

Università degli Studi di Padova

**FACOLTÀ DI SCIENZE STATISTICHE**

CORSO DI LAUREA SPECIALISTICA IN

**SCIENZE STATISTICHE, ECONOMICHE,**

**FINANZIARIE E AZIENDALI**

TESI DI LAUREA

**STUDIO DELL'ASIMMETRIA DELLE**

**DISTRIBUZIONI DEI RENDIMENTI FINANZIARI**

RELATORE: LISI FRANCESCO

CORRELATORE: AZZALINI ADELCHI

LAUREANDO: BERTAZZO ANDREA

MATRICOLA 513572 - SEA

ANNO ACCADEMICO 2005-2006



# INDICE

INTRODUZIONE	3
Capitolo 1 ASIMMETRIA NELLA DISTRIBUZIONE DEI RENDIMENTI DI MERCATO	
1.1 Regolarità empiriche nelle serie storiche dei rendimenti	7
1.2 Aspetti critici sulla distribuzione dei rendimenti	9
1.3 Misure di asimmetria	11
1.4 Misure robuste di asimmetria	14
1.5 Test di simmetria per dati non gaussiani serialmente correlati	15
1.6 Un esempio del legame tra rischio e asimmetria	18
Capitolo 2 MODELLI AD ETEROSCHEDASTICITÀ CONDIZIONALE CON DISTRIBUZIONE ASIMMETRICA DEGLI ERRORI	
2.1 Un'estensione al modello <i>GARCH</i>	21
2.2 Sul concetto di volatilità	23
2.3 Le quantità d'interesse	24
2.4 Modelli ad eteroschedasticità condizionale	26
2.5 Eccesso di curtosi in modelli <i>GARCH</i>	29
2.6 Distribuzione <i>Skew-Normal</i>	31
2.7 Distribuzione <i>Skew-t</i> e suoi momenti	35
2.8 Modelli <i>GARCH</i> con distribuzioni asimmetriche	37
Capitolo 3 L'APPROCCIO VALUE-AT-RISK	
3.1 Introduzione	41
3.2 Cos'è il Value at Risk	42
3.3 Modelli di calcolo del <i>VaR</i>	44
3.4 Ambito di applicazione	46
3.5 <i>VaR</i> e il calcolo del requisito patrimoniale	48

Capitolo 4	SIMULAZIONI	
4.1	Introduzione	51
4.2	Verifica delle procedure di stima	53
4.3	Studio dell'asimmetria mediante simulazioni	56
4.4	L'impatto dell'asimmetria sul rischio	58
Capitolo 5	APPLICAZIONI SU DATI REALI	
5.1	Introduzione all'analisi delle serie reali utilizzate	63
5.2	Analisi degli indici di mercato	65
5.3	Analisi dei titoli del Mib30	69
	CONCLUSIONI	75
Appendice A	TABELLE	77
Appendice B	FIGURE	101

# INTRODUZIONE

L'analisi quantitativa dei mercati finanziari ha riscosso in tempi recenti un crescente grado di attenzione da parte della ricerca accademica e delle istituzioni finanziarie, in particolare per quanto riguarda la gestione del rischio. Gli strumenti di gestione del portafoglio si basano ampiamente sulla moderna teoria finanziaria (Markowitz 1952; Sharpe 1964) che identifica nella deviazione standard dei rendimenti del portafoglio una buona misura del rischio.

Tradizionalmente gli strumenti utilizzati per valutare e ottimizzare il rischio si basano sull'assunzione di normalità della distribuzione dei rendimenti-perdite del portafoglio. Coerentemente con questa assunzione, le due misure statistiche, media e deviazione standard, vengono utilizzate per bilanciare rischio e rendimento. Il portafoglio ottimo è selezionato sulla frontiera efficiente, ossia l'insieme dei portafogli che presentano il miglior profilo media-varianza. Questo approccio tradizionale risulta inadeguato per la valutazione del rischio: supponiamo, infatti, che ci si trovi nella situazione in cui si riscontra un'ampia probabilità di piccoli guadagni accompagnata ad una piccola probabilità di ampie perdite, in questo caso si osserva un'asimmetria negativa per la distribuzione dei rendimenti. L'evidenza empirica ci mostra che tale distribuzione risulta spesso asimmetrica e con code spesse, sottolineando l'inadeguatezza dei tradizionali strumenti di ottimizzazione del rischio di mercato.

La possibilità che i rendimenti finanziari possano effettivamente avere un comportamento asimmetrico, avrebbe conseguenze rilevanti sulla determinazione del rischio. La più diffusa misura per il rischio di mercato, il Value at Risk, è calcolato sulla base di due quantità: la deviazione standard e il quantile della distribuzione ipotizzata per i rendimenti.

Per quanto riguarda il primo fattore, è noto che la dipendenza temporale che si osserva per la varianza condizionata delle serie storiche finanziarie è fondamentale per prezzare i titoli derivati, per calcolare le misure di rischio e per abbattere il rischio di portafoglio. A partire dal modello ARCH introdotto da Engle nel 1982, buona parte dei ricercatori e professionisti che si sono interessati dell'argomento, hanno utilizzato tale risultato per la modellazione della varianza condizionata.

Una stima corretta della varianza condizionata non è, tuttavia, sufficiente al calcolo del *VaR* corretto. Occorre individuare il quantile della distribuzione di probabilità che meglio si adatta ai dati, anche nel caso in cui questi mostrino caratteristiche di asimmetria e in generale di non normalità.

L'ottica con cui si è affrontato l'argomento dell'asimmetria della distribuzione dei rendimenti finanziari, si riassume in due aspetti. Da un lato occorre quantificare le evidenze che vorrebbero rifiutare l'ipotesi di simmetria per i rendimenti, e di conseguenza l'ipotesi di normalità. D'altra parte occorre individuare un modello per l'analisi dei rendimenti finanziari in grado di considerare i fatti stilizzati, come la varianza condizionata, ma che possa inoltre tener conto delle caratteristiche di asimmetria ed eventualmente di curtosi.

Per affrontare il primo aspetto si sono ricercati in letteratura quei test di simmetria che risultino attendibili per dati non normali e serialmente correlati. Sono dunque stati individuati due test proposti da Bai e Ng, uno per la verifica dell'ipotesi di simmetria della distribuzione non condizionata, l'altro riferito invece all'asimmetria condizionata. Si propone, quindi nel primo capitolo un'essenziale rassegna riguardante lo studio dell'asimmetria nelle serie finanziarie e le possibilità d'utilizzo di test di simmetria su questo genere di dati.

Nell'ottica di individuare strutture parametriche in grado di migliorare la modellazione di quelle regolarità empiriche tipiche delle serie storiche finanziarie, si è voluto riproporre il modello *GARCH*, già ampiamente utilizzato e sviluppato in letteratura, rivedendone una delle sue caratteristiche principali. La specificazione introdotta da Bollerslev (1986), ha alla base una distribuzione di probabilità normale, incapace di cogliere evidenze di asimmetria nelle serie dei rendimenti e di prevedere valori estremi dovuti ad elevata volatilità sulle code (eccesso di curtosi). Per superare tali limitazioni, si è proposto un nuovo modello basato su quelli ad eteroschedasticità condizionale e nel quale si sostituisce l'ipotesi di normalità delle innovazioni, con una classe di distribuzioni asimmetriche, studiate da Azzalini (a partire dal 1985), che permettono di modellare caratteristiche di asimmetria e di curtosi nei dati, attraverso l'introduzione di due appositi parametri, includendo come casi particolare la distribuzione normale.

Per dare modo a chi legge di aver ben chiare le specificazioni utilizzate, nel Capitolo 2 si introducono i modelli ad eteroschedasticità condizionale, specificandone, pregi e limiti, e le distribuzioni di probabilità normale asimmetrica e t asimmetrica. Si spiega, quindi, come si è ottenuto l'estensione al modello *GARCH* in cui si considerano errori con distribuzione asimmetrica.

Si è dunque voluto verificare, mediante l'utilizzo di simulazioni nel Capitolo 4, il comportamento di tali modelli rispetto a scenari in cui si sono fatti variare per le serie replicate le caratteristiche di asimmetria e curtosi, nonché la loro relazione con i test scelti per lo studio dell'asimmetria.

Sulla base delle osservazioni raccolte, si sono utilizzati i test di simmetria per analizzare serie di dati reali, successivamente impiegate per il confronto fra modelli *GARCH* simmetrici e asimmetrici, valutandone le performance di stima e la capacità di migliorare la misura del rischio.



# Capitolo 1

## ASIMMETRIA DELLA DISTRIBUZIONE DEI RENDIMENTI DI MERCATO

### 1.1 Regolarità empiriche nelle serie storiche dei rendimenti

In questa sezione ci occuperemo di definire alcune peculiarità relative all'evoluzione dei rendimenti di mercato, mediante lo studio delle corrispondenti serie storiche, vale a dire sequenze di dati relativi ad osservazioni misurate a diversi istanti temporali. L'ampia letteratura, che studia tali variabili casuali, identifica un insieme di fatti statistici stilizzati che risultano comuni per la maggior parte degli asset finanziari.

Le autocorrelazioni dei rendimenti sono spesso non significative, tranne che per intervalli temporali giornalieri molto corti. L'assenza di correlazione temporale rappresenta la specificazione più debole di un processo *random walk*, che lascia spazio alla presenza di forme di dipendenza tra osservazioni, che tuttavia preservano l'ipotesi di efficienza dei mercati: se i mercati sono efficienti e il prezzo odierno contiene tutta l'informazione rilevante, evidentemente l'innovazione non potrà essere correlata con l'innovazione del giorno precedente. Dal punto di vista applicativo, tale caratteristica presenta la possibilità di coesistere con altri fatti stilizzati osservati per le serie finanziarie, primo fra tutti la presenza di volatilità variabile nel tempo.

Sebbene non sia possibile individuare una qualche forma di autocorrelazione nella serie dei rendimenti, si nota come l'ampiezza delle fluttuazioni ha una qualche forma di regolarità, alternando periodi persistenti di fluttuazioni più elevate a periodi in cui l'ampiezza è minore. Tale fenomeno è maggiormente visibile se si considera il grafico del valore assoluto o del quadrato della serie dei rendimenti, che mostra un andamento sinusoidale, interpretabile come un'interdipendenza temporale tra le osservazioni rispettivamente trasformate: le corrispondenti funzioni di autocorrelazione risultano, solitamente, significative nei primi ritardi.

Questa dipendenza temporale fra rendimenti, che viene identificata con il nome di *volatility clustering*, dovrebbe corrispondere in qualche modo ad un comportamento economico degli agenti che determina l'alternanza tra periodi di alta e di bassa volatilità. In effetti, i prezzi si muovono sulla base delle reazioni degli agenti ai flussi di informazione e le informazioni di dominio pubblico a livello macroeconomico arrivano esse stesse a grappoli, determinando un raggruppamento di innovazioni più importanti di altre, che hanno cioè un maggiore impatto.

Statisticamente parlando, siamo nell'ipotesi di eteroschedasticità condizionale, ovvero la varianza dei rendimenti cambia nel tempo, condizionatamente all'informazione passata. Tra i modelli che cercano di catturare tale caratteristica, il più utilizzato è probabilmente il modello *GARCH*, che mette in relazione la varianza condizionata con quella osservata negli istanti precedenti e con i quadrati dei rendimenti a media nulla passati. Parleremo più approfonditamente di questo modello e delle sue estensioni nel Capitolo 2.

I modelli sviluppati per tenere conto del fenomeno di eteroschedasticità condizionale, solitamente trattano in maniera simmetrica sia gli shock positivi che quelli negativi, poiché si considera la varianza condizionata funzione delle innovazioni al quadrato, quindi senza tener conto del corrispondente segno. Gli shock in caso di perdita risultano solitamente più ampi rispetto a quelli di segno opposto: nel più dei casi, infatti, le misure di volatilità di un'attività sono correlate negativamente con la corrispondente serie dei rendimenti (effetto leverage). Ricorrendo ad un esempio, notizie negative sulla profittabilità futura di una società hanno un effetto depressivo sui prezzi, e questo comporta un aumento del rapporto tra indebitamento della società e suo valore di mercato. Ciò fa sì che la rischiosità percepita della società cresca: di conseguenza anche la volatilità connessa al rischio, tenderà ad aumentare. Di qui l'effetto leva che nel modellare la varianza condizionata richiede un trattamento differenziato delle innovazioni a seconda del segno. Una possibile estensione al modello *GARCH*, che tenga conto di quest'aspetto, è di adattare la struttura parametrica del modello stesso, modificando l'espressione della varianza condizionata, come avviene per modellazioni già note in letteratura quali *Threshold GARCH* (Zakoian, 1994) e *Exponential GARCH* (Nelson, 1991).

Un'ulteriore caratteristica osservabile sulle serie dei rendimenti, è che il volume di scambio dell'attività è correlato con le misure di volatilità. La ricerca e l'analisi di relazioni tra la volatilità dei prezzi ed i volumi degli scambi nei mercati finanziari è stata ed è tutt'oggi al centro di grande attenzione da parte degli studiosi di econometria, finanza e statistica (Andersen, 1996; Brooks, 1998). La vasta letteratura sul tema si caratterizza da un lato per il tentativo più o meno esplicito di spiegare e prevedere la volatilità sfruttando le informazioni sui volumi, dall'altro per il fatto di dedurre i modelli partendo da teorie economico finanziarie relative ai comportamenti di mercato (Clark, 1973; Tauchen-Pitts, 1983; Hsu, 1998).

Esistono, tuttavia, caratteristiche osservabili che si pongono in contraddizione con le ipotesi comunemente accettate in letteratura. Basti pensare che, ad esempio, la distribuzione marginale dei rendimenti è caratterizzata da eccesso di curtosi, mettendo in discussione l'esattezza dell'ipotesi di distribuzione normale. Anche dopo la correzione sui rendimenti degli effetti di volatility clustering, le serie dei residui mostrano code pesanti, anche se queste sono meno spesse rispetto a quelle osservate sulla distribuzione marginale dei rendimenti.

Nel paragrafo seguente si presenta una critica all'assunzione di normalità distributiva dei rendimenti, in particolare per quanto riguarda l'ipotesi di simmetria della loro distribuzione.

## **1.2 Aspetti critici sulla distribuzione dei rendimenti**

Come si è già discusso in precedenza, la presenza di asimmetria nei rendimenti finanziari ha influenza sul rischio, in termini di volatilità, mediante l'effetto leva. Tuttavia, si riscontrano evidenze empiriche, maggiormente legate alla forma della distribuzione dei rendimenti, che giustificano una maggiore attenzione in letteratura ai momenti di ordine superiore al secondo, in quanto le misure tradizionali di rischio, basate sulla stima dei primi due momenti, non sono risultate efficaci nel catturare completamente "il rischio reale" nella distribuzione dei rendimenti del mercato azionario. La caratteristica essenziale, che rende difficile la diversificazione del rischio, è l'asimmetria nella distribuzione dei rendimenti che tale rischio determina. In particolare, la distribuzione dei rendimenti per un portafoglio è connotata da una

“coda lunga” sul lato sinistro, il che sta a indicare una bassa probabilità di perdite ingenti.

Dal punto di vista statistico, l'assunzione di normalità per la distribuzione condizionata dei rendimenti, così come quella che considera le innovazioni distribuite normalmente con media nulla e varianza unitaria, si scontra con evidenze diffuse di skewness negativa e leptocurtosi rilevate sulle serie dei rendimenti finanziari. La contraddizione deriva dal fatto evidente che la distribuzione normale è per definizione simmetrica e mesocurtica, rendendola inadatta ad interpretare i dati che manifestano caratteristiche contrarie a queste ipotesi.

Quali sono le ragioni economiche che giustificano tali evidenze empiriche? L'intuizione che vorrebbe spiegare la presenza di asimmetria nelle serie dei rendimenti, si sviluppa sulla diversa percezione degli agenti nei confronti di aspettative di perdita rispetto a quelle di guadagno mancato: le variazioni più ampie sono solitamente quelle decrescenti piuttosto che quelle crescenti, ovvero il mercato azionario è più propenso al ribasso che alla crescita. Questo perché, se gli investitori preferiscono i portafogli sulla coda di destra, allora verrà assegnato un maggiore premio per il rischio agli investitori che vogliono investire in portafogli sulla coda di sinistra anche se entrambi i portafogli hanno lo stesso scarto quadratico medio.

Le diverse sfaccettature con cui si può discutere di asimmetria in riferimento alle serie storiche finanziarie, hanno alimentato negli ultimi anni una ricca letteratura in proposito, portando diversi autori ad occuparsi di verificare evidenze empiriche di asimmetria e curtosi tramite test e modellazioni che hanno l'obiettivo di consolidare o smentire tali caratteristiche.

In un articolo di Peiró (1999), mediante l'analisi delle serie dei rendimenti giornalieri di otto diversi mercati e delle serie di tre tassi di cambio, si evidenzia come i test di asimmetria basati sulla skewness campionaria non siano così affidabili a causa della non normalità dei dati. Considerando distribuzioni non normali, ed in particolare misture di due normali e la distribuzione  $t$  di Student, per diversi dei mercati rappresentati dalle serie studiate l'ipotesi di simmetria non viene rifiutata. La medesima conclusione si ricava utilizzando procedure libere da ipotesi distributive.

In un lavoro di Chen *et al.* (2000) si sviluppano una serie di regressioni con lo scopo di ottenere previsioni per il grado di asimmetria nella distribuzione dei

rendimenti giornalieri di singoli titoli. Per i titoli da più tempo sul mercato la skewness negativa è più accentuata: si registra un aumento degli scambi dovuto al trend nei sei mesi precedenti, e rendimenti positivi nei 36 mesi precedenti. Hong e Stein (1999) suggeriscono un modello che mostra come queste asimmetrie negative siano più frequenti quando ci sono forti “differenze d’opinione” tra gli investitori. Risultati analoghi si possono ottenere provando a prevedere la skewness del mercato aggregato dei titoli, benché dal punto di vista statistico sia complesso trovarvi riscontro.

Kim e White (2004) pongono attenzione sulle tradizionali misure di skewness e curtosi: dato che queste sono calcolate come una media e che le medie non sono misure robuste, ci si chiede quanto possano essere rilevanti tali misure così diffusamente utilizzate nei precedenti studi. Si sono quindi ricercate in letteratura misure robuste di skewness e curtosi, confrontandole poi tramite simulazioni Monte Carlo con le misure convenzionali. Tramite un’applicazione di queste misure robuste sull’indice giornaliero S&P500, si verifica come i già discussi fatti stilizzati (i.e. asimmetria negativa ed eccesso di curtosi) potrebbero essere messi in discussione.

Si conclude quindi che utilizzando misure diverse per asimmetria e curtosi si possa avere un’idea più precisa del comportamento dei rendimenti del mercato finanziario. A partire dal paragrafo 1.3 vengono presentate alcune delle espressioni più comunemente usate per la skewness ed in particolare vengono discussi i corrispettivi limiti legati alla natura dei dati che si considerano.

### 1.3 Misure di asimmetria

Nella varietà di misure di asimmetria, sia empiriche che teoriche, la maggior parte di esse sono legate alla tradizionale espressione dell’indice di asimmetria (*skewness*) data dal momento terzo centrato e standardizzato. Si consideri un processo  $\{Y_t\}_{t=1}^T$  con media  $\mu$  e varianza  $\sigma^2$ . Essendo  $\mu_r = E[(y - \mu)^r]$  l’ $r$ -esimo momento centrato di  $Y_t$  con  $\mu_2 = \sigma^2$ , allora l’indice di asimmetria è definito come:

$$S = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{E[(y - \mu)^3]}{E[(y - \mu)^2]^{3/2}}. \quad (1.1)$$

La stima campionaria di  $S$  può essere ottenuta sostituendo i momenti teorici  $\mu_r$  con i corrispondenti momenti campionari  $\hat{\mu}_r = T^{-1} \sum_{t=1}^T (Y_t - \bar{Y})^r$ . Se  $Y_t$  è i.i.d. e distribuito normalmente, allora:

$$\sqrt{T} \hat{S} \xrightarrow{d} N(0, 6) .^1 \quad (1.2)$$

Le evidenze empiriche, già esaminate in precedenza, che portano in diversi casi ad escludere l'ipotesi di normalità e/o d'indipendenza per la distribuzione di serie finanziarie, mette in discussione la validità della distribuzione asintotica della skewness stimata. L'indice di curtosi, la statistica  $q$  (Studentized range statistic), il test di Kolmogorov-Smirnov e il test di Jarque-Bera, nel più dei casi, rifiutano chiaramente la normalità delle serie di rendimenti giornalieri e mostrano una skewness negativa. Tali valutazioni implicano una delle due seguenti alternative:

- il rifiuto dell'ipotesi di simmetria della distribuzione e, quindi, il rifiuto dell'ipotesi di normalità;
- il rifiuto della normalità, ma non necessariamente il rifiuto dell'ipotesi di simmetria nella distribuzione dei dati.

Un test di simmetria basato sulla skewness campionaria, non può dunque tener conto dell'ipotesi di normalità della distribuzione asintotica di quest'ultimo, sotto l'ipotesi nulla di simmetria. Nel prosieguo si mostrano alcuni test alternativi che partono dall'osservazione appena fatta per correggere il comportamento non normale di  $\hat{S}$  se si considerano dati finanziari.

---

<sup>1</sup> Si veda Kendall e Stuart (1969).

Si è già discusso come le serie finanziarie siano serialmente correlate, ovvero le osservazioni non siano indipendenti, ma legate all'informazione passata. Per rispondere a questa caratteristica, Lomnicki (1961) propone una variante al test di asimmetria visto in (1.1), per quei processi gaussiani descrivibili come una media mobile del tipo  $y_t = \theta(L)\varepsilon_t$ , dove  $L$  è l'operatore ritardo e  $\theta(L) = (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q)$ ,  $q$  indica quanti valori passati di disturbo abbiano impatto su  $Y_t$ , con  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ , tale che:

$$\sqrt{T} \left( \sum_{j=-\infty}^{\infty} \rho_j^3 \right)^{-1/2} \hat{S} \xrightarrow{d} N(0, 6), \quad (1.3)$$

dove  $\rho_j$  è il coefficiente di autocorrelazione al ritardo  $j$ .

Uno dei limiti più evidenti per i test in (1.2) e (1.3) resta comunque l'assunzione di normalità dei dati, che risulta errata, in particolar modo se questi presentano caratteristiche anomale di curtosi. Nel caso si individui una distribuzione leptocurtica, la varianza della statistica test è sottostimata e porta a rifiutare l'ipotesi nulla di simmetria anche quando essa è vera.

Premaratne e Bera (1999) derivano la distribuzione di  $\hat{S}$  sotto l'ipotesi di simmetria per dati i.i.d. ma non necessariamente gaussiani. In particolare, assumendo l'esistenza dei momenti centrati fino al sesto, asintoticamente vale

$$V_1^{-1/2}(\hat{S}) \xrightarrow{d} N(0, 1) \quad (1.4)$$

con  $V_1 = \frac{1}{T} (9 + \mu_6 \mu_2^{-3} - 6 \mu_4 \mu_2^{-3})$  e  $\mu_j$  il  $j$ -esimo momento centrato. In questo caso, quindi, la varianza della distribuzione di  $\hat{S}$  dipende dai momenti secondo, quarto e sesto.

In questo articolo, viene mostrato come, mediante simulazioni Monte Carlo, tale test dia risultati coerenti nel caso di dati indipendenti, tuttavia non viene data conferma della sua validità anche per dati serialmente correlati.

## 1.4 Misure robuste di asimmetria

A causa dell'utilizzo della potenza terza nell'espressione campionaria dell'indice di asimmetria in (1.1), i valori corrispondenti possono risultare arbitrariamente elevati, in particolare quando ci sono uno o più valori estremi nei dati. Per tale ragione, a volte può essere difficile ottenere una misura corretta di skewness, poiché non si sa se i valori estremi osservati siano outliers non rappresentativi.

Una soluzione apparentemente semplice potrebbe essere quella di eliminare i valori estremi dai dati, con la possibilità però d'incappare nell'errore dato dalla decisione arbitraria su quali osservazioni eliminare. Dato che l'eliminazione manuale dei valori estremi può risultare meno semplice di come sembra, è opportuno considerare misure robuste dell'indice di asimmetria, che siano quindi non soggettive e non compromesse dagli outliers.

Le misure robuste di posizione e di dispersione, già ampiamente diffuse in letteratura, si basano solitamente sui quantili della distribuzione empirica. Considerando tale caratteristica, Bowley (1920) ha proposto un indice di asimmetria basato sui quantili:

$$S_{R1} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1} \in [-1, 1], \quad (1.5)$$

dove  $Q_i$  è l' $i$ -esimo quartile di  $Y_i$ , ed è semplice verificare come, nel caso di distribuzione simmetrica, tale quantità sia nulla.

La misura in (1.5) è stata generalizzata da Hinkley (1975),

$$S_{R2}(\alpha) = \frac{F^{-1}(1-\alpha) + F^{-1}(\alpha) - 2Q_2}{F^{-1}(1-\alpha) - F^{-1}(\alpha)} \quad \forall \alpha \in [0, 0.5]. \quad (1.6)$$

Tale misura, tuttavia, dipende dal valore scelto di  $\alpha$  e anche questa risulterebbe una scelta arbitraria. Una soluzione è stata suggerita in Groeneveld e Meeden (1984), in cui si integra per  $\alpha$ :

$$S_{R3} = \frac{\int_0^{0.5} [F^{-1}(1-\alpha) + F^{-1}(\alpha) - 2Q_2] d\alpha}{\int_0^{0.5} [F^{-1}(1-\alpha) - F^{-1}(\alpha)] d\alpha} = \frac{\mu - Q_2}{E[Y_i - Q_2]}. \quad (1.7)$$

Osservando che il denominatore nella (1.7) è una misura di dispersione, sostituendolo con la deviazione standard si ottiene l'indice di asimmetria di Pearson:

$$S_{R4} = \frac{\mu - Q_2}{\sigma} \quad (1.8)$$

Nel loro lavoro, Groeneveld e Meeden hanno proposto un elenco di proprietà di cui dovrebbe godere una misura di simmetria:

1. per ogni  $a > 0$  e  $b$ ,  $\gamma(Y_t) = \gamma(aY_t + b)$ ,
2. se  $Y_t$  ha distribuzione simmetrica, allora  $\gamma(Y_t) = 0$ ,
3.  $-\gamma(Y_t) = \gamma(-Y_t)$ ,
4. se  $F$  e  $G$  sono le funzioni di ripartizione di  $Y_t$  e  $X_t$  rispettivamente, e  $F <_c G^{\text{II}}$ , allora  $\gamma(Y_t) \leq \gamma(X_t)$ .

Si osserva che le misure di simmetria  $S_{R1}$ ,  $S_{R2}$  e  $S_{R3}$  soddisfano tutte queste proprietà, mentre per  $S_{R4}$  non vale la proprietà 4.

## 1.5 Test di simmetria per dati non gaussiani serialmente correlati

### 1.5.1 Test per la simmetria condizionata

In un recente articolo, Bai e Ng (2001) propongono un test libero da ipotesi distributive per la simmetria condizionata nelle serie temporali. Essi verificano la simmetria condizionata nei dati considerando il modello generale:

$$Y_t = h(\Omega_t, \beta) + \sigma(\Omega_t, \lambda) e_t, \quad (1.9)$$

dove  $h(\Omega_t, \beta)$  è la media condizionata di  $Y_t$ ,  $\Omega_t = \{Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, X_t, X_{t-1}, \dots\}$  rappresenta l'informazione passata,  $\sigma^2(\Omega_t, \lambda)$  è la varianza condizionata di  $Y_t$  e  $e_t$  è lo shock a media nulla e varianza unitaria, indipendente dagli elementi di  $\Omega_t$ .

La distribuzione di  $Y_t$  è simmetrica se lo è anche la distribuzione di  $e_t$ , ovvero, se  $f(e) = f(-e)$  per ogni  $e$ , dove  $f$  è la funzione di densità di  $e$ . Per verificare la simmetria condizionata, Bai e Ng confrontano la funzione di distribuzione empirica di  $e_t$  e quella di  $-e_t$ . A tale scopo, anzitutto occorre sostituire la serie degli  $e_t$  con quella dei residui standardizzati:

---

<sup>II</sup>  $F <_c G$  indica che la distribuzione con funzione di ripartizione  $F$  è meno simmetrica di quella con funzione di ripartizione  $G$ . Si veda Zwet (1964).

$$\hat{e}_t = \frac{Y_t - h(\tilde{\Omega}_t, \hat{\beta})}{\sigma(\tilde{\Omega}_t, \hat{\lambda})},$$

dove  $\tilde{\Omega}_t$  è il set informativo realizzabile. Successivamente, vengono calcolate le seguenti espressioni:

$$S_T(x) = \begin{cases} \hat{W}_T(x) - \hat{W}_T(0) + \int_x^0 h_T^-(y) dy & \text{per } x \leq 0 \\ \hat{W}_T(x) - \hat{W}_T(0) + \int_0^x h_T^+(y) dy & \text{per } x > 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

dove  $\hat{W}_T(x) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{i=1}^T [I(\hat{e}_i \leq x) - I(-\hat{e}_i \leq x)]$  e  $I(\square)$  è una funzione indicatrice, che

vale 1 quando l'argomento è verificato e 0 altrimenti. Inoltre,

$$h_T^- = g_T(y) f_T(y) \left[ \int_{-\infty}^y g_T(z)^2 f_T(z) dz \right]^{-1} \int_{-\infty}^y g_T(z) d\hat{W}_T(z)$$

$$h_T^+ = g_T(y) f_T(y) \left[ \int_y^{\infty} g_T(z)^2 f_T(z) dz \right]^{-1} \int_y^{\infty} g_T(z) d\hat{W}_T(z)$$

dove  $f_T$  è la densità stimata di  $e_t$ ,  $g_T$  è la stima di  $g = f'/f$  e  $f'$  è la derivata di  $f$ .

Partendo dall'espressioni in (1.10), i test statistici proposti sono:

$$CS^+ = \max_{x \geq 0} |S_T(x)|$$

$$CS^- = \max_{x \leq 0} |S_T(x)|$$

$$CS = \max_x |S_T(x)|. \quad (1.11)$$

e, in Bai e Ng (2001), viene mostrato come tali espressioni convergono in distribuzione ad un moto browniano su  $[0,1]$ . I valori critici ai livelli di significatività del 1%, 5% e 10% sono rispettivamente 2.78, 2.21 e 1.91.

### 1.5.2 Test per la simmetria non condizionata

In un altro articolo del 2001, Bai e Ng ricavano la distribuzione asintotica dell'indice di asimmetria campionaria quando i dati mostrano debole dipendenza.

Il primo teorema presentato in Bai e Ng (2001) afferma che se  $Y_t$  è stazionario fino al sesto ordine, allora

$$\sqrt{T}(\hat{S} - S) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{\alpha \Gamma \alpha'}{\sigma^6}\right) \quad (1.12)$$

dove  $\hat{S}$  è il valore campionario di  $S$ ,  $\alpha = [1 \quad -3\sigma^2 \quad -3\sigma S/2]'$  e  $\Gamma$  è la matrice di densità spettrale con frequenza 0 del vettore

$$Z_t = \begin{bmatrix} (Y_t - \mu)^3 - \mu_3 \\ (Y_t - \mu) \\ (Y_t - \mu)^2 - \sigma^2 \end{bmatrix}.$$

Sotto l'ipotesi nulla di simmetria ( $H_0 : S = 0$ ),

$$\sqrt{T}\hat{S} \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{\alpha_2 \Gamma_{22} \alpha_2}{\sigma^6}\right), \quad (1.13)$$

dove  $\alpha_2 = [1 \quad -3\sigma^2]'$  e  $\Gamma_{22}$  è il primo blocco  $2 \times 2$  della matrice  $\Gamma$ . Il corrispondente test statistico è:

$$\hat{\pi}_3 = \frac{\sqrt{T}\hat{S}}{s(\hat{S})} \quad (1.14)$$

dove  $s(\hat{S})$  corrisponde alla deviazione standard campionaria di  $\hat{S}$ .

Il test in (1.14) ha il forte inconveniente di richiedere l'esistenza del momento sesto: ciò non è sempre scontato se, ad esempio, si suppone per i dati una distribuzione  $t$  di Student con meno di 6 gradi di libertà. In verità, è abbastanza comune nelle applicazioni reali stimare modelli che non ammettono il momento sesto finito, rendendo il test appena considerato non attendibile.

Successivamente nello stesso articolo, Bai e Ng costruiscono un test congiunto dei due momenti dispari,  $r_1$  e  $r_2$ ,

$$\hat{\mu}_{r_1, r_2} = Y_T' (\alpha \Gamma \alpha')^{-1} Y_T \xrightarrow{d} \chi_2^2 \quad (1.15)$$

dove

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -r_1 \mu_{r_1-1} \\ 0 & 1 & -r_2 \mu_{r_2-1} \end{bmatrix}, \quad Z_t = \begin{bmatrix} (Y_t - \mu)^{r_1} \\ (Y_t - \mu)^{r_2} \\ (Y_t - \mu) \end{bmatrix}.$$

Il test in (1.15) risulta più potente rispetto a quello in (1.14), sebbene  $\hat{\mu}_{r_1, r_2}$  richieda l'esistenza finita del  $2r_2$ -esimo momento ( $r_1 < r_2$ ).

## 1.6 Un esempio del legame tra rischio e asimmetria

La valutazione e il controllo del rischio di mercato, sia da parte degli Istituti bancari, sia da parte delle Autorità di vigilanza, hanno assunto negli ultimi anni un'importanza sempre crescente, causa anche i casi di perdite clamorose realizzate da importanti società finanziarie e bancarie e imputabili a carenze dei sistemi di controllo dei rischi delle posizioni. La ricerca di uno strumento che potesse dare risultati più efficienti nella valutazione del rischio di mercato ha portato la comunità scientifica e finanziaria ad incentrarsi sul modello del *Value at Risk (VaR)*.<sup>III</sup> Tale strumento, nella sua versione *standard*, ha tra i suoi pregi la facilità di comprensione, anche per i non specialisti, che probabilmente ne ha decretato da subito il successo all'interno del sistema finanziario.

Il *VaR* nella sua più semplice espressione, è calcolato come il quantile sulla coda di sinistra della distribuzione dei rendimenti, quella relativa alle perdite, per la loro deviazione standard:

$$VaR = -F^{-1}(\alpha) \times \sigma + \mu.$$

Il *VaR*, e di conseguenza il valore a rischio che si propone di calcolare, sono funzione della deviazione standard  $\sigma$  e della media dei rendimenti  $\mu$  come suggerito dalla teoria finanziaria, ma anche funzione del quantile di probabilità  $\alpha$  della legge ipotizzata per le innovazioni  $F^{-1}(\alpha)$ .

Abbiamo dunque condotto un semplice esperimento per verificare come tale misura di rischio si comporti in corrispondenza di dati che manifestano asimmetria e/o eccesso di curtosi. Si sono quindi generati campioni i.i.d. di media nulla e varianza unitaria, da quattro diverse distribuzioni di probabilità: la normale, la normale asimmetrica, la  $t$  di Student e la  $t$  asimmetrica<sup>IV</sup>. Per ciascuna distribuzione si sono effettuate 500 replicazioni di 2000 osservazioni ognuna, con le seguenti caratteristiche teoriche:

- i dati generati da distribuzione normale sono simmetrici e mesocurtici;
- i dati generati da normale asimmetrica hanno asimmetria teorica pari a -0.200384 ed eccesso di curtosi teorica pari a 0.1025660 ;

---

<sup>III</sup> Si tratterà più approfonditamente l'approccio Value at Risk nel Capitolo 3.

<sup>IV</sup> Le distribuzioni asimmetriche qui utilizzate verranno presentate in dettaglio nel Capitolo 2.

- i dati generati da  $t$  di Student sono simmetrici e con eccesso di curtosi teorica pari a 3;
- i dati generati da  $t$  asimmetrica hanno asimmetria teorica pari a  $-0.7796626$  ed eccesso di curtosi teorica pari a  $4.162571$ .

Si sono quindi ottenuti su ogni campione i quantili per ciascuna distribuzione, stimandone i parametri dai dati, considerando i seguenti livelli di significatività: 0.005, 0.01 e 0.05, posizionati sulla coda di sinistra della distribuzione. Poiché i campioni sono identicamente distribuiti e hanno varianza unitaria, i quantili ottenuti per ogni campione coincidono con i  $VaR$  a ciascun livello di confidenza. A scopo esplorativo, si sono ricavati gli stessi quantili delle distribuzioni nel caso in cui, *ceteris paribus*, considerassimo dati con asimmetria positiva.

In base ai  $VaR$  ottenuti, per ogni campione si è calcolato il numero di scostamenti, ovvero si sono contate quante osservazioni nel campione stanno oltre il  $VaR$ . Per ciascun p-value si è quindi fatta la media degli scostamenti nei 500 campioni incrociando distribuzioni in generazione e quelle in stima.

Dai risultati riportati in Tabella 1.01, si possono ricavare le seguenti osservazioni:

- Ragionevolmente, generando da una normale, il numero degli scostamenti su entrambe le code coincide a grandi linee con quelli previsti, a seconda del p-value considerato. Solo nel caso di  $t$  e di  $Skew-t$ , le code sono leggermente più pesanti del normale: tale effetto risulta tanto più accentuato, tanto più piccolo è il livello di significatività preso in considerazione.
- Per i campioni generati da una  $Skew$ -Normal, gli scostamenti calcolati con la distribuzione normale sulla coda di sinistra sono in eccesso rispetto a quelli previsti, anche se complessivamente vengono compensati da quelli in difetto sulla coda di destra. La percentuale media di scostamenti ottenuta con la  $t$  di Student è più precisa di quella ottenuta con la normale, ma risente anch'essa dell'asimmetria generata. Per le distribuzioni che, invece, stimano l'asimmetria gli scostamenti sono calcolati correttamente.
- Nel caso di dati generati da  $t$  di Student, il numero medio di scostamenti ottenuto stimando con la normale e la normale asimmetrica è notevolmente superiore a quello previsto, mentre è correttamente calcolato dalle distribuzioni che tengono conto dell'eccesso di curtosi.

- Infine, per i campioni generati da una *Skew-t*, la presenza di curtosi accentua quanto detto in precedenza sugli scostamenti da sinistra nel caso normale, ed in questo caso tale osservazione si può estendere anche per le stime *Skew-Normal* e *t* di Student. Gli scostamenti ottenuti con la *skew-t* risultano, invece, ancora una volta simmetrici. Per i modelli che non prevedono curtosi, sulla coda di destra il numero di scostamenti è notevolmente in difetto (sovrastima del rischio), tant'è che facendo la somma degli scostamenti, questa risulta inferiore a quella ottenibile per la distribuzione *skew-t*.

La conclusione generalizzata che si può trarre da questo rapido esperimento è la conferma di quanto osservato in 1.2, ovvero che nel caso di errata specificazione per la distribuzione dei dati analizzati, si ottengono risultati inesatti che, nel caso del *VaR* ad esempio, potrebbero indurre gli agenti a mal stimare il rischio, con tutte le conseguenze che questo errore comporta.

Più in generale, si evince che quanto più una legge di probabilità è completa nella sua specificazione, tanto meglio essa interpreta le caratteristiche dei dati analizzati. È il caso della *Skew-t*, che permette, mediante i suoi parametri, di quantificare le evidenze di asimmetria e di eccesso di curtosi nei dati.

Nel Capitolo 2, ci occuperemo quindi di specificare un modello che ci permetta di catturare dai rendimenti finanziari le principali caratteristiche, per ottenere una misura più precisa del rischio di mercato.

## Capitolo 2

# MODELLI AD ETEROSCHEDASTICITÀ CONDIZIONALE CON DISTRIBUZIONE ASIMMETRICA DEGLI ERRORI

### 2.1 Un'estensione al modello *GARCH*

La teoria economica ha sancito lo stretto legame tra il rischio e la volatilità osservabile sulle serie storiche finanziarie. Tale relazione ha incentivato lo sviluppo ed il consolidamento di modelli di analisi media-varianza dei dati finanziari, e, tra tutti, forse il più noto modello parametrico è quello introdotto da Engle e poi successivamente generalizzato da Bollerslev, *Generalised ARCH*, in grado di catturare la caratteristica eteroschedasticità condizionale sulle serie dei rendimenti di mercato. La specificazione e le ipotesi alla base dell'originario modello *GARCH* non sono però risultate sufficienti per spiegare alcune evidenze comunemente osservabili sulle serie finanziarie, in particolare quelle legate a momenti superiore al secondo della distribuzione (marginale e condizionata) dei dati.

Gli stessi test che dovrebbero valutare l'ipotesi di simmetria sono sviluppati sotto l'assunzione di normalità dei dati, anche se, come discusso nel Capitolo 1, spesso i dati finanziari presentano distribuzioni con code pesanti. Di conseguenza, i test di simmetria comunemente usati (quelli basati sull'espressione (1.1)) non sono adatti per verificare la simmetria su dati caratterizzati da leptocurtosi; in particolare, come già osservato in 1.4, tali misure non risultano robuste in presenza di osservazioni estreme.

Per rispondere alla necessità di avere un modello che catturi le evidenze di skewness e curtosi nella distribuzione dei rendimenti, una possibilità è quella di estendere la definizione del modello *GARCH* cambiando le ipotesi statistiche alla base dello stesso, in particolar modo considerando una legge differente per la distribuzione marginale delle innovazioni, che dia la possibilità, a differenza del caso gaussiano, di quantificare evidenze empiriche di asimmetria ed eccesso di curtosi.

Un recente articolo di Premaratne e Bera (2005) sviluppa un approccio parametrico flessibile per catturare asimmetria ed eccesso di curtosi assieme all'eteroschedasticità condizionale nelle serie dei rendimenti, partendo da una famiglia di distribuzioni che includa una densità asimmetrica, facilmente stimabile e con code più pesanti rispetto ad una distribuzione  $t$  di Student. Sulla base di queste caratteristiche si è scelta la distribuzione del IV tipo di Pearson, che prevede tre parametri in funzione dei quali si può scrivere varianza, skewness e curtosi. La possibilità di modellare simultaneamente i primi quattro momenti condizionati permette di dare un'interpretazione del rischio più precisa rispetto ai comuni modelli media-varianza.

La distribuzione del IV tipo di Pearson ha funzione di densità:

$$f(\varepsilon_i) = c \left( 1 + \frac{\varepsilon_i^2}{a^2} \right) \exp \left[ \delta \tan^{-1} \left( \frac{\varepsilon_i}{a} \right) \right] \quad (2.1)$$

con  $c = \left[ a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2m-2}(t) e^{\delta t} dt \right]^{-1}$ . Un valore non nullo per  $\delta$  indica la presenza di asimmetria, come un valore basso per il parametro  $m$  indica elevata curtosi, mentre l'ampiezza della distribuzione è regolata dal parametro di scala  $a$ .

È possibile esprimere l'indice di asimmetria in funzione dei parametri della distribuzione rappresentata in (2.1):

$$S = 4\delta \sqrt{\frac{2m-3}{2(m-2)[4(m-1)^2 + \delta^2]}} \quad (2.2)$$

Quindi, quando  $\delta = 0$ , la skewness nella popolazione è nulla per ogni  $m > 2$ . Si può dunque formulare un test di simmetria verificando l'ipotesi  $H_0 : \delta = 0$ . Sotto l'ipotesi nulla, la distribuzione del IV tipo si riduce alla distribuzione simmetrica del VII tipo di Pearson, che ha densità:

$$f(\varepsilon_i) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m-\frac{1}{2})} \left( 1 + \frac{\varepsilon_i^2}{a^2} \right)^{-m},$$

che, sostituendo  $a$  e  $m$ , rispettivamente, con  $\sqrt{\nu}$  e  $(\nu+1)/2$ , diventa una  $t$  di Student con  $\nu$  gradi di libertà. Com'è noto, inoltre, quando  $\nu \rightarrow \infty$  la  $t$  di Student si riconduce alla distribuzione normale. Perciò  $t$  di Student e normale, le due distribuzioni più comunemente utilizzate nella modellazione di dati finanziari, sono

casi particolari della distribuzione di IV tipo di Pearson, sotto l'ipotesi di simmetria dei dati.

Muovendoci parallelamente a quanto proposto da Premaratne e Bera, si è valutata una famiglia di distribuzioni che dia la possibilità di controllare (parametricamente) le possibili evidenze di asimmetria e curtosi, includendo come casi particolari la distribuzione gaussiana e la distribuzione  $t$  di Student. In questo lavoro si è sfruttata la famiglia di distribuzioni studiata da Azzalini (a partire dal 1985), ed in particolare le distribuzioni *Skew-Normal* e *Skew- $t$* , per formulare un'estensione del modello *GARCH*, che prevede una distribuzione condizionata per i rendimenti diversa dalla normale se non come caso particolare, in assenza di asimmetria e con curtosi uguale a 3.

L'attenzione è stata rivolta, in particolar modo, alla skewness delle serie dei rendimenti, mettendo a confronto i risultati che si possono ottenere applicando misure classiche di asimmetria, gli ultimi test presentati in letteratura e le modellazioni da noi implementate sulla base delle distribuzioni asimmetriche sopraccitate.

## **2.2 Sul concetto di volatilità**

L'obiettivo di questa sezione è di fornire una rassegna sintetica ma il più possibile completa, delle misure di volatilità utilizzate in letteratura, per giustificare come, a partire da regolarità empiriche, si debbano proporre dei processi stocastici che siano in grado di riprodurre tali regolarità. La volatilità è un importante fattore nel trading delle azioni, in quanto essa rappresenta la varianza condizionata dei rendimenti del titolo sottostante. Ma è altrettanto essenziale nel risk management, in quanto la modellazione della volatilità fornisce un semplice metodo per calcolare il valore a rischio di un'attività finanziaria. Inoltre, riconoscere una struttura parametrica per la variabilità di una serie storica solitamente migliora l'efficienza nella stima dei parametri e la precisione nelle previsioni.

In generale, al concetto di volatilità si fa corrispondere una misura statistica di variabilità: quella più immediata è lo scarto quadratico medio (o la varianza) dei rendimenti su un periodo storico. Tuttavia, l'osservazione che la variabilità dei

rendimenti non sia costante nel tempo è stata più volte riportata in ambito finanziario (Mandelbrot (1963), Klein (1977)).

Una caratteristica essenziale della volatilità dei titoli è quindi che essa non è direttamente osservabile in modo dinamico. Ad esempio, se si considerano i rendimenti giornalieri di un'attività finanziaria, la volatilità giornaliera non può essere calcolata dall'unica osservazione disponibile. Se si ha a disposizione la serie dei rendimenti intra-giornalieri per questo titolo, allora è possibile ottenere una stima della volatilità giornaliera, la cui precisione va comunque osservata con cautela: la volatilità di un titolo infatti si può suddividere in volatilità intragiornaliera ed in variazione tra i giorni di contrattazione. La non osservabilità crea dunque difficoltà nella valutazione di previsioni fornite dai modelli ad eteroschedasticità condizionale, mancando spesso un reale termine di confronto.

Alcune caratteristiche della volatilità di un titolo sono tuttavia direttamente osservabili sulla serie dei rendimenti. Queste caratteristiche rappresentano punti di riferimento importanti nello sviluppo di modelli ad eteroschedasticità condizionale ed alcuni di essi sono stati introdotti proprio per correggere, sulla base di queste osservazioni, le debolezze presentate in alcune soluzioni precedenti. Ad esempio, il modello *EGARCH* è stato sviluppato per catturare l'asimmetria nella volatilità.

La nostra attenzione è principalmente rivolta alla derivazione della classe di modelli *GARCH*, come si sono sviluppati, e come vengono stimati, considerandone le estensioni per catturare quelle regolarità empiriche di cui si è parlato nel Capitolo 1.

### 2.3 Le quantità d'interesse

Lo scopo che ci proponiamo è di modellare la distribuzione di una variabile stocastica,  $r_t$ , condizionatamente all'insieme informativo a nostra disposizione,  $\mathfrak{S}_{t-1}$ . Formalmente,  $\mathfrak{S}_{t-1}$  rappresenta la  $\sigma$ -algebra indotta da tutte le variabili osservabili all'istante  $t-1$  e contiene i valori ritardati di  $r_t$  e di altre variabili d'interesse, che nelle nostre analisi coincidono con i rendimenti definiti dai prezzi giornalieri dei titoli ( $p_t$ ) e definiti come segue:

$$r_t = \log(p_t) - \log(p_{t-1}), \quad t = -R+1, \dots, n \quad (2.3)$$

ovvero è il rendimento ottenuto possedendo l'attività dal tempo  $t-1$  al tempo  $t$ , considerando un campione in cui si utilizzano per la stima  $R$  osservazioni,  $t = -R+1, \dots, 0$ , ed  $n$  osservazioni per la procedura di back-testing.

Per raggiungere il nostro obiettivo, modellare la densità condizionata di  $r_t$ , possiamo scomporre il problema nell'individuazione di tre quantità: la media condizionata,  $\mu_t \equiv E(r_t | \mathcal{F}_{t-1})$ , la varianza condizionata,  $\sigma_t^2 \equiv \text{Var}(r_t | \mathcal{F}_{t-1})$  (assunto che esista finita), e la funzione di densità dei corrispondenti residui standardizzati,  $e_t = (r_t - \mu_t) / \sigma_t$ . Nella nostra modellazione, scegliamo una forma parametrica della densità condizionata

$$f(r_t | \psi(\mathcal{F}_{t-1}; \theta)), \quad (2.4)$$

dove  $\theta$  è un vettore di parametri finito, e  $\psi_t = \psi(\mathcal{F}_{t-1}; \theta)$  è un vettore di parametri variabile nel tempo, tali da fornire una specificazione completa per la distribuzione condizionata di  $r_t$ .

Come descritto sopra, possiamo dividere il vettore  $\psi_t$  in tre componenti,  $\psi_t = (\mu_t, \sigma_t^2, \eta_t)$ , dove  $\mu_t$  è la media condizionata (il parametro di posizione),  $\sigma_t$  è la deviazione standard condizionata (il parametro di scala) e  $\eta_t$  raccoglie i restanti parametri della distribuzione condizionata che ne esprimono la distorsione in termini di asimmetria e curtosi.

In particolare la nostra attenzione è dedicata alla modellazione della componente che si riferisce alla volatilità condizionale,  $\sigma_t$ , mentre per quanto concerne la media campionaria, si pone per semplicità  $\mu_t = \mu$  costante. Nella seconda parte del capitolo ci occuperemo inoltre della parte di modello riferita alla densità dei residui standardizzati, quella che abbiamo identificato con  $\eta_t$ , applicando la struttura dei modelli ad eteroschedasticità condizionale a distribuzioni che includono parametri per l'asimmetria e per la curtosi.

## 2.4 Modelli ad eteroschedasticità condizionale

Come si è visto, lo studio della volatilità nelle serie storiche finanziarie è da diversi anni al centro dell'analisi teorica ed empirica, essendo la volatilità interpretabile come misura del rischio di un'attività. Le analisi condotte sulle serie finanziarie mostrano come queste siano caratterizzate da eteroschedasticità condizionale, nonlinearità e distribuzioni che hanno code più spesse della distribuzione Normale (leptocurtosi). Uno dei possibili modi per modellare tali comportamenti delle serie finanziarie è il processo *AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity* (ARCH) introdotto da Engle (1982), osservando che l'andamento della varianza del processo generatore dei dati sia di tipo condizionatamente autoregressivo.

Il modello ARCH è un processo stocastico  $\{\varepsilon_t\}$  con le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= \sigma_t v_t \\ v_t & \text{ i.i.d. } E(v_t) = 0 \quad \text{Var}(v_t) = 1\end{aligned}\tag{2.5}$$

Per definizione  $\varepsilon_t$ , è serialmente non correlato con media zero, ma la varianza condizionata di  $\varepsilon_t$ , uguale a  $\sigma_t^2$  può variare nel tempo,

$$\sigma_t^2 = \text{Var}(\varepsilon_t | \mathfrak{S}_{t-1})\tag{2.6}$$

dove  $\mathfrak{S}_{t-1}$  rappresenta l'insieme informativo al tempo  $t-1$ . La varianza condizionata di  $\varepsilon_t$ , è una funzione variabile nel tempo, positiva e funzione dell'insieme informativo al tempo  $t-1$ . Al variare di  $\sigma_t^2$  si otterranno delle distribuzioni di probabilità di tipo normale diverse tra loro, più o meno disperse attorno al centro di simmetria. La distribuzione non condizionata può essere vista come valore atteso (media ponderata) delle distribuzioni condizionate. Il risultato è compatibile con l'osservazione empirica, di una distribuzione con code più spesse rispetto ad una normale con varianza costante.

Nella generalità delle applicazioni  $\varepsilon_t$  corrisponde all'innovazione nella media di un altro processo stocastico  $\{y_t\}$ :

$$y_t = g(x_{t-1}; b) + \varepsilon_t\tag{2.7}$$

dove  $g(x_{t-1}; b)$  denota una funzione di  $x_{t-1}$  e del vettore dei parametri  $b$ ,  $x_{t-1}$  appartiene all'insieme informativo al tempo  $t-1$ . La funzione  $g(\cdot)$  coincide con quella che nella sezione 2.3 abbiamo denominato con  $\mu_t$  e che abbiamo deciso di considerare, ai nostri fini, costante nel tempo<sup>v</sup>.

Una possibile specificazione di  $\sigma_t^2$  è

$$\sigma_t^2 = \gamma + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 = \gamma + \alpha(B) \varepsilon_t^2 \quad (2.8)$$

cioè come funzione lineare dei valori passati del processo al quadrato dove  $\omega > 0$  e  $\alpha_i > 0$ , e  $B$  indica l'operatore di ritardo. Questo modello è noto come modello ARCH( $q$ ) lineare. Il modello cattura la tendenza ai *cluster* di volatilità presente nelle serie finanziarie.

Un grosso limite all'utilizzo del modello ARCH è che nelle applicazioni pratiche spesso ci si può imbattere in serie storiche che manifestano effetti autoregressivi sui quadrati dei rendimenti per un numero elevato di ritardi, complicando notevolmente le procedure di stima dei corrispondenti parametri, principalmente per difficoltà computazionali.

La prima estensione del modello ARCH( $q$ ) è stata il modello *GARCH* (*Generalised ARCH*) introdotto da Bollerslev (1986), la cui idea è stata quella di riprodurre la parsimonia del modello ARMA rispetto alle rappresentazioni AR o MA in termini del numero di parametri utilizzati, introducendo nel modello di Engle i valori ritardati della varianza condizionata. Il processo *GARCH* è una struttura più parsimoniosa e flessibile del modello ARCH, infatti permette di esprimere un ARCH di ordine molto elevato usando un numero limitato di parametri e, di conseguenza, un numero ridotto di vincoli di non-negatività:

$$\sigma_t^2 = \gamma + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 = \gamma + \alpha(B) \varepsilon_t^2 + \beta(B) \sigma_t^2 \quad (2.9)$$

---

<sup>v</sup> Nel caso  $y_t$  identifichi la serie dei rendimenti a media nulla,  $\mu_t = \mu = 0$ .

dove  $\alpha(0) = \beta(0) = 0$ .<sup>VI</sup> Si pongono i vincoli di non negatività sui parametri (stretta per  $\gamma$ ), per garantire la definita positività della varianza condizionata. Il processo  $GARCH(p,q)$  è stazionario in senso debole se e solo se

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1. \text{VII} \quad (2.10)$$

Dato il modello:

$$\begin{aligned} y_t &= g(x_{t-1}; b) + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= \sigma_t \nu_t \quad \nu_t \sim i.i.d.D(0,1) \\ \sigma_t^2 &= \gamma + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

$D$  indica la distribuzione dei disturbi  $\nu_t$ . La distribuzione non condizionata di  $\varepsilon_t$  è caratterizzata da leptocurtosi, cioè da un eccesso di curtosi rispetto alla distribuzione normale, di cui si parlerà nella sezione 2.5.

Considerando per la (2.9) il caso  $GARCH(1,1)$ , si può ottenere l'espressione:

$$\varepsilon_t^2 = \gamma + (\alpha + \beta) \varepsilon_{t-1}^2 + (\varepsilon_t^2 - \sigma_t^2) - \beta (\varepsilon_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2),$$

nella quale si riconosce con  $\varepsilon_t^2$  il ruolo della variabile osservabile nel modello ARMA, e il ruolo dell'innovazione per il processo della varianza è svolto dalla differenza  $\varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$ . Come nel caso ARMA, il profilo delle previsioni future (conzionatamente all'insieme informativo) è dominato dal coefficiente autoregressivo  $\alpha + \beta$ .

---

<sup>VI</sup> Al fine di assicurare l'esistenza di un processo ben definito tutti i parametri nella rappresentazione AR di ordine infinito

$$\sigma_t^2 = (1 - \beta(B))^{-1} \gamma + (1 - \beta(B))^{-1} \alpha(B) \varepsilon_t^2$$

devono essere non-negativi (Nelson, Cao, 1992. Drost, Nijman, 1993), dove si assume che le radici del polinomio  $\beta(\lambda) = 1$  si trovino al di fuori del cerchio di raggio unitario.

<sup>VII</sup> Quando

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j = 1$$

si ha il processo  $IGARCH(p,q)$  (Integrated  $GARCH$ ) ovvero esiste integrazione nella varianza condizionata. In tale modello la previsione, condizionata a  $\mathfrak{S}_{t-1}$ , della varianza dipende da  $\sigma_{t+1}^2$ . Il modello  $IGARCH$ , con o senza trend, fa parte di una più ampia classe di modelli, caratterizzati da persistenza nella varianza, nei quali l'informazione corrente rimane importante per le previsioni delle varianze condizionate future, per tutti gli orizzonti di previsione (Engle, Bollerslev, 1986; Lamoureux, Lastrapes, 1990; Nelson 1990).

Nel modello *GARCH*, il valore passato della varianza condizionata riassume in sé le informazioni passate, e quindi spetta al valore dell'innovazione osservata il periodo precedente il compito di alterare la previsione corrente della varianza condizionata. In altri termini, le informazioni passate sono sintetizzate dai ritardi della varianza, mentre le “novità”, e la capacità di variazione nel tempo delle stime della varianza condizionata sono racchiuse nel termine  $\varepsilon_{t-1}^2$ .

Come per il modello ARCH, anche per la forma generalizzata individuiamo la relazione fra varianza condizionata e varianza non condizionata, partendo dal caso più semplice di un *GARCH(1,1)*:

$$\begin{aligned} E(\sigma_t^2) &= \sigma^2 = \gamma + \alpha E(\varepsilon_{t-1}) + \beta E(\sigma_{t-1}^2) \\ &= \gamma + \alpha \sigma^2 + \beta \sigma^2 \end{aligned}$$

da cui  $\gamma = \sigma^2(1 - \alpha - \beta)$  con  $\alpha + \beta < 1$ . Sostituendo nell'espressione della varianza condizionata abbiamo:

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \sigma^2(1 - \alpha - \beta) + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \\ &= \sigma^2 + \alpha(\varepsilon_{t-1}^2 - \sigma^2) + \beta(\sigma_{t-1}^2 - \sigma^2). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Considerando, ad esempio, un valore di  $\beta \approx 0.9$  e  $\alpha \approx 0.1$  (nel rispetto del vincolo di stazionarietà), a fronte di  $\sigma_t^2 - \sigma^2 > 0$ , sarà più facile che la varianza condizionata  $\sigma_{t+1}^2$  continui ad essere maggiore della varianza non condizionata (persistenza nella volatilità).

## 2.5 Eccesso di curtosi in modelli *GARCH*

Per valutare la variabilità della volatilità stimata, occorre considerare la curtosi del relativo modello. In questa sezione ricaveremo l'eccesso di curtosi per un modello *GARCH(1,1)*, partendo dalla formulazione del modello già considerata nella sezione precedente:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \sigma_t \nu_t \\ \sigma_t^2 &= \gamma + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \end{aligned}$$

dove  $\alpha, \beta \geq 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\alpha + \beta < 1$ , e  $\{\nu_t\}$  è una successione indipendente e identicamente distribuita con media nulla, varianza unitaria e momento quarto pari a

$E[v_t^4] = K_v + 3$  dove  $K_v$  è l'eccesso di curtosi dell'innovazione  $v_t$ . Sulla base delle assunzioni fatte si ha

$$V[\varepsilon_t] = E[\sigma_t^2] = \gamma / [1 - (\alpha + \beta)]$$

$$E[\varepsilon_t^4] = (K_v + 3) E[\sigma_t^4]$$

ammesso che  $E[\sigma_t^4]$  esista.

Prendendo il quadrato dell'espressione della varianza condizionata, si ha

$$\sigma_t^4 = \gamma^2 + \alpha^2 \varepsilon_{t-1}^4 + \beta^2 \sigma_{t-1}^4 + 2\alpha\gamma\varepsilon_{t-1}^2 + 2\beta\gamma\sigma_{t-1}^2 + 2\alpha\beta\varepsilon_{t-1}^2\sigma_{t-1}^2,$$

il cui valore atteso, tenendo conto delle due proprietà menzionate sopra, è

$$E[\sigma_t^4] = \frac{\gamma^2 (1 + \alpha + \beta)}{[1 - (\alpha + \beta)][1 - \alpha^2(K_v + 2) - (\alpha + \beta)^2]}$$

tenendo conto che  $0 \leq \alpha + \beta < 1$  e  $1 - \alpha^2(K_v + 2) - (\alpha + \beta)^2 > 0$ . L'eccesso di curtosi nei rendimenti, se esiste, è allora

$$K_\varepsilon = \frac{E[\varepsilon_t^4]}{\{E[\varepsilon_t^2]\}^2} - 3 = \frac{(K_v + 3)[1 - (\alpha + \beta)^2]}{1 - 2\alpha^2 - (\alpha + \beta)^2 - K_v\alpha^2} - 3.$$

Se si considera l'innovazione come normalmente distribuita, il corrispondente quantitativo di curtosi  $K_v = 0$  e attraverso alcuni passaggi algebrici risulta che

$$K_\varepsilon^{(g)} = \frac{6\alpha^2}{1 - 2\alpha^2 - (\alpha + \beta)^2},$$

dove l'apice (g) indica che si tratta del caso gaussiano. Tale risultato porta a due importanti considerazioni:

- la curtosi nei rendimenti si manifesta se  $1 - 2\alpha^2 - (\alpha + \beta)^2 > 0$ ,
- nel caso in cui  $\alpha = 0$ , l'espressione dell'indice di curtosi è nulla indicando che il modello *GARCH*(1,1) stimato non ha code pesanti in distribuzione.

Si consideri ora il caso in cui non si conosca la distribuzione degli errori. Utilizzando i risultati precedenti si ha

$$K_\varepsilon = \frac{K_\nu - K_\nu(\alpha + \beta) + 6\alpha^2 + 3K_\nu\alpha^2}{1 - 2\alpha^2 - (\alpha + \beta)^2 - K_\nu\alpha^2} = \frac{K_\nu + K_\varepsilon^{(g)} + \frac{5}{6}K_\nu K_\varepsilon^{(g)}}{1 - \frac{1}{6}K_\nu K_\varepsilon^{(g)}}. \text{ VIII}$$

Tale risultato permette di ricavare per ogni modello *GARCH* una misura di curtosi nei dati.

Se ipotizziamo nuovamente che  $\alpha = 0$ , si è visto che  $K_\varepsilon^{(g)}$  risulta nullo e quindi  $K_\varepsilon = K_\nu$ . In questo caso, il comportamento sulle code dei rendimenti è lo stesso di quello dell'innovazione. Nel caso in cui  $\alpha > 0$ , allora anche  $K_\varepsilon^{(g)}$  è positivo strettamente e i rendimenti risulteranno avere code pesanti.

Per una  $t$  di student con  $\tau$  gradi di libertà, si ha  $E[v_t^4] = 6/(\tau - 4) + 3$  per  $\tau > 4$ , con  $K_\nu = 6/(\tau - 4)$ . Questa è in parte la ragione per la quale in molte applicazioni si utilizza una  $t$  di student con un numero prefissato di gradi di libertà. L'eccesso di curtosi nei rendimenti diventa  $K_\varepsilon = \left[ 6 + (\tau + 1)K_\varepsilon^{(g)} \right] / \left[ \tau - 4 - K_\varepsilon^{(g)} \right]$  considerando  $1 - 2\alpha^2(\tau - 1)/(\tau - 4) - (\alpha + \beta)^2 > 0$ .

## 2.6 Distribuzione *Skew-Normal*

Lo sviluppo di famiglie parametriche e lo studio delle loro proprietà sono sempre stati un tema ricorrente della letteratura statistica. Parte di questa recente letteratura è spesso legata alla distribuzione normale asimmetrica, in cui si può riconoscere la distribuzione normale come un caso particolare.

La necessità di ritrovare in una famiglia di distribuzioni alcune importanti caratteristiche, come:

- un'adeguata trattabilità matematica ed alcune proprietà formali proprie delle classi parametriche standard,
- la possibilità di modellare dati in entrambi i casi, univariato e multivariato,
- un meccanismo semplice di generazione di variabili stocastiche,

---

<sup>VIII</sup> Bai, Russell, Tiao (2001)

- l'opportunità, tramite pochi parametri, di regolare le distribuzioni con elevata flessibilità per la distorsione e per le relative caratteristiche principali, tra cui asimmetria, curtosi e, nel caso multivariato, la struttura di dipendenza, spiega perché fare ulteriori sforzi nello sviluppo delle famiglie parametriche di distribuzioni, e cosa di sostanzialmente nuovo ed interessante possa essere approfondito in quest'ambito.

Il seguente lemma, e la sua estensione al caso multivariato, è fondamentale per quanto si va a mostrare successivamente.

### 2.6.1 Lemma 1

Si supponga che  $f_0$  e  $G'$  siano funzioni di densità su  $\mathbb{R}$  simmetriche attorno a 0, e

$$f(z) = 2f_0(z)G\{w(z)\} \quad (2.13)$$

è una densità per ogni funzione dispari  $w(\cdot)$ .

*Dimostrazione.* Se  $Y \sim f_0$  e  $X \sim G'$  sono variabili indipendenti, allora

$$\frac{1}{2} = P\{X - w(Y) \leq 0\} = E_Y \{P\{X - w(Y) \leq 0 | Y = z\}\} = \int G(w(z)) f_0(z) dz. \quad \blacksquare$$

*Rappresentazione stocastica.* Se  $Y \sim f_0$  e  $X \sim G'$  sono variabili indipendenti, allora

$$Z = \begin{cases} Y & \text{se } X < w(Y), \\ -Y & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.14)$$

ha funzione di densità (2.13). Questa espressione fornisce un semplice strumento per la generazione di numeri casuali.

### 2.6.2 Definizione e alcune proprietà

Si utilizza il lemma precedente con  $f_0 = \phi$  e  $G = \Phi$ , rispettivamente la funzione di densità e la funzione di ripartizione di una variabile  $N(0,1)$ , e con  $w(x) = \lambda x$ , per ottenere la densità:

$$f(z; \lambda) = 2\phi(z)\Phi(\lambda z), \quad z \text{ e } \lambda \in \mathbb{R}, \quad (2.15)$$

chiamata distribuzione normale asimmetrica con parametro di asimmetria  $\lambda$ , e si scrive  $Z \sim SN(\lambda)$ . L'espressione (2.15) identifica la forma canonica della distribuzione normale asimmetrica, per la quale il parametro di posizione è nullo e il parametro di scala unitario.

Consideriamo la v.c.  $Y = \xi + \omega Z$ , dove  $Z$  ha funzione di densità descritta sopra,  $\xi \in \mathbb{R}$  e  $\omega \in \mathbb{R}^+$ , allora si può scrivere  $Y \sim SN(\xi, \omega, \lambda)$ . Ci si riferisce a  $\xi$ ,  $\omega$  e  $\lambda$  come ai parametri di posizione, di scala e di forma (o asimmetria), rispettivamente.

Le seguenti proprietà caratterizzano la densità (2.15):

- Se  $\lambda = 0$ , si ottiene la densità di una variabile  $N(0,1)$ .
- Se  $\lambda$  cresce (in valore assoluto) l'asimmetria della distribuzione aumenta.
- Quando  $\lambda \rightarrow \infty$ , la densità (2.15) converge alla cosiddetta "half-normal density", ovvero  $2\phi(z)$  per  $z \geq 0$ .
- Se  $Z \sim SN(\lambda)$ , allora  $-Z \sim SN(-\lambda)$ .
- Se  $Z \sim SN(\lambda)$ , allora  $Z^2 \sim \chi_1^2$ , indipendentemente da  $\lambda$ .
- Per  $\lambda$  fissato, la densità (2.15) è fortemente unimodale, perciò  $\log f(z; \lambda)$  è una funzione concava di  $z$ .
- La corrispondente funzione di ripartizione è data da  $P\{Z < z\} = \Phi(z) - 2T(z, \lambda)$ , dove  $T$  è la funzione di Owen (1956), e viene soddisfatta la relazione  $1 - \Phi(-z; \lambda) = \Phi(z; \lambda)$ .
- Se  $U \sim N(0,1)$  v.c. indipendente da  $Z \sim SN(\lambda)$ , allora

$$\frac{aU + bZ}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sim SN\left(\frac{b\lambda}{\sqrt{a^2(1+a^2) + b^2}}\right) \quad (2.16)$$

per ogni  $a, b \in \mathbb{R}$ .

### 2.6.3 Momenti

Tutti i momenti della distribuzione  $SN$  esistono finiti ed hanno una forma analitica semplice. Tuttavia, differiscono sotto diversi aspetti da quelli della distribuzione Normale:

- Il parametro di posizione  $\xi$  e il quadrato del parametro di scala  $\omega$  corrispondono a media e varianza, come nel caso normale, solo se il parametro di forma  $\lambda$  è nullo.
- Le code della distribuzione  $SN$  sono sempre più pesanti rispetto a quelle della Normale, quando  $\lambda$  è diverso da 0.
- I momenti sono esprimibili più convenientemente attraverso il parametro

$$\delta = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \in (-1,1), \text{ si può infatti scrivere l'espressione per la media di } Z$$

$$\text{come } \mu_z = \sqrt{2/\pi} \delta.$$

È possibile quindi esprimere media e varianza di  $Y$  in funzione di  $\mu_z$ , e conseguentemente in funzione di  $\lambda$ , nonché dei parametri di posizione  $\xi$  e di scala  $\omega$ :

$$\mu = E[Y] = \xi + \omega\mu_z$$

$$V[Y] = \omega^2 (1 - \mu_z^2).$$

Inoltre, le espressioni degli indici di asimmetria e di curtosi sono:

$$S(\lambda) = \frac{4-\pi}{2} \frac{\mu_z^3}{(1-\mu_z^2)^{3/2}}$$

$$K(\lambda) = 2(\pi-3) \frac{\mu_z^4}{(1-\mu_z^2)^2}$$

con  $S(\lambda)$  appartenente all'intervallo approssimato  $(-0.9953, 0.9953)$ .

### 2.6.4 Aspetti statistici

Se dal punto di vista probabilistico la distribuzione  $SN$  mostra diverse proprietà interessanti, i relativi processi inferenziali risultano inusuali, soprattutto se ci si concentra su un punto  $\lambda = 0$ , coincidente con la distribuzione normale.

Si consideri anzitutto il caso di un campione casuale semplice  $y = (y_1, \dots, y_n)^T$  da una  $SN(\xi, \omega, \lambda)$  con funzione di log-verosimiglianza:

$$l(\xi, \omega, \lambda) \propto -\frac{1}{2}n \log \omega^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \xi)^2}{\omega^2} + \sum_i \zeta_0 \left( \lambda \frac{y_i - \xi}{\omega} \right), \quad (2.17)$$

dove  $\zeta_0(x) = \log\{2\Phi(x)\}$ .

Sulla base della (2.17) vanno fatte alcune considerazioni. Anzitutto, si presenta il comune problema di massimizzare l'equazione di verosimiglianza solo per via numerica.

Inoltre, si osserva un punto di flesso con  $\lambda = 0$  per la funzione di log-verosimiglianza profilo, in corrispondenza del quale l'informazione attesa di Fisher diviene singolare. Per ovviare a tale difficoltà, si consideri la riparametrizzazione da  $(\xi, \omega, \lambda)$  a  $(\mu, \sigma, S)$  che si ottiene riscrivendo

$$Y = \xi + \omega Z = \mu + \sigma Z_0, \quad Z_0 = \frac{(Z - \mu)}{\sqrt{1 - \mu_Z^2}}. \quad (2.18)$$

Poiché  $Z_0$  è una variabile standardizzata, con media nulla e varianza unitaria,  $\mu$  e  $\sigma$  rappresentano rispettivamente la media e la deviazione standard di  $Y$ , mentre  $S$  indica l'indice di asimmetria. Con questa parametrizzazione, la funzione di log-verosimiglianza e la matrice d'informazione di Fisher hanno un comportamento regolare. Tale scrittura risulterà necessaria successivamente per poter costruire una struttura di tipo *GARCH* su una variabile da  $SN$  (vedi sezione 2.8).

## 2.7 Distribuzione *Skew-t* e suoi momenti

Dal punto di vista applicativo è utile a livello applicativo poter considerare distribuzioni per cui è possibile regolare sia il livello di asimmetria sia la pesantezza delle code. Una tra le diverse alternative è offerta da una versione asimmetrica della densità  $t$ , data la sua maneggevolezza dal punto di vista algebrico e poiché essa è stata usata con questi scopi già nella sua forma simmetrica.

### 2.7.1 Lemma 2

Se  $V \square \text{Gamma}(\psi, \eta)$ , allora ogni  $a, b \in \square$

$$E\left[\Phi\left(a\sqrt{V} + b\right)\right] = P\left[T \leq a\sqrt{\psi/\eta}\right]$$

dove  $T$  è una variabile  $t$  non-centrale con  $2\psi$  gradi di libertà e parametro di non-centralità  $-b$ .

Ora, si può definire la distribuzione *Skew-t* tramite la trasformazione

$$Y = \xi + \omega \frac{Z}{\sqrt{V}} \quad (2.19)$$

dove  $Z \sim \text{SN}(\lambda)$  e  $V \sim \chi_\tau^2/\tau$ , variabili casuali tra loro indipendenti. Applicando il lemma precedente ad una  $\text{Gamma}(\frac{1}{2}\tau, \frac{1}{2}\tau)$  e tramite alcuni semplici passaggi algebrici è possibile ricavare la funzione di densità per  $Y$ .

Si dice che una variabile casuale continua  $Y$  ha distribuzione *Skew-t* se la sua densità è del tipo

$$f_T(y) = \frac{2}{\omega} t_1(z; \tau) T_1\left(\lambda z \sqrt{\frac{\tau+1}{z^2 + \tau}}; \tau+1\right), \quad (2.20)$$

dove  $(\xi, \omega, \lambda)$  sono gli stessi visti nella sezione precedente,  $z = \omega^{-1}(y - \xi)$ ,

$$t_1(z; \tau) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(\tau+1))}{(\pi\tau)^{1/2} \Gamma(\frac{1}{2}\tau) (1 + z^2/\tau)^{(\tau+1)/2}},$$

è la funzione di densità di una variabile  $t$  di Student con  $\tau$  gradi di libertà, e  $T_1(x; \tau+1)$  indica la funzione di ripartizione  $t$  scalare con  $\tau+1$  gradi di libertà. In questo caso si scrive  $Y \square \text{St}(\xi, \omega, \lambda, \tau)$ .

La famiglia caratterizzata dalla (2.20) gode di varie proprietà interessanti, alcune delle quali ne indicano il legame con la distribuzione *SN*:

- se  $\tau \rightarrow \infty$ , (2.20) converge alla densità di una *SN*, come è chiaro dalla rappresentazione (2.19);
- la classe delle densità è chiusa per trasformazioni affini, con  $\lambda$  e  $v$  invarianti;
- la (2.20) permette la scelta tra una gamma illimitata per gli indici di asimmetria e di curtosi per le componenti individuali.

## 2.7.2 Momenti

Si assuma, per semplicità,  $\xi = 0$  e quindi  $Y = \omega V^{-1/2} Z$ . Se  $E[Y^{(m)}]$  indica un momento di ordine  $m$ , si può scrivere

$$E[Y^{(m)}] = \omega^m E[V^{-m/2}] E[Z^{(m)}]$$

dove  $Z$  ha funzione di densità di una *skew-normal* con  $\xi = 0$  e  $\omega = 1$ . È noto che

$$E[V^{-m/2}] = \frac{(\tau/2)^{m/2} \Gamma(\frac{1}{2}(\tau - m))}{\Gamma(\frac{1}{2}\tau)},$$

mentre, per l'espressione  $E[Z^{(m)}]$  si veda la sezione precedente (per dettagli cfr. Azzalini & Capitanio 1999).

Si consideri anzitutto il caso scalare. Definendo

$$\mu = \delta(\tau/\pi)^{1/2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(\tau - 1))}{\Gamma(\frac{1}{2}\tau)}, \quad (\tau > 1),$$

dove  $\delta = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}}$  è riferito a  $Z \sim SN(\lambda)$  e per esso si fanno le stesse osservazioni

fatte nella sezione dedicata alla distribuzione *SN*. Si ottiene quindi, per  $\xi = 0$ ,

$$E[Y] = \omega\mu,$$

$$E[Y^2] = \omega^2 \frac{\tau}{\tau - 2}.$$

Inoltre, le espressioni degli indici di asimmetria e di curtosi sono:

$$S(\lambda) = \mu \left[ \frac{\tau(3 - \delta^2)}{\tau - 3} - \frac{3\tau}{\tau - 2} + 2\mu^2 \right] \left[ \frac{\tau}{\tau - 2} - \mu^2 \right]^{-3/2} \quad (\text{if } \tau > 3),$$

$$K(\lambda) = \left[ \frac{3\tau^2}{(\tau - 2)(\tau - 4)} - \frac{4\mu^2\tau(3 - \delta^2)}{(\tau - 3)} + \frac{6\mu^2\tau}{\tau - 2} - 3\mu^4 \right] \left[ \frac{\tau}{\tau - 2} - \mu^2 \right]^{-2} - 3 \quad (\text{if } \tau > 4).$$

## 2.8 Modelli *GARCH* con distribuzioni asimmetriche

Si consideri un modello *GARCH*( $p, q$ ):

$$Y_t = \mu_t + \sigma_t Z_t, \quad Z_t \square i.i.d.(0,1)$$

$$\sigma_t^2 = \gamma + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Se  $Z_t \square N(0,1)$  allora  $Y_t | \mathfrak{S}_{t-1} \square N(\mu_t, \sigma_t^2)$ , ovvero se la distribuzione degli errori è normale, è noto che i parametri di posizione e di scala per la distribuzione condizionata di  $Y_t$  coincidono rispettivamente con la media e la deviazione standard condizionate.

Nei paragrafi precedenti sono state presentate le distribuzioni *Skew-Normal* e *Skew-t* nella parametrizzazione più comunemente conosciuta, in cui si distinguono i parametri di posizione, di scala e di forma  $(\xi, \omega, \lambda)$ . È stato mostrato anche come questi primi due valori non coincidano con la media e la deviazione standard rispettivamente come nel caso della normale.

Com'è possibile dunque riprodurre una struttura *GARCH* partendo da errori generati da queste distribuzioni? Riportiamo due differenti soluzioni per rispondere a tale quesito.

### 2.8.1 Struttura *GARCH* sul parametro di scala

Poiché nel caso normale il modello *GARCH* viene applicato al quadrato del parametro di scala (dato che esso coincide con la varianza), anche nel caso delle distribuzioni asimmetriche considerate si è data una struttura autoregressiva proprio a tale quantità. Partendo da  $Z \square SN(\lambda)$  si consideri la sua trasformazione lineare:

$$Y_t = \mu_t + \omega_t Z_t$$

$$\omega_t^2 = \gamma + \sum_{i=1}^q \alpha_i Y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \omega_{t-j}^2. \quad (2.21)$$

In tal caso  $Y_t$  avrà distribuzione condizionata:

$$Y_t | \mathfrak{S}_{t-1} \square SN(\mu_t, \omega_t, \lambda).$$

Nel modello originario di Engle, tuttavia, così come per le sue generalizzazioni ed estensioni, viene sempre mantenuta l'ipotesi in cui le innovazioni siano indipendenti ed identicamente distribuite, con media nulla e varianza unitaria.

### 2.8.2 Parametri centrati (Si considera il caso *skew-normal*)

Un modo plausibile di affrontare il problema è quello di riparametrizzare l'espressione di una v.c.  $Y = \xi + \omega Z \sim SN(\xi, \omega, \lambda)$  come già visto nella sezione 2.6.2, in modo tale da avere

$$Y = \mu + \sigma Z_0,$$

dove

$$Z_0 = (Z - \mu_z) / \sigma_z, \quad \sigma_z = \sqrt{1 - \mu_z^2}$$

e  $Z \sim SN(\lambda)$ . In tal caso  $Z_0$  avrà anch'essa distribuzione normale asimmetrica con parametro di posizione  $-\mu_z / \sigma_z$  e di scala  $1 / \sigma_z$ , nonché ovviamente media nulla e varianza unitaria, proprietà desiderate.

Standardizzati gli errori, è possibile utilizzarne la trasformazione  $Y$  con i consueti parametri centrati  $(\mu_t, \sigma_t)$  per creare il modello *GARCH* relativo. Formalmente, il modello che ne deriva è

$$\begin{aligned} Y_t &= \mu_t + \sigma_t Z_{0,t}, \\ \sigma_t^2 &= \gamma + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Ovviamente, vale la corrispondenza

$$\xi_t = \mu_t - \sigma_t \sigma_z^{-1} \mu_z, \quad \omega_t = \sigma_t \sigma_z^{-1}$$

e  $Y_t$  avrà distribuzione condizionata pari a

$$Y_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim SN(\xi_t, \omega_t, \lambda).$$

Nelle applicazioni che si vedranno nei capitoli 3 e 4, si è utilizzata questa soluzione per studiare, via simulazione, un modello parametrico che tenga conto di una struttura del tipo *Skew-Normal* o *Skew-t* per le innovazioni nei rendimenti finanziari.

Prima di addentrarci nello studio empirico di questi modelli con distribuzione asimmetrica, è opportuno farsi un'idea di come i parametri  $\lambda$  e  $\tau$  regolino skewness ed eccesso di curtosi. A tale scopo, si anticipano a questa sezione, a titolo esplicativo, i risultati di alcune simulazioni in cui si sono generate serie di dati dai modelli *GARCH(1,1) Skew-Normal* e *GARCH(1,1) Skew-t*, utilizzando diversi valori per i

parametri  $\lambda$  e  $\tau$ . Per ogni simulazione si sono effettuate 500 repliche di lunghezza 2000 e calcolati, per ciascuna di esse, l'indice di asimmetria campionaria e l'eccesso di curtosi campionaria (si veda (4.1)).<sup>IX</sup> In Tabella 2.01 sono riportati, per ogni simulazione, i valori utilizzati per i parametri d'interesse, i corrispondenti livelli teorici di skewness condizionata ed eccesso di curtosi condizionata, e la media sulle 500 repliche degli indici campionari di asimmetria e curtosi.

Al crescere (in valore assoluto) di  $\lambda$ , aumentano asimmetria condizionata e asimmetria campionaria. Anche l'eccesso di curtosi aumenta all'aumentare del parametro di forma: si osservi come l'eccesso di curtosi condizionata sia nettamente inferiore rispetto al valore medio campionario marginale (cfr. 2.5). Nelle simulazioni relative al modello  $GARCH(1,1)$  *Skew-t*, si osserva invece una relazione inversa tra il numero di gradi di libertà utilizzato in generazione e i corrispondenti valori delle statistiche.

---

<sup>IX</sup> Si suppone  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ . I valori utilizzati per i parametri relativi all'espressione della varianza condizionata sono  $(\alpha, \beta, \gamma) = (0.1, 0.85, 0.015)$ .

# **Capitolo 3**

## **L'APPROCCIO VALUE-AT-RISK**

### **3.1 Introduzione**

Il compito del risk manager è quello di misurare il rischio per mantenerlo sotto controllo espletando quella che è la sua funzione principale di strumento gestionale. Il rischio può manifestarsi sotto diverse forme e in diverse tipologie di realtà finanziarie, presso le banche, le istituzioni finanziarie in genere e presso imprese industriali e commerciali..

Secondo la classificazione che si evince dalla normativa Basilea II, possiamo suddividere il rischio in tre grandi categorie:

- Rischio di mercato
- Rischio di credito
- Rischio operativo

Il rischio di mercato è strettamente collegato all'attività di intermediazione tipica della banca, nonché alla negoziazione delle attività finanziarie. Si manifesta in seguito a variazioni inattese dei fattori di mercato (tassi di interesse, tassi di cambio, prezzi azionari...) che determinano una variazione al rialzo o al ribasso del valore di una posizione o di un portafoglio finanziario.

Il rischio di credito si identifica con il rischio di default in cui incorre il titolare di un'attività d'impresa (finanziaria e non) per l' eventuale incapacità parziale o totale della controparte ad assolvere l'impegno assunto.

Rischio operativo, molte banche lo intendono come qualsiasi rischio non classificabile come rischio di mercato o di credito; altre lo definiscono come il rischio di perdite derivanti da vari tipi di errore umano o tecnico. In numerosi casi il rischio operativo viene associato al rischio di regolamento o pagamento, nonché al rischio di interruzione dell'attività, al rischio amministrativo e al rischio legale.

Al crescere della necessità di misurare il rischio al fine di gestirlo sono emerse molte intuizioni che vanno sotto il nome di risk measurement. In un primo momento venne preso in considerazione solamente il rischio di mercato, dopodiché le tecniche

sono state mutate a riadattate alla gestione di altri tipi di rischio. Esistono tante misure del rischio, ma l'attenzione in questo articolo è rivolta al Value at Risk (VaR).

Il VaR è una misura del potenziale rischio che può subire un portafoglio di attività finanziarie, l'idea che sta alla base del modello di calcolo è un concetto molto semplice che ha dato spazio a molte rielaborazioni da parte degli studiosi, tanto da arrivare a delle estreme sofisticazioni matematiche. Data la sua versatilità, oggi sono disponibili numerose varianti del modello base che sono il risultato di diverse combinazioni di tecniche numeriche e ipotesi sul comportamento delle variabili finanziarie. Oggi disponiamo, quindi, di un ampio ventaglio di modelli che meglio si adattano alle diverse "situazioni" che si vogliono monitorare sul fronte del rischio.

### 3.2 Cos'è il Value at Risk

Dato un certo portafoglio di attività finanziarie il VaR è la misura della massima perdita potenziale nella quale può incorrere il portafoglio, scaturita dall'evoluzione dei prezzi di mercato (nel caso di rischio di mercato), in un determinato periodo di tempo ad un certo livello di confidenza.

Indicando :

- $t$  il periodo di detenzione (Holding Period);
- $V_t$  il valore della perdita in  $t$ .

Il VaR, ovvero la massima perdita potenziale, per il livello di probabilità stabilito è quel valore che soddisfa la relazione:

$$P_t [V_t \leq VaR] = \alpha$$

essendo  $\alpha$  il livello di significatività.

Nell'esempio mostrato in Figura 3.01 di seguito si può vedere che, data una certa distribuzione dei rendimenti, il Valore a Rischio di un certo portafoglio su un periodo di detenzione  $t$ , con probabilità del 95%, è di 473 Euro.

Alla base della costruzione del modello VaR si pone la Teoria del Portafoglio, che usa stime della volatilità e correlazioni tra i rendimenti dei differenti strumenti trattati. L'utilità del VaR risiede nella possibilità di applicarlo ai rischi di mercato associati a diverse tipologie di strumenti finanziari: il rischio su azioni, il rischio di tasso di interesse, il rischio di cambio e il basis risk.

I parametri determinanti per il calcolo del VaR sono la stima della volatilità futura e delle correlazioni tra gli strumenti finanziari che costituiscono il portafoglio. Statisticamente la misura impiegata per rappresentare la volatilità è la deviazione standard, che misura la dispersione delle realizzazioni intorno al loro valore atteso.

Generalmente, se per i calcoli si usano dati ad alta frequenza e si suppone un holding period breve (massimo 10 giorni), è ragionevole supporre che il valore medio del rendimento di portafoglio sia uguale a 0.

Il metodo indubbiamente più diffuso per ottenere una previsione della volatilità relativa ad un certo tempo futuro è quello che si basa sulla stima della volatilità passata.

Questa misura si rivela, a volte, inadeguata per cogliere le peculiarità proprie delle serie storiche delle attività finanziarie. Infatti, l'ipotesi implicita nel calcolo della volatilità storica, come stima di quella futura, è che la variabile della quale si intende misurare la volatilità sia caratterizzata da una distribuzione normale stazionaria, con media e varianza costanti, ipotesi spesso smentita dal comportamento reale delle variabili finanziarie.

Allo scopo di stimare la volatilità cercando di recepire le evidenze empiriche si sono sviluppate altre tecniche che descriverò di seguito molto brevemente:

- ARCH-GARCH. Sono modelli di stima della volatilità basati sugli assunti che la varianza muta nel tempo con fenomeni di volatility clustering (eteroschedasticità), i livelli passati della volatilità influenzano i livelli futuri (autoregressivo) e le previsioni ottenute sono subordinate alle informazioni disponibili nel periodo precedente (condizionale). Sono modelli che consentono di prevedere la volatilità futura utilizzando una regressione basata sui valori passati della stessa volatilità
- Volatilità implicita: utilizzando la formula di pricing e le informazioni disponibili è possibile ricavare la volatilità implicita dal prezzo di mercato delle opzioni

La correlazione misura, invece, il co-movimento di due variabili, ossia la tendenza di due variabili a muoversi simultaneamente nella stessa direzione. Si esprime come:

$$\rho_{X,Y} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

E' un indice compreso tra -1 e 1, ed è ottenuto dalla matrice varianza e covarianza degli asset o fattori di rischio (ottenuti con un mapping sugli asset) del portafoglio.

Volatilità e correlazioni sono i due parametri fondamentali per il calcolo del VaR e rappresentano i parametri di input del modello. Esistono diversi modelli di calcolo, ognuno con suoi vantaggi e svantaggi che si possono riassumere sostanzialmente in semplicità/complessità di implementazione, ipotesi implicite del modello che si adattano o non si adattano alle peculiarità del portafoglio.

### 3.3 Modelli di calcolo del VaR

I metodi di calcolo del VaR si possono raggruppare in:

- Modelli parametrici
- Modelli non parametrici

#### 3.3.1 Modelli parametrici

Sono quella famiglia di modelli che si espletano in un algoritmo chiuso che richiede dei parametri precisi di input. Vengono anche definiti secondo l'approccio Varianza-Covarianza:

Questa è la metodologia standard per la misurazione dei rischi finanziari, diffusa attraverso l'applicazione Risk Metrics proposta da J.P. Morgan. E' quello che si avvicina di più alle definizioni ed ai concetti derivati dalla moderna teoria del portafoglio, in quanto esprime il VaR attraverso la matrice di varianza e covarianza.

Tale metodo è sintetizzabile nei seguenti passi:

- a) la determinazione dei fattori di rischio
- b) il mapping, scomposizione del portafoglio in un portafoglio "equipollente" di titoli zero coupon con scadenze coincidente con quelle dei fattori di rischio (o di mercato)
- c) la stima della matrice delle correlazioni di tali fattori

d) la stima delle volatilità dei fattori di rischio evidenziata

Il vantaggio di poter disporre di una stima della massima perdita possibile utilizzando solamente i parametri di variabilità e sensibilità deriva dalle particolari ipotesi teoriche assunte dal modello: anzitutto si ipotizza che la distribuzione dei rendimenti dei fattori di rischio sia di tipo normale; inoltre, la relazione tra posizione  $i$ -esima e il relativo fattore di rischio è lineare.

Le maggiori critiche avanzate ai modelli parametrici riguardano proprio le ipotesi probabilistiche delle variabili in oggetto, in particolare, l'assunzione di distribuzione dei rendimenti degli asset/fattori di mercato di tipo normale e quindi simmetrica, e le approssimazioni con relazioni lineari tra attività finanziarie e fattori di mercato.

Assumere che i fattori di rischio seguano una distribuzione normale da un lato sottostima inevitabilmente le probabilità di movimenti estremi del mercato, dall'altro assume che i movimenti del mercato siano simmetrici. Le distribuzioni empiriche in genere mostrano code più spesse (Figura 3.02) e asimmetria negativa (Figura 3.03).

Inoltre, approssimare con relazioni lineari il rapporto fra attività finanziarie e fattori di rischio può risultare del tutto inadeguato a rappresentare il reale rischio di mercato della posizione. L'adozione di modelli delta-gamma risolve in parte il problema, ma genera altre difficoltà di stima.

### 3.3.2 Modelli non parametrici

Gli approcci non parametrici tentano di superare queste problematiche, mediante l'utilizzo di simulazioni storiche e simulazioni Montecarlo.

Nel primo caso, le variazioni del valore del portafoglio sono ottenute applicando allo stesso le variazioni storiche dei fattori di rischio/prezzi titoli. I valori così ottenuti opportunamente ordinati costituiscono la distribuzione dei rendimenti di portafoglio in un ottica "what if". L'obiettivo è simulare la perdita potenziale del portafoglio detenuto in base alle condizioni di rischio passate.

Il metodo della simulazione Montecarlo è una tecnica numerica per la trattazione di problemi caratterizzati da una sostanziale intrattabilità analitica. Inoltre, ha particolare successo per risolvere il problema della rappresentazione dei portafogli

composti da strumenti finanziari ad alto contenuto opzionale o non lineare e la distribuzione dei rendimenti del portafoglio stesso.

Il metodo Montecarlo è una valida alternativa agli approcci parametrici nel caso in cui il portafoglio comprenda posizioni con andamento di prezzo non lineare. La seconda caratteristica attraente riguarda la possibilità di adattare per la generazione degli scenari random, distribuzioni di probabilità dei fattori di rischio non normali.

Rimane fondamentale, comunque, la scelta delle funzioni di valutazioni appropriate, il rischio di scegliere un modello di valutazione errato è chiamato model risk.

### **3.4 Ambito di applicazione**

Essendo il VaR una misura di rischio nata in ambito bancario, la maggior parte dei modelli riguardano un uso prettamente bancario, per portafogli con finalità di trading.

Le assunzioni tipiche del mondo bancario sono:

1. Orizzonte temporale breve (1-10 giorni)
2. Rendimenti degli asset/fattori di rischio distribuiti normalmente
3. Rendimento atteso pari a 0
4. Matrice varianza-covarianza costante
5. Assenza di benchmark

Nella gestione di un portafoglio di investimento, attività tipica degli società di gestione del risparmio, queste assunzioni non sono assolutamente accettabili proprio per le diverse peculiarità dell'attività di investimento rispetto a quella di trading. Nell'ambito di gestione delle attività finanziarie è più ragionevole assumere che:

1. L'orizzonte temporale è relativamente lungo, almeno un mese, spesso più mesi ma anche 1 anno
2. Rendimenti degli asset/fattori di rischio sono distribuiti non normalmente
3. Rendimento atteso non è pari a 0
4. Volatilità e correlazioni variano nel tempo
5. Il portafoglio è rapportato ad un benchmark

Un active asset manager aggiunge valore al rendimento di portafoglio con attività di security picking e asset allocation strategica/tattica, quindi in genere il turnover del portafoglio è più lento se confrontato con un portafoglio di trading bancario. In caso di gestione passiva, il turnover è ancora più lento proprio perché la gestione passiva si limita a replicare fedelmente la composizione del benchmark.

Per questi motivi è chiaro che il periodo di detenzione deve essere considerato di medio/lungo termine, in quanto rappresenta il periodo di detenzione di portafoglio.

Con uno scenario di medio/lungo termine è imprudente considerare che i rendimenti del portafoglio siano distribuiti normalmente con media dei rendimenti attesa pari a 0.

Da evidenze empiriche, la distribuzione dei rendimenti su un medio/lungo periodo mostra caratteristiche di asimmetria negativa e leptocurtosi (distribuzione eccessivamente alta, con code troppo lunghe), è chiaro che ipotizzare una distribuzione normale in condizioni come queste si rischia di sottostimare il rischio e quindi di fare un errore di valutazione.

Inoltre, sempre da evidenze empiriche, per i periodi di medio/lungo periodo la volatilità e la correlazione tra le attività finanziarie non rimane costante nel tempo.

Nella gestione del risparmio è la norma utilizzare un benchmark con il quale confrontare l'allocazione dell'asset, nonché il rendimento e il rischio. Il concetto di rischio del portafoglio non è più in valore assoluto come avviene in ambito bancario, ma il rischio deve essere considerato come l'altro lato del rendimento. Lo scopo del gestore è assumere il minimo rischio con il massimo rendimento e non minimizzare il rischio in assoluto. Questo concetto si può esprimere anche dicendo che la Performance attribution e la Risk attribution sono viste come le due facce della stessa medaglia. Il gestore non è libero di assumere il livello di rischio che ritenga opportuno, infatti, nel prospetto di ogni fondo è indicato un parametro oggettivo di riferimento o benchmark, il quale "individua il profilo di rischio e le opportunità del mercato in cui tipicamente il fondo investe" (Assogestioni, Benchmark e fondi comuni, 1999), e cui il gestore si deve attenere.

È chiaro che in questo mondo il VaR, pur avendo lo stesso significato di perdita massima potenziale, è calcolato tenendo conto delle peculiarità della "situazione" che si deve monitorare. Allora si parlerà di Relative Var o Benchmark Var (R-VaR o B-

VaR) dove la massima perdita potenziale è rapportata al Benchmark di riferimento. La differenza nel metodo rispetto al VaR Assoluto sta nella ridefinizione del portafoglio che è calcolato sommando una posizione lunga del portafoglio reale a una posizione corta del portafoglio benchmark.

### **3.5 VaR e il calcolo del requisito patrimoniale<sup>X</sup>**

Le banche possono utilizzare i modelli interni riconosciuti dalla Banca d'Italia per il calcolo dei requisiti patrimoniali a fronte dei rischi di posizione, generico e specifico, su titoli di debito e di capitale, di cambio e di posizione su merci.

È possibile utilizzare il modello interno per il calcolo di tutti i requisiti patrimoniali di cui sopra ovvero solo per alcuni di essi; in quest'ultimo caso i requisiti patrimoniali saranno una combinazione tra quelli calcolati con il modello e quelli calcolati secondo la metodologia standardizzata per i rischi non valutati dal modello.

Le banche che utilizzano il modello interno devono soddisfare un requisito patrimoniale corrispondente al maggiore tra i due importi seguenti:

- la misura del "valore a rischio" (VaR) del giorno precedente;
- la media delle misure del VaR giornaliero nei 60 giorni operativi precedenti, moltiplicata per un fattore non inferiore a 3, eventualmente maggiorata sulla base dei risultati dei test retrospettivi.

Per poter calcolare, tramite il modello, il requisito patrimoniale a fronte del rischio specifico su titoli di debito le banche devono dimostrare che il modello sia in grado di:

- spiegare la variazione storica dei prezzi nel portafoglio;
- riflettere la concentrazione del portafoglio;
- resistere a una situazione sfavorevole;
- essere convalidato da test retrospettivi volti a verificare che il rischio specifico sia valutato in modo adeguato.

Inoltre, le banche devono dimostrare di essere in possesso di metodologie idonee a valutare adeguatamente il rischio di evento e il rischio di inadempimento per le

---

<sup>X</sup> Si riportano, per la parte d'interesse, le istruzioni di vigilanza per le banche fornite dalla Banca d'Italia con la circolare 229 del 1999.

posizioni in titoli di debito e in titoli di capitale. Qualora la banca non sia in grado di fornire tale dimostrazione, il requisito patrimoniale dovrà includere una maggiorazione. Per la determinazione di tale maggiorazione viene effettuato un calcolo analogo a quello utilizzato per il modello per il rischio generale di mercato nel caso in cui quest'ultimo non abbia superato i test retrospettivi. In particolare, alla misura del rischio specifico calcolata dalla banca sulla base del proprio modello viene applicato un fattore moltiplicativo di 4.

Analiticamente il requisito patrimoniale calcolato con il modello interno è dato dalla seguente formula:

$$C_t = \max \left( VaR_{t-1} + \beta_t \times RSM_{t-1}, \delta_t \times \frac{1}{60} \sum_{i=1}^{60} VaR_{t-i} + \beta_t \times \frac{1}{60} \sum_{i=1}^{60} RSM_{t-i} \right) \quad (3.1)$$

dove:

- $C_t$  è il requisito patrimoniale al giorno  $t$ ;
- $VaR_{t-i}$  è il valore a rischio calcolato secondo il modello per il portafoglio detenuto al giorno  $t-i$ ;
- $\delta_t$  è il fattore moltiplicativo, non inferiore a 3;
- $\beta_t$  rappresenta il fattore moltiplicativo, che varia in relazione all'adeguatezza del modello interno a calcolare il rischio di evento e di inadempimento. Tale fattore assume valore 0 oppure 1 a seconda che la banca dimostri o meno di essere in grado di valutare adeguatamente il rischio di evento e di inadempimento.

Complessivamente, quindi, il fattore moltiplicativo  $(\delta_t + \beta_t)$  può assumere un valore pari al massimo a 4.

- $RSM_{t-i}$  è l'ammontare di capitale destinato alla copertura dei rischi specifici degli strumenti finanziari sul portafoglio detenuto il giorno  $t-i$ , calcolato secondo il modello interno.

Il calcolo del VaR deve essere effettuato su base giornaliera e deve prevedere un intervallo di confidenza unilaterale del 99 per cento e un periodo di detenzione pari a 10 giorni. Inoltre, il periodo storico di osservazione deve riferirsi ad almeno un anno precedente, tranne nel caso in cui un aumento improvviso e significativo delle

volatilità dei prezzi giustifichi un periodo di osservazione più breve. Per il calcolo del VaR, le banche possono utilizzare correlazioni empiriche nell'ambito della stessa categoria di rischio e fra categorie di rischio distinte. La Banca d'Italia accerta che il metodo di misurazione delle correlazioni della banca sia corretto e applicato in maniera esaustiva.

L'utilizzo di un modello corretto per il *VaR* viene accertato mediante una procedura retrospettiva (*Backtesting*). Il test retrospettivo mette a confronto il VaR, calcolato secondo il modello interno, con la variazione effettiva del valore del portafoglio al fine di verificare se le misure di rischio elaborate dalla banca al 99° percentile coprono effettivamente il 99% dei risultati di negoziazione. Tale capacità si ritiene raggiunta da un modello che, su un campione di 250 giorni lavorativi, produca al massimo 4 casi in cui i risultati effettivi di negoziazione non sono coperti dalla misura del rischio ("scostamenti"). Il test retrospettivo deve essere svolto quotidianamente. La banca deve essere in grado, ove richiesto, di effettuare test retrospettivi sulla base di variazioni ipotetiche del valore del portafoglio, calcolate mantenendo invariate le posizioni di fine giornata. Se la variazione effettiva del valore del portafoglio supera il VaR calcolato secondo il modello, si ha uno scostamento. In funzione del numero di scostamenti si applica il fattore di maggiorazione descritto in Tabella 3.01 .

La banca notifica prontamente alla Banca d'Italia gli scostamenti rilevati dal programma di test retrospettivi e che hanno determinato l'aumento del fattore di maggiorazione, conformemente alla Tabella 3.01.

La banca può chiedere alla Banca d'Italia l'esonero dall'applicazione del fattore di maggiorazione qualora lo scostamento sia da imputare a fattori eccezionali. La Banca d'Italia autorizza la banca a non tenere conto della maggiorazione entro un termine di 30 giorni dalla richiesta.

Ove gli scostamenti risultino numerosi, la Banca d'Italia può imporre le misure necessarie per assicurare il tempestivo miglioramento del modello. Nel caso in cui, nonostante tali misure, gli scostamenti persistano la Banca d'Italia può revocare il riconoscimento del modello interno.

# Capitolo 4

## SIMULAZIONI

### 4.1 Introduzione

La possibilità di riscontrare evidenze di asimmetria della distribuzione delle serie storiche finanziarie, ed in particolar modo ci riferiamo alle serie dei rendimenti finanziari, ci pone di fronte a due differenti problemi di natura empirica:

- anzitutto occorre individuare gli strumenti che possano correttamente verificare la presenza di asimmetria nei dati, tenendo conto delle altre caratteristiche che li contraddistinguono, fra tutte la dipendenza temporale e la scarsa rispondenza all'ipotesi di normalità per la distribuzione condizionata;
- è inoltre necessario quantificare l'impatto che l'asimmetria rilevata ha su strumenti ampiamente utilizzati in ambito finanziario, quali il *VaR* e, tramite questo, il capitale di copertura per il rischio di mercato, evidenziando come quei modelli che si basano sull'ipotesi di simmetria diano una stima non corretta del rischio.

Nei primi due capitoli si sono presentati, a livello teorico, alcuni strumenti utili alla verifica dell'asimmetria nella distribuzione dei rendimenti finanziari: da un lato, i test di simmetria ci possono aiutare a raggiungere il nostro primo obiettivo di verifica; dall'altro, invece, l'impiego di un modello *GARCH* con distribuzioni asimmetriche permette di utilizzare il *VaR*, basato sui quantili della distribuzione condizionata teorica, per studiare la relazione esistente tra rischio e asimmetria.

Per quanto concerne i test di simmetria, si è già discusso come, spesso in letteratura, si utilizzi l'indice di asimmetria campionario ( $\hat{S}$ , si veda 1.3) anche per dati che non presentano le caratteristiche desiderabili perché tale test sia effettivamente efficiente, ed, in tal caso, i rendimenti finanziari sono caratterizzati da dipendenza temporale, al momento secondo, e da una distribuzione, sia marginale che condizionata, leptocurtica. Ciò nonostante,  $\hat{S}$  può rappresentare un utile termine di confronto per le altre misure di asimmetria che si è scelto di considerare, tra tutte, nella nostra analisi: i test proposti da Bai e Ng (cfr. 1.5), sia quello di skewness

condizionata ( $CS$ ) che quello per la non condizionata ( $\hat{\pi}_3$ ), sembrano rispondere alle nostre esigenze, anche se, per quest'ultimo, occorre porre particolare attenzione all'eccesso di curtosi nei dati, perché tale caratteristica potrebbe precludere l'esistenza del momento sesto finito, su cui si basa questo test per l'asimmetria non condizionata. Per tale ragione si è presa in considerazione anche una misura campionaria per l'eccesso di curtosi:

$$\hat{K} = \frac{\hat{\mu}_4}{\hat{\sigma}^4} - 3 \quad (4.1)$$

basato sul momento quarto centrato standardizzato oltre il livello di curtosi di una distribuzione normale. Indipendentemente dalla correttezza di  $\hat{K}$  nel caso di dati serialmente correlati e con distribuzione non normale, esso ci è utile, ancora una volta, come termine di confronto.

Per verificare la presenza dell'asimmetria mediante l'utilizzo di modelli ad eteroschedasticità condizionale con distribuzioni asimmetriche, come discusso nel Capitolo 2, si sono prese in considerazione quattro diverse leggi di probabilità, per altrettanti modelli *GARCH*:

- il modello *GARCH*(1,1) Normale (2.11), che considera la struttura *GARCH* con errori i.i.d. gaussiani, con media nulla e varianza unitaria, e che è funzione dei parametri  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , utilizzati nell'espressione della varianza condizionata  $\sigma_t^2 = \gamma + \alpha(y_{t-1} - \mu)^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$ ;
- il modello *GARCH*(1,1) *Skew*-Normal (2.22), in cui invece gli errori sono una standardizzazione di un campione  $Z \square SN(\lambda)$ , che considera oltre ai parametri citati sopra anche  $\lambda$ , parametro di forma, che regola l'asimmetria della distribuzione;
- il modello *GARCH*(1,1) con errori distribuiti come una  $t$  di Student con  $\tau$  gradi di libertà<sup>XI</sup>, che viene frequentemente utilizzato in letteratura per tener conto dell'evidenza di curtosi nei rendimenti finanziari;

---

<sup>XI</sup> Un campione generato da una  $t$  di Student con  $\tau$  gradi di libertà, ha media nulla e varianza pari a  $\frac{\tau}{\tau - 2}$ . Per l'utilizzo con il modello *GARCH* se ne considera quindi la versione standardizzata.

- ed, infine, quello in cui gli errori sono una standardizzazione di un campione  $Z \square St(\lambda, \tau)$ , il modello  $GARCH(1,1)$  *Skew-t* per il quale i parametri d'interesse sono  $(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \tau)$ , dove  $\tau$  identifica i gradi di libertà nella distribuzione *Skew-t*.

Sia per i test che per i modelli presi in esame, sono state create ed utilizzate delle procedure appositamente sviluppate in  $R^{XII}$ . Prima di utilizzare tali procedure per analizzare serie reali di dati, si è voluto verificare, mediante simulazioni, il loro corretto funzionamento e si è studiato il loro comportamento in diversi scenari, in cui si sono fatte variare le condizioni di asimmetria e curtosi, considerando anche come tali variazioni abbiano implicazioni sulle misure di rischio finanziario. Nei paragrafi successivi, con l'ausilio delle tabelle e delle figure riportate rispettivamente nelle Appendici A e B, vengono mostrati i risultati delle suddette simulazioni.

## 4.2 Verifica delle procedure di stima

Il primo obiettivo delle simulazioni è quello di verificare la correttezza delle procedure di stima: mediante repliche di monte-carlo si sono generati campioni di lunghezza differente dai diversi modelli presi in considerazione, prendendo in esame diverse combinazioni dei parametri d'interesse. Per ragioni pratiche, vengono mostrate solo alcune delle simulazioni effettuate a tale scopo, in particolare quelle in cui si considerano i valori per i parametri che, attraverso un'indagine esplorativa, sono risultati più adatti ad approssimare il comportamento delle serie reali. Va precisato che, in tutte le simulazioni qui presentate, si è ipotizzato per il modello  $GARCH(1,1)$  media nulla ( $\mu_t = \mu = 0$ ) e i valori utilizzati per i parametri relativi all'espressione della varianza condizionata sono  $(\alpha, \beta, \gamma) = (0.1, 0.85, 0.015)$ .

Da Tabella 4.01 a Tabella 4.05, si osservano per ciascun modello le stime ottenute su 500 repliche di lunghezza 500. Da questo primo riscontro, si possono ricavare le prime osservazioni:

---

<sup>XII</sup> Piuttosto che definire  $R$  come un software statistico, esso è un ambiente che raccoglie librerie ed oggetti utilizzabili per la gestione e l'analisi di dati e la creazione di grafici.  $R$  è basato sul linguaggio  $S$  a cui è strettamente collegato un altro software commerciale,  $S-plus$ .  $R$  è invece un GNU-software, disponibile gratuitamente secondo le regole della GPL.

- le medie delle stime per i parametri  $\alpha$  e  $\beta$  siano vicine ai veri valori, con ridotte deviazioni standard e sempre significative. Più imprecisa è la stima della costante  $\gamma$ , che in diversi casi risulta non significativa, a causa del valore ridotto assegnato in generazione ( $\gamma = 0.015$ ). (Tabella 4.01)
- Nelle simulazioni riferite al modello  $GARCH(1,1)$  *Skew-Normal*, le stime di  $\lambda$  mostrano una maggiore deviazione standard rispetto alle precedenti, tuttavia non preoccupante, mentre la media è ancora prossima al vero valore. Per entrambi i casi mostrati in Tabella 4.02 e Tabella 4.03, si è scelto un valore per questo parametro che generi un'asimmetria negativa. Parleremo più avanti della differenza di significatività per le stime di  $\lambda$  nei due scenari, anche alla luce di altri risultati: per ora basti considerare che per  $\lambda = -1$  si ottiene una skewness condizionata pari a  $-0.137$ , perciò molto bassa e difficilmente rilevabile, mentre  $\lambda = -5$  genera un'asimmetria più marcata per la distribuzione condizionata, pari a  $-0.851$ , valore difficilmente riscontrabile su dati reali.
- Le stime di  $\tau$  per i modelli  $t$  e *Skew-t* sono ragionevolmente corrette, dando valori medi leggermente più alti rispetto al numero di gradi di libertà utilizzato in generazione  $\tau = 7$ : nel caso del modello  $GARCH(1,1)$  *Skew-t*, ad esempio, le differenze in termini di curtosi condizionata, rispetto a quella ipotizzata, non è infatti così rilevante.

Si considerino quindi i risultati ottenuti per ciascun modello effettuando 500 replicazioni di numerosità più elevata, con 2000 osservazioni, e mostrati da Tabella 4.06 a Tabella 4.09. Com'è corretto attendersi, la maggiore numerosità campionaria aumenta la precisione delle stime per tutti i parametri d'interesse nei diversi modelli, riducendo la differenza tra i veri valori utilizzati in generazione e i valori medi dei parametri stimati, per i quali si osserva una deviazione standard inferiore rispetto alle simulazioni precedenti.

Per le stesse replicazioni di lunghezza 2000 si sono calcolate le stime anche per i modelli diversi da quello utilizzato in generazione:

- anzitutto si nota come, indipendentemente dal modello utilizzato, le stime per i parametri della varianza condizionata non siano particolarmente influenzate dalla presenza di asimmetria e curtosi nelle serie generate.

- Per i campioni ottenuti generando da un modello  $GARCH(1,1)$  Normale (Tabella 4.06), ci si attende che i parametri riferiti ad asimmetria e curtosi, nei modelli che li prevedono, risultino non significativi. Effettivamente, la media delle stime per i gradi di libertà di  $t$  e  $Skew-t$  è molto elevata, escludendo eccesso di curtosi. Per i modelli con distribuzione asimmetrica,  $\hat{\lambda}$  risulta mediamente basso (nel caso  $Skew-t$  quasi nullo), anche se significativo per oltre il 20% delle replicazioni, indicando la capacità di tali strutture di catturare anche le minime evidenze di asimmetria condizionata nei dati.
- La Tabella 4.07 mostra i risultati ottenuti per le replicazioni da un  $GARCH(1,1)$   $Skew$ -Normal. Ancora una volta le medie di  $\hat{\tau}$  sono elevate, mentre il parametro di asimmetria per la  $Skew-t$  è mediamente sottostimato, benché sempre significativo.
- Generando da un  $GARCH(1,1)$   $t$  (Tabella 4.08), valgono per  $\hat{\lambda}$  le osservazioni fatte nel caso Normale: mediamente si ottengono stime prossime a zero e nel caso  $Skew-t$  esse sono significative solo per il 5% delle replicazioni. Per quest'ultimo modello il numero medio di gradi di libertà stimato corrisponde al vero valore.
- Nel caso di replicazioni da un  $GARCH(1,1)$   $Skew-t$  (Tabella 4.09), la stima dei gradi di libertà risulta corretta e con una deviazione standard più bassa rispetto alla simulazione di lunghezza inferiore. Il modello con distribuzione  $Skew$ -Normal, sottostima il livello di asimmetria, anche se  $\hat{\lambda}_{SN} = -1.6534$  contro  $\lambda = -1$  utilizzato in generazione.

Chiaramente, le simulazioni qui presentate, mostrano solo alcuni dei possibili scenari ottenibili variando i parametri utilizzati nei modelli per la generazione delle serie di dati. Tuttavia possono già fornire informazioni importanti in merito al comportamento dell'asimmetria rispetto a serie che presentano o meno eccesso di curtosi. Se ne discuterà con più attenzione nel prossimo paragrafo, evidenziando anche i risultati ottenuti per i test di simmetria applicati sulle simulazioni già presentate.

### 4.3 Studio dell'asimmetria mediante simulazioni

Sulla base delle simulazioni presentate in 4.2, vediamo ora come si comportano le misure di asimmetria da noi prese in considerazione relativamente ai diversi modelli ipotizzati, cercando anche di interpretare la stretta relazione tra asimmetria e curtosi già intuibile da alcune precedenti osservazioni.

Consideriamo anzitutto le simulazioni relative al modello  $GARCH(1,1)$  Normale. La teoria suggerisce che serie così strutturate non dovrebbero presentare evidenze significative di asimmetria. Per quanto detto nel paragrafo 2.5, invece, è provato che si osserverà un livello di curtosi non condizionata oltre 3 (eccesso di curtosi).

I valori per la skewness campionaria riportati in Tabella 4.01 e Tabella 4.06, risultano in molti casi significativi<sup>XIII</sup> (33% su 500 replicazioni di lunghezza 500, 23% su 500 replicazioni di lunghezza 2000), provando l'inefficienza di tale test nel valutare la simmetria per dati serialmente correlati. Questa caratteristica di  $\hat{S}$  è osservabile anche per le altre simulazioni: questo test tende a sovrastimare l'asimmetria, in particolare per quelle serie con elevata curtosi.

I test di Bai-Ng<sup>XIV</sup> rispondono invece in maniera corretta alle nostre aspettative:  $\hat{\pi}_3$  rifiuta l'ipotesi nulla di simmetria solo il 5.8% delle volte per le serie di lunghezza 500 e il 4% delle volte per serie di lunghezza 2000; il test di Bai-Ng per la simmetria condizionata accetta l'ipotesi nulla in entrambi i casi più del 95% delle volte. In linea con questi risultati, le stime riportate in Tabella 4.06 per  $\lambda$  nei modelli  $GARCH(1,1)$  *Skew-Normal* e  $GARCH(1,1)$  *Skew-t*, secondo quanto già detto in merito nel paragrafo precedente.

Per le simulazioni relative a  $GARCH(1,1)$  *Skew-Normal*, i risultati ottenuti mostrano come i test di simmetria, in particolar modo entrambi i test di Bai-Ng, non rilevino evidenze di asimmetria, nel caso di replicazioni in cui il parametro di forma  $\lambda$  non determini un'asimmetria marcata. Considerando il caso mostrato in Tabella 4.02, per  $\lambda = -1$ , il livello teorico di skewness condizionata è -0.137, tuttavia sia  $\hat{\pi}_3$  che  $CS$  rifiutano l'ipotesi di simmetria per meno del 10% dei casi. Anche le stime

---

<sup>XIII</sup> Si ricorda che  $\sqrt{T}\hat{S}$  va confrontato con il quantile di una  $N(0,6)$ .

<sup>XIV</sup> Il test di Bai-Ng  $\hat{\pi}_3$  va confrontato con il quantile di una normale standard (1.96), mentre il test di Bai-Ng  $CS$  ha valore critico 2.21.

ottenute per  $\lambda$  non risultano, tuttavia, sempre significative (lo sono nel 63% dei casi), confermando che l'asimmetria sulle serie generate non è così evidente. Nel caso invece di asimmetria marcata, con  $\lambda = -5$  (Tabella 4.03), sia i test di simmetria, sia le stime di  $\lambda$ , sono significativi oltre il 90% delle volte ( $\hat{\pi}_3$  è al 93.4%, mentre gli altri sono prossimi al 100%), rifiutando evidentemente l'ipotesi di simmetria.

Analogamente a quanto capita per il modello con distribuzione normale, per le simulazioni relative a  $GARCH(1,1)$   $t$ , i test di Bai-Ng rifiutano la presenza di asimmetria nelle serie nel più dei casi: per le repliche di lunghezza 500 (Tabella 4.04)  $CS$  è significativo il 7% delle volte,  $\hat{\pi}_3$  solo il 2%, e ancora, per la simulazione mostrata in Tabella 4.08, entrambi i test accettano l'ipotesi di simmetria per oltre il 95% dei casi. Le stime di  $\lambda$  ottenute in quest'ultima simulazione per i modelli con distribuzione asimmetrica, sono mediamente prossime allo zero e, nel caso  $Skew-t$ , quasi sempre non significative.

Infine, nel caso di repliche ottenute da  $GARCH(1,1)$   $Skew-t$ , fissati i parametri  $\lambda = -1$  e  $\tau = 7$ , si ipotizza un indice di asimmetria condizionata pari a  $-0.627$ , nettamente più alto rispetto a quello ottenuto con lo stesso valore di  $\lambda$  nel caso di distribuzione  $Skew$ -Normal: i valori medi per i test di simmetria riportati in Tabella 4.05 e Tabella 4.09 sono più alti rispetto a quelli considerati in precedenza per lo stesso valore del parametro di asimmetria.

Da quest'ultima osservazione, si può iniziare a spiegare la relazione che lega asimmetria e curtosi. Considerando la simulazione riassunta in Tabella 4.09, notiamo come le stime ottenute per  $\lambda$  con il modello  $GARCH(1,1)$   $Skew$ -Normal siano mediamente  $-1.6534$ , che in termini di asimmetria condizionata è pari a  $-0.350$ , un valore più vicino a quello ipotizzato. In altre parole, un eccesso di curtosi, oltre a quello già previsto dal modello  $GARCH$ , amplifica ogni evidenza di asimmetria.

Vale, inoltre, anche il viceversa: la presenza di asimmetria aumenta il livello di curtosi. Se si confrontano le simulazioni relative a  $GARCH(1,1)$  Normale contro quelle relative a  $GARCH(1,1)$   $Skew$ -Normal, si osserva infatti come, per le prime, a parità di lunghezza delle serie replicate, l'eccesso di curtosi sia mediamente più basso rispetto a quello ottenuto per le seconde. Tale relazione è ancora più evidente se si considerano le repliche ottenute con distribuzione  $t$  contro quelle ottenute con distribuzione  $Skew-t$ : prendendo in considerazione le simulazioni con lunghezza

2000, il primo mostra un livello medio di eccesso di curtosi pari a 3.930, mentre l'altro un valore pari a 5.783 .

#### 4.4 L'impatto dell'asimmetria sul rischio

Come già introdotto nel paragrafo 1.6, e poi approfondito nel Capitolo 3, lo strumento più diffuso per la valutazione del rischio è il *VaR*, inteso come massima perdita potenziale su un portafoglio di attività finanziarie. Tale misura del rischio di mercato, è funzione della deviazione standard e del quantile della distribuzione ipotizzata per la serie dei rendimenti del portafoglio.

La possibilità di riscontrare asimmetria ed eccesso di curtosi per la distribuzione dei rendimenti, giustifica l'utilizzo dei modelli ad eteroschedasticità condizionale con distribuzione asimmetrica per il calcolo del *VaR*. Si pone quindi a confronto i modelli già noti ed ampiamente utilizzati in letteratura, *GARCH(1,1)* Normale e *GARCH(1,1)* *t*, con quelli da noi introdotti, *GARCH(1,1)* *Skew-Normal* e *GARCH(1,1)* *Skew-t*.

Sulla base delle simulazioni di 500 replicazioni Montecarlo di lunghezza 2000, già esaminate in precedenza in questo capitolo, si sono calcolati per ogni modello generatore e per ogni replicazione, le serie dei *VaR* per i quattro diversi modelli utilizzati per analizzare le serie simulate, secondo l'espressione

$$VaR_t^{(\alpha)} = -\hat{F}^{-1}(\alpha) \times \hat{\sigma}_t \quad (4.2)$$

dove  $\hat{F}^{-1}(\alpha)$  indica il quantile di probabilità  $\alpha$  della distribuzione stimata e  $\hat{\sigma}_t$  è la deviazione standard stimata. Si sono successivamente contati il numero di scostamenti di ciascuna serie rispetto alle corrispondenti serie dei *VaR*, ovvero si sono contate quante osservazioni nel campione stanno oltre il *VaR*.

Le medie degli scostamenti percentuali per le diverse simulazioni e per ciascun modello utilizzato per la stima, sono riportate in Tabella 4.10. Si sono considerati i livelli di significatività 0.5% e 1%, per la coda di sinistra della distribuzione stimata, nonché 99.5% e 99%, per la coda destra. Solitamente il *VaR* viene calcolato solo per i quantili riferiti alle perdite (sulla parte negativa della distribuzione), tuttavia è interessante porre l'attenzione anche sulla coda di segno opposto all'asimmetria ipotizzata.

Com'è evidente, il numero degli scostamenti ottenuto, utilizzando per la stima il medesimo modello da cui si sono ottenute le replicazioni, coincide con i livelli di confidenza considerati.

Interessanti sono invece i risultati ottenuti quando modello generatore e modello di stima non coincidono:

- per le serie generate da un  $GARCH(1,1)$  Normale, le percentuali di scostamenti ottenute utilizzando un modello  $GARCH(1,1)$  *Skew-Normal* sono grosso modo coincidenti a quelle ipotizzate. Nel caso dei modelli con distribuzione  $t$  e *Skew-t*, invece, si osserva la tendenza a sovrastimare il rischio, ottenendo un numero inferiore di scostamenti rispetto a quello previsto.
- Nel caso di replicazioni da un  $GARCH(1,1)$  *Skew-Normal* con asimmetria negativa ( $\lambda = -1.2$ ), il numero di scostamenti per i modelli con distribuzione normale e distribuzione  $t$  eccede i livelli di confidenza sulla coda negativa della distribuzione, mentre sovrastimano il rischio per i quantili calcolati sulla parte positiva. Il modello  $GARCH(1,1)$  *Skew-t*, come per il caso visto in precedenza, tende a sovrastimare il rischio su entrambe le code, però in maniera simmetrica, dando l'idea di aver correttamente tenuto conto del livello di asimmetria nelle serie replicate.
- $GARCH(1,1)$  Normale e  $GARCH(1,1)$  *Skew-Normal*, stimando le serie replicate da un  $GARCH(1,1)$   $t$  con 7 gradi di libertà, ottengono un numero di scostamenti oltre il 0.9% considerando  $\alpha = 0.5\%$  e oltre l'1.4% per  $\alpha = 1\%$  (e per la simmetria anche sui quantili opposti, sulla coda di destra). Per il modello  $GARCH(1,1)$  *Skew-t*, il numero di scostamenti coincide con i livelli di confidenza.
- Infine, per serie replicate da un modello  $GARCH(1,1)$  *Skew-t* con  $\lambda = -1$  e  $\tau = 7$ , gli altri modelli ottengono un numero di scostamenti sulla coda sinistra della distribuzione superiore a quello previsto. Al contrario, dal lato opposto della distribuzione, i modelli simmetrici sovrastimano il rischio e ottengono una percentuale di scostamenti inferiore ai livelli di confidenza considerati.

In sintesi, nel caso di serie di rendimenti che presentano asimmetria e/o eccesso di curtosi, le stime ottenute con i modelli basati su distribuzioni asimmetriche porteranno a sottostimare il rischio sul lato della distribuzione in cui si verifica

l'asimmetria, e sovrastimarla nel caso di posizioni di segno opposto: nel caso di asimmetria negativa infatti, la stima della perdita attesa sarà inferiore a quella reale, aumentando il rischio di perdite inattese.

Per quei modelli che invece tengono conto dell'asimmetria, nonché dell'eccesso di curtosi, si ha la possibilità di ottenere stime più precise del livello di perdita attesa, ma non tuttavia un valore inferiore per essa. Infatti, lo scopo dell'utilizzo di tali modelli è una misurazione maggiormente corretta del rischio e, di conseguenza, la tutela da perdite ingenti.

#### 4.4.1 Impatto dell'asimmetria sul requisito patrimoniale

Una possibile applicazione per quanto appena illustrato, è il calcolo del requisito patrimoniale relativo al rischio di mercato, per quelle banche che utilizzano modelli interni di valutazione del rischio.

Nel paragrafo 3.5, si è spiegato come il patrimonio posto a garanzia per il rischio dell'attività bancaria, per la quota relativa al rischio di mercato, sia funzione del massimo tra il *VaR* calcolato al giorno precedente e una media dei *VaR* dei 60 giorni precedenti per un fattore moltiplicativo  $\delta$ , deciso sulla base degli scostamenti verificatisi nei 250 giorni precedenti, per i livelli mostrati in Tabella 3.01.

Sulla base dei risultati ottenuti sulle medesime simulazioni precedentemente considerate, si sono ottenuti il numero medio di giorni<sup>XV</sup> per ogni livello previsto di  $\delta$ , considerando il livello di significatività unilaterale dell'1%, come previsto dalla normativa, e il suo corrispettivo sulla coda opposta. Tali valori sono presentati, per ciascun modello utilizzato in generazione, da Tabella 4.11 a Tabella 4.14, e mostrati mediante istogrammi da Figura 4.01 a Figura 4.04 (per  $\alpha = 1\%$ ).

Nelle simulazioni ottenute da *GARCH*(1,1) asimmetrici, le frequenze osservate per i valori di  $\delta$  superiori a 3, sono maggiori nel caso di modelli che non prevedono la componente di asimmetria. In presenza di eccesso di curtosi, ma non di asimmetria, i modelli con distribuzione normale e *Skew-Normal* si eguagliano, così come per i modelli *GARCH*(1,1) *t* e *Skew-t*. Per le replicazioni ottenute da un *GARCH*(1,1) Normale, le piccole evidenze di asimmetria ed eccesso di curtosi,

---

<sup>XV</sup> Se si considerano le serie replicate come serie di rendimenti giornalieri.

rilevate nelle serie generate casualmente, sono sufficienti per far scendere le frequenze in cui si ottiene  $\delta > 3$  per i modelli con distribuzione non normale.

Avere quindi a disposizione un modello di valutazione del rischio, che tenga conto delle diverse caratteristiche delle serie finanziarie, può determinare un vantaggio per la banca in termini di un più basso patrimonio a garanzia del rischio di mercato.



# Capitolo 5

## APPLICAZIONI SU DATI REALI

### 5.1 Introduzione all'analisi delle serie reali utilizzate

Nel presente capitolo, utilizzeremo i modelli e i test di simmetria fin qui studiati, per analizzare delle serie reali di rendimenti finanziari.

Si sono presi in considerazione due gruppi di serie finanziarie di prezzi, ottenendone le corrispondenti serie dei rendimenti logaritmici:

- si sono considerati un gruppo di dieci indici di mercato (*cac40*, *dax*, *dowjones*, *ftse100*, *hangseng*, *mib30*, *nasdaq*, *nikkey225*, *sp500* e *swiss*) con serie storiche dei prezzi giornalieri di lunghezza differente (vedi Tabella 5.01). Calcolando le serie dei rendimenti, si sono posti a zero i valori anomali per alcune delle serie, per non compromettere la correttezza delle analisi.
- Inoltre, si sono analizzati le serie giornaliere dei prezzi dei titoli del Mib30, osservate in un periodo che va dal 1985 al 2004, anch'esse di lunghezza campionaria differente: per alcuni titoli si hanno meno di 1000 osservazioni, e proprio per la bassa numerosità campionaria si è scartato dal paniere il titolo *Terna* (23/06/2004 - 01/10/2004). (Tabella 5.02) Anche per le serie dei rendimenti giornalieri ottenute da questi campioni si sono scartate le anomalie (i rendimenti in valore assoluto oltre il 20%). I titoli considerati sono quindi *Alleanza assicurazioni* (*al*), *Autostrade* (*AUTO*), *Banca FIdeuram* (*BFI*), *Banca intesa* (*BIN*), *Banca MPS* (*bmps*), *BNL* (*bnl*), *Banche popolari unite* (*bpu*), *Banca popolare di Verona e Novara* (*bpvn*), *Capitalia* (*cap*), *Edison* (*edn*), *Enel* (*enel*), *Eni* (*eni*), *Fiat* (*f*), *Finmeccanica* (*fnc*), *Generali* (*g*), *Luxottica* (*lux*), *Mediobanca* (*mb*), *Mediolanum* (*Med*), *Mediaste* (*ms*), *Banca Antonveneta* (*ntv*), *Seat Pagine gialle* (*pg*), *RAS* (*R*), *SanPaolo IMI* (*SPI*), *Saipem* (*spm*), *Snam rete gas* (*srg*), *ST Microelectronics* (*stm*), *Tim* (*Tim*), *Telecom Italia* (*tit*), *Unicredit* (*uc*). E d'ora in avanti verranno identificati mediante le loro sigle.

Lo studio delle serie dei rendimenti prese in considerazione, vuole anzitutto verificare la presenza di asimmetria nei mercati finanziari. A tale scopo, si sono utilizzati in fase preliminare i test di simmetria: l'indice di asimmetria campionario, i test di Bai-Ng per la asimmetria non condizionata e quello per la condizionata. Inoltre si è ottenuto il valore campionario per l'eccesso di curtosi. Forti delle considerazioni fatte nel Capitolo 4, sappiamo che, in genere:

- $\hat{S}$  è una misura non attendibile, nel caso di dati serialmente correlati, per determinare la significatività dell'asimmetria nel campione. Tuttavia risulta utile per determinare il segno di un eventuale asimmetria.
- $\hat{\pi}_3$  non coglie nella serie evidenze poco marcate di asimmetria, in quanto test basato sulla distribuzione marginale. Inoltre, per definizione, non risponde correttamente nel caso si riscontri un forte eccesso di curtosi.
- dalle simulazioni svolte in precedenza, si è visto che il test *CS* subisce, come l'asimmetria condizionata, l'influenza dell'eccesso di curtosi. Per questa ragione, è opportuno tenerne conto assieme all'indice campionario di curtosi, in particolar modo nei casi in cui il valore del test è al limite della significatività.

Per ogni serie dei rendimenti a media nulla<sup>xvi</sup> si sono poi stimati i parametri del modello *GARCH*(1,1) considerando le diverse distribuzioni, sia simmetriche che asimmetriche. A differenza delle simulazioni viste nel Capitolo 4, in cui si conosceva a priori il modello generatore dei dati, risulta più difficile, nel caso di dati reali, stabilire quale modello interpreti meglio ciascuna serie analizzata. I risultati ottenuti dai test proposti sono un primo punto di riferimento, ricordando che:

- il segno del parametro di forma  $\lambda$  concorda, generalmente, con quello ricavato dai test sull'asimmetria non condizionata, in particolar modo se risulta significativo.
- il valore di  $\lambda$  per il modello *GARCH*(1,1) *Skew-Normal* non coincide con quello di un *GARCH*(1,1) *Skew-t*. Essi sono tanto diversi quanto più elevata è la curtosi nei dati.

---

<sup>xvi</sup> Ogni serie dei rendimenti è stimata dai modelli come serie degli scarti dalla media campionaria.

Sulla base delle stime ottenute dai diversi modelli si sono poi calcolate le serie dei *VaR* e i corrispondenti scostamenti. Anche questi risultati possono aiutare ad evidenziare la bontà d'adattamento dei modelli ai dati: quanto più la distribuzione sulle code degli scostamenti risulterà prossima a quella ipotizzata, meglio il modello avrà stimato i dati.

Infine, volendo dare una giustificazione pratica alla scelta di modelli più complessi di quelli già ampiamente utilizzati, si sono valutati gli effetti sul moltiplicatore utilizzato nel calcolo del requisito patrimoniale: nel caso di dati con asimmetria negativa, si vorrebbe osservare, sulla base degli scostamenti dal *VaR* osservati sulla coda relativa alle perdite nell'ultimo anno, una concentrazione della distribuzione empirica di  $\delta$  in corrispondenza dei suoi livelli più bassi. È evidente come, sulla coda di segno opposto all'asimmetria rilevata, i modelli simmetrici sovrastimeranno il rischio e, di conseguenza, otterranno una distribuzione empirica per il moltiplicatore concentrata sui livelli inferiori.

## 5.2 Analisi degli indici di mercato

### 5.2.1 Risultati dei test di simmetria

In Tabella 5.01 sono riportati, per le serie dei rendimenti di ogni indice di mercato, la numerosità campionaria, gli indici campionari di asimmetria e di curtosi e i test sulla simmetria non condizionata e condizionata di Bai-Ng.

Osservando il segno di  $\hat{S}$  e  $\hat{\pi}_3$ , si evince come tutti gli indici, hanno una skewness negativa, indipendentemente dalla sua significatività, meno che per l'indice della borsa giapponese (*nikkey225*). A livello esplorativo, si osserva per *ftse* e per *hangseng* i valori più elevati in termini assoluti per  $\hat{S}$ , mentre *nikkey225* e *sp500* sono gli indici di mercato per i quali questo test riporta meno evidenza di asimmetria. Anche il test di Bai-Ng per l'asimmetria non condizionata conferma quanto individuato dall'indice campionario di asimmetria. Tuttavia, per nessun indice,  $\hat{\pi}_3^{XVII}$  risulta significativo ad un livello di significatività del 5%, e questo può spiegare la concordanza tra le due misure di asimmetria: entrambe le misure

---

<sup>XVII</sup> Il valore del test di Bai-Ng  $\hat{\pi}_3$  va confrontato con il quantile di una normale standard (1.96).

reagiscono allo stesso modo rispetto ad evidenze di asimmetria sulla distribuzione marginale dei dati.

Risultati in parte diversi si ottengono valutando l'asimmetria per la distribuzione condizionata dei rendimenti, mediante il test di Bai-Ng  $CS^{XVIII}$ . I seguenti indici di mercato mostrano evidenza di asimmetria condizionata significativa: *dax*, *ftse*, *mib30*, *nasdaq*, *sp500* e *swiss*. Si noti come, i valori più alti ottenuti per questo test, per le serie di *ftse* e *nasdaq*, corrispondono ai valori più elevati dell'indice campionario di curtosi: un'alta asimmetria condizionata potrebbe, quindi, essere stata in parte provocata da un marcato eccesso di curtosi. Anche per  $CS$ , l'indice di mercato *nikkey225* è tra tutti quello più prossimo all'ipotesi nulla di simmetria, assieme alla serie *hangseng*, che in precedenza era invece valutata come la serie con asimmetria della distribuzione marginale tra le più evidenti, anche se non significativa.

### 5.2.2 Confronto tra i modelli utilizzati per la stima

Sulle serie dei rendimenti a media nulla degli indici di mercato, si sono ottenute le stime dei parametri per i diversi modelli ad eteroschedasticità condizionale presi in considerazione in questa tesi.

Si osservino i risultati in Tabella 5.03, che riporta, per ciascuna serie e per ciascun modello utilizzato, le stime dei parametri e le corrispondenti statistiche test di significatività, confrontabili, ad un livello di significatività del 5%, con il valore di una normale standard in corrispondenza di tale livello di probabilità (1.96).

Nelle simulazioni esaminate nel capitolo precedente, i diversi modelli davano mediamente le stesse stime per i parametri relativi all'espressione della varianza condizionata  $\sigma_t^2 = \gamma + \alpha(y_{t-1} - \mu)^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$ , con  $(y_{t-1} - \mu)$  serie ritardata dei rendimenti giornalieri a media nulla.<sup>XIX</sup> Tali stime sono ora, invece, leggermente discordanti tra i diversi modelli: generalmente, le stime per  $\alpha$  risultano più alte per i modelli  $GARCH(1,1)$  Normale e  $GARCH(1,1)$  *Skew*-Normal; viceversa, invece, per  $\beta$  che ottiene valori più elevati in corrispondenza dei modelli che stimano il livello

---

<sup>XVIII</sup> Il valore del test di Bai-Ng  $CS$  ha valore critico 2.21 .

<sup>XIX</sup> Effettivamente, non sono state riportate le stime per la costante  $\gamma$ , in quanto essa risulta sistematicamente prossima a zero e in genere non significativa.

di curtosi mediante il numero di gradi di libertà. Questo è naturale se si considera, come spiegato nel paragrafo 2.5, la relazione positiva tra il parametro  $\alpha$  e la curtosi in modelli  $GARCH(1,1)$ . Tutte le stime relative ai parametri  $\alpha$  e  $\beta$  risultano significative al 5%, premiando la scelta di una struttura ad eteroschedasticità condizionale di questo tipo.

Per quanto l'indice campionario di curtosi risulti diverso per i vari indici di mercato, le stime del parametro  $\tau$  (numero dei gradi di libertà) per i modelli  $GARCH(1,1) t$  e  $GARCH(1,1) Skew-t$  sono sempre significative e in gran parte concentrate attorno al valore 7. Questo ci suggerisce la possibilità che le differenze per l'eccesso di curtosi rilevate tra le diverse serie, sia principalmente causata dal livello di asimmetria nelle distribuzioni condizionate di ciascuna di esse.

Una maggiore attenzione va data, dunque, al parametro di asimmetria  $\lambda$ . Anzitutto, il segno delle stime di tale parametro coincide con il segno che era stato suggerito dai test sull'asimmetria marginale: per tutti gli indici di mercato  $\hat{\lambda} < 0$  e l'unico valore positivo è stimato sulla serie *nikkey225* dal modello con distribuzione *Skew-Normal*. L'altro modello asimmetrico, dà invece una stima negativa di  $\lambda$  in corrispondenza di tale indice di mercato, ma per entrambe le strutture le stime di questo parametro risultano non significative, in accordo con quanto osservato mediante i test di simmetria.

È questo l'unico caso in cui  $\hat{\lambda}$  risulta non significativo per entrambi i modelli: le stime del parametro di asimmetria, utilizzando il modello  $GARCH(1,1) Skew-Normal$ , sono infatti significative per tutte le altre serie considerate; mentre, per un  $GARCH(1,1) Skew-t$ , la significatività di  $\hat{\lambda}$  è per 8 casi su 10 in accordo con il test *CS* (non è così per *cac40* e *dax*). Ancora una volta, la ragione di tale evidenza è da ricondursi al tentativo del modello con distribuzione normale asimmetrica, di catturare l'eccesso di curtosi mediante la stima di un'asimmetria in valore assoluto maggiore.

La presenza di asimmetria ed eccesso di curtosi sulle serie analizzate, sembrerebbe quindi favorire nella scelta del modello che meglio si adatta ai dati, il  $GARCH(1,1) Skew-t$ , che dà un'interpretazione sostanzialmente corretta della curtosi rilevata e, soprattutto, risulta in accordo con i test di simmetria.

### 5.2.3 Valutazione del rischio per gli indici di mercato

Sulla base delle stime ottenute con ciascun modello applicato sulle serie degli indici di mercato, si sono ricavate le serie storiche del *VaR* per i livelli di confidenza 99% e 99.5% e i corrispettivi sulla coda opposta della distribuzione stimata.

Le percentuali di scostamenti, presentate in Tabella 5.04, calcolate sulla base dei *VaR* così ottenuti, non sembrano confermare i risultati discussi in 5.2.2. Anzitutto, è opportuno considerare solo i modelli con distribuzione *t* e *Skew-t*, visto che su tutte le serie si è riscontrato eccesso di curtosi: l'utilizzo, come ad esempio per *cac40 ftse100* e *nasdaq*, di un *GARCH(1,1) Skew-Normal*, porterebbe ad avere un numero di scostamenti coerente con il livello di confidenza considerato sulla coda in cui si è riscontrata asimmetria, ma sottostimerebbe il rischio dal lato opposto della distribuzione.

Nei casi in cui non sia stata stimata asimmetria significativa con  $\hat{\lambda}_{skew-t}$  (*dax*, *dowjones*, *hangseng*, *nikkey225*), le percentuali degli scostamenti per entrambi i modelli che stimano il numero di gradi di libertà, coincidono grosso modo su ambedue le code. Quando invece il modello *GARCH(1,1) Skew-t* rileva un'asimmetria negativa significativa, esso tende a sovrastimare il rischio di perdita, maggiormente di quanto sovrastimi il rischio di mancato guadagno.

Un riscontro più interessante si ottiene calcolando su ogni serie e per ciascun modello, le frequenze del moltiplicatore  $\delta$ : esso viene calcolato, secondo la normativa, sulla base degli scostamenti dal *VaR* ottenuti ad un livello di confidenza del 99%, sulla coda della distribuzione relativa alle perdite. Visto che per le serie dei rendimenti degli indici di mercato si è stimata sempre asimmetria negativa, dove essa è significativa, si osserva che le frequenze per  $\delta > 3$  siano inferiori in corrispondenza dei modelli asimmetrici, rispetto a quelli simmetrici. I risultati che confrontano i diversi modelli sono mostrati in Tabella 5.05 e nei grafici per ciascun indice da Figura 5.01 a Figura 5.10.

Considerando, a titolo d'esempio, i risultati ottenuti per le serie quali *dowjones*, *ftse100* o *sp500*, in corrispondenza di modelli simmetrici si osservano scostamenti anche oltre 7 ( $\delta = 3.65$ ), evidenza che raramente si osserva nel caso di un *GARCH(1,1) Skew-t*, che, nel più dei casi, non ottiene valori di  $\delta$  oltre i 5 scostamenti. L'unica anomalia riscontrata è in riferimento all'indice *hangseng*, sul

quale già in precedenza si erano espressi dubbi in merito al livello di asimmetria e di curtosi della serie corrispondente.

## 5.3 Analisi dei titoli del Mib30

### 5.3.1 Risultati dei test di simmetria

Come si è già proceduto in merito alle serie dei rendimenti degli indici di mercato sopra analizzati, anche per le 29 serie dei rendimenti dei titoli componenti il Mib30 si sono calcolati i consueti test di simmetria e l'indice di curtosi campionaria (si veda Tabella 5.02).

È opportuno, ancora una volta, esaminare i risultati della skewness campionaria assieme a quelli ottenuti per il test di Bai-Ng relativo all'asimmetria non condizionata, per determinare, anzitutto, il segno dell'eventuale asimmetria su ciascuna serie: a differenza degli indici di mercato, per la maggior parte dei titoli analizzati  $\hat{S} > 0$ , ad indicare asimmetria sulla coda di destra della distribuzione marginale. I titoli che danno invece evidenza di una possibile asimmetria marginale negativa sono *al*, *enel*, *eni*, *g*, *lux* e *srg*, e per nessuno di questi  $\hat{\pi}_3$  risulta significativo ad un livello di significatività del 5%.

Valori significativi per il test sull'asimmetria non condizionata si ottengono invece per *BIN*, *fncl*, *pg*, *SPI*, *Tim* e *uc*, e tra questi è *Tim* che presenta il valore più elevato per il test. Per alcuni titoli l'asimmetria della distribuzione marginale delle serie risulta essere prossima a zero: è il caso di *bmps*, *f*, *g*, *ntv*, *R* e *tit*.

Risultati in parte diversi si ottengono in merito al test di simmetria condizionata *CS*: anch'esso individua la presenza di asimmetria significativa in corrispondenza dei titoli in cui già  $\hat{\pi}_3$  rifiutava l'ipotesi di simmetria (tranne che per *pg* e *uc*). Anche per altri titoli questo test riscontra asimmetria condizionata significativa, invece rifiutata marginalmente: i casi più significativi sono i già citati *f*, *g* e *ntv*.

Per quanto riguarda l'indice di curtosi campionaria, la maggior parte dei titoli ottiene per tale test un valore compreso tra 2 e 5: oscillazioni all'interno di questo intervallo possono essere giustificate in parte dalla presenza di asimmetria nei dati. Il titolo *AUTO* presenta un valore per la curtosi oltre 24, un risultato sorprendentemente anomalo, che dovrebbe compromettere la correttezza dei valori ottenuti per i test di

simmetria. Negli altri casi in cui  $\hat{K} > 5$ , si può distinguere tra i titoli che presentano evidenze di asimmetria (*edn* e *R*) e quelli per i quali si accetta l'ipotesi di simmetria (*al* e *lux*), osservando più avanti, nel merito della valutazione dei modelli, se tali caratteristiche sono correttamente considerate. Infine, per i titoli *stm* e *Tim*, si osserva un eccesso di curtosi inferiore ad 1, mentre i corrispettivi valori per i test di simmetria danno risultati diametralmente opposti.

### 5.3.2 Confronto tra i modelli utilizzati per la stima

Si sono ottenute, per le serie dei rendimenti di ogni titolo, le stime dei parametri corrispondenti ai vari modelli presi in considerazione: i valori ottenuti e le corrispondenti statistiche test, sono raccolte in Tabella 5.06, Tabella 5.07 e Tabella 5.08. È difficile fare osservazioni generalizzate per una così vasta mole di risultati, ne trarremmo conclusioni poco rilevanti e probabilmente errate. Conviene invece considerare alcuni casi specifici, più utili alle nostre finalità, che mettano in evidenza come si comportano i modelli in risposta alle caratteristiche osservate mediante i test.

Per facilitare la comprensione dei risultati è possibile delineare quattro diversi scenari, in riferimento alla significatività o meno ottenuta per i test e per il parametro di asimmetria  $\lambda$  nei modelli che lo prevedono, e presentando per essi alcuni titoli ad esempio.

- Titoli per i quali i test rifiutano l'ipotesi di simmetria e l'asimmetria viene correttamente stimata dai modelli che la prevedono. È il caso di titoli come *BIN*, *edn* e *fnc*: l'asimmetria viene riconosciuta dai test sia nel caso non condizionato, sia nel caso condizionato e si riscontrano valori differenti per  $\hat{K}$ . Il modello *GARCH(1,1) Skew-Normal*, fornisce stime significative per  $\lambda$ , e nel caso *edn* esso raggiunge il valore 1.315, più elevato rispetto agli altri, in risposta al livello di eccesso di curtosi campionaria superiore a 5. Anche per il modello *GARCH(1,1) Skew-t* la stima del parametro di asimmetria è significativa. Inoltre il numero di gradi di libertà stimato è inferiore a quello ottenuto dal modello con distribuzione *t* simmetrica, con valori di  $\hat{\tau}$  che, ad esempio per *fnc*, sono anche inferiori a 4, valore che determina un forte eccesso di curtosi.

- Titoli per i quali i test accettano l'ipotesi di simmetria e  $\hat{\lambda}$  risulta non significativa. Si considerino, ad esempio, i titoli *al*, *bmps* e *lux*: per nessuno di questi i test di simmetria hanno riscontrato evidenze che rifiutino l'ipotesi nulla. Tuttavia, per *al* e *lux*, la stima di  $\lambda$  per il modello con distribuzione normale asimmetrica risulta significativa, probabilmente a causa della presenza di una curtosi elevata, infatti per entrambi i titoli  $\hat{K} > 5$ . I risultati ottenuti per questi titoli ritornano in linea con quelli ricavati per *bmps*, nel caso di modelli che stimino un parametro riferito alla curtosi: per questi,  $\hat{\lambda}$  è non significativa, mentre  $\hat{\tau}$  è ancora una volta più basso nel caso di distribuzione *Skew-t*, con valori minori di 6.
- Titoli per i quali i test accettano l'ipotesi di simmetria e  $\hat{\lambda}$  risulta significativa. Per i titoli che si trovano in questa “categoria”, come ad esempio *AUTO*, *BFI* e *bnl*, la discordanza d'opinione tra test e modelli è più difficile da giustificare. Per i primi 2 titoli, si ottiene un numero di gradi di libertà stimato basso (per *AUTO*  $\hat{\tau} \approx 2.7$ ), riconoscendo un elevato eccesso di curtosi nei dati, che potrebbe spiegare perché  $\hat{\lambda}_{Skew-N}$  risulta significativo. Ad ogni modo, la stima per  $\lambda$  nel modello con distribuzione *Skew-t* dovrebbe risultare non significativa, visto che esso già prevede l'eccesso di curtosi, mediante la stima di  $\tau$ .
- Titoli per i quali i test rifiutano l'ipotesi di simmetria e  $\hat{\lambda}$  risulta non significativa. Solo un titolo tra quelli analizzati presenta tali caratteristiche, *ntv*. Effettivamente il valore ottenuto per *CS* per questa serie è significativo, tuttavia gli altri test sull'asimmetria della distribuzione marginale ci avevano fatto includere tale titolo tra quelli con asimmetria praticamente nulla. Si consideri inoltre la stima per i gradi di libertà:  $\hat{\tau}$  nel modello con *t* simmetrica è inferiore rispetto a quello ottenuto con *t* asimmetrica, stimando un maggiore eccesso di curtosi. Tale evidenza è in controtendenza con quanto osservato negli altri scenari.

### 5.3.3 Valutazione del rischio per gli indici di mercato

Anche per i titoli del Mib30 si vuole osservare come le evidenze stimate di asimmetria e curtosi influenzino la misura del rischio. In Tabella 5.09, Tabella 5.10 e Tabella 5.11 sono riportati gli scostamenti dalle serie dei *VaR* ottenute per i diversi modelli stimati, considerando i livelli di confidenza 99% e 99.5% (e quelli corrispondenti sulla coda opposta).

Per semplificare la lettura dei risultati, consideriamo per i titoli la medesima suddivisione fatta sopra e le corrispondenti serie ad esempio:

- Titoli per i quali i test rifiutano l'ipotesi di simmetria e l'asimmetria viene correttamente stimata dai modelli che la prevedono. Per questi titoli, il modello *GARCH(1,1) Skew-t* è quello che più precisamente ottiene un numero di scostamenti vicino alle quantità richieste dello 0.5% e dell'1%, su entrambe le code.
- Titoli per i quali i test accettano l'ipotesi di simmetria e  $\hat{\lambda}$  risulta non significativa. Il rifiuto della presenza di asimmetria nei dati, giustifica come per questi titoli il modello con distribuzione *t* simmetrica e quello con distribuzione *Skew-t*, presentino grosso modo le stesse performance in termini di percentuale di scostamenti.
- Titoli per i quali i test accettano l'ipotesi di simmetria e  $\hat{\lambda}$  risulta significativa. Nonostante le perplessità dovute alla discordanza tra test e modelli asimmetrici nel verificare la skewness, il modello *GARCH(1,1) Skew-t* dà comunque livelli sufficientemente precisi per gli scostamenti su entrambe le code. Anche il corrispondente modello simmetrico, tuttavia, presenta risultati equiparabili
- Titoli per i quali i test rifiutano l'ipotesi di simmetria e  $\hat{\lambda}$  risulta non significativa. Per il titolo *ntv*, i risultati in termini di scostamenti per i modelli con distribuzione simmetrica confermano l'assenza di asimmetria nella distribuzione dei dati. Nel caso di modelli con distribuzioni asimmetriche, invece, il parametro di asimmetria stimato, anche se non significativo determina lo spostamento a destra dei *VaR* ottenuti sulla distribuzione dei rendimenti provocando una sottostima del rischio per una posizione lunga e una sovrastima per una posizione corta. Inoltre, è evidente come la sottostima

dei gradi di libertà nel modello con distribuzione *Skew-t*, comprometta ulteriormente la determinazione del numero di scostamenti sulle code della distribuzione dei rendimenti. L'errore nelle stime per questo titolo può essere giustificata dalla bassa numerosità campionaria.

In sintesi, quando i test di simmetria sulle serie dei rendimenti rifiutano l'ipotesi nulla, i modelli basati su distribuzioni asimmetriche stimano in modo più preciso la distribuzione dei rendimenti, come mostrato per l'esempio degli scostamenti. L'evidenza opposta riscontrata sul titolo *ntv* non compromette la correttezza degli altri risultati, ma richiede invece di porre particolare attenzione alle stime ottenute mediante le procedure che implementano i modelli considerati.

A questo punto, seguendo il percorso utilizzato per gli indici di mercato, dovremmo presentare i risultati in termini del moltiplicatore utilizzato nel computo del requisito patrimoniale. Tuttavia, va ricordato che per la maggior parte dei titoli il segno dell'asimmetria è positivo, e per quei pochi titoli per i quali l'asimmetria è di segno opposto essa risulta non significativa.

Visto che la procedura di backtesting è effettuata sulla base degli scostamenti ottenuti sulla coda delle perdite al quantile di probabilità 1%, i risultati ottenuti (riportati in Tabella 5.12, Tabella 5.13 e Tabella 5.14) mostrano chiaramente come i modelli basati su distribuzioni simmetriche stimino, per questi titoli, un rischio più elevato di quello effettivo, ottenendo meno frequentemente valori elevati per  $\delta$  di quanto non accada per i modelli asimmetrici. Non risulterebbe pertanto utile discutere oltre tali risultati.



# CONCLUSIONI

L'obiettivo di questo elaborato è di identificare le evidenze empiriche di asimmetria delle distribuzioni delle serie dei rendimenti finanziari, quantificarle e individuare una modellazione che ne tenga conto per ottenere misurazioni più precise del rischio nel momento in cui si osservano tali caratteristiche di asimmetria.

Nelle analisi presentate nel Capitolo 5, sia quelle relative agli indici di mercato, sia ai titoli del Mib30, si sono ottenute informazioni interessanti, anche se a volte contraddittorie, in merito alle caratteristiche delle serie finanziarie, alle capacità dei test di simmetria di rilevare correttamente le evidenze di asimmetria su questo genere di dati, e alle possibilità di ottenere, mediante l'utilizzo dei modelli *GARCH* asimmetrici, stime corrette per i parametri relativi a skewness e curtosi.

Come già argomentato, l'indice di asimmetria campionaria, benché inadatto a determinare l'effettivo livello di asimmetria per la distribuzione delle serie analizzate, si dimostra informativo se non altro in merito al segno di tale evidenza. Anche il test  $\hat{\pi}_3$  concorda sistematicamente con la scelta di segno dell'asimmetria suggerita da  $\hat{S}$ .

I test di Bai e Ng per la simmetria risultano fondamentali per capire se effettivamente sulle serie dei rendimenti finanziari si possa riscontrare un'asimmetria significativa. Il test sulla simmetria non condizionata risulta significativo raramente nelle serie analizzate, alcuni dei titoli del Mib30 che mostrano in questo caso asimmetria positiva. Questo porterebbe a pensare che, le distribuzioni marginali delle serie dei rendimenti giornalieri di attività finanziarie sono il più delle volte simmetriche.

Il test di Bai e Ng per la simmetria condizionata risulta invece spesso significativo, sia per gli indici che per i titoli: è quindi concreta la possibilità di rilevare evidenze di asimmetria per le distribuzioni condizionate delle serie dei rendimenti. Tali evidenze vanno però osservate alla luce del legame che si è riscontrato tra skewness condizionata e curtosi: al netto dell'effetto moltiplicativo della seconda sulla prima, l'asimmetria può risultare effettivamente non più significativa.

Tale concetto risulta più chiaro se si confrontano le stime di  $\lambda$  ottenute per i due modelli *GARCH* asimmetrici: in diversi casi infatti un valore significativo di  $\hat{\lambda}$  ottenuta con il modello con distribuzione *Skew-Normal*, non risulta significativa per il modello con distribuzione *Skew-t* applicato alla stessa serie. In generale, comunque, i modelli *GARCH* con distribuzioni asimmetriche, rispondono entrambi correttamente ad evidenze di asimmetria nei dati. Tuttavia, a fini pratici, l'utilizzo di un modello con distribuzione *Skew-Normal*, è giustificabile solo se posto a confronto con un *GARCH* Normale.

L'eccesso di curtosi che si individua solitamente per le serie finanziarie, quello dovuto alla curtosi delle innovazioni, suggerisce l'adozione di un modello basato sulla *t* di Student, ma ancor più sulla *Skew-t*: tale distribuzione infatti include la *t* simmetrica, nonché la normale e la normale asimmetrica, come casi particolari e solo in rari casi la sua performance risulta inferiore rispetto a quelle dei modelli concorrenti. La seppur bassa possibilità d'errore per questo modello è probabilmente legata alle difficoltà di ottimizzazione delle procedure implementate con cui si ottengono le corrispondenti stime.

In termini di misurazione del rischio, l'adozione di modelli che prevedano skewness per le serie dei rendimenti finanziari, ha mostrato come sia possibile ottenere una stima più precisa del rischio per una posizione lunga nel caso di asimmetria negativa, e per una posizione corta nel caso di asimmetria positiva, rischio solitamente sottostimato dai modelli simmetrici.

# Appendice A

## TABELLE

> Modello di stima >		NORMALE			SKEW-NORMAL			Student's t			SKEW-t		
V Modello V generatore V	$\alpha$	0.5%	1%	5%	0.5%	1%	5%	0.5%	1%	5%	0.5%	1%	5%
		NORMALE	VaR( $\alpha$ )	0.49%	1.00%	4.99%	0.49%	0.99%	5.00%	0.44%	0.92%	4.88%	0.42%
	VaR(1- $\alpha$ )	0.50%	0.98%	4.98%	0.49%	0.98%	5.00%	0.44%	0.90%	4.85%	0.43%	0.90%	5.00%
SKEW-NORMAL	VaR( $\alpha$ )	0.80%	1.41%	5.55%	0.50%	1.00%	5.01%	0.69%	1.28%	5.38%	0.44%	0.93%	5.02%
	VaR(1- $\alpha$ )	0.28%	0.66%	4.34%	0.50%	0.98%	5.00%	0.23%	0.57%	4.16%	0.44%	0.92%	5.01%
Student's t	VaR( $\alpha$ )	0.99%	1.46%	4.54%	0.99%	1.47%	4.58%	0.49%	1.01%	5.02%	0.49%	1.00%	5.01%
	VaR(1- $\alpha$ )	0.97%	1.45%	4.54%	0.97%	1.46%	4.58%	0.50%	0.98%	5.01%	0.51%	1.01%	4.98%
SKEW-t	VaR( $\alpha$ )	1.54%	2.13%	5.44%	1.02%	1.51%	4.70%	0.94%	1.45%	4.61%	0.50%	1.01%	4.99%
	VaR(1- $\alpha$ )	0.43%	0.72%	3.22%	0.88%	1.34%	4.45%	0.20%	0.40%	2.49%	0.51%	1.01%	4.99%

**Tabella 1.01**

**Percentuale media di scostamenti per 500 replicazioni i.i.d. di 2000 osservazioni ognuno generati da diverse distribuzioni.**

MODELLO GENERATORE :	Parametri		Skewness cond. Teorica	Curtosi cond. Teorica	Skewness campionaria media	Eccesso di curtosi camp. media
	$\lambda$	$\tau$				
GARCH(1,1) SKEW-NORMAL	-1.2		-0.200	0.103	-0.223	0.891
	-2.5		-0.576	0.419	-0.626	1.428
	-5		-0.851	0.705	-0.927	1.872
GARCH(1,1) SKEW-t	-1	7	-0.627	2.679	-0.655	4.689
	-2	7	-1.154	4.082	-1.260	6.850
	-1	10	-0.424	1.290	-0.450	2.930

**Tabella 2.01**

**Valori per l'indice di asimmetria condizionata ed eccesso di curtosi condizionata per i modelli indicati al variare dei parametri d'interesse. Si riportano anche le medie su 500 replicazioni di lunghezza 2000 per gli indici campionari di asimmetria e curtosi.**

Numero di scostamenti	Fattore di maggiorazione
meno di 5	0,00
5	0,40
6	0,50
7	0,65
8	0,75
9	0,85
10 o più	1,00

**Tabella 3.01**

**Fattori di maggiorazione per il moltiplicatore del VaR sulla base degli scostamenti giornalieri.**

MODELLO GENERATORE : <u>GARCH(1,1) NORMALE</u>					
REPLICAZIONI MONTECARLO : <u>500</u>					
LUNGHEZZA SERIE : <u>500</u>					
PARAMETRI :					
	alpha	beta	gamma	lambda	tau
	0.1	0.85	0.015		
TEST CAMPIONARI:	Skewness	Test Bai-Ng ( $\pi_3$ )	Test Bai-Ng (CS)	Eccesso di curtosi	
	media (val. ass.)	0.182	0.876	1.219	1.439
	% sign.	33.0%	5.8%	3.4%	
MODELLO PER LA STIMA : <u>GARCH(1,1) NORMALE</u>					
	alpha	beta	gamma	lambda	tau
media	0.1212	0.8428	0.0128		
dev.st.	0.0277	0.0367	0.0057		
% sign.	100%	100%	54%		

**Tabella 4.01**

**500 repliche di lunghezza 500 dal modello GARCH(1,1) Normale di parametri  $\alpha = 0.10$ ,  $\beta = 0.85$ ,  $\gamma = 0.015$ . Stime ottenute utilizzando il medesimo modello.**

<sup>xx</sup> Il livello di significatività considerato è del 5%. Il test di Bai-Ng  $\hat{\pi}_3$  va confrontato con il quantile di una normale standard (1.96), mentre il test di Bai-Ng CS ha valore critico 2.21 .

MODELLO GENERATORE : <u>GARCH(1,1) SKEW-NORMAL</u>					
REPLICAZIONI MONTECARLO : <u>500</u>					
LUNGHEZZA SERIE : <u>500</u>					
PARAMETRI :					
	alpha	beta	gamma	lambda	tau
	0.1	0.85	0.015	-1	
				Skewness cond. Teorica	<u>-0.137</u>
				Curtosi cond. Teorica	<u>0.062</u>
TEST CAMPIONARI:	Skewness	Test Bai-Ng ( $\pi_3$ )	Test Bai-Ng (CS)	Eccesso di curtosi	
media (val. ass.)	0.208	1.032	1.324	1.756	
% sign.	39.2%	9.1%	9.7%		
MODELLO PER LA STIMA : <u>GARCH(1,1) SKEW-NORMAL</u>					
	alpha	beta	gamma	lambda	tau
media	0.1283	0.8224	0.0163	-0.9325	
dev.st.	0.0301	0.046	0.0078	0.4543	
% sign.	100%	100%	54%	63%	

**Tabella 4.02**

500 repliche di lunghezza 500 dal modello *GARCH(1,1) Skew-Normal* di parametri  $\alpha = 0.10, \beta = 0.85, \gamma = 0.015, \lambda = -1$ . Stime ottenute utilizzando il medesimo modello.

MODELLO GENERATORE : <u>GARCH(1,1) SKEW-NORMAL</u>					
REPLICAZIONI MONTECARLO : <u>500</u>					
LUNGHEZZA SERIE : <u>500</u>					
PARAMETRI :					
	alpha	beta	gamma	lambda	tau
	0.1	0.85	0.015	-5	
				Skewness cond. Teorica	<u>-0.851</u>
				Curtosi cond. Teorica	<u>0.705</u>
TEST CAMPIONARI:	Skewness	Test Bai-Ng ( $\pi_3$ )	Test Bai-Ng (CS)	Eccesso di curtosi	
media (val. ass.)	1.004	3.264	4.297	2.647	
% sign.	100.0%	93.4%	99.2%		
MODELLO PER LA STIMA : <u>GARCH(1,1) NORMALE</u>					
	alpha	beta	gamma	lambda	tau
media	0.116	0.838	0.0149	-5.2579	
dev.st.	0.0242	0.035	0.0056	0.9654	
% sign.	100%	100%	98%	100%	

**Tabella 4.03**

500 repliche di lunghezza 500 dal modello *GARCH(1,1) Skew-Normal* di parametri  $\alpha = 0.10, \beta = 0.85, \gamma = 0.015, \lambda = -5$ . Stime ottenute utilizzando il medesimo modello.

MODELLO GENERATORE : <u>GARCH(1,1) t</u>					
REPLICAZIONI MONTECARLO : <u>500</u>					
LUNGHEZZA SERIE : <u>500</u>					
PARAMETRI :					
	alpha	beta	gamma	lambda	tau
	0.1	0.85	0.015		7
TEST CAMPIONARI:	Skewness	Test Bai-Ng ( $\pi_3$ )	Test Bai-Ng (CS)	Eccesso di curtosi	
	media (val. ass.)	0.349	0.868	1.272	4.113
	% sign.	61.0%	2.0%	7.0%	100.0%
MODELLO PER LA STIMA : <u>GARCH(1,1) t</u>					
	alpha	beta	gamma	lambda	tau
media	0.131	0.8252	0.0156		7.5298
dev.st.	0.0358	0.0513	0.0081		1.798
% sign.	100%	100%	61%		94%

**Tabella 4.04**

500 replicazioni di lunghezza 500 dal modello *GARCH(1,1) t* di Student di parametri  $\alpha = 0.10, \beta = 0.85, \gamma = 0.015, \tau = 7$ . Stime ottenute utilizzando il medesimo modello.

MODELLO GENERATORE : <u>GARCH(1,1) SKEW-t</u>					
REPLICAZIONI MONTECARLO : <u>500</u>					
LUNGHEZZA SERIE : <u>500</u>					
PARAMETRI :					
	alpha	beta	gamma	lambda	tau
	0.1	0.85	0.015	-1	7
				Skewness cond. Teorica	<u>-0.627</u>
				Curtosi cond. Teorica	<u>2.679</u>
TEST CAMPIONARI:	Skewness	Test Bai-Ng ( $\pi_3$ )	Test Bai-Ng (CS)	Eccesso di curtosi	
	media (val. ass.)	0.687	1.474	1.872	5.149
	% sign.	91.0%	22.0%	35.0%	
MODELLO PER LA STIMA : <u>GARCH(1,1) SKEW-t</u>					
	alpha	beta	gamma	lambda	tau
media	0.1261	0.8351	0.0142	-1.0233	7.2956
dev.st.	0.0292	0.0399	0.0078	0.363	1.0521
% sign.	99%	100%	59%	83%	99%

**Tabella 4.05**

500 replicazioni di lunghezza 500 dal modello *GARCH(1,1) Skew-t* di parametri  $\alpha = 0.10, \beta = 0.85, \gamma = 0.015, \lambda = -1, \tau = 7$ . Stime ottenute utilizzando il medesimo modello.

<sup>XXI</sup> Il livello di significatività considerato è del 5%. Il test di Bai-Ng  $\hat{\pi}_3$  va confrontato con il quantile di una normale standard (1.96), mentre il test di Bai-Ng CS ha valore critico 2.21.

MODELLO GENERATORE : <u>GARCH(1,1) NORMALE</u>					
REPLICAZIONI MONTECARLO : <u>500</u>					
LUNGHEZZA SERIE : <u>2000</u>					
PARAMETRI :           alpha           beta           gamma           lambda           tau					
0.1           0.85           0.015					
TEST CAMPIONARI:	Skewness	Test Bai-Ng ( $\pi_3$ )	Test Bai-Ng (CS)	Eccesso di curtosi	
	media (val. ass.)	0.075	0.800	1.255	0.792
	% sign.	23.0%	4.0%	4.0%	
MODELLO PER LA STIMA : <u>GARCH(1,1) NORMALE</u>					
	alpha	beta	gamma	lambda	tau
media	0.1043	0.8425	0.0161		
dev.st.	0.0165	0.026	0.0046		
% sign.	100%	100%	100%		
MODELLO PER LA STIMA : <u>GARCH(1,1) SKEW-NORMAL</u>					
	alpha	beta	gamma	lambda	tau
media	0.1044	0.8422	0.0162	-0.3491	
dev.st.	0.0168	0.0267	0.0047	0.314	
% sign.	100%	100%	100%	22%	
MODELLO PER LA STIMA : <u>GARCH(1,1) t</u>					
	alpha	beta	gamma	lambda	tau
media	0.1047	0.843	0.0162		30.5502
dev.st.	0.0165	0.0262	0.0047		6.8374
% sign.	100%	100%	100%		100%
MODELLO PER LA STIMA : <u>GARCH(1,1) SKEW-t</u>					
	alpha	beta	gamma	lambda	tau
media	0.1044	0.8432	0.0161	-0.0196	54.8021
dev.st.	0.0163	0.026	0.0046	0.4531	40.4869
% sign.	100%	100%	100%	20%	51%

**Tabella 4.06**

500 replicazioni di lunghezza 2000 dal modello *GARCH(1,1)* Normale di parametri  $\alpha = 0.10$ ,  $\beta = 0.85$ ,  $\gamma = 0.015$ . Stime ottenute per tutti e quattro i modelli presi in considerazione.

MODELLO GENERATORE : <u>GARCH(1,1) SKEW-NORMAL</u>					
REPLICAZIONI MONTECARLO : <u>500</u>					
LUNGHEZZA SERIE : <u>2000</u>					
PARAMETRI :					
	alpha	beta	gamma	lambda	tau
	0.1	0.85	0.015	-1.2	
				Skewness cond. Teorica	<u>-0.200</u>
				Curtosi cond. Teorica	<u>0.103</u>
TEST CAMPIONARI:	Skewness	Test Bai-Ng ( $\pi_3$ )	Test Bai-Ng (CS)	Eccesso di curtosi	
	media (val. ass.)	0.226	2.410	1.888	0.898
	% sign.	88.0%	73.0%	31.0%	
MODELLO PER LA STIMA : <u>GARCH(1,1) NORMALE</u>					
	alpha	beta	gamma	lambda	tau
media	0.1013	0.8465	0.0156		
dev.st.	0.0179	0.0278	0.0041		
% sign.	100%	100%	100%		
MODELLO PER LA STIMA : <u>GARCH(1,1) SKEW-NORMAL</u>					
	alpha	beta	gamma	lambda	tau
media	0.1012	0.8462	0.0158	-1.2058	
dev.st.	0.0177	0.0277	0.0041	0.1617	
% sign.	100%	100%	100%	100%	
MODELLO PER LA STIMA : <u>GARCH(1,1) t</u>					
	alpha	beta	gamma	lambda	tau
media	0.1014	0.8472	0.0156		26.8454
dev.st.	0.0184	0.0282	0.0041		6.3046
% sign.	100%	100%	100%		100%
MODELLO PER LA STIMA : <u>GARCH(1,1) SKEW-t</u>					
	alpha	beta	gamma	lambda	tau
media	0.101	0.8478	0.0156	-1.0367	41.6341
dev.st.	0.0182	0.028	0.0041	0.1845	26.8403
% sign.	100%	100%	100%	100%	72%

**Tabella 4.07**

**500 repliche di lunghezza 2000 dal modello  $GARCH(1,1)$  Skew-Normal di parametri  $\alpha = 0.10, \beta = 0.85, \gamma = 0.015, \lambda = -1.2$ . Stime ottenute per tutti e quattro i modelli presi in considerazione.**

<sup>XXII</sup> Il livello di significatività considerato è del 5%. Il test di Bai-Ng  $\hat{\pi}_3$  va confrontato con il quantile di una normale standard (1.96), mentre il test di Bai-Ng CS ha valore critico 2.21.

MODELLO GENERATORE : <u>GARCH(1,1) t</u>					
REPLICAZIONI MONTECARLO : <u>500</u>					
LUNGHEZZA SERIE : <u>2000</u>					
PARAMETRI :           alpha           beta           gamma           lambda           tau					
0.1           0.85           0.015                           7					
TEST CAMPIONARI:	Skewness	Test Bai-Ng ( $\pi_3$ )	Test Bai-Ng (CS)	Eccesso di curtosi	
	media (val. ass.)	0.194	0.766	1.170	3.930
	% sign.	55.0%	2.0%	3.0%	100.0%
MODELLO PER LA STIMA : <u>GARCH(1,1) NORMALE</u>					
	alpha	beta	gamma	lambda	tau
media	0.1064	0.8416	0.016		
dev.st.	0.0193	0.0292	0.0049		
% sign.	100%	100%	100%		
MODELLO PER LA STIMA : <u>GARCH(1,1) SKEW-NORMAL</u>					
	alpha	beta	gamma	lambda	tau
media	0.1061	0.8419	0.0159	-0.0934	
dev.st.	0.0187	0.0289	0.0049	0.8165	
% sign.	100%	100%	100%	97%	
MODELLO PER LA STIMA : <u>GARCH(1,1) t</u>					
	alpha	beta	gamma	lambda	tau
media	0.1058	0.8422	0.016		7.1658
dev.st.	0.0161	0.0247	0.0042		0.4471
% sign.	100%	100%	100%		100%
MODELLO PER LA STIMA : <u>GARCH(1,1) SKEW-t</u>					
	alpha	beta	gamma	lambda	tau
media	0.1058	0.8421	0.016	-0.012	7.179
dev.st.	0.0163	0.025	0.0042	0.1824	0.4597
% sign.	100%	100%	100%	5%	100%

**Tabella 4.08**

500 repliche di lunghezza 2000 dal modello *GARCH(1,1) t* di Student di parametri  $\alpha = 0.10$ ,  $\beta = 0.85$ ,  $\gamma = 0.015$ ,  $\tau = 7$ . Stime ottenute per tutti e quattro i modelli presi in considerazione.



PERCENTUALE SCOSTAMENTI SULLE CODE											
Modello per la stima >			GARCH(1,1) NORMALE		GARCH(1,1) SKEW-NORMAL		GARCH(1,1) t		GARCH(1,1) SKEW-t		
V V	Modello generatore	V V	$\alpha$	0.5%	1%	0.5%	1%	0.5%	1%	0.5%	1%
	GARCH(1,1) NORMALE		VaR( $\alpha$ ) VaR(1- $\alpha$ )	0.50% 0.50%	1.02% 0.99%	0.47% 0.52%	0.96% 1.03%	0.34% 0.35%	0.78% 0.77%	0.40% 0.40%	0.90% 0.89%
	GARCH(1,1) SKEW-NORMAL		VaR( $\alpha$ ) VaR(1- $\alpha$ )	0.82% 0.29%	1.45% 0.67%	0.50% 0.51%	1.02% 0.99%	0.63% 0.20%	1.27% 0.55%	0.40% 0.40%	0.91% 0.89%
	GARCH(1,1) t		VaR( $\alpha$ ) VaR(1- $\alpha$ )	0.96% 0.90%	1.45% 1.39%	0.94% 0.91%	1.43% 1.41%	0.52% 0.51%	1.03% 0.98%	0.52% 0.50%	1.02% 0.98%
	GARCH(1,1) SKEW-t		VaR( $\alpha$ ) VaR(1- $\alpha$ )	1.45% 0.40%	2.09% 0.72%	0.94% 0.81%	1.46% 1.28%	0.83% 0.18%	1.54% 0.44%	0.49% 0.48%	0.98% 0.99%

**Tabella 4.10**

Medie degli scostamenti percentuali dai VaR stimati per quattro diversi modelli. Per ogni modello si sono ottenute 500 replicazioni di lunghezza 2000, poi stimate con ciascuno dei modelli. VaR ottenuti ai livelli di significatività 0.5% e 1%, per la coda di sinistra, 99.5% e 99%, per la coda di destra.

MODELLO GENERATORE :		GARCH(1,1) NORMALE							
		NUMERO DI SCOSTAMENTI ( MOLTIPLICATORE )							
MODELLO DI STIMA :	p-value	$\leq 4$	= 5	= 6	= 7	= 8	= 9	> 9	
		( $\delta = 3$ )	( $\delta = 3.40$ )	( $\delta = 3.50$ )	( $\delta = 3.65$ )	( $\delta = 3.75$ )	( $\delta = 3.85$ )	( $\delta = 4$ )	
GARCH(1,1) NORMALE	0.01	1557	121	47	18	6	1	0	
	0.99	1590	107	39	12	2	0	0	
GARCH(1,1) SKEW-NORMAL	0.01	1603	95	36	11	3	0	0	
	0.99	1565	122	46	14	3	0	0	
GARCH(1,1) t	0.01	1651	66	25	6	3	0	0	
	0.99	1651	73	22	4	0	0	0	
GARCH(1,1) SKEW-t	0.01	1631	80	28	8	3	0	0	
	0.99	1639	80	23	8	0	0	0	

**Tabella 4.11**

Media dei giorni in cui il moltiplicatore  $\delta$  assume ciascun livello in base agli scostamenti osservati nell'ultimo anno. Stime di ciascun modello per 500 replicazioni di lunghezza 2000 da un GARCH(1,1) Normale.  $\alpha = 1\%$  e 99%

MODELLO GENERATORE :		GARCH(1,1) SKEW-NORMAL						
		NUMERO DI SCOSTAMENTI ( MOLTIPLICATORE )						
MODELLO DI STIMA :	p-value	$\leq 4$ ( $\delta = 3$ )	$= 5$ ( $\delta = 3.40$ )	$= 6$ ( $\delta = 3.50$ )	$= 7$ ( $\delta = 3.65$ )	$= 8$ ( $\delta = 3.75$ )	$= 9$ ( $\delta = 3.85$ )	$> 9$ ( $\delta = 4$ )
GARCH(1,1)	0.01	1245	260	128	67	31	12	8
NORMALE	0.99	1695	39	11	4	1	0	0
GARCH(1,1)	0.01	1583	102	43	18	3	1	0
SKEW-NORMAL	0.99	1566	118	43	17	5	1	0
GARCH(1,1) t	0.01	1410	183	93	44	13	5	2
	0.99	1725	20	4	1	0	0	0
GARCH(1,1)	0.01	1635	74	30	10	1	1	0
SKEW-t	0.99	1622	84	32	9	3	1	0

**Tabella 4.12**

Media dei giorni in cui il moltiplicatore  $\delta$  assume ciascun livello in base agli scostamenti osservati nell'ultimo anno. Stime di ciascun modello per 500 replicazioni di lunghezza 2000 da un GARCH(1,1) Skew-Normal.  $\alpha = 1\%$  e  $99\%$

MODELLO GENERATORE :		GARCH(1,1) t						
		NUMERO DI SCOSTAMENTI ( MOLTIPLICATORE )						
MODELLO DI STIMA :	p-value	$\leq 4$ ( $\delta = 3$ )	$= 5$ ( $\delta = 3.40$ )	$= 6$ ( $\delta = 3.50$ )	$= 7$ ( $\delta = 3.65$ )	$= 8$ ( $\delta = 3.75$ )	$= 9$ ( $\delta = 3.85$ )	$> 9$ ( $\delta = 4$ )
GARCH(1,1)	0.01	1250	248	132	66	36	12	7
NORMALE	0.99	1298	238	108	57	33	11	5
GARCH(1,1)	0.01	1251	254	133	68	30	9	4
SKEW-NORMAL	0.99	1274	238	121	66	31	13	7
GARCH(1,1) t	0.01	1553	121	50	20	3	3	1
	0.99	1580	116	39	11	4	1	0
GARCH(1,1)	0.01	1564	117	44	18	6	2	0
SKEW-t	0.99	1584	118	36	10	3	0	0

**Tabella 4.13**

Media dei giorni in cui il moltiplicatore  $\delta$  assume ciascun livello in base agli scostamenti osservati nell'ultimo anno. Stime di ciascun modello per 500 replicazioni di lunghezza 2000 da un GARCH(1,1) t.  $\alpha = 1\%$  e  $99\%$

MODELLO GENERATORE :		GARCH(1,1) SKEW-t						
		NUMERO DI SCOSTAMENTI ( MOLTIPLICATORE )						
MODELLO DI STIMA :	p-value	≤ 4	= 5	= 6	= 7	= 8	= 9	> 9
		( $\delta = 3$ )	( $\delta = 3.40$ )	( $\delta = 3.50$ )	( $\delta = 3.65$ )	( $\delta = 3.75$ )	( $\delta = 3.85$ )	( $\delta = 4$ )
GARCH(1,1) NORMALE	0.01	679	329	275	208	128	70	62
	0.99	1683	49	16	2	0	0	0
GARCH(1,1) SKEW-NORMAL	0.01	1209	256	160	79	33	8	5
	0.99	1369	197	113	53	14	4	1
GARCH(1,1) t	0.01	1149	274	168	92	45	14	9
	0.99	1742	8	0	0	0	0	0
GARCH(1,1) SKEW-t	0.01	1586	106	43	11	3	0	0
	0.99	1577	111	49	11	2	0	0

**Tabella 4.14**

Media dei giorni in cui il moltiplicatore  $\delta$  assume ciascun livello in base agli scostamenti osservati nell'ultimo anno. Stime di ciascun modello per 500 replicazioni di lunghezza 2000 da un GARCH(1,1) Skew-t.  $\alpha = 1\%$  e 99%

INDICI DI MERCATO	numerosità campionaria	TEST CAMPIONARI			
		Skewness	Test Bai-Ng ( $\pi_3$ )	Test Bai-Ng (CS)	Eccesso di curtosi
cac40	3977	-0.103	-0.854	1.566	2.792
dax	3792	-0.150	-1.286	2.569	3.107
dowjones	4023	-0.223	-1.207	1.605	4.548
ftse100	5483	-0.624	-1.365	3.259	7.810
hangseng	3949	-0.318	-1.889	1.355	4.524
mib30	1547	-0.189	-0.823	2.901	3.608
nasdaq	4023	-0.175	-1.084	6.415	4.638
nikkey225	3926	0.038	0.397	0.807	2.098
sp500	4023	-0.022	-0.157	2.656	3.311
swiss	3797	-0.180	-1.213	2.806	3.889

**Tabella 5.01**

Serie dei rendimenti degli indici di mercato: numerosità campionaria, test di simmetria e indice di curtosi.

<sup>xxiv</sup> Il livello di significatività considerato è del 5%. Il test di Bai-Ng  $\hat{\pi}_3$  va confrontato con il quantile di una normale standard (1.96), mentre il test di Bai-Ng CS ha valore critico 2.21 .

TITOLI MIB30	n. oss.	STATISTICHE			
		Skewness	Test Bai-Ng ( $\pi_3$ )	Test Bai-Ng (CS)	Eccesso di curtosi
al	4976	-0.298	-1.247	1.763	6.535
AUTO	574	1.684	0.908	1.653	24.247
BFI	4467	0.093	0.810	1.710	3.523
BIN	4980	0.243	2.097	4.638	3.383
bmps	1335	0.002	0.011	0.860	3.102
bnl	1524	0.168	0.887	1.445	2.460
bpu	320	0.120	0.290	1.498	2.395
bpvn	1595	0.151	0.533	1.763	4.105
cap	4979	0.126	0.929	3.616	3.495
edn	2713	0.407	1.924	3.881	5.442
enel	1244	-0.295	-1.135	1.200	3.047
eni	2233	-0.167	-1.238	0.645	2.182
f	4978	0.015	0.138	2.774	3.159
fnc	4979	0.290	2.180	3.922	4.155
g	4979	-0.012	-0.081	3.124	4.148
lux	966	-0.447	-1.047	0.691	5.156
mb	4980	0.242	1.637	2.894	3.988
Med	2107	0.199	1.123	1.014	2.660
ms	2077	0.145	1.055	2.154	1.947
ntv	624	0.006	0.027	3.017	2.191
pg	1526	0.537	2.281	1.464	3.787
R	4981	0.011	0.043	5.817	8.391
SPI	3160	0.210	2.072	3.282	2.175
spm	4978	0.148	1.043	3.006	3.352
srg	710	-0.445	-1.188	1.634	4.677
stm	1599	0.200	1.890	1.865	0.885
Tim	2360	0.236	3.236	3.410	0.926
tit	2716	0.041	0.212	1.648	3.668
uc	4967	0.374	2.348	0.881	4.625

**Tabella 5.02**

**Serie dei rendimenti dei titoli Mib30: numerosità campionaria, test di simmetria e indice di curtosi.**

<sup>xxv</sup> Il livello di significatività considerato è del 5%. Il test di Bai-Ng  $\hat{\pi}_3$  va confrontato con il quantile di una normale standard (1.96), mentre il test di Bai-Ng CS ha valore critico 2.21 .

INDICI DI MERCATO	GARCH(1,1) con distribuzione	stime dei parametri				statistiche test dei parametri			
		alpha	beta	lambda	tau	alpha	beta	lambda	tau
cac40	NORMALE	0.100	0.871	-	-	10.157	117.319	-	-
	SKEW-NORMAL	0.157	0.807	-1.246	-	10.625	83.031	-12.238	-
	t St.	0.072	0.916	0.000	7.258	8.857	141.395	0.000	11.696
	SKEW-t	0.066	0.923	-0.453	7.464	8.905	152.397	-3.442	11.508
dax	NORMALE	0.146	0.832	-	-	11.736	98.774	-	-
	SKEW-NORMAL	0.081	0.908	-0.962	-	10.336	146.286	-7.795	-
	t St.	0.075	0.922	0.000	7.288	10.443	150.279	0.000	11.816
	SKEW-t	0.123	0.871	-0.050	7.203	12.741	120.001	-0.320	11.445
dowjones	NORMALE	0.109	0.871	-	-	10.974	123.497	-	-
	SKEW-NORMAL	0.090	0.894	-1.161	-	10.429	139.541	-12.227	-
	t St.	0.058	0.927	0.000	6.972	8.744	157.840	0.000	10.974
	SKEW-t	0.060	0.927	-0.053	7.093	8.456	157.590	-0.371	9.614
ftse100	NORMALE	0.164	0.795	-	-	13.004	96.769	-	-
	SKEW-NORMAL	0.126	0.861	-1.070	-	11.391	108.581	-10.550	-
	t St.	0.094	0.887	0.000	7.462	10.636	132.183	0.000	14.272
	SKEW-t	0.111	0.870	-0.635	7.391	10.809	118.856	-5.908	14.116
hangseng	NORMALE	0.114	0.857	-	-	11.826	132.974	-	-
	SKEW-NORMAL	0.089	0.895	-0.888	-	10.860	152.124	-8.422	-
	t St.	0.055	0.936	0.000	6.785	8.553	171.191	0.000	9.372
	SKEW-t	0.058	0.931	-0.161	6.876	8.782	169.299	-1.273	9.051
mib30	NORMALE	0.160	0.825	-	-	8.227	65.961	-	-
	SKEW-NORMAL	0.150	0.831	-1.392	-	8.076	68.408	-9.041	-
	t St.	0.086	0.912	0.000	7.002	9.194	104.940	0.000	6.078
	SKEW-t	0.088	0.909	-0.857	7.081	9.127	102.295	-4.679	6.389
nasdaq	NORMALE	0.176	0.814	-	-	16.870	122.911	-	-
	SKEW-NORMAL	0.181	0.806	-1.400	-	15.482	109.254	-13.896	-
	t St.	0.123	0.859	0.000	7.137	12.090	118.599	0.000	12.972
	SKEW-t	0.108	0.886	-1.048	7.237	14.116	144.870	-9.550	12.955
nikkey225	NORMALE	0.124	0.849	-	-	10.562	104.652	-	-
	SKEW-NORMAL	0.104	0.877	0.097	-	10.496	122.118	0.164	-
	t St.	0.140	0.846	0.000	7.011	10.638	93.561	0.000	10.138
	SKEW-t	0.083	0.903	-0.149	7.162	9.621	133.835	-1.089	10.430
sp500	NORMALE	0.135	0.853	-	-	10.938	104.359	-	-
	SKEW-NORMAL	0.154	0.838	-1.134	-	15.001	125.472	-11.494	-
	t St.	0.060	0.928	0.000	7.007	9.153	163.934	0.000	10.335
	SKEW-t	0.178	0.814	-0.678	7.039	16.200	109.021	-5.856	10.137
swiss	NORMALE	0.160	0.801	-	-	11.801	92.148	-	-
	SKEW-NORMAL	0.130	0.834	-1.135	-	11.680	106.750	-10.758	-
	t St.	0.121	0.865	0.000	7.180	9.595	97.853	0.000	10.716
	SKEW-t	0.099	0.883	-0.694	7.329	9.590	114.978	-5.674	10.799

**Tabella 5.03**

Serie dei rendimenti degli indici di mercato: stime dei parametri per i modelli *GARCH(1,1)* con diverse distribuzioni. Le statistiche test vanno confrontate con il quantile della normale standard.

INDICI DI MERCATO	GARCH(1,1) con distribuzione	% scostamenti al livello di significatività			
		0.50%	1.00%	99.50%	99.00%
cac40	NORMALE	0.93%	1.38%	0.58%	0.96%
	SKEW-NORMAL	0.63%	1.08%	0.75%	1.33%
	t St.	0.30%	0.91%	0.18%	0.63%
	SKEW-t	0.25%	0.68%	0.33%	0.73%
dax	NORMALE	0.98%	1.64%	0.53%	0.98%
	SKEW-NORMAL	0.82%	1.21%	0.69%	0.95%
	t St.	0.53%	1.00%	0.32%	0.58%
	SKEW-t	0.50%	0.92%	0.24%	0.50%
dowjones	NORMALE	1.04%	1.57%	0.47%	0.85%
	SKEW-NORMAL	0.80%	1.14%	0.62%	1.24%
	t St.	0.65%	1.04%	0.30%	0.55%
	SKEW-t	0.60%	0.94%	0.27%	0.52%
ftse100	NORMALE	0.88%	1.51%	0.47%	0.82%
	SKEW-NORMAL	0.60%	1.06%	0.55%	0.84%
	t St.	0.42%	0.84%	0.24%	0.47%
	SKEW-t	0.22%	0.64%	0.35%	0.66%
hangseng	NORMALE	1.04%	1.52%	0.66%	1.09%
	SKEW-NORMAL	0.91%	1.34%	0.79%	1.34%
	t St.	0.66%	1.16%	0.30%	0.73%
	SKEW-t	0.61%	1.11%	0.30%	0.89%
mib30	NORMALE	0.90%	1.62%	0.58%	0.65%
	SKEW-NORMAL	0.71%	1.03%	0.65%	1.23%
	t St.	0.65%	1.16%	0.13%	0.45%
	SKEW-t	0.32%	0.71%	0.45%	0.84%
nasdaq	NORMALE	0.92%	1.47%	0.25%	0.72%
	SKEW-NORMAL	0.52%	0.99%	0.70%	1.29%
	t St.	0.52%	0.97%	0.12%	0.32%
	SKEW-t	0.22%	0.55%	0.32%	0.97%
nikkey225	NORMALE	0.76%	1.35%	0.76%	1.15%
	SKEW-NORMAL	0.71%	1.32%	0.76%	1.12%
	t St.	0.31%	0.79%	0.51%	0.87%
	SKEW-t	0.36%	0.69%	0.56%	0.92%
sp500	NORMALE	0.99%	1.42%	0.45%	0.82%
	SKEW-NORMAL	0.72%	1.12%	0.72%	1.14%
	t St.	0.47%	1.02%	0.22%	0.55%
	SKEW-t	0.37%	0.77%	0.30%	0.82%
swiss	NORMALE	1.08%	1.82%	0.45%	0.71%
	SKEW-NORMAL	0.71%	1.42%	0.61%	1.05%
	t St.	0.45%	1.05%	0.21%	0.32%
	SKEW-t	0.24%	0.71%	0.32%	0.76%

**Tabella 5.04**

**Serie dei rendimenti degli indici di mercato: % degli scostamenti rispetto al VaR ai livelli di significatività indicati calcolati per i diversi modelli.**

INDICI DI MERCATO	numerosità campionaria	GARCH(1,1) con distribuzione	Numero di volte in cui si sono contati i seguenti scostamenti						
			≤ 4	= 5	= 6	= 7	= 8	= 9	> 9
cac40	3977	NORMALE	2825	367	486	49	0	0	0
		SKEW-NORMAL	3380	340	7	0	0	0	0
		t St.	3607	120	0	0	0	0	0
		SKEW-t	3678	49	0	0	0	0	0
dax	3792	NORMALE	2459	548	214	203	51	57	10
		SKEW-NORMAL	3074	286	172	10	0	0	0
		t St.	3434	108	0	0	0	0	0
		SKEW-t	3484	58	0	0	0	0	0
dowjones	4023	NORMALE	2521	521	456	135	99	41	0
		SKEW-NORMAL	3286	389	60	38	0	0	0
		t St.	3220	392	114	11	36	0	0
		SKEW-t	3524	211	38	0	0	0	0
ftse100	5483	NORMALE	3658	614	295	210	197	104	155
		SKEW-NORMAL	4671	279	81	29	82	91	0
		t St.	4892	121	47	82	91	0	0
		SKEW-t	5013	111	76	33	0	0	0
hangseng	3949	NORMALE	2662	340	146	180	67	18	286
		SKEW-NORMAL	2920	110	150	156	76	91	196
		t St.	3099	109	134	122	107	74	54
		SKEW-t	3166	91	191	16	107	74	54
mib30	1547	NORMALE	742	405	141	9	0	0	0
		SKEW-NORMAL	1297	0	0	0	0	0	0
		t St.	1240	57	0	0	0	0	0
		SKEW-t	1297	0	0	0	0	0	0
nasdaq	4023	NORMALE	2317	751	448	220	37	0	0
		SKEW-NORMAL	3275	216	256	26	0	0	0
		t St.	3466	182	125	0	0	0	0
		SKEW-t	3735	38	0	0	0	0	0
nikkey225	3926	NORMALE	2670	381	414	164	47	0	0
		SKEW-NORMAL	2826	408	370	72	0	0	0
		t St.	3480	160	36	0	0	0	0
		SKEW-t	3619	57	0	0	0	0	0
sp500	4023	NORMALE	2862	465	291	155	0	0	0
		SKEW-NORMAL	3111	411	144	107	0	0	0
		t St.	3194	361	218	0	0	0	0
		SKEW-t	3713	60	0	0	0	0	0
swiss	3797	NORMALE	1561	883	494	365	142	102	0
		SKEW-NORMAL	2702	496	217	71	61	0	0
		t St.	3125	383	39	0	0	0	0
		SKEW-t	3423	124	0	0	0	0	0

**Tabella 5.05**

Serie dei rendimenti degli indici di mercato: frequenza dei giorni in cui il moltiplicatore  $\delta$  assume ciascun livello previsto, in base agli scostamenti osservati nell'ultimo anno, per le serie degli indici di mercato.  $\alpha = 1\%$

TITOLI MIB30	GARCH(1,1) con distribuzione	stime dei parametri				sign. Parametri			
		alpha	beta	lambda	tau	alpha	beta	lambda	tau
al	NORMALE	0.158	0.809	-	-	12.888	115.524	-	-
	SKEW-NORMAL	0.075	0.910	-0.740	-	12.460	205.148	-8.047	-
	t St.	0.099	0.883		6.382	10.560	131.287		10.776
	SKEW-t	0.100	0.885	0.183	5.856	10.680	131.523	1.864	12.580
AUTO	NORMALE	0.145	0.767	-	-	4.673	47.510	-	-
	SKEW-NORMAL	0.100	0.844	0.925	-	4.264	60.545	5.249	-
	t St.	0.248	0.519		2.743	2.809	5.535		11.690
	SKEW-t	0.236	0.571	0.392	2.703	2.720	6.013	2.759	11.463
BFI	NORMALE	0.189	0.743	-	-	12.974	92.082	-	-
	SKEW-NORMAL	0.107	0.858	0.846	-	12.736	151.979	8.462	-
	t St.	0.116	0.871		4.794	10.861	110.849		15.304
	SKEW-t	0.113	0.874	0.210	4.878	10.662	112.177	2.483	14.718
BIN	NORMALE	0.145	0.803	-	-	13.352	118.273	-	-
	SKEW-NORMAL	0.127	0.824	1.078	-	13.605	134.742	13.155	-
	t St.	0.173	0.778		6.924	10.630	80.244		7.630
	SKEW-t	0.142	0.831	0.432	5.372	10.340	95.343	4.868	12.610
bmps	NORMALE	0.053	0.924	-	-	6.527	146.831	-	-
	SKEW-NORMAL	0.047	0.936	0.416	-	6.375	158.249	0.503	-
	t St.	0.141	0.793		6.906	5.039	45.748		3.379
	SKEW-t	0.065	0.915	-0.074	6.120	5.206	91.045	-0.380	5.625
bnl	NORMALE	0.089	0.895	-	-	6.417	85.966	-	-
	SKEW-NORMAL	0.113	0.856	0.590	-	7.004	74.375	-	-
	t St.	0.108	0.887		6.948	7.430	76.428		5.674
	SKEW-t	0.123	0.870	0.432	7.037	6.904	66.142	2.132	5.251
bpu	NORMALE	0.065	0.761	-	-	1.687	24.269	-	-
	SKEW-NORMAL	0.072	0.761	-0.802	-	1.793	23.784	-1.909	-
	t St.	0.099	0.772		6.973	1.169	14.325		2.173
	SKEW-t	0.051	0.767	-0.024	7.073	1.107	20.147	-0.049	2.606
bpvn	NORMALE	0.188	0.665	-	-	8.150	46.728	-	-
	SKEW-NORMAL	0.181	0.718	-0.218	-	7.716	50.362	-0.459	-
	t St.	0.207	0.705		5.320	5.998	34.422		6.351
	SKEW-t	0.201	0.704	0.202	5.738	6.145	35.329	1.245	5.557
cap	NORMALE	0.108	0.841	-	-	12.435	141.724	-	-
	SKEW-NORMAL	0.110	0.842	0.984	-	12.349	138.224	11.808	-
	t St.	0.128	0.839		5.414	10.087	100.717		12.848
	SKEW-t	0.134	0.839	0.416	5.321	10.030	98.282	4.648	12.825
edn	NORMALE	0.186	0.679	-	-	9.902	67.368	-	-
	SKEW-NORMAL	0.143	0.743	1.315	-	10.102	86.595	13.821	-
	t St.	0.182	0.758		6.835	6.564	51.836		2.625
	SKEW-t	0.275	0.721	0.583	4.121	16.083	45.404	5.612	14.783

**Tabella 5.06**

**Serie dei rendimenti dei titoli Mib30 (da Alleanza a Edison): stime dei parametri per i modelli GARCH(1,1) con diverse distribuzioni. Le statistiche test vanno confrontate con il quantile della normale standard.**

TITOLI MIB30	GARCH(1,1) con distribuzione	stime dei parametri				sign. Parametri			
		alpha	beta	lambda	tau	alpha	beta	lambda	tau
enel	NORMALE	0.132	0.808	-	-	6.825	64.459	-	-
	SKEW-NORMAL	0.128	0.813	-1.229	-	6.902	66.188	-8.315	-
	t St.	0.140	0.820		6.906	6.103	52.755		5.220
	SKEW-t	0.147	0.802	-0.121	7.062	6.262	50.801	-0.525	5.001
eni	NORMALE	0.091	0.871	-	-	7.089	89.185	-	-
	SKEW-NORMAL	0.111	0.851	-0.821	-	6.818	72.874	-4.856	-
	t St.	0.076	0.904		7.296	5.794	88.348		7.977
	SKEW-t	0.082	0.895	-0.172	7.455	5.923	84.195	-0.895	7.770
f	NORMALE	0.174	0.816	-	-	17.401	132.700	-	-
	SKEW-NORMAL	0.097	0.892	0.757	-	12.466	158.557	6.569	-
	t St.	0.070	0.926		6.896	10.997	178.025		11.723
	SKEW-t	0.075	0.920	0.310	6.963	11.169	169.589	2.772	11.443
fnc	NORMALE	0.143	0.768	-	-	13.353	121.143	-	-
	SKEW-NORMAL	0.147	0.759	0.975	-	13.112	114.016	12.722	-
	t St.	0.159	0.780		6.888	-	91.802		-
	SKEW-t	0.239	0.719	0.310	3.952	11.530	59.436	4.607	18.387
g	NORMALE	0.112	0.858	-	-	12.894	146.081	-	-
	SKEW-NORMAL	0.174	0.785	-0.916	-	12.759	96.814	-11.120	-
	t St.	0.159	0.821		6.965	10.827	89.161		10.760
	SKEW-t	0.188	0.799	-0.152	7.059	13.985	94.666	-1.244	9.951
lux	NORMALE	0.126	0.796	-	-	5.196	53.727	-	-
	SKEW-NORMAL	0.065	0.900	-0.969	-	5.253	95.974	-5.946	-
	t St.	0.119	0.824		6.402	4.327	44.286		3.761
	SKEW-t	0.090	0.873	-0.129	5.741	4.282	55.260	-0.596	5.088
mb	NORMALE	0.081	0.902	-	-	12.326	191.385	-	-
	SKEW-NORMAL	0.074	0.907	0.816	-	12.311	205.058	8.048	-
	t St.	0.085	0.905		6.807	9.790	137.116		11.275
	SKEW-t	0.094	0.893	0.465	6.918	10.064	128.551	4.415	11.069
Med	NORMALE	0.151	0.818	-	-	9.633	77.685	-	-
	SKEW-NORMAL	0.120	0.857	-0.105	-	9.346	92.227	-0.298	-
	t St.	0.172	0.799		6.977	8.816	63.256		7.870
	SKEW-t	0.106	0.875	0.324	8.545	8.249	90.258	1.669	6.127
ms	NORMALE	0.147	0.837	-	-	9.209	76.643	-	-
	SKEW-NORMAL	0.083	0.906	1.074	-	7.959	106.414	7.410	-
	t St.	0.083	0.907		7.612	7.351	98.397		8.304
	SKEW-t	0.083	0.908	0.466	7.497	7.416	98.990	2.723	8.476
ntv	NORMALE	0.049	0.938	-	-	2.769	61.645	-	-
	SKEW-NORMAL	0.086	0.869	0.629	-	3.271	43.783	1.392	-
	t St.	0.079	0.890		5.540	2.807	41.397		4.080
	SKEW-t	0.112	0.800	0.330	6.717	3.205	31.357	1.163	2.286

**Tabella 5.07**

**Serie dei rendimenti dei titoli Mib30 (da Enel a Antonveneta): stime dei parametri per i modelli GARCH(1,1) con diverse distribuzioni. Le statistiche test vanno confrontate con il quantile della normale standard.**

TITOLI MIB30	GARCH(1,1) con distribuzione	stime dei parametri				sign. Parametri			
		alpha	beta	lambda	tau	alpha	beta	lambda	tau
pg	NORMALE	0.137	0.788	-	-	7.730	77.890	-	-
	SKEW-NORMAL	0.105	0.841	1.186	-	7.549	97.533	9.321	-
	t St.	0.097	0.895		6.262	6.591	78.400		5.950
	SKEW-t	0.073	0.920	0.412	6.109	6.341	96.565	2.387	6.250
R	NORMALE	0.056	0.937	-	-	11.662	242.939	-	-
	SKEW-NORMAL	0.066	0.926	0.799	-	11.529	209.968	8.294	-
	t St.	0.075	0.913		6.644	9.116	144.797		11.563
	SKEW-t	0.070	0.918	0.446	6.725	9.183	155.210	4.242	11.042
SPI	NORMALE	0.088	0.881	-	-	10.250	138.329	-	-
	SKEW-NORMAL	0.085	0.886	0.990	-	10.156	141.727	8.358	-
	t St.	0.107	0.864		7.106	8.937	99.315		9.440
	SKEW-t	0.102	0.872	0.443	7.256	8.804	102.584	3.257	8.837
spm	NORMALE	0.151	0.810	-	-	13.373	113.322	-	-
	SKEW-NORMAL	0.142	0.821	0.887	-	13.298	118.251	9.984	-
	t St.	0.185	0.785		6.885	9.726	74.403		3.610
	SKEW-t	0.151	0.831	0.455	6.213	11.086	91.347	4.726	7.379
srg	NORMALE	0.107	0.818	-	-	4.687	52.078	-	-
	SKEW-NORMAL	0.125	0.790	-1.200	-	4.684	45.359	-6.676	-
	t St.	0.136	0.792		6.942	3.689	29.662		3.981
	SKEW-t	0.135	0.786	-0.030	7.033	3.738	29.958	-0.090	3.672
stm	NORMALE	0.074	0.913	-	-	6.695	98.985	-	-
	SKEW-NORMAL	0.057	0.936	-0.028	-	6.621	121.524	-0.025	-
	t St.	0.111	0.878		7.259	7.517	75.852		8.575
	SKEW-t	0.065	0.928	0.268	8.643	6.420	103.912	1.107	7.347
Tim	NORMALE	0.065	0.929	-	-	7.906	133.900	-	-
	SKEW-NORMAL	0.069	0.920	1.013	-	7.956	128.611	6.636	-
	t St.	0.075	0.921		7.421	8.309	114.295		10.254
	SKEW-t	0.071	0.926	0.502	7.501	8.064	115.585	3.070	10.013
tit	NORMALE	0.110	0.879	-	-	9.677	111.814	-	-
	SKEW-NORMAL	0.127	0.854	0.516	-	8.808	88.538	1.651	-
	t St.	0.169	0.823		6.912	13.425	89.444		7.249
	SKEW-t	0.077	0.919	0.138	6.464	8.453	116.868	0.951	9.052
uc	NORMALE	0.084	0.906	-	-	12.694	184.749	-	-
	SKEW-NORMAL	0.092	0.893	0.987	-	12.125	160.758	12.018	-
	t St.	0.139	0.856		6.699	18.479	139.178		9.868
	SKEW-t	0.090	0.898	0.276	6.507	10.440	136.569	2.610	10.788

**Tabella 5.08**

Serie dei rendimenti dei titoli Mib30 (da *SeatPG* a *Unicredit*): stime dei parametri per i modelli *GARCH(1,1)* con diverse distribuzioni. Le statistiche test vanno confrontate con il quantile della normale standard.

TITOLI MIB30	GARCH(1,1) con distribuzione	% scostamenti al livello di significatività			
		0.50%	1.00%	99.50%	99.00%
al	NORMALE	0.80%	1.17%	0.90%	1.37%
	SKEW-NORMAL	0.82%	1.23%	1.09%	1.47%
	t St.	0.54%	0.96%	0.52%	1.11%
	SKEW-t	0.56%	1.07%	0.40%	0.94%
AUTO	NORMALE	1.05%	1.22%	1.57%	1.74%
	SKEW-NORMAL	1.22%	1.39%	1.22%	1.74%
	t St.	0.35%	1.05%	0.87%	1.57%
	SKEW-t	0.70%	1.22%	0.70%	1.05%
BFI	NORMALE	1.01%	1.63%	1.05%	1.81%
	SKEW-NORMAL	1.14%	1.72%	0.99%	1.48%
	t St.	0.47%	0.92%	0.56%	1.03%
	SKEW-t	0.47%	1.19%	0.47%	0.94%
BIN	NORMALE	0.86%	1.18%	1.27%	1.85%
	SKEW-NORMAL	0.96%	1.51%	1.16%	1.51%
	t St.	0.50%	0.90%	0.86%	1.43%
	SKEW-t	0.60%	0.98%	0.36%	0.98%
bmps	NORMALE	0.97%	1.72%	1.12%	1.57%
	SKEW-NORMAL	1.12%	1.72%	1.12%	1.50%
	t St.	0.67%	1.05%	0.90%	1.42%
	SKEW-t	0.45%	1.05%	0.75%	1.27%
bnl	NORMALE	0.79%	1.25%	0.92%	1.51%
	SKEW-NORMAL	0.79%	1.38%	0.92%	1.64%
	t St.	0.46%	0.79%	0.39%	1.05%
	SKEW-t	0.59%	1.12%	0.26%	0.72%
bpu	NORMALE	1.25%	1.56%	0.63%	0.94%
	SKEW-NORMAL	1.25%	1.25%	0.63%	1.25%
	t St.	0.63%	1.25%	0.31%	0.63%
	SKEW-t	0.94%	1.25%	0.63%	0.63%
bpvn	NORMALE	1.13%	1.82%	1.19%	1.94%
	SKEW-NORMAL	1.13%	1.76%	1.13%	1.82%
	t St.	0.31%	1.00%	0.63%	1.13%
	SKEW-t	0.44%	1.19%	0.63%	1.00%
cap	NORMALE	0.74%	1.16%	1.33%	1.79%
	SKEW-NORMAL	0.88%	1.47%	1.23%	1.51%
	t St.	0.32%	0.70%	0.82%	1.41%
	SKEW-t	0.44%	0.88%	0.54%	1.14%
edn	NORMALE	0.81%	1.18%	1.51%	2.25%
	SKEW-NORMAL	1.11%	1.51%	1.11%	1.81%
	t St.	0.44%	1.03%	1.14%	1.81%
	SKEW-t	0.29%	0.92%	0.41%	0.70%

**Tabella 5.09**

**Serie dei rendimenti dei titoli Mib30 (da Alleanza a Edison): % degli scostamenti rispetto al VaR ai livelli di significatività indicati calcolati per i diversi modelli.**

TITOLI MIB30	GARCH(1,1) con distribuzione	% scostamenti al livello di significatività			
		0.50%	1.00%	99.50%	99.00%
enel	NORMALE	1.13%	1.45%	0.64%	1.13%
	SKEW-NORMAL	0.56%	1.29%	0.96%	1.37%
	t St.	0.56%	1.37%	0.24%	0.88%
	SKEW-t	0.56%	1.37%	0.24%	0.96%
eni	NORMALE	0.90%	1.52%	0.67%	1.21%
	SKEW-NORMAL	0.72%	1.07%	0.81%	1.39%
	t St.	0.58%	0.81%	0.22%	0.76%
	SKEW-t	0.58%	0.76%	0.27%	0.81%
f	NORMALE	0.74%	1.21%	1.12%	1.61%
	SKEW-NORMAL	0.94%	1.27%	0.92%	1.57%
	t St.	0.52%	0.86%	0.58%	1.12%
	SKEW-t	0.66%	0.94%	0.48%	1.00%
fnc	NORMALE	0.82%	1.18%	1.25%	1.81%
	SKEW-NORMAL	0.92%	1.55%	1.10%	1.55%
	t St.	0.70%	1.06%	0.90%	1.67%
	SKEW-t	0.58%	0.94%	0.32%	0.82%
g	NORMALE	0.78%	1.27%	0.82%	1.47%
	SKEW-NORMAL	0.54%	0.92%	1.06%	1.67%
	t St.	0.38%	0.76%	0.44%	0.98%
	SKEW-t	0.38%	0.64%	0.50%	1.02%
lux	NORMALE	1.24%	1.55%	1.04%	1.45%
	SKEW-NORMAL	0.93%	1.35%	1.35%	2.07%
	t St.	0.83%	1.45%	0.83%	1.35%
	SKEW-t	0.52%	1.14%	0.62%	1.35%
mb	NORMALE	0.58%	1.04%	1.08%	1.59%
	SKEW-NORMAL	0.72%	1.18%	0.82%	1.41%
	t St.	0.36%	0.68%	0.44%	1.16%
	SKEW-t	0.50%	0.90%	0.38%	0.92%
Med	NORMALE	0.52%	1.04%	0.95%	1.71%
	SKEW-NORMAL	0.52%	1.14%	1.09%	1.66%
	t St.	0.19%	0.57%	0.52%	0.95%
	SKEW-t	0.43%	0.85%	0.57%	1.09%
ms	NORMALE	0.53%	1.16%	1.11%	1.59%
	SKEW-NORMAL	0.82%	1.35%	0.91%	1.40%
	t St.	0.24%	0.82%	0.58%	1.20%
	SKEW-t	0.39%	0.82%	0.43%	0.96%
ntv	NORMALE	1.28%	1.76%	1.28%	2.08%
	SKEW-NORMAL	1.28%	1.76%	1.12%	1.92%
	t St.	0.64%	1.28%	0.48%	1.28%
	SKEW-t	0.96%	1.76%	0.80%	1.28%

**Tabella 5.10**

**Serie dei rendimenti dei titoli Mib30 (da *Enel* a *Antonveneta*): % degli scostamenti rispetto al *VaR* ai livelli di significatività indicati calcolati per i diversi modelli.**

TITOLI MIB30	GARCH(1,1) con distribuzione	% scostamenti al livello di significatività			
		0.50%	1.00%	99.50%	99.00%
pg	NORMALE	0.72%	1.11%	1.31%	1.77%
	SKEW-NORMAL	0.92%	1.31%	0.85%	1.44%
	t St.	0.52%	0.92%	0.52%	0.98%
	SKEW-t	0.66%	1.05%	0.39%	0.66%
R	NORMALE	0.86%	1.08%	0.94%	1.45%
	SKEW-NORMAL	0.90%	1.18%	0.82%	1.16%
	t St.	0.44%	0.92%	0.54%	1.02%
	SKEW-t	0.58%	1.00%	0.42%	0.82%
SPI	NORMALE	0.79%	1.30%	0.98%	1.58%
	SKEW-NORMAL	1.01%	1.58%	0.82%	1.23%
	t St.	0.38%	0.85%	0.60%	1.11%
	SKEW-t	0.54%	1.08%	0.44%	0.89%
spm	NORMALE	1.19%	1.67%	1.23%	1.85%
	SKEW-NORMAL	1.35%	1.81%	1.02%	1.65%
	t St.	0.72%	1.43%	0.64%	1.51%
	SKEW-t	0.90%	1.67%	0.48%	1.06%
srg	NORMALE	0.99%	1.27%	0.56%	0.99%
	SKEW-NORMAL	0.85%	0.99%	0.85%	1.27%
	t St.	0.85%	1.13%	0.14%	0.85%
	SKEW-t	0.85%	1.13%	0.14%	0.85%
stm	NORMALE	0.63%	1.31%	0.75%	1.13%
	SKEW-NORMAL	0.69%	1.25%	0.75%	1.13%
	t St.	0.25%	0.69%	0.38%	0.75%
	SKEW-t	0.31%	0.81%	0.44%	0.75%
Tim	NORMALE	0.55%	1.14%	1.02%	1.53%
	SKEW-NORMAL	0.64%	1.53%	0.76%	1.23%
	t St.	0.30%	0.59%	0.51%	1.06%
	SKEW-t	0.51%	0.89%	0.21%	0.81%
tit	NORMALE	0.74%	1.22%	1.10%	1.47%
	SKEW-NORMAL	0.74%	1.22%	0.99%	1.36%
	t St.	0.41%	0.92%	0.74%	1.25%
	SKEW-t	0.55%	0.92%	0.66%	1.22%
uc	NORMALE	0.72%	1.29%	1.33%	1.83%
	SKEW-NORMAL	1.07%	1.47%	1.13%	1.59%
	t St.	0.34%	0.91%	0.66%	1.39%
	SKEW-t	0.52%	1.09%	0.60%	1.21%

**Tabella 5.11**

**Serie dei rendimenti dei titoli Mib30 (da *SeatPG* a *Unicredit*): % degli scostamenti rispetto al *VaR* ai livelli di significatività indicati calcolati per i diversi modelli.**

TITOLI MIB30	numerosità campionaria	GARCH(1,1) con distribuzione	NUMERO DI SCOSTAMENTI ( MOLTIPLICATORE )						
			≤ 4	= 5	= 6	= 7	= 8	= 9	> 9
al	4976	NORMALE	3694	328	369	267	42	26	0
		SKEW-NORMAL	3692	432	235	271	78	18	0
		t St.	3926	259	290	233	18	0	0
		SKEW-t	3890	199	249	238	150	0	0
AUTO	574	NORMALE	324	0	0	0	0	0	0
		SKEW-NORMAL	263	61	0	0	0	0	0
		t St.	324	0	0	0	0	0	0
		SKEW-t	324	0	0	0	0	0	0
BFI	4467	NORMALE	2478	675	538	176	153	125	72
		SKEW-NORMAL	2571	568	514	327	35	112	90
		t St.	4070	137	10	0	0	0	0
		SKEW-t	3622	292	178	90	35	0	0
BIN	4980	NORMALE	3557	666	281	218	8	0	0
		SKEW-NORMAL	3070	532	403	450	246	29	0
		t St.	4332	309	62	27	0	0	0
		SKEW-t	4331	263	101	35	0	0	0
bmps	1335	NORMALE	582	106	69	200	109	19	0
		SKEW-NORMAL	582	106	69	200	109	19	0
		t St.	949	61	75	0	0	0	0
		SKEW-t	963	103	19	0	0	0	0
bnl	1524	NORMALE	866	134	224	49	1	0	0
		SKEW-NORMAL	728	252	244	49	1	0	0
		t St.	1274	0	0	0	0	0	0
		SKEW-t	1004	268	2	0	0	0	0
bpu	320	NORMALE	44	26	0	0	0	0	0
		SKEW-NORMAL	70	0	0	0	0	0	0
		t St.	70	0	0	0	0	0	0
		SKEW-t	70	0	0	0	0	0	0
bpvn	1595	NORMALE	733	319	62	100	78	53	0
		SKEW-NORMAL	726	263	92	164	78	22	0
		t St.	1129	140	54	22	0	0	0
		SKEW-t	1057	117	13	90	46	22	0
cap	4979	NORMALE	3647	534	272	201	75	0	0
		SKEW-NORMAL	3085	524	464	339	237	80	0
		t St.	4585	83	61	0	0	0	0
		SKEW-t	4313	319	97	0	0	0	0
edh	2713	NORMALE	1774	309	265	115	0	0	0
		SKEW-NORMAL	1559	205	215	258	185	41	0
		t St.	1962	229	218	54	0	0	0
		SKEW-t	1965	228	216	54	0	0	0

**Tabella 5.12**

**Serie dei rendimenti dei titoli Mib30 (da *Alleanza* a *Edison*): frequenza dei giorni in cui il moltiplicatore  $\delta$  assume ciascun livello previsto, in base agli scostamenti osservati nell'ultimo anno, per le serie degli indici di mercato.  $\alpha = 1\%$**

TITOLI MIB30	numerosità campionaria	GARCH(1,1) con distribuzione	NUMERO DI SCOSTAMENTI ( MOLTIPLICATORE )						
			≤ 4	= 5	= 6	= 7	= 8	= 9	> 9
enel	1244	NORMALE	662	215	85	32	0	0	0
		SKEW-NORMAL	877	66	51	0	0	0	0
		t St.	817	118	51	8	0	0	0
		SKEW-t	817	118	51	8	0	0	0
eni	2233	NORMALE	1275	287	246	163	12	0	0
		SKEW-NORMAL	1585	281	102	15	0	0	0
		t St.	1810	116	57	0	0	0	0
		SKEW-t	1810	116	57	0	0	0	0
f	4978	NORMALE	3557	414	441	144	92	76	4
		SKEW-NORMAL	3458	540	448	49	51	44	138
		t St.	4382	181	165	0	0	0	0
		SKEW-t	4187	328	181	32	0	0	0
fnc	4979	NORMALE	3748	254	385	249	93	0	0
		SKEW-NORMAL	2866	703	363	465	266	66	0
		t St.	4069	387	192	71	10	0	0
		SKEW-t	4125	498	96	10	0	0	0
g	4979	NORMALE	3838	381	130	127	188	26	39
		SKEW-NORMAL	4474	185	70	0	0	0	0
		t St.	4729	0	0	0	0	0	0
		SKEW-t	4729	0	0	0	0	0	0
lux	966	NORMALE	347	96	53	89	129	2	0
		SKEW-NORMAL	370	96	65	137	46	2	0
		t St.	370	103	89	152	2	0	0
		SKEW-t	410	139	96	69	2	0	0
mb	4980	NORMALE	3914	581	106	75	54	0	0
		SKEW-NORMAL	3688	375	416	197	54	0	0
		t St.	4561	115	54	0	0	0	0
		SKEW-t	4383	218	75	54	0	0	0
Med	2107	NORMALE	1527	243	87	0	0	0	0
		SKEW-NORMAL	1457	274	126	0	0	0	0
		t St.	1857	0	0	0	0	0	0
		SKEW-t	1812	45	0	0	0	0	0
ms	2077	NORMALE	1386	160	122	112	47	0	0
		SKEW-NORMAL	1335	232	14	148	87	11	0
		t St.	1573	92	65	91	6	0	0
		SKEW-t	1573	92	65	91	6	0	0
ntv	624	NORMALE	137	146	91	0	0	0	0
		SKEW-NORMAL	137	146	91	0	0	0	0
		t St.	374	0	0	0	0	0	0
		SKEW-t	137	146	91	0	0	0	0

**Tabella 5.13**

Serie dei rendimenti dei titoli Mib30 (da *Enel* a *Antonveneta*): frequenza dei giorni in cui il moltiplicatore  $\delta$  assume ciascun livello previsto, in base agli scostamenti osservati nell'ultimo anno, per le serie degli indici di mercato.  $\alpha = 1\%$

TITOLI MIB30	numerosità campionaria	GARCH(1,1) con distribuzione	NUMERO DI SCOSTAMENTI ( MOLTIPLICATORE )						
			≤ 4	= 5	= 6	= 7	= 8	= 9	> 9
pg	1526	NORMALE	1010	192	74	0	0	0	0
		SKEW-NORMAL	891	151	24	127	9	74	0
		t St.	1276	0	0	0	0	0	0
		SKEW-t	1202	74	0	0	0	0	0
R	4981	NORMALE	4022	469	240	0	0	0	0
		SKEW-NORMAL	3929	465	270	67	0	0	0
		t St.	4366	235	130	0	0	0	0
		SKEW-t	4126	322	249	34	0	0	0
SPI	3160	NORMALE	2288	314	134	128	12	34	0
		SKEW-NORMAL	1740	594	346	180	10	32	8
		t St.	2687	181	42	0	0	0	0
		SKEW-t	2646	87	102	75	0	0	0
spm	4978	NORMALE	3072	324	401	525	111	235	60
		SKEW-NORMAL	2615	627	439	545	207	235	60
		t St.	3293	463	489	423	36	24	0
		SKEW-t	2790	824	503	226	209	152	24
srg	710	NORMALE	306	71	83	0	0	0	0
		SKEW-NORMAL	358	102	0	0	0	0	0
		t St.	358	102	0	0	0	0	0
		SKEW-t	358	102	0	0	0	0	0
stm	1599	NORMALE	1128	221	0	0	0	0	0
		SKEW-NORMAL	1264	85	0	0	0	0	0
		t St.	1349	0	0	0	0	0	0
		SKEW-t	1349	0	0	0	0	0	0
Tim	2360	NORMALE	1812	218	63	17	0	0	0
		SKEW-NORMAL	1437	235	58	164	152	47	17
		t St.	2110	0	0	0	0	0	0
		SKEW-t	1990	76	44	0	0	0	0
tit	2716	NORMALE	1719	292	210	108	109	26	2
		SKEW-NORMAL	1658	353	210	108	109	26	2
		t St.	1953	368	116	10	19	0	0
		SKEW-t	1942	241	191	90	2	0	0
uc	4967	NORMALE	3579	509	286	266	77	0	0
		SKEW-NORMAL	3403	510	224	208	120	95	157
		t St.	4124	448	145	0	0	0	0
		SKEW-t	3874	455	311	77	0	0	0

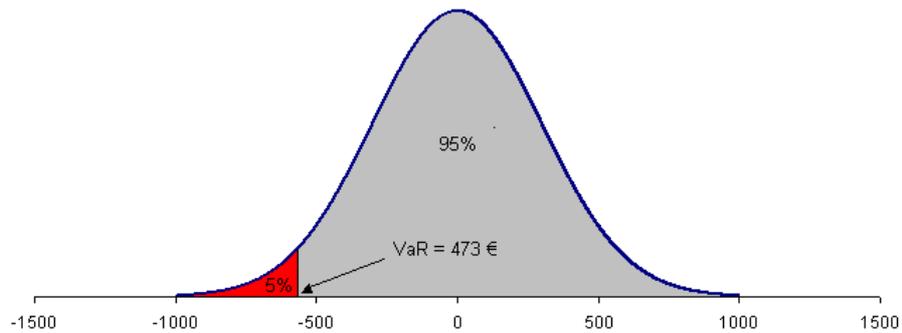
**Tabella 5.14**

Serie dei rendimenti dei titoli Mib30 (da *SeatPG* a *Unicredit*): frequenza dei giorni in cui il moltiplicatore  $\delta$  assume ciascun livello previsto, in base agli scostamenti osservati nell'ultimo anno, per le serie degli indici di mercato.

$$\alpha = 1\%$$

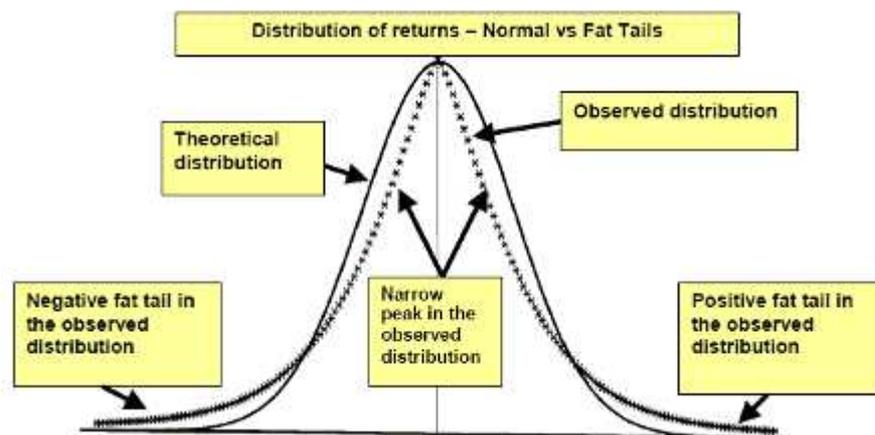
# Appendice B

## FIGURE



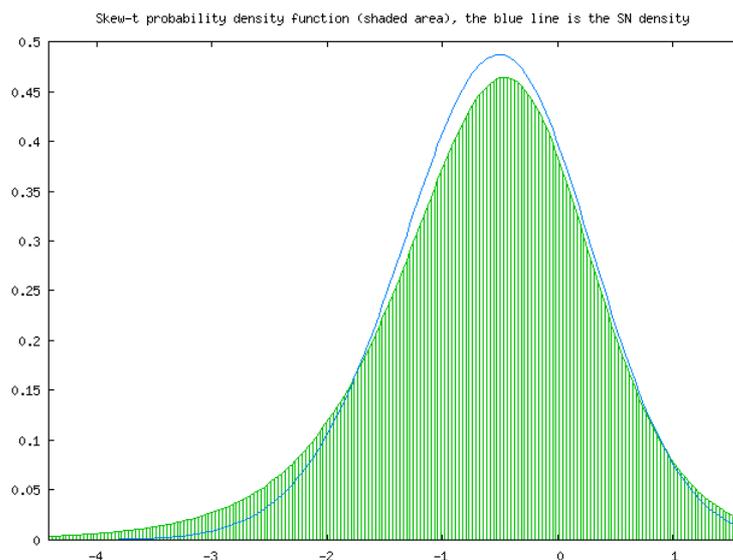
**Figura 3.01**

Valore a Rischio di un certo portafoglio su un periodo di detenzione  $t$ , con probabilità del 95%. Si ipotizza una distribuzione normale per i rendimenti di portafoglio.



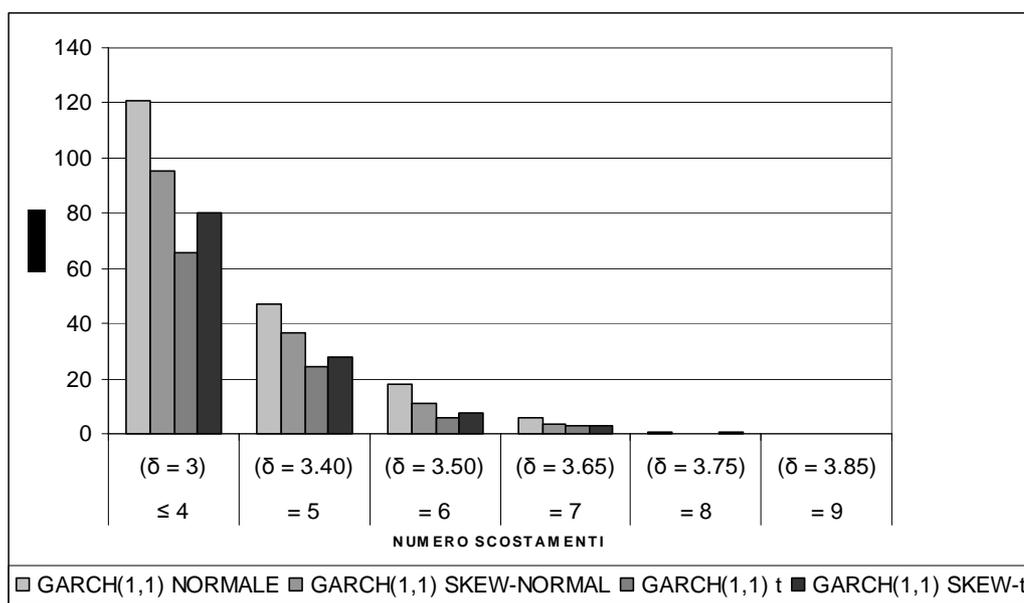
**Figura 3.02**

Esempio di distribuzione dei rendimenti con code pesanti.  
(Fonte: [www.performancetrading.it](http://www.performancetrading.it))



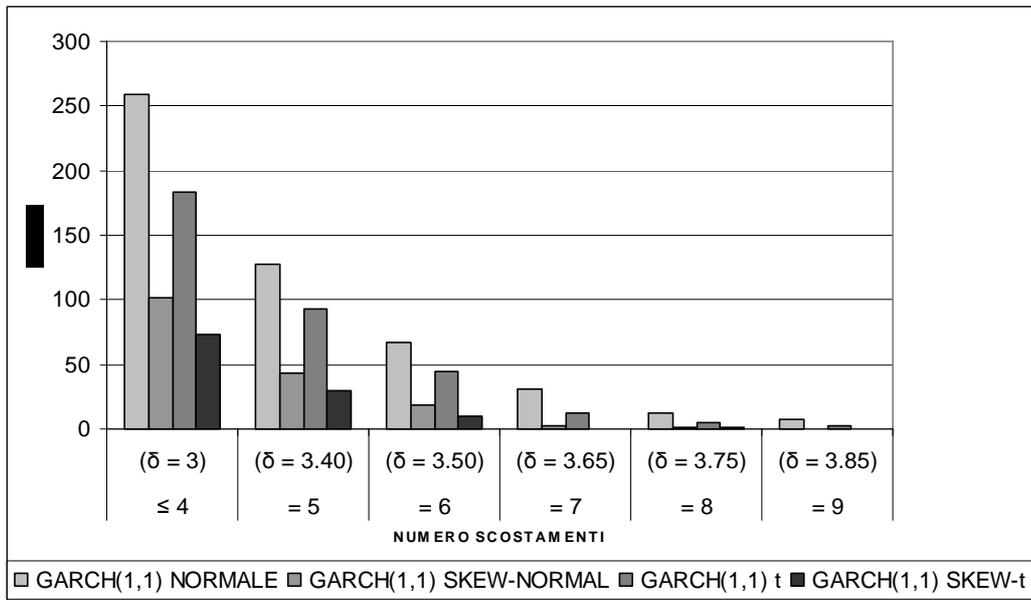
**Figura 3.03**

**Esempio di distribuzione con asimmetria negativa. Sul medesimo grafico, la curva rappresenta una *Skew-Normal*(0,1,-1), mentre l'area colorata rappresenta una *Skew-t*(0,1,-1,7).**



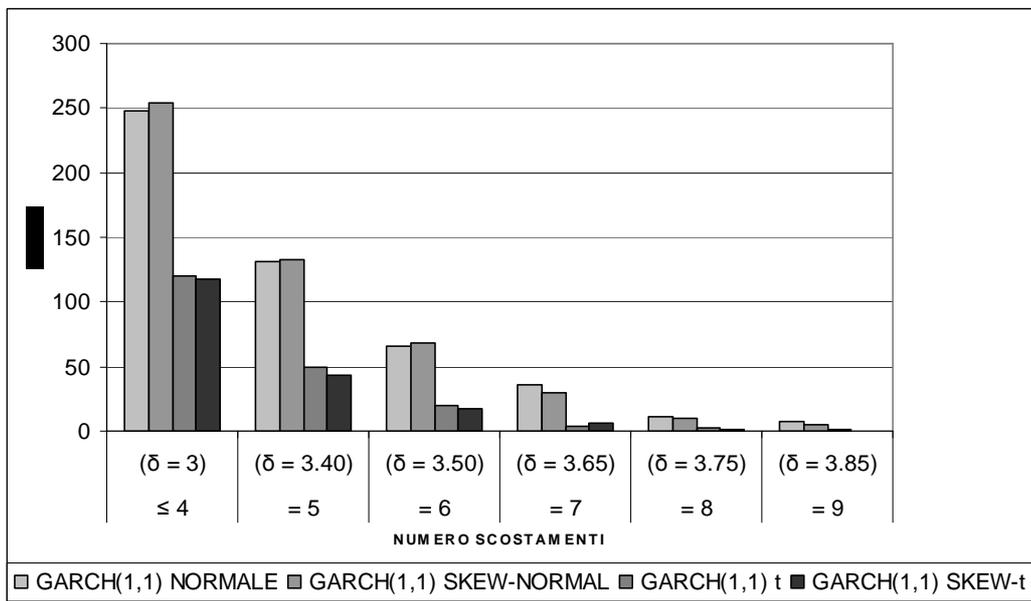
**Figura 4.01**

**Media dei giorni in cui il moltiplicatore  $\delta$  assume ciascun livello in base agli scostamenti osservati nell'ultimo anno. Stime di ciascun modello per 500 replicazioni di lunghezza 2000 da un *GARCH*(1,1) Normale.  $\alpha = 1\%$**



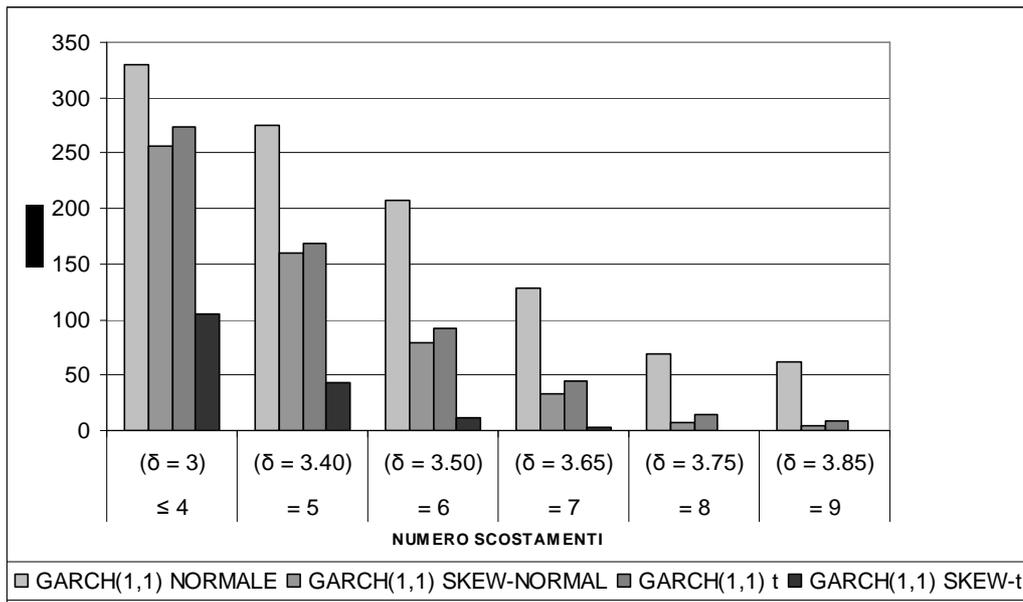
**Figura 4.02**

Media dei giorni in cui il moltiplicatore  $\delta$  assume ciascun livello in base agli scostamenti osservati nell'ultimo anno. Stime di ciascun modello per 500 replicazioni di lunghezza 2000 da un *GARCH(1,1) Skew-Normal*.  $\alpha = 1\%$



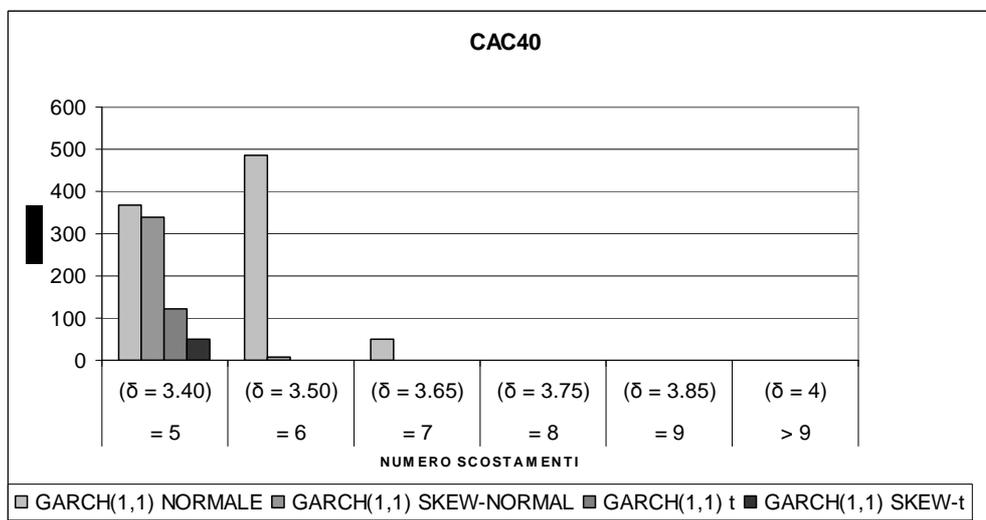
**Figura 4.03**

Media dei giorni in cui il moltiplicatore  $\delta$  assume ciascun livello in base agli scostamenti osservati nell'ultimo anno. Stime di ciascun modello per 500 replicazioni di lunghezza 2000 da un *GARCH(1,1) t*.  $\alpha = 1\%$



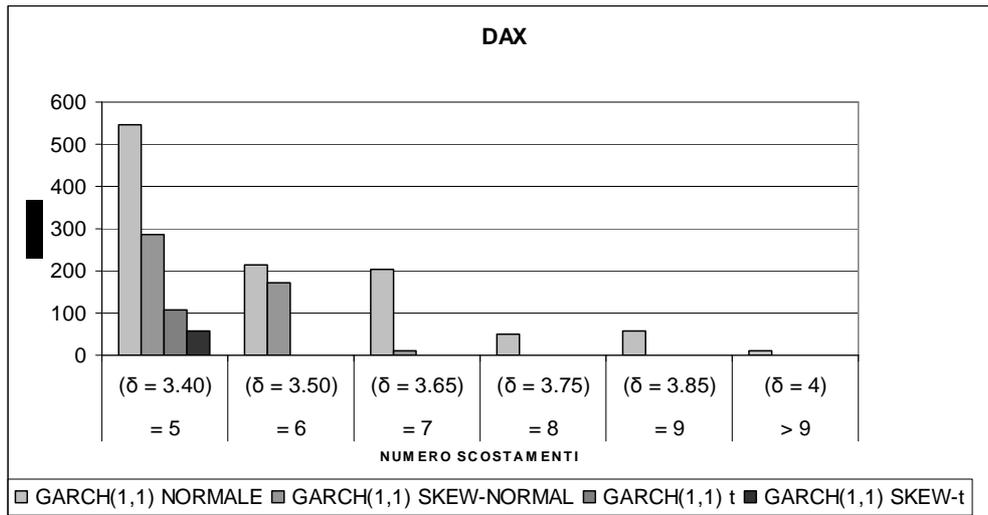
**Figura 4.04**

Media dei giorni in cui il moltiplicatore  $\delta$  assume ciascun livello in base agli scostamenti osservati nell'ultimo anno. Stime di ciascun modello per 500 replicazioni di lunghezza 2000 da un *GARCH(1,1) Skew-t*.  $\alpha = 1\%$



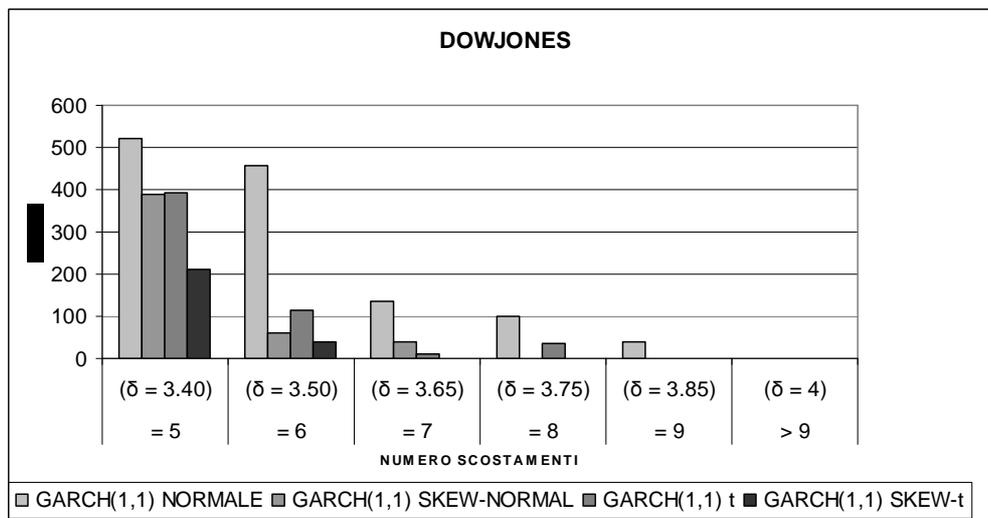
**Figura 5.01**

Frequenza dei giorni in cui il moltiplicatore  $\delta$  assume ciascun livello, in base agli scostamenti osservati nell'ultimo anno, per la serie indicata.  $\alpha = 1\%$



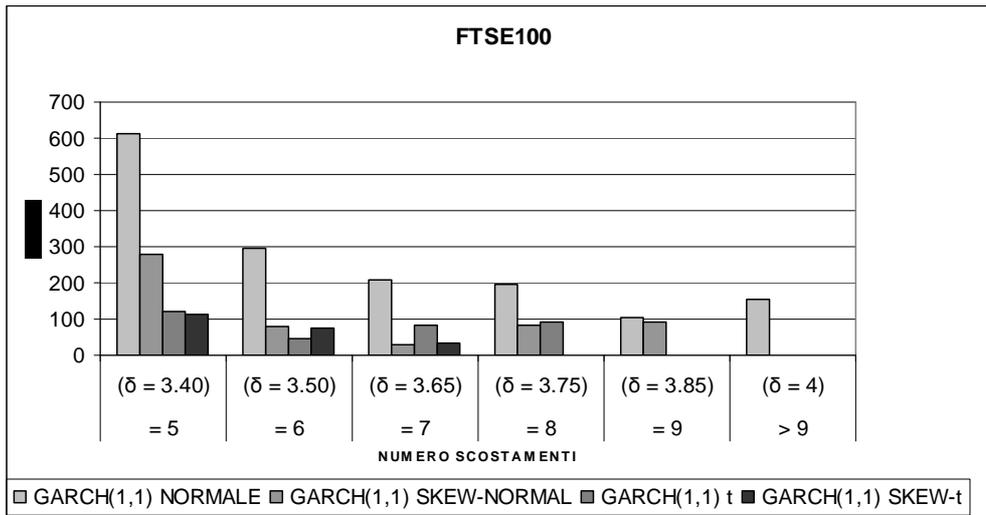
**Figura 5.02**

**Frequenza dei giorni in cui il moltiplicatore  $\delta$  assume ciascun livello, in base agli scostamenti osservati nell'ultimo anno, per la serie indicata.  $\alpha = 1\%$**



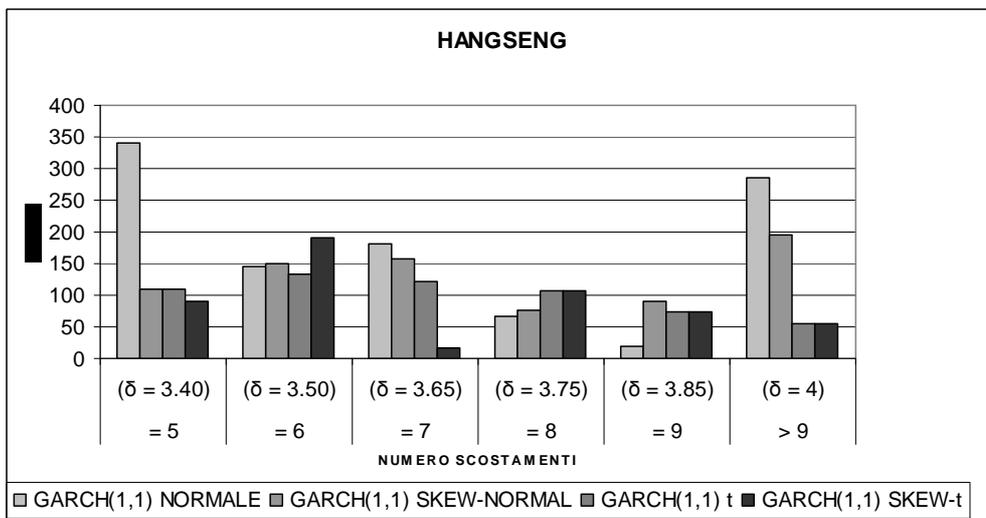
**Figura 5.03**

**Frequenza dei giorni in cui il moltiplicatore  $\delta$  assume ciascun livello, in base agli scostamenti osservati nell'ultimo anno, per la serie indicata.  $\alpha = 1\%$**



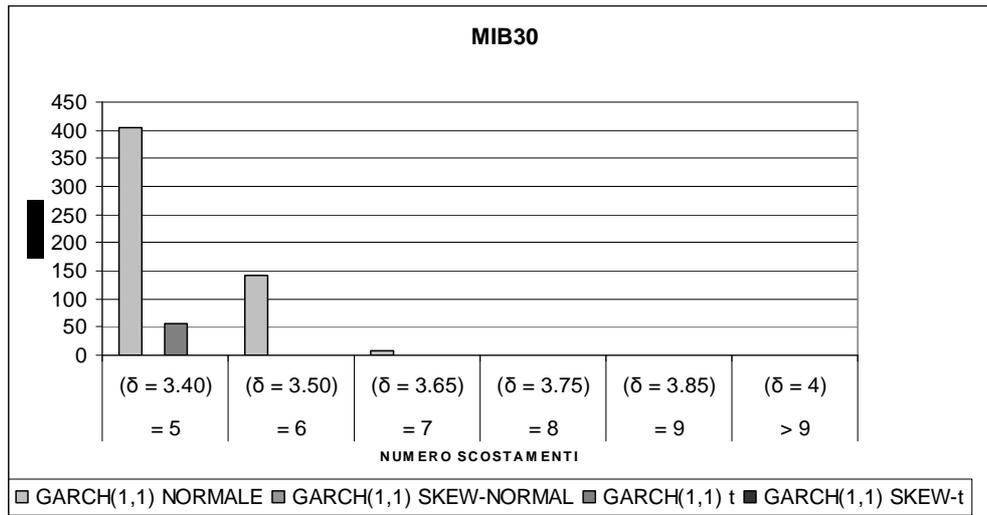
**Figura 5.04**

Frequenza dei giorni in cui il moltiplicatore  $\delta$  assume ciascun livello, in base agli scostamenti osservati nell'ultimo anno, per la serie indicata.  $\alpha = 1\%$



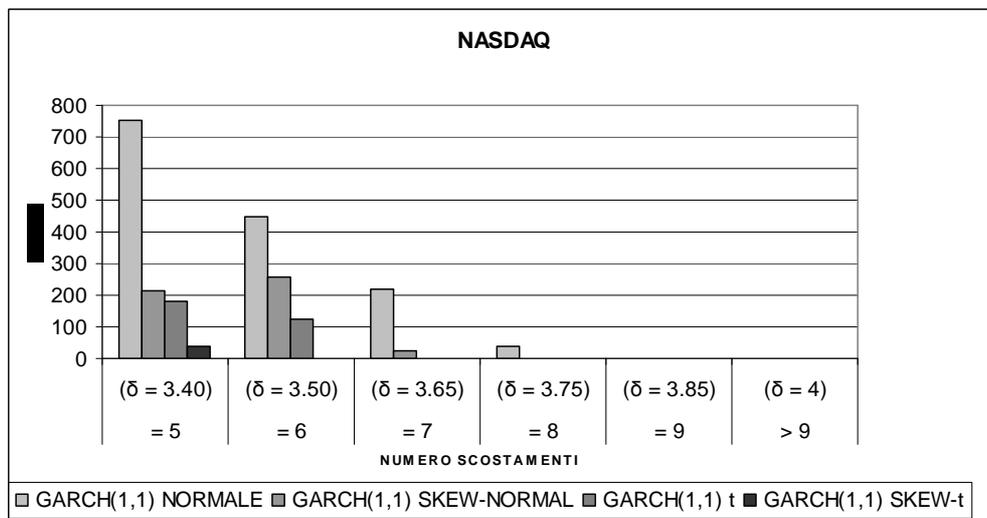
**Figura 5.05**

Frequenza dei giorni in cui il moltiplicatore  $\delta$  assume ciascun livello, in base agli scostamenti osservati nell'ultimo anno, per la serie indicata.  $\alpha = 1\%$



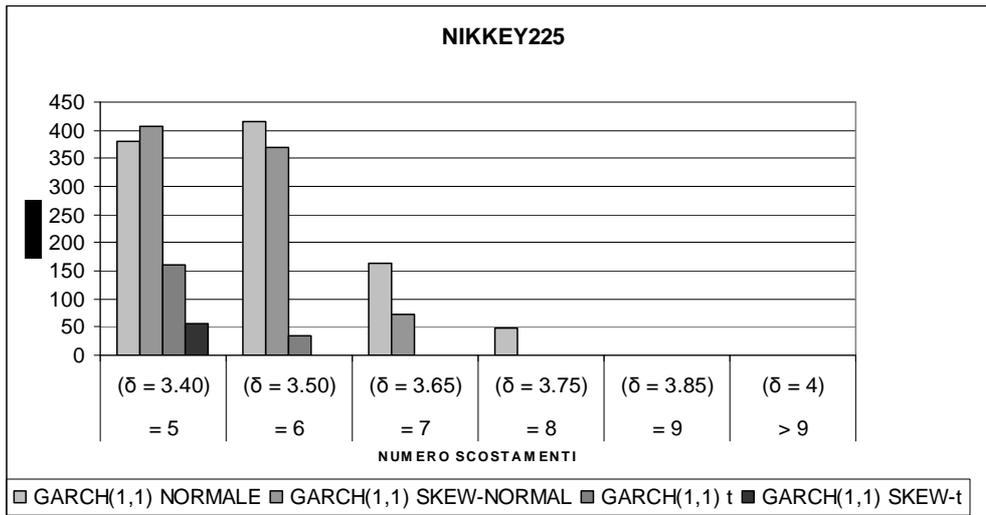
**Figura 5.06**

**Frequenza dei giorni in cui il moltiplicatore  $\delta$  assume ciascun livello, in base agli scostamenti osservati nell'ultimo anno, per la serie indicata.**  
 $\alpha = 1\%$



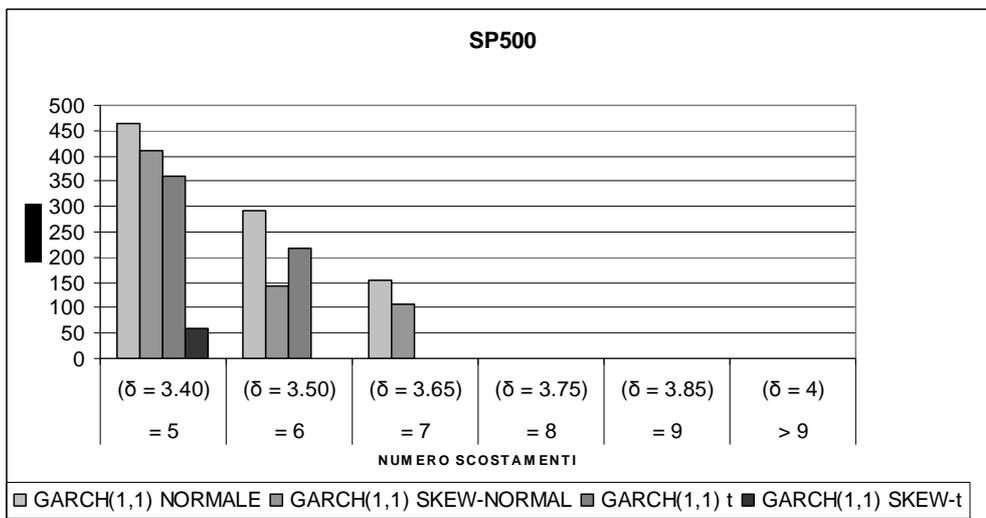
**Figura 5.07**

**Frequenza dei giorni in cui il moltiplicatore  $\delta$  assume ciascun livello, in base agli scostamenti osservati nell'ultimo anno, per la serie indicata.**  
 $\alpha = 1\%$



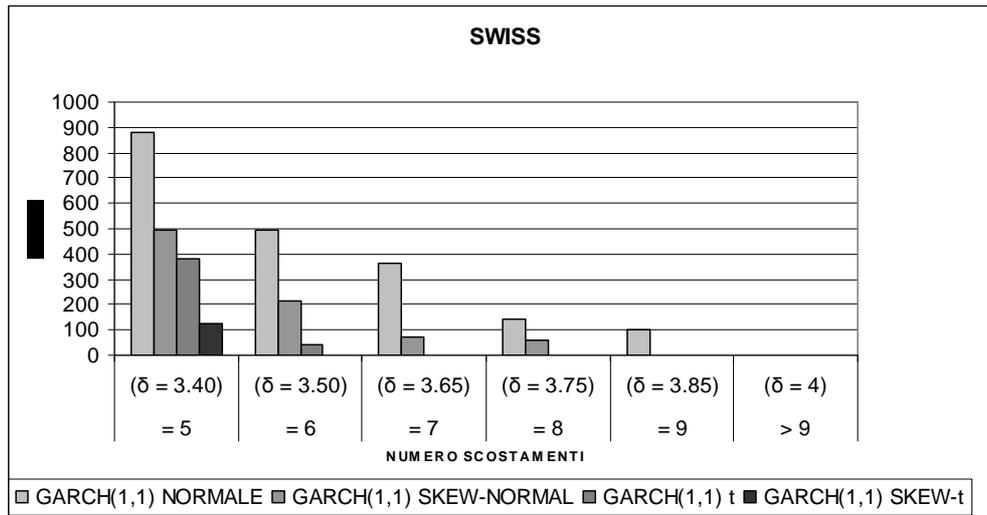
**Figura 5.08**

Frequenza dei giorni in cui il moltiplicatore  $\delta$  assume ciascun livello, in base agli scostamenti osservati nell'ultimo anno, per la serie indicata.  $\alpha = 1\%$



**Figura 5.09**

Frequenza dei giorni in cui il moltiplicatore  $\delta$  assume ciascun livello, in base agli scostamenti osservati nell'ultimo anno, per la serie indicata.  $\alpha = 1\%$



**Figura 5.10**

**Frequenza dei giorni in cui il moltiplicatore  $\delta$  assume ciascun livello, in base agli scostamenti osservati nell'ultimo anno, per la serie indicata.**  
 $\alpha = 1\%$



# BIBLIOGRAFIA

- A. AZZALINI, A. CAPITANIO (1998) “Statistical applications of the multivariate skew-normal distribution” *J. Roy. Statist. Soc., series B*, vol 61, no. 3
- A. AZZALINI (2005) “The skew-normal distribution and related multivariate families” *Scandinavian Journal of Statistics*
- A. AZZALINI, A. CAPITANIO (2002) “Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew t distribution” *J. Roy. Statist. Soc., series B*, vol 65, pp. 367-389
- J. BAI, S. NG (2001) “Test for skewness, kurtosis, and normality for time series data”
- J. BAI, S. NG (2001) “A consistent test for conditional symmetry in time series models” *Journal of Econometrics* 103 (2001) 225–258
- BERA A.K. E HIGGINS M.L. (1993), “A survey of Arch Models: properties, estimation and testing” *Journal of Economic Surveys*, v.7, n.4.
- A. BERA, G. PREMARATNE, (2005) “A test for symmetry with leptokurtic financial data” *Journal of financial economics*, 2005, Vol. 3, No. 2, 169-187
- BOLLERSLEV T., CHOU R.Y. E KRONER K.F. (1992), “ARCH modelling in finance. A review of the theory and empirical evidence” *Journal of Econometrics*, v.52.
- D. CHALLET, M. MARSILI, Y. ZHANG “Stylized facts of financial markets and market crashes in Minority Games”
- J. CHEN, H. HONG, J.C. STEIN (2000) “Forecasting Crashes: Trading Volume, Past Returns and Conditional Skewness in Stock Prices”
- R. CONT (2001) “Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues”
- R. ENGLE, A. PATTON (2001) “What good is a volatility model?”
- J.B. FRANCH, A. PEIRO (2003) “Conditional and unconditional asymmetry in U.S. macroeconomic time series” *Studies in nonlinear dynamics & econometrics*, Vol. 7, Issue 1, Art. 4

- C. GRANGER (2003) "Time Series Concepts for Conditional Distributions"  
 OXFORD BULLETIN OF ECONOMICS AND STATISTICS, 65,  
 SUPPLEMENT (2003) 0305-9049
- T.H. KIM, H. WHITE (2003) "On more robust estimation of skewness and kurtosis"  
 Finance Research Letters 1 (2004) 56-73
- C. LAMOUREUX, W. LATRASPE (1990) "Heteroskedasticity in stock return  
 data: volume versus GARCH effects" The journal of finance, vol. 45, no. 1, 221-  
 229
- F. LISI (2006) "Testing asymmetry in financial time series"
- A. PEIRO (1998) "Skewness in financial returns" Journal of Banking & Finance 23  
 (1999) 847±862
- A. PEIRO (2001) "Asymmetries and tails in stock index returns: are their  
 distributions really asymmetric?"
- G. PREMARATNE, A. BERA (2001) "Adjusting the Tests for Skewness and  
 Kurtosis for Distributional Misspecifications"
- N. Sartori (2003) "Bias prevention of maximum likelihood estimates: skew normal  
 and skew t distributions"
- G.GALLO, B. PACINI "Metodi quantitative per I mercati finanziari" edito Carocci
- TSAY R. (2002), "Analysis of Financial Time Series", Wiley.
- BARROW R. "Volatility" (pag. 23-58).
- GOURIEROUX C. (1997), "ARCH Models and Financial Applications", Springer

# RINGRAZIAMENTI

La vita è fatta di scelte e le scelte si fanno sulla base della fiducia: fiducia nelle persone con cui ci relazioniamo, fiducia negli eventi che si susseguono attorno a noi e che ci coinvolgono direttamente o meno, fede in Dio e nel destino di cui siamo testimoni. Per quanto significativo o insignificante possa essere il grado di fiducia che decidiamo di riporre alla base delle nostre scelte, la sintesi che se ne ottiene è unica e inconfondibile: noi stessi!

Io sono il frutto di un naturale istinto di sopravvivenza e al tempo stesso il risultato di una razionale architettura di decisioni!

Il primo pensiero va alla mia famiglia e al sostegno che da essa ho ricevuto, sempre e comunque, nell'arco di questi 25 anni.

Esprimo la mia gratitudine a tutte le persone che hanno contribuito con tanta pazienza alla realizzazione di questa tesi, in particolar modo al mio relatore, Prof. Lisi Francesco, per avermi sostenuto e guidato con tanta pazienza nella realizzazione di questo lavoro.

Un ringraziamento sentito al mio correlatore, Prof. Azzalini Adelchi, per l'aiuto ricevuto in merito alle distribuzioni asimmetriche.

Un saluto, con affetto, a tutti i miei colleghi e compagni di facoltà: grazie per i bei momenti vissuti assieme e per il sostegno reciproco nei momenti di difficoltà.

andrea bertazzo