigi. Questi stessi modelli, basati su calcoli matematici riconducibili ad Albert Einstein, sono stati ripresi anni più tardi, nel 1973, da Black e Scholes che li utilizzarono per descrivere l'andamento dei prezzi dei prodotti finanziari derivati.

Questa tesi si pone quindi come obiettivo quello di fornire una definizione di processo stocastico, risolvendo poi un modello semplice collegato alla fisica come il fenomeno dell'aggregazione di masse proposto da Hideki e Misako Takayasu e colleghi. Abbiamo scelto questo fenomeno in particolare poiché è possibile trovare delle soluzioni esatte delle equazioni fondamentali, inoltre permette di studiare anche altre proprietà più generali dei fenomeni critici. Nello specifico, vedremo come sistemi di questo tipo vedano la comparsa di leggi di potenza frazionaria che vanno a regolare l'andamento spaziale dello stato finale e anche l'evoluzione temporale del sistema. Queste leggi di potenza sono estremamente interessanti e molto comuni in processi naturali, quindi cercheremo di fare luce su quali siano le loro particolarità e applicazioni nella dinamica di sistemi complessi come reti neurali, sistemi biologici e molto altro.

## **SEZIONE 1.1: PROCESSI STOCASTICI**

Per poter introdurre in modo preciso cosa si intende con processo stocastico, è necessario avere familiarità con i concetti di variabile stocastica e di densità di probabilità (PDF) oltre ad altre quantità da esse ricavabili. Riprendiamo di seguito alcune di queste definizioni.

Definiamo un *numero casuale* o *variabile stocastica* una certa quantità  $x$  alla quale poter attribuire un set di possibili valori, sia discreti che continui. La *densità di probabilità*  $P(x)$  descrive la probabilità con cui i possibili valori di  $x$  si manifestano effettuando una misura della variabile casuale. Per fare chiarezza prendiamo il caso in cui  $x$  sia una variabile discreta, la sua PDF sarà quindi data da dei valori discreti di probabilità. L'esempio più classico si può fare con il lancio di un dado: in questo caso la nostra variabile casuale, che indichiamo con  $i$  per sottolineare il suo carattere discreto, è il risultato del lancio; ogni possibile risultato avrà una certa probabilità di presentarsi che, in questo caso, è uguale per tutti i risultati ovvero  $1/6$ . La probabilità che un certo risultato si presenti deve rispettare alcuni vincoli come la condizione di normalizzazione:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n P_i = 1$$

Dove  $n$  indica il numero di possibili risultati del lancio,  $i$  indica uno dei possibili risultati del lancio mentre  $P_i$  è la probabilità che tale risultato si presenti effettuando il lancio. Nel caso in cui  $x$  sia invece una variabile stocastica continua (come ad esempio la velocità di una particella, la sua energia, la sua massa, ecc.) la sua densità di probabilità è definita tramite l'integrale:

$$(2) \quad \int_I P(x) dx = 1$$

dove si è indicato con  $I$  l'intervallo di valori che la variabile  $x$  può assumere, e  $P(x)dx$  indica la probabilità che la variabile casuale assuma valori compresi tra  $x$  e  $x + dx$ . L'intervallo di valori  $I$  può essere limitato come non limitato, tuttavia  $P(x)$  deve essere tale da far convergere l'integrale; inoltre la funzione  $P(x)$  deve essere definita positiva in tutto l'intervallo  $I$ , in quanto un valore di probabilità negativo è qualcosa di insensato.

Nel caso in cui  $x$  possa assumere sia valori discreti che continui, la sua PDF può essere scritta come:

$$(3) \quad P(x) = \sum_{i=1}^n P_i \delta(x - x_i) + \tilde{P}(x)$$

e la condizione di normalizzazione diventa:

$$(4) \quad \sum_{i=1}^n P_i + \int_I P(x) dx = 1$$

Adesso che possediamo i concetti di variabile casuale e densità di probabilità, siamo in grado di ricavare il valore di aspettazione, di una funzione di una variabile casuale. Chiamiamo *valore di aspettazione* di una funzione  $f(x)$  della variabile stocastica  $x$ , indicato con il simbolo  $\langle f(x) \rangle$ , il risultato del seguente integrale:

$$(5) \quad \langle f(x) \rangle = \int_I f(x) P(x) dx$$

Di particolare interesse sono i valori di aspettazione della funzione  $f(x) = x^m$  che vengono solitamente chiamati *momenti* della distribuzione. Il primo momento della distribuzione,  $m=1$ , corrisponde al valor medio di  $x$ , mentre momenti successivi possono essere utilizzati per ricavare altre informazioni, come ad esempio la dispersione della distribuzione di probabilità. Oltre ai momenti della distribuzione di probabilità, tramite il valore di aspettazione, siamo anche in grado di ricavare la *funzione caratteristica* del processo, definita nel modo seguente:

$$(6) \quad g(k) = \langle e^{ikx} \rangle = \int e^{ikx} P(x) dx$$

La funzione  $g(k)$  risulta quindi essere la trasformata di Fourier della distribuzione di probabilità  $P(x)$ , a meno di un fattore moltiplicativo pari a  $\sqrt{2\pi}$ . Le utilità di questa funzione sono molteplici: ricavando la funzione caratteristica siamo in grado di derivare la distribuzione di probabilità sottostante, inoltre anche i momenti della distribuzione sono facilmente calcolabili osservando che:

$$(7) \quad \left. \frac{d}{dk} g(k) \right|_{k=0} = ik \int x e^{ikx} P(x) dx \Big|_{k=0} = ik \langle x \rangle$$

Per ottenere i momenti successivi è sufficiente continuare a derivare rispetto  $k$ . Il momento  $m$ -esimo si può ottenere dalla derivata  $m$ -esima della funzione  $g(k)$  in  $k = 0$ , purché quest'ultima esista e sia finita.

Data una variabile casuale  $X$ , si possono da essa costruire un'infinità di altre variabili stocastiche semplicemente applicando una mappa  $f$  alla variabile  $X$ ; definendo quindi  $Y = f(X)$  si ottiene una nuova

variabile stocastica. Supponiamo ora che questa nuova variabile non sia unicamente una funzione di  $X$ , ma che dipenda anche da una seconda variabile non casuale che chiamiamo  $t$ , avremo quindi che:

$$(8) \quad Y_X(t) = f(X, t)$$

La nuova variabile  $Y_X(t)$  viene chiamata *funzione casuale* oppure, nel caso in cui la variabile  $t$  rappresenti il tempo, *processo stocastico*. Quando si studia un processo stocastico è possibile analizzare l'andamento di  $Y_X(t)$  andando a fissare uno specifico valore della variabile casuale. Supponendo quindi che  $X$  abbia assunto uno dei possibili valori  $x$ , possiamo definire una seconda funzione, dipendente unicamente da  $t$ , che indichiamo con  $Y_x(t)$  che viene solitamente indicata con il termine di *realizzazione*. Utilizzando le realizzazioni del processo che si sta esaminando, è possibile ricavare degli indicatori della distribuzione sfruttando la relazione (6) e usando  $f(x) = Y_x(t)$  come funzione integranda. Ad esempio, si può ricavare il valore medio del processo tramite:

$$(9) \quad \langle Y(t) \rangle = \int P(x, t) x dx$$

Essendo il valore medio una funzione unicamente di  $t$  si può analizzare tramite esso l'andamento del nostro processo e vedere, con lo scorrere di  $t$ , verso dove il nostro sistema sta evolvendo. Una seconda quantità che è possibile ricavare sfruttando il concetto di valor medio è l' $n$ -esimo momento della distribuzione. A differenza del caso di una semplice variabile casuale, per un processo stocastico, quest'ultimo si ottiene fissando una successione di istanti  $t_1, \dots, t_n$  e calcolando il valore medio del prodotto delle varie  $Y_x(t)$  associate a ognuno degli istanti  $t_i$ :

$$(10) \quad \langle Y_x(t_1)Y_x(t_2) \dots Y_x(t_n) \rangle = \int dx x_1 \dots x_n P_X(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$$

dove  $P_X(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$  indica la distribuzione di probabilità congiunta di trovare  $x_1$  al tempo  $t_1, \dots, x_n$  al tempo  $t_n$ .

Nel caso in cui si decida di prendere due istanti di tempo successivi,  $t_1, t_2$  ad esempio, è possibile ricavare anche la *funzione di autocorrelazione*:

$$(11) \quad k(t_1, t_2) = \langle Y_x(t_1)Y_x(t_2) \rangle - \langle Y_x(t_1) \rangle \langle Y_x(t_2) \rangle$$

Questa quantità è molto importante in quanto ci fornisce un parametro di controllo sul nostro sistema e ci permette di dire se un processo è stazionario o meno. Un processo stazionario si caratterizza dagli altri poiché i suoi valori medi non cambiano per traslazioni temporali, cioè:

$$(12) \quad \langle Y_x(t_1 + \tau)Y_x(t_2 + \tau) \dots Y_x(t_n + \tau) \rangle = \langle Y_x(t_1)Y_x(t_2) \dots Y_x(t_n) \rangle$$

per qualunque  $n, \tau$  e successione  $t_1, \dots, t_n$ . Come conseguenza l'autocorrelazione dipende unicamente da  $|t_1 - t_2|$ . Tuttavia, in fisica processi di questo tipo sono molto rari, ma si può assumere che un processo sia stazionario se  $|t_1 - t_2| > \tau_c$ , dove  $\tau_c$  viene solitamente chiamato *tempo di autocorrelazione*. Una condizione quindi per approssimare un processo con un suo analogo stazionario è quella di far passare un tempo molto maggiore del valore di  $\tau_c$ . Questa approssimazione non è sempre applicabile poiché esistono processi che posseggono un tempo di autocorrelazione infinito, questo ci dice che il sistema "ricorda" tutta la serie di cambiamenti che ha subito lungo la sua evoluzione e ciò gli impedisce di poter raggiungere la quasi stazionarietà [1].

La corretta interpretazione e lo studio di questi sistemi appare quindi come una sfida molto ardua, nonostante i processi stocastici siano molto comuni in natura. L'utilizzo di equazioni stocastiche per descrivere sistemi che coinvolgono grandi numeri di particelle risale agli inizi del 900, quando Marian Smoluchowski e Albert Einstein iniziarono ad esaminare il moto Browniano di particelle in gas o liquidi, sia dal punto di vista teorico che sperimentale. Il moto Browniano deve il suo nome a Robert Brown che, nel 1827, iniziò una serie di osservazioni sul movimento di granelli di polline in acqua. La particolarità di questo tipo di processi è che, a qualunque istante, se si osserva il moto dei granelli di polline, si può constatare che essi si spostano secondo traiettorie completamente casuali ed è quindi impossibile prevedere dove si troverà un determinato granello dopo un certo tempo. Questo fenomeno si verifica non solo per il polline in acqua, ma per qualunque particella sufficientemente piccola che si trovi in un agglomerato di molte particelle di dimensioni simili alla sua. Chiaramente il concetto di particella era qualcosa di ancora sconosciuto a Brown; in quegli anni la teoria molecolare era ancora ai suoi albori e la natura dell'origine del moto del polline rimaneva un mistero irrisolvibile. Con l'avvento della teoria cinetica dei gas fu possibile interpretare questo fenomeno dal punto di vista più corretto. Le origini del moto si possono attribuire agli urti che avvengono continuamente tra il polline e le particelle che compongono il materiale in cui è disciolto. Questo moto è un moto di agitazione termica che non ha origine da forze esterne, ma è sempre presente in qualunque liquido o gas che si trovi a una certa temperatura in un dato volume. La natura casuale del moto è quindi dovuta alla casualità con cui avvengono gli urti tra particelle, inoltre il grande numero di particelle coinvolte rende questi processi estremamente difficili da studiare in modo dettagliato. Tentare di risolvere il problema facendo affidamento semplicemente alle pure leggi della meccanica risulta quindi praticamente impossibile. Il punto di svolta per la comprensione di questo fenomeno furono gli studi in merito condotti da Albert Einstein e Marian Smoluchowski. Il primo, il 30 aprile del 1905, propose all'interno della sua tesi di dottorato un modo originale per collegare il numero di Avogadro, le dimensioni molecolari delle particelle e il coefficiente di viscosità in soluzioni zuccherine. Undici giorni dopo comparve un articolo sulla rivista scientifica *Annalen der Physik* in cui lo stesso Einstein allargava il ragionamento a qualunque tipo di particella microscopica. Il fulcro del lavoro di Einstein non era volto solo allo studio teorico; egli cercò di trovare un modo per collegare la natura del moto browniano con quantità fisiche che, anche all'epoca, fossero facili da misurare. Il risultato dell'articolo è la ben nota formula:

$$(13) \quad \langle x^2 \rangle = \frac{RT}{3\pi N_a a \eta} t$$

che collega tra loro il numero di Avogadro  $N_a$ , la viscosità del fluido  $\eta$ , il tempo  $t$ , le dimensioni  $a$  della particella e  $\langle x^2 \rangle$  dove  $x$  rappresenta lo spostamento della stessa dalla sua posizione iniziale nel tempo  $t$ . La verifica sperimentale di questa legge arrivò ad opera di Jean Baptiste Perrin nel 1908 il quale, dopo una serie di tentativi fallimentari, riuscì a creare delle emulsioni di particelle identiche di cui poteva conoscere le dimensioni  $a$ . L'esperimento era rivolto a trovare la quantità  $x$ , ovvero lo spostamento in un certo lasso di tempo dalla posizione iniziale. Operando in diverse condizioni e con particelle di diverse dimensioni, Perrin riuscì a verificare la legge di Einstein ricavando dei valori per il numero di Avogadro sufficientemente simili a quelli disponibili all'epoca. Questo esperimento segnò la storia della fisica in quanto permetteva di dare un fondamento non solo teorico, ma anche sperimentale alla teoria molecolare della materia, questo valse a Perrin nel 1926 il premio Nobel per la fisica [2].

Il merito di Smoluchowski fu invece di riuscire a trattare un complicatissimo problema dinamico in termini di calcolo di probabilità, utilizzando la dinamica semplicemente per fornire i valori di probabilità per cui un certo urto avrebbe fornito un certo risultato. A tal proposito possiamo citare un passaggio scritto dal matematico e statista polacco Mark Kac:

*“The novelty and originality of the Smoluchowski approach lie in his bold replacement of an impossibly difficult dynamical problem (a Brownian particle in a gas or liquid) with the statistical element coming in through the lack of specification of the initial state by a relatively simple stochastic process. A dynamical event like a collision, for example, is thus treated as if it were the result of a toss of a coin or a die with the laws of mechanics determining (to some extent at least) the probabilities of various outcomes” [3].*

Il lavoro di Smoluchowski sul moto Browniano non lascia solo una maggiore comprensione del fenomeno in particolare, ma vede anche l'introduzione della equazione di Smoluchowski. Su questa equazione non ci dilunghiamo in quanto non necessaria per la trattazione del processo di aggregazione di masse che stiamo per affrontare, tuttavia la sua utilità è universalmente riconosciuta e viene frequentemente utilizzata tuttora nella trattazione dei processi stocastici.

## **CAPITOLO 2: IL FENOMENO DI AGGREGAZIONE DI MASSE IN SISTEMI CON E SENZA INIEZIONE**

Con gli strumenti appena introdotti siamo ora in grado di trattare un caso semplice di processo stocastico, il fenomeno di aggregazione. La decisione di prendere proprio questo tipo di processo è dovuta a due motivazioni: la prima è legata alla risolvibilità del sistema in quanto, anche con strumenti semplici, è possibile trovare una soluzione analitica per questo tipo di processi, la seconda è dovuta alla natura del processo che è un tipico esempio di fenomeno dissipativo. Il nostro scopo è quello di risolvere completamente il sistema, cercando di ricavare l'andamento con cui viene raggiunto un certo stato finale, vedere se è l'unico possibile e che distribuzione di probabilità regola questo stato. L'obiettivo è anche quella di ricavare, da questo fenomeno particolare, degli andamenti che siano poi generalizzabili a contesti più ampi e che possano essere validi per tutti i sistemi con natura dissipativa.

### **SEZIONE 2.1: MODELLO ED EQUAZIONI DI BASE**

Il punto di partenza per il modello di aggregazione prevede di prendere un certo numero  $N$  di particelle, ognuna delle quali trasporta una certa quantità di carica con sé; nel nostro caso la carica corrisponderà alla massa della particella. Supponiamo inoltre, di poter dividere l'asse dei tempi in una serie di valori discretizzati, quindi di poter esprimere il salto all'istante successivo semplicemente aumentando di una unità l'indice dei tempi. Le particelle sono distribuite lungo un asse unidimensionale che possiamo dividere in  $N$  posizioni equidistanti e ognuna di esse è etichettata da un certo valore  $j$  che è compreso tra 1 e  $N$ . Chiamiamo quindi  $m(j, t)$  la carica trasportata dalla particella nella posizione  $j$ -esima al tempo  $t$ .

Per poter descrivere quanto varrà la carica nella posizione  $j$ -esima all'istante  $t + 1$ , è necessario fare delle precisazioni su come le particelle sono libere di muoversi all'interno del sistema. Per la nostra trattazione assumeremo che ciò possa avvenire in due modi:

- A. Una particella è libera di lasciare la propria posizione  $j$  e passare alla successiva  $j + 1$ , oppure può rimanere dove si trova. La scelta viene effettuata casualmente, come se fosse il lancio di un dado, quindi possiamo descrivere il salto tramite una variabile casuale che chiamiamo  $W_{ij}$ , dove il primo indice indica la posizione della casella di partenza, mentre il secondo quella di arrivo. I valori che può assumere  $W_{ij}$  sono quindi:  $W_{jj} = 1$  con probabilità  $1/2$  se la particella rimane ferma,  $W_{j,j+1} = 1$  con probabilità  $1/2$  se si dovesse spostare, varrà 0 altrimenti.
- B. Una particella è libera di saltare in qualunque altra posizione tra le  $N$  disponibili. Avremo quindi  $W_{ij} = 1$  per qualunque valore di  $i, j$  e ognuno con probabilità  $1/N$ .

Il primo modo corrisponde ad un processo in 1 dimensione con diffusione a siti vicini, mentre nel secondo si tratta un modello di campo medio.

Durante lo scorrere del tempo può accadere che una particella al tempo  $t + 1$  trovi la casella di arrivo già occupata, in quanto la particella che si trovava in quella posizione al tempo  $t$  ha scelto di non muoversi. In questo caso le masse delle due particelle si sommano e si ottiene una particella più grande. Possiamo schematizzare questo processo tramite la formula:

$$(14) \quad m(i, t + 1) = \sum_j W_{ij}(t)m(j, t) + I(i, t)$$



Nella formula, oltre che le masse delle particelle, viene inserita anche la quantità  $I(i, t)$  che rappresenta una possibile iniezione esterna di particelle nel nostro sistema. L'iniezione di particelle può essere effettuata in due modi nella nostra trattazione:

- I. L'iniezione è fatta in ogni sito e in modo indipendente l'uno dall'altro. Quindi ad ogni step temporale viene inserita, in ogni posizione, una quantità di carica arbitraria.
- II. L'iniezione viene eseguita creando delle coppie di carica, una positiva e una negativa, in due siti adiacenti. Possiamo quindi dire che  $I(j, t) = -I(j + 1, t)$

Dopo aver specificato come procede il processo di aggregazione, possiamo chiederci come variano nel tempo alcune grandezze caratteristiche, ad esempio la distribuzione spaziale di carica. Per fare ciò è necessario ricavare la funzione caratteristica per  $r$  corpi del nostro processo, che può essere scritta nel modo seguente:

$$(15) \quad Z_r(\rho, t) = \langle \exp [i\rho \sum_{j=1}^r m(j, t)] \rangle$$

Con il simbolo  $\langle \dots \rangle$  si intende, come specificato nell'introduzione al punto (10), la media di tutte le possibili realizzazioni di  $W_{ij}$  e  $I(i, t)$ . A questo punto dobbiamo fare una distinzione per il caso uno-dimensionale e il campo medio poiché le equazioni che descrivono i due scenari saranno diverse l'una dall'altra.

Per il caso (A), partendo dall'equazione (2) e inserendo al suo interno il valore di  $m(j, t)$  ricavato nel punto (1), si ottiene:

$$(16) \quad Z_r(\rho, t + 1) = \langle \exp [i\rho \sum_{i=1}^r \sum_k W_{jk} m(k, t) + i\rho \sum_{i=1}^r I(j, t)] \rangle =$$

$$= \frac{1}{4} \langle \exp \left[ i\rho \sum_{i=1}^r I(j, t) \right] \rangle \left\{ \langle \exp \left[ i\rho \sum_{j=0}^r m(j, t) \right] \rangle \right.$$

$$+ \langle \exp \left[ i\rho \sum_{j=1}^r m(j, t) \right] \rangle + \langle \exp \left[ i\rho \sum_{j=0}^{r-1} m(j, t) \right] \rangle$$

$$\left. + \langle \exp \left[ i\rho \sum_{j=1}^{r-1} m(j, t) \right] \rangle \right\}$$

Applicando l'invarianza per traslazioni del sistema siamo in grado di modificare gli indici delle sommatorie tra parentesi graffe in modo tale da ottenere l'espressione più semplice:

$$(17) \quad Z_r(\rho, t + 1) = \frac{1}{4} \Phi(\rho)^r [Z_{r+1}(\rho, t) + 2Z_r(\rho, t) + Z_{r-1}(\rho, t)]$$

In questo modo abbiamo espresso la funzione caratteristica del processo al tempo  $t + 1$  tramite le funzioni caratteristiche al tempo  $t$  di  $r + 1, r, r - 1$  corpi. Inoltre, abbiamo un termine  $\Phi(\rho) = \langle \exp[i\rho I(j, t)] \rangle$  che contiene al suo interno tutte le informazioni riguardanti l'iniezione del sistema. Per esprimere la funzione caratteristica di tutta la carica del sistema, ovvero per  $r = N$ , possiamo osservare che la carica al tempo  $t$  deve essere la stessa dell'istante iniziale  $t = 0$  poiché è una quantità conservata nel processo; rimane solo da aggiungere quella che viene inserita dall'esterno. Possiamo quindi affermare, usando la relazione (4) e la condizione  $Z_0(\rho, t) = 1$ , che:

$$(18) \quad Z_N(\rho, t) = \Phi(\rho)^{tN} Z_N(\rho, 0)$$

Queste relazioni rimangono valide solo per il caso uno-dimensionale e per iniezione casuale (caso I). Se si vuole ottenere l'equazione di evoluzione per l'iniezione di coppie, bisogna considerare che quest'ultima viene eseguita con cariche di segno opposto e stesso valore. Quindi per tutte le posizioni da  $j = 2$  a  $j = r - 1$  i due valori di  $I(j, t)$  si cancellano e otteniamo che:

$$(19) \quad Z_r(\rho, t + 1) = \frac{1}{4} \Phi(\rho)^2 [Z_{r+1}(\rho, t) + 2Z_r(\rho, t) + Z_{r-1}(\rho, t)]$$

Passando al caso di campo medio (B), l'equazione di evoluzione può essere scritta tramite la funzione caratteristica di un'unica particella in grado di spostarsi in qualunque posizione delle  $N$  disponibili. Otteniamo quindi:

$$(20) \quad Z_1(\rho, t + 1) = \Phi(\rho) \sum_{r=0}^N a_r Z_1(\rho, t)^r$$

con

$$a_r \equiv \binom{N}{r} \left(\frac{1}{N}\right)^r \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{N-r}$$

Per semplificare l'espressione supponiamo che il numero delle particelle sia molto alto o  $N \rightarrow \infty$ , facendo ciò la sommatoria in (7) converge a un'esponenziale nella forma:

$$(21) \quad Z_1(\rho, t + 1) = \Phi(\rho) \exp[Z_1(\rho, t) - 1]$$

## SEZIONE 2.2: SOLUZIONE SENZA INIEZIONE

Al fine di comprendere come il fenomeno di aggregazione conduce il sistema con lo scorrere del tempo, può essere interessante esaminare prima di tutto la soluzione senza iniezione. Questa condizione può essere realizzata nel nostro modello semplicemente imponendo  $I(j, t) = 0$ . L'unico termine nell'equazione di evoluzione dei due processi che contiene  $I(j, t)$  è  $\Phi(\rho)$ , si ottiene quindi:  $\Phi(\rho) = \langle \exp[i\rho 0] \rangle = 1$ , da cui:

$$(22) \quad Z_r(\rho, t + 1) = \frac{1}{4} [Z_{r+1}(\rho, t) + 2Z_r(\rho, t) + Z_{r-1}(\rho, t)]$$

per il caso uno dimensionale (A), mentre per il campo medio (B) si ha:

$$(23) \quad Z_1(\rho, t + 1) = \exp[Z_1(\rho, t) - 1]$$

Iniziamo esaminando il caso (A) tramite l'equazione (9) che può essere vista come un'equazione di diffusione nelle variabili  $\rho, t$ ; inoltre sfruttando la linearità in  $Z$  è possibile fornire una soluzione espressa nella forma seguente:

$$(24) \quad Z_r(\rho, t) = \sum_{r'=r-t}^{t+r} G_{r,r'}(t) Z_{r'}(\rho, 0)$$

dove abbiamo utilizzato le equazioni di Green definite come:

$$(25) \quad G_{r,r'}(t) = \frac{1}{4^t} \binom{2t}{t-r-r'}$$

La funzione di Green nonostante non sia di immediata comprensione, ci fornisce importanti informazioni sul processo. In particolare,  $G_{r,r'}(t)$  dà la probabilità che, procedendo lungo un percorso scelto casualmente che parte dalla posizione  $r'$  all'istante 0, si arrivi alla posizione  $r$  all'istante  $t$ . Questa funzione

risulta anche molto utile per esaminare l'andamento dello stato finale in quanto, per  $t \rightarrow \infty$ , può essere approssimata, tramite un'espansione di Taylor troncata al primo ordine, con una Gaussiana dalla forma:

$$(26) \quad G_{r,r'}(t) \cong \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-(r-r')^2/t}$$

Quest'espressione può essere inserita all'interno dell'equazione (10) che può essere adesso risolta analiticamente. Assumendo che  $r$  vari con continuità, sostituiamo la sommatoria con un integrale in  $r'$  e ricaviamo l'espressione finale di  $Z_r(\rho, t)$  nel caso uno-dimensionale. Otteniamo quindi.

$$(27) \quad Z_r(\rho, t) \cong \int_0^{+\infty} dr' \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(r-r')^2}{t}} Z(r', 0) + \int_0^{+\infty} dr' \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(r+r')^2}{t}} [2 - Z(r', 0)]$$

Il secondo integrale contiene tutti i valori negativi di  $r'$  la cui funzione caratteristica può essere ricavata tramite la definizione  $Z_{r'}(\rho, t) = [2 - Z_{-r'}(\rho, t)]$  in modo da rispettare la condizione al contorno  $Z_0(\rho, t) = 1$ .

Ai fini di avere un'espressione più maneggevole, possiamo espandere all'interno l'esponenziale dei due integrali al primo ordine nella variabile  $r/\sqrt{t}$ . Questo è possibile poiché abbiamo supposto inizialmente che  $t \rightarrow \infty$ , e da ciò si ottiene:

$$(28) \quad Z_r(\rho, t) \cong 1 - r \frac{2}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} dr' \frac{2r'}{t} e^{-(r')^2} [1 - Z_{r'}(\rho, 0)]$$

A questo punto abbiamo tutti i materiali che ci servono per ricavare la distribuzione di probabilità di trovare un certo valore di  $m$  al tempo  $t$ . Prima di tutto supponiamo, per semplicità, che ogni particella abbia carica unitaria, da cui:  $Z_r(\rho, 0) = e^{i\rho r}$ . Sfruttiamo ora le proprietà della funzione caratteristica che ci permettono di ricavare la distribuzione di massa applicando la trasformata di Fourier a  $Z_r(\rho, t)$ . Si arriva alla conclusione che:

$$(29) \quad p_r(m, t) \cong \frac{1}{2\pi} \int d\rho e^{-i\rho m} Z_r(\rho, t) = \left(1 - \frac{2r}{\sqrt{\pi t}}\right) \delta(m) + \frac{2r}{\sqrt{\pi t}} \frac{2m}{t} e^{-\frac{m^2}{t}}$$

Cerchiamo di fare più chiarezza su quanto ci fornisce questa relazione. Con  $p_r(m, t)$  si intende la probabilità di ottenere un certo valore di carica  $m$  sommando tutte le cariche in  $r$  posizioni successive, al tempo  $t$ . In particolare, fissato  $t$ , l'andamento è regolato dal termine gaussiano presente nel secondo membro che diventa molto piccolo per grandi valori di  $m$ , i quali saranno molto meno probabili. L'espressione (15) contiene anche informazioni aggiuntive, infatti possiamo ricavare l'andamento temporale del processo tramite essa. Ciò è possibile imponendo  $r = 1$  e moltiplicando per il numero di particelle complessive che è  $N$ ; si ottiene così l'andamento del numero complessivo di particelle nel sistema. Il risultato finale è:

$$(30) \quad Np_1(m \neq 0, t) \sim \frac{2N}{\sqrt{\pi t}} \quad t \rightarrow \infty$$

Quindi il numero complessivo di particelle decresce nel tempo tramite una legge di potenza con esponente frazionario negativo con valore di  $1/2$ .

Allo stesso modo possiamo analizzare anche il caso di campo medio (B). In questo caso l'equazione di evoluzione è data dall'espressione (10) e, ai fini di risolvere l'equazione, possiamo affidarci a ciò che conosciamo del processo. Quello che ci si aspetta è che la probabilità di trovare una particella, dopo aver fatto trascorre un tempo  $t$  molto lungo o al limite  $t \rightarrow \infty$ , sia praticamente nulla. Questo principio si può

realizzare tramite l'equazione caratteristica assumendo che  $Z_1(\rho, t) = 1$  a grandi valori di  $t$ . Siamo ora nelle condizioni di espandere in serie l'esponenziale e ottenere la seguente equazione di evoluzione:

$$(31) \quad Z_1(\rho, t + 1) - Z_1(\rho, t) = \frac{1}{2} [Z_1(\rho, t) - 1]^2 + \dots$$

Passando a valori continui di  $t$  possiamo quindi risolvere l'equazione e ottenere:

$$(32) \quad Z_1(\rho, t) \cong 1 - \frac{2[1-Z_1(\rho,0)]}{t[1-Z_1(\rho,0)]+2}$$

Utilizziamo ancora una volta la trasformata di Fourier per ricavare la densità di probabilità  $p_1(m, t)$  e il risultato finale è dato da:

$$(33) \quad Np_1(m, t) \sim \frac{2N}{t}$$

Si può affermare che anche nell'approssimazione di campo medio il decadimento del numero di particelle può essere espresso tramite una legge di potenza a esponente frazionario, ma adesso del valore di  $-1/2$ . Il decadimento in questo caso risulta essere più veloce rispetto al modello uno-dimensionale. Questo si può spiegare ed è dovuto al fatto che le particelle hanno meno restrizioni spaziali da dover rispettare e sono, in generale, più libere di muoversi. Gli incontri tra particelle saranno quindi più frequenti e il numero complessivo decresce più rapidamente [4].

### SEZIONE 2.3: STATI STAZIONARI NEL CASO CON INIEZIONE

Dopo aver ricavato l'evoluzione del sistema senza iniezione vogliamo ora verificare se l'aggiunta continua e omogenea di particelle influenza in qualche modo il nostro sistema. In particolare, in questa sezione esamineremo più nello specifico lo stato stazionario che si realizza tramite iniezione, riservando per il paragrafo successivo ulteriori verifiche per vedere se esso è unico e se perturbazioni esterne possono modificarlo in qualche modo. Dopo aver ricavato le distribuzioni per gli stati stazionari mostreremo come quest'ultime, aumentando il numero di dimensioni da una a due, modifichino il loro andamento senza però cambiare la loro forma analitica. In questa sezione lavoreremo supponendo sempre che il sistema posseda un numero  $N$  molto alto di particelle e al limite infinito.

Iniziamo dal caso uno-dimensionale (A) e utilizziamo un'iniezione di particelle casuale così come definita in (I). Ancora una volta l'evoluzione del sistema è fornita dall'equazione (4), tuttavia dobbiamo apportare delle modifiche. Infatti, avendo a che fare con una distribuzione stazionaria di particelle si può eliminare il tempo dall'equazione poiché, per definizione, lo stato non cambia nel tempo. Ciò ci permette di riscrivere l'equazione di evoluzione nel modo seguente:

$$(34) \quad Z_{r+1}(\rho) + [2 - 4\Phi(\rho)^{-r}]Z_r(\rho) + Z_{r-1}(\rho) = 0$$

Dividendo ambo i membri per  $Z_r(\rho)$ , possiamo riordinare l'equazione in modo da ottenere l'espressione:

$$(35) \quad \frac{Z_r(\rho)}{Z_{r-1}(\rho)} = \frac{1}{4\Phi(\rho)^{-r} - 2 - Z_{r+1}(\rho)/Z_r(\rho)}$$

L'espressione (22) è una vera e propria relazione ricorsiva che possiamo sfruttare a nostro vantaggio. Essendo ancora valida la condizione al contorno  $Z_0(\rho, t) = 1$  possiamo imporre  $r = 1$  e ricavare:

$$(36) \quad Z_1(\rho) = \frac{1}{4\Phi(\rho)^{-1} - 2 - \frac{1}{4\Phi(\rho)^{-2} - 2 - \frac{1}{4\Phi(\rho)^{-3} - 2 - \dots}}}$$

L'espressione che abbiamo appena trovato, anche se non immediatamente riconoscibile, può essere ricondotta al rapporto tra due funzioni di Bessel. Per fare ciò è necessario espandere in serie il termine  $\Phi(\rho)$ , quindi supponendo che  $|\rho| \ll 1$  e sostituendo nell'espressione (23) la sua espansione troncata al secondo ordine data da:  $\Phi(\rho) = 1 + i\langle I \rangle \rho - \frac{\langle I^2 \rangle}{2} \rho^2 + \dots$ , otteniamo:

$$(37) \quad Z_1(\rho) \cong \frac{J_{x+1}(x)}{J_x(x)}$$

dove con  $J_x(x)$  indica la funzione di Bessel di argomento  $x = 1/(-2i\langle I \rangle \rho + \langle I^2 \rangle \rho^2)$  e ordine  $x$ . Possiamo a questo punto sfruttare le proprietà delle funzioni di Bessel che ci permettono di riscrivere l'espressione di  $Z_1(\rho)$ , per  $x \rightarrow \infty$ , ovvero quando  $|\rho| \ll 1$ , in questi termini:

$$(38) \quad Z_1(\rho) = \begin{cases} 1 - c\langle I \rangle^{1/3} i^{-1/3} |\rho|^{1/3} + \dots & \text{per } \langle I \rangle \neq 0 \\ 1 - c\langle I^2 \rangle^{1/3} 2^{-1/3} |\rho|^{2/3} + \dots & \text{per } \langle I \rangle = 0 \end{cases}$$

dove la costante  $c$  vale  $c = 2\pi(16/3)^{1/6}/\Gamma(1/3)^2 = 1.15723 \dots$ . A questo punto possiamo ricavare la distribuzione di probabilità di  $m$  applicando l'anti-trasformata di Fourier a  $Z_1(\rho)$ . Otteniamo due risultati possibili:

$$(39) \quad p(m) \sim \begin{cases} m^{-4/3} & \text{per } |m| \gg \langle I \rangle \text{ e } \langle I \rangle \neq 0 \\ m^{-5/3} & \text{per } |m| \gg \langle I^2 \rangle^{1/2} \text{ e } \langle I \rangle = 0 \end{cases}$$

Quello che abbiamo ottenuto è un andamento regolato da leggi di potenza a esponente frazionario, che coincide, almeno in forma, a quanto trovato per l'evoluzione temporale del modello uno-dimensionale.

Questo andamento viene preservato anche nel caso di iniezione con creazione di coppie. Infatti, utilizzando l'equazione d'evoluzione per il caso (II) descritta dall'equazione (6) e procedendo in maniera analoga a quanto fatto per il caso di iniezione casuale, otteniamo un'espressione molto simile a quella ricavata al punto (23). L'unica differenza consiste nel valore che possono assumere gli esponenti di  $\Phi(\rho)$ , che ora può avere come valore massimo -2. In particolare, quello che si ottiene è espresso dalla seguente equazione:

$$(40) \quad Z_1(\rho) = \frac{1}{4\Phi(\rho)^{-1} - 2 - \frac{1}{4\Phi(\rho)^{-2} - 2 - \frac{1}{4\Phi(\rho)^{-2} - 2 - \dots}}}$$

Sfruttiamo ora la relazione ricorsiva (22) che ci permette di ricavare, imponendo  $r = 1$ :

$$-\frac{Z_2(\rho)}{Z_1(\rho)} = 2 - 4\Phi(\rho)^{-1} + \frac{Z_0(\rho)}{Z_1(\rho)} = 2 - 4\Phi(\rho)^{-1} + \frac{1}{Z_1(\rho)}$$

da cui

$$(41) \quad Z_1(\rho) = \frac{1}{4\Phi(\rho)^{-1} - 2 - \frac{1}{4\Phi(\rho)^{-2} - 4\Phi(\rho)^{-1} + \frac{1}{Z_1(\rho)}}}$$

Quest'ultima relazione è un'equazione quadratica in  $Z_1(\rho)$  che se risolta ci restituisce:

$$Z_1(\rho) = 1 - 2\langle I^2 \rangle^{1/2} |\rho| + \dots$$

Possiamo utilizzare quanto ottenuto per ricavare la distribuzione di carica tramite l'anti-trasformata di Fourier applicata alla funzione  $Z_1(\rho)$ . Concludiamo quindi che:

$$(42) \quad p(m) \sim m^{-2} \quad \text{per } m \gg \langle I^2 \rangle^{1/2}$$

Questa distribuzione presenta analogie con quelle già trovate per l'iniezione casuale, infatti è ancora regolata da leggi di potenza, questa volta però l'esponente intero rende la distribuzione più simile a una Lorentziana.

Rimane ora da calcolare la distribuzione di probabilità per il campo medio (B). Utilizziamo l'equazione di evoluzione fornita dall'espressione (8) ancora una volta eliminando il tempo dall'equazione in quanto stiamo guardando uno stato stazionario, ottenendo:

$$(43) \quad Z_1(\rho) = \Phi(\rho) \exp[Z_1(\rho) - 1]$$

Per semplificare la soluzione supponiamo, come fatto per il caso uno-dimensionale, che  $|\rho| \ll 1$  e ciò ci permette di espandere in serie  $Z_1(\rho)$  attorno a 1 e  $\Phi(\rho)$  come  $\Phi(\rho) = 1 + i\langle I \rangle \rho - \frac{\langle I^2 \rangle}{2} \rho^2 + \dots$  trascurando ordini superiori al secondo. Con queste approssimazioni possiamo risolvere l'equazione (30) ottenendo:

$$(44) \quad Z_1(\rho) = \begin{cases} 1 - \sqrt{2}\langle I \rangle^{1/2} i^{1/2} |\rho|^{1/2} + \dots & \text{per } \langle I \rangle = 0 \\ 1 - \langle I^2 \rangle^{1/2} |\rho| + \dots & \text{per } \langle I \rangle \neq 0 \end{cases}$$

Da quanto ricavato possiamo ora ottenere le distribuzioni di probabilità sottostanti e si ottiene che [5]:

$$(45) \quad p_1(m) \sim \begin{cases} m^{-3/2} & \text{per } |m| \gg \langle I \rangle \text{ e } \langle I \rangle \neq 0 \\ m^{-2} & \text{per } |m| \gg \langle I^2 \rangle^{1/2} \text{ e } \langle I \rangle = 0 \end{cases}$$

Questi risultati sono validi unicamente per il caso con iniezione casuale (I). La cosa sorprendente è che, ancora una volta, l'andamento della distribuzione è regolata da leggi di potenza che decrescono più velocemente di quanto visto nel caso uno-dimensionale. Il calcolo di questa distribuzione per la creazione di coppie (II) non viene trattato nell'articolo originale di Takayasu, ci asteniamo quindi dal commentare questo caso. Andiamo nella tabella di seguito a riassumere quanto visto fino ad ora.

	$p(m)$
<b>1D, <math>\langle I \rangle \neq 0</math></b>	$m^{-4/3}$
<b>1D, <math>\langle I \rangle = 0</math></b>	$m^{-5/3}$
<b>1D, CREAZIONE DI COPPIE</b>	$m^{-2}$
<b>CM, <math>\langle I \rangle \neq 0</math></b>	$m^{-3/2}$
<b>CM, <math>\langle I \rangle = 0</math></b>	$m^{-2}$

Tabella 1. distribuzione spaziale di carica dello stato stazionario per il caso uno-dimensionale (1D) e campo medio (CM)

Possiamo notare immediatamente da questa tabella che gli esponenti che regolano le distribuzioni di probabilità dello stato stazionario non coincidono tra il caso uno-dimensionale e il campo medio. Questo fatto può essere spiegato se si pensa alle restrizioni spaziali che le particelle cariche hanno nei due casi. Come visto per l'evoluzione temporale del sistema, il fatto che nel modello 1D le particelle possano aggregarsi unicamente con quelle nelle immediate vicinanze rende il processo di aggregazione più lento, permettendo quindi alle particelle di sopravvivere per più tempo.

Questo può essere verificato aumentando il numero di dimensioni del modello. In particolare, se si passa da un modello uno-dimensionale a uno bi-dimensionale è possibile mostrare, tramite osservazioni dirette e

simulazioni numeriche, che esiste una relazione tra gli esponenti che regolano l'andamento dello stato stazionario e il numero di dimensioni accessibili dal sistema. Quello che si ottiene è:

$$(46) \quad P(m) = m^{-\tau}$$

dove  $\tau$  è collegato alle dimensioni del modello tramite le relazioni:

$$(47) \quad \tau = \begin{cases} \frac{2(D+1)}{D+2} & \text{per } D < 2 \\ \frac{3}{2} & \text{per } D > 2 \end{cases}$$

Mentre per  $D = 2$  si ottiene  $P(m) = m^{-3/2}(\ln m)^{1/2}$ . In più è anche possibile legare il valore di  $\tau$  con l'esponente, che chiamiamo  $\alpha$ , che regola il decadimento del numero di particelle iniziali del sistema tramite la relazione  $\tau = 1 + \frac{\alpha}{\alpha+1}$  [10]. Queste relazioni sono verificate per il modello uno-dimensionale e ci permettono di fare delle assunzioni sulle dimensioni critiche del sistema; infatti, la dipendenza funzionale dal numero di dimensioni cambia passando a  $D \geq 2$  e per  $D > 2$  coincidono con quanto trovato per il modello di campo medio. Ciò conferma che  $D = 2$  è la soglia critica del nostro sistema e che a dimensioni superiori l'evoluzione del sistema è ben descritta dal modello di campo medio.

#### SEZIONE 2.4: UNICITA' E STABILITA'

Dopo aver ricavato le distribuzioni di probabilità per gli istati stazionari sia nel caso uno-dimensionale che per il campo medio, possiamo chiederci se questi stati siano stabili o se perturbazioni del sistema, anche di piccola entità, possono modificare, in qualche modo, l'andamento delle distribuzioni. Per verificare questa proprietà possiamo procedere nel modo seguente: inseriamo all'interno della funzione caratteristica un termine aggiuntivo che chiamiamo  $\tilde{Z}_r(\rho, t)$  che rappresenta la nostra perturbazione dello stato stazionario  $Z_r(\rho)$ . Otteniamo quindi:

$$(48) \quad Z_r(\rho, t) = Z_r(\rho) + \tilde{Z}_r(\rho, t)$$

A questo punto possiamo inserire la nuova funzione caratteristica perturbata all'interno dell'equazione di evoluzione la quale è lineare nelle variabili  $Z_r(\rho, t)$ . Questo ci permette di poter applicare l'equazione (4) unicamente al termine perturbativo, senza curarci di quanto accade al resto del sistema che evolverà nelle modalità presentate nei paragrafi precedenti. L'equazione di evoluzione diventa quindi:

$$(49) \quad \tilde{Z}_r(\rho, t + 1) = \frac{1}{4} \Phi(\rho)^r [\tilde{Z}_{r+1}(\rho, t) + 2\tilde{Z}_r(\rho, t) + \tilde{Z}_{r-1}(\rho, t)]$$

Per la perturbazione rimane valida la condizione al contorno  $\tilde{Z}_0(\rho, t) = 0$  e inoltre si avrà che  $\tilde{Z}_r(0, t) = 0$ . Essendo noi interessati unicamente all'entità di questa perturbazione, ovvero a quanto essa influisca sullo stato finale del sistema, possiamo procedere in modo differente da quanto fatto fino ad adesso. Andando a prendere i moduli di entrambi i membri dell'equazione (34) e otteniamo:

$$(50) \quad |\tilde{Z}_r(\rho, t)| = \frac{1}{4} |\Phi(\rho)^r| |\tilde{Z}_{r+1}(\rho, t) + 2\tilde{Z}_r(\rho, t) + \tilde{Z}_{r-1}(\rho, t)|$$

A questo punto possiamo fare una maggiorazione nel secondo termine e modificare l'espressione appena trovata nel modo seguente:

$$(51) \quad |\tilde{Z}_r(\rho, t)| \leq |\Phi(\rho)^r| \cdot \max\{|\tilde{Z}_{r'}(\rho, t - 1)|, r' = r + 1, r, r - 1\}$$

Ora, sfruttando la relazione (5) e sapendo che per ogni funzione caratteristica è valida la disuguaglianza  $\Phi(\rho) \leq 1$ , possiamo iterare quanto fatto per  $t$  volte, ottenendo così:

$$(52) \quad |\tilde{Z}_r(\rho, t)| \leq |\Phi(\rho)|^t \max\{|\tilde{Z}_{r'}(\rho, 0)|, r' = 1, 2, \dots\}$$

Questa relazione ci dice che, per qualunque  $\rho$  che soddisfi la relazione  $|\Phi(\rho)| < 1$ , l'intensità della perturbazione sullo stato finale diminuisce esponenzialmente nel tempo andando di fatto a sopprimere la perturbazione stessa. Inoltre, essendo questo fatto completamente indipendente dall'entità della perturbazione iniziale che viene inserita nel sistema, possiamo affermare non solo che lo stato stazionario è stabile, ma che è anche l'unico possibile. La verifica per il caso in cui  $|\Phi(\rho)| = 1$  è più complessa e richiede alcune considerazioni aggiuntive: prima di tutto dobbiamo chiederci per quali valori la funzione  $\Phi(\rho)$  è uguale a 1. Avremo due casi possibili:

- i.  $|\Phi(\rho)| = 1$  per tutti i  $\rho$
- ii.  $|\Phi(\rho)| = 1$  per una serie di valori di  $\rho$  numerabili

Nel caso (i) si avrà una distribuzione completamente degenere che può essere scritta come

$$(53) \quad \rho(I) = \delta(I - I_0)$$

mente per il caso (ii) la distribuzione è degenere in una serie di punti periodici e possiamo indicarlo con

$$(54) \quad \rho(I) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \delta(I - jI_0 - I_1)$$

dove  $\sum_j a_j = 1$  per rispettare le condizioni di normalizzazione,  $I_0$  e  $I_1$  sono costanti. Le stime fatte precedentemente rimangono valide anche in questo caso, abbiamo quindi che  $|\tilde{Z}_r(\rho, t)| \leq |\Phi(\rho)|^t \cdot cost$ . Iniziamo osservando che, nel caso (ii),  $\tilde{Z}_r(\rho, t) \rightarrow 0$  se  $t \rightarrow \infty$  per tutti i valori di  $\rho$  ad eccezione di una serie numerabile di punti. Tuttavia, sfruttando la continuità della funzione caratteristica possiamo affermare che  $|\tilde{Z}_r(\rho, t)|$  deve tendere a zero per qualunque valore di  $\rho$  nel limite  $t \rightarrow \infty$ . Nel caso (i) supponiamo, senza perdere di generalità, che  $I_0$  sia maggiore di zero. A questo punto può essere vantaggioso riscrivere la funzione caratteristica in questi termini:  $Z_r(\rho, t) = \langle e^{-\rho m} \rangle$  e  $\Phi(\rho) = e^{-\rho I_0}$ . Possiamo ora utilizzare quanto ottenuto per ricavare una stima dell'intensità della perturbazione nello stesso modo visto nei punti da (34) a (37), il risultato finale sarà:

$$(55) \quad |\tilde{Z}_r(\rho, t)| \leq e^{-\rho I_0 t} \cdot cost$$

Quest'espressione conferma che  $|\tilde{Z}_r(\rho, t)| \rightarrow 0$  se  $t \rightarrow \infty$  per tutti i valori di  $\rho$ .

Quanto affermato fino ad ora è valido per il caso uno-dimensionale (A) in quanto abbiamo utilizzato l'equazione di evoluzione per quel modello particolare. Per poter ricavare l'equazione di evoluzione della perturbazione nel campo medio (B), non possiamo procedere come fatto precedentemente poiché l'equazione (8) non è lineare nelle variabili  $Z_r(\rho, t)$ . Occorre quindi scriverla inserendo il valore di  $Z_r(\rho, t)$  definito nell'espressione (33) e andando a sottrarre membro a membro il contributo della componente stazionaria di  $Z_r(\rho, t)$  descritto dall'equazione (30). Il risultato finale è dato da:

$$(56) \quad \tilde{Z}_1(\rho, t + 1) = \frac{\Phi(\rho)}{e} [e^{Z_1(\rho) + \tilde{Z}_1(\rho, t)} - e^{\tilde{Z}_1(\rho, t)}]$$

Prendendo ora i valori assoluti di entrambi i membri, traslando l'indice dei tempi e utilizzando la proprietà dell'esponenziale  $|e^x - e^y| \leq e|x - y|$ , valida per  $|x|, |y| \leq 1$ , possiamo concludere che:

$$(57) \quad |\tilde{Z}_1(\rho, t)| < |\Phi(\rho)|^t \cdot |\tilde{Z}_1(\rho, 0)|$$



Quest'espressione è praticamente identica a quella trovata per il caso uno-dimensionale e rimangono quindi valide le considerazioni fatte in precedenza. Questo ci conferma che lo stato stazionario  $Z_1(\rho)$  è unico e stabile per entrambi i modelli e per qualunque tipo di iniezione si applichi ad esso [6].

## SEZIONE 2.5 RILASSAMENTO ALLO STATO FINALE

Nelle sezioni precedenti abbiamo analizzato lo stato stazionario e la sua distribuzione e dimostrato che non solo esso è unico, ma anche che è stabile per qualunque tipo di iniezione esterna. Tuttavia, possiamo fare di più e chiederci, una volta applicata una perturbazione al sistema, come questa perturbazione viene soppressa nel tempo e se esistono scale tipiche su cui avvengono questi processi. Per poter fare questo tipo di studio sarà utile scrivere l'equazione di evoluzione che abbiamo sempre utilizzato in forma differenziale. Supponiamo quindi in questa sezione che tempo e spazio siano variabili continue e consideriamo sempre piccoli valori di  $\rho$ . Con queste assunzioni possiamo riscrivere l'equazione di evoluzione della perturbazione data dall'espressione (34) nella forma seguente:

$$(58) \quad \frac{\partial \tilde{Z}_r(\rho, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \tilde{Z}_r(\rho, t)}{\partial r^2} - Rr \tilde{Z}_r(\rho, t)$$

Dove  $D = 1/4\Delta t$ ,  $R$  è ricavato dall'espansione in serie del termine  $\Phi(\rho)$  e vale  $R = (-i\langle I \rangle \rho + \langle I^2 \rangle \rho^2 / 2) / \Delta t$  e  $\Delta t$  rappresenta un certo intervallo temporale. L'equazione (40) non è facilmente risolvibile ma è possibile trovare una soluzione utilizzando le condizioni al contorno  $\tilde{Z}_0(\rho, t) = 0$  e  $\tilde{Z}_\infty(\rho, t) = 0$  e applicando la trasformata di Fourier rispetto al tempo. Il risultato finale può essere espresso tramite le funzioni di Airy nel modo seguente:

$$(59) \quad \tilde{Z}_r(\rho, t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} E_k(r)$$

Dove abbiamo indicato con  $\lambda_k = |a_k|(2DR^2)^{1/3}$ , con  $E_k(r) = Ai((R/2D)^{1/3}r + a_k)$  e  $a_k$  è il  $k$ -esimo zero della funzione di Airy. Fissando  $k$  e  $r$  entrambi uguali a 1 e prendendo il limite per  $t \rightarrow \infty$  otteniamo per il caso con iniezione  $\langle I \rangle \neq 0$ :

$$(60) \quad \tilde{Z}_1(\rho, t) = f_1(\rho) \exp\left\{-b_1 \langle I \rangle^{2/3} \left[\exp\left(-\frac{\pi i}{3}\right)\right] \rho^{2/3} t\right\}$$

dove  $b_1 = |a_1|2^{-2/3}/\Delta t$  mentre  $f_1(\rho)$  è una funzione indipendente dal tempo. Da quest'espressione possiamo estrapolare l'evoluzione temporale della perturbazione utilizzando la funzione di Green che abbiamo già incontrato nella sezione 2.2 al punto (11) e (12). Possiamo quindi applicare prima di tutto l'anti-trasformata di Fourier alla funzione caratteristica  $\tilde{Z}_1(\rho, t)$  della perturbazione per ottenere la distribuzione di probabilità sottostante, poi facciamo evolvere quest'ultima tramite le funzioni di Green nel modo seguente:

$$(61) \quad \tilde{p}(m, t) = \int dm' \tilde{p}(m - m', 0) g(m', t)$$

dove la funzione di Green ha la forma:

$$(62) \quad g(m, t) \sim \frac{1}{x} e^{-16/(27x^2)} W_{1/2, 1/6} \left( \frac{32}{27x^2} \right)$$

assumendo che  $x = b_1 |\langle I \rangle / m|^{2/3} t$  e indicando con  $W_{\mu, \nu}(z)$  la funzione di Whittaker. L'espressione (44) possiede un andamento asintotico che possiamo approssimare con la seguente espressione:

$$(63) \quad g(m, t) \sim e^{-\frac{b_1 \langle I \rangle^2 t^3}{m^2}}$$

Questa distribuzione ricorda per certi aspetti l'espressione di una distribuzione normale ma decresce più velocemente e lo fa con un tempo caratteristico proporzionale a  $m^{2/3} |\langle I \rangle|^{2/3}$ .

Nel caso in cui  $\langle I \rangle = 0$  e nel limite  $t \rightarrow \infty$  otteniamo una diversa espressione per la funzione caratteristica che diventa pari a:

$$(64) \quad \tilde{Z}_1(\rho, t) = f_2(\rho) \exp\{-b_2 \langle I^2 \rangle^{2/3} \rho^{4/3} t\}$$

dove abbiamo indicato con  $b_2 = a_1 2^{-4/3} / \Delta t$  e con  $f_2(\rho)$  una funzione indipendente da  $t$ . L'anti-trasformata di Fourier dell'equazione (46) ha la stessa forma dell'equazione (43) ma l'equazione di Green in questo caso è una distribuzione simmetrica stabile con esponente caratteristico di 4/3. Più che la forma precisa di questa distribuzione siamo interessati al suo andamento per grandi valori di  $t$  e  $m$  che può essere stimato come:

$$(65) \quad g(m, t) \sim \langle I^2 \rangle^{-1/2} t^{-3/4}$$

per  $t \gg m^{4/3} \langle I^2 \rangle^{-2/3}$ . Questo andamento decresce più lentamente di quanto visto per  $\langle I \rangle \neq 0$  poiché è regolato da una legge di potenza e non da un andamento esponenziale. Questo decadimento inoltre è anche sufficientemente lento da poter essere verificato numericamente tramite simulazioni.

Soffermiamoci per un momento su quanto ricavato fino a questo punto, in particolare sull'andamento temporale di  $g(m, t)$  nel caso  $\langle I \rangle \neq 0$  e  $\langle I \rangle = 0$ . Per quale motivo la dipendenza da  $t$  nei due casi è così diversa? Per quanto visto finora, anche nel comportamento dello stato stazionario vi sono delle differenze negli esponenti delle distribuzioni, ma qua otteniamo proprio due andamenti completamente diversi. Il motivo può essere compreso intuitivamente pensando a come funziona il processo di aggregazione. Supponiamo di trovarci nello stato stazionario e di inserire al suo interno una perturbazione, possiamo immaginarla come un picco attorno a un certo valore  $m_0$  nella distribuzione di probabilità. Ci ritroveremo quindi con un grande numero di particelle che possiede una carica pari ad  $m_0$ . Queste particelle inizieranno ad aggregarsi con le altre già presenti nel sistema e creeranno nuove particelle di carica  $m_0 + m$ ; questo processo ha come conseguenza il continuo spostamento del picco, che inizialmente si trovava attorno a  $m_0$ , verso valori sempre più grandi. In parallelo a questo vi è anche l'aggregazione con le particelle che immettiamo nel sistema, che tenderà a spostare anch'esso il picco della distribuzione attorno al valore  $m_0 + \langle I \rangle$ . Nel caso in cui  $\langle I \rangle$  sia maggiore di zero ad esempio, avremo che i due processi trascinano il sistema nella stessa direzione e quindi la distribuzione di probabilità per il valore fissato  $m_0$  decresce velocemente nel tempo. Se invece supponiamo una situazione in cui  $\langle I \rangle = 0$ , avremo un contributo meno evidente dell'iniezione che in generale non tenderà a spostare il picco dal suo valore iniziale. Questo comporta un rallentamento nel processo che si ripercuote anche sulla forma della distribuzione; la perturbazione viene comunque estinta, ma lo fa in tempi molto più lunghi.

Per quanto affermato ci aspetteremmo che anche nel caso di iniezione con produzione di coppie, che per definizione ha  $\langle I \rangle = 0$ , l'andamento debba essere regolato da una distribuzione con legge di potenza. Proviamo quindi a verificarlo analizzando l'equazione di evoluzione che, in questo caso, è fornita dall'espressione (6) che possiamo riscrivere in forma differenziale come fatto precedentemente. L'equazione diventa, per valori molto piccoli di  $\rho$  o al limite  $\rho \rightarrow 0$ , pari a:

$$(66) \quad \frac{\partial \tilde{Z}_r(\rho, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \tilde{Z}_r(\rho, t)}{\partial r^2} - b_3 \rho^2 \tilde{Z}_r(\rho, t)$$

dove  $b_3 = \langle I^2 \rangle / \Delta t$ . La soluzione di questa equazione è data da:

$$(67) \quad \tilde{Z}_r(\rho, t) = \frac{\exp(-b_3 \rho^2 t)}{(\pi t / \Delta t)^{1/2}} \int_0^\infty dr' \tilde{Z}_r(\rho, 0) \left\{ \exp\left[-\frac{(r-r')^2}{t/\Delta t}\right] - \exp\left[-\frac{(r+r')^2}{t/\Delta t}\right] \right\}$$

L'anti trasformata di Fourier di quest'equazione può essere scritta nella forma data dall'espressione (43) e la corrispondente Funzione di Green avrà un andamento, a grandi valori di  $t$ , dato da:

$$(68) \quad g(m, t) \sim \langle I^2 \rangle^{-1/2} t^{-1}$$

La cui dipendenza da  $t$  è data da una legge di potenza con esponente -1, che è diverso dal caso di iniezione casuale, ma comunque ha l'andamento che ci aspettavamo.

Rimane ora da verificare come evolvono le perturbazioni nel modello di campo medio. Partiamo sempre ricavando l'equazione di evoluzione che può essere ottenuta, per le piccole perturbazioni, dalla linearizzazione dell'espressione (38) ovvero:

$$(69) \quad \tilde{Z}_1(\rho, t+1) = \Phi(\rho) e^{Z_1(\rho)-1} \tilde{Z}_1(\rho, t)$$

Quest'equazione può essere risolta utilizzando le espressioni ricavate precedentemente per  $Z_1(\rho)$  nello stato stazionario; il risultato, per valori molto piccoli di  $\rho$  o al limite  $\rho \rightarrow 0$ , è dato da:

$$(70) \quad \tilde{Z}_1(\rho, t) \cong \begin{cases} \tilde{Z}_1(\rho, 0) \exp[-\sqrt{2}\langle I \rangle^{1/2} i^{-1/2} |\rho|^{1/2} t] & \text{per } \langle I \rangle \neq 0 \\ \tilde{Z}_1(\rho, t) \exp[-\langle I^2 \rangle^{1/2} |\rho| t] & \text{per } \langle I \rangle = 0 \end{cases}$$

Ricaviamo a questo punto l'andamento temporale delle distribuzioni sottostanti utilizzando come fatto finora l'anti-trasformata di Fourier espressa nella forma (43). L'andamento asintotico delle funzioni di Green associate, per grandi valori di  $t$  e nel limite del continuo, sono date da:

$$(71) \quad g(m, t) \sim \begin{cases} \exp\left[-\frac{\langle I \rangle t^2}{2m}\right] & \text{per } \langle I \rangle \neq 0 \\ \langle I^2 \rangle^{-1/2} t^{-1} & \text{per } \langle I \rangle = 0 \end{cases}$$

Questi risultati sono coerenti con quanto osservato per il modello uno-dimensionale, infatti nel caso di iniezione a media non nulla la distribuzione è di tipo gaussiano, mentre per  $\langle I \rangle = 0$  compare ancora una volta una legge di potenza [7].

Riassumiamo quanto abbiamo appreso sugli stati stazionari del nostro modello nella tabella seguente

	$p(m)$	$g(m, t)$
<b>1D, <math>\langle I \rangle \neq 0</math></b>	$m^{-4/3}$	$\exp(-t^3)$
<b>1D, <math>\langle I \rangle = 0</math></b>	$m^{-5/3}$	$t^{-3/4}$
<b>1D, CREAZIONE DI COPPIE</b>	$m^{-2}$	$t^{-1}$
<b>CM, <math>\langle I \rangle \neq 0</math></b>	$m^{-3/2}$	$\exp(-t^2)$
<b>CM, <math>\langle I \rangle = 0</math></b>	$m^{-2}$	$t^{-1}$

Tabella 2. Distribuzione di carica dello stato stazionario  $p(m)$  e funzione di Green per perturbazioni dello stato finale nel caso uno-dimensionale (1D) e campo medio (CM)

## SEZIONE 2.6: CORRELAZIONI SPAZIALI

In questa sezione ci occuperemo di analizzare ed eventualmente quantificare la presenza di possibili correlazioni spaziali all'interno del nostro modello. In particolare, esamineremo solo il modello uno-

dimensionale poiché sembra essere il caso in cui le restrizioni spaziali influiscono in maniera significativa sulle distribuzioni di probabilità dello stato stazionario.

Solitamente per questo tipo di analisi viene introdotta una funzione di correlazione del tipo  $\langle m(0, t) \cdot m(j, t) \rangle$ , tuttavia nel nostro caso un calcolo di questo tipo avrebbe poco senso poiché il suo valore diverge in uno stato stazionario. Dobbiamo quindi trovare una strada alternativa per ricavare quanto ci serve e una valida alternativa può essere rappresentata dalla funzione caratteristica a molti corpi  $Z_r(\rho)$ . Possiamo immaginare che, in assenza di correlazioni spaziali, il valore di carica di una particella nello stato stazionario dovrebbe essere indipendente dal valore di tutte le altre masse in tutte le altre posizioni. Quindi, nel caso di distribuzioni spazialmente indipendenti, si dovrebbe avere che  $Z_r(\rho)$  dovrebbe essere uguale a  $[Z_1(\rho)]^r$ . Nei pressi di  $\rho = 0$  possiamo espandere in serie l'equazione caratteristica rispetto a  $\rho$  e ottenere l'espressione:

$$(72) \quad Z_r(\rho) = 1 - c_1 r |\rho|^\beta + \dots$$

dove  $c_1$  è una costante e  $\beta$  può essere  $1/3$  o  $1/2$  a seconda che si stia usando un'iniezione esterna di particelle casuale o a creazione di coppie rispettivamente. Se andiamo ora a espandere il questo modo anche  $[Z_1(\rho)]^r$  si ottiene un'espressione identica ma solamente fino all'ordine  $\rho^\beta$ ; si avrà quindi [8]:

$$(73) \quad [Z_1(\rho)]^r - Z_r(\rho) = \frac{r(r-1)}{2} (c_1)^2 \rho^{2\beta} + \dots \neq 0$$

Da quanto affermato, non possiamo escludere la presenza di correlazione tra i vari valori di  $m$ , tuttavia se è presente è di piccola entità e si trova a ordini alti dell'espansione. Questo rende anche molto difficile identificare la sua presenza numericamente tramite modelli e simulazioni. L'interrogativo rimane comunque aperto in attesa che si sviluppino metodi di calcolo più sofisticati per risolvere questo delicato problema.

### **CAPITOLO 3: LEGGI DI POTENZA E CRITICITA'**

Nel capitolo precedente abbiamo risolto le equazioni che ci permettono di descrivere il modello di aggregazione di particelle cariche. Abbiamo visto che il numero di particelle nel sistema decresce nel tempo secondo delle leggi di potenza, ma se introduciamo nel sistema un'iniezione esterna di particelle, indipendentemente da come essa venga eseguita, il sistema evolve verso uno stato stazionario ben preciso. Una volta raggiunto, lo stato stazionario il sistema vi rimane anche se perturbato; ciò dimostra la sua stabilità e unicità. Inoltre, qualunque deviazione da esso viene eliminata in poco tempo, indipendentemente da quanto questa perturbazione sia grande. Tutto quello che abbiamo trovato fino ad ora può essere ricondotto a una classe di fenomeni identificati con il nome di fenomeni critici. In questo capitolo cercheremo quindi di spiegare come le leggi di potenza si possono ricondurre a questa classe di fenomeni, quali sono le proprietà che li caratterizzano e cercheremo di mostrare come organismi viventi e sistemi biologici sfruttino a loro vantaggio questa serie di proprietà.

Iniziamo la nostra analisi da quello che conosciamo sul modello di aggregazione appena trattato. Partiamo osservando lo stato stazionario e in particolare il fatto che non dovrebbe esistere. Infatti, dalle equazioni (4) e (10) che descrivono l'evoluzione del modello, si può ricavare che la varianza della distribuzione di carica di una particella tende ad aumentare nel tempo, fino a divergere per  $t \rightarrow \infty$ . Questo tipo di divergenza solitamente sta ad indicare che il processo non raggiunge una distribuzione stabile ma nel nostro caso la distribuzione stabile c'è ed ha un andamento ben preciso. Per comprendere il fenomeno, dobbiamo fare riferimento alla teoria delle distribuzioni stabili, la quale permette di generalizzare il teorema del limite centrale anche per variabili stocastiche con varianza e valori medi non finiti. In particolare, il teorema del limite centrale ci dice che, prese un numero molto alto di variabili casuali  $x_i$ , al limite infinite, ognuna con la propria densità di probabilità e con varianza  $\sigma_i$  finita, la variabile data dalla somma di queste variabili casuali  $y = \sum_i x_i$  avrà una distribuzione gaussiana. Nel nostro caso potremmo prendere la carica di una particella come variabile casuale che, essendo il frutto di un processo di aggregazione, potremmo riscrivere come somma di altre variabili casuali ovvero le cariche delle altre particelle incontrate fino a quel momento. Ponendoci nello stato stazionario, ognuna delle cariche avrebbe una varianza infinita, quindi il teorema del limite centrale non sarebbe applicabile; tuttavia, esiste una sua generalizzazione che ci permette di includere anche variabili stocastiche con una varianza non finita. In questo caso però la variabile  $y$  risultante dalla somma, non sarà distribuita come una gaussiana, ma avrà una distribuzione stabile con una coda che segue un andamento a legge di potenza, che è proprio il tipo di distribuzione che si trova nello stato stazionario del nostro modello [9].

Un'altra caratteristica che è presente nel fenomeno di aggregazione è che gli stati stazionari distribuiti secondo leggi di potenza compaiono senza dover inserire alcun parametro di controllo. Questo comportamento è qualcosa di presente anche in altri sistemi ed è associabile all'operare in condizioni critiche. Con condizioni critiche si intende che il sistema si trova esattamente in una situazione per cui qualunque minima modifica può farlo evolvere in modi completamente diversi. Se si vuole capire come il processo di aggregazione possa essere interpretato in questa chiave, possiamo immaginare di invertire l'asse temporale e far procedere tutto all'indietro nel tempo. In quest'ottica si partirà con un numero molto piccolo di particelle, ma con cariche molto elevate, che iniziano a separarsi in frammenti sempre più piccoli, come se fosse un decadimento. Ogni decadimento potrà avvenire con una certa probabilità e proprio questo valore potrà influenzare il processo a tal punto da permettere due andamenti possibili. Se la generazione di nuove particelle sarà abbastanza veloce il sistema sopravviverà e aumenterà continuamente il numero di particelle presenti, in alternativa la popolazione iniziale si estinguerà. Questo tipo di evoluzioni

può essere incluso in una teoria più generale che comprende le così dette transizioni di fase fuori equilibrio e le fasi critiche. Cerchiamo di spiegare come funzionano prendendo un esempio semplice che è molto simile al modello di aggregazione già trattato, ovvero il processo di contatto. Immaginiamo di avere un numero  $N$  di siti o nodi tutti collegati tra di loro in un gigantesco network, ognuno di questi siti può essere all'istante iniziale acceso ( $s_i = 1$ ) o spento ( $s_i = 0$ ). All'istante successivo, i siti accesi possono o spegnersi o accendere altri siti a loro vicini. La scelta viene effettuata in modo casuale ed è regolata da un parametro che chiamiamo  $\lambda$ , mentre la possibilità che un nodo si spenga è regolata dal parametro  $\mu$  che fissiamo pari a 1. Immaginiamo che tutti i nodi siano collegati tra loro, di fatto utilizzando un'approssimazione di campo medio così come presentata per il fenomeno di aggregazione e scriviamo l'equazione di evoluzione del sistema. Quest'ultima avrà la forma seguente:

$$(74) \quad \dot{\rho}(t) = \lambda\rho(t)[1 - \rho(t)] - \rho(t) = (\lambda - 1)\rho(t) - \lambda\rho(t)^2$$

dove  $\rho_{st} = \sum_{i=1}^N s_i/N$  rappresenta una densità di attività. Le soluzioni di quest'equazione danno andamenti molto diversi in relazione al valore di  $\lambda$ , in particolare si ha una biforcazione attorno al valore  $\lambda = 1$ . Per valori più piccoli di 1 si parla di fase subcritica o quiescente e in questo contesto il tasso di attività tende all'unico stato stazionario realizzabile ovvero  $\rho = 0$ ; mentre per valori maggiori di 1 si ha una fase supercritica o attiva in cui la densità di attività cresce e si assesta attorno al valore  $\rho_{st} = 1 - 1/\lambda$ . Essendo la distanza tra  $\lambda$  e 1 un parametro fondamentale, possiamo introdurre la quantità  $\delta = |\lambda - 1|$ . La soluzione dell'equazione (59) può essere espressa in termini di  $\delta$  in entrambi i regimi, in particolare nella fase subcritica l'andamento è di tipo decrescente esponenziale  $\rho(t) = \rho(0) \exp(-\delta t)$  con un tempo caratteristico pari a  $\delta^{-1}$ ; da notare che questo tempo caratteristico diverge quando siamo nel punto critico  $\lambda = 1$ . Se invece risolviamo l'equazione differenziale quando siamo al punto critico otteniamo una distribuzione con un andamento asintotico a legge di potenza del tipo del tipo  $\rho(t) \sim t^{-1}$ . Potremmo anche introdurre un termine forzante che rimetta in attività i nodi dormienti con un tasso regolato dal parametro  $h$ . Questo passaggio è l'analogo di quello che abbiamo visto nel modello di aggregazione introducendo l'iniezione esterna di particelle  $I$ . Siamo ora in gradi di calcolare la risposta del sistema a questa sollecitazione esterna calcolando:

$$(75) \quad \Xi = \left. \frac{\partial \rho_{st}}{\partial h} \right|_{h \rightarrow 0}$$

Quello che si ottiene è  $\Xi \propto \delta^{-1}$  che ancora una volta diverge nel punto critico. Da quanto trovato deduciamo che, anche per piccole variazioni, se ci troviamo nei pressi del punto critico la risposta del sistema è molto evidente [11].

Altra particolarità dei fenomeni critici è che, partendo da un sito di attività preciso, possiamo tracciare il numero di siti che sono stati accesi a partire da quello che stiamo osservando. Questa cascata di accensioni avrà dimensioni e durata diversi in base alle circostanze, in particolare può nascere e morire poco dopo (*fase quiescente*) oppure dare origine a una cascata che può proseguire potenzialmente anche all'infinito (*fase attiva*). Specificatamente, se ci troviamo proprio sul punto critico, dimensioni e durata di queste cascate di particelle hanno una distribuzione a legge di potenza. In particolare, risolvendo l'equazione di evoluzione del sistema si ottiene che la durata di una cascata di particelle è distribuita come  $F(t) \sim t^{-2}$  mentre le dimensioni seguono l'andamento  $P(S) \sim S^{-3/2}$ . Questi risultati rispecchiano quanto abbiamo trovato anche nel processo di aggregazione. Nell'approssimazione di campo medio avevamo dedotto che la probabilità di trovare una particella, senza iniezione di cariche esterne, al tempo  $t$  era regolata da una  $F(t) \sim t^{-1}$  mentre la distribuzione di carica nello stato stazionario era invece regolata proprio da una  $P(m) \sim m^{-3/2}$ . Questo ci fa sperare di poter effettivamente considerare il fenomeno di aggregazione come

un fenomeno critico, di conseguenza anche di poter ricavare da esso alcune regole generali da poter applicare anche in altri contesti. Infatti, una caratteristica fondamentale dei processi critici e più in generale di tutti i processi regolati da leggi di potenza, è l'assenza di scale tipiche.

Presa una distribuzione del tipo  $P(x) \sim Ax^\alpha$  possiamo riscalarlo il processo per sistemi più o meno grandi semplicemente moltiplicando  $x$  per una costante  $\beta$ . Quello che otteniamo è:

$$(76) \quad P(\beta x) = A(\beta x)^\alpha = Ax^\alpha \beta^\alpha = \beta^\alpha P(x)$$

La distribuzione di probabilità mantiene quindi la stessa forma e viene semplicemente moltiplicata per una costante. Questo risultato rende le leggi di potenza estremamente importanti in contesti naturali e biologici poiché l'assenza di scale tipiche rende applicabili le stesse distribuzioni anche a contesti e sistemi molto diversi tra di loro. Considerando che questo tipo di distribuzioni sono molto comuni quando si è vicini al punto critico di un certo processo, il tutto fa sì che i sistemi biologici preferiscano organizzarsi internamente per raggiungere una fase critica; questo tipo di attività viene chiamata SOC (*self-organized criticality*) e permette loro di rispondere agli stimoli esterni nel modo più efficiente possibile e secondo leggi robuste, ma che sono anche molto generali [12].

Solitamente non è semplice regolare il sistema in modo da trovarsi esattamente nel punto critico senza aver bisogno di introdurre dei parametri esterni, per questo motivo gli organismi viventi adottano una variante del meccanismo chiamato self-organized quasicriticality. Utilizzato per lo più in sistemi non conservativi, questo comportamento prevede che il sistema oscilli attorno al punto critico alternando fasi attive a fasi di estinzione. Per capire quali siano i vantaggi dell'operare vicino a un punto critico prendiamo un esempio che risulti facile da spiegare, sia verificato sperimentalmente e che tutti noi utilizziamo anche senza pensarci: il nostro orecchio. L'orecchio interno dei vertebrati è uno strumento eccezionale grazie alla sua abilità di ricevere e amplificare certi tipi di stimoli, permettendoci quindi di sentire, mentre opera anche un'azione di soppressione per tutti quelli che invece non possiamo percepire.

Il cuore di questo meccanismo molto complesso sono le cellule ricettive all'interno dell'orecchio, simili a capelli, che oscillano continuamente anche in assenza di stimoli esterni. Tali oscillazioni sono sopresse o supportate in base alla concentrazione di ioni calcio presenti nelle cellule e tutto il sistema può essere considerato come un oscillatore di Hopf; la sua equazione generale è scritta come:

$$(77) \quad \dot{\Phi}(t) = (a + i\tilde{\omega})\Phi(t) - |\Phi|^2\Phi(t)$$

dove  $\Phi$  è un numero complesso,  $\tilde{\omega}$  la frequenza di risonanza del sistema e  $a$  rappresenta la concentrazione di ioni e funge da parametro di controllo interno al sistema. Quest'equazione ha una soluzione del tipo  $\Phi(t) = \sqrt{a}e^{i\tilde{\omega}t}$  che si autosostiene se  $a > 0$ , mentre viene repressa se  $a < 0$ . Introduciamo adesso uno stimolo esterno di piccola ampiezza e della frequenza  $w = \tilde{\omega}$ , che si può rappresentare tramite un termine aggiuntivo all'equazione (62) del tipo  $+Fe^{i\tilde{\omega}t}$ . Riscriviamo l'equazione nel modo seguente utilizzando  $\Phi(t) = R(t)e^{i\tilde{\omega}t}$ :

$$(78) \quad \dot{R}(t) = R(t)[a - R(t)^2] + F$$

Avremo anche in questo caso diversi regimi possibili: il primo si ottiene per  $a > 0$  e in questo caso la risposta  $R$  del sistema è direttamente proporzionale all'ampiezza del segnale in arrivo  $F$ , tuttavia vi è una biforcazione al valore  $a = 0$ . In questo punto la risposta diventa fortemente non lineare  $R = F^{1/3}$  e di conseguenza il rapporto tra risposta e stimolo diventa  $R/F = F^{-2/3}$  che diverge per stimoli di piccola ampiezza. Ciò comporta che un segnale di piccola intensità ma della giusta frequenza  $\tilde{\omega}$  venga

notevolmente amplificato, mentre se il segnale possedesse una  $w \neq \tilde{w}$  la risposta sarebbe molto inferiore. Il meccanismo descritto possiede l'abilità di selezionare con grande precisione gli impulsi che arrivano e il tutto è possibile grazie al punto critico che si trova per  $a = 0$ . Tale comportamento però permette di selezionare un'unica frequenza da amplificare, ecco perché i ricettori dell'orecchio sono disposti in file e ognuno di essi risponde a frequenze specifiche. Mettendo insieme questo grande numero di oscillatori di Hopf fa sì che, all'arrivo di uno stimolo, ci sia una risposta collettiva che si tramuta in una vera e propria transizione di fase da un regime all'altro, passando per il punto critico, e amplificando o eliminando il segnale. Il funzionamento dell'orecchio diventa quindi un ottimo esempio per mostrare come le fasi critiche possano essere ampiamente sfruttate da sistemi biologici, e quali siano i vantaggi che se ne ricavano [13]. Questo esempio non è l'unico che si può fare, si sono infatti riscontrati comportamenti simili anche nel funzionamento dell'apparato visivo e olfattivo, inoltre ci sono studi molto importanti che stanno dimostrando come anche l'attività cerebrale possa essere interpretata in questi termini. Nello specifico i tempi in cui alcune zone del cervello rimangono accese a fronte di certi stimoli, sembrano seguire anch'esse leggi potenza abbastanza solide. L'obbiettivo della ricerca attuale è quello di verificare se questi andamenti sono dovuti a transizioni di fase critiche, così come per l'orecchio, e verificare se operare in condizioni diverse possa giustificare la comparsa di malattie cerebrali in diversi soggetti.



## **CAPITOLO 4: CONCLUSIONI**

Riassumiamo i risultati fondamentali che abbiamo ricavato, cercando di mettere in risalto quelli più importanti e fornendo qualche spunto interessante per riuscire ad ampliare le nostre conoscenze di questi fenomeni.

Per quanto riguarda il fenomeno di aggregazione abbiamo visto che si tratta di un fenomeno dissipativo, ovvero tende a eliminare tutte le masse del sistema che condurrebbero a distribuzioni secondo leggi di potenza. Per impedire che ciò avvenga è fondamentale il ruolo dell'iniezione esterna, che garantisce un continuo apporto di materia. Grazie a ciò il sistema è in grado di raggiungere delle configurazioni stazionarie, quindi stabili nel tempo, le cui distribuzioni di probabilità sono leggi di potenza. Inoltre, in base al tipo di iniezione, si ottengono distribuzioni diverse negli stati stazionari; questo a conferma che il ruolo dell'iniezione è fondamentale per il nostro modello. Da questo punto di vista si potrebbe capire qualcosa in più sul fenomeno andando a sperimentare altri tipi di iniezione. In particolare, i due tipi di iniezione da noi utilizzati sono iniezioni a varianza finita. Rimarrebbe quindi da studiare casi con varianza infinita.

Altra caratteristica interessante è che le distribuzioni hanno una dipendenza non solo dal tipo di iniezione, ma anche dalle dimensioni del sistema. Infatti, il modello 1-dimensionale e quello di campo medio non condividono le stesse distribuzioni se non nel caso di iniezione a media nulla  $\langle I \rangle = 0$ . In particolare, usando un'iniezione a creazione di coppie nel modello uno-dimensionale si ottiene che  $p(m) \sim m^{-2}$ , lo stesso avviene anche per il campo medio usando un'iniezione a media nulla. Da notare che anche i tempi di distensione del sistema nei due casi appena accennati coincidono e hanno espressione  $g(m, t) \sim t^{-1}$ . Questo ci dà alcuni indizi su quali possano essere le condizioni critiche per il fenomeno di aggregazione: nel caso di iniezione di coppie, che ha media nulla per definizione, la dimensione critica sembra essere 1 proprio perché campo medio e modello 1-dimensionale condividono le stesse proprietà. Lo stesso non si può dire per un'iniezione casuale dove i risultati dipendono dai dettagli dell'iniezione suggerendo che la dimensione critica sia maggiore di 1. Questo effettivamente viene verificato, come abbiamo visto nella sezione 2.3, passando a dimensioni superiori a uno dove gli stati stazionari e l'evoluzione temporale del sistema sono guidati da leggi di potenza che condividono gli stessi esponenti del modello di campo medio.

## REFERENZE:

- [1] N.G. Van Kampen, Stochastic processes in physics and chemistry pp.1-69
- [2] T. Cossetto, Moto browniano e ipotesi atomica, 26 settembre 2012, pp. 1-7
- [3] A. Fulinski, On Marian Smoluchoski's life and contribution to physics, p.1525
- [4] H. Takayasu, M. Takayasu, A. Provata, G. Huber, Statistical Properties of Aggregation with Injection, cap.3
- [5] Ibidem, cap. 4.1
- [6] Ibidem, cap. 4.2
- [7] Ibidem, cap. 5
- [8] Ibidem, cap. 4.3
- [9] Ibidem, p. 742
- [10] M. R. Swift, F. Colaiori, A. Flammini, A. Maritan, A. Giacometti, Jayanth R. Banavar, Schaling Relationship in Agglomeration and Annihilation Models, p. 3278-3279
- [11] M. A. Muñoz, Colloquium: Criticality and dynamical scaling in living systems, cap. II.C
- [12] Ibidem, cap. II.D
- [13] Ibidem, cap. III.A

## BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA:

1. N.G. Van Kampen, Stochastic processes in physics and chemistry, Elsevier, 21marzo 2007, terza edizione, 494
2. H. Takayasu, M. Takayasu, A. Provata, G. Huber, *Statistical Properties of Aggregation with Injection*, in "Journal of Statistical Physics", vol. 65, 1991, pp. 725-745
3. A. Fulinski, *On Marian Smoluchoski's life and contribution to physics*, in "ACTA PHYSICA POLONICA B", vol.29, 1998, pp. 1523-1537
4. T. Cossetto, Moto browniano e ipotesi atomica, 26 settembre 2012 <https://www.bo.infn.it/~apesci/Cossetto.pdf>
5. M. A. Muñoz, *Colloquium: Criticality and dynamical scaling in living systems*, in "REVIEWS OF MODERN PHYSICS", vol. 90, 2018, DOI: 10.1103/RevModPhys.90.031001
6. M. R. Swift, F. Colaiori, A. Flammini, A. Maritan, A. Giacometti, Jayanth R. Banavar, *Schaling Relationship in Agglomeration and Annihilation Models*, in "PHYSICAL REVIEW LETTERS", vol. 79 n.17, 27 ottobre 1997