

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA**



**Dipartimento di Ingegneria Civile, Edile ed Ambientale**

**Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile**

**Tesi di Laurea Magistrale**

**SEZIONE TRASVERSALE DI EQUILIBRIO DEI CORSI  
D'ACQUA RETTILINEI NON VEGETATI**

**Laureando:** Nicola Alibardi

**Relatore:** Ch.mo Prof. Luca Carniello

**Correlatore:** Ch.mo Prof. Giampaolo Di Silvio

**ANNO ACCADEMICO: 2014-2015**



## Indice

Capitolo 1: Idrodinamica e morfologia fluviale.....	1
1.1 Moto dell'acqua .....	1
1.2 Moto dei sedimenti.....	7
Capitolo 2 Il trasporto solido .....	9
2.1 Introduzione .....	9
2.2 Meccanismi del trasporto solido .....	9
2.2.1 Il trasporto solido fluviale .....	9
2.2.2 Il trasporto eolico .....	21
2.2.3 Il trasporto costiero .....	22
2.2.4 Il trasporto glaciale.....	22
2.2.5 I movimenti franosi.....	22
2.3 Formule di trasporto solido .....	23
2.3.1 Approccio dello sforzo tangenziale.....	25
2.3.2 Approccio della pendenza della linea dell'energia .....	26
2.3.3 Approccio della portata liquida.....	27
2.3.4 Approccio probabilistico.....	28
2.3.5 Approccio di regressione .....	29
2.3.6 Approccio di ugual mobilità .....	30
Capitolo 3 Sezione trasversale fluviale di equilibrio .....	33
3.1 Introduzione .....	33
3.2 Relazioni empiriche .....	33
3.3 Soluzioni "fisicamente basate" .....	38
3.3.1 Soluzione di Lacey (1930) .....	39
3.3.2 Soluzione di Parker (1978) .....	42
3.3.3 Soluzione di Ikeda (1982) .....	47
3.3.4 Soluzione di Diplas (1992) .....	53
3.3.5 Soluzione di Ikeda e Izumi (1991).....	61
3.3.6 Soluzione alternativa.....	73
Capitolo 4 Confronto fra le soluzioni "fisicamente basate" .....	77
4.1 Introduzione .....	77
4.2 Confronto fra le forme dei profili della sponda .....	77
4.3 Confronto fra le profondità della corrente in asse.....	78
4.4 Confronto fra le portate liquide.....	79
4.5 Confronto fra le portate solide longitudinali.....	86
4.6 Confronto fra le larghezze della sponda .....	91
Capitolo 5 Sezioni transitorie di quasi-equilibrio per la soluzione alternativa.....	93
5.1 Introduzione .....	93
5.2 Soluzione numerica.....	93
5.3 Conclusioni .....	99
Bibliografia .....	101

## Capitolo 1: Idrodinamica e morfologia fluviale

### 1.1 Moto dell'acqua

La morfologia di un corso d'acqua dipende dall'interazione fra moto dell'acqua e moto dei sedimenti. Le equazioni che descrivono il moto dell'acqua o più in generale di un fluido viscoso incomprimibile sono le celebri equazioni di *Navier* (1827) e di *Stokes* (1845):

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} - 2\Omega \sin \phi v + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (1.1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} - 2\Omega \sin \phi u + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (1.2)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} + g + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (1.3)$$

dove:

$u$  : componente della velocità del fluido nella direzione  $x$

$v$  : componente della velocità fluido nella direzione  $y$

$w$  : componente della velocità fluido nella direzione  $z$

$p$  : pressione del fluido

$x, y, z$  : terna di riferimento in cui l'asse  $z$  è assunto verticale

$g$  : accelerazione di gravità

$\Omega$  : velocità di rotazione della Terra

$\phi$  : latitudine

a queste equazioni si deve aggiungere l'equazione di continuità esprime il principio di conservazione della massa, che per un fluido con densità costante diventa:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.4)$$

dove:

$u$  : componente della velocità del fluido nella direzione x

$v$  : componente della velocità fluido nella direzione y

$w$  : componente della velocità fluido nella direzione z

$p$  : pressione del fluido

$x, y, z$  : terna di riferimento in cui l'asse z è assunto verticale

I primi tre termini delle equazioni (1.1)-(1.3) rappresentano le forze d'inerzia legate alle accelerazioni del fluido il quinto termine rappresenta le forze di massa dovute all'accelerazione di gravità e all'accelerazione di *Coriolis*. Gli ultimi termini rappresentano la forza di superficie dovute rispettivamente alla pressione e alla viscosità del fluido. Per poter utilizzare le equazioni di *Navier-Stokes* nei moti a turbolenza sviluppata, è indispensabile eseguire sulle equazioni stesse una preliminare integrazione del tempo, intesa da eliminare le pulsazioni turbolente. Le equazioni di *Navier-Stokes* diventano così le equazioni di *Reynolds*:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - 2\Omega \sin \phi \bar{v} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \nu \nabla^2 \bar{u} + \left( \frac{\partial}{\partial x} \overline{u'u'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{u'v'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{u'w'} \right) = 0 \quad (1.5)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \Omega \sin \phi \bar{u} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \nu \nabla^2 \bar{v} + \left( \frac{\partial}{\partial x} \overline{v'u'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'v'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{v'w'} \right) = 0 \quad (1.6)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + g + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \nu \nabla^2 \bar{w} + \left( \frac{\partial}{\partial x} \overline{w'u'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{w'v'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{w'w'} \right) = 0 \quad (1.7)$$

dove:

$\bar{u}$  : componente della velocità in direzione x mediata sulla turbolenza

$\bar{v}$  : componente della velocità in direzione y mediata sulla turbolenza

$\bar{w}$  : componente della velocità in direzione z mediata sulla turbolenza

$\bar{p}$  : pressione mediata sulla turbolenza

$u'$  : pulsazione della velocità u

$v'$  : pulsazione della velocità v

$w'$  : pulsazione della velocità  $w$

l'equazioni di continuità, sottoposta ad un analogo processo di media, scrive:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (1.8)$$

dove:

$\bar{u}$  : componente della velocità in direzione  $x$  mediata sulla turbolenza

$\bar{v}$  : componente della velocità in direzione  $y$  mediata sulla turbolenza

$\bar{w}$  : componente della velocità in direzione  $z$  mediata sulla turbolenza

Una semplificazione di queste equazioni si ottiene tenendo in considerazione che gran parte di sistemi idrici naturali (mari, laghi, fiumi) sono caratterizzati da velocità orizzontali molto maggiori di quelle verticali. Qualora sia lecito trascurare l'accelerazione verticale rispetto all'accelerazione di gravità la terza delle equazioni di *Reynolds* si trasforma nella cosiddetta equazione dell'idrostatica:

$$g + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = 0 \quad (1.9)$$

dove:

$g$  : accelerazione di gravità

$\bar{p}$  : pressione mediata sulla turbolenza

che esprime una variazione lineare della pressione con la quota. Trascurando gli sforzi viscosi rispetto quelli turbolenti e portando le velocità sotto il segno di derivato, le altre due equazioni di *Reynolds* diventano:

$$\frac{\partial(\overline{uu})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{uv})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{uw})}{\partial z} + \frac{\partial\overline{u}}{\partial t} - 2\Omega \sin \phi \overline{v} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\overline{p}}{\partial x} + \left( \frac{\partial}{\partial y} \overline{u'v'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{u'w'} \right) = 0 \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial(\overline{vu})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{vv})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{vw})}{\partial z} + \frac{\partial\overline{v}}{\partial t} + 2\Omega \sin \phi \overline{u} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\overline{p}}{\partial y} + \left( \frac{\partial}{\partial x} \overline{v'u'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{v'w'} \right) = 0 \quad (1.11)$$

dove:

$\overline{u}$  : componente della velocità in direzione x mediata sulla turbolenza

$\overline{v}$  : componente della velocità in direzione y mediata sulla turbolenza

$\overline{w}$  : componente della velocità in direzione z mediata sulla turbolenza

$\Omega$  : velocità di rotazione della Terra

$\phi$  : latitudine

$\overline{p}$  : pressione mediata sulla turbolenza

nell'ipotesi di moto orizzontale prevalente, è anche possibile integrare sulla verticale le equazioni del moto, ottenendo il cosiddetto modello bidimensionale, le cui equazioni risultano:

$$(1 + \varepsilon_2) \left( U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial U}{\partial t} - 2\Omega \sin \phi V + g \frac{\partial Z}{\partial x} + g \frac{U \sqrt{U^2 + V^2}}{\chi^2 h} - \xi \frac{V_e^2}{h} \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial y} \left( E_{xy} \frac{\partial U}{\partial y} \right) = 0 \quad (1.12)$$

$$(1 + \varepsilon_2) \left( U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial V}{\partial t} + 2\Omega \sin \phi U + g \frac{\partial Z}{\partial y} + g \frac{V \sqrt{U^2 + V^2}}{\chi^2 h} - \xi \frac{V_e^2}{h} \sin \alpha + \frac{\partial}{\partial x} \left( E_{yx} \frac{\partial V}{\partial x} \right) = 0 \quad (1.13)$$

l'equazione di continuità, trattata in modo analogo, diventa:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial(hU)}{\partial x} + \frac{\partial(hV)}{\partial y} = 0 \quad (1.14)$$

dove:

$U$  : velocità della corrente in direzione x mediata sulla verticale

$V$  : velocità della corrente in direzione y mediata sulla verticale

$V_e$  : velocità del vento

$\alpha$  : angolo che il vento forma con l'asse x

$\chi$  : coefficiente di Chézy

$\xi$  : costante che dipende dallo sforzo tangenziale in superficie, da  $V_e$  e da  $\alpha$

$\varepsilon_2$  : coefficiente dipendente da  $\chi$  e di valore costante pari a circa 0,03

$g$  : accelerazione di gravità

$\Omega$  : velocità di rotazione della Terra

$\phi$  : latitudine

$h$  : profondità della corrente

$E$  : coefficienti di dispersione turbolenta bidimensionale

In molti casi pratici le correnti idriche sono caratterizzate da una dimensione longitudinale decisamente prevalente sulle altre due, come accade per i corsi d'acqua. In questi casi la direzione del moto è più o meno corrispondente all'asse del canale stesso. Assumendo l'asse x coincidente con l'asse del canale la velocità media sull'intera sezione del corso d'acqua risulta:

$$\bar{U}(x,t) = \frac{1}{A} \int_A \bar{u}(x,y,z,t) dA \quad (1.15)$$

dove:

$\bar{U}$  : velocità media nella sezione

$A$  : area della sezione

$\bar{u}$  : componente della velocità in direzione x mediata sulla turbolenza

se l'integrazione dell'equazione di *Reynolds* è estesa sull'intera sezione del corso d'acqua, si ottiene la seguente equazione:

$$(1 + \bar{\varepsilon}_2) \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + g \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{1}{A} \int_A \frac{\tau_x}{\rho h} dA = 0 \quad (1.16)$$

dove:

$\bar{U}$  : velocità media nella sezione

$Z$  : quota del fondo del corso d'acqua

$g$  : accelerazione di gravità

$A$  : area della sezione

$\tau_x$  : sforzo tangenziale al fondo nella direzione  $x$

$\rho$  : densità del fluido

$h$  : profondità della corrente

nella quale:

$$\bar{\varepsilon}_2 = \frac{1}{A} \int_A \left( \frac{\bar{u}^2}{\bar{U}^2} - 1 \right) dA \quad (1.17)$$

dove:

$\bar{U}$  : velocità media nella sezione

$\bar{u}$  : componente della velocità in direzione  $x$  mediata sulla turbolenza

$A$  : area della sezione

rappresenta il coefficiente che tiene conto della non uniforme velocità della sezione. La stessa equazione potrebbe anche essere ricavata esprimendo il bilancio della quantità di moto che attraversa nell'elemento di canale avente lunghezza di  $x$ . Se invece della quantità di moto si esprime il bilancio dell'energia attraverso lo stesso elemento, si ottiene un'equazione di poco diversa. Indipendentemente dall'ipotesi fatta per definire la distribuzione delle velocità nella sezione del corso d'acqua, l'equazione di continuità nel modello unidimensionale si scrive:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (1.18)$$

dove:

$Q$  : portata liquida del corso d'acqua

$A$  : area della sezione

l'equazione del modello unidimensionale può essere ricondotta alla seguente equazione:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h + Z + \frac{Q^2}{2gA^2} \right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} - J \quad (1.19)$$

dove:

$Q$  : portata liquida del corso d'acqua

$A$  : area della sezione

$h$  : profondità della corrente

$Z$  : quota del fondo del corso d'acqua

$g$  : accelerazione di gravità

$J$  : pendenza della linea dell'energia

## 1.2 Moto dei sedimenti

Alle equazioni idrodinamiche devono essere aggiunte le equazioni che descrivono il moto dei sedimenti. In termini monodimensionali il moto dei sedimenti consiste nell'equazione di *Exner* che descrive l'evoluzione del fondo del corso d'acqua:

$$\sum_{k=1}^N \frac{\partial P_k}{\partial x} = -B \frac{\partial Z}{\partial t} \quad (1.20)$$

dove:

$P_k$  : portata solida riferita alla K-esima classe granulometrica

$B$  : larghezza del corso d'acqua

$Z$  : quota del fondo del corso d'acqua

il bilancio dei sedimenti di pezzatura differente espressa dall'equazione:

$$\partial B \frac{\partial \beta_K}{\partial t} = -\frac{\partial P_K}{\partial x} - B \beta_K^* \frac{\partial Z}{\partial t} \quad (1.21)$$

dove:

$P_K$  : portata solida riferita alla K-esima classe granulometrica

$\beta_K$  : frazione della classe granulometrica K-esima presente nello strato attivo

$B$  : larghezza del corso d'acqua

$Z$  : quota del fondo del corso d'acqua

$\beta_K^*$  : frazione della classe granulometrica K-esima che viene scambiata tra lo strato attivo ed il sottostrato

infine la portata solida può essere espressa, come meglio descritto al capitolo 2 con la seguente formula:

$$P_K = \alpha_c \frac{Q^2 J^2}{B d_K} \beta_K \zeta_K \quad (1.22)$$

dove:

$Q$  : portata liquida del corso d'acqua

$J$  : pendenza della linea dell'energia

$B$  : larghezza del corso d'acqua

$\beta_K$  : frazione della classe granulometrica K-esima presente nello strato attivo

$d_K$  : diametro della frazione granulometrica K-esima

$\alpha_c$  : coefficiente dipendente dalle caratteristiche del corso d'acqua

$\zeta_K$  : coefficiente di nascondimento ed esposizione

## Capitolo 2 Il trasporto solido

### 2.1 Introduzione

Il presente capitolo si sofferma principalmente sulle modalità con cui avviene il trasporto solido e verrà fatta una classificazione delle varie formule di trasporto solido longitudinale.

### 2.2 Meccanismi del trasporto solido

Il trasporto di sedimenti consiste in un movimento di particelle solide dovuto principalmente ad un'azione combinata della gravità e del fluido con cui vengono mosse.

Avviene nei sistemi naturali dove le particelle sono rocce clastiche (sabbia, ghiaia e ciottoli), argilla o fango, mentre il fluido è generalmente l'acqua, come per i fiumi, i mari e gli oceani. Tuttavia può anche essere causato dallo scioglimento dei ghiacci e nelle superfici terrestri soggette all'azione dei venti. Esistono anche dei casi in cui il trasporto di sedimenti avviene solo per l'effetto della forza di gravità come per le frane nelle colline, nelle scarpate e nelle falesie.

#### 2.2.1 Il trasporto solido fluviale

Il trasporto solido fluviale appartiene alla categoria dei processi relazionati al movimento dell'acqua nei sistemi naturali. A questo fenomeno è collegato il trasporto solido ordinario nei fiumi, nei canali, nei flussi generati dallo scioglimento di ghiacciai, nelle inondazioni con sovralluvionamento e nei *jökulhlaup* provocati dalle eruzioni subglaciali.

Restando in ambito fluviale la dimensione più grande delle particelle trasportate è dell'ordine di grandezza delle sabbie o delle ghiaie, ma durante i fenomeni di inondazioni possono essere trasportati anche sedimenti di maggiori dimensioni come ciottoli o massi.

Il trasporto di sedimenti in un corso d'acqua naturale a granulometria estesa può avvenire secondo diverse modalità distinguendosi in:

- trasporto di fondo (*bed load*)
- trasporto in sospensione (*suspended load*)

- trasporto di dilavamento (*wash load*)

Il trasporto al fondo riguarda i sedimenti che vengono trasportati dalla corrente fluida rimanendo però in contatto con il letto del corso d'acqua, ed il loro moto avviene per rotolamento, per scivolamento e/o per saltellamento. Generalmente, il trasporto al fondo è minore in termini quantitativi rispetto al trasporto solido complessivo, ma può avere un ruolo preponderante nell'evoluzione morfologica delle sponde.

Il trasporto di fondo è influenzato in parte dall'attrito e dall'abrasione che risulta dalla collisione tra le particelle e con la superficie del canale, provocando una conseguente rimozione dello strato più superficiale delle stesse ed una conseguente diminuzione progressiva del loro diametro. A riguardo si segnala che le particelle di minor diametro sono più facilmente trasportate dalla corrente in quanto è minore lo sforzo tangenziale minimo richiesto per mobilitarle.

Esistono numerose formule sperimentali per descrivere quantitativamente il trasporto solido di fondo, nel caso di pezzatura uniforme del materiale costituente il letto del corso d'acqua. Per spiegare la natura di tali formule occorre innanzitutto stabilire da quali parametri idraulici la portata solida sia maggiormente influenzata.

Assumendo una granulometria costante delle particelle di sedimento, una grandezza significativa è il diametro delle particelle  $d$  e la densità  $\rho_s$ . Il moto della particella è influenzato dalla gravità  $g$  e dalla corrente fluida avente velocità  $u$ , densità  $\rho$ , viscosità  $\nu$  e tirante idrico  $h$ .

In definitiva la portata solida dipende da sette grandezze dimensionali indipendenti e da tre unità di misura per descriverle (lunghezza, tempo e massa). Sfruttando il teorema di *Buckingham* si possono perciò ottenere quattro gruppi adimensionali da cui dipende la portata solida.

$$h^* = \frac{h}{d} \quad (2.1)$$

$$\text{Re} = \frac{ud}{\nu} \quad (2.2)$$

$$\Delta = \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \quad (2.3)$$

$$F^2 = \frac{u^2}{g\Delta d} \quad (2.4)$$

dove:

$h^*$  : tirante adimensionale

Re : numero di Reynolds sedimentologico

$\Delta$  : densità relativa

$F$  : numero di Froude sedimentologico

oppure introducendo la velocità di attrito:

$$u^* = \sqrt{\tau_0 / \rho} = \sqrt{ghi} \quad (2.5)$$

si ottiene:

$$h^* = \frac{h}{d} \quad (2.6)$$

$$Re^* = \frac{u^* d}{\nu} \quad (2.7)$$

$$\Delta = \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \quad (2.8)$$

$$F^{*2} = \frac{u^{*2}}{g\Delta d} \quad (2.9)$$

dove:

$\tau_0$  : sforzo tangenziale al fondo

$h^*$  : tirante adimensionale

Re\* : numero di Reynolds sedimentologico

$\Delta$  : densità relativa

$F^*$  : numero di Froude sedimentologico

Si può osservare come  $\Delta$  e  $F^*$  siano sempre importanti, mentre gli altri parametri sono importanti solo quando sono piccoli. Quindi nei casi di diametri sottili in acqua relativamente calma, come accade per i fiumi di pianura,  $h^*$  può essere trascurato, mentre per fiumi di montagna, dove la velocità della corrente è elevata, può essere trascurato Re\*.

In base a quanto stabilito è possibile esprimere la portata solida come funzione di  $F^*$  nella forma:

$$\frac{q_s}{\sqrt{g\Delta d}} = \alpha(F^{*2})^\beta \quad (2.10)$$

dove:

$q_s$  : portata solida

$\Delta$  : densità relativa

$d$  : diametro della particella di sedimento

$F^*$  : numero di Froude sedimentologico

$\alpha$  e  $\beta$  : costanti da determinare

Si osserva che  $\alpha$  e  $\beta$  dipendono dalla tipologia di fiume in esame, ovvero se si tratta di fiumi di montagna le costanti dipenderanno da  $h^*$ , mentre se si tratta di fiumi di pianura dipenderanno da  $Re^*$ . La formula (2.10) così ottenuta è di tipo monomio, ma esistono formule binomie che introducono il concetto dello sforzo tangenziale critico di *Shields* (Figura 2.1) oppure numero di *Froude* sedimentologico critico, limite oltre il quale le particelle cominciano a muoversi sotto l'effetto della corrente fluida. La formula (2.10) viene quindi modificata nel seguente modo:

$$\frac{q_s}{\sqrt{g\Delta d}} = \alpha(F^{*2} - F_c^{*2})^\beta \quad (2.11)$$

dove:

$q_s$  : portata solida per unità di larghezza

$\Delta$  : densità relativa

$g$  : accelerazione di gravità

$d$  : diametro della particella di sedimento

$F^*$  : numero di Froude sedimentologico

$F_c^*$  : numero di Froude sedimentologico critico

$\alpha$  e  $\beta$  : costanti da determinare

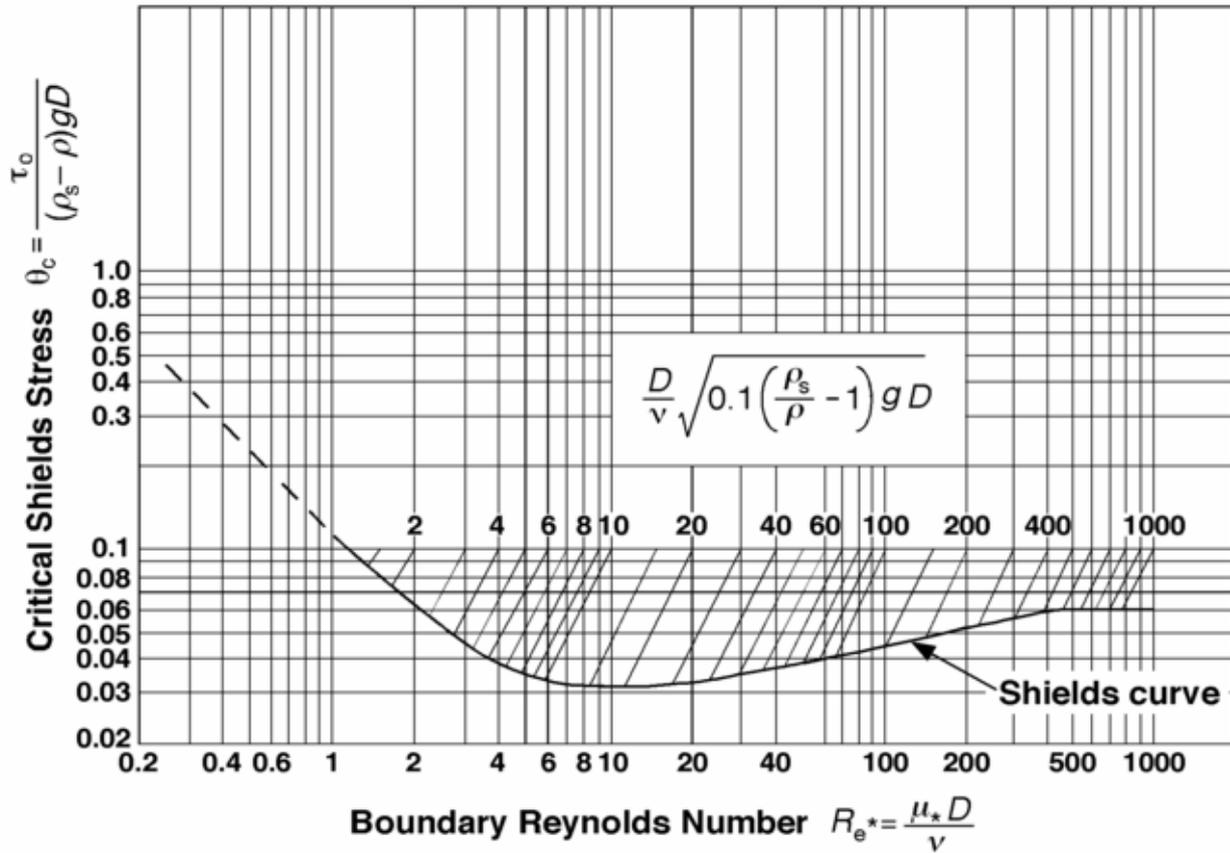


Figura 2.1 – il diagramma di *Shields* rappresenta lo sforzo tangenziale critico adimensionale in funzione del numero di *Reynolds*

Tornando alla formula (2.10) si può pensare di introdurre le formule della velocità della corrente espresse per il moto uniforme come quelle di *Chézy* o di *Strickler*:

$$U = \chi \sqrt{h \cdot i} \quad (2.12)$$

$$U = K_s h^{3/2} i^{1/2} \quad (2.13)$$

dove:

$U$  : velocità media della corrente sulla verticale

$h$  : tirante d'acqua

$i$  : pendenza longitudinale del corso d'acqua

$\chi$  : coefficiente di *Chézy*

$K_s$  : coefficiente di *Strickler*

l'equazione (2.5) con le (2.12) e (2.13) può essere riscritta come segue:

$$u^* = \frac{\sqrt{g}}{\chi} U \quad (2.14)$$

$$u^* = \frac{\sqrt{g}}{K_s h^{1/6}} U \quad (2.15)$$

dove:

$U$  : velocità media della corrente sulla verticale

$h$  : tirante d'acqua

$g$  : accelerazione di gravità

$\chi$  : coefficiente di Chézy

$K_s$  : coefficiente di Strickler

la (2.10) con l'introduzione della (2.14) o (2.15) diventa:

$$Q_s = \alpha \frac{Q^m i^n}{B^p d^q} \quad (2.16)$$

dove:

$Q_s$  : portata solida

$Q$  : portata liquida

$B$  : larghezza del corso d'acqua

$d$  : diametro della particella di sedimento

$i$  : pendenza longitudinale del corso d'acqua

$\alpha, m, n, p, q$  : costanti da determinare

Come si osserva dalla (2.16) la portata solida di fondo è direttamente proporzionale alla portata liquida e alla pendenza ed inversamente proporzionale alla larghezza del fondo e al diametro dei sedimenti. In altre parole al crescere dello sforzo tangenziale (2.5) aumenta la quantità di

sedimenti che può essere mobilitata dalla corrente, e quindi aumenta la portata solida. Inoltre se si stringe la larghezza del canale, a parità di portata liquida e pendenza, aumenta il tirante e di conseguenza lo sforzo tangenziale. In sostanza la (2.16) corrisponde alla cosiddetta “bilancia di Lane” (1953) che esprime, adottando esponenti pari all’unità, le variazioni di portata solida in risposta alle caratteristiche idrauliche e sedimentologiche del corso d’acqua.

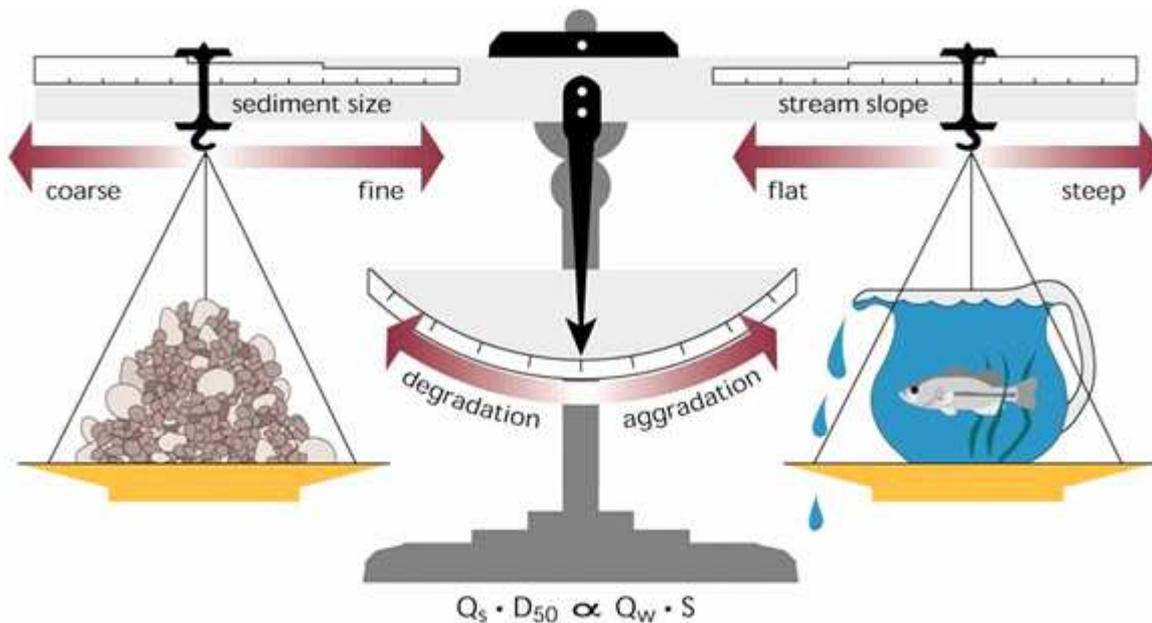


Figura 2.2 – la bilancia di Lane (1953) esprime l’equilibrio tra la portata solida, liquida, la pendenza e la larghezza del corso d’acqua

Il trasporto in sospensione consiste nella parte di sedimenti aventi una velocità di caduta sufficientemente bassa a tal punto da venire trasportati dalla corrente senza toccare il fondo.

I sedimenti vengono mantenuti in sospensione per effetto della turbolenza e consistono nelle particelle di diametro più piccolo come la sabbia, il limo o l’argilla.

Il confine tra trasporto di fondo e sospensione non è molto definito in quanto il fatto che una particella sia in sospensione o no dipende soprattutto dalla velocità della corrente. È così semplice immaginare che una particella faccia parte del trasporto di fondo oppure del trasporto in sospensione al variare del flusso nel canale.

Ricordando l’equazione per il trasporto di un tracciante neutro e considerando un moto prevalentemente orizzontale, per cui valgono le seguenti condizioni:

$$\overline{u_s} = \overline{u} \tag{2.17}$$

$$\overline{v_s} = \overline{v} \tag{2.18}$$

$$\overline{w_s} = -w_s \quad (2.19)$$

dove:

$\overline{u_s}$  : velocità della particella di sedimento in direzione  $x$  mediata sulla turbolenza

$\overline{v_s}$  : velocità della particella di sedimento in direzione  $y$  mediata sulla turbolenza

$\overline{w_s}$  : velocità della particella di sedimento in direzione  $z$  mediata sulla turbolenza

$\overline{u}$  : velocità della corrente in direzione  $x$  mediata sulla turbolenza

$\overline{v}$  : velocità della corrente in direzione  $y$  mediata sulla turbolenza

$\overline{w}$  : velocità della corrente in direzione  $z$  mediata sulla turbolenza

si ottiene:

$$\frac{\partial \overline{c}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{cu}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{cv}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{cw_s}}{\partial z} - \varepsilon_T \left( \frac{\partial^2 \overline{c}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{c}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{c}}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (2.20)$$

dove:

$\overline{w_s}$  : velocità della particella di sedimento in direzione  $z$  mediata sulla turbolenza

$\overline{u}$  : velocità della corrente in direzione  $x$  mediata sulla turbolenza

$\overline{v}$  : velocità della corrente in direzione  $y$  mediata sulla turbolenza

$\overline{c}$  : concentrazione dei sedimenti sospesi mediata sulla turbolenza

$\varepsilon_T$  : coefficiente di diffusione turbolenta

considerando un moto piano uniforme la (2.20) si semplifica come segue:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \overline{cw_s} + \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_T \overline{c}) \right) = 0 \quad (2.21)$$

dove:

$\overline{w_s}$  : velocità della particella di sedimento in direzione  $z$  mediata sulla turbolenza

$\overline{c}$  : concentrazione dei sedimenti sospesi mediata sulla turbolenza

$\varepsilon_T$  : coefficiente di diffusione turbolenta

il termine tra parentesi rappresenta il flusso verticale netto. In condizioni di equilibrio tale flusso deve essere nullo per cui si ottiene:

$$\overline{c w_s} + \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_T \overline{c}) = 0 \quad (2.22)$$

dove:

$\overline{w_s}$  : velocità della particella di sedimento in direzione  $z$  mediata sulla turbolenza

$\overline{c}$  : concentrazione dei sedimenti sospesi mediata sulla turbolenza

$\varepsilon_T$  : coefficiente di diffusione turbolenta

la (2.22) porge la seguente soluzione:

$$\overline{c}(z) = c_0 \exp\left(-\frac{w_s z}{\varepsilon_T}\right) \quad (2.23)$$

dove:

$\overline{c}$  : concentrazione dei sedimenti sospesi mediata sulla turbolenza

$c_0$  : concentrazione dei sedimenti sospesi al fondo

$w_s$  : velocità della particella di sedimento in direzione  $z$

$\varepsilon_T$  : coefficiente di diffusione turbolenta

Questa equazione è anche conosciuta come la soluzione di *Lane*. Tuttavia esistono soluzioni più accurate che considerano  $\varepsilon_T$  non costante come la soluzione di *Rouse*:

$$\bar{c}(z) = c_0 \left[ \frac{1-z/h}{z/h} \cdot \frac{a/h}{1-a/h} \right]^{w_s / k \cdot u^*} \quad (2.24)$$

dove:

$\bar{c}$ : concentrazione dei sedimenti sospesi mediata sulla turbolenza

$c_0$ : concentrazione dei sedimenti sospesi al fondo

$w_s$ : velocità della particella di sedimento in direzione  $z$

$u^*$ : velocità di attrito

$h$ : tirante d'acqua

$a$ : spessore del sottostrato limite laminare

$k$ : costante di Von Karman

Il trasporto di dilavamento è la parte di sedimenti trasportata dalla corrente che rimane sempre in prossimità della superficie libera. La composizione del trasporto di dilavamento è ben distinta perché quasi interamente costituita da materiale assente nel fondo del corso d'acqua. Generalmente le particelle in questione tendono ad essere molto piccole come l'argilla e il limo ma anche alcune sabbie fini.

Una più precisa distinzione tra le varie modalità di trasporto solido può esser fatta in base al numero di *Rouse*, che esprime il rapporto tra la velocità di caduta di una particella in acqua ferma e la velocità di mescolamento turbolenta:

$$R = \frac{w_s}{k \cdot u_*} \quad (2.25)$$

dove:

$w_s$ : velocità di caduta della particella in acqua ferma

$u_*$ : velocità di attrito

$k$  è la costante di Von Karman che vale 0.4.

La seguente tabella fornisce la classificazione delle varie modalità di trasporto in funzione del numero di *Rouse*.

<i>Modalità di trasporto</i>	<i>Numero di Rouse</i>
<i>Inizio del moto</i>	$R < 7.5$
<i>fondo</i>	$2.5 < R < 7.5$
<i>sospensione: 50% sospeso</i>	$1.2 < R < 2.5$
<i>sospensione: 100% sospeso</i>	$0.8 < R < 1.2$
<i>dilavamento</i>	$R < 0.8$

Oltre alla precedente distinzione tra le varie modalità di trasporto esistono anche altri effetti presenti nei corsi d'acqua naturali controllati dalla non-uniformità della granulometria, come per esempio:

- *corazzamento* del fondo (*armoring*)
- *pavimentazione* del fondo (*pavement*)
- distinzione tra la composizione del materiale del fondo e quello trasportato

Il *corazzamento* del fondo avviene quando la corrente fluida rimuove il materiale più fino e rimane solamente il materiale più grosso. Secondo la bilancia di *Lane*, se aumenta la capacità di trasporto della corrente o diminuisce la quantità di materiale trasportato, il corso d'acqua reagisce aumentando il diametro dei sedimenti. Questo effetto si può osservare, per esempio, a valle di una diga.

La *pavimentazione* del fondo è quella caratteristica che si osserva sia nei corsi d'acqua naturali che nei canali di laboratorio, per cui lo strato superficiale del fondo è caratterizzato da materiale più grossolano rispetto lo strato sottostante (substrato).

La distinzione tra materiale di fondo e materiale trasportato si può osservare comunemente nei corsi d'acqua in quanto il materiale che compone il fondo risulta più grossolano rispetto il materiale trasportato. Questo si può spiegare anche attraverso la bilancia di *Lane* osservando che minore è il diametro dei sedimenti e maggiore è il trasporto solido. Il diametro è un misuratore della mobilità intrinseca delle particelle, ovvero le particelle di minor diametro si muovono più velocemente rispetto le particelle più grosse. Questo effetto è però mitigato da un altro fenomeno definito come *nascondimento ed esposizione* descritto da *Parker e Klingeman* (1982), in cui le particelle di diametro maggiore esercitano un'azione di protezione nei confronti delle particelle di minor diametro. Il risultato è che le particelle più fini vengono rallentate da quelle più grosse, mentre quelle maggiori, essendo più esposte, viaggiano più velocemente.

Questo fenomeno può essere descritto introducendo dei coefficienti correttivi nelle formule di trasporto solido, che prendono il nome di coefficienti di *esposizione e protezione* (*hiding and exposure coefficients*) così la (2.16) diventa:

$$Q_s = \alpha \frac{Q i^n}{B^p d^q} \xi \quad (2.26)$$

dove:

$Q_s$  : portata solida

$Q$  : portata liquida

$B$  : larghezza del corso d'acqua

$d$  : diametro della particella di sedimento

$i$  : pendenza longitudinale del corso d'acqua

$\alpha, m, n, p, q$  : costanti da determinare

$\xi$  : coefficiente di *esposizione e protezione*

È possibile, a questo punto, immaginare di suddividere i sedimenti trasportati in classi granulometriche, ciascuna delle quali presenti secondo una certa percentuale  $\beta_i$  rispetto il totale.

La portata solida (2.26), riferita a ciascuna classe granulometrica, può essere riscritta come segue:

$$Q_{si} = \alpha \beta_i \frac{Q i^n}{B^p d_i^q} \xi_i \quad (2.27)$$

dove:

$Q_{si}$  : portata solida della frazione granulometrica i-esima

$Q$  : portata liquida

$B$  : larghezza del corso d'acqua

$d_i$  : diametro medio dei sedimenti della frazione granulometrica i-esima

$i$  : pendenza longitudinale del corso d'acqua

$\alpha, m, n, p, q$  : costanti da determinare

$\xi_i$  : coefficiente di *esposizione e protezione* della frazione granulometrica i-esima

$\beta_i$  : percentuale della frazione granulometrica i-esima rispetto il totale

il coefficiente di *esposizione e protezione* può essere espresso come segue:

$$\xi_i = \left( \frac{d_i}{\bar{d}} \right)^s \quad (2.28)$$

dove:

$d_i$  : diametro medio dei sedimenti della frazione granulometrica i-esima

$\bar{d}$  : diametro medio complessivo dei sedimenti

Si osserva che quando  $s = 0$   $\xi_i = 1$  e i sedimenti si muovono indipendentemente gli uni dagli altri (concetto di mobilità intrinseca).

Quando  $s > 0$   $d_i > \bar{d}$   $\xi_i > 1$  i sedimenti più grossi si muovono più velocemente e viceversa i più piccoli meno velocemente.

Quando  $s = q$  la formula (2.27) risulta indipendente da  $d_i$  perciò i sedimenti viaggiano tutti alla stessa velocità indipendentemente dalla loro grandezza (concetto di ugual mobilità o *equal-mobility* introdotto da *Parker* (1982)).

### 2.2.2 Il trasporto eolico

Con il termine eolico si intende il trasporto di sedimenti che avviene per mezzo del vento. Questo processo porta alla formazione delle dune di sabbia e delle *increspature*. Un valore tipico della dimensione delle particelle di sabbia in questione non supera il millimetro di diametro (sabbia fine), in quanto il vento è un fluido a bassa densità e viscosità e non può esercitare uno sforzo tangenziale molto grande sulla superficie, se confrontato, per esempio, con l'acqua. Peraltro il sollevamento e il trasporto dei sedimenti è favorito dal 'bombardamento' delle stesse particelle che cadono sul fondo.

Il trasporto di sedimenti di tipo eolico è comune nelle spiagge e nelle regioni aride della Terra, dove l'assenza di vegetazione non impedisce la presenza, e il movimento, delle particelle di sabbia.

Le correnti di vento sono capaci di sollevare le polveri fino alla parte più alta dell'atmosfera e di trasportarle a notevoli distanze dal luogo d'origine. E' accaduto infatti che le polveri provenienti dal deserto del *Sahara* si siano depositate nelle Isole *Canarie* e nei *Caraibi*, mentre le polveri del deserto del *Gobi* abbiano raggiunto l'ovest degli *Stati Uniti*.

### **2.2.3 Il trasporto costiero**

Il trasporto di sedimenti costiero avviene negli ambienti prossimi alla costa ed è dovuto al moto ondoso ed alle correnti. Alla foce dei fiumi il trasporto fluviale e quello costiero si uniscono creando il delta dei fiumi. Questa tipologia di trasporto è responsabile della morfologia delle coste come le spiagge e i lidi.

### **2.2.4 Il trasporto glaciale**

Dal momento in cui avviene lo smottamento di un ghiacciaio avviene anche un trasporto di materiale solido di ogni dimensione. I ghiacciai possono trasportare i materiali di dimensioni maggiori per cui le aree dei depositi glaciali spesso contengono un gran numero di massi erratici, molti dei quali hanno la dimensione di svariati metri. I ghiacciai nel tempo polverizzano le rocce, per il fenomeno del *crioclastismo*, e le trasformano nella cosiddetta "*farina di roccia*" che è così fina che può essere trasportata dai venti e creare le *löss* centinaia di chilometri più a valle, ovvero dei depositi di sedimenti formati dal trasporto eolico.

I sedimenti trasportati dai ghiacciai spesso si muovono lungo i canali di flusso ed appaiono in superficie delle zone di ablazione.

### **2.2.5 I movimenti franosi**

In questo caso il trasporto solido è dovuto ad una varietà di processi in grado di far muovere la *regolite*, ovvero materiale eterogeneo derivante dalla disgregazione delle rocce, lungo un versante di un pendio per effetto della gravità. Questi processi sono correlati al *soil creep*, cioè la lenta deformazione della roccia o del suolo per effetto di una modesta pendenza, al *tree throw*, cioè alle cavità create dall'apparato radicale delle piante, oppure alle tane scavate dagli animali, ed infine ai movimenti franosi.

Questi processi generalmente si combinano per dare al pendio un profilo riconducibile alla soluzione dell'equazione di diffusione, dove il coefficiente di diffusione è relazionato alla facilità di trasporto di un particolare pendio. Per questa ragione le creste dei rilievi montuosi hanno un profilo

parabolico con concavità verso l'alto che si trasforma in un profilo con concavità verso il basso in corrispondenza delle valli.

All'aumentare della pendenza il fenomeno di trasporto è sempre più riconducibile ad un movimento franoso. Comunque il processo è meglio descritto da una equazione di diffusione non lineare in cui il coefficiente di diffusione tende all'infinito quando l'angolo di inclinazione del pendio tende al valore di riposo.

### 2.3 Formule di trasporto solido

Le formule di trasporto solido sono state oggetto di classificazione da diversi autori. È possibile ricordare, a titolo di esempio, la trattazione fornita dall' "*Erosion and sedimentation manual* " a cura dell'U.S.B.R. (2006), oppure *Talukdar et al.* (2012) in cui i differenti approcci per definire il trasporto solido di fondo sono stati classificati come segue:

- approccio dello sforzo tangenziale
- approccio della pendenza della linea dell'energia
- approccio della portata liquida
- approccio probabilistico
- approccio dell'ugual mobilità

I primi approcci, ed i più popolari, si basano sul valore critico di variabili come lo sforzo tangenziale, l'energia di dissipazione della particella, la portata o la velocità.

Questi approcci assumono l'assenza di trasporto finché il valore della variabile considerata non supera il corrispondente valore critico.

Ci sono stati numerosi studi basati su questo concetto, compiuti sia su canali naturali che in canali di laboratorio, ed è presente in letteratura un elevato numero di relazioni sperimentali. L'uso di queste equazioni dipende però dalle condizioni entro cui sono state ricavate.

Gli altri approcci si basano sulla probabilità di movimento del materiale al fondo (*Einstein*, 1950). Comunque il livello di complessità di questi metodi comporta una difficile applicazione a riguardo dei canali naturali (*Yang*, 1996).

Sono stati formulati un gran numero di modelli che descrivono il trasporto al fondo, come per esempio quello di *Meyer-Peter e Müller* (1948), *Bagnold* (1956, 1966), *Einstein* (1950), *Yalin*

(1963), *Chang et al.* (1967). Altri autori che possono essere menzionati sono *Engelund e Hansen* (1967), *Akers e White* (1973), *Engelund e Fredsøe* (1976) e *Van Rijn* (1984).

*Mahmood* (1980) ha comparato tra loro dodici funzioni per studiarne l'accuratezza. Il paragone si basava su un campo di 97 misurazioni di sedimenti e di variabili idrauliche del fiume *Missouri*. Comparando i risultati, *Mahmood* (1980) ha rilevato che con i dati a quel tempo disponibili, il metodo *Toffaletti* (1968) restituiva i risultati migliori.

*Bathurst et al.* (1987) hanno verificato l'applicazione di 6 formule per il trasporto solido al fondo nei fiumi di montagna a pendenza elevata. Hanno concluso che la portata solida più attendibile era quella fornita dalla relazione di *Schoklitsh* (1934).

*Gomez e Church* (1989) hanno utilizzato un set di 410 prove per testare 12 equazioni di trasporto solido per canali a fondo ghiaioso ed hanno concluso che nessuna delle formule testate ha dato risultati attendibili a causa della complessità del fenomeno. Hanno però notato che le formule che danno risultati migliori sono quelle basate sulla dissipazione dell'energia della particella, come quella di *Einstein* (1950) e di *Parker et al.* (1982).

*Reid et al* (1996) hanno verificato alcune formule nel deserto del *Negev* in *Israele* ed hanno trovato che la formula di *Meyer - Peter e Müller* (1948) e *Parker* (1990) hanno dato i risultati migliori, ciò dipendendo anche dal fatto di aver considerato solo fiumi a fondo ghiaioso.

*Almedeij e Diplas* (2003) hanno considerato la formula di *Meyer - Peter e Müller* (1948), *Einstein* (1950), *Parker* (1979) e *Parker* (1992) su tre fiumi naturali a fondo ghiaioso usando un totale di 174 osservazioni sperimentali. Hanno riscontrato che tali formule davano risultati con accuratezza diversa al variare del sito di rilevamento.

*Bravo-Espinosa et al.* (2003) hanno accertato che le equazioni di *Parker* (1982) e *Meyer - Peter e Müller* (1948) sono le più affidabili.

In conclusione si può dire che sebbene siano disponibili un gran numero di dati e di osservazioni, sia su canali naturali, che su canali di laboratorio, risulta comunque difficile trovare buoni dati con cui calibrare le formule di trasporto solido.

Per condurre le analisi sono preferibili i canali di laboratorio a causa del maggior controllo delle caratteristiche idrauliche e del materiale del fondo (*Cheng e Stone*, 2008). Invece le misurazioni sul campo includono molti fattori complicati come misurazioni della granulometria del materiale del fondo, la geometria non uniforme del canale, e la variabilità del flusso che influenzano la qualità dei dati rilevati.

È quindi molto difficile misurare accuratamente il flusso solido e al momento non esiste una formula universale che descriva univocamente il fenomeno (*Reid et al.*, 1996).

*Einstein* (1950) ha affermato a proposito che il moto di sedimenti e il comportamento dei fiumi sono fenomeni naturali complessi che coinvolgono un gran numero di variabili.

Oltre agli approcci accennati precedentemente è possibile approfondire ulteriormente la distinzione evidenziando la variabile critica in esame, il già citato *Mahmood* (1980) ha classificato le formule di trasporto, distinguendo le sei famiglie di approcci che verranno elencate di seguito.

### 2.3.1 Approccio dello sforzo tangenziale

L'assunzione alla base della teoria è che, quando le condizioni di flusso verificano il criterio del movimento incipiente, le particelle di sedimento poste sul fondo iniziano a muoversi. Il trasporto delle particelle sul fondo è funzione della forza esercitata dal fluido per unità di area (la forza di resistenza tra il fluido e la particella e lo sforzo tangenziale) agente sul fondo. Il moto incipiente delle particelle avviene quando il parametro di *Shields* è maggiore del valore critico. Tali parametri possono essere espressi nel modo seguente:

$$\theta = \frac{\tau}{(\gamma_s - \gamma)d} \quad (2.29)$$

$$\theta_c = \frac{\tau_c}{(\gamma_s - \gamma)d} \quad (2.30)$$

dove:

$\tau$  : sforzo tangenziale

$\tau_c$  sforzo tangenziale critico

$\gamma$ : peso specifico del fluido

$\gamma_s$ : peso specifico del sedimento

$d$  : diametro medio dei sedimenti

*Shields* (1936) è stato il primo a definire lo sforzo tangenziale incipiente con cui le particelle sul fondo sono sul punto di muoversi per mezzo di un flusso unidirezionale. La formula che consente di determinare lo sforzo tangenziale critico è stata formulata come:

$$\frac{q_b \gamma_s}{q \gamma \cdot i} = 10 \frac{\tau - \tau_c}{(\gamma_s - \gamma) d} \quad (2.31)$$

dove:

$q$  : portata fluida per unità di larghezza,

$q_b$  : la portata solida al fondo per unità di larghezza

$i$  : pendenza del corso d'acqua

### 2.3.2 Approccio della pendenza della linea dell'energia

Il fenomeno del trasporto di sedimenti è il risultato dell'interazione di molti parametri fisici che possono essere considerati una funzione dell'altro. Un esempio è lo sforzo di tangenziale che dipende direttamente dalla pendenza e dalla scabrezza del fondo. L'approccio della pendenza della linea dell'energia mette quindi in evidenza queste due grandezze che intervengono nella determinazione dello sforzo tangenziale. Una delle formule maggiormente utilizzata negli esperimenti di laboratorio, e nelle elaborazioni numeriche, è la formula di *Meyer - Peter e Müller* (1948). Essa permette di stimare la portata solida al fondo di un canale a cielo aperto in funzione dell'eccesso (rispetto al suo valore critico) dello sforzo tangenziale esercitato dalla corrente. La formula di *Meyer - Peter e Müller* (1948) è espressa come:

$$\left[ \frac{q_s (\gamma_s - \gamma)}{\gamma_s} \right] \left( \frac{\gamma}{g} \right)^{1/3} \frac{0.25}{(\gamma_s - \gamma) d} = \frac{(K_s / K_r)^{3/2} \gamma \cdot h \cdot i}{(\gamma_s - \gamma) d} - 0.047 \quad (2.32)$$

dove:

$$i = \frac{u^2}{K_s^2 h^{4/3}} \quad (2.33)$$

$$i_r = \frac{u^2}{K_r^2 h^{4/3}} \quad (2.34)$$

$$K_s = \frac{21.1}{d^{1/6}} \quad (2.35)$$

$$K_r = \frac{26}{d_{90}^{1/6}} \quad (2.36)$$

dove:

$i$  : pendenza del corso d'acqua

$i_r$  : perdita di energia dovuta alla resistenza del grano

$K_s$  : coefficiente di scabrezza di *Strickler*

$K_r$  : coefficiente di scabrezza di *Müller*

$d_{90}$  : diametro del passante 90%

$\gamma$  : peso specifico del fluido

$\gamma_s$  : peso specifico del sedimento

### 2.3.3 Approccio della portata liquida

*Sckoklitsh* (1934) ha asserito che l'utilizzo del tirante d'acqua nella relazione dello sforzo tangenziale non è appropriato per la determinazione del moto incipiente nel caso di canali naturali con pendenze elevate. Lo stesso autore ha suggerito inoltre che risultati migliori si sarebbero ottenuti con l'utilizzo di una portata specifica formulata come segue:

$$q_b = 2500 \cdot i^{3/2} (q - q_c) \quad (2.37)$$

$$q_c = 0.26 \left( \frac{\gamma_s - \gamma}{\gamma} \right)^{5/3} \frac{d^{3/2}}{i^{7/6}} \quad (2.38)$$

dove:

$q_b$  : portata solida di fondo

$q_c$  : portata critica con cui i sedimenti cominciano a muoversi.

$i$  : pendenza del corso d'acqua

$d$  : diametro medio dei sedimenti

$\gamma$  : peso specifico del fluido

$\gamma_s$ : peso specifico del sedimento

### 2.3.4 Approccio probabilistico

Un cambiamento più radicale per quanto riguarda la previsione del trasporto solido al fondo è stato proposto da *Einstein* (1942, 1950) che ha presentato una formula basata sul concetto di probabilità. *Einstein* (1942) ha affermato che una particella di sedimento si muove se la forza di sollevamento idrodinamica eccede il peso immerso della particella stessa. Dal momento in cui la particella è in moto la probabilità che la stessa si depositi nuovamente è assunta uguale per ogni punto del fondo. Inoltre la distanza media di percorrenza di ogni particella che si muove al fondo è assunta costante.

Perciò *Einstein* (1942) ha ottenuto una relazione tra il parametro del trasporto di fondo  $\phi$  con il parametro di flusso  $\psi$  definito come:

$$\psi = \frac{(\gamma_s - \gamma)d}{\tau} \quad (2.39)$$

dove:

$\tau$ : sforzo tangenziale

$d$ : diametro medio dei sedimenti

$\gamma$ : peso specifico del fluido

$\gamma_s$ : peso specifico del sedimento

Più tardi *Brown* (1950) ha modificato la formula di *Einstein* (1942) per dare la meglio nota formula di *Brown – Einstein* espressa come segue:

$$\phi = \frac{q_b}{K [g(\gamma_s - \gamma)d^3]^{1/2}} \quad (2.40)$$

$$K = \left[ \frac{2}{3} + \frac{36v^2}{gd^3 \left( \frac{\gamma_s}{\gamma} - 1 \right)} \right]^{1/2} - \left[ \frac{36v^2}{gd^3 \left( \frac{\gamma_s}{\gamma} - 1 \right)} \right]^{1/2} \quad (2.41)$$

dove:

$q_b$  : portata solida di fondo

$d$  : diametro medio dei sedimenti

$\gamma$  : peso specifico del fluido

$\gamma_s$  : peso specifico del sedimento

$\nu$  : viscosità cinematica

$g$  : accelerazione di gravità

Il parametro  $K$  tiene conto della velocità di caduta della particella di sedimento. Quando  $\psi \leq 5.5$ ,  $\phi = 40/\psi^3$  e per  $\psi > 5.5$ ,  $\phi = 2.15 \exp(-0.39\psi)$ .

### 2.3.5 Approccio di regressione

La limitazione di definire complessi fenomeni mediante precise formulazioni matematiche che governano il trasporto di fondo, hanno condotto i ricercatori ad usare la seguente relazione:

$$q_b = \gamma_s \left( \frac{\gamma_s - \gamma}{\gamma} gh^3 \right)^{1/2} \left[ \frac{u}{\left( \frac{\gamma_s - \gamma}{\gamma} gh \right)^{1/2}} \left\{ 0.667 \left( \frac{d}{h} \right)^{2/3} + 0.14 \right\} - 0.778 \left( \frac{d}{h} \right)^{2/3} \right] \quad (2.42)$$

dove:

$q_b$  : portata solida di fondo

$d$  : diametro medio dei sedimenti

$\gamma$  : peso specifico del fluido

$\gamma_s$  : peso specifico del sedimento

$h$  : tirante d'acqua

$g$  : accelerazione di gravità

$u$  : velocità della corrente

### 2.3.6 Approccio di ugual mobilità

Sulla base degli esperimenti condotti in *Oak Creek* (Milhous, 1973) *Parker et al.* (1982) hanno introdotto il concetto di uguale mobilità (*equal-mobility*) che stabilisce che le condizioni di moto incipiente per ogni frazione di sedimento è indipendente dalla dimensione del grano. Come conseguenza dell'*equal-mobility* la portata solida al fondo può essere calcolata mediante un unico diametro rappresentativo (*Parker et al.*,1982) espresso come:

$$q_b = \frac{W^* u_*^3 \rho_s}{\left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right)g} \quad (2.43)$$

dove:

$W^*$  : frazione di sedimenti trasportata

$u_*$  : velocità di attrito

$\rho$  : densità del fluido

$\rho_s$  : densità del sedimento

$g$  : accelerazione di gravità

$W^*$  assume valori diversi al variare del rapporto  $\theta_{50} = \theta / \theta_c$

$$W^* = \begin{cases} 11.2 \left(1 - \frac{0.822}{\theta_{50}}\right)^{4.5} & \theta_{50} > 1.65 \\ 0.0025 \theta_{50}^{1/4} & \theta_{50} < 0.95 \\ 0.0025 \exp(14.2(\theta_{50} - 1) - 9.28(\theta_{50} - 1)^2) & 1.65 > \theta_{50} > 0.95 \end{cases} \quad (2.44)$$

<b>SHEAR STRESS APPROACH</b>	
<i>Shields</i> (1936)	$\frac{q_b \gamma_s}{q \gamma S} = 10 \frac{\tau_0 - \tau_c}{(\gamma_s - \gamma) d}$
<i>Wilson</i> (1966)	$\Phi = 12(\theta - \theta_c)^{3/2}$
<i>Fernandez-Luque and van Beck</i> (1976)	$\Phi = 5.7(\theta - \theta_c)^{3/2}$
<i>Graf and Suszka</i> (1987)	$\Phi = \begin{cases} 10.4\theta^{1.5} (1 - \frac{0.045}{\theta})^{2.5} & \theta < 0.068 \\ 10.4\theta^{2.5} & \theta \geq 0.068 \end{cases}$
<i>Ashmore</i> (1988)	$\Phi = 3.11(\theta - 0.045)^{1.37}$
<i>Low</i> (1989)	$q_b = \frac{6.42}{(s-1)^{0.5}} (\theta - \theta_c) d u s^{0.5}$
<i>Wiberg and Smith</i> (1989)	$\Phi = \alpha_s (\theta - \theta_c)^{3/2}$ $\alpha_s = 9.64(\theta^{0.166})$
<i>Soulsby</i> (1997)	$\Phi = 5.1(\theta - \theta_c)^{3/2}$
<i>Graf</i> (1998)	$\Phi = 8(\theta - \theta_c)^{3/2}$
<i>Ribberink</i> (1998)	$\Phi = 11(\theta - \theta_c)^{1.65}$
<i>Wong and Parker</i> (2006a)	$\Phi = 4.93(\theta - 0.047)^{1.6}$
<i>Wong and Parker</i> (2006b)	$\Phi = 3.97(\theta - 0.0495)^{3/2}$
<b>ENERGY SLOPE APPROACH</b>	
<i>Meyer-Peter et al.</i> (1934)	$\frac{0.04q_b^{2/3}}{d} = \frac{q^{2/3} S}{d} - 17$
<i>Meyer-Peter and Müller</i> (1948)	$\Phi = \begin{cases} 8(\theta - \theta_c)^{3/2} & \theta \geq \theta_c \\ 0 & \theta < \theta_c \end{cases}$
<b>DISCHARGE APPROACH</b>	
<i>Schoklitsch</i> (1934)	$q_b = \frac{2.5}{s} S^{3/2} (q - q_c)$ $q_c = 0.26(s-1)^{5/3} \left( \frac{d^{3/2}}{s^{7/6}} \right)$
<b>PROBABILISTIC APPROACH</b>	
<i>Einstein</i> (1950)	$\Phi = \begin{cases} \frac{K \exp(-0.391/\theta)}{0.465} & \theta < 0.182 \\ 40K\theta^3 & \theta \geq 0.182 \end{cases}$ where $K = \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{36}{d_s^3}} - \sqrt{\frac{36}{d_s^3}}$
<i>Parker</i> (1979)	$\Phi = 11.20 \frac{(\theta - 0.03)^{4.5}}{\theta^3}$
<b>REGRESSION APPROACH</b>	

<i>Yalin (1963)</i>	$\Phi = 0.635r\sqrt{\theta} \left[ 1 - \frac{1}{\sigma r} \ln(1 + \sigma r) \right]$ $r = \frac{\theta}{\theta_c} - 1, \quad \sigma = 2.45 \frac{\sqrt{\theta_c}}{s^{0.4}}$
<i>Engelund and Hansen (1967)</i>	$\Phi = 0.05 \left( \frac{u}{u_*} \right)^2 \theta^{5/2}$
<i>Ashida and Michiue (1972)</i>	$\Phi = 17(\theta - \theta_c) \left[ (\theta)^{1/2} - (\theta_c)^{1/2} \right]$
<i>Engelund-Fredsoe (1976)</i>	$\Phi = 18.74(\theta - \theta_c) \left[ (\theta)^{1/2} - 0.7(\theta_c)^{1/2} \right]$
<i>Nelson (1988)</i>	$\Phi = 12\theta^{1/2}(\theta - \theta_c)$
<i>Madsen (1991)</i>	$\Phi = (\theta^{1/2} - 0.7\theta_c^{1/2})(\theta - \theta_c)$
<i>Fredsoe and Deigaard (1992)</i>	$q_b = \frac{30}{\pi}(\theta - \theta_c) \left[ \theta^{0.5} - 0.7\theta_c^{0.5} \right]$
<i>Van Rijn (1993)</i>	$\Phi = \frac{0.053}{d_*^{0.3}} \left( \frac{\theta}{\theta_c} - 1 \right)^{2.1}$
<i>Nino and Garcia (1994)</i>	$\Phi = \frac{12}{\mu_d} (\theta^{1/2} - 0.7\theta_c^{1/2})(\theta - \theta_c), \quad \mu_d = 0.23$
<i>Julien (1995)</i>	$\Phi = \begin{cases} 2.15e^{-0.391/\theta} & \theta < 0.18 \\ 40\theta^3 & 0.18 \leq \theta \leq 0.52 \\ 15\theta^{1.5} & \theta > 0.52 \end{cases}$
<i>Julien (2002)</i>	$\Phi = \frac{18\sqrt{gd}^{3/2}\theta^2}{\sqrt{g(s-1)d^3}}$
<i>Abrahams and Gao (2006)</i>	$\Phi = \theta^{1.5} \left( 1 - \frac{\theta_c}{\theta} \right)^{3.4} \frac{u}{u_*}$
<i>Camenen et al. (2006)</i>	$\Phi_b = 12 \theta^{0.5} \exp(-4.5 \frac{\theta_c}{\theta})$
<b>EQUAL MOBILITY APPROACH</b>	
<i>Wilcock (2001)</i>	$q_b = \frac{W_s^* u_*^3 \rho_s}{(s-1)g}, \quad W_s^* = 11.2(1 - 0.846\theta_{50}^{-1/2})^{4.5}$ $\theta = \frac{u_*^2}{(s-1)gd}, \quad \theta_{50} = \frac{\theta}{\theta_c}$
<i>Wilcock-Crowe (2003)</i>	$q_b = \frac{W^* u_*^3 \rho_s}{(s-1)g}, \quad \theta_{50} = \frac{\theta}{\theta_c}, \quad \theta = \frac{u_*^2}{(s-1)gd}$ $W^* = \begin{cases} 14(1 - \frac{0.846}{\theta_{50}^{0.5}})^{4.5} & \theta_{50} \geq 1.35 \\ 0.002(\theta_{50})^{7.5} & \theta_{50} < 1.35 \end{cases}$

## Capitolo 3 Sezione trasversale fluviale di equilibrio

### 3.1 Introduzione

Nel presente capitolo verrà affrontato il problema della determinazione della sezione di equilibrio, che si verifica a lunga scala di tempo, relativa ai corsi d'acqua. Per definizione (*Lane*, 1955) la sezione di equilibrio di un corso d'acqua si verifica quando le sponde ed il fondo non sono erosi in modo significativo dalla corrente fluida. Non si registrano inoltre significativi depositi di sedimenti.

### 3.2 Relazioni empiriche

La geometria di una sezione consiste nella sua larghezza, profondità, lunghezza dei meandri, mentre le variabili idrauliche sono la pendenza media, l'attrito medio al fondo, la velocità media per una determinata portata d'acqua e di sedimenti e le specifiche condizioni al contorno.

*Leopold e Maddock* (1953) hanno espresso le relazioni della geometria idraulica con delle funzioni di potenza della portata della forma:

$$B = aQ^b \quad (3.1)$$

$$h = cQ^f \quad (3.2)$$

$$V = kQ^m \quad (3.3)$$

dove:

$B$  : larghezza del canale

$h$  : la profondità del canale

$V$  : velocità della corrente

$Q$  : portata liquida

$a, b, c, f, k, m$  : parametri da determinare

in aggiunta si possono calcolare anche le seguenti grandezze:

$$n = NQ^p \quad (3.4)$$

$$i = sQ^y \quad (3.5)$$

dove:

$n$ : coefficiente di scabrezza di Manning

$i$ : pendenza del canale

$N, s$ : parametri da determinare

Le variabili idrauliche quali la larghezza, la profondità e la velocità soddisfano l'equazione di continuità che per un canale rettangolare diventa:

$$Q = BhV \quad (3.6)$$

perciò, i coefficienti e gli esponenti delle precedenti relazioni soddisfano le seguenti condizioni:

$$ack = 1 \quad (3.7)$$

$$b + f + m = 1 \quad (3.8)$$

Il primo tipo di analisi è stato condotto da *Leopold e Maddock* (1953) e *Wolman* (1955) che hanno espresso un set di relazioni simili alle precedenti per relazionare le variabili idrauliche con la portata media.

Il secondo tipo di analisi consiste nell'individuare le modifiche della geometria originale per una particolare portata di riferimento con una data frequenza. È implicito nel metodo considerare una appropriata portata di riferimento che risulti dominante nella modifica della geometria.

Le relazioni descritte sono di grande praticità nella previsione delle variazioni geometriche e quindi per il progetto di canali stabili, nei lavori di controllo della portata liquida, negli schemi di irrigazione e nei lavori per il miglioramento di un corso d'acqua.

Secondo *Langbein* (1964), *Langbein e Leopold* (1964), *Yang et al.* (1981) il valore medio delle variabili idrauliche segue necessarie leggi idrauliche ed il principio della minima dissipazione idraulica. Come conseguenza questi valori medi delle variabili sono funzionalmente correlati e corrispondono allo stato di equilibrio di un canale.

*Knighton* (1977) ha osservato che una sezione trasversale di un corso d'acqua subisce dei cambiamenti e nel breve termine tende a raggiungere una condizione di “quasi-equilibrio” in relazione alla portata di regime e alle condizioni al contorno. Le variazioni più marcate della forma del canale possono avvenire in tempi brevi in assenza di flussi e con resistenza della sponda eccezionalmente elevati. Questo suggerisce che l'approccio alla condizione di “quasi-equilibrio” o dello stabilirsi di una nuova configurazione di equilibrio è relativamente rapida.

*Pont* (1972) ha scoperto che la geometria idraulica dei bacini dei fiumi *Green* e *Birkenhood* nel *British Columbia* in *Canada* si discosta significativamente dai risultati precedenti attribuendo il fatto alle recenti glaciazioni dell'area ed al condizionamento che le caratteristiche glaciali hanno sui fiumi. L'autore ha concluso quindi che la condizione di equilibrio non è stata determinata.

*Heede* (1972) ha condotto delle ricerche a riguardo dell'influenza che ha la vegetazione sulla geometria idraulica dei fiumi montani ed ha riscontrato che è stata raggiunta una condizione di equilibrio dinamico.

Nelle tabelle che seguono sono stati proposti i valori dei parametri delle formule precedenti.

Source	Exponent			Drainage area	Conditions
	b	f	m		
Lacey (1929-30)	--	0.33			
Leopold and Maddock (1953)	0.50	0.40	0.10		
Wolman (1955)	0.34	0.45	0.32	Duration = 50	Ephemeral streams ( at $Q$ equalled or exceeded at % of time)
	0.38	0.42	0.32	15	-do-
	0.45	0.43	0.17	2	-do-
	0.42	0.45	0.05	Bankful discharge	-do-
	0.57	0.40	0.03	50	Principal stations at Bradywine Creek and headwaters
	0.58	0.40	0.02	2	-do-
Leopold and Miller (1956)	0.29	0.15	0.58	Sedalia Gully near Sedalia, Colorado	
	0.31	0.20	0.49	Sowbelly Creek near Hat Creek, Nebraska	
Miller (1958)	0.38	0.25	0.39	High mountain streams	
Brush (1961)	0.55	0.36	0.09	Appalachian streams	
Ackers (1964)	0.42	0.43	0.15		
	0.43	0.43	0.14		
	0.53	0.35	0.12		
Langbein (1964)	0.53	0.37	0.10		
Scott (1966)	0.69	0.12	0.19	Perennial rivers	
	0.03	0.48	0.45	Ephemeral streams	
Kellerhals (1966)	0.50	0.40			Regime theory
Blench (1969)	0.50	0.33			Regime theory
Carlston (1969)	0.461	0.383	0.155	10 river basins	
	0.499	0.320	0.180	Yellow River	
Thomes (1970)	0.40	0.34	0.25	Suia-Missu and Araguaia basins, Mato Gross, Brazil	Minimization of error sum of squares
	0.47	0.41	0.04	-do-	$Q$ greater than 1.94
	0.11	0.32	0.59	-do-	$Q$ less than 1.94 cfs
	0.19	0.32	0.56	-do-	Maximization of explained variance $Q$ greater than 5.02 cfs
	0.51	0.50	0.01	-do-	$Q$ less than 15.02 cfs
	0.14	0.36	0.54	Smaller streams	
Ponton (1972)	0.60	0.40	-0.01	Green River	
	0.80	0.44	-0.23	Birkenhead River	
Knighton (1974)	0.61	0.31	0.08		
Smith (1974)	0.60	0.30	0.10		
	0.54	0.23	0.23		
	0.46	0.16	0.38		
Parker (1979)	0.50	0.415	0.085		
Lane and Foster (1980)	0.46	0.46	0.081		
Rhoads (1991)	0.46	0.46	--	Missouri River basin	106,155-1,358,000 sq. Km.
	0.49	0.30		James River basin	655-55810 sq. km
	0.51	0.37		Smokey Hill River	9207-49,880 sq. Km.
Allen, Arnold and Byers (1994)	0.557	0.341	0.104		674 cross sections from 15 states in the conterminous U. S.

Source	Exponent			Drainage area	Conditions
	b	f	m		
	b	f	m		
Leopold and Maddock (1953)	0.26	0.40	0.34		
Leopold et al. (1964)	0.26	0.40	0.34	Midwestern U. S.	
	0.12	0.45	0.43	158 stations in the U. S. A.	
Wolman (1955)	0.04	0.41	0.55	Brandywine River, Pennsylvania	
Leopold and Miller (1956)	0.26	0.33	0.32		
Leopold and Langbein (1962)	0.23	0.42	0.36		Theoretical
Langbein (1964)	-	0.50	0.50	Circulating flume	
	0.23	0.42	0.35	Stable river section	
Scott (1966)	0.35	0.42	0.55		Ephemeral streams
	0.24	0.56	0.20		Perennial streams
Leopold and Skibitzke (1967)	0.16	0.30	0.52	Middlefork Salmon River near Cape Horn	138 sq. Mi.
	0.06	0.43	0.53	Bear Valley Creek near Cape Horn	180 sq. Mi.
	0.04	0.36	0.61	Middlefork Salmon River near Meyers Cave	2020 sq. Mi.
	0.08	0.41	0.52	Big Creek near Big Creek	470 sq. Mi.
	0.27	0.20	0.53	Salmon River at Salmon	2020 sq. Mi.
	0.10	0.40	0.49	Salmon River at Challis	3670 sq. Mi.
Coates (1969)	0.36	0.20	0.44	18 streams in the Appalachian Plateau	13-61 sq. Mi.
Church (1980)	0.22	0.31	0.48	Baffin Island Sandurs	
Stall and Yang (1970)	0.23	0.41	0.36	Big Sandy River, Kentucky	
Wilcox (1971)	0.09	0.36	0.53	Upper Holder Basin	
Heede (1972)	--	0.43	0.52	Fool Creek, Central Rocky Mountains	
	--	0.36	0.34	Ephemeral Streams in Semiarid U. S. A.	
Ponton (1972)	0.21	0.32	0.50	Coast mountain streams, B. C., Canada	
Knighton (1972)	0.29	0.40	0.31	River dean at Addington Hall	Braided reach
	0.11	0.56	0.33	Right distributory	Braided reach
	0.23	0.27	0.50	Left distributory	Braided reach
Richards (1973)	---	0.639	0.296	Rocester	
	---	0.44	0.474	Serlby Park	
	---	0.37	0.57	Yaxall	
	---	0.576	0.32	Draycott	
	---	0.342	0.603	Beedly	
	---		0.568		
	---		0.583		
Dury (1976)	0.543	0.344			
Riley (1978)	0.42	0.41	0.16	Gwydir River	
	0.35	0.48	0.17	Namoi River	
	0.35	0.52	0.13	Barwon River	
	0.38	0.46	0.16	Three rivers	
Williams (1978)	0.49	0.24	0.27		
Betson (1979)	0.245			Watersheds in Kentucky	

Source	Exponent	Exponent	Exponent	Drainage area	Conditions
Lane and Foster (1980)	0.375	0.375	0.25		
	0.32	0.32	0.36		
Abrahams (1984)	0.419	-0.064	0.632	West channel, 8 observations	
	-0.671	0.863	0.753	East channel: 8 observations	
Philips and Harlan (1984)	0.367	0.049	0.580	Blanca Meadow: 20 observations	
	0.419	-0.095	0.67	West channel: 80 observations	
	-0.706	0.912	0.792	East channel: 8 observations	
Rhoads (1991)	0.50	0.34	--	Missouri River basin	252 gaging stations

### 3.3 Soluzioni “fisicamente basate”

Come vedremo in dettaglio nel seguito, l’ipotesi fondamentale per le prime impostazioni delle trattazioni “fisicamente basate” (discusse nei paragrafi 3.3.1 – 3.3.4) consiste nell’assumere le condizioni di movimento incipiente per tutti i punti della sezione. Differiscono da tale impostazione quelle sviluppate successivamente, basate sulla condizione di trasporto trasversale nullo (paragrafo 3.3.5) e quella sviluppata nella presente tesi (3.3.6) basata sull’ipotesi di concentrazione uniforme sulla sezione.

Il moto incipiente è importante per lo studio del trasporto di sedimenti, l’erosione del canale e il progetto della sezione stabile di un canale. A causa della natura stocastica del moto dei sedimenti lungo il letto di un fiume è difficile definire con precisione a quale particolare condizione di flusso la particella comincerà a muoversi. Di conseguenza dipende in misura più o meno rilevante da quale definizione di movimento incipiente viene attribuita dai ricercatori. Essi normalmente usano la terminologia di “moto iniziale della particella”, “moto di più particelle aggregate” , “assenza di movimento” o “moto in condizioni critiche”. Nonostante le diverse definizioni, sono stati compiuti significanti progressi sia teorici che sperimentali.

La seguente Figura 3.1 mostra le forze agenti su una particella di sedimento sferica deposta sul fondo di un corso d’acqua. Per la maggior parte di fiumi naturali, le pendenze sono sufficientemente piccole da poter assumere che la componente della forza gravitazionale in direzione del flusso trascurabile rispetto le altre forze agenti sulla stessa particella.

Le forze considerate sono la forza di *Drag*, la forza di sollevamento, il peso immerso, e la forza d’attrito. Una particella di sedimento è in condizione di moto incipiente quando almeno una delle seguenti condizioni è soddisfatta:

$$F_L = W_S \quad (3.9)$$

$$F_D = F_R \quad (3.10)$$

$$M_O = M_R \quad (3.11)$$

dove:

$M_O$  : momento ribaltante dovuto alla  $F_D$  e  $F_L$

$M_R$  : momento resistente dovuta alla  $F_R$  e  $W_S$

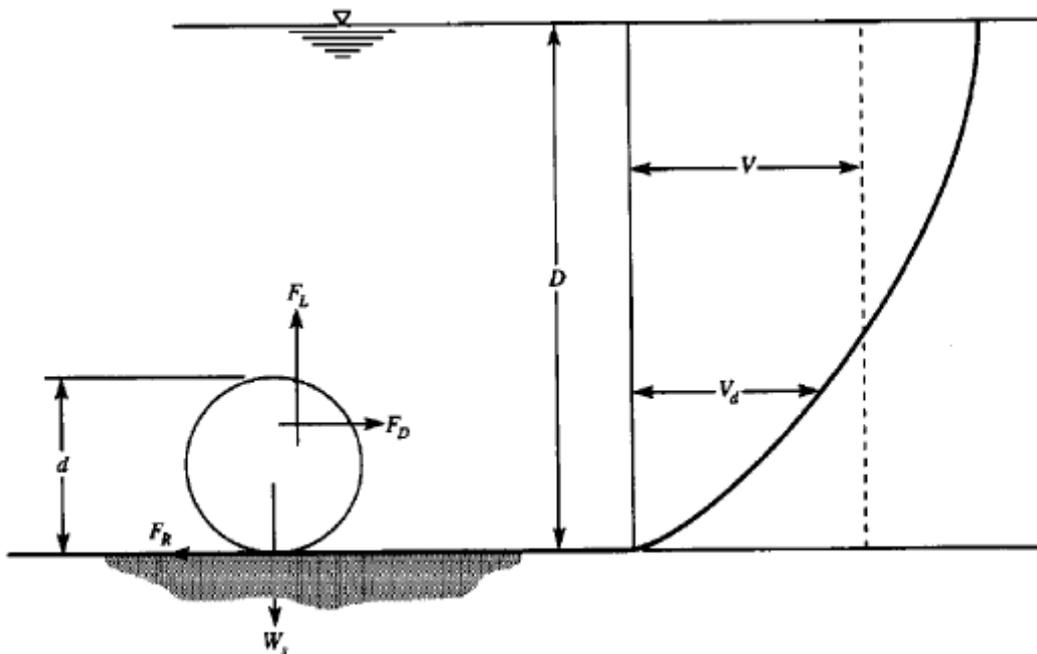


Figura 3.1 – forze agenti su una particella di sedimento (Yang, 1973)

### 3.3.1 Soluzione di Lacey (1930)

Uno dei primi metodi per determinare il profilo della sezione stabile di un corso d'acqua è stata formulata da *Lacey* negli anni trenta e si basa sull'equilibrio di una particella in condizioni di moto incipiente.

Lo sforzo tangenziale di un elemento del fondo è esprimibile come segue:

$$\tau = \gamma h i \frac{dy}{\sqrt{dy^2 + dz^2}} = \gamma h i \cdot \cos \phi \quad (3.12)$$

dove:

$\gamma$ : peso specifico del fluido

$h$ : tirante d'acqua

$i$ : pendenza longitudinale del corso d'acqua

$\phi$ : angolo di inclinazione rispetto il piano orizzontale

$y$ : coordinata trasversale

$z$ : coordinata verticale

assumendo lo sforzo tangenziale appena ricavato pari al valore critico su tutta la sponda secondo l'espressione:

$$\tau_c = \tau_{0c} \left[ \cos \phi \left( 1 - \frac{\tan^2 \phi}{\tan^2 \varphi} \right) \right]^{1/2} \quad (3.13)$$

dove:

$\tau_{0c}$ : sforzo tangenziale critico al centro del corso d'acqua

$\phi$ : angolo di inclinazione rispetto il piano orizzontale

$\varphi$ : angolo a riposo del terreno costituente la sponda

si ottiene:

$$\gamma h i = \gamma_0 i \left[ \cos \phi \left( 1 - \frac{\tan^2 \phi}{\tan^2 \varphi} \right) \right]^{1/2} \quad (3.14)$$

dove:

$\gamma$ : peso specifico del fluido

$h$ : tirante d'acqua

$h_0$  : tirante d'acqua al centro del corso d'acqua

$\phi$  : angolo di inclinazione rispetto il piano orizzontale

$\varphi$  : angolo a riposo del terreno costituente la sponda

assumendo:

$$\frac{dz}{dy} = \tan \phi \quad (3.15)$$

dove:

$z$  : coordinata verticale

$y$  : coordinata trasversale

$\phi$  : angolo di inclinazione rispetto il piano orizzontale

si ottiene:

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \left(\frac{h}{h_0}\right)^2 \tan^2 \varphi - \tan^2 \varphi = 0 \quad (3.16)$$

dove:

$z$  : coordinata verticale

$y$  : coordinata trasversale

$h$  : tirante d'acqua

$h_0$  : tirante d'acqua al centro del corso d'acqua

$\varphi$  : angolo a riposo del terreno costituente la sponda

che porge la seguente soluzione:

$$\frac{h}{h_0} = \cos\left(\frac{\tan \varphi}{h_0} y\right) \quad (3.17)$$

dove:

$h$  : tirante d'acqua

$h_0$  : tirante d'acqua al centro del canale

$\phi$  : angolo di inclinazione rispetto il piano orizzontale

$\varphi$  : angolo a riposo del terreno costituente la sponda

$y$  : coordinata trasversale

Dalla presente formula si deduce che la forma del canale stabile nell'ipotesi di movimento incipiente della particella di sedimento è di forma sinusoidale.

La larghezza della sponda nella condizione di equilibrio incipiente si determina imponendo il valore nullo all'espressione precedente. Si ottiene quindi:

$$B_s = \frac{\pi}{2} \frac{h_0}{\tan \varphi} \quad (3.18)$$

### 3.3.2 Soluzione di Parker (1978)

Questo metodo consiste nell'equilibrio delle forze agenti su una particella in condizioni di moto incipiente. È anche conosciuto con il nome di “metodo del tirante verticale” in quanto le espressioni che seguiranno contengono il tirante d'acqua misurato lungo la verticale.

Il presente metodo prende in considerazione un corso d'acqua a sezione simmetrica in cui le sponde si uniscono molto gradualmente al fondo, ed in corrispondenza del quale il tirante idrico è  $h_0$ .

Si considerano le forze applicate alla particella di sedimento giacente sulla sponda inclinata di un angolo  $\phi$  rispetto il piano orizzontale. Queste forze sono la componente della forza di gravità orientata lungo la sponda, la resistenza di attrito della particella, la forza di *Drag* e la forza di sollevamento dovute al flusso della corrente attorno alla particella.

Indicando con  $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$  il set di versori di una terna di riferimento ortogonale in cui  $e_1$  è orientato in direzione longitudinale e tangente al fondo del corso d'acqua,  $e_2$  è orientato in

direzione trasversale e tangente al fondo, mentre  $e_3$  è orientato in direzione normale al fondo. Le particelle di sedimento sono spinte in direzione longitudinale dallo sforzo tangenziale esercitato dal fluido, in direzione trasversale dalla forza di gravità (questa analisi trascura le correnti secondarie). Il vettore dello sforzo effettivo tangente al fondo è esprimibile come:

$$\vec{T}_{ET} = \alpha \tau_c \vec{e}_1 - \gamma \Delta (1 - p) d \sin \phi \vec{e}_2 \quad (3.19)$$

dove:

$\tau_c$  : sforzo tangenziale critico

$\Delta$  : peso specifico immerso

$\gamma$  : peso specifico del fluido

$p$  : porosità del materiale costituente il fondo

$d$  : diametro della particella di sedimento

$\phi$  : angolo di inclinazione della sponda rispetto il piano orizzontale

$\alpha$  : rapporto tra lo sforzo tangenziale e lo sforzo tangenziale critico:

$$\alpha = \tau / \tau_c$$

mentre lo sforzo tangenziale normale al fondo è:

$$\vec{T}_{EN} = -[\gamma \Delta (1 - p) d \cos \phi - \alpha \beta \tau_c] \vec{e}_3 \quad (3.20)$$

dove:

$\tau_c$  : sforzo tangenziale critico

$\Delta$  : peso specifico immerso

$\gamma$  : peso specifico del fluido

$p$  : porosità del materiale costituente il fondo

$d$  : diametro della particella di sedimento

$\phi$  : angolo di inclinazione della sponda rispetto il piano orizzontale

$\beta$  : rapporto tra la forza di sollevamento e la forza di Drag

$\alpha$  : rapporto tra lo sforzo tangenziale e lo sforzo tangenziale critico:

$$\alpha = \tau / \tau_c$$

La condizione affinché si verifichi il moto incipiente è che la resistenza di attrito di *Coulomb* bilanci lo sforzo tangenziale:

$$|\vec{T}_{ET}| = \mu |\vec{T}_{EN}| \quad (3.21)$$

essendo al centro  $y = 0$ ,  $\phi = 0$ , la relazione precedente fornisce il valore dello sforzo tangenziale critico al centro della sezione:

$$\tau_{c0} = \frac{\mu(1-p)}{\alpha(1+\mu\beta)} \gamma \Delta d \quad (3.22)$$

dove:

$\Delta$ : peso specifico immerso

$\gamma$ : peso specifico del fluido

$p$ : porosità del materiale costituente il fondo

$d$ : diametro della particella di sedimento

$\mu$ : coefficiente d'attrito di Coulomb

$\beta$ : rapporto tra la forza di sollevamento e la forza di Drag

$\alpha$ : rapporto tra lo sforzo tangenziale e lo sforzo tangenziale critico:

$$\alpha = \tau / \tau_c$$

oppure in termini di sforzo tangenziale di *Shields*:

$$\tau_{c0}^* = \frac{\mu(1-p)}{\alpha(1+\mu\beta)} \quad (3.23)$$

dove:

$p$ : porosità del materiale costituente il fondo

$\mu$ : coefficiente d'attrito di Coulomb

$\beta$  : rapporto tra la forza di sollevamento e la forza di Drag

$\alpha$  : rapporto tra lo sforzo tangenziale e lo sforzo tangenziale critico:

$$\alpha = \tau / \tau_c \quad (3.24)$$

Per sedimenti granulari è possibile assumere  $\mu = 0.84$  corrispondente ad un angolo di riposo pari a  $40^\circ$ , ed un appropriato valore  $p = 0.35$ . Il valore di  $\alpha$  corrispondente a  $\tau^*_0 = 0.03$  si dimostra essere 10.06.

Lo sforzo tangenziale misurato in direzione verticale può essere scritto come segue:

$$\tau = \gamma \cdot h \cdot i \cdot \cos \phi \quad (3.25)$$

dove:

$\phi$  : angolo di inclinazione della sponda rispetto il piano orizzontale

$h$  : tirante d'acqua misurato al centro dell'elemento infinitesimo del fondo

$i$  : pendenza longitudinale del canale

rimaneggiando la (3.21) con la (3.24) e la (3.25) e ricordando che  $\tan \phi = -dh / dy$  si ottiene:

$$\left(\frac{h}{h_0}\right)^2 + \left(\frac{1 + \mu\beta}{\mu}\right)^2 \left(\frac{dh}{dy}\right)^2 = \mu^2 \left(\frac{1 + \mu\beta}{\mu} - \beta \frac{h}{h_0}\right)^2 \quad (3.26)$$

dove:

$h$  : tirante d'acqua

$h_0$  : tirante d'acqua al centro della sezione

$\mu$  : coefficiente d'attrito di Coulomb

$\beta$  : rapporto tra la forza di sollevamento e la forza di Drag

introducendo le due condizioni al contorno:

$$h(y = 0) = h_0 \quad (3.27)$$

$$h(y = B/2) = 0 \quad (3.28)$$

la soluzione della (3.26) diventa:

$$\frac{h}{h_0} = \frac{1}{1 - \mu\beta} \left\{ \cos \left( \mu \sqrt{\frac{1 - \mu\beta}{1 + \mu\beta}} \frac{y}{h_0} \right) - \mu\beta \right\} \quad (3.29)$$

dove:

$h$ : tirante d'acqua

$h_0$ : tirante d'acqua al centro del canale

$\mu$ : coefficiente d'attrito di Coulomb

$\beta$ : rapporto tra la forza di sollevamento e la forza di Drag

Il tirante d'acqua al centro della sezione per una sezione in condizioni di equilibrio incipiente può essere determinato imponendo che lo sforzo tangenziale, in corrispondenza del punto d'unione tra la sponda e la parte centrale, sia pari al valore critico. Ricordando l'espressione dello sforzo tangenziale si ottiene:

$$\tau_c^* = \frac{h_0 i}{\Delta d} \quad (3.30)$$

da cui, invertendo la formula:

$$h_0 = \tau_c^* \frac{\Delta d}{i} \quad (3.31)$$

Si osserva che il tirante al centro della sezione appena determinato è valido anche per la soluzione di *Lane* (3.17), in quanto l'ipotesi di partenza consisteva nell'imporre su tutta la sezione lo sforzo tangenziale pari al valore critico.

Il valore dello sforzo tangenziale critico è dipendente dal numero di *Reynolds* della particella come indicato dal diagramma di *Shields*. La relazione tra lo sforzo tangenziale critico di *Shields* e il numero di *Reynolds* della particella può essere determinata dall'equazione proposta da *Brownlie* (1981):

$$\tau_c^* = 0.22R_p^{-0.6} + 0.06\exp(-17.77R_p^{-0.6}) \quad (3.32)$$

dove:

$R_p$  : numero di Reynolds della particella espresso come:

$$R_p = \frac{\sqrt{\Delta g d d}}{\nu} \quad (3.33)$$

$\Delta$  : peso specifico immerso

$g$  : accelerazione di gravità

$d$  : diametro della particella di sedimento

$\nu$  : viscosità cinematica

la larghezza della sponda può infine essere determinata ponendo a zero l'espressione (3.29) e sostituendo ad  $h_0$  l'espressione (3.31)

$$B_s = \tau_c^* \frac{\Delta d}{i\mu} \sqrt{\frac{1+\mu\beta}{1-\mu\beta}} \arccos(\mu\beta) \quad (3.34)$$

### 3.3.3 Soluzione di Ikeda (1982)

*Ikeda* (1982) ha considerato allo stesso modo l'equilibrio delle forze di una particella situata nella sponda di un corso d'acqua in condizione di moto incipiente. Questa soluzione consente di ottenere una stima più accurata della distribuzione dello sforzo tangenziale rispetto l'equazione proposta da *Parker*. L'espressione di bilancio ottenuta è la seguente:

$$\left(\frac{\tau_{cb}^*}{\tau_{c0}^*}\right)^2 \left(\frac{\mu\beta-1}{\mu\beta}\right) - 2\left(\frac{\tau_{cb}^*}{\tau_{c0}^*}\right) \cos\phi + \left[\left(\frac{\mu\beta+1}{\mu\beta}\right) \left(\frac{\mu^2+1}{\mu^2}\right) \cos^2\phi - \frac{1}{\mu^2}\right] = 0 \quad (3.35)$$

dove:

$\tau^*_{cb}$  : sforzo tangenziale di Shields critico sulla sponda

$\tau^*_{c0}$  : sforzo tangenziale di Shields critico al centro della sezione

$\phi$  : angolo di inclinazione della sponda rispetto il piano orizzontale

$\mu$  : coefficiente d'attrito di Coulomb

$\beta$  : rapporto tra la forza di sollevamento e la forza di Drag

la trattazione considera il tirante d'acqua misurato lungo la normale al fondo:

$$\tau = \gamma \cdot i \cdot h / \cos \phi \quad (3.36)$$

dove:

$\phi$  : angolo di inclinazione della sponda rispetto il piano orizzontale

$h$  : tirante d'acqua misurato in verticale

$i$  : pendenza longitudinale del canale

considerando che:

$$\cos \phi = \left[ \left( \frac{dh}{dy} \right)^2 + 1 \right]^{-1/2} \quad (3.37)$$

dove:

$\phi$  : angolo di inclinazione della sponda rispetto il piano orizzontale

$h$  : tirante d'acqua misurato in verticale

l'equazione di bilancio (3.35) può essere riscritta come segue:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{dh}{dy} \right)^4 \left\{ \left( \frac{\tau_{cb}^*}{\tau_{c0}^*} \right)^4 \left( \frac{\mu\beta - 1}{\mu\beta} \right)^2 - \frac{2}{\mu^2} \left( \frac{\tau_{cb}^*}{\tau_{c0}^*} \right)^2 \left( \frac{\mu^2 \beta^2 - 1}{\mu^2 \beta^2} \right) + \frac{1}{\mu^2} \left( \frac{\mu\beta + 1}{\mu\beta} \right) \right\} \\
& + \left( \frac{dh}{dy} \right)^2 \left\{ \left( \frac{\tau_{cb}^*}{\tau_{c0}^*} \right)^2 \left( \frac{\mu\beta - 1}{\mu\beta} \right) \left[ \left( \frac{\tau_{cb}^*}{\tau_{c0}^*} \right)^2 (\mu\beta - 1) + (\mu\beta + 1) \left( \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2} \right) \right] \right. \\
& - \left. \left( \frac{\mu\beta + 1}{\mu^3 \beta} \right)^2 - 2 \left( \frac{\tau_{cb}^*}{\tau_{c0}^*} \right) \right\} + \left[ \left( \frac{\tau_{cb}^*}{\tau_{c0}^*} \right)^2 \left( \frac{\mu\beta - 1}{\mu\beta} \right) + \left( \frac{\mu\beta - 1}{\beta} \right) \left( \frac{\mu^2 + 1}{\mu^2} \right) \right]^2 \\
& - \left( \frac{\mu\beta + 1}{\mu\beta} \right)^2 \left( \frac{\mu^2 + 2}{\mu^4} \right)^2 - 2 \left( \frac{\tau_{cb}^*}{\tau_{c0}^*} \right)^2 \left[ 2 + \frac{\mu^2 \beta^2 - 1}{\mu^4 \beta^2} \right] = 0
\end{aligned} \tag{3.38}$$

dove:

$\tau_{cb}^*$  : sforzo tangenziale di Shields critico sulla sponda

$\tau_{c0}^*$  : sforzo tangenziale di Shields critico al centro della sezione

$\phi$  : angolo di inclinazione della sponda rispetto il piano orizzontale

$\mu$  : coefficiente d'attrito di Coulomb

$\beta$  : rapporto tra la forza di sollevamento e la forza di Drag

sostituendo nell'espressione appena ricavata la (3.37) si ottiene la seguente equazione differenziale:

$$\frac{h}{h_0} \left( \frac{dh}{dx} \right) = - \sqrt{\frac{-b + \sqrt{\delta}}{2(1 - \mu^2 \beta^2)}} \tag{3.39}$$

dove:

$h$  : tirante d'acqua misurato in verticale

$h_0$  : tirante d'acqua al centro del canale

$\mu$  : coefficiente d'attrito di Coulomb

$\beta$  : rapporto tra la forza di sollevamento e la forza di Drag

$$b = 2 \left( \frac{h}{h_0} \right)^2 (1 - \mu^2 \beta^2) + \left( \frac{1 + \mu\beta}{\mu} \right)^2 + 2(1 + \mu\beta) \mu\beta \frac{h}{h_0} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned} \delta = & \left( \frac{1+\mu\beta}{\mu} \right)^4 + 4(1+\mu\beta)^2 \mu^2 \beta^2 \left( \frac{h}{h_0} \right)^2 + 4 \left( \frac{h}{h_0} \right)^2 (1-\mu^2 \beta^2) \left( \frac{1+\mu\beta}{\mu} \right)^2 \\ & + 4 \left( \frac{1+\mu\beta}{\mu} \right)^2 (1+\mu\beta) \mu \beta \left( \frac{h}{h_0} \right)^2 + 4 \left( \frac{h}{h_0} \right)^2 (1-\mu^2 \beta^2) (1+\mu\beta)^2 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Questa equazione non è né lineare né integrabile in forma chiusa. Per soddisfare le condizioni al contorno:

$$\left. \frac{dh}{dy} \right|_{y=0} = 0 \quad (3.42)$$

$h/h_0$  calcolato nel primo punto dopo il centro del canale è ottenuto dallo sviluppo in serie di *Taylor*.

In questo punto si ottiene dunque:

$$\frac{h}{h_0} = 1 - \left( \frac{\mu^2}{1+2\mu^2+\mu\beta} \right) \frac{y^2}{2h_0^2} \quad (3.43)$$

Per risolvere il problema per i restanti punti è stato usato uno schema alle differenze finite centrate.

Per sedimenti con angolo di riposo di  $40^\circ$ ,  $\mu=0.48$ ,  $\beta=0.85$  come suggerito, tra gli altri, da *Parker* (1978). In Figura 3.2 i profili della sponda derivanti dalla (3.29) e (3.43), con i valori di  $\mu$  e  $\beta$  precedentemente indicati sono confrontati con il profilo ottenuto dalle prove sperimentali. Come risulta dal confronto, il profilo ottenuto col metodo della profondità normale si adatta meglio al profilo sperimentale.

Si osserva inoltre che la seguente espressione, ottenuta per interpolazione dei dati sperimentali, risulta descrivere abbastanza accuratamente l'intero profilo:

$$\frac{h}{h_0} = 1 - \exp\left(-\frac{y_T}{h_0}\right) \quad (3.44)$$

dove:

$$y_T = \frac{B}{2} - x \quad (3.45)$$

$B$ : larghezza del canale

$h$ : tirante d'acqua

$h_0$ : tirante d'acqua al centro del canale

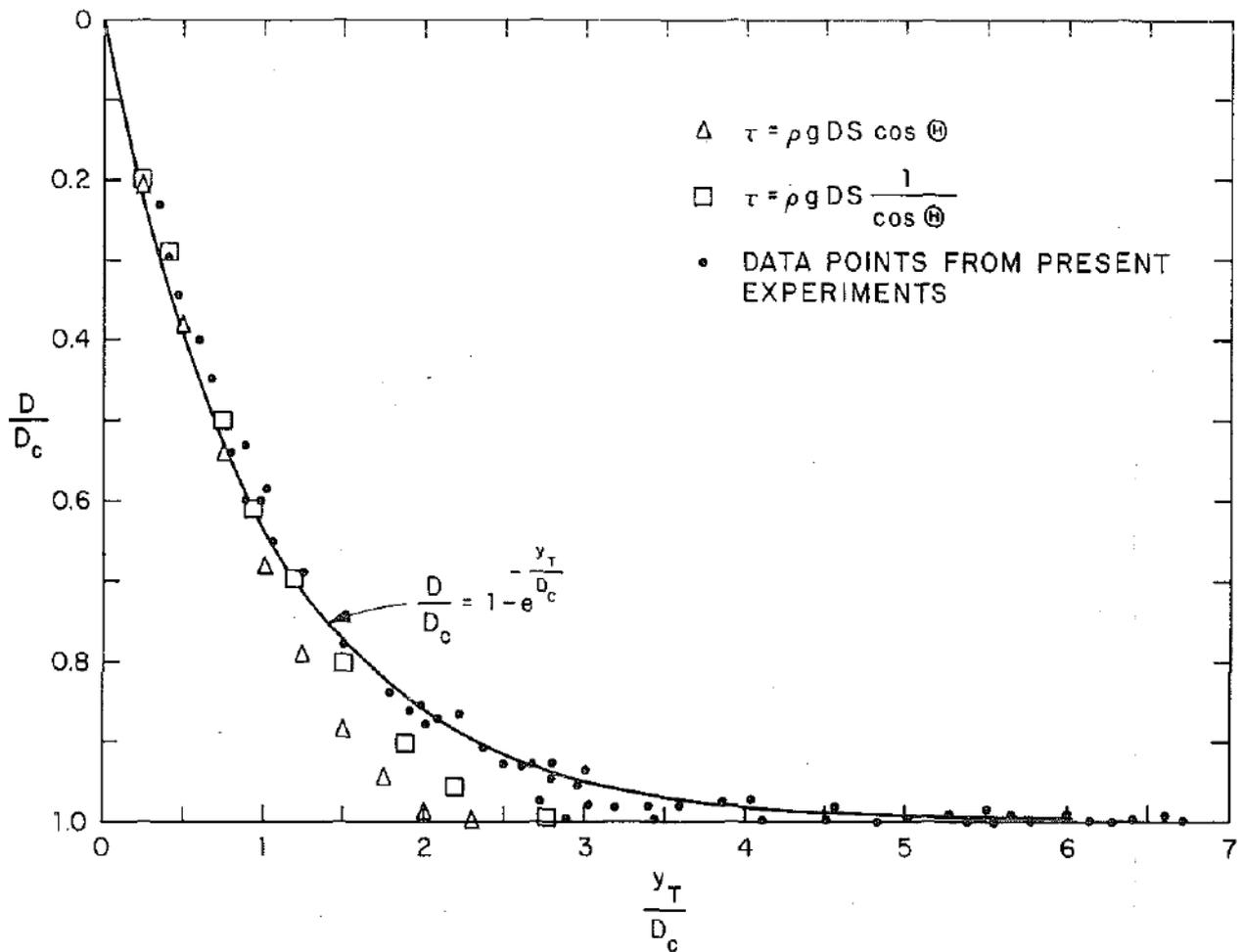


Figura 3.2 – profilo sperimentale della sezione stabile confrontato con i profili ottenuti col metodo del tirante verticale e normale.

Dall'equazione (3.43) si può ricavare una buona stima dell'area della sezione trasversale di un canale stabile, che risulta:

$$A = (B - 2h_0)h_0 \quad (3.46)$$

La previsione di tale area risulta entro un margine di errore del 5% rispetto quella osservata sperimentalmente.

*Ikeda* (1981) fu il primo a proporre un profilo dalla forma esponenziale come quella precedente.

La sua espressione è la seguente:

$$\frac{h}{h_0} = 1 - \exp\left(-\frac{y_T}{K}\right) \quad (3.47)$$

dove:

$$y_T = \frac{B}{2} - x \quad (3.48)$$

$$K = \frac{1}{h_0} \int_0^{B/2} (h_0 - h) dy \quad (3.49)$$

Sia l'equazione (3.47) che la (3.44) rappresentano bene l'andamento del profilo sperimentale, anche se questo non è sorprendente perché  $K = h_0 [1 - \exp(-B/2h_0)]$  quando  $B/2h_0 \gg 1$ .

Comunque, l'equazione (3.47) non può essere usata come formula di progetto di un profilo stabile in quanto  $K$  richiede la conoscenza del profilo a priori.

Altri autori hanno ripreso la formulazione esponenziale di *Ikeda* per adattarla maggiormente alle più recenti osservazioni sperimentali. Per esempio *Pizzuto* (1990) ha ricavato la seguente formula:

$$\frac{h}{h_0} = 1 - \exp\left(-\mu \cdot \frac{y_T}{h_0}\right) \quad (3.50)$$

dove:

$h$ : tirante d'acqua

$h_0$ : tirante d'acqua al centro del corso d'acqua

$\mu$ : coefficiente d'attrito di Coulomb

$$x_T = \frac{B}{2} - x \quad (3.51)$$

### 3.3.4 Soluzione di Diplas (1992)

*Diplas* (1992) propone una approssimazione polinomiale della soluzione numerica dell'equazione di *Ikeda* (1982) tenendo conto inoltre degli effetti provocati dalla diffusione turbolenta.

Considerando il bilancio della quantità di moto per l'area  $dA$  di Figura 3.3 la seguente espressione per lo sforzo tangenziale agente lungo il perimetro  $dP$  è ottenuto come segue (*Lundgren e Jonsson*, 1964):

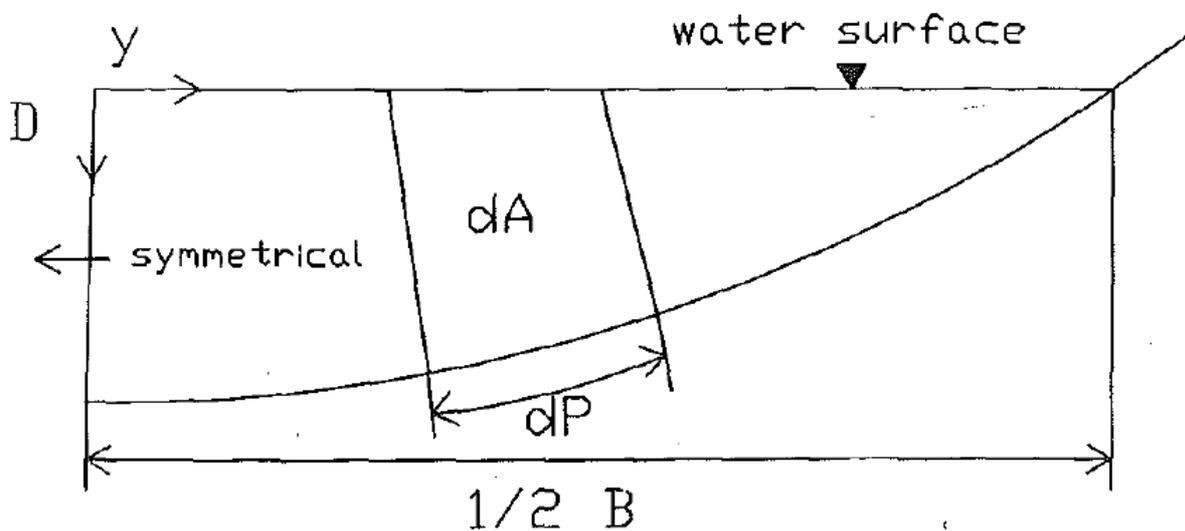


Figura 3.3 – Definizione dei parametri assunti (*Diplas*, 1992)

$$\tau = \gamma \frac{dA}{dP} - \frac{d}{dP} \left( \int_0^{D_N} \overline{\rho u'v'} \cdot dz \right) \quad (3.52)$$

il secondo termine dell'espressione rappresenta il flusso trasversale della quantità di moto dovuto alla turbolenza che è stato espresso da *Parker* (1978) come segue:

$$\int_0^{D_N} \overline{\rho u'v'} \cdot dz = D_N^2 \Psi \left( j, \frac{D_N}{k_s} \right) \frac{d\tau}{dP} \quad (3.53)$$

dove:

$$\Psi\left(j, \frac{D_N}{k_s}\right) = \left[ \frac{4+j}{24(2-j)} \ln\left(30 \frac{D_N}{k_s}\right) - \frac{5}{36(2-j)} \right] \left[ 1 + \frac{1}{2 \ln\left(30 \frac{D_N}{k_s}\right) - \frac{17}{3}} \right] \quad (3.54)$$

$$j = \frac{D_N \frac{d^2 D}{dy^2}}{\left(1 + \frac{d^2 D}{dy^2}\right)^{3/2}} \quad (3.55)$$

sostituendo l'espressione appena ricavata nella precedente si ottiene:

$$h^*_c = A_1^{1/2} h^* \left(1 + \frac{1}{2} A_2\right) + h^{*2} \Psi \frac{d^2 h^*}{dy^{*2}} + \left[ (A_2 + 2) \Psi h^* \frac{dh^*}{dy^*} + \frac{d^2 h^*}{dy^{*2}} \frac{d\Psi}{dy^*} \right] \frac{dh^*}{dy^*} \quad (3.56)$$

dove:

$$\frac{d\Psi}{dy^*} = \frac{[10 - 3A_4(4 - A_2)]}{36(A_2 + 2) \left(2A_4 - \frac{17}{3}\right)^2} \left(\frac{A_5}{A_3}\right) \left(\frac{30}{k^*_s}\right) + \left(1 + \frac{1}{2A_4 - \frac{17}{3}}\right) C \quad (3.57)$$

$$C = \frac{(4 - A_2)}{24(A_2 + 2)} \left(\frac{A_5}{A_3}\right) \left(\frac{30}{k^*_s}\right) + \left(\frac{5}{36} - A_4\right) \left(\frac{A_6}{36(A_2 + 2)^2}\right) \quad (3.58)$$

$$A_1 = \frac{d^2 h^*}{dy^{*2}} + 1 \quad (3.59)$$

$$A_2 = \frac{h^* \frac{d^2 h^*}{dy^{*2}}}{A_1} \quad (3.60)$$

$$A_3 = \frac{30 h^* A_1^{1/2}}{k^*_s} \quad (3.61)$$

$$A_4 = \ln(A_3) \quad (3.62)$$

$$A_5 = (A_2 + 1)A_1^{1/2} \frac{d^2 h^*}{dy^{*2}} \quad (3.63)$$

$$A_6 = \frac{\left[ (1 - 2A_2) \frac{dh^*}{dy^*} \frac{d^2 h^*}{dy^{*2}} + h^* \frac{d^3 h^*}{dy^{*3}} \right]}{A_1} \quad (3.64)$$

l'equazione (3.56) può essere adimensionalizzata utilizzando i seguenti parametri:

$$\tau_{cb}^* = \frac{h_{cb} i}{\Delta d} \quad (3.65)$$

$$\tau_c^* = \frac{h_c i}{\Delta d} \quad (3.66)$$

sostituendo nella (3.35) i parametri appena ricavati si ottiene:

$$\delta_{cb}^* = \left[ \frac{-\mu^2 \beta}{A_1^{3/2} + A_8^{1/2}} + \frac{A_8^{1/2}}{(1 - \mu\beta)\mu} \right] \delta_c^* \quad (3.67)$$

L'equazione appena ricavata fornisce il tirante critico lungo la sponda per un corso d'acqua di geometria assegnata. Inoltre può fornire il profilo della sezione in condizioni di equilibrio di una nota distribuzione dello sforzo tangenziale e del materiale del fondo. Se il valore del tirante eccede il tirante critico si avrà erosione della sponda, viceversa se è minore la sponda è stabile.

Perciò per un corso d'acqua in equilibrio incipiente la distribuzione dello sforzo tangenziale deve coincidere con lo sforzo tangenziale critico in ogni punto del perimetro della sezione.

La forma di una sezione di un canale in equilibrio incipiente può essere ottenuta risolvendo simultaneamente l'equazione della diffusione turbolenta e del bilancio delle forze. Combinando la (3.56) e la (3.67) si ottiene:

$$\frac{d^3 h^*}{dy^{*3}} = \frac{D_{3a} + D_{3b}}{D_{3c}} \quad (3.68)$$

dove:

$$D_{3a} = \frac{\delta^*}{\Psi h^{*2}} - \left[ \frac{(\Psi_1 + A_{12})}{\Psi} + \frac{dh^* (A_2 + 2)}{dy^* h^*} \right] \frac{d\delta^*}{dy^*} - \frac{A_1^{1/2}}{\Psi h^*} \left( 1 + \frac{1}{2} A_2 \right) \quad (3.69)$$

$$D_{3b} = \left[ 2 \left( \frac{dh^*}{dy^*} \frac{d^2 h^{*2}}{dy^{*2}} \right) \left( \frac{1.5 \mu^2 \beta}{A_1^{5/2}} + A_7 \left( \frac{A_7}{2A_8^{3/2} A_1^4} - \frac{2}{A_8^{1/2} A_1^3} \right) \right) - A_9 \left( \frac{d^2 h^*}{dy^{*2}} \right)^2 \right] \frac{\delta_c^*}{(1 - \mu\beta)\mu} \quad (3.70)$$

$$D_{3c} = \frac{A_9 \delta_c^*}{(1 - \mu\beta)\mu} \frac{dh^*}{dy^*} + \left( \frac{5}{36} - \frac{A_4}{4} \right) \left( \frac{A_{10} h^*}{A_{11} \Psi} \frac{d\delta^*}{dy^*} \right) \quad (3.71)$$

$$\Psi_1 = \frac{10 - 3A_4(4 - A_2)}{36(A_2 + 2) \left( 2A_4 - \frac{17}{3} \right)^2} \left( \frac{A_5}{A_3} \right) \left( \frac{30}{k_s^*} \right) \quad (3.72)$$

$$A_9 = \frac{\mu^2 \beta}{A_1^{3/2}} - \frac{A_7}{A_1^2 A_8^{1/2}} \quad (3.73)$$

$$A_{10} = 1 + \frac{1}{2A_4 - \frac{17}{3}} \quad (3.74)$$

$$A_{11} = (2 + A_2)^2 A_1 \quad (3.75)$$

$$A_{12} = A_{10} \left\{ \frac{4 - A_2}{24(A_2 + 2)} \left( \frac{A_5}{A_3} \right) \left( \frac{30}{k_s^*} \right) + \left( \frac{5}{36} - \frac{A_4}{4} \right) \frac{(1 - 2A_2)}{A_{11}} \frac{dh^*}{dy^*} \frac{d^2 h^*}{dy^{*2}} \right\} \quad (3.76)$$

Questa è una equazione differenziale del terzo ordine non lineare e non omogenea che richiede tre condizioni al contorno. La larghezza del corso d'acqua non è nota a priori perciò l'estremità della sponda, dove vengono riferite le condizioni al contorno, è altrettanto sconosciuta. Così è richiesta una condizione al contorno aggiuntiva per risolvere il problema.

Le condizioni al contorno in corrispondenza del centro della sezione sono le seguenti:

$$h^* = 1 \quad (3.77)$$

$$\frac{dh^*}{dy^*} = 0 \quad (3.78)$$

mentre in corrispondenza dell'estremità della sponda:

$$h^* = 0 \quad (3.79)$$

$$\frac{dh^*}{dy^*} = -\mu \quad (3.80)$$

Il problema può essere risolto per via numerica calcolando prima di tutto il valore di  $d^2h^*/dy^{*2}\Big|_j$  nel punto di unione tra la sponda e il centro della sezione risolvendo la (3.68). Il valore corretto è ottenuto imponendo che  $d^3h^*/dy^{*3}\Big|_j = 0$  dovuto alla simmetria della sezione. Conoscendo quindi il valore corretto di  $d^2h^*/dy^{*2}\Big|_j$  è possibile utilizzare il metodo di *Runge-Kutta-Merson*, che è del  $(\Delta y^*)^5$  ordine (*de Vahl Davis*, 1986), per calcolare:  $h^*, dh^*/dy^*, d^2h^*/dy^{*2}, d^3h^*/dy^{*3}, \delta^*, d\delta^*/dy^*, d^2\delta^*/dy^{*2}$  per ogni punto in successione della sponda.

Il valore di  $\delta^*_c$  viene aggiornato utilizzando il metodo di bisezione finché le condizioni all'estremità della sponda siano soddisfatte. Dal valore di  $\delta^*_c$  così ottenuto si può calcolare  $h_0$ .

L'autore ha dimostrato inoltre che il profilo della sezione di equilibrio ottenuta con il metodo numerico può essere ben approssimata con il seguente polinomio di quinto grado:

$$h^* = C_5 y^{*5} + C_4 y^{*4} + C_2 y^{*2} + 1 \quad (3.81)$$

dove:

$$C_2 = \frac{1}{2} \frac{d^2h^*}{dy^{*2}} \Big|_j \quad (3.82)$$

$$C_4 = \frac{\left[ \mu \left( \frac{B^*}{2} \right) - 5 - 1.5 \left( \frac{d^2h^*}{dy^{*2}} \Big|_j \right) \left( \frac{B^*}{2} \right)^2 \right]}{\left( \frac{B^*}{2} \right)^4} \quad (3.83)$$

$$C_5 = \frac{\left[ -C_4 \left( \frac{B^*}{2} \right)^4 - \frac{1}{2} \left( \frac{d^2h^*}{dy^{*2}} \Big|_j \right) \left( \frac{B^*}{2} \right)^2 - 1 \right]}{\left( \frac{B^*}{2} \right)^5} \quad (3.84)$$

La forma della sezione di un corso d'acqua in equilibrio incipiente dipende dal valore assegnato ai parametri  $\mu, \beta, d$ . Sia la larghezza dimensionale  $B^* = B/h_0$  che la  $d^2h^*/dy^{*2}|_j$  sono condizionate dal valore che si attribuisce a questi parametri. Il profilo della sponda ottenuto per diversi valori di  $\mu$ , con  $\beta = 0.85$  e  $d_{90} = 75\text{mm}$  è indicato in Figura 3.4 – 3.6. La variazione della  $B^*$  con i valori di  $\mu$  è rappresentata in Figura 3.5. Come ci si aspetta l'andamento indica una crescita di  $B^*$  al decrescere di  $\mu$  e può essere ben rappresentata dalla seguente equazione:

$$B^* = -16.1814\mu^3 + 44.3206\mu^2 - 43.5548\mu + 21.1496 \quad (3.85)$$

Allo stesso modo le variazioni di  $d^2h^*/dy^{*2}|_j$  con i valori di  $\mu$  sono rappresentate in Figura 3.7 dalla seguente espressione:

$$d^2h^*/dy^{*2}|_j = 0.0103\mu^3 + 0.0711\mu^2 - 0.3089\mu + 0.0315 \quad (3.86)$$

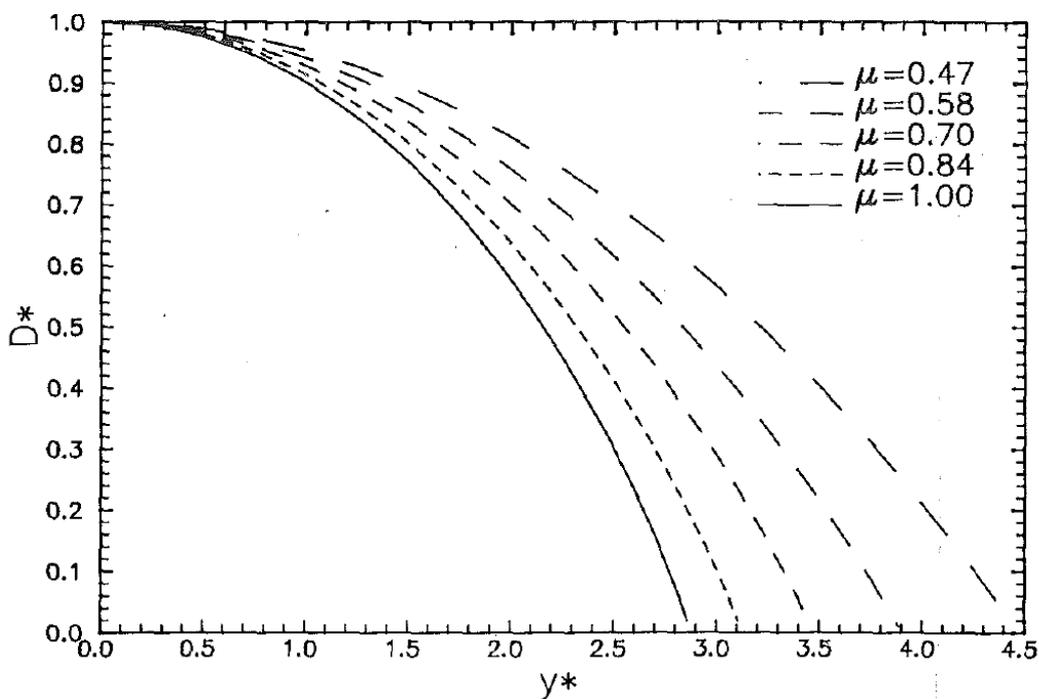


Figura 3.4 – Profilo di equilibrio incipiente di un corso d'acqua ottenuto per differenti valori di  $\mu$  (Diplas, 1992)

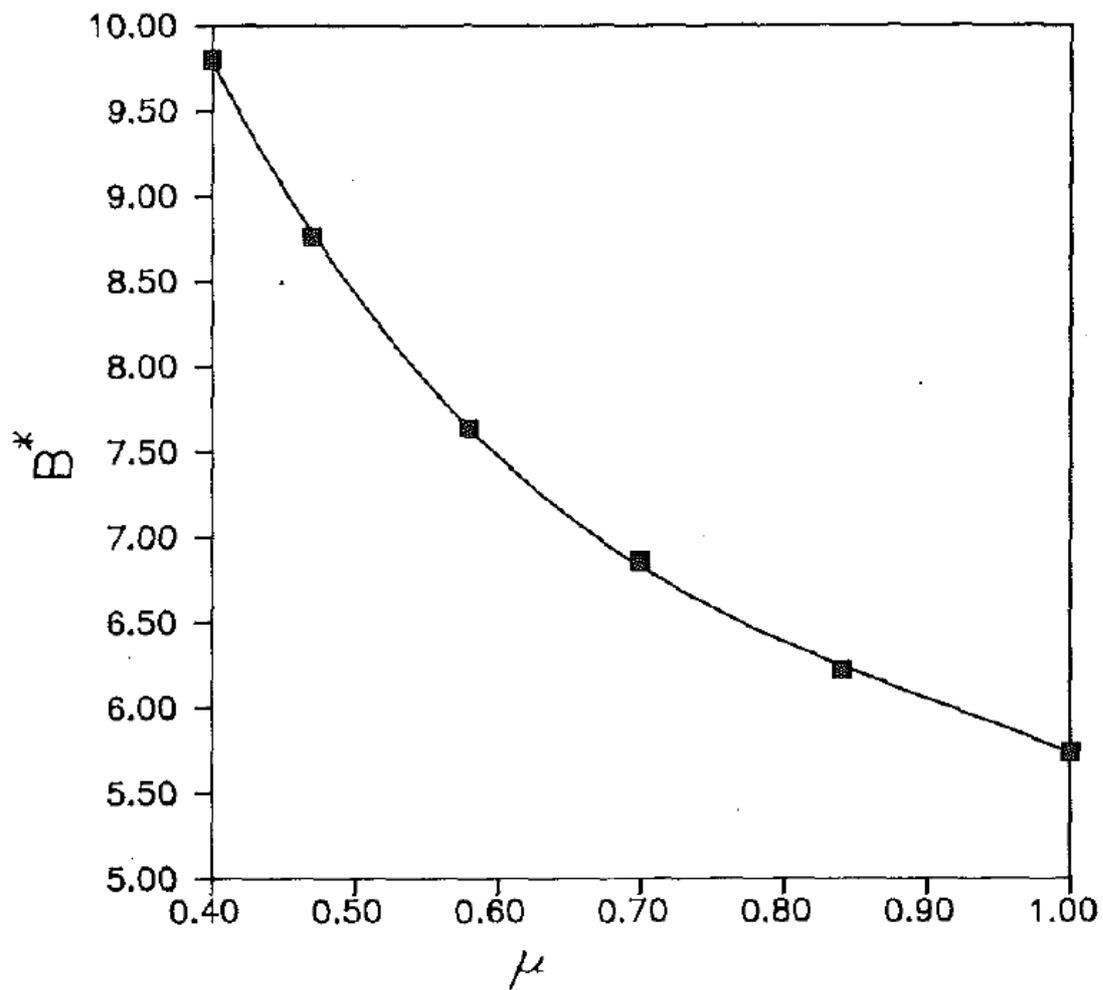


Figura 3.5 – Variazioni della larghezza adimensionale  $B^*$  per differenti valori di  $\mu$  (Diplas, 1992)

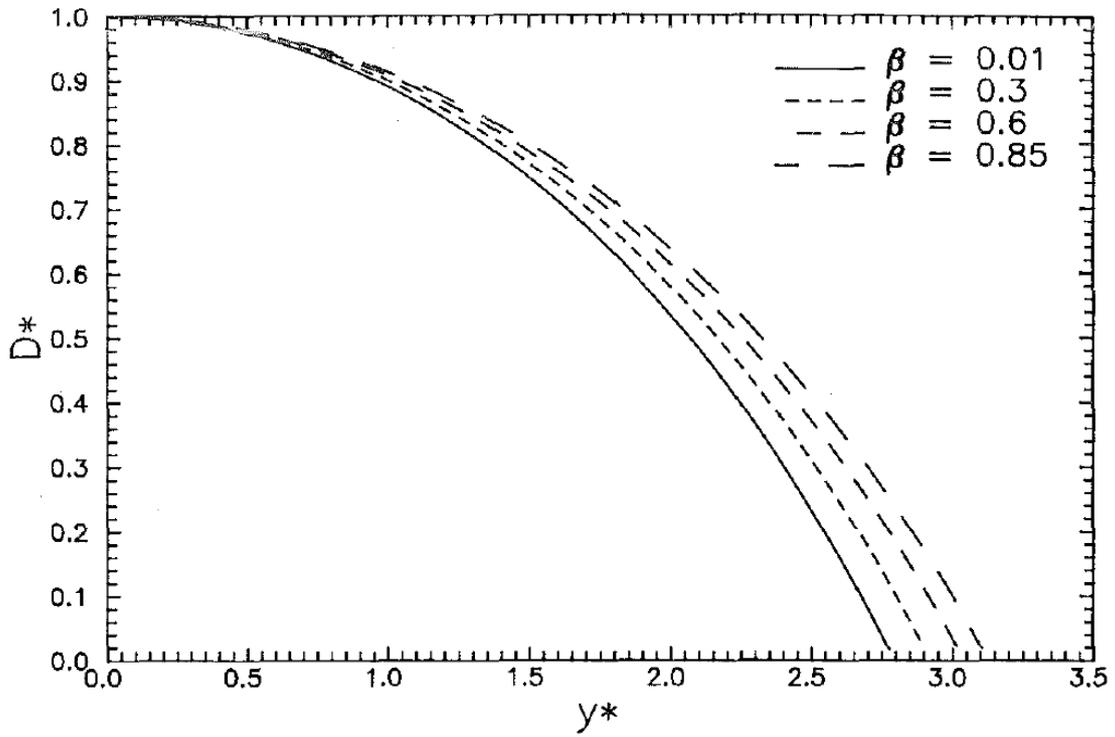


Figura 3.6 – Profilo di equilibrio incipiente di un corso d’acqua ottenuto per differenti valori di  $\beta$  (Diplas, 1992)

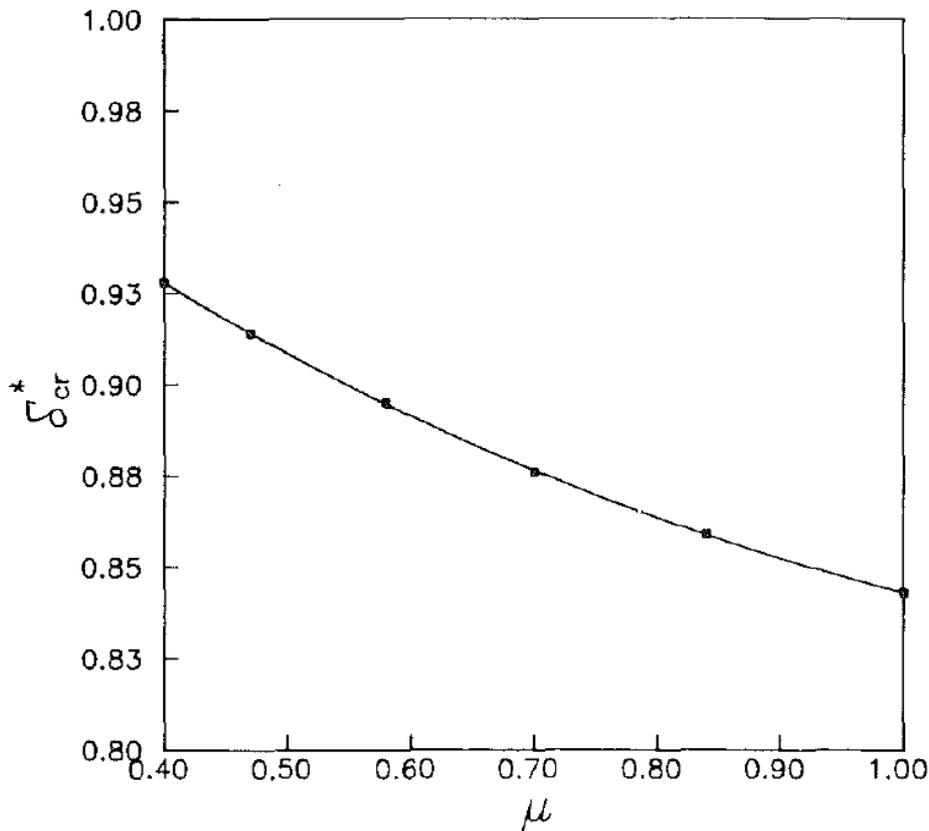


Figura 3.7 – Variazioni della larghezza adimensionale  $\delta_c^*$  per differenti valori di  $\mu$  (Diplas, 1992)

### 3.3.5 Soluzione di Ikeda e Izumi (1991)

Questa trattazione si basa sull'assunzione di un corso d'acqua dritto e largo avente sezione simmetrica. Il corso d'acqua ha una larghezza complessiva  $B$ , una pendenza costante  $i$ , ed è composto da una parte centrale a fondo piatto, in cui il tirante è assunto pari a  $h_0$ .

È stato assunto inoltre un fondo composto da sedimenti non coesivi di pezzatura uniforme aventi diametro  $d$ . Nella trattazione che segue si indica con  $x$  direzione longitudinale, con  $y$  la direzione trasversale e con  $z$  la verticale. Il trasporto diffusivo dei sedimenti in sospensione in direzione trasversale è espresso come:

$$F_y = -\varepsilon_y \partial c / \partial y \quad (3.87)$$

dove:

$\varepsilon_y$ : coefficiente di diffusione trasversale (nella direzione  $y$ )

$c$ : concentrazione di sedimenti in sospensione mediata nel tempo

il valore di  $\varepsilon_y$  si assume pari a (Webel e Schatzman, 1984):

$$\varepsilon_y = 0.20 u^*_0 h_0 \quad (3.88)$$

dove:

$h_0$ : tirante al centro del canale

$u^*_0$ : velocità di attrito al centro del canale esprimibile come:

$$u^*_0 = \sqrt{\tau_0 / \rho}$$

$\rho$ : densità del fluido

$\tau_0$ : sforzo tangenziale al centro del canale definito come:

$$\tau_0 = \gamma \cdot h_0 \cdot i$$

il coefficiente di diffusione verticale è assunto pari a (Vanoni, 1975):

$$\varepsilon_z = 0.10u^*_0 h_0 \quad (3.89)$$

dove:

$h_0$ : tirante al centro del canale

$u^*_0$ : velocità di attrito al centro del canale

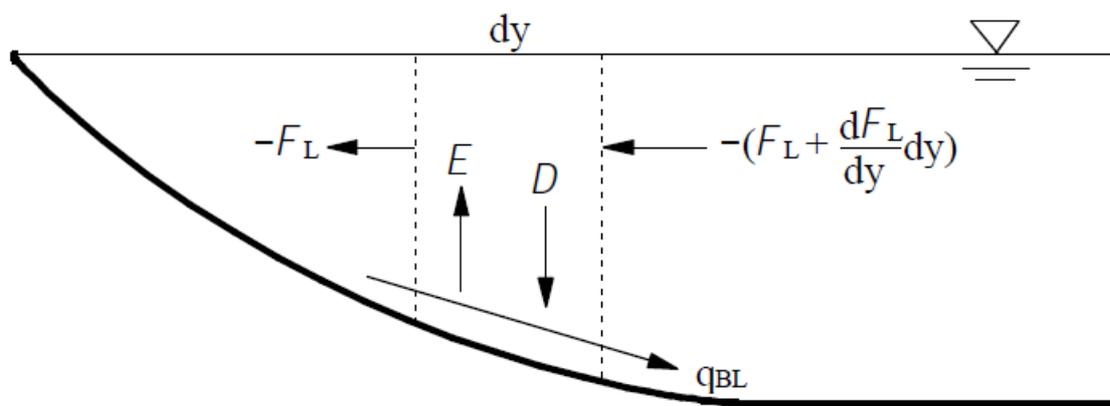


Figura 3.8 – Bilancio tra i flussi dei sedimenti in direzione trasversale nel volume di controllo (Vigilar, 1997)

In riferimento alla Figura 3.8, la conservazione dei sedimenti in sospensione, in un volume di controllo compreso tra il fondo e la superficie libera, è definita come:

$$-\frac{dF_L}{dy} = E - D \quad (3.90)$$

dove:

$E$ : tasso di erosione ovvero frazione di sedimenti che viene erosa dal fondo

$D$ : tasso di deposito ovvero frazione di sedimenti che si deposita sul fondo

$F_L$ : trasporto trasversale diffusivo dei sedimenti in sospensione integrato lungo la verticale

In corrispondenza dell'estremità della sponda ci si attende che  $D > E$ , mentre in prossimità del centro  $D < E$  in quanto i sedimenti sono trasportati dal centro verso le sponde. Il flusso  $F_L$  integrato lungo la verticale diventa:

$$F_L = -\varepsilon_y \int_0^h \frac{\partial c}{\partial y} dz = -\varepsilon_y (\partial \zeta / \partial y) + \varepsilon_y c|_{z=h} \frac{dh}{dy} \quad (3.91)$$

dove:

$\varepsilon_y$ : coefficiente di diffusione trasversale (nella direzione  $y$ )

$h$ : tirante d'acqua

$c_{z=h}$ : concentrazione di sedimenti in sospensione in corrispondenza del fondo

$\zeta$ : concentrazione dei sedimenti sospesi integrata verticalmente esprimibile come:

$$\zeta = \int_0^h c dz \quad (3.92)$$

il tasso di erosione deve essere uguale al tasso di diffusione dal fondo:

$$E = \varepsilon_z (\partial c / \partial z)|_{z=h} = v_s E \quad (3.93)$$

dove:

$c$ : concentrazione di sedimenti in sospensione mediata nel tempo

$v_s$ : velocità di caduta delle particelle di sedimento

$E$ : tasso di erosione

il tasso di deposito è correlato con la concentrazione dei sedimenti sospesi in corrispondenza del fondo ed è descritto come:

$$D = v_s c|_{z=h} \quad (3.94)$$

dove:

$c|_{z=h}$  : concentrazione di sedimenti sospesi in corrispondenza del fondo

$v_s$  : velocità di caduta delle particelle di sedimento

Per valutare il tasso di erosione si considera il semplice caso in cui il trasporto trasversale diffusivo dei sedimenti in sospensione è molto piccolo o trascurabile, così con le assunzioni di (3.93) e (3.94), (3.90) si riduce a:

$$E = c|_{z=h} \quad (3.95)$$

La concentrazione in condizioni di equilibrio in corrispondenza del fondo è stata misurata da diversi autori (per esempio *Vanoni*, 1946; *Lane e Kalinske*, 1939; *Ashida e Michiue*, 1970) ed è stato dimostrato che  $E$  è correlato a  $u^*_G / v_s$ , che fornisce  $c|_{z=0}$  nella forma:

$$c|_{z=h} = 0.0025(u^*_G / v_s)^2 \quad (3.96)$$

dove:

$u^*_G$  : velocità di attrito corrispondente allo sforzo tangenziale del grano

$v_s$  : velocità di caduta delle particelle di sedimento

la rata di erosione è perciò ridotta a:

$$E = 0.0025(u^*_G / v_s)^2 v_s \quad (3.97)$$

dove:

$u^*_G$  : velocità di attrito corrispondente allo sforzo tangenziale del grano

$v_s$  : velocità di caduta delle particelle di sedimento

per coefficienti di diffusine costanti lungo la verticale la  $c$  è descritta come:

$$c = c|_{z=h} \exp[-(v_s / \varepsilon_z)(h - z)] \quad (3.98)$$

dove:

$c_{z=h}$  : concentrazione di sedimenti sospesi in corrispondenza del fondo

$v_s$  : velocità di caduta delle particelle di sedimento

$\varepsilon_z$  : coefficiente di diffusione in direzione  $z$

$h$  : tirante d'acqua

$z$  : coordinata verticale

la concentrazione integrata sulla verticale è così ridotta alla seguente:

$$\zeta = \frac{\varepsilon_z}{v_s} \{1 - \exp[-(v_s / \varepsilon_z)h]\} c|_{z=h} \quad (3.99)$$

dove:

$c_{z=h}$  : concentrazione di sedimenti sospesi in corrispondenza del fondo

$v_s$  : velocità di caduta delle particelle di sedimento

$\varepsilon_z$  : coefficiente di diffusione in direzione  $z$

$h$  : tirante d'acqua

Siccome  $v_s h / \varepsilon_z \gg 1$  per fiumi di sabbia, la concentrazione al fondo è approssimativamente descritta come:

$$c|_{z=h} \cong (v_s / \varepsilon_z) \zeta \quad (3.100)$$

dove:

$\zeta$  : concentrazione di sedimenti integrata sulla profondità

$v_s$  : velocità di caduta delle particelle di sedimento

$\varepsilon_z$  : coefficiente di diffusione in direzione  $z$

sostituendo la (3.100) nella (3.94) il tasso di deposito diventa:

$$D = \left( v_s^2 / \varepsilon_z \right) \zeta \quad (3.101)$$

dove:

$\zeta$  : concentrazione di sedimenti integrata sulla profondità

$v_s$  : velocità di caduta delle particelle di sedimento

$\varepsilon_z$  : coefficiente di diffusione in direzione  $z$

in modo analogo, sostituendo alla (3.91) la (3.100) si ottiene:

$$F_L = -\varepsilon_y (\partial \zeta / \partial y) + \varepsilon_y (v_s / \varepsilon_z) \frac{dh}{dy} \quad (3.102)$$

dove:

$\zeta$  : concentrazione di sedimenti integrata sulla profondità

$v_s$  : velocità di caduta delle particelle di sedimento

$\varepsilon_y$  : coefficiente di diffusione in direzione  $y$

$\varepsilon_z$  : coefficiente di diffusione in direzione  $z$

$h$  : tirante d'acqua

Affinché il corso d'acqua sia stabile il trasporto trasversale diffusivo dei sedimenti in sospensione deve essere bilanciato con il trasporto di fondo, cioè:

$$F_L + q_{BL} = 0 \quad (3.103)$$

dove:

$F_L$  : trasporto trasversale diffusivo dei sedimenti in sospensione

$q_{BL}$  : portata solida di fondo trasversale

Le seguenti variabili adimensionali di  $F_L$  e  $q_{BL}$  sono usate per ottenere le equazioni del profilo in equilibrio di un corso d'acqua:

$$\overline{F_L} = \varepsilon_y \zeta_0 / B \quad (3.104)$$

$$\overline{q_{BL}} = 1.85 \tau_{*0}^2 (h_0 / B) \sqrt{\Delta g d^3} \quad (3.105)$$

dove:

$\varepsilon_y$  : coefficiente di diffusione in direzione  $y$

$h_0$  : tirante d'acqua al centro del corso d'acqua

$B$  : larghezza totale del corso d'acqua

$\zeta$  : concentrazione di sedimenti integrata sulla profondità

$\zeta_0$  : concentrazione di sedimenti integrata sulla profondità al centro del corso d'acqua

$\tau_{*0}$  sforzo tangenziale adimensionale al centro del corso d'acqua

$\Delta$  : peso di volume immerso

$g$  : accelerazione di gravità

$d$  : diametro della particella di sedimento

$$s = h / h_0 \quad (3.106a)$$

$$\eta = y / B \quad (3.106b)$$

$$Z = \zeta / \zeta_0 \quad (3.106c)$$

Dalla relazione di *Engelund e Hansen* (1967) che mette in relazione lo sforzo tangenziale di grano con lo sforzo tangenziale critico e ricordando che  $\tau_{*G}^* \gg \tau_{*c}^*$ , la (3.97) diventa:

$$E = 0.001\tau^{*2} v_s^{*-2} v_s \quad (3.107)$$

dove:

$\tau^*$  sforzo tangenziale adimensionale

$v_s$  : velocità di caduta delle particelle di sedimento

$v_s^*$  : velocità di caduta adimensionale delle particelle di sedimento

$$v_s^* = v_s / \sqrt{\Delta g d}$$

l'equazione (3.90) con la (3.101) , (3.102) e (3.107) diventa:

$$\frac{\gamma d^2 s^3}{3 d\eta^2} = \lambda Z - s^2 \quad (3.108)$$

in cui:

$$\gamma = \overline{q_{BL}} / BE_0 \quad (3.109a)$$

$$\lambda = D_0 / E_0 = 1 \quad (3.109b)$$

$B$  : larghezza totale del corso d'acqua

$E_0$  : tasso di erosione al centro del corso d'acqua

$D_0$  : tasso di deposito al centro del corso d'acqua

Per soddisfare la condizione di equilibrio,  $\lambda$  deve essere uguale all'unità in quanto il tasso di erosione deve bilanciare il tasso di deposito. In modo analogo, usando la (3.102) ed esplicitando la portata solida di fondo trasversale e l'espressione dello sforzo tangenziale, la (3.103) diventa:

$$\frac{dZ}{d\eta} - K_1 Z \frac{ds}{d\eta} = K_2 s^2 \frac{ds}{d\eta} \quad (3.110)$$

dove:

$$K_1 = (v_s / \varepsilon_z) h_0 \quad (3.111a)$$

$$K_2 = \overline{q_{BL}} / \overline{F_L} \quad (3.111b)$$

$v_s$  : velocità di caduta delle particelle di sedimento

$h_0$  : tirante d'acqua al centro del corso d'acqua

$\varepsilon_z$  : coefficiente di diffusione in direzione  $z$

L'equazione (3.108) e (3.110) sono le equazioni base che servono per definire la forma della sezione trasversale di equilibrio di un corso d'acqua. Le equazioni al contorno consistono nel considerare trascurabile la portata solida di fondo trasversale o il trasporto trasversale diffusivo dei sedimenti in sospensione in corrispondenza della superficie libera, descritti rispettivamente da:

$$\frac{ds^3}{d\eta} = 0, \eta = 0 \quad (3.112a)$$

$$\frac{dZ}{d\eta} - K_1 Z \frac{ds}{d\eta} = 0, \eta = 0 \quad (3.112b)$$

e la concentrazione adimensionale integrata in verticale deve essere inoltre al centro della sezione pari all'unità:

$$Z=1, \eta = 1/2 \quad (3.113)$$

le condizioni al contorno per il profilo della sezione stabile sono:

$$s = 0, \eta = 0 \quad (3.114)$$

$$s = 1, \eta = 1/2 \quad (3.115a)$$

$$\frac{ds^3}{d\eta} = 0, \eta = 1/2 \quad (3.115b)$$

dividendo la (3.110) per  $ds/d\eta$  risulta:

$$\frac{dZ}{d\eta} - K_1 Z = K_2 s^2 \quad (3.116)$$

che porge la soluzione:

$$Z = C_0 \exp(K_1 s) - (K_2 / K_1) \left[ s^2 + (2 / K_1) s + (2 / K_1^2) \right] \quad (3.117)$$

con le condizioni al contorno espresse dalle (3.113), (3.115a) si ottiene:

$$C_0 = \left\{ 1 + (K_2 / K_1) \left[ 1 + (2 / K_1) + (2 / K_1^2) \right] \right\} \exp(-K_1) \quad (3.118)$$

Il valore della variabile  $\gamma$  in (3.108) è calcolato di seguito. L'equazione (3.109a) è calcolata ricordando la (3.107) e (3.105) perciò si ottiene:

$$\gamma = 1850 v_s^* R_0^{-1} (h_0 / B)^{-1} \quad (3.119)$$

dove:

$h_0$ : tirante d'acqua al centro del corso d'acqua

$d$ : diametro della particella di sedimento

$v_s^*$ : velocità di caduta adimensionale delle particelle di sedimento

$R_0$ : tirante d'acqua adimensionale al centro del corso d'acqua

$$R_0 = h_0 / d$$

$R_0$  è dell'ordine di 1000. La velocità adimensionale di caduta della particella, calcolata con la formula di *Rubey* (1933), è pari a 0.43, assumendo la dimensione tipica del diametro della

particella di sabbia di 0.2 mm. Il rapporto  $B/h_0$  per corsi d'acqua sabbiosi assume un valore tipico di 100, mentre il valore di  $\gamma$  è stimato con un ordine di grandezza pari a  $10^{-4}$ .

introducendo la seguente variabile:

$$r = \eta / \gamma^{1/2} \quad (3.120)$$

l'equazione (3.108) può essere riscritta come segue:

$$\frac{1}{3} \left( d^2 s^3 / dr^2 \right) = Z - s^2 \quad (3.121)$$

le condizioni al contorno corrispondenti a questa equazione sono ricavabili dalla (3.114), (3.112a) e (3.115b):

$$s = 0, \quad r = 0 \quad (3.122a)$$

$$\frac{ds^3}{dr} = 0, \quad r = 0 \quad (3.122b)$$

$$\frac{ds^3}{dr} = 0, \quad r \rightarrow \infty \quad (3.122c)$$

sostituendo la (3.117) nella (3.121) e integrando rispetto r si ottiene:

$$\frac{1}{6} \frac{ds^3}{dr} = C_0 \frac{3}{K_1} \left( s^2 - \frac{2s}{K_1} + \frac{2}{K_1^2} \right) \exp(K_1 s) - \frac{3}{5} \left( \frac{K_2}{K_1} + 1 \right) s^5 - \frac{3K_2}{2K_1^2} s^4 - \frac{2K_2}{K_1^3} s^3 + C_1 \quad (3.123)$$

dove:

$C_1$  : costante di integrazione ottenibile dalla condizione al contorno (3.122b)

la condizione (3.122c) impone un'altra restrizione ed in definitiva si ottiene la seguente equazione:

$$C_0 \frac{3}{K_1} \left[ \left( 1 - \frac{2}{K_1} + \frac{2}{K_1^2} \right) \exp(K_1) - \frac{2}{K_1^2} \right] - \frac{3}{5} \left( \frac{K_2}{K_1} + 1 \right) - \frac{K_2}{K_1^2} \left( \frac{3}{2} + \frac{2}{K_1} \right) = 0 \quad (3.124)$$

integrando la (3.123) con la condizione (3.122a) si ottiene:

$$\int_0^s 3s^2 \left\{ 6C_0 \left[ \frac{3}{K_1} \left( s^2 - \frac{2s}{K_1} + \frac{2}{K_1^2} \right) \exp(K_1 s) - \frac{6}{K_1^3} \right] + \right. \\ \left. - \frac{18}{5} \left( \frac{K_2}{K_1} + 1 \right) s^5 - \frac{9K_2}{K_1^2} s^4 - \frac{12K_2}{K_1^3} s^3 \right\}^{-1/2} ds = r \quad (3.125)$$

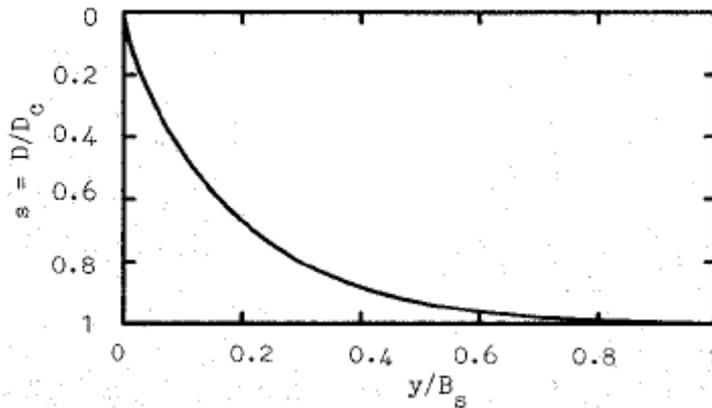


Figura 3.9 – Profilo della sezione stabile ottenuto per integrazione numerica della (3.125) considerando  $i=0.0005$  e  $d=0.2$  mm, per i quali  $K_1=2.26$  e  $K_2=0.17$  (Ikeda e Izumi, 1991)

Sostituendo (3.90) nella (3.111a) ed usando le relazioni  $v_s = \sqrt{\Delta g d} v_s^*$  e  $u^*_0 = \sqrt{g h i}$ ,  $K_1$  è data dalla seguente:

$$K_1 = 12.8 v_s^* (R_0 i)^{-1/2} \quad (3.126)$$

dove:

$v_s^*$ : velocità di caduta adimensionale delle particelle di sedimento

$R_0$ : tirante d'acqua adimensionale al centro del corso d'acqua

$i$ : pendenza longitudinale del corso d'acqua

in modo analogo sostituendo (3.104) e (3.105) nella (3.111b) si ottiene:

$$K_2 = 1.53 \times 10^5 v_s^*{}^3 R_0^{-2} i^{-1} \quad (3.127)$$

dove:

$v_s^*$ : velocità di caduta adimensionale delle particelle di sedimento

$R_0$ : tirante d'acqua adimensionale al centro del corso d'acqua

$i$ : pendenza longitudinale del corso d'acqua

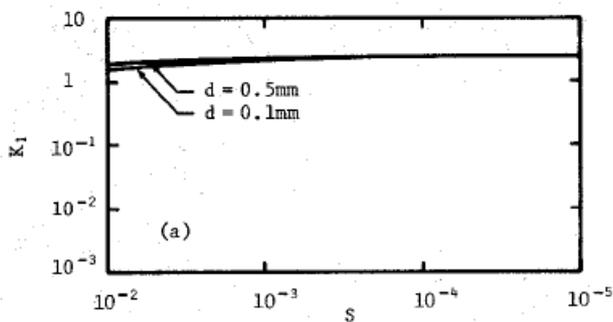


Figura 3.10 – Valori di  $K_1$  in funzione della pendenza  $i$  e del diametro  $d$  (Ikeda e Izumi, 1991)

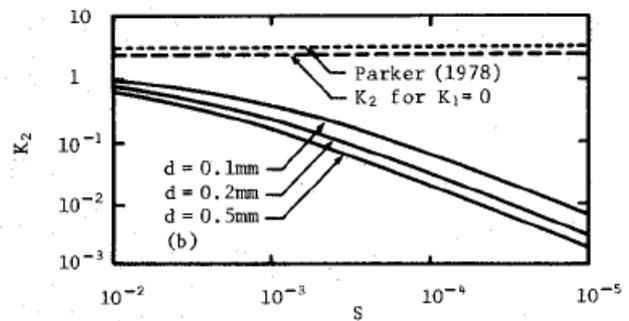


Figura 3.11 – Valori di  $K_2$  in funzione della pendenza  $i$  e del diametro  $d$  (Ikeda e Izumi, 1991)

Il tirante d'acqua adimensionale al centro del corso d'acqua  $R_0$  può essere calcolato dalla (3.126) o (3.127) risolvendo l'espressione (3.124) unita alla (3.118).

I risultati che si ottengono sembrano però sovrastimare in modo rilevante il tirante d'acqua  $h_0$  per i corsi d'acqua di pianura, in cui la pendenza longitudinale è dell'ordine di qualche decimo per mille.

### 3.3.6 Soluzione alternativa

Nella presente tesi si è fatto ricorso ad una diversa ipotesi (introdotta per la prima volta da Brunato, 2013) consistente nell'assumere che la concentrazione totale di sedimenti sia costante in ogni punto della sezione, e dunque il trasporto trasversale in sospensione sia nullo sulla sezione stessa. La concentrazione totale di sedimenti è qui definita come rapporto tra la portata solida totale (ovvero di fondo e di sospensione) in direzione longitudinale e la portata liquida.

La portata solida totale può essere invece suddivisa in una componente idrodinamica legata agli sforzi tangenziali creati dalla corrente idrica, e in una componente legata agli sforzi tangenziali determinati dalla forza di gravità direttamente agente sulla particella di sedimento posta sulla sponda inclinata.

A sua volta la concentrazione può quindi essere suddivisa nelle due componenti che verranno nominate in seguito rispettivamente come idrodinamica e gravitazionale.

La formula qui utilizzata per il calcolo della portata solida totale è quella di *Engelund e Hansen* (1968) di seguito espressa introducendo la relazione di *Chézy* in luogo alla velocità del moto uniforme:

$$\frac{q_s}{\sqrt{g\Delta d^3}} = \frac{0,05\chi^2}{g(\gamma\Delta d)^{5/2}} \tau^{5/2} \quad (3.128)$$

mentre la concentrazione si ottiene dividendo la precedente relazione della portata solida per la portata liquida, calcolabile mediante la relazione di *Chézy* in moto uniforme.

Così come fatto per la portata solida  $q_s$ , anche lo sforzo tangenziale  $\tau$  nell'equazione precedente sarà distinto nelle due componenti idrodinamica  $\tau_h$  e  $\tau_g$  gravitazionale:

$$\tau^2 = \tau_h^2 + \tau_g^2 \quad (3.129)$$

rispettivamente dovute all'azione della corrente:

$$\tau_h = \gamma h i \quad (3.130)$$

e dalla gravità:

$$\tau_g = (\gamma_s - \gamma) d \frac{dz}{dy} \quad (3.131)$$

tenendo presente che la portata liquida si può scrivere:

$$q = \chi \sqrt{h i h} \quad (3.132)$$

$$\text{con } \sqrt{hi} = \sqrt{\frac{\tau_h}{\gamma}}$$

la concentrazione totale si può esprimere come somma delle due componenti idrodinamica e gravitazionale:

$$C = C_h + C_g \quad (3.133)$$

La concentrazione idrodinamica è espressa come:

$$C_h = \frac{0,05\chi}{\gamma^2 \sqrt{g\Delta^2 d}} \frac{\tau_h^2}{h} \quad (3.134)$$

mentre la concentrazione gravitazionale è esprimibile come:

$$C_g = \frac{0,05\chi}{\gamma^2 \sqrt{g\Delta^2 d}} \frac{1}{h} d^2 (\gamma_s - \gamma)^2 \left( \frac{dz}{dy} \right)^2 \quad (3.135)$$

In definitiva la concentrazione totale, data dalla somma  $C_h + C_g$ , risulta:

$$C = \frac{0,05\chi}{\gamma^2 \sqrt{g\Delta^2 d}} \left[ \gamma^2 i^2 h + d^2 (\gamma_s - \gamma)^2 \frac{1}{h} \left( \frac{dh}{dy} \right)^2 \right] \quad (3.136)$$

La soluzione della sezione di equilibrio si calcola come detto imponendo la costanza della concentrazione, ovvero che la derivata prima della C rispetto alla distanza y sia nulla. Si ottiene dunque:

$$\frac{dC}{dy} = \frac{0,05\chi}{\gamma^2 \sqrt{g\Delta^2 d}} \left[ \gamma^2 i^2 \frac{dh}{dy} - d^2 (\gamma_s - \gamma)^2 \frac{1}{h^2} \left( \frac{dh}{dy} \right)^3 + 2d^2 (\gamma_s - \gamma)^2 \frac{1}{h} \left( \frac{dh}{dy} \right) \frac{d^2 h}{dy^2} \right] = 0 \quad (3.137)$$

ovvero che:

$$\gamma^2 i^2 h - d^2 (\gamma_s - \gamma)^2 \frac{1}{h} \left( \frac{dh}{dy} \right)^2 + 2d^2 (\gamma_s - \gamma)^2 \frac{d^2 h}{dy^2} = 0$$

che è una equazione differenziale di secondo ordine non lineare, la cui soluzione è:

$$h = c_2 \cos^2 \left( \frac{i}{2d\Delta} \left( d^2 (\gamma_s - \gamma)^2 c_1 + y \right) \right) \quad (3.138)$$

Con  $c_1$  e  $c_2$  costanti di integrazione. Imponendo che la pendenza in corrispondenza del punto d'intersezione tra la sponda e la parte centrale ( $y = 0$ ) sia nulla si ottiene:

$$\left. \frac{dh}{dy} \right|_{y=0} = c_2 \sin \left( \frac{i}{d\Delta} d^2 (\gamma_s - \gamma)^2 c_1 \right) = 0 \rightarrow c_1 = 0 \quad (3.139)$$

mentre in corrispondenza dell'asse del corso d'acqua (cioè per  $y = 0$ ) imponendo  $h = h_0$  si ottiene  $c_2 = h_0$

In definitiva l'equazione del profilo in equilibrio risulta:

$$h = h_0 \cos^2 \left( \frac{i}{2\Delta d} y \right) \quad (3.140)$$

La larghezza della sponda  $B_s$  si ottiene imponendo il valore nullo all'equazione precedente ovvero che l'argomento del coseno sia  $\pi/2$ :

$$B_s = \pi \frac{\Delta d}{i} \quad (3.141)$$

Come è possibile osservare la larghezza della sponda risulta univocamente definita una volta che si conosce la pendenza del corso d'acqua e il diametro dei sedimenti.

## Capitolo 4 Confronto fra le soluzioni “fisicamente basate”

### 4.1 Introduzione

Nel presente capitolo verrà fatto un confronto fra i risultati restituiti dalle tre soluzioni rappresentative dei tre metodi che costituiscono le soluzioni “fisicamente basate”. Come soluzione rappresentativa del metodo del moto incipiente è stata scelta la soluzione di *Parker* (1978), per il metodo dell’equilibrio dei flussi trasversali è stata scelta la soluzione di *Ikeda e Izumi* (1991), mentre per il metodo dell’equilibrio della concentrazione si fa riferimento alla soluzione alternativa.

### 4.2 Confronto fra le forme dei profili della sponda

Da un semplice confronto fra i profili della sponda ottenuti dalle tre diverse soluzioni è immediato osservare che i profili differiscono nella forma. La soluzione alternativa e di *Parker* (1978) hanno entrambe un profilo cosenoidale che dipende esplicitamente dalle caratteristiche idrauliche e sedimentologiche come la pendenza longitudinale del corso d’acqua e il diametro dei sedimenti. La soluzione alternativa presenta un punto di flesso in corrispondenza del punto estremo della sponda, mentre la soluzione di *Parker* (1978) presenta un punto di flesso in corrispondenza della mezzeria della sponda. Per ottenere il profilo della sponda per la soluzione di *Ikeda e Izumi* (1991) si deve ricorrere invece ad una integrazione numerica. Si ottiene un profilo la cui forma dipende implicitamente anche dal diametro dei sedimenti e dalla pendenza longitudinale del corso d’acqua. Il profilo così ottenuto avrà una forma progressivamente più incassata all’aumentare del diametro dei sedimenti e al diminuire della pendenza longitudinale del corso d’acqua. Nella figura che segue verranno rappresentati in forma adimensionale i profili della sponda ottenuti dalle tre soluzioni rappresentative.

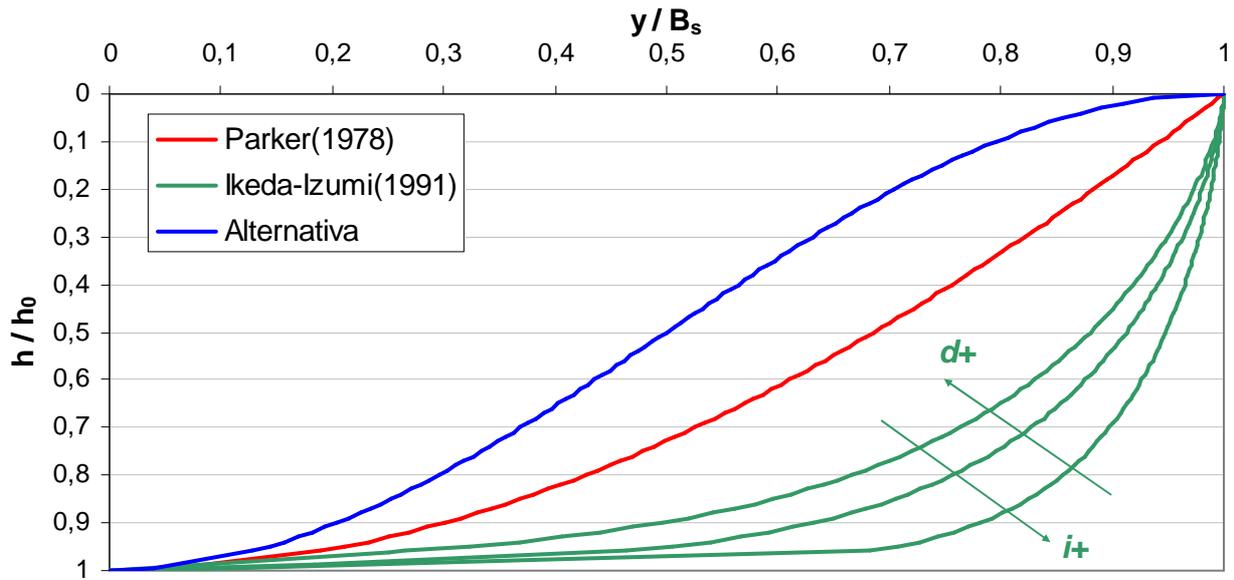


Figura 4.1 – Profili di equilibrio della sponda per le tre soluzioni rappresentative

### 4.3 Confronto fra le profondità della corrente in asse

Le soluzioni di *Parker* (1978) e *Ikeda e Izumi* (1991) consentono di determinare, come visto nel capitolo 3, anche la profondità della corrente al centro della sezione in condizioni di equilibrio. La soluzione alternativa invece lascia indeterminato il valore di questa grandezza. Per questo motivo, in questo paragrafo, viene rappresentato il confronto fra il valore della profondità della corrente in equilibrio per le due soluzioni rappresentative del metodo del moto incipiente e dell'equilibrio dei flussi trasversali.

Per la soluzione di *Parker* (1978) tale profondità può essere espressa dalla seguente relazione:

$$h_0 = 7.56 \times 10^{-2} d \cdot i^{-1} \quad (4.1)$$

dove:

$i[-]$ : pendenza longitudinale del corso d'acqua

$d[m]$ : diametro caratteristico dei sedimenti

Per la soluzione di *Ikeda e Izumi* (1991) la profondità al centro della sezione in equilibrio può essere espressa, con un discreto grado di approssimazione, dalla seguente relazione:

$$h_0 = 6.05 \times 10^4 d^2 \cdot i^{-0.5} \quad (4.2)$$

dove:

$i[-]$ : pendenza longitudinale del corso d'acqua

$d[m]$ : diametro caratteristico dei sedimenti

#### 4.4 Confronto fra le portate liquide

Un ulteriore confronto che può essere considerato è tra la portata liquida convogliata dalla sponda per le tre diverse soluzioni rappresentative. Per quanto riguarda la soluzione alternativa la portata liquida convogliata dalla sponda può essere calcolata integrando sulla larghezza della sponda stessa il seguente differenziale:

$$dQ = \chi h^{3/2} i^{1/2} dy \quad (4.3)$$

dove:

$h$ : profondità della corrente

$i$ : pendenza longitudinale del corso d'acqua

$\chi$ : coefficiente di Chézy

sostituendo alla precedente la relazione che esprime la profondità della corrente in condizione di equilibrio si ottiene:

$$Q = \chi^{1/2} h_0^{3/2} \int_0^{B_s} \cos^3 \left( \frac{\pi}{2B_s} y \right) dy \quad (4.4)$$

dove:

$h_0$  : profondità della corrente al centro della sezione

$i$  : pendenza longitudinale del corso d'acqua

$\chi$  : coefficiente di Chézy

$B_s$  : larghezza della sponda

che diventa:

$$Q = \chi i^{1/2} h_0^{3/2} \left[ \frac{9 \sin\left(\frac{\pi}{2B_s} y\right) + \sin\left(3 \frac{\pi}{2B_s} y\right)}{12 \frac{\pi}{2B_s}} \right]_0^{B_s} \quad (4.5)$$

dove:

$h_0$  : profondità della corrente al centro della sezione

$i$  : pendenza longitudinale del corso d'acqua

$\chi$  : coefficiente di Chézy

$B_s$  : larghezza della sponda

Risolvendo si ottiene in definitiva:

$$Q = \frac{4}{3} \chi h_0^{3/2} \frac{\Delta d}{\sqrt{i}} \quad (4.6)$$

dove:

$h_0$  : profondità della corrente al centro della sezione

$i$  : pendenza longitudinale del corso d'acqua

$\chi$  : coefficiente di Chézy

$\Delta$  : peso specifico immerso

$d$  : diametro caratteristico dei sedimenti

Per quanto riguarda le altre due soluzioni rappresentative la portata liquida è stata determinata per via numerica. In questo caso il coefficiente di *Chézy* è stato assunto variabile con il numero di *Reynolds*. In particolare, per il regime di moto di transizione ( $700 < \text{Re} < 25000$ ) il coefficiente di resistenza di *Darcy – Weisbach* può essere assunto pari a (*Blasius*, 1913):

$$f = \frac{0,224}{\text{Re}^{1/4}} \quad (4.7)$$

dove:

$$f = \frac{8g}{\chi^2} \quad (4.8)$$

$$\text{Re} = \frac{\chi h^{1/2} i^{1/2}}{\nu} \quad (4.9)$$

$f$  : coefficiente di Darcy – Weisbach

Re : numero di Reynolds

$h$  : profondità della corrente

$i$  : pendenza longitudinale del corso d'acqua

$\chi$  : coefficiente di Chézy

$\nu$  : viscosità cinematica

$g$  : accelerazione di gravità

combinando tra loro le precedenti relazioni si ottiene il coefficiente di *Chézy*:

$$\chi = \left( \frac{8gi^{1/8}}{0.224\nu^{1/4}} \right)^{4/7} h^{3/14} \quad (4.10)$$

dove:

$h$  : profondità della corrente

$i$  : pendenza longitudinale del corso d'acqua

$\nu$  : viscosità cinematica

$g$  : accelerazione di gravità

é importante osservare come la relazione della portata della soluzione alternativa sia stata ricavata considerando un valore di  $\chi$  costante. Tuttavia i risultati ottenuti per integrazione numerica della stessa soluzione, considerando un coefficiente  $\chi$  variabile, risultano essere comparabili alla soluzione ottenuta con  $\chi$  costante, purché si assuma per lo stesso un opportuno valore mediato sull'intera sezione della sponda.

Nella Figura 4.2 è rappresentata la variazione della portata liquida, in funzione del diametro caratteristico dei sedimenti e dalla pendenza longitudinale del corso d'acqua, per la soluzione di *Parker* (1978). Considerando un valore della profondità della corrente al centro della sezione pari a quello ottenuto dalla soluzione di *Parker* (1978) e assumendo  $\chi$  variabile, si determina la variazione della portata liquida per la soluzione alternativa rappresentata in Figura 4.3.

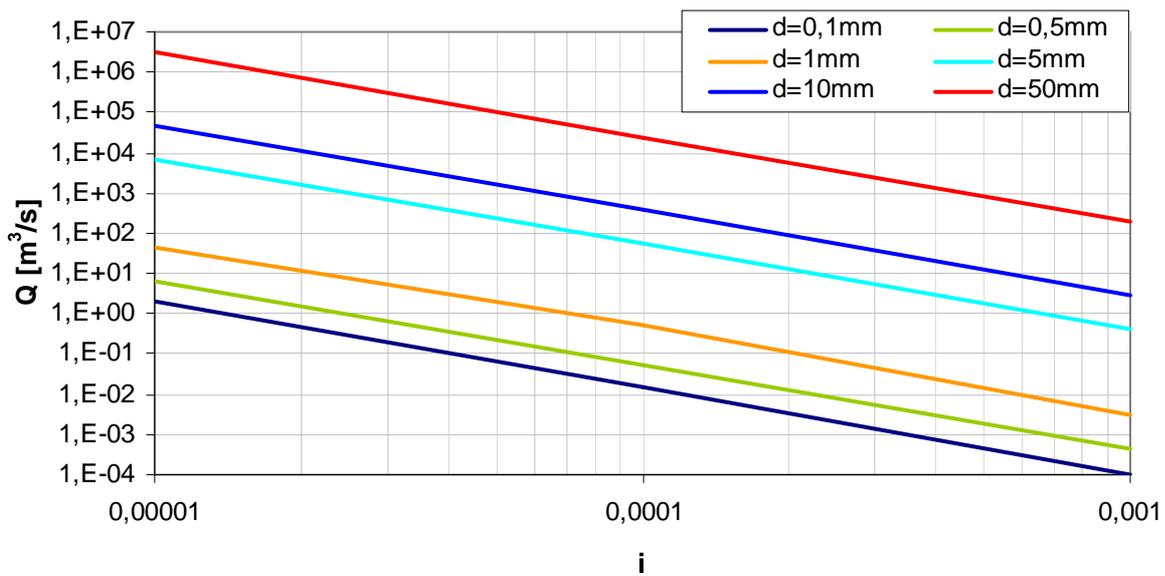


Figura 4.2 – Portata liquida convogliata dalla sponda ottenuta dalla soluzione di *Parker* (1978)

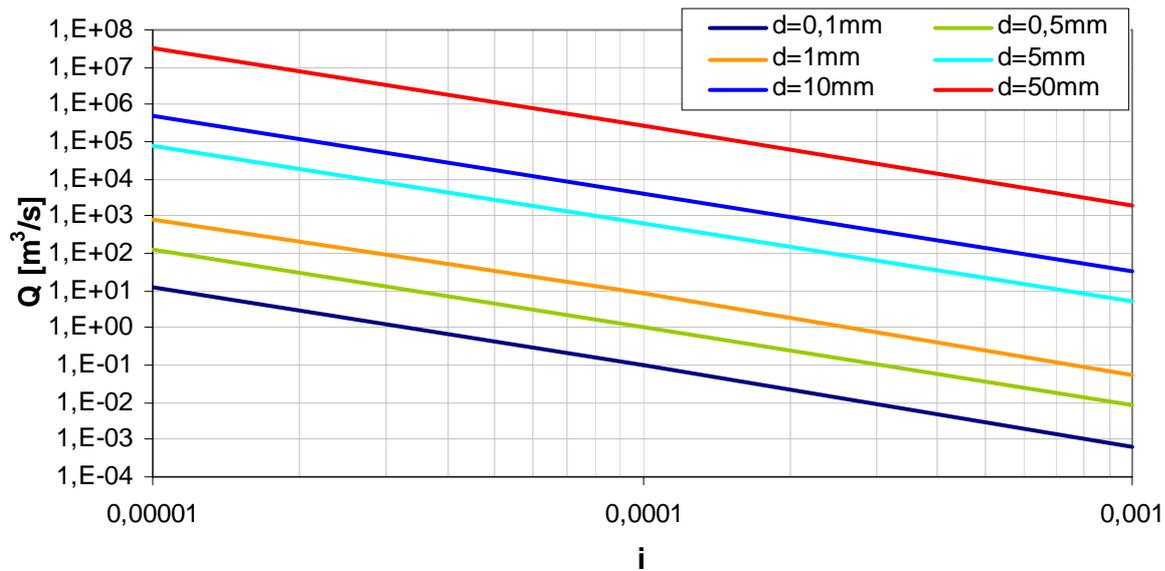


Figura 4.3 – Portata liquida convogliata dalla sponda ottenuta dalla soluzione alternativa considerando  $h_0$  della soluzione di *Parker* (1978)

Con l'ipotesi appena fatta, la relazione della portata liquida (espressa in  $m^3/s$ ) per la soluzione alternativa, può esprimersi come segue:

$$Q = 1.3 \cdot d^{2.5} i^{-2.1} \quad (4.11)$$

dove:

$i[-]$ : pendenza longitudinale del corso d'acqua

$d[m]$ : diametro caratteristico dei sedimenti

mentre la portata liquida (espressa in  $m^3/s$ ) della soluzione di *Parker* (1978) può essere espressa come segue:

$$Q = 9.54 \times 10^{-2} \cdot d^{2.5} i^{-2.1} \quad (4.12)$$

dove:

$i[-]$ : pendenza longitudinale del corso d'acqua

$d[m]$ : diametro caratteristico dei sedimenti

Nella Figura 4.4 è invece rappresentata la variazione della portata liquida per la soluzione di *Ikeda e Izumi* (1991).

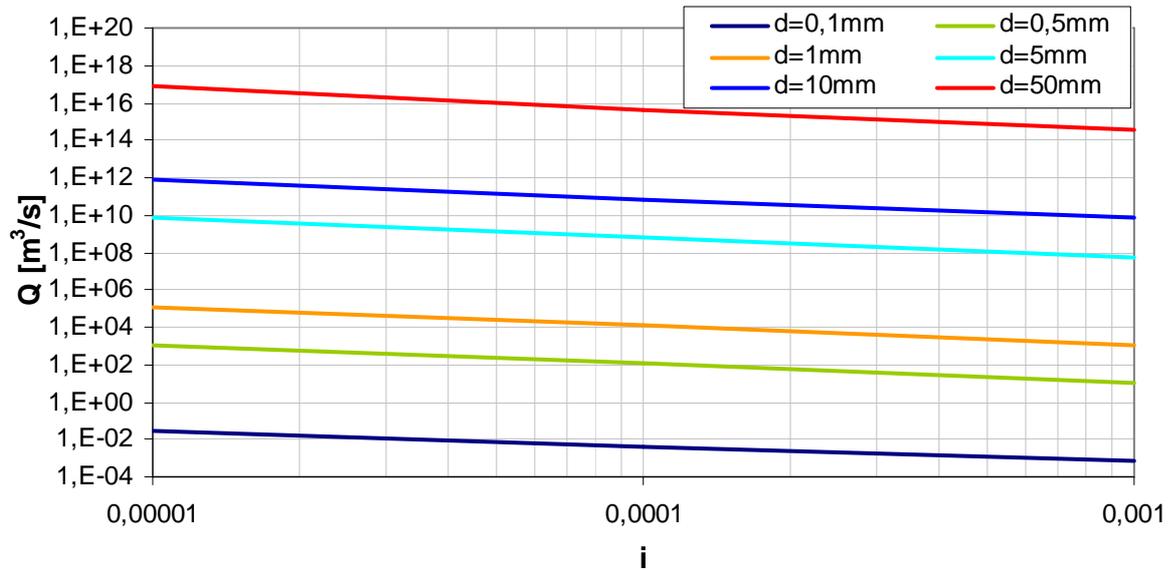


Figura 4.4 – Portata liquida convogliata dalla sponda ottenuta dalla soluzione di *Ikeda e Parker* (1992)

Considerando per la soluzione alternativa un valore del tirante al centro pari a quello che si ottiene dalla soluzione di *Ikeda e Izumi* (1991) e  $\chi$  variabile la variazione della portata liquida è rappresentata in Figura 4.5.

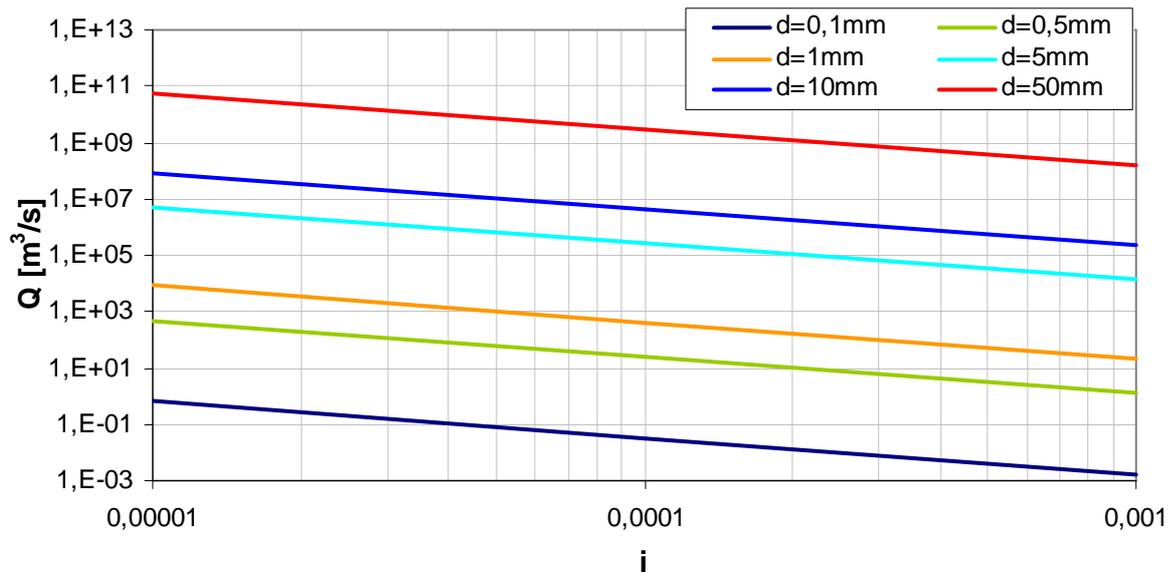


Figura 4.5 – Portata liquida convogliata dalla sponda ottenuta dalla soluzione alternativa considerando  $h_0$  della soluzione di Ikeda e Izumi (1991)

la portata liquida (espressa in  $m^3 / s$ ) per la soluzione alternativa può essere espressa come:

$$Q = 4.40 \times 10^9 \cdot d^{4.1} i^{-1.3} \quad (4.13)$$

dove:

$i[-]$ : pendenza longitudinale del corso d'acqua

$d[m]$ : diametro caratteristico dei sedimenti

mentre per la soluzione Ikeda e Izumi (1991) la portata liquida (espressa in  $m^3 / s$ ) diventa:

$$Q = 1.28 \times 10^{19} \cdot d^{6.3} i^{-1.0} \quad (4.14)$$

dove:

$i[-]$ : pendenza longitudinale del corso d'acqua

$d[m]$ : diametro caratteristico dei sedimenti

#### 4.5 Confronto fra le portate solide longitudinali

Analogamente a quanto fatto per la portata liquida, anche la portata solida longitudinale può essere di particolare interesse per effettuare un confronto fra le tre soluzioni rappresentative.

Per quanto riguarda la soluzione alternativa, la portata solida longitudinale può essere calcolata dalla relazione di *Engelund e Hansen* (1967), che esplicitata in termini di profondità della corrente diventa:

$$q_s = \alpha \cdot h^{5/2} \quad (4.15)$$

dove:

$$\alpha = \frac{0.05 \chi^2 i^{5/2}}{\sqrt{g \Delta^2 d}} \quad (4.16)$$

$h$  : profondità della corrente

$\chi$  : coefficiente di Chézy

Assumendo  $\chi$  costante, la portata solida longitudinale convogliata dall'intera sponda del corso d'acqua può essere ottenuta integrando sulla larghezza della sponda stessa il seguente differenziale:

$$dQ_s = q_s dy \quad (4.17)$$

sostituendo alla precedente l'equazione ricavata per la  $q_s$  si ottiene:

$$Q_s = \alpha \cdot h_0^{5/2} \int_0^{B_s} \cos^5 \left( \frac{\pi}{2B_s} y \right) dy \quad (4.18)$$

dove:

$h_0$  : profondità della corrente al centro della sezione

$B_s$  : larghezza della sponda

$\alpha$  : coefficiente definito dalla (4.16)

che diventa:

$$Q_s = \alpha \cdot h_0^{5/2} \left[ \frac{150 \sin\left(\frac{\pi}{2B_s} y\right) + 25 \sin\left(3 \frac{\pi}{2B_s} y\right) + 3 \sin\left(5 \frac{\pi}{2B_s} y\right)}{240 \frac{\pi}{2B_s}} \right]_0^{B_s} \quad (4.19)$$

dove:

$h_0$  : profondità della corrente al centro della sezione

$B_s$  : larghezza della sponda

$\alpha$  : coefficiente definito dalla (4.16)

Risolvendo si ottiene in definitiva:

$$Q_s = \frac{16}{15} \alpha \cdot h_0^{5/2} \frac{\Delta d}{i} \quad (4.20)$$

dove:

$h_0$  : profondità della corrente al centro della sezione

$i$  : pendenza longitudinale del corso d'acqua

$\Delta$  : peso specifico immerso

$d$  : diametro caratteristico dei sedimenti

$\alpha$  : coefficiente definito dalla (4.16)

In Figura 4.6 è rappresentata la variazione della portata solida per la soluzione di *Parker* (1978). In Figura 4.7 è invece rappresentata la variazione della portata solida della soluzione alternativa avendo considerato una profondità al centro della sezione pari a quella ottenuta dalla soluzione di *Parker* (1978) e  $\chi$  variabile.

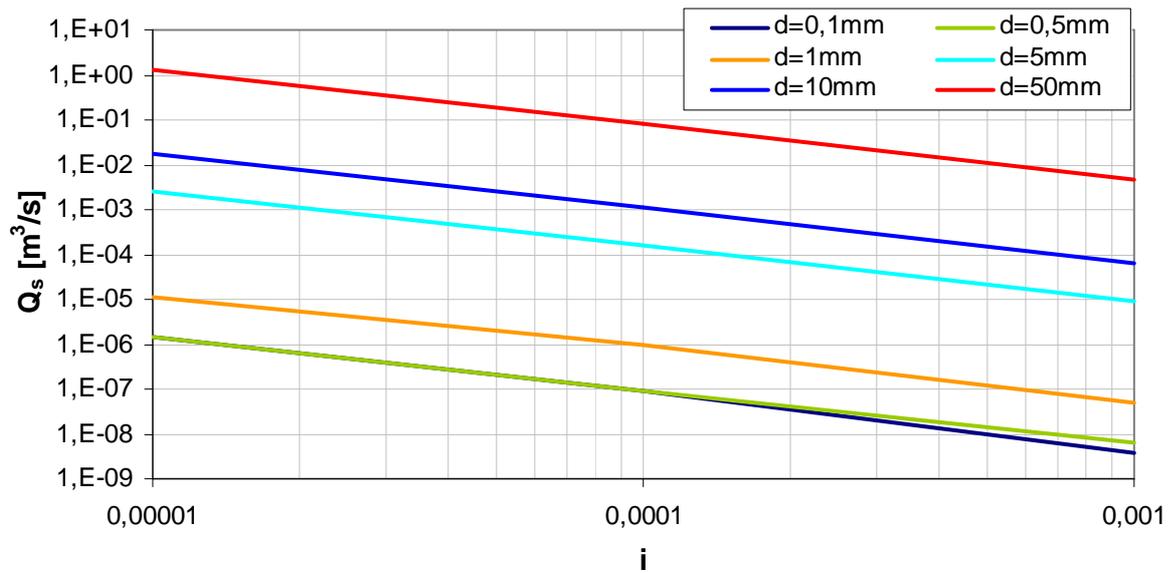


Figura 4.6– Portata solida longitudinale convogliata dalla sponda ottenuta dalla soluzione di *Parker* (1978)

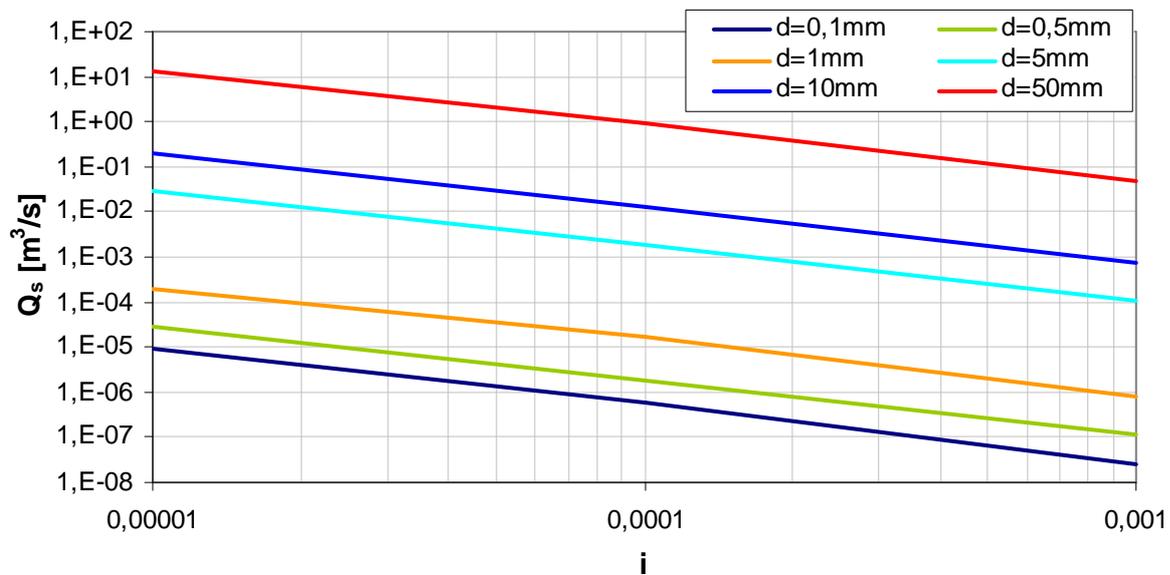


Figura 4.7 – Portata solida convogliata dalla sponda ottenuta dalla soluzione alternativa considerando  $h_0$  della soluzione di *Parker* (1978)

Con tali ipotesi la portata solida longitudinale ( $m^3/s$ ) per la soluzione alternativa può essere espressa dalla seguente relazione:

$$Q_s = 1.38 \times 10^{-2} d^{2.5} i^{-1.2} \quad (4.21)$$

dove:

$i[-]$ : pendenza longitudinale del corso d'acqua

$d[m]$ : diametro caratteristico dei sedimenti

Mentre per la soluzione di *Parker* (1978) la portata solida longitudinale ( $m^3 / s$ ) può essere espressa dalla seguente relazione:

$$Q_s = 1.04 \times 10^{-3} d^{2.5} i^{-1.2} \quad (4.22)$$

dove:

$i[-]$ : pendenza longitudinale del corso d'acqua

$d[m]$ : diametro caratteristico dei sedimenti

La Figura 4.8 rappresenta la variazione della portata solida per la soluzione di *Ikeda e Parker* (1992).

La Figura 4.9 è invece rappresentata la variazione della portata solida della soluzione alternativa avendo considerato una profondità al centro della sezione pari a quella ottenuta dalla soluzione di *Ikeda e Izumi* (1991) e  $\chi$  variabile.

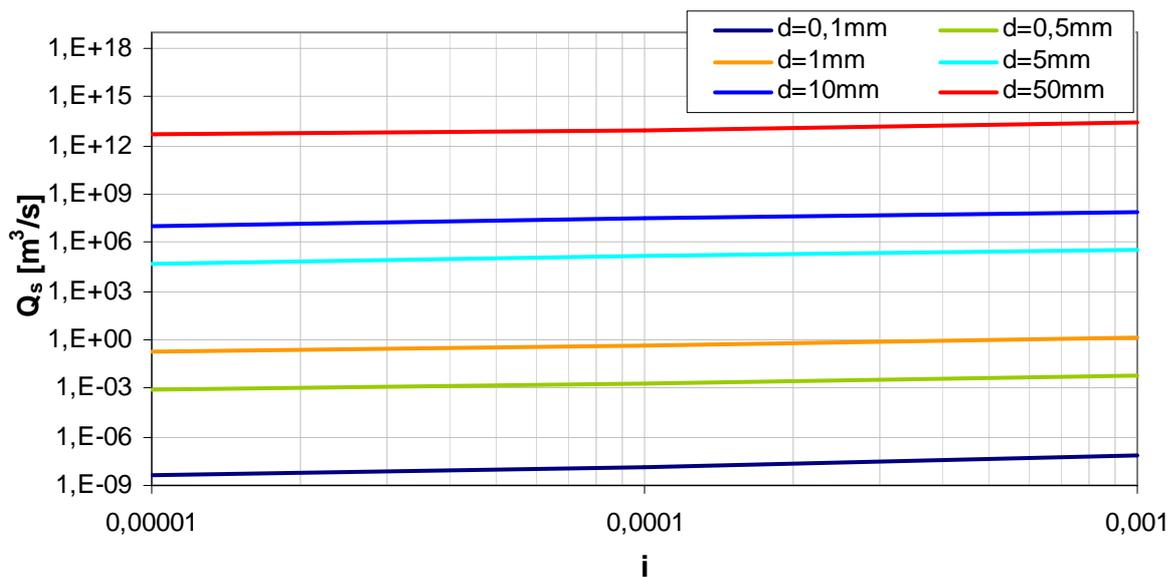


Figura 4.8 – Portata solida convogliata dalla sponda ottenuta dalla soluzione di *Ikeda e Izumi* (1991)

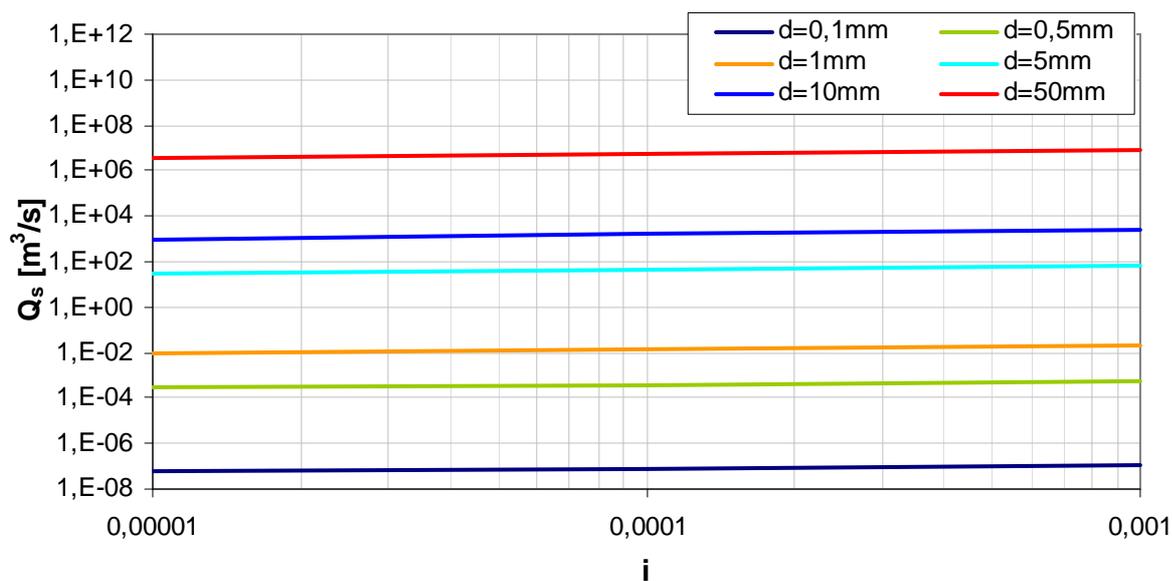


Figura 4.9 – Portata solida convogliata dalla sponda ottenuta dalla soluzione alternativa considerando  $h_0$  della soluzione di Ikeda e Izumi (1991)

Con tali ipotesi la portata solida longitudinale ( $m^3/s$ ) per soluzione alternativa, con un discreto grado di approssimazione, diventa:

$$Q_s = 1.77 \times 10^{14} d^{5.2; 8.27 \times 10^{-3} \ln d + 0.21} i \quad (4.23)$$

dove:

$i[-]$ : pendenza longitudinale del corso d'acqua

$d[m]$ : diametro caratteristico dei sedimenti

Mentre per la soluzione di Ikeda e Izumi (1991) la portata solida longitudinale ( $m^3/s$ ) può essere espressa, con un discreto grado di approssimazione, dalla seguente relazione:

$$Q_s = 7.62 \times 10^{23} d^{7.4; -3.78 \times 10^{-2} \ln d + 0.21} i \quad (4.24)$$

dove:

$i[-]$ : pendenza longitudinale del corso d'acqua

$d[m]$ : diametro caratteristico dei sedimenti

#### 4.6 Confronto fra le larghezze della sponda

Come precedentemente ricavato, la larghezza della sponda per la soluzione alternativa risulta:

$$B_s = \pi \Delta \cdot d \cdot i^{-1} \quad (4.25)$$

dove:

$i$ : pendenza longitudinale del corso d'acqua

$d$ : diametro caratteristico dei sedimenti

Per quanto riguarda la soluzione di *Parker* (1978), la larghezza della sponda può essere espressa dalla seguente relazione:

$$B_s = 0.28 \cdot d \cdot i^{-1} \quad (4.26)$$

dove:

$i[-]$ : pendenza longitudinale del corso d'acqua

$d[m]$ : diametro caratteristico dei sedimenti

Mentre per la soluzione di *Ikeda e Izumi* (1991), la larghezza della sponda può essere espressa, con un discreto grado di approssimazione, dalla seguente relazione:

$$B_s = 4.24 \times 10^9 \cdot d^{3.1} \cdot i^{-5.70 \times 10^{-2} \ln d + 1.05} \quad (4.27)$$

dove:

$i[-]$ : pendenza longitudinale del corso d'acqua

$d[m]$ : diametro caratteristico dei sedimenti

La Figura 4.10 rappresenta il confronto fra la larghezza della sponda ottenuta dalla soluzione alternativa e la larghezza ottenuta dalla soluzione di *Parker* (1978).

La Figura 4.11 rappresenta il confronto fra la larghezza ottenuta dalla soluzione alternativa e la larghezza ottenuta dalla soluzione di *Ikeda e Izumi* (1991). Come si osserva, la soluzione alternativa restituisce risultati comparabili con la soluzione di *Ikeda e Izumi* (1991) per un diametro caratteristico dei sedimenti pari a 0.5 mm.

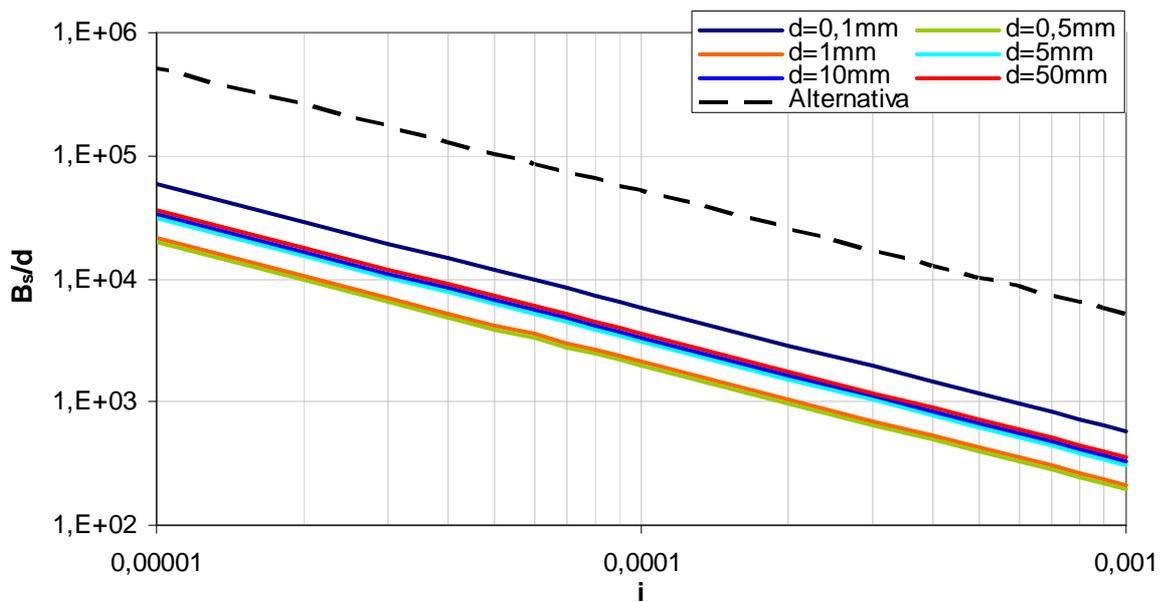


Figura 4.10 – Confronto fra la larghezza ottenuta dalla soluzione alternativa e dalla soluzione di *Parker* (1978)

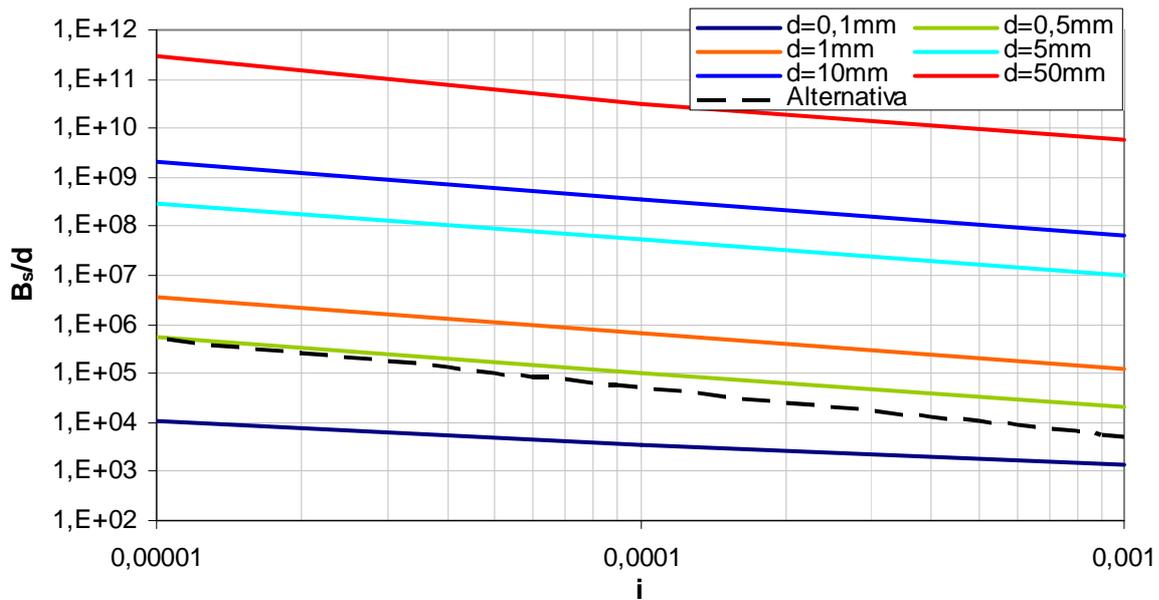


Figura 4.11 – Confronto fra la larghezza ottenuta dalla soluzione alternativa e dalla soluzione di Ikeda e Izumi (1991)

## Capitolo 5 Sezioni transitorie di quasi-equilibrio per la soluzione alternativa

### 5.1 Introduzione

In questo capitolo verrà trattato il fenomeno di evoluzione temporale della sponda, partendo da una configurazione iniziale equilibrata, in cui viene introdotta una perturbazione a gradino, a scala stagionale, del livello idrico. Si ipotizza che l'evoluzione temporale avvenga attraverso una successione di configurazioni equilibrate della sponda così da realizzare un processo di quasi-equilibrio.

### 5.2 Soluzione numerica

Ricordando la relazione che descrive la concentrazione totale di sedimento si ottiene:

$$C = C_0 \left[ \frac{h}{h_0} - K \frac{h_0}{h} \left( \frac{dh}{dy} \right)^2 \right] \quad (5.1)$$

dove:

$h$  : profondità della corrente

$h_0$  : profondità della corrente al centro della sezione

$B_s$  : larghezza della sponda

$C_0$  : concentrazione al centro della sezione

$$K = \left( \frac{B_s}{\pi \cdot h_0} \right)^2 \quad (5.2)$$

derivando la (5.1) si ottiene:

$$\frac{dC}{dy} = C_0 \left[ \frac{1}{h_0} \frac{dh}{dy} + K \frac{h_0}{h^2} \left( \frac{dh}{dy} \right)^3 - 2K \frac{h_0}{h} \left( \frac{dh}{dy} \right) \frac{d^2h}{dy^2} \right] \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2C}{dy^2} = C_0 \left[ \frac{1}{h_0} \frac{d^2h}{dy^2} - 2K \frac{h_0}{h^3} \left( \frac{dh}{dy} \right)^4 + 3K \frac{h_0}{h^2} \left( \frac{dh}{dy} \right)^2 \frac{d^2h}{dy^2} + 2K \frac{h_0}{h^2} \left( \frac{dh}{dy} \right)^2 \frac{d^2h}{dy^2} + \right. \\ \left. - 2K \frac{h_0}{h} \left( \frac{d^2h}{dy^2} \right)^2 - 2K \frac{h_0}{h} \left( \frac{dh}{dy} \right) \frac{d^3h}{dy^3} \right] \quad (5.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2C}{dy^2} = C_0 \left[ \frac{1}{h_0} \frac{d^2h}{dy^2} - 2K \frac{h_0}{h^3} \left( \frac{dh}{dy} \right)^4 + 5K \frac{h_0}{h^2} \left( \frac{dh}{dy} \right)^2 \frac{d^2h}{dy^2} + \right. \\ \left. - 2K \frac{h_0}{h} \left( \frac{d^2h}{dy^2} \right)^2 - 2K \frac{h_0}{h} \left( \frac{dh}{dy} \right) \frac{d^3h}{dy^3} \right] \quad (5.5) \end{aligned}$$

le condizioni di equilibrio impongono che:

$C = C_0 = \text{costante}$  oppure  $dC/dy = 0$ , per cui:

$$\left[ \frac{h}{h_0} - K \frac{h_0}{h} \left( \frac{dh}{dy} \right)^2 \right] = 1 \quad (5.6)$$

$$\left[ \frac{1}{h_0} \frac{dh}{dy} + K \frac{h_0}{h^2} \left( \frac{dh}{dy} \right)^3 - 2K \frac{h_0}{h} \left( \frac{dh}{dy} \right) \frac{d^2h}{dy^2} \right] = 0 \quad (5.7)$$

che danno come risultato la già nota relazione del profilo in equilibrio:

$$h = h_{0eq} \cos^2 \left( \frac{\pi}{2B_s} y \right) \quad (5.8)$$

supponendo di variare il livello  $h_{0eq}$  e di portarlo ad un nuovo livello  $h_0$  si ottiene:

$$h = h_0 - h_{0eq} \sin^2 \left( \frac{\pi}{2B_s} y \right) \quad (5.9)$$

$$\frac{dh}{dy} = -h_{0eq} \frac{\pi}{2B_s} \sin \left( \frac{\pi}{B_s} y \right) \quad (5.10)$$

$$\frac{d^2h}{dx^2} = -\frac{1}{2} h_{0eq} \left( \frac{\pi}{B_s} \right)^2 \cos \left( \frac{\pi}{B_s} y \right) \quad (5.11)$$

$$\frac{d^3h}{dx^3} = \frac{1}{2} h_{0eq} \left( \frac{\pi}{B} \right)^3 \sin \left( \frac{\pi}{B_s} y \right) \quad (5.12)$$

$$\frac{h}{h_0} = 1 - \frac{h_{0eq}}{h_0} \sin^2 \left( \frac{\pi}{2B_s} y \right) \quad (5.13)$$

la portata solida per unità di larghezza vale:

$$q_{BL} = -\varepsilon \cdot h \frac{dC}{dy} \quad (5.14)$$

$$\frac{dq_{BL}}{dy} = -\varepsilon \cdot \left( \frac{dh}{dy} \frac{dC}{dy} + h \frac{d^2C}{dy^2} \right) \quad (5.15)$$

$$\frac{dh}{dx} \frac{dC}{dx} = C_0 \left[ \frac{1}{h_0} \left( \frac{dh}{dy} \right)^2 + K \frac{h_0}{h^2} \left( \frac{dh}{dy} \right)^4 - 2K \frac{h_0}{h} \left( \frac{dh}{dy} \right)^2 \frac{d^2h}{dy^2} \right] \quad (5.16)$$

$$h \frac{d^2C}{dy^2} = C_0 \left[ \frac{h}{h_0} \frac{d^2h}{dy^2} - 2K \frac{h_0}{h^2} \left( \frac{dh}{dy} \right)^4 + 5K \frac{h_0}{h} \left( \frac{dh}{dy} \right)^2 \frac{d^2h}{dy^2} + \right. \\ \left. - 2K \frac{h_0}{1} \left( \frac{d^2h}{dy^2} \right)^2 - 2K \frac{h_0}{1} \left( \frac{dh}{dy} \right) \frac{d^3h}{dy^3} \right] \quad (5.17)$$

$$\frac{dq_{BL}}{dy} = -\varepsilon \left( \frac{dh}{dy} \frac{dC}{dy} + h \frac{d^2C}{dy^2} \right) = \\ -\varepsilon \cdot C_0 \left[ \frac{1}{h_0} \left( \frac{dh}{dy} \right)^2 + \frac{h}{h_0} \frac{d^2h}{dy^2} - K \frac{h_0}{h^2} \left( \frac{dh}{dy} \right)^4 + 3K \frac{h_0}{h} \left( \frac{dh}{dy} \right)^2 \frac{d^2h}{dy^2} + \right. \\ \left. - 2K \frac{h_0}{1} \left( \frac{d^2h}{dy^2} \right)^2 - 2K \frac{h_0}{1} \left( \frac{dh}{dy} \right) \frac{d^3h}{dy^3} \right] \quad (5.18)$$

A questo punto è possibile richiamare l'equazione di *Exner* per risolvere il problema:

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{dq_{BL}}{dy} \quad (5.19)$$

sostituendo alla precedente si ottiene:

$$\frac{dz}{dt} = -\varepsilon \cdot C_0 [\dots] \quad (5.20)$$

dove è possibile assumere un valor medio di  $\varepsilon$  :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{6} u^* h_0 = \frac{k}{12} \sqrt{gi} \cdot h_0^{3/2} \quad (5.21)$$

L'equazione (5.19) può essere integrata numericamente.

Una soluzione più semplice può infine essere ottenuta osservando che i profili di quasi-equilibrio differiscono tra loro per il valore di  $h$  al centro della sezione. Si può quindi pensare a delle soluzioni dipendenti dal tempo attraverso una costante  $A(t)$ . L'equazione (5.9) diventa:

$$h = h_0 - A(t) \cdot h_{0eq} \sin^2 \left( \frac{\pi}{2B_s} y \right) \quad (5.22)$$

Sostituendo la precedente nella (5.19) e risolvendo la (5.20) può essere ricavata la variabile  $A(t)$ .

Calcolando per semplicità in corrispondenza di  $B_s$  si ottiene:

$$\frac{dA(t)}{dt} = A(t) \frac{1}{2} \varepsilon \alpha \cdot h_{0eq} \left( \frac{\pi}{B_s} \right)^2 \frac{1}{r} \quad (5.23)$$

dove:

$B_s$  : larghezza della sponda

$h_0$  : profondità della corrente al centro della sezione

$$r = h_{0eq} / h_0 \quad (5.24)$$

che integrata con la condizioni al contorno che per  $t = 0$ ,  $A = 1$ , fornisce:

$$A(t) = \exp(a \cdot t) \quad (5.25)$$

dove:

$$a = \frac{1}{2} \varepsilon \alpha \cdot h_{0eq} \left( \frac{\pi}{B_s} \right)^2 \frac{1}{r} \quad (5.26)$$

$$\alpha = \frac{0,05\chi \cdot i^2}{\sqrt{g\Delta^2d}} \quad (5.27)$$

Per fare un esempio si può considerare un diametro  $d=0,2\text{mm}$  e una pendenza longitudinale  $i=0,01\%$  (valori tipici per le sezioni del fiume *Po* a valle forniti da *Colombo e Filippi*, 2010). Considerando  $\chi=50 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$  in prima approssimazione si ottiene la seguente evoluzione temporale nel caso in cui  $r = 0,80$  e  $1,20$ .

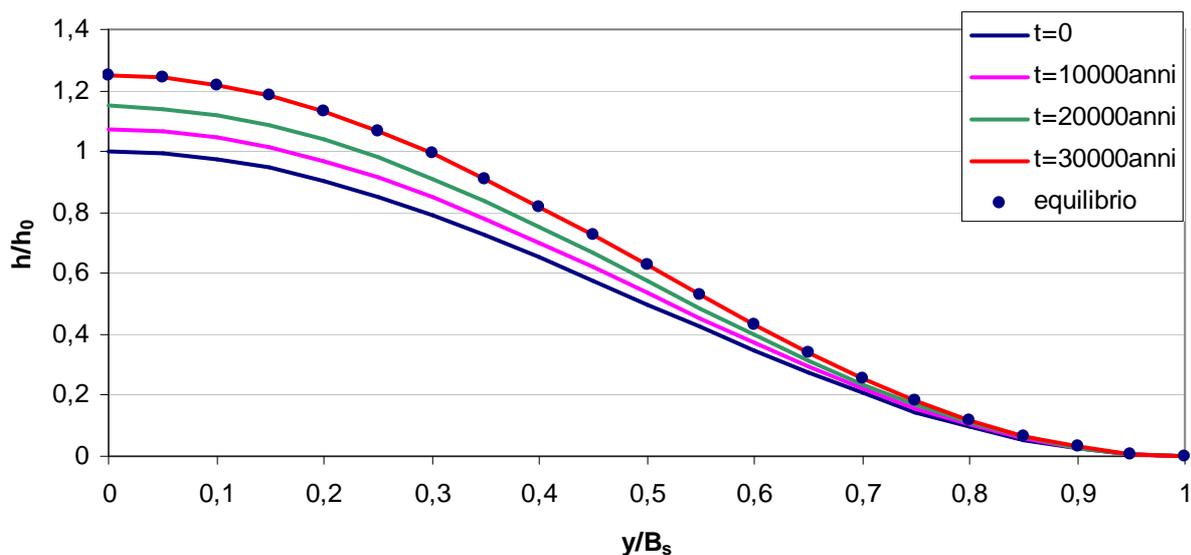


Figura 5.1 – Evoluzione temporale della sezione della sponda per  $r = 0,8$

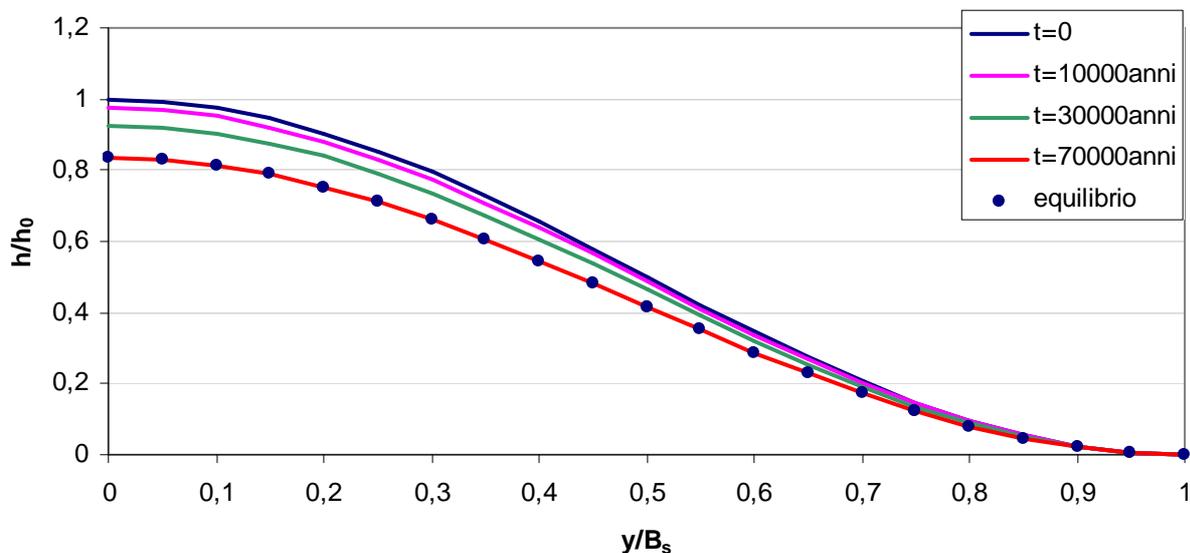


Figura 5.2 – Evoluzione temporale della sezione della sponda per  $r = 1,2$

### **5.3 Conclusioni**

Le valutazioni fatte precedentemente mettono in evidenza un tempo di adattamento della sezione di equilibrio, alla perturbazione introdotta, estremamente lungo ( $>10^4$  anni). Questo significa che perturbazioni a scala stagionale della portata (oscillazioni idrologiche) producono cambiamenti impercettibili della forma della sezione. Anche variazioni permanenti della portata equivalente, legate a cambiamenti climatici (riscaldamento globale) e interventi antropici (sovrautilizzo) sembrano non influire sostanzialmente sulla forma della sezione.



## Bibliografia

Brunato, L., Modelli Matematici per la Previsione della Sezione d'Alveo in Condizioni di Regime: Tesi di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile, Università di Padova, a.a 2012-2013.

Colombo, A. e Filippi, F. (2010) "La Conoscenza delle Forme e dei Processi Fluviali per la Gestione dell'Assetto Morfologico del Fiume Po" *Biologia Ambientale*, 24 (1), 331 – 348.

Di Silvio, G. (1978) "Modelli Matematici per lo Studio della Propagazione di Onde Lunghe e del Trasporto di Materia nei Corsi D'Acqua e nelle Zone Costiere", in: *Atti Del Convegno su Metodologie Numeriche per la Soluzione di Equazione Differenziali Dell'Idrologia e Dell'Idraulica* (Bressanone, 12 – 17 giugno), Bologna – Padova.

Diplas, P. (1990) "Characteristics of Self-formed Straight Channels" *J.Hydraul.Eng.*, 116 (5), 707 – 728.

Diplas, P. and Vigilar, G. (1992) "Hydraulic Geometry of Threshold Channels." *J. Hydraul.Eng.*, 118 (4), 597 – 614.

Eaton, B.C., (2010) *Hydraulic Geometry: Empirical Investigations and Theoretical Approaches*, The University of British Columbia 1984 West Mall, Vancouver.

Engelund, F. and Hansen, E. (1967) *A Monograph on Sediment Transport in Alluvial Streams*, Teknisk Forlag, Copenhagen, Denmark.

García, M., Laursen, E., Michel, C. and Buffington, J. (2000) "The Legend of A. F. Shields." *J. Hydraul. Eng.*, 126(9), 718–723.

Ikeda, S. (1989) "Sediment Transport and Sorting at Bends", *Water Resources Monograph*, 12, 103 – 125.

Ikeda, S. and Izumi, N. (1990) "Width and Depth of Self-formed Straight Gravel Rivers with Bank Vegetation" *Water Resources Research*, 26 (10), 2353 – 2364.

Ikeda, S. and Izumi, N. (1991) "Stable Channel Cross Sections of Straight Sand Rivers" *Water Resources Research*, 27 (9), 2429 – 2438.

Julien, P.Y. and Anthony, D.J. (2002) "Bed Load Motion and Grain Sorting in a Meandering Stream" *J.Hydraul.Research*, 40 (2), 125 – 133.

Kaufman, J., Grotzinger, J.P. and McCormick, D.S., (1991) Depth-dependent Diffusion Algorithm For Simulation of Sedimentation in Shallow Marine Depositional Systems, in: *Sedimentary Modelling: Computer Simulations and Methods for Improved Parameter Definition* (Franseen, E.K., et al., eds) Kansas Geological Survey Bull. 223, 489 – 508.

Kyrke-Smith, T.M. and Fowler, A.C. (2014) "Subglacial swamps" *Proc.R.Soc.A.*, 1 – 23.

- Lacey, G. (1930) “Stable Channels in Alluvium”, *Minutes Proc. Inst. Civ.Eng.*, 229, London, 259 – 292.
- Lee, J. S. and Julien, P.Y. (2006) “Downstream Hydraulic Geometry of Alluvial Channels” *J.Hydraul.Eng.*, 132 (12), 1347 – 1352.
- Sadat-Helbar, S. M., Amiri-Tokaldany, E., Darby, S. and Shafaie A. “Fall Velocity of Sediment Particles” *Int. Conferenc on Water Resources, Hydraulics and Hydrology*, 39 – 45.
- Singh, V., P. (2003) “On the Theories of Hydraulic Geometry” *International Journal of Sediment Research*, 18 (3), 196 – 218.
- Talukdar, S., Kumar, B., Dutta, S. (2012) “Predictive Capability of Bedload Equations Using Flume Data.” *J. Hydrol. Hydromech.*, 60 (1) 45–56.
- Van Breemen, D. (2011) *Conceptual Flow Models for the Prediction of Transvers Bed Slopes In River Bends for Uniform Sand Mixtures* , Deltares, Delt – Utrecht University, Utrecht, The Netherlands.
- Wiesemann, J.U., Mewis P. and Zanke, U.C.E. (2006) “Downslope Transport (Transverse Sediment Transport)” *Third Chinese-German Joint Symposium on Coastal and Ocean Engineering*, National Cheng Kung University, Tainan.
- Yang, C.,T. (2006) Noncohesive sediment transport, in: *Erosion and Sedimentation Manual*, Denver, Colorado, cap. 3-1 – 3-104.
- Yen, B. C. (2002) “Open Channel Flow Resistance.” *J. Hydraul. Eng.*, 128(1), 20 - 39.