

Università degli Studi di Padova – Dipartimento di Ingegneria Industriale

Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica

Relazione per la prova finale
«MODELLAZIONE DI UN SISTEMA
ISTERETICO SOTTOPOSTO A
FORZANTE STOCASTICA»

Relatrice: Prof.ssa Pomaro Beatrice

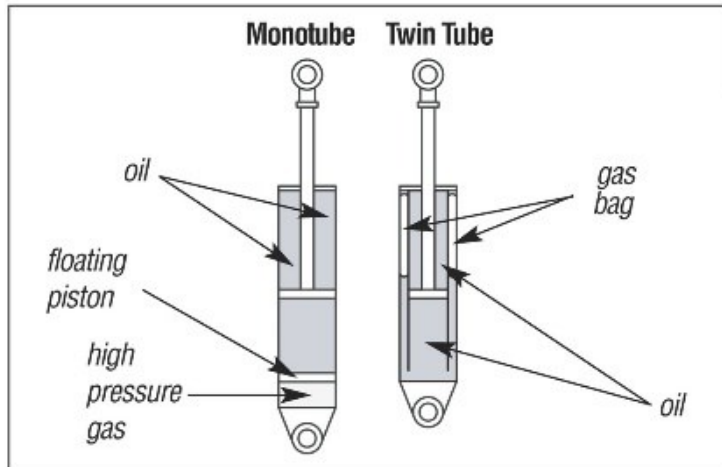
Correlatore: Prof. Gianluca Mazzucco

Laureando: *Fornasari Davide*

Padova, 26/09/2023

- INTRODUZIONE
- APPLICAZIONE INGEGNERISTICA
- METODO UTILIZZATO
- VARIAZIONE DEL RAPPORTO DI RIGIDEZZA α
- VARIAZIONE DEL PARAMETRO ν
- VARIAZIONE DEL PARAMETRO γ
- VARIAZIONE DEL LIVELLO DI RUMORE BIANCO S_0
- VARIAZIONE DEL RAPPORTO DI SMORZAMENTO ζ
- CONCLUSIONI

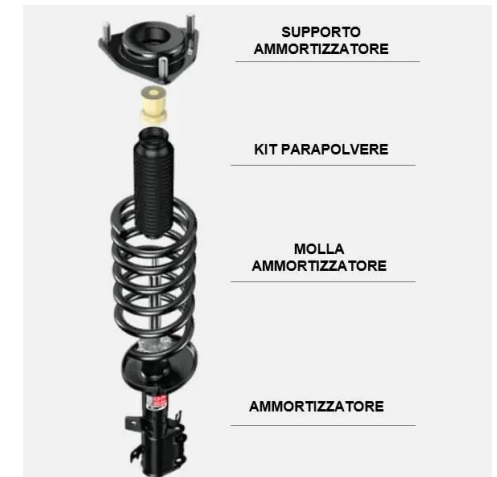
Rappresentazione di un generico sistema di ammortizzazione con i principali componenti.



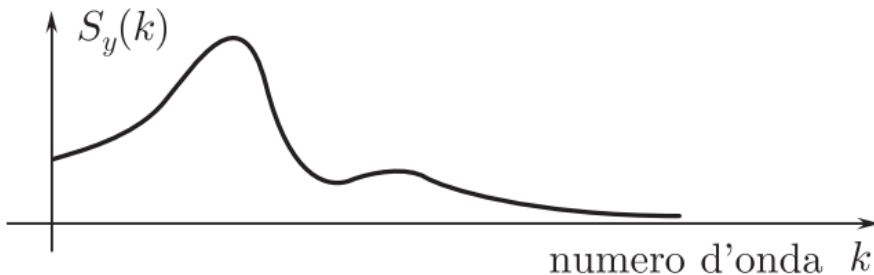
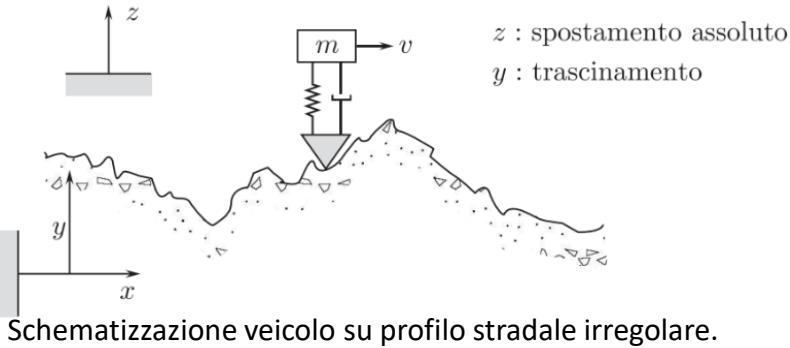
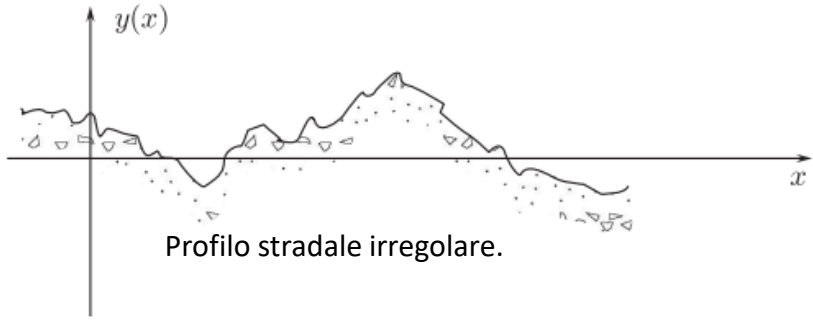
❑ Sistema di ammortizzazione:



- Supporto ammortizzatore.
- Molla elicoidale, balestre.
- Ammortizzatore.



❑ **OBBIETTIVO:** L'obiettivo del presente studio è lo studio dei principali momenti statistici di un sistema isteretico ad un grado di libertà sottoposto a forzante aleatoria di tipo Bouc-Wen. Il lavoro prevede l'implementazione di una adeguata formulazione di linearizzazione statistica del sistema e la valutazione della bontà della soluzione attraverso il confronto con la soluzione data da una risoluzione di tipo Monte Carlo del problema.



Densità spettrale del profilo stradale in funzione dei numeri d'onda.

L'equazione del moto è:

$$m\ddot{z} + c(\dot{z} - \dot{y}) + k(z - y) = 0$$

ovvero:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = ky + c\dot{y}$$

dove:

m = massa del sistema

k = rigidezza del sistema

c = smorzamento del sistema

z = spostamento assoluto

y = trascinamento.

La densità spettrale della risposta del sistema è:

$$S_z(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_y(\omega)$$

dove:

$$H(j\omega) = \frac{k + j\omega c}{k - m\omega^2 + j\omega c}$$

è la funzione di trasferimento

$$S_y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

è la densità spettrale dell'ingresso rispetto al tempo

$$R_y(\tau) = E[y(t)y(t + \tau)]$$

è la funzione di autocorrelazione temporale.

Si considera una funzione di autocorrelazione spaziale:

$$R_y(X) = E[y(x)y(x + X)]$$

dove:

X è l'intervallo spaziale.

L'integrale di Fourier di $R_y(X)$ è la densità spettrale:

$$S_y(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_y(X)e^{-jkX} dX.$$

Assumendo che il moto del veicolo sia a velocità costante v :

$$\tau = \frac{X}{v}$$

dalla formulazione del periodo:

$$T = \frac{\lambda}{v}$$

dove:

λ è la lunghezza d'onda

la relazione tra pulsazione e numero d'onda è espressa come segue:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = v \frac{2\pi}{\lambda} = vk$$

dove:

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ è il numero d'onda.

Sostituendo la relazione tra pulsazione e numero d'onda nella formula della densità spettrale si ottiene:

$$S_y(\omega = vk) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_y\left(\tau = \frac{X}{v}\right) e^{-j(vk)\left(\frac{X}{v}\right)} \frac{1}{v} dX = \frac{1}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} R_y(X) e^{-jkX} dX$$

E ricordando che:

$$S_y(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_y(X) e^{-jkX} dX$$

Si ottiene:

$$S_y(\omega = vk) = \frac{1}{v} S_y(k)$$

Quindi la densità spettrale $S_y(\omega)$ può essere ottenuta direttamente dalla densità spettrale spaziale $S_y(k)$ dal profilo della superficie.

- Non linearità difficile da trattare in presenza di forzante aleatoria → Si ricorre al metodo della linearizzazione statistica.



Le risposte statistiche sono ottenute risolvendo l'equazione differenziale della matrice delle covarianze di Lyapunov.

- Vantaggi
 - Maggiore semplicità formulazione.
 - Può essere esteso a sistemi a più gradi di libertà.

- Si verifica la precisione o accuratezza del metodo confrontandolo con le simulazioni date dal metodo Monte-Carlo per un certo numero di realizzazioni della forzante aleatoria.

- Modello Bouc-Wen
 - $m\ddot{x} + c\dot{x} + \alpha kx + (1 - \alpha)kz = f(t)$
 - $\dot{z} = -\gamma|\dot{x}|z - \nu\dot{x}|z| + A\dot{x}$

Dividendo per la massa si ottiene:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \alpha\omega_n^2x + (1 - \alpha)\omega_n^2z = \frac{f(t)}{m}$$

dove:

ζ è il rapporto di smorzamento

ω_n è la frequenza naturale del sistema

α è il rapporto di rigidità

c è lo smorzamento.

La relazione tra frequenza naturale del sistema e rapporto di smorzamento è dato da:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{c}{2m\zeta}$$

Linearizzando il sistema si ottiene:

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \alpha kx + (1 - \alpha)kz = f(t)$$

e

$$\dot{z} + c_e\dot{x} + k_ez = 0$$

dove c_e e k_e sono le quantità equivalenti [1]:

$$c_e = -E \left\{ \frac{\partial G(\dot{x}, z)}{\partial \dot{x}} \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\gamma \frac{\sigma_{\dot{x}z}}{\sigma_{\dot{x}}^2} + \nu \sigma_z^2 \right) - A \quad \text{e} \quad k_e = -E \left\{ \frac{\partial G(\dot{x}, z)}{\partial z} \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\gamma \sigma_{\dot{x}}^2 + \nu \frac{\sigma_{\dot{x}z}}{\sigma_z^2} \right).$$

[1] Nonstationary Stochastic Response of Hysteretic Systems Endowed With Fractional Derivative Elements

Le varianze di spostamento, velocità e della variabile isteretica vengono calcolate dal sistema linearizzato risolvendo l'equazione delle matrici delle varianze di Lyapunov:

$$\dot{V} = \mathbf{G}V^T + V\mathbf{G}^T + \mathbf{D}$$

$$\text{Dove: } D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\pi S_0}{m} \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{x\dot{x}} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{\dot{x}x} & \sigma_z^2 & \sigma_{\dot{x}z} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{z\dot{x}} & \sigma_{\dot{x}}^2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-k_{eq}}{m} & \frac{-c_{eq}}{m} \\ \frac{-\alpha\omega_n^2}{m} & \frac{-(1-\alpha)\omega_n^2}{m} & \frac{-2\zeta\omega_n}{m} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Quindi risolvendo: } \dot{V} &= \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_x^2 & \dot{\sigma}_{x\dot{x}} & \dot{\sigma}_{xz} \\ \dot{\sigma}_{\dot{x}x} & \dot{\sigma}_z^2 & \dot{\sigma}_{\dot{x}z} \\ \dot{\sigma}_{zx} & \dot{\sigma}_{z\dot{x}} & \dot{\sigma}_{\dot{x}}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-k_{eq}}{m} & \frac{-c_{eq}}{m} \\ \frac{-\alpha\omega_n^2}{m} & \frac{-(1-\alpha)\omega_n^2}{m} & \frac{-2\zeta\omega_n}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{x\dot{x}} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{x\dot{x}} & \sigma_z^2 & \sigma_{z\dot{x}} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{z\dot{x}} & \sigma_{\dot{x}}^2 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{x\dot{x}} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{\dot{x}x} & \sigma_z^2 & \sigma_{\dot{x}z} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{z\dot{x}} & \sigma_{\dot{x}}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-\alpha\omega_n^2}{m} \\ 0 & \frac{-k_{eq}}{m} & \frac{-(1-\alpha)\omega_n^2}{m} \\ 1 & \frac{-c_{eq}}{m} & \frac{-2\zeta\omega_n}{m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\pi S_0}{m} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Si considerano sei equazioni dalle nove disponibili, in quanto si vuole avere equazioni linearmente indipendenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\dot{x}}^2 = 2\sigma_{xz} \\ \sigma_{\dot{x}\dot{x}} = \sigma_{\dot{x}z} + \frac{-k_{eq}}{m}\sigma_{x\dot{x}} + \frac{-c_{eq}}{m}\sigma_{xz} \\ \sigma_{\dot{x}z} = \sigma_{\dot{x}}^2 + \frac{-\alpha\omega_n^2}{m}\sigma_x^2 + \frac{-(1-\alpha)\omega_n^2}{m}\sigma_{x\dot{x}} + \frac{-2\zeta\omega_n}{m}\sigma_{xz} \\ \\ \sigma_z^2 = \frac{-2k_{eq}}{m}\sigma_z^2 + \frac{-c_{2eq}}{m}\sigma_{xz} \\ \sigma_{z\dot{x}} = \frac{-\alpha\omega_n^2}{m}\sigma_{x\dot{x}} + \frac{-(1-\alpha)\omega_n^2}{m}\sigma_z^2 + \frac{-2\zeta\omega_n}{m}\sigma_{\dot{x}z} + \frac{-k_{eq}}{m}\sigma_{z\dot{x}} + \frac{-c_{eq}}{m}\sigma_{\dot{x}z} \\ \sigma_{\dot{x}}^2 = \frac{-2\alpha\omega_n^2}{m}\sigma_{zx} + \frac{-2(1-\alpha)\omega_n^2}{m}\sigma_{z\dot{x}} + \frac{-4\zeta\omega_n}{m}\sigma_{\dot{x}}^2 + \frac{2\pi S_0}{m} \end{array} \right.$$

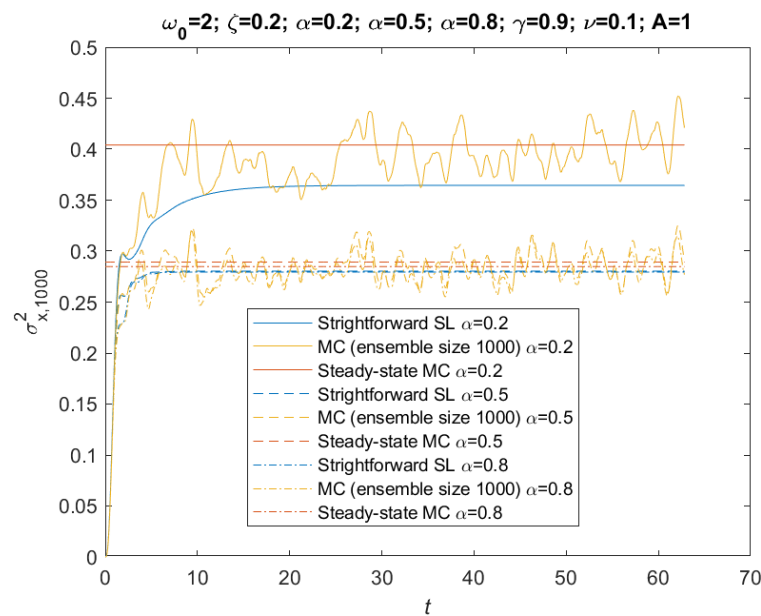
I risultati ottenuti dalla risoluzione di questo sistema verranno confrontati con la definizione teorica della varianza dello

spostamento e della velocità: $\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{nn} x_i^2}{nn}$ e $\sigma_{\dot{x}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{nn} \dot{x}_i^2}{nn}$.

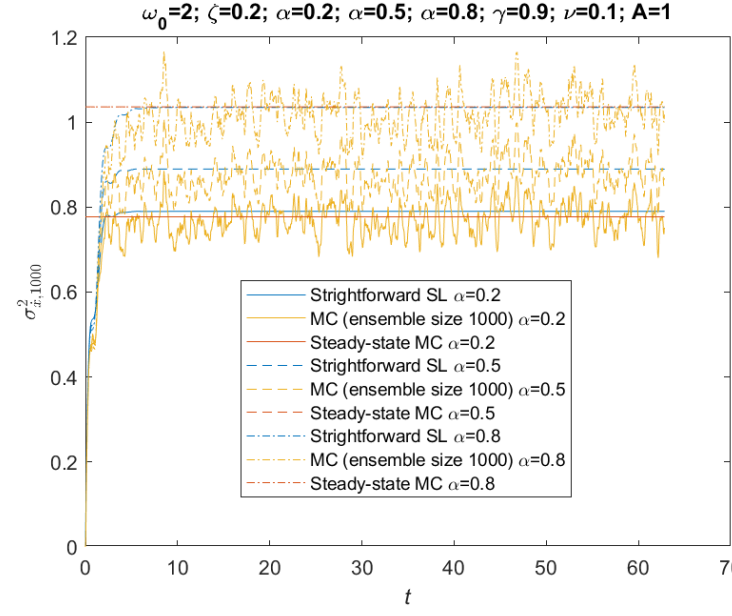


Ottenute risolvendo nn volte l'equazione dell'oscillatore e aggiungendo i quadrati degli spostamenti ottenuti per le nn realizzazioni di white noise, forza dinamica random, a cui è sottoposta la sospensione.

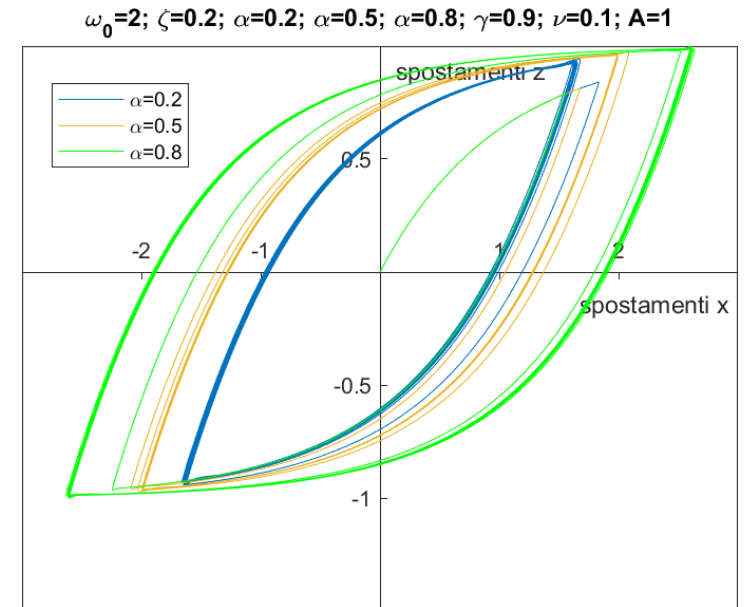
I parametri costanti sono: $S_0 = 0.3$, $k = 4$, $\zeta = 0.2$, $m = 1$, $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4}{1}} = 2$, $c = 2\zeta m \omega_n = 0.8$, $\gamma = 0.9$, $\nu = 0.1$ e $A = 1$.
 Il parametro α ha invece assunto i seguenti valori: $\alpha = 0,2$ $\alpha = 0,5$ $\alpha = 0,8$.



Grafici relativi alla varianza dello spostamento in base alla variazione di α



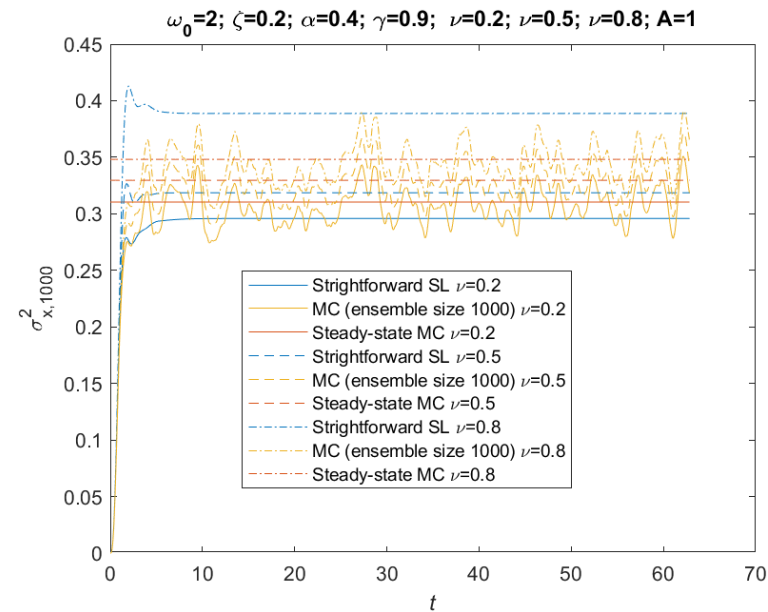
Grafici relativi alla varianza dello spostamento e della velocità in base alla variazione di α .



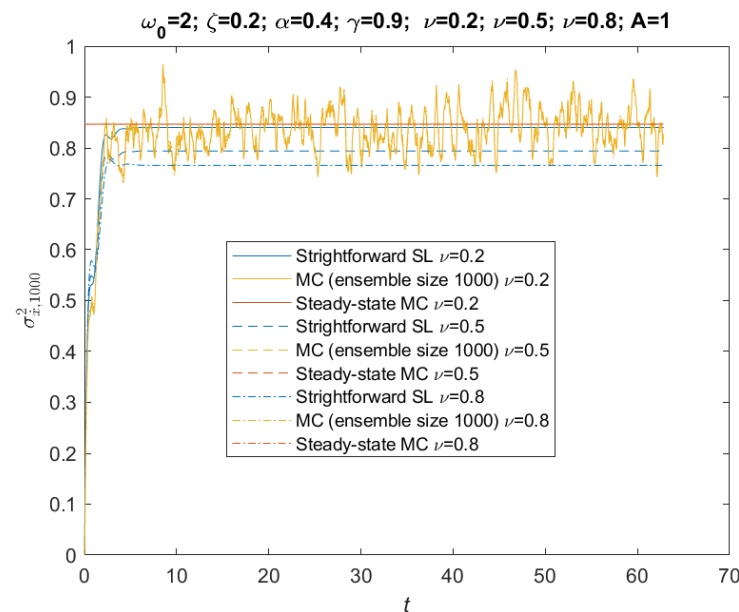
Ciclo isteretico Bouc-Wen per spostamento x e variabile isteretica z

- Si nota un maggior tempo richiesto per raggiungere stabilità soluzione varianza spostamento per $\alpha = 0,2$ e allo stesso tempo per tutte le soluzioni della varianza della velocità.
- All'aumentare di α aumenta l'area del campo isteretico, ne consegue una maggior quantità di energia dissipata dal sistema.

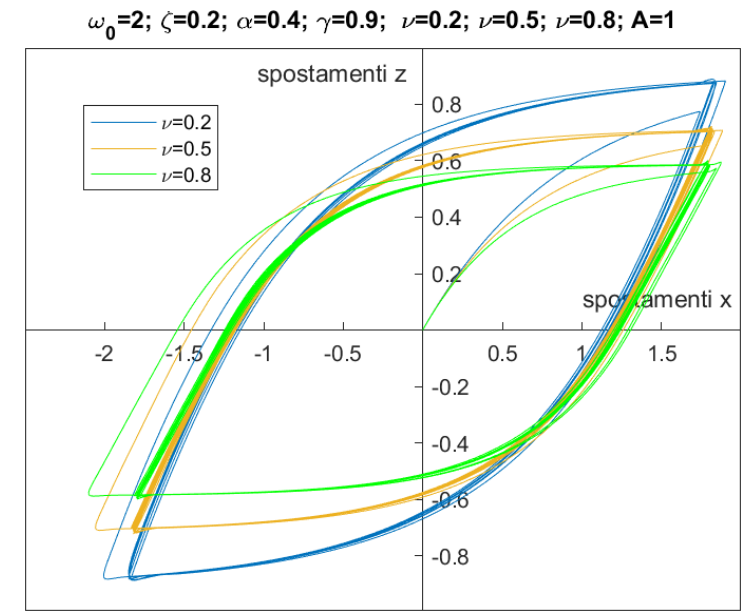
I parametri costanti sono: $S_0 = 0.3$, $k = 4$, $\zeta = 0.2$, $\alpha = 0.4$, $m = 1$, $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4}{1}} = 2$, $c = 2\zeta m \omega_n = 0.8$, $\gamma = 0.9$ e $A = 1$
 Il parametro ν ha invece assunto i seguenti valori: $\nu = 0,2$ $\nu = 0,5$ $\nu = 0,8$.



Grafici relativi alla varianza dello spostamento in base alla variazione di ν .



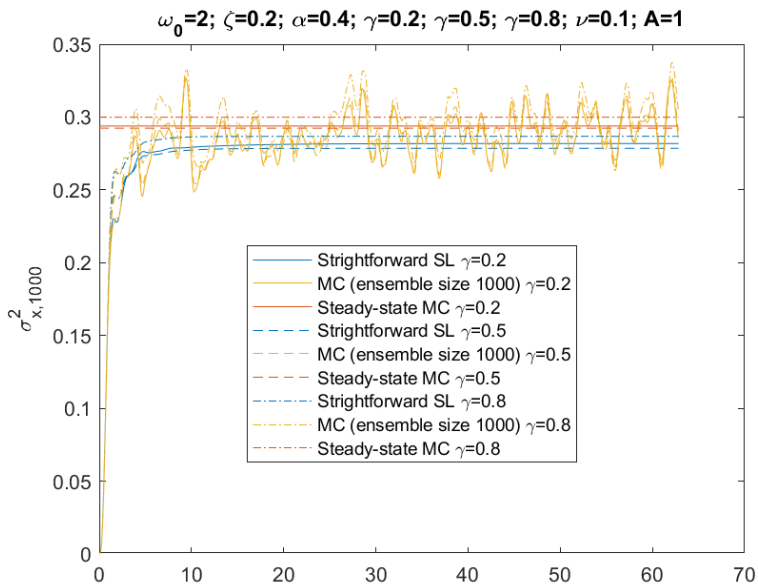
Grafici relativi alla varianza dello spostamento e della velocità in base alla variazione di ν .



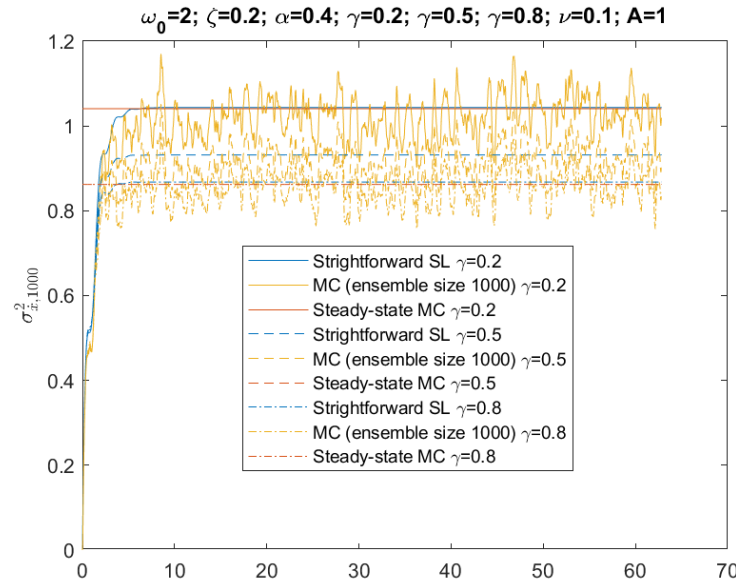
Ciclo isteretico Bouc-Wen per spostamento x e variabile isteretica z .

- La stabilità della soluzione è stata raggiunta allo stesso tempo per tutti i casi.
- L'area del campo isteretico resta pressoché uguale al variare di ν .
- Nel grafico relativo alla varianza della velocità si osserva come il valore della varianza nei tre casi di ν sia molto vicino.

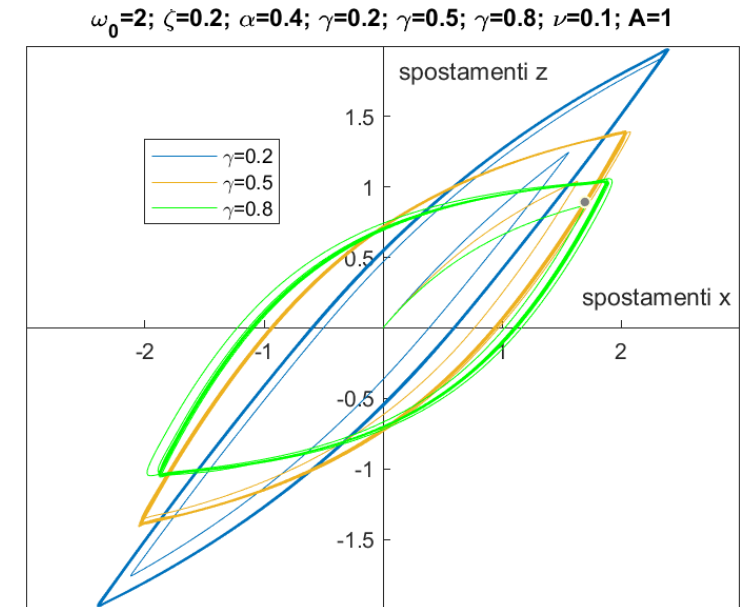
I parametri costanti sono: $S_0 = 0.3$, $k = 4$, $\zeta = 0.2$, $\alpha = 0.4$, $m = 1$, $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4}{1}} = 2$, $c = 2\zeta m \omega_n = 0.8$, $\nu = 0.1$ e $A = 1$.
Il parametro γ ha assunto i seguenti valori: $\gamma = 0,2$ $\gamma = 0,5$ $\gamma = 0,8$.



Grafici relativi alla varianza dello spostamento in base alla variazione di γ .



Grafici relativi alla varianza della velocità in base alla variazione di γ .

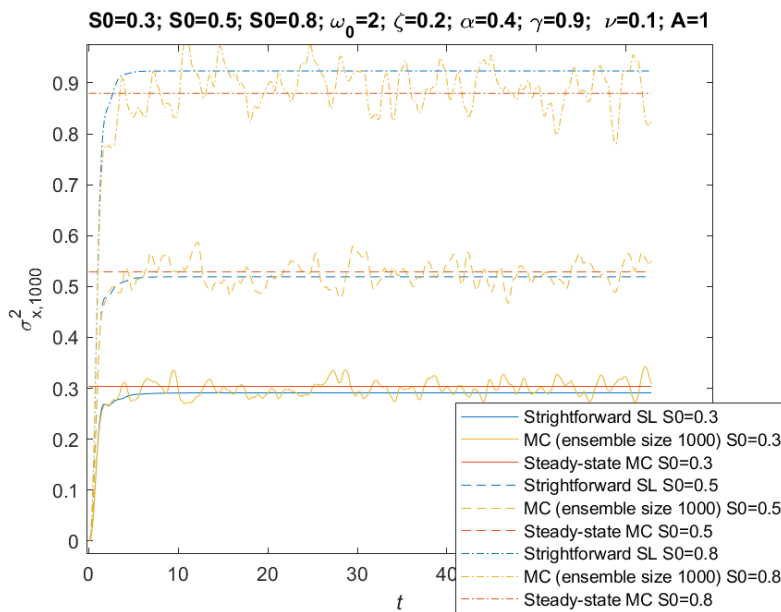


Ciclo isteretico Bouc-Wen per spostamento x e variabile isteretica z .

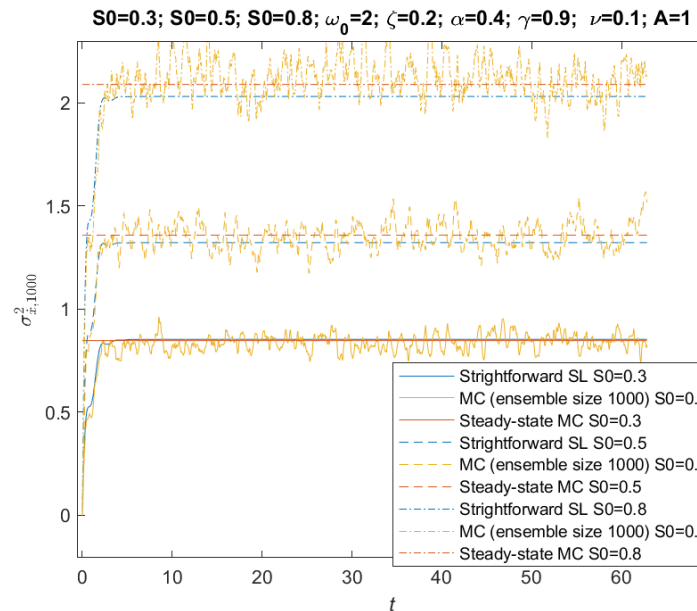
- La stabilità della soluzione è stata raggiunta allo stesso tempo per tutti i casi.
- Nel grafico relativo alla varianza dello spostamento si osserva come il valore della varianza sia molto vicino anche se varia γ .

I parametri che restano costanti sono: $k = 4$, $\zeta = 0.2$, $\alpha = 0.4$, $m = 1$, $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4}{1}} = 2$, $c = 2\zeta m \omega_n = 0.8$, $\nu = 0.1$, $\gamma = 0.9$ e $A = 1$.

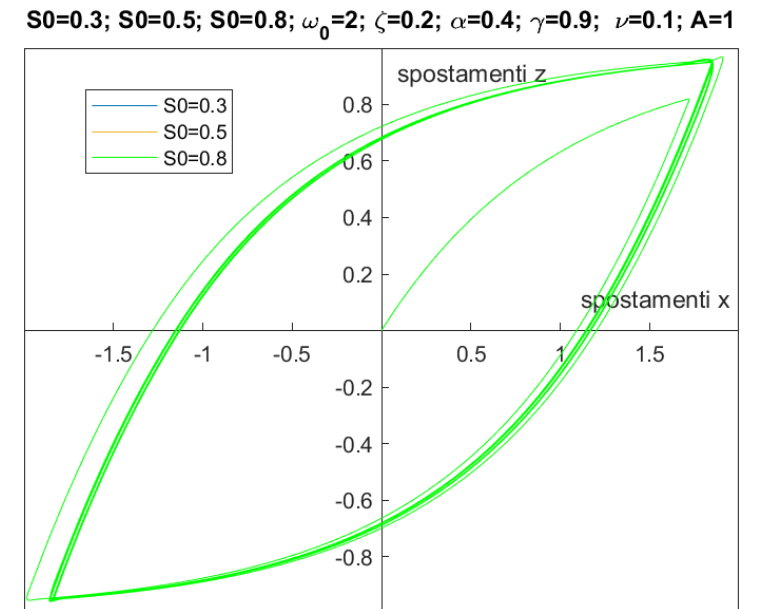
Il parametro S_0 ha assunto i seguenti valori: $S_0 = 0,3$ $S_0 = 0,5$ $S_0=0,8$.



Grafici relativi alla varianza dello spostamento in base alla variazione di S_0 .



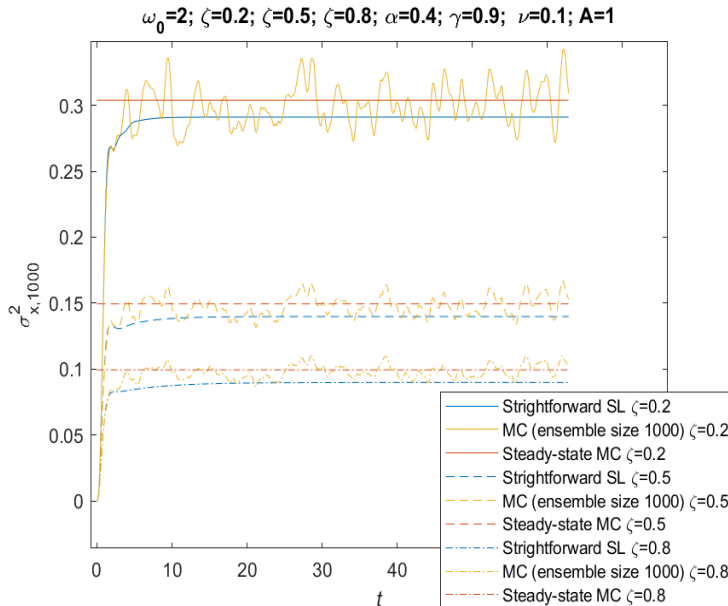
Grafici relativi alla varianza della velocità in base alla variazione di S_0 .



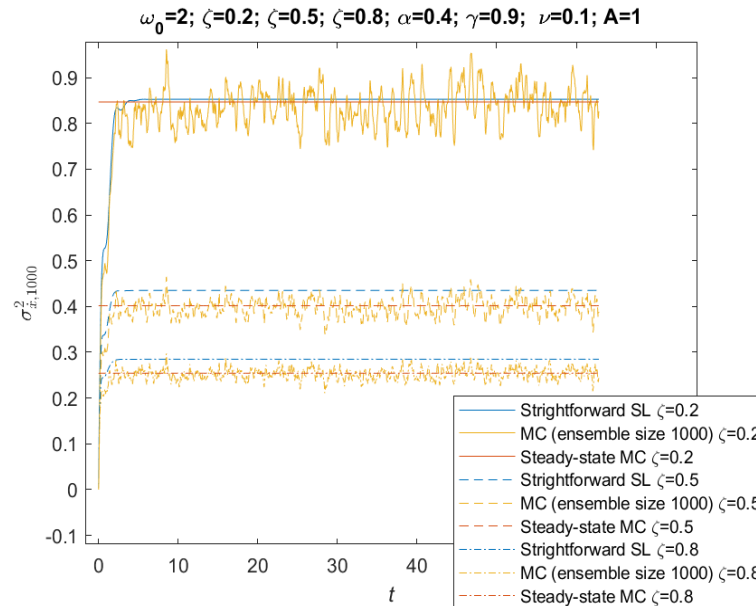
Ciclo isteretico Bouc-Wen per spostamento x e variabile isteretica z .

- La stabilità della soluzione è stata raggiunta allo stesso tempo per tutti i casi.
- Si verifica un aumento del valore delle varianze dello spostamento e della velocità all'aumentare di S_0 .
- Le aree campi isteretici sono sovrapponibili, non dimostrando variazione all'aumentare o diminuire di S_0 .

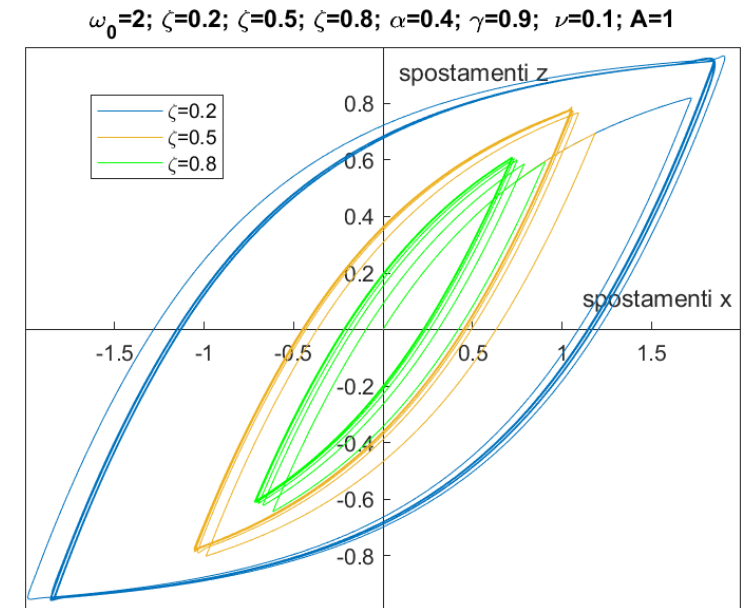
I parametri che restano costanti sono: $S_0 = 0.3$, $k = 4$, $\alpha = 0.4$, $m = 1$, $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4}{1}} = 2$, $\nu = 0.1$, $\gamma = 0.9$ e $A = 1$.
Il parametro ζ ha assunto i seguenti valori: $\zeta = 0,2$ $\zeta = 0,5$ $\zeta = 0,8$.



Grafici relativi alla varianza dello spostamento in base alla variazione di ζ .



Grafici relativi alla varianza della velocità in base alla variazione di ζ .



Ciclo isteretico Bouc-Wen per spostamento x e variabile isteretica z

- La stabilità della soluzione è stata raggiunta allo stesso tempo per tutti i casi.
- Si osserva una diminuzione dei valori delle varianze dello spostamento e della velocità all'aumentare di ζ .
- Le aree dei campi isteretici tendono a diminuire all'aumentare di ζ , indicando una diminuzione di energia dissipata dal sistema.

- Dalle analisi effettuate si può osservare come il livello del rumore bianco S_0 e il rapporto di smorzamento ζ siano i parametri che, se variati, incidono maggiormente sul valore della varianza dello spostamento e della velocità.
- Il numero di realizzazioni pari a 1000 si è dimostrato sufficiente per il raggiungimento della stabilità della risposta in tutti i casi analizzati.
- La tecnica di linearizzazione statistica è competitiva rispetto al metodo Monte Carlo. Infatti riduce i tempi di elaborazione altrimenti richiesti, comunque restituendo una soluzione accurata. Il metodo è versatile alla risoluzione di sistemi a più gradi di libertà sottoposti a forzante aleatoria.