

Università degli Studi di Padova  
Dipartimento di Scienze Statistiche

Corso di Laurea Magistrale in  
Scienze Statistiche

8<sup>1222·2022</sup>  
ANNI



TESI DI LAUREA

**RICONCILIAZIONE CONTEMPORANEA, TEMPORALE E  
CROSS-TEMPORALE DI PREVISIONI DI SERIE STORICHE**

Relatore Prof. Tommaso Di Fonzo  
Dipartimento di Scienze Statistiche

Laureando Daniele Girolimetto  
Matricola N. 1192337

Anno Accademico 2019/2020



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>11</b>
<b>1 Serie storiche gerarchiche e raggruppate</b>	<b>15</b>
1.1 Definizione e notazione . . . . .	15
1.2 Gerarchie bilanciate e sbilanciate . . . . .	22
1.3 Riconciliazione contemporanea di previsioni puntuali . . . . .	24
1.3.1 Notazione . . . . .	24
1.3.2 Metodi tradizionali di riconciliazione . . . . .	27
1.3.3 Riconciliazione ottimale puntuale . . . . .	29
<b>2 Gerarchia temporale di una serie storica</b>	<b>33</b>
2.1 Definizione e notazione . . . . .	33
2.2 Riconciliazione temporale di previsioni puntuali . . . . .	38
2.2.1 Notazione . . . . .	38
2.2.2 Riconciliazione ottimale puntuale . . . . .	39
<b>3 Le gerarchie cross-temporali</b>	<b>43</b>
3.1 Introduzione e definizione . . . . .	43
3.2 Riconciliazione cross-temporale di previsioni puntuali: notazione	49
3.3 L'approccio di combinazione ottimale . . . . .	50
3.4 Procedure euristiche . . . . .	56
<b>4 Un pacchetto R per la riconciliazione delle previsioni: forec</b>	<b>63</b>
4.1 I pacchetti classici . . . . .	63
4.2 forec: una nuova idea . . . . .	64
4.3 Riconciliazione non negativa . . . . .	65
4.4 Qualche esempio ed un confronto con hts e thief . . . . .	69

<b>5</b>	<b>Due esperimenti Monte Carlo</b>	<b>75</b>
5.1	Tempi di calcolo forec e hts . . . . .	75
5.2	Performance delle tecniche di riconciliazione . . . . .	77
5.2.1	Valutazione delle tecniche di previsione . . . . .	79
5.2.2	Analisi dei risultati . . . . .	80
<b>6</b>	<b>Prodotto Interno Lordo australiano (PIL) dal lato del Reddito e della Spesa</b>	<b>87</b>
6.1	Descrizione del dataset . . . . .	87
6.2	Esperimento di previsione . . . . .	92
6.3	Analisi dei risultati . . . . .	93
<b>7</b>	<b>Previsione dei flussi turistici australiani</b>	<b>103</b>
7.1	Descrizione del dataset . . . . .	103
7.2	Calcolo delle previsioni di base . . . . .	108
7.3	Previsioni con valori negativi . . . . .	109
7.4	Analisi dei risultati . . . . .	112
	<b>Conclusioni</b>	<b>119</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>121</b>
<b>A</b>	<b>Indici di accuratezza e confronti multipli</b>	<b>127</b>
<b>B</b>	<b>PIL: descrizione e risultati estesi</b>	<b>131</b>
<b>C</b>	<b>ATD: descrizione e risultati estesi</b>	<b>153</b>
<b>D</b>	<b>Manuale FOREC</b>	<b>173</b>

# Elenco delle tabelle

3.1	Principali differenze tra gerarchie contemporanee e temporali .	44
5.1	Struttura di ciascuna gerarchia e numero medio delle previsioni riconciliate negative attraverso l'approccio struc. In <i>corsivo</i> è riportata la percentuale di zeri sul totale $n$ ). . . . .	76
5.2	Tempi di calcolo medi (in secondi) necessari ai pacchetti <b>forec</b> e <b>hts</b> per riconciliare le previsioni di base senza e con vincoli di non negatività. . . . .	77
5.3	Le migliori sei procedure prese in considerazione nei confronti distinte per tipo di gerarchia. . . . .	81
6.1	AvgRelMSE a qualsiasi ordine di aggregazione $k$ e orizzonte di previsione. . . . .	95
6.2	AvgRelMSE a qualsiasi ordine di aggregazione $k$ e orizzonte di previsione per un selezionato insieme di serie storiche aggregate.	100
7.1	Suddivisione geografica dell'Australia in stati, zone e regioni. In grassetto sono state evidenziate le zone formate da una sola regione. . . . .	105
7.2	Quadro di sintesi dei valori negativi riscontrati nelle previsioni di base . . . . .	109
7.3	Quadro di sintesi dei valori negativi riscontrati nelle previsioni riconciliate con l'approccio a due passi di Kourentzes e Athanasopoulos (2019) . . . . .	110
7.4	AvgRelMSE delle previsioni un passo in avanti e fino a $h_k$ passi per tutti i livelli di aggregazione temporale $k$ . . . . .	114

# Elenco delle figure

1.1	Diagramma ad albero di una generica gerarchia contemporanea di serie storiche con rappresentati a destra i livelli. . . . .	16
1.2	Esempio di struttura gerarchia contemporanea con 3 livelli, $n = 7$ serie storiche di cui $n_b = 4$ e $n_a = 3$ . . . . .	17
1.3	Nel pannello superiore <b>(a)</b> , la popolazione veneta viene disaggregata prima secondo il sesso e poi per provincia, invece nel pannello inferiore <b>(b)</b> viceversa, prima per provincia e poi per sesso. . . . .	20
1.4	A sinistra <b>(a)</b> vi è un esempio di gerarchia bilanciata con $n_b = 4$ e $n_a = 3$ , mentre a destra <b>(b)</b> una non bilanciata con $n_b = 3$ e $n_a = 2$ . . . . .	22
1.5	Versione bilanciata dell'esempio in Figura 1.4b, con $B^* = B$ , $n_b = 3$ e $n_a = 3$ . . . . .	23
1.6	Rappresentazione, tratta da Panagiotelis <i>et al.</i> (2020a), del sottospazio coerente in una gerarchia con tre componenti dove $y_{\text{Tot}} = y_A + y_B$ . L'area grigia è il sottospazio $\mathcal{S}$ e i punti rossi rappresentano le possibili previsioni riconciliate. . . . .	27
2.1	Gerarchia temporale per una serie storica trimestrale. . . . .	35
2.2	Le due gerarchie temporali indotte da una serie storia mensile	37
3.1	Esempio di gerarchia cross-temporale: dal lato contemporaneo si hanno 3 serie storiche tali per cui $X = W + Z$ , mentre dal lato temporale, per ciascuna serie, si hanno dati trimestrali, semestrali e annuali. . . . .	47

3.2	Previsioni riconciliate trimestrali, semi-annuali e annuale del PIL Australiano un passo in avanti utilizzando la procedura cross-temporale di Kourentzes e Athanasopoulos (2019) (t-wlsv allo step temporale, cs-shr per quello contemporaneo) alternando la dimensione di riconciliazione di partenza. La discrepanza percentuale è stata calcolata dalla differenza delle previsioni delle due varianti riconciliazione diviso la loro media aritmetica. . . . .	58
3.3	Boxplot della differenze percentuali (differenza diviso la media aritmetica) delle previsioni riconciliate trimestrali, semestrali ed annuali ad un passo in avanti di 79 su 95 serie storiche del PIL australiano dal lato del reddito e della spesa usando la procedura KA (t-wlsv per il passo temporale e cs-shr quello contemporaneo) e la sua variante iterativa, partendo prima con una riconciliazione temporale oppure con una riconciliazione contemporanea. . . . .	61
4.1	Gerarchia contemporanea del dataset <code>htseg1</code> incluso nel pacchetto <code>hts</code> , con un totale di 8 variabili di cui 5 al livello <i>bottom</i> . . . . .	70
5.1	Gerarchia contemporanea con due variabili al livello <i>bottom</i> . . . . .	78
5.2	AvgRelMSE in base alla correlazione delle previsioni riconciliate attraverso tecniche contemporanee per tutte le serie (primo blocco in alto), per la sola serie $y_T$ (secondo blocco) e per $y_A$ ed $y_B$ (ultimo blocco) per ogni livello di aggregazione temporale ( $k = 1$ dati trimestrali, $k = 2$ semestrali, $k = 4$ annuali). Ogni serie è formata da 104 osservazioni con parametri $\alpha = 0.8$ , $\beta = 0.4$ , $\sigma_A^2 = 2$ e $\sigma_B^2 = 4$ . L'esperimento è stato ripetuto 1000 volte. . . . .	83
5.3	AvgRelMSE in base alla correlazione delle previsioni riconciliate attraverso tecniche temporali per tutte le serie (primo blocco in alto), per la sola serie $y_T$ (secondo blocco) e per $y_A$ ed $y_B$ (ultimo blocco) per ogni livello di aggregazione temporale ( $k = 1$ dati trimestrali, $k = 2$ semestrali, $k = 4$ annuali). Ogni serie è formata da 104 osservazioni con parametri $\alpha = 0.8$ , $\beta = 0.4$ , $\sigma_A^2 = 2$ e $\sigma_B^2 = 4$ . L'esperimento è stato ripetuto 1000 volte. . . . .	84

5.4	AvgRelMSE in base alla correlazione delle previsioni riconciliate attraverso tecniche cross-temporali ottimali ed euristiche per tutte le serie (primo blocco in alto), per la sola serie $y_T$ (secondo blocco) e per $y_A$ ed $y_B$ (ultimo blocco) per ogni livello di aggregazione temporale ( $k = 1$ dati trimestrali, $k = 2$ semestrali, $k = 4$ annuali). Ogni serie è formata da 104 osservazioni con parametri $\alpha = 0.8$ , $\beta = 0.4$ , $\sigma_A^2 = 2$ e $\sigma_B^2 = 4$ . L'esperimento è stato ripetuto 1000 volte. . . . .	85
5.5	AvgRelMSE in base alla correlazione delle previsioni riconciliate attraverso le migliori tecniche contemporanee, temporali e cross-temporali per le diverse frequenze (annuali, semestrali e trimestrali). . . . .	86
6.1	Quadro di sintesi del Prodotto Interno Lordo . . . . .	88
6.2	Gerarchia contemporanea del PIL dal lato del Reddito, tratta da Athanasopoulos <i>et al.</i> (2019). Il colore rosa indica il PIL (la serie più aggregata), il blu le serie al livello intermedio e il giallo quelle al livello più disaggregato. . . . .	89
6.3	Gerarchia contemporanea del PIL dal lato della Spesa, tratta da Athanasopoulos <i>et al.</i> (2019). Il colore rosa indica il PIL (la serie più aggregata), il blu e viola le serie ai livelli intermedi e il giallo quelle al livello più disaggregato. Le serie di colore viola sono ulteriormente disaggregate nelle Figure 6.4 e 6.5. . . . .	90
6.4	Gerarchia contemporanea degli Investimenti Fissi Lordi ( <i>Gross Fixed Capital Formations</i> ), tratta da Athanasopoulos <i>et al.</i> (2019). Parte della Figura 6.3. . . . .	91
6.5	Gerarchia contemporanea degli Spesa per Consumi Finali delle Famiglie ( <i>Household Final Consumption Expenditure</i> ), tratta da Athanasopoulos <i>et al.</i> (2019). Parte della Figura 6.3. . . . .	91
6.6	Nel pannello in alto vi è l'Average Relative MSE calcolato con tutte le serie e tutti gli orizzonti di previsione per ciascuna frequenza temporale. Nel pannello in basso vi sono le graduatorie divise per frequenza e orizzonte di previsione. . . . .	96



6.7	Test di Nemenyi per tutte le 95 serie con un livello di significatività del 5%. Le procedure di riconciliazione sono ordinate verticalmente seguendo il rank medio dell'MSE (i) per le previsioni a tutte le frequenze e qualsiasi orizzonte di previsione (pannello in alto) e (ii) per le previsioni trimestrali a un passo in avanti (pannello in basso). . . . .	98
6.8	Serie trimestrali del PIL e di un insieme selezionato di variabili aggregate dal lato del Reddito e della Spesa: valori osservati e previsioni di base un passo in avanti per il periodo di test (1994:Q4 - 2018:Q1). . . . .	101
7.1	Cartina dell'Australia divisa per Stati e Regioni. . . . .	104
7.2	Andamento mensile di dieci serie storiche divise per il livello della gerarchia contemporanea: 'Australia' (Total), 'New South Wales' (A), 'Victoria' (B), 'Queensland' (C), 'Nth Coast NSW' (AB), 'Sth NSW' (AD), 'Nth NSW' (AE), 'Hunter' (ABA), 'Snowy Mountains' (ADA) e 'Central NSW' (AEA). . . . .	106
7.3	Andamento annuale di dieci serie storiche divise per il livello della gerarchia contemporanea: 'Australia' (Total), 'New South Wales' (A), 'Victoria' (B), 'Queensland' (C), 'Nth Coast NSW' (AB), 'Sth NSW' (AD), 'Nth NSW' (AE), 'Hunter' (ABA), 'Snowy Mountains' (ADA) e 'Central NSW' (AEA). . . . .	106
7.4	Andamento della serie storica mensile riguardante la regione 'Adelaide Hills' dal Gennaio 1998 al febbraio 2006: i punti indicano i valori a Dicembre di ogni anno, mentre il triangolo segnala il valore anomalo del Dicembre 2002. . . . .	108
7.5	Grafico delle serie storiche mensili con almeno una previsione di base negativa. In <b>blu</b> sono rappresentate le ultime dodici osservazioni del <i>training set</i> , in <b>arancione</b> (tratteggiata) le previsioni di base fino a dodici passi in avanti ed in <b>verde</b> i valori osservati. . . . .	111

7.6	Grafico della serie storica ‘Phillip Island’ mensile con origine di previsione numero 25. In <b>blu</b> sono rappresentate le ultime dodici osservazioni del <i>training set</i> , in <b>arancione</b> (puntinata) e in <b>viola</b> (tratteggiata) le previsioni, rispettivamente di base e riconciliate fino a dodici passi in avanti ed in <b>verde</b> i valori osservati. . . . .	111
7.7	Nel pannello in alto vi è l’Average Relative MSE calcolato con tutte le serie e tutti gli orizzonti di previsione per ciascuna frequenza temporale. Nel pannello in basso vi sono le graduatorie divise per frequenza e orizzonte di previsione. . . . .	116
7.8	Test di Nemenyi per tutte le 105 serie con un livello di significatività del 5%. Le procedure di riconciliazione sono ordinate verticalmente seguendo il rank medio dell’MSE (i) per le previsioni a tutte le frequenze e qualsiasi orizzonte di previsione (pannello in alto) e (ii) per le previsioni mensili a un passo in avanti (pannello in basso). . . . .	117

# Introduzione

In molti contesti applicativi, alcuni problemi di previsione si caratterizzano per la necessità di prevedere variabili organizzate secondo una struttura di tipo gerarchico. Ad esempio un'azienda di moda potrebbe essere interessata a prevedere le vendite al dettaglio a livello del singolo negozio o di gruppi di punti vendita differenziando per tipologia, come *mono brand* o grandi magazzini. In casi del genere, è ragionevole richiedere che le previsioni rispettino i vincoli di aggregazione derivanti dalla struttura gerarchica, cioè che siano coerenti (*coherent*, Hyndman *et al.*, 2011). Un caso tipico è il settore del *demand planning* in cui risulta essenziale avere delle previsioni coerenti e accurate per prendere decisioni allineate ai vari livelli.

Finora, in letteratura sono state considerate principalmente due tipologie di strutture gerarchiche: la gerarchia contemporanea (o cross-sezionale, *cross-sectional*) e quella temporale (*temporal*). La prima è la più nota anche perché emerge in molti contesti come una struttura naturale dei dati. Tuttavia, operare in un contesto cross-sezionale permette di ottenere delle previsioni coerenti per più variabili, ma solo a un fissato istante di tempo. Per considerare in modo efficace la dimensione temporale si può far uso delle meno conosciute gerarchie temporali. Esse si formano attraverso l'aggregazione di intervalli regolari di una variabile: ad esempio, se si ha una serie trimestrale questa può essere aggregata a frequenza semestrale e annuale. In questo modo è possibile combinare le informazioni rilevanti per le previsioni a breve e a lungo termine, ma con un tale approccio si ottengono dei risultati coerenti solo per una singola serie storica alla volta. Il processo di revisione dei valori previsti volto a garantirne la coerenza, o contemporanea tra più variabili, o temporale tra serie a frequenza diversa della stessa variabile, è

detto riconciliazione delle previsioni (*forecast reconciliation*).

In entrambe le gerarchie si può operare attraverso degli approcci classici, molto semplici come le tecniche *bottom-up* (Orcutt *et al.*, 1968) o *top-down* (Gross e Sohl, 1990), oppure delle procedure di combinazione ottima delle previsioni (van Erven e Cugliari, 2015, Wickramasuriya *et al.*, 2019), che possono far uso o di un approccio strutturale o di quello, meno noto, di proiezione.

Per superare i limiti imposti da queste prime strutture di dati, si possono considerare le gerarchie cross-temporali, le quali tengono conto simultaneamente tanto dei vincoli di aggregazione contemporanea (cross-sezionale) tra tutte le variabili, quanto dei vincoli di aggregazione temporale validi per ogni singola componente della serie storica multipla oggetto di interesse. Tale approccio è adatto allo scopo di ottenere ‘un’unica previsione’ (*one-number forecast*, Kourentzes, 2019) ossia un set di valori coerenti lungo entrambe le dimensioni (contemporanea e temporale) dei fenomeni considerati. Nell’ambito della riconciliazione cross-temporale l’unica tecnica disponibile è quella proposta da Kourentzes e Athanasopoulos (2019), una procedura euristica in due passi che si avvale della combinazione di alcune tecniche uni-dimensionali. In questo lavoro, muovendo dalla proposta di Kourentzes e Athanasopoulos (2019), viene proposta una procedura iterativa che estende e rende più ‘robusta’ l’euristica a due passi, rendendola capace di gestire anche vincoli di non negatività delle previsioni riconciliate. Inoltre, viene ricavata la soluzione di combinazione ottimale che sfrutta simultaneamente i vincoli cross-temporali tramite un modello di regressione multivariata.

Per eseguire le analisi è stato sviluppato in **R** (R Core Team, 2020) un pacchetto, **forec**, che, oltre alle procedure nei pacchetti **hts** (Hyndman *et al.*, 2020b) e **thief** (Hyndman e Kourentzes, 2018), racchiude al suo interno tutte le nuove tecniche proposte in questa tesi. Va sottolineato che **forec** permette di riconciliare le previsioni imponendo se necessario anche vincoli di non negatività sui valori riconciliati finali, aspetto di rilievo in molti contesti applicativi. Per valutare l’efficienza e la velocità computazionale si sono confrontati i tempi di riconciliazione (senza e con vincoli di non negatività delle previsioni) con il pacchetto **hts** attraverso un esperimento Monte Carlo.

Le performance offerte dalle varie tecniche di riconciliazione sono state

valutate attraverso un secondo esperimento di simulazione e facendo uso di due dataset reali: il primo riguardante il Prodotto Interno Lordo australiano, dal lato del Reddito e della Spesa, e il secondo relativo ai flussi turistici australiani disaggregati per aree geografiche.

In sintesi, l'obiettivo di questo lavoro è approfondire le procedure presenti in letteratura per risolvere problemi di riconciliazione contemporanea e temporale di previsioni di serie storiche, estendendo questi risultati al caso delle gerarchie cross-temporali nell'ottica della *one-number-forecast*. L'efficienza delle varie tecniche dal punto di vista previsivo viene quindi valutata attraverso applicazioni a dati simulati e reali.

Il lavoro è strutturato nel modo seguente. Nel Capitolo 1 viene definito il concetto di gerarchia contemporanea di serie storiche e sviluppata la notazione necessaria per introdurre il problema di riconciliazione delle previsioni. Vengono inoltre discussi i diversi approcci proposti in letteratura per tali problemi. Nel Capitolo 2 vengono trattate le gerarchie temporali, dandone una definizione formale e proponendo tecniche per allineare le previsioni rispetto al tempo. Nel Capitolo 3 si introducono le gerarchie cross-temporali, sia dal punto di vista della notazione sia presentando gli approcci euristici e ottimali. Il Capitolo 4 è dedicato al pacchetto *forec*, usato per le successive analisi, soffermandosi in particolare sulle scelte effettuate per gestire i vincoli di non negatività. Negli ultimi capitoli, invece, vengono presentate quattro applicazioni empiriche. In particolare, nel Capitolo 5 vengono descritti due esperimenti Monte Carlo, nel Capitolo 6 vengono analizzate le previsioni del Prodotto Interno Lordo australiano e nel Capitolo 7 quelle dei flussi turistici australiani.



# Capitolo 1

## Serie storiche gerarchiche e raggruppate

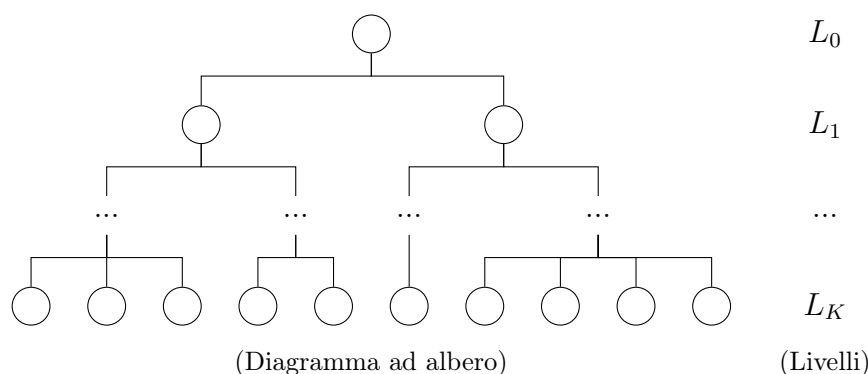
### 1.1 Definizione e notazione

In molti ambiti (come in economia e nel campo della logistica) ci si trova di fronte a fenomeni con una struttura gerarchica, cioè in cui le informazioni fanno riferimento a vari livelli di appartenenza. I legami che inducono queste forme di dati possono essere di varia natura. Un esempio molto semplice è la posizione geografica: le vendite di un'azienda per tutto il territorio italiano possono essere disaggregate nelle varie zone (regioni, province, ...) a seconda se si è interessati a una visione d'insieme o più particolareggiata.

Se questa struttura viene osservata nel tempo si ottengono delle serie storiche gerarchiche, un caso particolare di serie storiche multiple con vincoli lineari esatti operanti sulla singola componente a livello contemporaneo (**gerarchia contemporanea, o cross-sezionale, di serie storiche**).

Poiché negli ultimi dieci anni la letteratura sulle previsioni gerarchiche ha avuto un forte sviluppo, in questo lavoro si è anzitutto cercato di uniformare la notazione, facendo principalmente riferimento a Hyndman *et al.* (2011), Wickramasuriya *et al.* (2019) e Panagiotelis *et al.* (2020a).

Formalmente la gerarchia contemporanea è una collezione di  $n$  variabili, osservabili in istanti o intervalli temporali, in cui vi sono relazioni di aggrega-



**Figura 1.1:** Diagramma ad albero di una generica gerarchia contemporanea di serie storiche con rappresentati a destra i livelli.

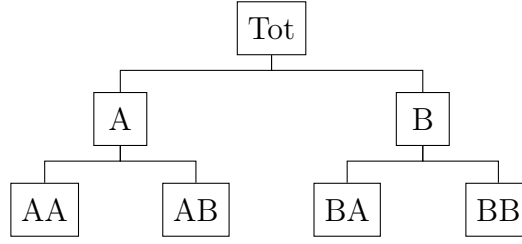
zione. Il primo modo che si ha per rappresentare questa struttura è puramente grafico e serve principalmente per visualizzare la gerarchia nel suo insieme, in modo compatto e semplice. Il tipo di grafico utilizzato è un diagramma ad albero come in Figura 1.1. Il diagramma fornisce una naturale divisione in livelli, ordinati in base a come i nodi inferiori (detti ‘figli’) si aggregano per formare quelli immediatamente superiori (detti ‘genitori’). Nello specifico:

- il livello  $L_0$  contiene il nodo più alto dell’albero e indica la massima sintesi a cui si può giungere. Contiene una sola serie storica, ottenuta sommando (o combinando linearmente) tutte le serie dell’ultimo livello.
- i livelli  $L_j$ ,  $j = 1, \dots, K - 1$ , sono i vari livelli intermedi, ciascuno caratterizzato da una ‘granularità’ che va via via aumentando, prima di arrivare al livello di massima disaggregazione.
- il livello  $L_K$  è l’ultimo livello dell’albero e contiene le variabili che non possono essere ottenute come somma di altre. Tali serie sono chiamate *bottom time series*.

La presenza dei livelli permette la suddivisione delle variabili in due gruppi principali: il primo, *bts* o *bottom time series*, contiene le  $n_b$  serie di  $L_K$  e il secondo, *uts* o *upper time series*, raccoglie le restanti  $n_a = n - n_b$  serie.

Per chiarire i concetti fin qui espressi, si supponga di avere una gerarchia contemporanea con  $n = 7$  variabili, di cui  $n_b = 4$  al livello inferiore





**Figura 1.2:** Esempio di struttura gerarchia contemporanea con 3 livelli,  $n = 7$  serie storiche di cui  $n_b = 4$  e  $n_a = 3$

(e quindi  $n_a = 3$ ) come in Figura 1.2. Avendo a disposizione  $T$  osservazioni per ciascuna serie, i vari vincoli di aggregazione possono essere esplicitamente formulati per una generica osservazione  $y_{i,t}$  con  $t \in \{1, \dots, T\}$  e  $i \in \{\text{Tot}, A, B, AA, AB, BA, BB\}$  nel modo seguente:

$$y_{\text{Tot},t} = y_{A,t} + y_{B,t},$$

$$y_{A,t} = y_{AA,t} + y_{AB,t}, \quad y_{B,t} = y_{BA,t} + y_{BB,t}.$$

Questa rappresentazione può essere formalizzata dal seguente insieme di somme, in cui a destra del segno di uguaglianza compaiono le sole *bottom times series*:

$$\begin{cases} y_{\text{Tot},t} &= y_{AA,t} + y_{AB,t} + y_{BA,t} + y_{BB,t} \\ y_{A,t} &= y_{AA,t} + y_{AB,t} \\ y_{B,t} &= y_{BA,t} + y_{BB,t} \end{cases} \quad (1.1)$$

Risulta molto più pratico ed efficiente, soprattutto quando  $n$  è molto elevato, avvalersi della *rappresentazione strutturale di una serie storica gerarchica*, introdotta da Hyndman *et al.* (2011). Dato un istante  $t$ , si considerino i due vettori  $\mathbf{a}_t$  ( $n_a \times 1$ ) e  $\mathbf{b}_t$  ( $n_b \times 1$ ), che contengono rispettivamente tutte le osservazioni dei livelli superiori e quelle al livello inferiore:

$$\mathbf{a}_t = [a_{1,t} \quad \dots \quad a_{j,t} \quad \dots \quad a_{n_a,t}]' \quad \text{e} \quad \mathbf{b}_t = [b_{1,t} \quad \dots \quad b_{i,t} \quad \dots \quad b_{n_b,t}]'.$$

Indicato con  $\mathbf{y}_t = [\mathbf{a}_t' \quad \mathbf{b}_t']'$  il vettore ( $n \times 1$ ) che contiene tutte le osservazioni a qualsiasi livello, possiamo rappresentare la struttura gerarchica come

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{S}\mathbf{b}_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (1.2)$$

dove  $\mathbf{S}$  è la matrice ( $n \times n_b$ ) che incorpora i vincoli di aggregazione cross-sezionale e viene chiamata matrice somma contemporanea (*contemporaneous summing matrix*). La matrice somma è formata da due blocchi:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{n_a \times n_b} \\ \mathbf{I}_{n_b} \end{bmatrix}, \quad (1.3)$$

in cui  $\mathbf{I}_{n_b}$  è una matrice identità e  $\mathbf{C}$  è la matrice di aggregazione contemporanea (*contemporaneous aggregation matrix*), che aggrega gli elementi di  $\mathbf{b}_t$  per ottenere i primi  $n_a$  elementi di  $\mathbf{y}_t$  (cioè  $\mathbf{a}_t$ ):

$$\mathbf{a}_t = \mathbf{C}\mathbf{b}_t, \quad t = 1, \dots, T. \quad (1.4)$$

Riprendendo l'esempio (1.1), la matrice  $\mathbf{S}$  è data da

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{3 \times 4} \\ \mathbf{I}_4 \end{bmatrix}.$$

Possiamo quindi utilizzare l'espressione nella formula (1.2) per ottenere la rappresentazione strutturale:

$$\begin{bmatrix} y_{Tot,t} \\ y_{A,t} \\ y_{B,t} \\ y_{AA,t} \\ y_{AB,t} \\ y_{BA,t} \\ y_{BB,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{AA,t} \\ y_{AB,t} \\ y_{BA,t} \\ y_{BB,t} \end{bmatrix}.$$

L'espressione (1.4) offre una maniera equivalente per rappresentare le relazioni che caratterizzano queste strutture gerarchiche:

$$\mathbf{U}'\mathbf{y}_t = \mathbf{0}, \quad t = 1, \dots, T, \quad (1.5)$$

dove  $\mathbf{0}$  è un vettore ( $n_a \times 1$ ) di zeri e  $\mathbf{U}'$  è la matrice ( $n_a \times n$ ) data da:

$$\mathbf{U}' = [\mathbf{I}_{n_a} \quad -\mathbf{C}]. \quad (1.6)$$

Applicando il tutto all'esempio di Figura 1.2, si ha che:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{Tot,t} \\ y_{A,t} \\ y_{B,t} \\ y_{AA,t} \\ y_{AB,t} \\ y_{BA,t} \\ y_{BB,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Come detto, una serie storica gerarchica  $\mathbf{y}_t$ , per  $t = 1, \dots, T$ , rispetta sempre i vincoli di aggregazione contemporanei e perciò viene detta additivamente coerente (*additively coherent*). Si può esprimere il tutto in forma compatta, considerando le due matrici:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1t} & \dots & b_{1T} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{it} & \dots & b_{iT} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n_b1} & \dots & b_{n_bt} & \dots & b_{n_bT} \end{bmatrix} = [\mathbf{b}_1 \quad \dots \quad \mathbf{b}_t \quad \dots \quad \mathbf{b}_T] \quad (1.7)$$

e

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1t} & \dots & a_{1T} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jt} & \dots & a_{jT} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_a1} & \dots & a_{n_at} & \dots & a_{n_aT} \end{bmatrix} = [\mathbf{a}_1 \quad \dots \quad \mathbf{a}_t \quad \dots \quad \mathbf{a}_T], \quad (1.8)$$

rispettivamente di dimensione ( $n_b \times T$ ) e ( $n_a \times T$ ). La relazione contemporanea (1.4) può essere espressa in forma compatta, come

$$\mathbf{A} = \mathbf{CB}.$$

Le due rappresentazioni (1.2) e (1.5) possono dunque essere riscritte in forma compatta:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{S}\mathbf{B} \quad (1.9)$$

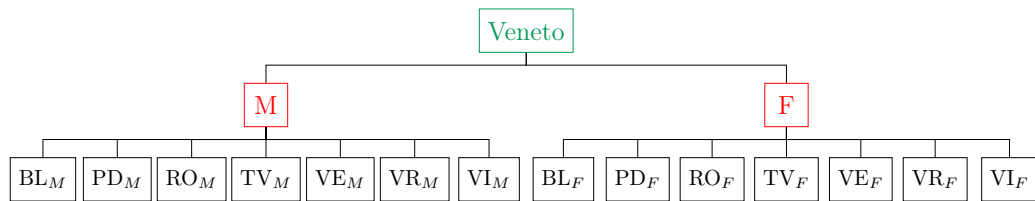
$$\mathbf{U}'\mathbf{Y} = \mathbf{0}_{n_a \times 1} \quad (1.10)$$

dove  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{U}'$  sono state definite nelle espressioni (1.3) e (1.6), rispettivamente, mentre

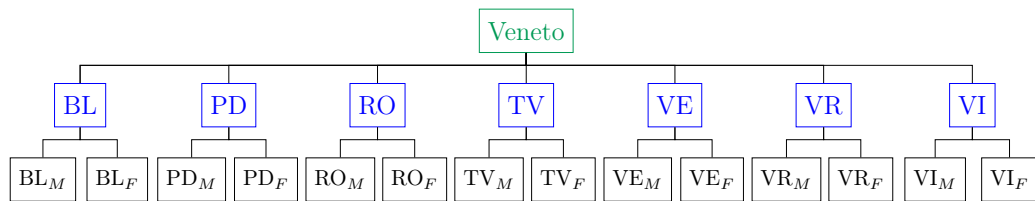
$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

è una matrice ( $n \times T$ ) che contiene tutte le osservazioni della serie storica gerarchica.

Una struttura più complessa è data dalle gerarchie raggruppate: si tratta di sistemi composti da due o più gerarchie semplici, che hanno in comune la stessa serie al livello più alto e, nella maggior parte dei casi, condividono anche le serie al livello più basso. Come fanno notare Han *et al.* (2013), le caratteristiche che spingono i dati ad assumere tali forme organizzative sono diverse e molto spesso l'ordine di aggregazione non è fissato a priori. Si prenda come esempio la popolazione residente in Veneto. Questa può essere disaggregata per provincia di residenza (Belluno, Padova, Rovigo, Treviso, Venezia, Verona e Vicenza) o per sesso (Maschio e Femmina), secondo due diverse modalità di aggregazione, rappresentate in Figura 1.3.



(a)



(b)

**Figura 1.3:** Nel pannello superiore (a), la popolazione veneta viene disagiata prima secondo il sesso e poi per provincia, invece nel pannello inferiore (b) viceversa, prima per provincia e poi per sesso.

Va notato che entrambe le rappresentazioni (per sesso prima e per provincia poi, e viceversa) condividono la serie al livello più alto (totale del Veneto) e le 14 bts (la popolazione divisa per sesso e provincia). Ciò che cambia sono i livelli intermedi, che nelle due rappresentazioni danno vita a variabili diverse, calcolando le marginali della distribuzione della popolazione o per sesso o per provincia.

Definendo la matrice  $\mathbf{C}$  in modo opportuno è possibile mettere insieme queste due forme di organizzazione dei dati, dando via ad una serie raggruppata. Infatti nel caso in esame, avendo definito il vettore delle bts come

$$\mathbf{b} = [\text{BL}_M \quad \text{BL}_F \quad \dots \quad \text{VI}_M \quad \text{VI}_F]',$$

quello delle uts come

$$\mathbf{a} = [\text{Veneto} \quad \text{M} \quad \text{F} \quad \dots \quad \text{VR} \quad \text{VI}]',$$

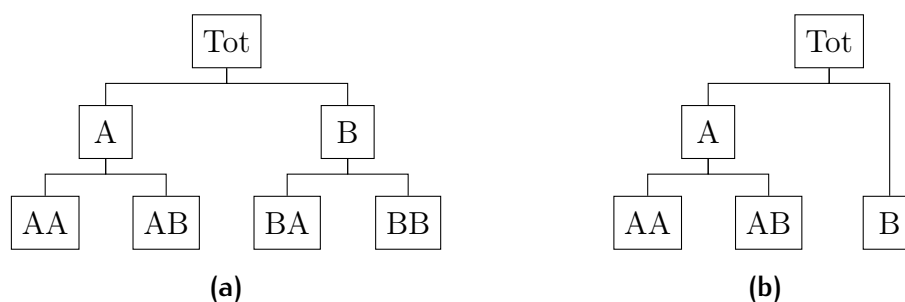
e  $\mathbf{y} = (\mathbf{a}' \quad \mathbf{b}')$ , la matrice  $\mathbf{C}$  diventa

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \text{BL}_M & \text{BL}_F & \text{PD}_M & \text{PD}_F & \text{RO}_M & \text{RO}_F & \text{TV}_M & \text{TV}_F & \text{VE}_M & \text{VE}_F & \text{VR}_M & \text{VR}_F & \text{VI}_M & \text{VI}_F & \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Veneto} \\ \text{M} \\ \text{F} \\ \text{BL} \\ \text{PD} \\ \text{RO} \\ \text{TR} \\ \text{VE} \\ \text{VR} \\ \text{VI} \end{matrix},$$

con  $\mathbf{a} = \mathbf{Cb}$  e  $\mathbf{y} = \mathbf{Sb}$ .

## 1.2 Gerarchie bilanciate e sbilanciate

Una gerarchia è bilanciata se ogni livello presenta nodi con legami al livello inferiore, ossia dotati di almeno due ‘figli’, come rappresentato nella Figura 1.4a. Quando ciò non avviene, si dice che la gerarchia è non bilanciata (Figura 1.4b). Molto spesso è possibile bilanciare artificialmente una gerarchia sbilanciata, tuttavia questo processo dà origine ad una matrice  $\mathbf{S}$  con una o più righe ridondanti.



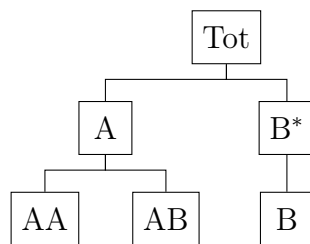
**Figura 1.4:** A sinistra (a) vi è un esempio di gerarchia bilanciata con  $n_b = 4$  e  $n_a = 3$ , mentre a destra (b) una non bilanciata con  $n_b = 3$  e  $n_a = 2$ .

Riprendendo l’esempio in Figura 1.4b, si può ottenere la versione bilanciata in modo molto semplice come riportato in Figura 1.5. La matrice  $\mathbf{S}$  diventa

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

in cui l’ultima riga della matrice  $\mathbf{C}_{3,3}$  è identica alla terza della matrice  $\mathbf{I}_3$ .

Nel pacchetto `hts` (Hyndman *et al.*, 2020b) del software **R** (R Core Team, 2020) vengono gestite solo gerarchie bilanciate o rese tali. Infatti, per costruire la matrice  $\mathbf{S}$  si deve definire l’oggetto `nodes` all’interno della funzione `hts`, cioè una lista contenente il numero di nodi ‘figli’ associati a ogni livello. A questo



**Figura 1.5:** Versione bilanciata dell'esempio in Figura 1.4b, con  $B^* = B$ ,  $n_b = 3$  e  $n_a = 3$ .

punto si può ottenere la matrice somma attraverso la funzione `smatrix`. Ad esempio, per ricostruire la gerarchia in Figura 1.4a si può usare il codice 1.1.

**Codice 1.1:** Codice **R** della gerarchia in Figura 1.4a per ottenere la matrice somma **S** con il pacchetto `hts`.

---

```

# Generazione casuale di 100 osservazioni per le 4 bts
abc <- ts(5 + matrix(sort(rnorm(400)), ncol = 4, nrow = 100))
nodes <- list(2,          # nodi figli del livello 0
             c(2, 2))    # nodi figli del livello 1
x <- hts(abc, nodes)     # oggetto hts
smatrix(x)               # matrice S

```

---

Seguendo la logica del pacchetto `hts`, per la gerarchia rappresentata in Figura 1.4b non è identificabile l'oggetto `nodes`, in quanto la variabile `B` è considerata una *bottom times series*, perciò il livello 1 viene 'saltato'. Per questo motivo la gerarchia deve essere artificialmente bilanciata, come in Figura 1.5 e nel codice 1.2: la serie `B` viene semplicemente ripetuta al livello 1 e  $B^* = B$ .

**Codice 1.2:** Codice **R** della gerarchia in Figura 1.5 per ottenere la matrice somma **S** con il pacchetto `hts`.

---

```

# Generazione casuale di 100 osservazioni per le 3 bts
abc <- ts(5 + matrix(sort(rnorm(300)), ncol = 3, nrow = 100))
nodes <- list(2,          # nodi figli del livello 0
             c(2, 1))    # nodi figli del livello 1
x <- hts(abc, nodes)     # oggetto hts
smatrix(x)               # matrice S

```

---

All'aumentare dei nodi del sistema, il doversi riferire alle sole gerarchie bilanciate può comportare una maggiore occupazione di memoria e un aumento dei tempi di calcolo, perché si vanno ad aggiungere serie storiche identiche a quelle già presenti, appesantendo la struttura originale. Per questo motivo sarebbe consigliabile correggere in modo opportuno la matrice  $\mathbf{C}_{n_a \times n_b}$  per eliminare le righe ridondanti già presenti nella matrice identità  $\mathbf{I}_{n_b}$ . Nel precedente esempio è possibile considerare delle nuove matrici di aggregazione,  $\tilde{\mathbf{C}}$ , e di somma strutturale,  $\tilde{\mathbf{S}}$ , definite nel seguente modo:

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}} \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se si volesse comunque utilizzare il pacchetto `hts` per ottenere la matrice  $\tilde{\mathbf{S}}$  si può modificare l'output di `smatrix` nella versione bilanciata con la funzione `unique` come riportato nel codice 1.3.

**Codice 1.3:** Codice **R** della gerarchia in Figura 1.4b per ottenere la matrice somma **S** con il pacchetto `hts` a partire dal codice 1.2.

---

```
unique(smatrix(x), fromLast = TRUE)
```

---

Tuttavia, nella versione attuale `hts` non può trarre beneficio da questo accorgimento. Come si vedrà nel Capitolo 4, il pacchetto `forec` sviluppato per questa tesi è invece in grado di gestire situazioni di questo tipo.

## 1.3 Riconciliazione contemporanea di previsioni puntuali

### 1.3.1 Notazione

Dati organizzati secondo strutture gerarchiche o raggruppate si incontrano in numerosi contesti applicativi. Per esempio, in ambito aziendale e in tutti quei settori dove vi è la necessità di avere una pianificazione a più livelli



decisionali. Un caso molto significativo è la programmazione della produzione di SKUs (*Stock Keeping Units*) nell'ambito del *demand planning* (Fliedner, 2001): avendo la possibilità di aggregare queste grandezze tra di loro (considerando ad esempio il volume monetario delle vendite), può risultare molto utile prevederle in modo accurato e coerente. In questo modo le previsioni gerarchiche permettono di prevedere la domanda considerando i diversi livelli manageriali all'interno dell'organizzazione evitando i problemi legati all'*underforecasting* o *overforecasting* e, più in generale, all'uso di previsioni di scarsa qualità.

Per la fase di previsione si possono utilizzare modelli ampiamente noti nel campo dell'analisi delle serie storiche: ad esempio, utilizzando i classici modelli ARIMA (Box e Jenkins, 1970), la tecnica del liscio esponenziale ETS (Hyndman *et al.*, 2002) oppure tecniche più complesse come i modelli VAR (Lütkepohl, 2005), fino a previsioni che fanno uso di approcci di *machine learning* (Cheng *et al.*, 2012, Spiliotis *et al.*, 2020). Tuttavia, è lecito attendersi che, a meno di non aver preso preliminarmente accorgimenti in questo senso, le previsioni ottenute per le diverse serie non rispettino i vincoli di aggregazione gerarchica in modo automatico, ma vi è la necessità di applicare delle tecniche di *post-forecasting* per correggerle.

Da un punto di vista formale, fissato il numero di osservazioni  $T$  per ciascuna serie e l'orizzonte di previsione  $H$ , si può definire  $\hat{\mathbf{A}}$  come la matrice ( $n_a \times H$ ) che contiene tutte le previsioni di base delle serie ai livelli aggregati, analogamente la matrice  $\hat{\mathbf{B}}$  ( $n_b \times H$ ) per le serie al *bottom level* e, di conseguenza, la matrice  $\hat{\mathbf{Y}}$  ( $n \times H$ ) per l'intera gerarchia:

$$\hat{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}} \\ \hat{\mathbf{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{y}}_1 & \dots & \hat{\mathbf{y}}_h & \dots & \hat{\mathbf{y}}_H \end{bmatrix}, \quad (1.11)$$

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \dots & \hat{a}_{1h} & \dots & \hat{a}_{1H} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{a}_{j1} & \dots & \hat{a}_{jh} & \dots & \hat{a}_{jH} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{a}_{n_a 1} & \dots & \hat{a}_{n_a h} & \dots & \hat{a}_{n_a H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}_1 & \dots & \hat{\mathbf{a}}_h & \dots & \hat{\mathbf{a}}_H \end{bmatrix}$$

e

$$\widehat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \widehat{b}_{11} & \dots & \widehat{b}_{1h} & \dots & \widehat{b}_{1H} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{b}_{i1} & \dots & \widehat{b}_{ih} & \dots & \widehat{b}_{iH} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{b}_{n_b1} & \dots & \widehat{b}_{n_bh} & \dots & \widehat{b}_{n_bH} \end{bmatrix} = \left[ \widehat{\mathbf{b}}_1 \quad \dots \quad \widehat{\mathbf{b}}_h \quad \dots \quad \widehat{\mathbf{b}}_H \right].$$

Per alleggerire la notazione, indichiamo con  $\widehat{\mathbf{y}}_h = \widehat{\mathbf{y}}_T(h) = \mathbb{E}[\mathbf{y}_{T+h}|I_T]$  le  $n$  previsioni con orizzonte di previsione  $h$ , dove  $I_T$  è l'informazione disponibile fino al tempo  $T$ .

Tenuto conto della formulazione (1.2), il generico vettore delle previsioni riconciliate  $\widetilde{\mathbf{y}}_h$ , può essere scritto come:

$$\widetilde{\mathbf{y}}_h = \mathbf{S}\mathbf{G}_h\widehat{\mathbf{y}}_h, \quad h = 1, \dots, H, \quad (1.12)$$

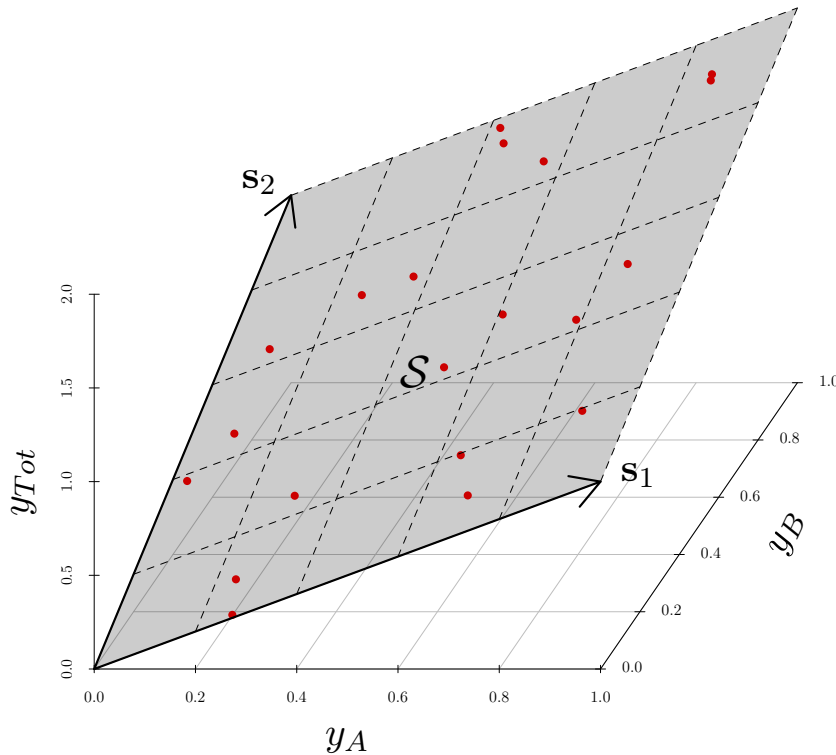
dove  $\widehat{\mathbf{y}}_h$  è la pertinente colonna della matrice  $\widehat{\mathbf{Y}}$  (1.11),  $\mathbf{S}$  è la matrice somma (1.3) e  $\mathbf{G}_h$  è la matrice che trasforma  $\widehat{\mathbf{y}}_h$  nelle previsioni riconciliate delle serie *bottom*,  $\widehat{\mathbf{b}}_h = \mathbf{G}_h\widehat{\mathbf{y}}_h$ , anche chiamata *mapping matrix* (Hyndman e Athanassopoulos, 2018). Si noti che per  $\mathbf{G}_h = \mathbf{G}$ ,  $h = 1, \dots, H$ , l'espressione (1.12) può essere espressa in forma compatta come:

$$\widetilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{S}\mathbf{G}\widehat{\mathbf{Y}}, \quad (1.13)$$

con  $\widetilde{\mathbf{Y}} = [\widetilde{\mathbf{y}}_1 \quad \dots \quad \widetilde{\mathbf{y}}_h \quad \dots \quad \widetilde{\mathbf{y}}_H]$ .

Date queste quantità si può considerare la proprietà di coerenza come proposta da Panagiotelis *et al.* (2020a): un set di previsioni riconciliate  $h$  passi in avanti  $\widetilde{\mathbf{y}}_h$ , generato utilizzando l'informazione fino al tempo  $T$ , è detto coerente se  $\widetilde{\mathbf{y}}_h \in \mathcal{S}$ , dove  $\mathcal{S}$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  in cui valgono i vincoli di aggregazione, espressi secondo la (1.5).

Prendiamo il caso più semplice di una gerarchia con tre serie, di cui due al livello più disaggregato,  $y_{tot} = y_A + y_B$ . Come viene mostrato in figura 1.6, le previsioni di base possono giacere in qualsiasi punto di  $\mathbb{R}^3$ , mentre le previsioni che rispettano la proprietà di coerenza giacciono solo nel sottospazio  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ .



**Figura 1.6:** Rappresentazione, tratta da Panagiotelis *et al.* (2020a), del sottospazio coerente in una gerarchia con tre componenti dove  $y_{Tot} = y_A + y_B$ . L'area grigia è il sottospazio  $\mathcal{S}$  e i punti rossi rappresentano le possibili previsioni riconciliate.

### 1.3.2 Metodi tradizionali di riconciliazione

Una caratteristica comune dei metodi tradizionali per riconciliazione di previsioni gerarchiche di serie storiche è il fatto che all'inizio vengono previste solo serie di uno specifico livello selezionato della gerarchia (ci si limita, cioè, a considerare solo una parte del vettore  $\hat{\mathbf{y}}_h$ ). Queste poi vengono combinate linearmente per generare l'insieme delle previsioni riconciliate per l'intera struttura.

#### Bottom-up

Il primo e il più semplice degli approcci classici è il metodo **bottom-up** (Orcutt *et al.*, 1968), il quale consiste nel prevedere solo le serie al livello più disaggregato e nell'aggregarle in modo opportuno per ottenere quelle ai livelli

superiori. Utilizzando la formula (1.13), la matrice  $\mathbf{G}$  va costruita in modo da selezionare solo la porzione della matrice  $\widehat{\mathbf{Y}}$  corrispondente alle previsioni di base al livello più disaggregato,  $\widehat{\mathbf{B}}$ , ossia:

$$\mathbf{G} = [\mathbf{0}_{n_b \times n_a} \quad \mathbf{I}_{n_b}] \quad \text{e} \quad \widetilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{S} [\mathbf{0}_{n_b \times n_a} \quad \mathbf{I}_{n_b}] \widehat{\mathbf{Y}} = \mathbf{S} \widehat{\mathbf{B}}.$$

### Top-down

Un altro approccio storicamente molto utilizzato è quello **top-down** (Gross e Sohl, 1990). L'idea è l'esatto opposto di quanto visto per l'approccio *bottom-up*: si prevede solo la serie al livello più aggregato, la quale poi viene disaggregata attraverso un vettore di proporzioni  $\mathbf{p}_h = [p_1 \quad \dots \quad p_{n_b}]'$ ,  $h = 1, \dots, H$ . Le tecniche adottate per costruire  $\mathbf{p}_h$  sono tre e sfruttano in maniera diversa l'informazione della gerarchia. In particolare, per la riconciliazione *top-down* si possono usare:

- le quote medie calcolate sui dati osservati (Gross e Sohl, 1990);
- le quote calcolate sulle medie dei dati osservati (Gross e Sohl, 1990);
- le quote costruite a partire dalle previsioni (Athanasopoulos *et al.*, 2009).

In questo caso, l'espressione (1.12) può essere riscritta come:

$$\widetilde{\mathbf{y}}_h = \mathbf{S} [\mathbf{p}_h \quad \mathbf{0}_{n_b \times n-1}] \widehat{\mathbf{y}}_h, \quad h = 1, \dots, H.$$

### Middle-out

Il terzo e ultimo tra gli approcci classici è il metodo **middle-out** (Athanasopoulos *et al.*, 2009), il quale non è altro che una combinazione dei due visti in precedenza. Nello specifico, si prevedono le serie ad un livello intermedio e si utilizza l'approccio *bottom-up* per ottenere le riconciliazioni ai livelli superiori, mentre per quelle ai livelli inferiori si utilizza la tecnica *top-down*.

### Osservazioni

L'approccio *bottom-up* ha il principale vantaggio di non perdere alcun tipo di informazione di dettaglio a causa dell'aggregazione, tuttavia ignora completamente le relazioni tra le serie. Inoltre i valori osservati al livello

più disaggregato possono essere molto variabili, presentando perciò un forte ‘rumore’ e risultando, quindi, più difficili da modellare e prevedere.

La tecnica *top-down* si può considerare utile quando vi sono problemi con le serie ai livelli inferiori (ad esempio se si hanno dati mancanti o una non trascurabile presenza di valori nulli, Schwarzkopf *et al.*, 1988). Per contro, Hyndman *et al.* (2011) mostrano come qualsiasi approccio di questo tipo dia luogo a previsioni distorte per tutti i livelli della gerarchia anche se le previsioni di base sono non distorte. Ciò vale per qualsiasi tipo di proporzione utilizzata e va inevitabilmente a riflettersi sull’approccio *middle-out*, anch’esso affetto dal medesimo problema di distorsione riscontrato per l’approccio *top-down*.

In conclusione, le tecniche tradizionali di riconciliazione delle previsioni presentano delle forti debolezze:

- non sono capaci di sfruttare in modo efficiente i dati disponibili in quanto utilizzano previsioni su un numero limitato di serie;
- non considerano l’intrinseca struttura di correlazione della gerarchia, cioè non prendono in considerazione la correlazione tra le serie a ciascun livello;
- non consentono di ricavare facilmente degli intervalli di previsione.

### 1.3.3 Riconciliazione ottimale puntuale

Tutti i metodi considerati hanno limiti derivanti soprattutto dall’utilizzo dell’informazione di un singolo livello di aggregazione. Appare dunque interessante l’idea di utilizzare tutto il vettore delle previsioni di base  $\hat{\mathbf{y}}_h$  e non solo una parte. In questo senso, Hyndman *et al.* (2011) hanno sviluppato un modello di regressione lineare generalizzato, valido per un fissato  $h$ , che include al suo interno i vincoli di aggregazione tramite la rappresentazione strutturale:

$$\hat{\mathbf{y}}_h = \mathbf{S}\boldsymbol{\beta}_h + \boldsymbol{\varepsilon}_h, \quad (1.14)$$

dove  $\boldsymbol{\varepsilon}_h$  è un vettore casuale ( $n \times 1$ ) degli errori di coerenza (*coherency errors*) assunti con media  $\mathbf{0}$  e matrice di covarianza  $\boldsymbol{\Sigma}_h$  ignota,  $\boldsymbol{\beta}_h$  è un sottoinsieme di  $\mathbf{y}_h$ , vettore degli ignoti valori da prevedere, contenente le serie al livello più disaggregato, mentre  $\mathbf{S}$  è la matrice somma.

In realtà, si può mostrare che l'espressione (1.14) può essere interpretata come una riparametrizzazione del problema di aggiustamento ai minimi quadrati proposto da Stone *et al.* (1942) e formalizzato da Byron (1978), esprimibile come

$$\widehat{\mathbf{y}}_h = \mathbf{y}_h + \boldsymbol{\varepsilon}_h \quad (1.15)$$

e soggetto ai vincoli di aggregazione (1.5), per cui  $\mathbf{U}'\mathbf{y}_h = 0$ . In tale formulazione la soluzione del problema di stima si ottiene tramite proiezione (secondo una matrice da stabilire  $\mathbf{M}$ ) delle previsioni di base  $\widehat{\mathbf{y}}_h$  nello spazio riconciliato  $\mathcal{S}$  ('approccio di proiezione' o *projection approach*, van Erven e Cugliari, 2015, Wickramasuriya *et al.*, 2019, Panagiotelis *et al.*, 2020a). Un aspetto particolarmente interessante, che tornerà utile nell'applicazione considerata nel Capitolo 6, è il fatto che non vi sia la necessità di costruire la matrice  $\mathbf{S}$ , la quale in alcuni casi riferiti a sistemi 'complessi' di serie storiche linearmente dipendenti non è di semplice definizione.

Particolare attenzione bisogna porre al vettore degli errori  $\boldsymbol{\varepsilon}_h$  che deve avere media nulla e matrice di covarianza  $\boldsymbol{\Sigma}_h$ . Tuttavia  $\boldsymbol{\Sigma}_h$  non è identificabile sulla base dei dati a disposizione e, quando è nota, è spesso singolare per effetto dei vincoli di aggregazione sul vettore  $\mathbf{y}_h$  (Wickramasuriya *et al.*, 2019). Per ovviare a questo problema, in letteratura è stata proposta una soluzione alternativa che sfrutta i residui dei modelli usati per ottenere le previsioni di base. Riprendendo la rappresentazione strutturale (1.14), Wickramasuriya *et al.* (2019) mostrano che

$$\tilde{\mathbf{y}}_h = \mathbf{S}\mathbf{G}\widehat{\mathbf{y}}_h = \mathbf{S}(\mathbf{S}'\mathbf{W}_h^{-1}\mathbf{S})^{-1}\mathbf{S}'\mathbf{W}_h^{-1}\widehat{\mathbf{y}}_h \quad (1.16)$$

è l'unica soluzione che minimizza la traccia (*MinT*) della matrice di covarianza degli errori delle previsioni riconciliate

$$\text{Var}(\tilde{\mathbf{e}}_h|\mathbf{I}_h) = \mathbf{S}\mathbf{G}\mathbf{W}_h\mathbf{G}'\mathbf{S}'$$

sotto il vincolo di non distorsione  $\mathbf{S}\mathbf{G}\mathbf{S} = \mathbf{S}$ , con  $\tilde{\mathbf{e}}_h = \mathbf{y}_h - \tilde{\mathbf{y}}_h$  vettore degli errori delle previsioni riconciliate e  $\mathbf{W}_h = \text{Var}(\widehat{\mathbf{e}}_h|I_T)$ , con  $\widehat{\mathbf{e}}_h = \mathbf{y}_h - \widehat{\mathbf{y}}_h$  vettore degli errori delle previsioni di base.

Wickramasuriya *et al.* (2019) stabiliscono inoltre l'equivalenza della (1.16) con l'approccio di proiezione, in cui si fa uso di  $\mathbf{W}_h$  come matrice metrica

volta ad indurre la norma di Mahalanobis. In formule, le previsioni riconciliate secondo l'approccio di proiezione si ottengono risolvendo il seguente problema quadratico linearmente vincolato:

$$\tilde{\mathbf{y}}_h = \operatorname{argmin}_{\mathbf{y}_h} [\hat{\mathbf{y}}_h - \mathbf{y}_h] \mathbf{W}_h^{-1} [\hat{\mathbf{y}}_h - \mathbf{y}_h] \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{U}'\mathbf{y}_h = 0,$$

la cui soluzione è data da

$$\tilde{\mathbf{y}}_h = \left[ \mathbf{I}_n - \mathbf{W}_h \mathbf{U} (\mathbf{U}'\mathbf{W}_h \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}' \right] \hat{\mathbf{y}}_h = \mathbf{M} \hat{\mathbf{y}}_h, \quad (1.17)$$

con  $\mathbf{M} = \left[ \mathbf{I}_n - \mathbf{W}_h \mathbf{U} (\mathbf{U}'\mathbf{W}_h \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}' \right]$  matrice  $(n \times n)$  di proiezione.

Anche se  $\mathbf{W}_h$  non soffre dei problemi di non identificabilità che affliggono  $\boldsymbol{\Sigma}_h$ , essa è molto difficile da stimare soprattutto per  $h > 1$ . Per questo motivo i casi considerati in letteratura presentano tutti una struttura tale per cui  $\mathbf{W}_h = k_h \mathbf{W}$  con  $\mathbf{W} = \mathbf{W}_1$  e  $k_h$  costante di proporzionalità che non serve sia nota, in quanto nelle formule (1.16) e (1.17) scompare per effetto di semplificazioni. Di seguito verranno mostrate alcune delle forme più utilizzate per approssimare  $\mathbf{W}$  (il prefisso 'cs-', che deriva da *cross-sectional*, indica il fatto che si sta considerando il solo caso di gerarchie contemporanee).

1. Identità (**cs-ols**):

$$\widehat{\mathbf{W}}_{\text{cs-ols}} = \mathbf{I}_n.$$

Questa matrice corrisponde all'applicazione dei minimi quadrati ordinari (OLS). Essa, oltre a non tenere in considerazione la correlazione tra le serie, è ottimale solo in situazioni di equivarianza, una condizione quasi impossibile da soddisfare nel caso di strutture gerarchiche, necessariamente caratterizzate da serie di scala dimensionale diversa.

2. Strutturale (**cs-struct**):

$$\widehat{\mathbf{W}}_{\text{cs-struct}} = \operatorname{diag}(\mathbf{S}\mathbf{1}_{n_b})$$

con  $\mathbf{1}_{n_b}$  vettore unitario di lunghezza  $n_b$ . Questa variante proposta da Athanasopoulos *et al.* (2017) dipende solo dalla struttura della gerarchia e, rispetto agli OLS, assume l'equivarianza degli errori solo al livello più disaggregato. Risulta particolarmente utile nei casi in cui non

si hanno a disposizione i residui, come nel caso di previsione attraverso esperti. Ad esempio, nella gerarchia rappresentata nella Figura 1.4a si avrebbe:  $\widehat{\mathbf{W}}_{\text{cs-struct}} = \text{diag}(4, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$ , dove la varianza di ogni nodo è pari al numero di variabili del *bottom level* che vi afferiscono.

3. MinT-sam (**cs-sam**):

$$\widehat{\mathbf{W}}_{\text{cs-sam}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \widehat{\mathbf{e}}_t \widehat{\mathbf{e}}_t'$$

con  $\widehat{\mathbf{e}}_t = \mathbf{y}_t - \widehat{\mathbf{y}}_t$  vettore ( $n \times 1$ ) dei residui *in-sample* delle previsioni di base. Anche se molto semplice da ottenere, tale varianza risulta poco affidabile se  $n > T$  per problemi di singolarità, oppure se  $T$  è di poco superiore a  $n$ .

4. Ponderata (**cs-wls**):

$$\widehat{\mathbf{W}}_{\text{cs-wls}} = \mathbf{I}_n \odot \widehat{\mathbf{W}}_{\text{cs-sam}}$$

dove  $\odot$  è il prodotto di Hadamard, elemento per elemento. Si tratta di fatto della matrice contenente sulla diagonale la varianza dei residui *in-sample*. In questo caso abbiamo una soluzione equivalente ai minimi quadrati pesati proposti da Hyndman *et al.* (2016).

5. MinT-shr (**cs-shr**):

$$\widehat{\mathbf{W}}_{\text{cs-shr}} = \lambda \widehat{\mathbf{W}}_{\text{cs-wls}} + (1 - \lambda) \widehat{\mathbf{W}}_{\text{cs-sam}}$$

e  $0 \leq \lambda \leq 1$ . In altre parole si ottiene ‘restringendo’ gli elementi di  $\widehat{\mathbf{W}}_{\text{cs-sam}}$  fuori della diagonale verso lo 0 attraverso il parametro di regolarizzazione  $\lambda$  (*shrinkage*). Questa quantità si calcola seguendo l’approccio di Ledoit e Wolf (2004), sviluppato da Schäfer e Strimmer (2005):

$$\lambda = \frac{\sum_{i \neq j} \widehat{\text{Var}}(\hat{r}_{ij})}{\sum_{i \neq j} \hat{r}_{ij}^2} \quad (1.18)$$

dove  $\hat{r}_{ij}$  è l’elemento di posto  $(i, j)$  della matrice di correlazione degli errori *in-sample*.



# Capitolo 2

## Gerarchia temporale di una serie storica

### 2.1 Definizione e notazione

Nella pratica comune dell'analisi delle serie temporali, di solito si assume che una serie storica venga regolarmente osservata a una data frequenza. Silvestrini e Veredas (2008) fanno notare che la scelta della frequenza non è sempre fissata, ma spesso è soggettiva: si consideri i rendimenti finanziari, sarebbe preferibile considerare dati orari, giornalieri o settimanali?

La frequenza, ovviamente, influisce sui risultati del modello di stima sia in termini di adattamento che di previsione. Inoltre, come sottolineato da Amemiya e Wu (1972) e Tiao (1972), differenti livelli di aggregazione temporale (quindi diversa frequenza di osservazione) per la stessa serie, possono contenere informazioni diverse, utili per individuare il processo generatore dei dati sottostante, attenuando o accentuando determinate caratteristiche: a frequenze basse emergono trend e cicli, mentre ad alte frequenze sarà più evidente un'eventuale componente stagionale e dinamiche di breve periodo.

Una gerarchia di tipo temporale viene costruita a partire dall'aggregazione non sovrapposta delle osservazioni di una serie storica a intervalli regolari. Ad esempio, a partire da una serie mensile, tramite aggregazione temporale possono essere costruite le serie con cadenza a 2 mesi, a 3 mesi, a 4 mesi,

a 6 mesi, fino a 12 mesi (annuale). Operare con strutture temporali significa avere a disposizione la medesima variabile osservata a frequenza diversa, al contrario di quello che avviene con le gerarchie contemporanee, in cui si hanno a disposizione più variabili, tutte osservate con la medesima cadenza temporale.

Utilizzando la notazione di Athanasopoulos *et al.* (2017), si consideri una serie storica  $\{x_t\}_{t=1}^T$  osservata alla più alta frequenza disponibile  $m$ . Dato un fattore  $k$  di  $m$ , si può costruire una versione temporalmente aggregata di  $x_t$  che abbia un periodo stagionale pari a  $M_k = m/k$  attraverso la somma non sovrapposta di  $k$  valori consecutivi<sup>1</sup>. Inoltre, per poter disporre di dati regolari, si assume che il numero totale delle osservazioni per  $x_t$ , denominato  $T$ , sia un multiplo di  $m$ . In altri termini, fissiamo  $T = N \cdot m$ , dove  $N$  è la lunghezza della serie osservata alla più bassa frequenza possibile.

Le varie serie aggregate possono essere riscritte nel seguente modo:

$$x_t^{[k]} = \sum_{t=(l-1)k+1}^{lk} x_t, \quad l = 1, \dots, M_k, \quad k \in \mathcal{K},$$

dove  $\mathcal{K} = \{k_p, k_{p-1}, \dots, k_1\}$  è l'insieme dei  $p$  fattori di  $m$ , posti in ordine decrescente in modo tale che  $k_p = m$  e  $k_1 = 1$ .

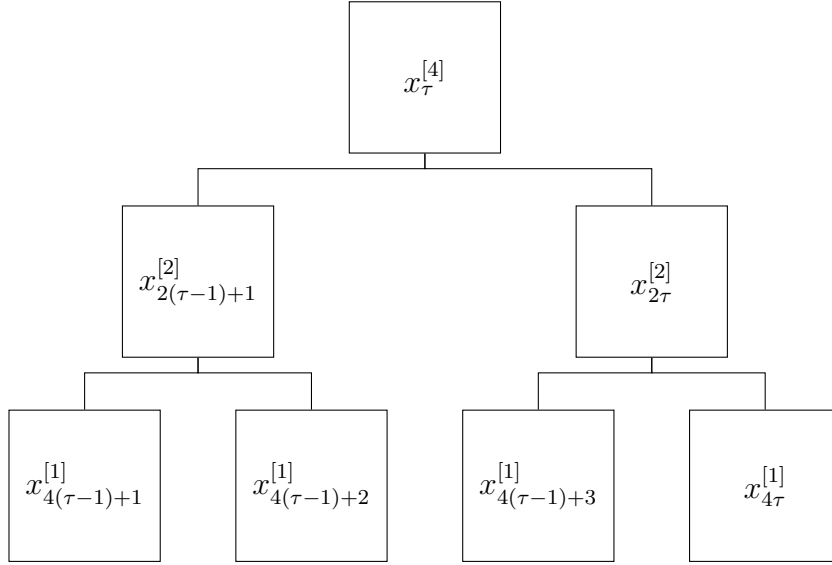
Al fine di avere un unico indice comune per indicare le osservazioni ai diversi ordini di aggregazione temporale, si definisce  $\tau$  come l'indice delle osservazioni al livello più aggregato, ossia  $x_\tau^{[m]}$ ,  $\tau = 1, \dots, N$ , è la serie al livello di aggregazione temporale più elevato. Fissato  $\tau$  e per  $k \neq m$ , è possibile raccogliere in un unico vettore ( $M_k \times 1$ ) ciascuna serie aggregata temporalmente:

$$\mathbf{x}_\tau^{[k]} = \left[ x_{M_k(\tau-1)+1}^{[k]} \ x_{M_k(\tau-1)+2}^{[k]} \ \dots \ x_{M_k\tau}^{[k]} \right]', \quad \tau = 1, \dots, N, \text{ e } k \in \{k_{p-1}, \dots, k_2, 1\}.$$

In questo modo è possibile rappresentare il vettore  $[(k^* + m) \times 1]$ , con  $k^* = \sum_{j=1}^{p-1} k_j$ , che raccoglie tutte le osservazioni come

$$\mathbf{x}_\tau = \left[ x_\tau^{[m]} \ \mathbf{x}_\tau^{[k_{p-1}]'} \ \dots \ \mathbf{x}_\tau^{[k_2]'} \ \mathbf{x}_\tau^{[1]'} \right]' = \left[ \mathbf{t}_{x_\tau} \ \mathbf{x}_\tau^{[1]'} \right]', \quad \tau = 1, \dots, N,$$

<sup>1</sup>Se  $k$  non è un fattore di  $m$ , allora la stagionalità della serie aggregata non sarà intera e le previsioni saranno più difficili da ottenere (non si prenderà in esame questo caso).



**Figura 2.1:** Gerarchia temporale per una serie storica trimestrale.

dove  $\mathbf{t}_{x_\tau} = \left[ x_\tau^{[m]} \mathbf{x}_\tau^{[k_{p-1}]} \dots \mathbf{x}_\tau^{[k_2]} \right]'$  è un vettore  $(k^* \times 1)$  contenente i valori di tutte le serie aggregate temporalmente e  $\mathbf{x}_\tau^{[1]}$  è il vettore  $(m \times 1)$  contenente le osservazioni al tempo  $\tau$  della serie storica a frequenza più alta.

Come nel caso delle gerarchie contemporanee, anche in questo caso è possibile rappresentare con una struttura gerarchica le relazioni di aggregazione che legano la serie con la più alta frequenza e quelle a frequenza minore. Si consideri ad esempio una serie trimestrale: essa può essere aggregata in serie annuali e semestrali ( $\mathcal{K} = \{4, 2, 1\}$ ) e l'intero sistema è facilmente rappresentabile attraverso il diagramma ad albero in Figura 2.1.

Le espressioni (1.2), (1.4) e (1.5) valide per le gerarchie contemporanee possono essere adattate al caso temporale nel seguente modo:

$$\mathbf{x}_\tau = \mathbf{R}_1 \mathbf{x}_\tau^{[1]}, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{t}_{x_\tau} = \mathbf{K}_1 \mathbf{x}_\tau^{[1]}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{Z}'_1 \mathbf{x}_\tau = \mathbf{0}_{(k^* \times 1)} \quad (2.3)$$

dove  $\tau = 1, \dots, N$ ,  $\mathbf{K}_1$  è la matrice  $(k^* \times m)$  di aggregazione temporale,  $\mathbf{R}_1$  è la matrice somma temporale (*temporal summing matrix*) di dimensione  $[(k^* + m) \times m]$  e  $\mathbf{Z}_1$  è la matrice  $[m \times (k^* + m)]$  dei vincoli di aggregazione (*zero constraints kernel matrix*). Queste tre particolari matrici possono essere

riscritte come:

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{k_1} \otimes \mathbf{1}'_{k_p} \\ \mathbf{I}_{k_2} \otimes \mathbf{1}'_{k_{p-1}} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{k_{p-1}} \otimes \mathbf{1}'_{k_2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \quad \mathbf{Z}'_1 = [\mathbf{I}_{k^*} \quad -\mathbf{K}_1] \quad (2.4)$$

con  $\mathbf{I}_r$  matrice identità di dimensione  $(r \times r)$ ,  $\mathbf{1}_r$  vettore  $(r \times 1)$  di 1 e  $\otimes$  indica il prodotto di Kronecker. Riprendendo il caso della serie storica trimestrale, in cui  $k^* = 3$  e  $m = 4$ , si ha:

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{Z}'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

La formulazione appena presentata può essere estesa all'intero periodo di osservazione di  $x_t$ . Indicato con  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}'_1 \dots \mathbf{x}'_\tau \dots \mathbf{x}'_N)'$ , il vettore  $[N(k^* + m) \times 1]$  contenente tutte le osservazioni a qualsiasi frequenza, allora

$$\mathbf{Z}'_N \mathbf{x} = \mathbf{0}_{(Nk^* \times 1)}, \quad (2.5)$$

dove  $\mathbf{Z}'_N = [\mathbf{I}_{Nk^*} \quad -\mathbf{K}_N]$ , e

$$\mathbf{K}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{k_1 N} \otimes \mathbf{1}'_{k_p} \\ \mathbf{I}_{k_2 N} \otimes \mathbf{1}'_{k_{p-1}} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{k_{p-1} N} \otimes \mathbf{1}'_{k_2} \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Per concludere, non sempre è possibile rappresentare la gerarchia temporale di una serie storica sotto forma di diagramma ad albero. In alcuni casi è necessario ricorrere ad una struttura raggruppata piuttosto che esclusivamente gerarchica. Ciò accade ad esempio con una serie mensile, i cui valori possono venire aggregati a 2 mesi, a 3 mesi, a 4 mesi, a 6 mesi ed, infine, a 12 mesi ( $k \in \{12, 6, 4, 3, 2, 1\}$ ). La serie mensile e i vari aggregati possono dunque essere rappresentati da due diverse gerarchie, come in Figura 2.2.



## 2.2 Riconciliazione temporale di previsioni puntuali

### 2.2.1 Notazione

Avendo a disposizione dati riferiti a diverse frequenze temporali di una stessa variabile, in un'organizzazione aziendale essi possono essere usati per previsioni di breve periodo (frequenze alte) o di lungo periodo (frequenze basse), in entrambi i casi con l'obiettivo di fornire un supporto al processo decisionale. Tuttavia le decisioni operative, tattiche e strategiche devono essere allineate tra di loro, altrimenti un disallineamento può portare a perdite di opportunità ed a costi aggiuntivi (Jain *et al.*, 2012). Ad esempio, le previsioni quotidiane a livello operativo potrebbero fornire una visione stabile del mercato; al contrario, le previsioni a livello strategico potrebbero indicare un mercato in forte espansione, con varie implicazioni per gli investimenti futuri e le decisioni di bilancio. Quale strada si dovrebbe seguire?

Quindi l'obiettivo è ottenere delle previsioni coerenti per una struttura temporale dei dati di una singola serie storica. Come per le gerarchie contemporanee, anche per quelle temporali è possibile partire da previsioni ottenute in modo separato per ogni frequenza, utilizzando i metodi già esposti (ETS, ARMA, VAR, ...).

Formalmente, indicato con  $H$  l'orizzonte massimo di previsione per la serie aggregata con la frequenza più bassa, si generano  $M_k H$  previsioni per ogni livello di aggregazione  $k$ . Per ogni orizzonte  $h = 1, \dots, H$ , le previsioni di base possono essere raccolte in un vettore  $[(k^* + m) \times 1]$

$$\widehat{\mathbf{x}}_h = \left[ \widehat{x}_h^{[m]} \quad \widehat{\mathbf{x}}_h^{[k_{p-1}]'} \quad \dots \quad \widehat{\mathbf{x}}_h^{[k_2]'} \quad \widehat{\mathbf{x}}_h^{[1]'} \right]', \quad (2.7)$$

dove  $\widehat{\mathbf{x}}_h^{[k]} = \left[ x_{M_k(h-1)+1}^{[k]} \quad x_{M_k(h-1)+2}^{[k]} \quad \dots \quad x_{M_k h}^{[k]} \right]'$  è un vettore di lunghezza  $M_k$ .

Queste quantità, ovviamente, non sono temporalmente coerenti, in quanto non sfruttano l'informazione gerarchica a disposizione. In altri termini  $\mathbf{Z}'_1 \widehat{\mathbf{x}}_h \neq \mathbf{0}_{k^* \times 1}, \forall h$ . Bisogna quindi operare in modo da allineare le previsioni. Come in precedenza, una prima classe di metodologie di riconciliazione comprende tecniche tradizionali come *top-down* o *bottom-up*. Una seconda possibilità è quella proposta da Athanasopoulos *et al.* (2017), che estendo-

no al caso temporale la riconciliazione ottimale puntuale di una struttura gerarchica contemporanea.

## 2.2.2 Riconciliazione ottimale puntuale

Dato il vettore  $\hat{\mathbf{x}}_h$  (2.7) di previsioni di base non distorte, estendendo il risultato di Athanasopoulos *et al.* (2017) è possibile adattare le espressioni (1.16) e (1.17) valide per gerarchie contemporanee al caso temporale ottenendo, rispettivamente,

$$\tilde{\mathbf{x}}_h = \mathbf{R}_1 (\mathbf{R}'_1 \boldsymbol{\Omega}_h^{-1} \mathbf{R}_1)^{-1} \mathbf{R}'_1 \boldsymbol{\Omega}_h^{-1} \hat{\mathbf{x}}_h = \mathbf{R}_1 \mathbf{G} \hat{\mathbf{x}}_h \quad (2.8)$$

e

$$\tilde{\mathbf{x}}_h = \left[ \mathbf{I}_n - \boldsymbol{\Omega}_h \mathbf{Z}_1 (\mathbf{Z}'_1 \boldsymbol{\Omega}_h \mathbf{Z}_1)^{-1} \mathbf{Z}'_1 \right] \hat{\mathbf{x}}_h = \mathbf{M} \hat{\mathbf{x}}_h, \quad (2.9)$$

dove  $\tilde{\mathbf{x}}_h$  è il vettore  $[(k^* + m) \times 1]$  dei valori riconciliati e  $\boldsymbol{\Omega}_h$  è una matrice  $[(k^* + m) \times (k^* + m)]$  definita positiva che è l'analogo, nel caso temporale, di  $\mathbf{W}_h$ . Anche in questo caso, come già avvenuto per le gerarchie contemporanee, verranno prese in considerazione approssimazioni semplificate per  $\boldsymbol{\Omega}_h$ , del tipo  $\boldsymbol{\Omega}_h = k_h \boldsymbol{\Omega}$ .

Alcune di queste approssimazioni fanno uso dei residui prodotti dai modelli usati per ricavare le previsioni di base. Si consideri pertanto il vettore  $(M_k \times 1)$  dei residui *in-sample* al tempo  $\tau$ :

$$\hat{\mathbf{e}}_\tau^{[k]} = \mathbf{x}_\tau^{[k]} - \hat{\mathbf{x}}_\tau^{[k]}, \quad \tau = 1, \dots, N, \quad k \in \mathcal{K}.$$

Esso può essere organizzato in  $p$  matrici di dimensione  $(N \times M_k)$

$$\hat{\mathbf{E}}_x^{[k]} = \begin{bmatrix} \left( \hat{\mathbf{e}}_1^{[k]} \right)' \\ \vdots \\ \left( \hat{\mathbf{e}}_\tau^{[k]} \right)' \\ \vdots \\ \left( \hat{\mathbf{e}}_N^{[k]} \right)' \end{bmatrix}, \quad k \in \mathcal{K},$$

che, a loro volta, possono essere raggruppate nella matrice  $[N \times (k^* + m)]$  dei residui *in-sample*

$$\hat{\mathbf{E}}_x = \left[ \hat{\mathbf{E}}_x^{[m]} \hat{\mathbf{E}}_x^{[k_{p-1}]} \dots \hat{\mathbf{E}}_x^{[k_2]} \hat{\mathbf{E}}_x^{[1]} \right].$$

Tornando al problema di possibili espressioni approssimate di  $\mathbf{\Omega}$ , le prime proposte sono state formulate da Athanasopoulos *et al.* (2017) e Hyndman e Kourentzes (2018). Si prenderanno inoltre in considerazione alcune delle recenti proposte fatte da Nystrup *et al.* (2020). In tutti i casi, si userà il prefisso ‘t-’ per rendere esplicito il fatto di operare in un contesto di gerarchie temporali.

1. Identità (**t-ols**):

$$\widehat{\mathbf{\Omega}}_{\text{t-ols}} = \mathbf{I}_{k^*+m}.$$

Come nel caso contemporaneo, questa formulazione corrisponde alla soluzione dei minimi quadrati ordinari. Va detto che assumere l’equivarianza con strutture gerarchiche temporali è troppo restrittivo ed irrealistico, sicché questa opzione, tecnicamente plausibile, non incontra il favore degli specialisti dell’argomento.

2. MinT-sam (**t-sam**):

$$\widehat{\mathbf{\Omega}}_{\text{t-sam}} = \frac{1}{N} \left( \widehat{\mathbf{E}}_x \right)' \widehat{\mathbf{E}}_x.$$

Questa matrice è ben definita se  $N > (k^* + m)$  altrimenti si rischia di incorrere in problemi di non invertibilità. Inoltre per poter essere considerata come la matrice di covarianza dei residui *in-sample* è necessario che sia nulla la media marginale per colonna di  $\widehat{\mathbf{E}}_x$ , cioè  $N^{-1} \sum_{\tau=1}^N \hat{e}_{\tau,l} = 0$  per  $l = 1, \dots, k^* + m$ . Se questo non si verifica, allora  $\widehat{\mathbf{\Omega}}_{\text{t-sam}}$  è la matrice dell’errore quadratico medio delle osservazioni (*sample Mean Square Error matrix*).

3. MinT-shr (**t-shr**):

$$\widehat{\mathbf{\Omega}}_{\text{t-shr}} = \lambda \left( \mathbf{I}_{k^*+m} \odot \widehat{\mathbf{\Omega}}_{\text{t-sam}} \right) + (1 - \lambda) \widehat{\mathbf{\Omega}}_{\text{t-sam}}.$$

Nei casi in cui il numero di nodi della gerarchia temporale è maggiore del numero di osservazioni per la frequenza temporale più bassa (ossia quando  $N < k^* + m$ ),  $\widehat{\mathbf{\Omega}}_{\text{t-sam}}$  non è utilizzabile per calcolare le previsioni riconciliate. Una buona alternativa risulta essere la versione *shrinkage*, in cui il parametro  $\lambda$  viene calcolato come nella formula (1.18).



Le prossime tre matrici fanno riferimento a strutture diagonali che ignorano la correlazione tra i livelli:

4. **Strutturale (t-struct):**

$$\widehat{\boldsymbol{\Omega}}_{\text{t-struct}} = \text{diag}(\mathbf{R}_1 \mathbf{1}_m),$$

con  $\mathbf{1}_m$  vettore unitario di lunghezza  $m$ . Come nel corrispettivo caso contemporaneo, si suppone che la varianza degli errori di base a ciascun livello sia approssimativamente la stessa. Quindi nella diagonale è contenuto il contributo apportato da ciascun livello.

5. *Hierarchy variance scaling (t-wlsh):*

$$\widehat{\boldsymbol{\Omega}}_{\text{t-wlsh}} = \mathbf{I}_{k^*+m} \odot \widehat{\boldsymbol{\Omega}}_{\text{t-sam}}.$$

Si tratta di una matrice diagonale che contiene una stima diversa per la varianza di ogni nodo, assumendo pertanto eteroschedasticità tra ed entro i livelli della gerarchia.

6. *Series variance scaling (t-wlsv):*

$$\widehat{\boldsymbol{\Omega}}_{\text{t-wlsv}} = \begin{bmatrix} (\hat{\sigma}^{[m]})^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (\hat{\sigma}^{[k_{p-1}]})^2 \mathbf{I}_{M_{k_{p-1}}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (\hat{\sigma}^{[1]})^2 \mathbf{I}_{M_1} \end{bmatrix},$$

$\widehat{\boldsymbol{\Omega}}_{\text{t-wlsv}}$  è una matrice diagonale formata dalle stime delle varianze degli errori di ogni ordine di aggregazione,  $(\hat{\sigma}^{[k]})^2$  con  $k \in \mathcal{K}$ .

Dal momento che con le gerarchie temporali si vuole utilizzare anche l'informazione sulla dinamica delle serie a diverse frequenze, Nystrup *et al.* (2020) propongono delle formulazioni che includano una struttura di autocorrelazione:

7. *Autocovariance (t-acov):*

$$\widehat{\boldsymbol{\Omega}}_{\text{t-acov}} = \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{\Omega}}^{[m]} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\boldsymbol{\Omega}}^{[k_{p-1}]} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \widehat{\boldsymbol{\Omega}}^{[k_2]} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \widehat{\boldsymbol{\Omega}}^{[1]} \end{bmatrix},$$

dove le  $p$  matrici  $\widehat{\boldsymbol{\Omega}}^{[k]}$ , ciascuna di dimensione  $(M_k \times M_k)$ , vengono calcolate come

$$\widehat{\boldsymbol{\Omega}}^{[k]} = \frac{1}{N} \sum_{\tau=1}^N \hat{\mathbf{e}}_{\tau}^{[k]} (\hat{\mathbf{e}}_{\tau}^{[k]})' = \frac{1}{N} \left( \widehat{\mathbf{E}}^{[k]} \right)' \widehat{\mathbf{E}}^{[k]}, \quad k \in \mathcal{K}.$$

Affinché  $\widehat{\boldsymbol{\Omega}}_{\text{t-acov}}$  sia invertibile,  $N$  deve essere maggiore di  $m$ . Questo vincolo risulta essere meno restrittivo della condizione necessaria per la non singolarità di  $\widehat{\boldsymbol{\Omega}}_{\text{t-sam}}$ .

8. *Structural AR(1) (t-strar1)*:

$$\widehat{\boldsymbol{\Omega}}_{\text{t-strar1}} = \widehat{\boldsymbol{\Omega}}_{\text{t-struc}}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\Gamma} \widehat{\boldsymbol{\Omega}}_{\text{t-struc}}^{\frac{1}{2}}$$

Per definire  $\boldsymbol{\Gamma}$ , si considerino prima le matrici di Toeplitz  $(M_k \times M_k)$  costruite a partire dai coefficienti  $\rho_{[k]}$  di autocorrelazione del primo ordine dei residui per ciascun livello  $k \in \mathcal{K}$ :

$$\boldsymbol{\Gamma}^{[m]} = \mathbf{1}, \quad \boldsymbol{\Gamma}^{[k]} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{[k]} & \cdots & \rho_{[k]}^{M_k-1} \\ \rho_{[k]} & 1 & \cdots & \rho_{[k]}^{M_k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{[k]}^{M_k-1} & \rho_{[k]}^{M_k-2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad k \in \mathcal{K}.$$

$\boldsymbol{\Gamma}$  non è altro che la matrice  $[(k^* + m) \times (k^* + m)]$  composta da  $p$  blocchi:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}' & \cdots & \mathbf{0}' \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Gamma}^{[k_{p-1}]} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \boldsymbol{\Gamma}^{[1]} \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

9. *Series AR(1) (t-sar1)*:

$$\widehat{\boldsymbol{\Omega}}_{\text{t-sar1}} = \widehat{\boldsymbol{\Omega}}_{\text{t-wlsv}}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\Gamma} \widehat{\boldsymbol{\Omega}}_{\text{t-wlsv}}^{\frac{1}{2}}$$

dove  $\boldsymbol{\Gamma}$  è stata definita nella (2.10).

10. *Hierarchy AR(1) (t-har1)*:

$$\widehat{\boldsymbol{\Omega}}_{\text{t-har1}} = \widehat{\boldsymbol{\Omega}}_{\text{t-wlsh}}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\Gamma} \widehat{\boldsymbol{\Omega}}_{\text{t-wlsh}}^{\frac{1}{2}}$$

che combina la *hierarchy variance scaling* con la matrice di autocorrelazione  $\boldsymbol{\Gamma}$ .

# Capitolo 3

## Le gerarchie cross-temporali

### 3.1 Introduzione e definizione

Uno dei problemi principali nell'ambito del *demand planning* è l'esigenza di disporre di 'un'unica previsione' (*one-number forecast*, Kourentzes, 2019), in grado di fornire una visione coerente del futuro qualunque sia il livello di dettaglio sezionale o di frequenza temporale con cui le previsioni vengono fatte. Lo scopo finale è permettere di avere decisioni allineate tra i diversi livelli di un'organizzazione, che per ruolo e per scelta strategica possono essere focalizzati su singoli mercati e su orizzonti temporali diversi. In questo senso, la riconciliazione contemporanea e temporale compiono solo una parte dell'opera necessaria, in quanto la prima si occupa solo di allineare le previsioni all'interno del livello di business (prodotti, mercati, settori produttivi, etc.), mentre la seconda si occupa dell'orizzonte decisionale (operativo, tattico, strategico). Le principali differenze tra le gerarchie contemporanee e temporali sono schematizzate nella Tabella 3.1.

Per sviluppare una strategia di *one-number forecast*, si possono percorrere due strade: (i) cercare dei metodi che combinino le tecniche valide per le gerarchie contemporanee e per quelle temporali sfruttando così i punti di forza di ciascun approccio (procedure euristiche) oppure (ii) estendere l'approccio di combinazione ottimale delle previsioni, valido finora per una singola dimensione (contemporanea e temporale) alle gerarchie cross-temporali,

**Tabella 3.1:** Principali differenze tra gerarchie contemporanee e temporali

Gerarchie contemporanee	Gerarchie temporali
- Oggetto di interesse sono più serie temporali legate tra di loro da particolari caratteristiche, come ad esempio la tipologia del prodotto o la posizione geografica.	- La protagonista è la singola serie storica e la riconciliazione coinvolge frequenze temporali diverse di tale serie.
- L'allineamento delle previsioni è garantito tra i vari livelli della gerarchia (posizione geografica, segmento di mercato entro cui opera l'azienda, etc.).	- L'allineamento delle previsioni è garantito tra i diversi orizzonti di pianificazione (operativo, tattico, strategico).
- Le unità possono cambiare ai diversi livelli della gerarchia.	- Le unità non cambiano ai diversi livelli della gerarchia.

cioè a strutture di dati che incorporino simultaneamente tanto i vincoli di aggregazione contemporanei quanto quelli di aggregazione temporale.

Per procedere speditamente, è necessario stabilire una notazione in grado di rappresentare tutti i vincoli del sistema. Per fare questo, si ricorrerà in maniera appropriata alla notazione fin qui usata per le gerarchie contemporanee e temporali, accorrandole e, quindi, semplificandole.

Dato un sistema con  $n$  serie storiche, ciascuna a frequenza  $m$ , si definiscono  $\mathbf{Y}^{[k]}$  le  $p$  matrici, di dimensione  $(n \times NM_k)$ ,

$$\mathbf{Y}^{[k]} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{[k]} \\ \mathbf{B}^{[k]} \end{bmatrix}, \quad k \in \mathcal{K},$$

in cui

$$\mathbf{B}^{[k]} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^{[k]'} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_i^{[k]'} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{n_b}^{[k]'} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{[k]} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^{[k]'} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j^{[k]'} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{n_a}^{[k]'} \end{bmatrix}, \quad k \in \mathcal{K},$$

sono le matrici contenenti le serie temporalmente aggregate sia per il livello *bottom* ( $\mathbf{B}^{[k]}$ ) sia per quelli superiori ( $\mathbf{A}^{[k]}$ ). Tali matrici hanno dimensioni, rispettivamente,  $(n_b \times NM_k)$  e  $(n_a \times NM_k)$ . Esse possono essere raccolte in

una matrice  $\mathbf{Y}$ ,  $[n \times N(k^* + m)]$ , che contiene tutte le osservazioni a qualsiasi frequenza temporale,

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{[m]} & \mathbf{A}^{[k_{p-1}]} & \dots & \mathbf{A}^{[k_2]} & \mathbf{A}^{[1]} \\ \mathbf{B}^{[m]} & \mathbf{B}^{[k_{p-1}]} & \dots & \mathbf{B}^{[k_2]} & \mathbf{B}^{[1]} \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

dove  $\mathbf{B}$  è la matrice  $[n_b \times N(k^* + m)]$  delle serie storiche al livello più disaggregato e  $\mathbf{A}$ ,  $[n_a \times N(k^* + m)]$ , contenente invece le restanti serie.

### Rappresentazione vincolata

Per quanto riguarda i vincoli di aggregazione contemporanea possiamo riscrivere l'espressione (1.10) come

$$\mathbf{U}'\mathbf{Y}^{[k]} = \mathbf{0}_{(n_a \times NM_k)}, \quad k \in \mathcal{K},$$

che, in forma compatta, diventa

$$\mathbf{U}'\mathbf{Y} = \mathbf{0}_{[n_a \times N(k^* + m)]}. \quad (3.2)$$

Si noti che, dato il vettore di dimensione  $[nN(k^* + m) \times 1]$

$$\mathbf{y} = \text{vec}(\mathbf{Y}'), \quad (3.3)$$

i vincoli contemporanei (3.2) possono essere riscritti in forma vettoriale come

$$(\mathbf{U}' \otimes \mathbf{I}_{N(k^* + m)}) \mathbf{y} = \mathbf{0}_{[n_a N(k^* + m) \times 1]}. \quad (3.4)$$

Passando ora ai vincoli temporali validi per una singola serie, l'espressione (2.3) può essere estesa a ciascuna delle  $n$  serie storiche:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{[m]'} & \mathbf{B}^{[m]'} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}^{[k_2]'} & \mathbf{B}^{[k_2]'} \end{bmatrix} = \mathbf{K}_N \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{[1]'} & \mathbf{B}^{[1]'} \end{bmatrix},$$

oppure essere riscritta in maniera equivalente come

$$\mathbf{Z}'_N \mathbf{Y}' = \mathbf{0}_{(Nk^* \times n)}.$$

dove  $\mathbf{Z}'_N = [\mathbf{I}_{Nk^*} \quad -\mathbf{K}_N]$ . Se utilizziamo la rappresentazione vettoriale di  $\mathbf{Y}$ , (3.3), il tutto può essere scritto come

$$(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{Z}'_N) \mathbf{y} = \mathbf{0}_{(nNk^* \times 1)}. \quad (3.5)$$

Finora i vincoli contemporanei e temporali sono stati trattati in modo separato, ma le espressioni (3.4) e (3.5) possono essere raccolte in un insieme di vincoli completo, tale per cui

$$\check{\mathbf{H}}' \mathbf{y} = \mathbf{0}_{[(n_a N(k^* + m) + n N k^*) \times 1]}, \quad (3.6)$$

dove

$$\check{\mathbf{H}}' = \begin{bmatrix} \mathbf{U}' \otimes \mathbf{I}_{N(k^* + m)} \\ \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{Z}'_N \end{bmatrix}$$

è la matrice  $[(n_a N(k^* + m) + n N k^*) \times n N(k^* + m)]$  dei vincoli cross-temporali. Tuttavia è opportuno porre particolare attenzione alla matrice dei vincoli (3.6), dal momento che, considerando allo stesso tempo quelli temporali e quelli contemporanei, si è di fronte a righe di  $\check{\mathbf{H}}'$  ridondanti. Questo problema, già noto in letteratura (Di Fonzo, 1990, Di Fonzo e Marini, 2011), può essere risolto considerando la matrice con rango di riga pieno di dimensione  $[N(n_a m + n k^*) \times N n(k^* + m)]$

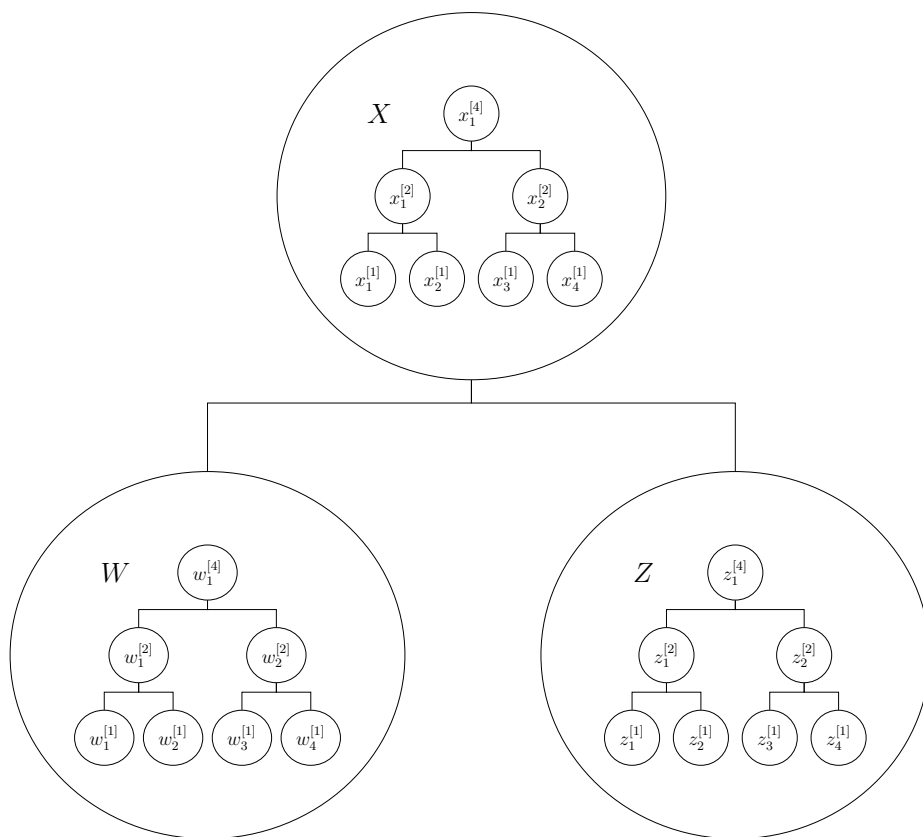
$$\mathbf{H}' = \begin{bmatrix} \mathbf{U}^* \\ \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{Z}'_N \end{bmatrix},$$

dove  $\mathbf{U}^* = [\mathbf{0}_{(N n_a m \times N n k^*)} \quad \mathbf{I}_{N m} \otimes \mathbf{U}'] \mathbf{P}'$  e  $\mathbf{P}$  è la matrice di commutazione di dimensione  $[(N n(k^* + m) \times (N n(k^* + m))]$ , tale per cui  $\mathbf{P} [\text{vec}(\mathbf{Y})] = \text{vec}(\mathbf{Y}')$  (Magnus e Neudecker (2019), p. 54). In questo modo si possono riscrivere i vincoli cross-temporali (3.6) secondo una formulazione che fa uso di una matrice ( $\mathbf{H}'$ ) con rango pieno di riga:

$$\mathbf{H}' \mathbf{y} = \mathbf{0}. \quad (3.7)$$

### Rappresentazione strutturale

A livello grafico una gerarchia cross-temporale risulta molto difficile da rappresentare in quanto coinvolge un numero di nodi che cresce molto velocemente in base al numero delle serie storiche coinvolte,  $n$ , e all'ordine di aggregazione,  $m$ . Inoltre una struttura di questo tipo può essere vista come una forma raggruppata di più gerarchie, per le quali è difficile fornire una versione grafica in grado di rappresentare in maniera efficace tutte le relazioni



**Figura 3.1:** Esempio di gerarchia cross-temporale: dal lato contemporaneo si hanno 3 serie storiche tali per cui  $X = W + Z$ , mentre dal lato temporale, per ciascuna serie, si hanno dati trimestrali, semestrali e annuali.

in gioco. Un modo semplice, però, può essere ottenuto come nell'esempio di tre serie storiche trimestrali in Figura 3.1, dove in ogni nodo contemporaneo è stata rappresentata la struttura temporale.

Partendo proprio dall'esempio in Figura 3.1 per trovare la forma strutturale cross-temporale, si noti che tutti i nodi della gerarchia cross-temporale possono essere espressi in termini delle bts trimestrali  $w_t^{[1]}$  e  $z_t^{[1]}$ ,  $t = 1, \dots, 4$ . Allora si può scrivere

$$\tilde{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \check{\mathbf{C}} \\ \mathbf{I}_8 \end{bmatrix}}_{\check{\mathbf{s}}} \mathbf{b} = \check{\mathbf{S}} \mathbf{b} \quad (3.8)$$

dove  $\mathbf{a} = [x_1^{[4]} \ x_1^{[2]} \ x_2^{[2]} \ x_1^{[1]} \ x_2^{[1]} \ x_3^{[1]} \ x_4^{[1]}]'$ ,  $\mathbf{b} = [w_1^{[1]} \ w_2^{[1]} \ w_3^{[1]} \ w_4^{[1]} \ z_1^{[1]} \ z_2^{[1]} \ z_3^{[1]} \ z_4^{[1]}]'$ ,

$\check{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \check{\mathbf{C}} \\ \mathbf{I}_8 \end{bmatrix}$ , e  $\check{\mathbf{C}}$  è la matrice ( $13 \times 8$ ):

$$\check{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice  $\mathbf{Y}$ , di dimensione ( $3 \times 7$ ), organizzata come nell'espressione (3.1) e che raccoglie tutte le serie storiche a qualsiasi frequenza, è data da:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} x_1^{[4]} & x_1^{[2]} & x_2^{[2]} & x_1^{[1]} & x_2^{[1]} & x_3^{[1]} & x_4^{[1]} \\ w_1^{[4]} & w_1^{[2]} & w_2^{[2]} & w_1^{[1]} & w_2^{[1]} & w_3^{[1]} & w_4^{[1]} \\ z_1^{[4]} & z_1^{[2]} & z_2^{[2]} & z_1^{[1]} & z_2^{[1]} & z_3^{[1]} & z_4^{[1]} \end{bmatrix}.$$

Allora  $\mathbf{y} = \text{vec}(\mathbf{Y}')$  è il vettore di dimensione ( $21 \times 1$ )

$$\mathbf{y} = \left[ x_1^{[4]} \ x_1^{[2]} \ x_2^{[2]} \ x_1^{[1]} \ x_2^{[1]} \ x_3^{[1]} \ x_4^{[1]} \ w_1^{[4]} \ w_1^{[2]} \ w_2^{[2]} \ w_1^{[1]} \ w_2^{[1]} \ w_3^{[1]} \ w_4^{[1]} \ z_1^{[4]} \ z_1^{[2]} \ z_2^{[2]} \ z_1^{[1]} \ z_2^{[1]} \ z_3^{[1]} \ z_4^{[1]} \right]',$$

il quale ha una struttura differente dal vettore  $\check{\mathbf{y}}$ ,

$$\check{\mathbf{y}} = \left[ x_1^{[4]} \ x_1^{[2]} \ x_2^{[2]} \ x_1^{[1]} \ x_2^{[1]} \ x_3^{[1]} \ x_4^{[1]} \ w_1^{[4]} \ w_1^{[2]} \ w_2^{[2]} \ z_1^{[4]} \ z_1^{[2]} \ z_2^{[2]} \ w_1^{[1]} \ w_2^{[1]} \ w_3^{[1]} \ w_4^{[1]} \ z_1^{[1]} \ z_2^{[1]} \ z_3^{[1]} \ z_4^{[1]} \right]'$$

Un uso così ampio di notazioni diverse, per quanto utile quando si va nel particolare, può risultare poco funzionale nella visione d'insieme del problema di riconciliazione cross-temporale. Per questo motivo è utile introdurre la matrice  $\mathbf{Q}$  che lega le due strutture di organizzazione dei dati ( $\mathbf{y}$  e  $\check{\mathbf{y}}$ ), tale per cui  $\mathbf{y} = \mathbf{Q}\check{\mathbf{y}}$ . Si può riscrivere l'espressione (3.8) riferendola al vettore  $\mathbf{y}$ :

$$\mathbf{y} = \mathbf{Q}\check{\mathbf{S}}\mathbf{b}.$$





dove

$$\widehat{\mathbf{B}}^{[k]} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{b}}_1^{[k]'} \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{b}}_i^{[k]'} \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{b}}_{n_b}^{[k]'} \end{bmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{A}}^{[k]} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{a}}_1^{[k]'} \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{a}}_j^{[k]'} \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{a}}_{n_a}^{[k]'} \end{bmatrix}, \quad k \in \mathcal{K},$$

sono le matrici contenenti le previsioni di base delle bts ( $\widehat{\mathbf{B}}^{[k]}$ ) e delle uts ( $\widehat{\mathbf{A}}^{[k]}$ ) per l'ordine di aggregazione  $k$ , rispettivamente di dimensioni  $(n_b \times M_k)$  e  $(n_a \times M_k)$ . Infine, si consideri la matrice  $\widehat{\mathbf{Y}}$ ,  $[n \times N (k^* + m)]$ , che contiene tutte le previsioni a qualsiasi frequenza temporale:

$$\widehat{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{A}} \\ \widehat{\mathbf{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{A}}^{[m]} & \widehat{\mathbf{A}}^{[k_{p-1}]} & \dots & \widehat{\mathbf{A}}^{[k_2]} & \widehat{\mathbf{A}}^{[1]} \\ \widehat{\mathbf{B}}^{[m]} & \widehat{\mathbf{B}}^{[k_{p-1}]} & \dots & \widehat{\mathbf{B}}^{[k_2]} & \widehat{\mathbf{B}}^{[1]} \end{bmatrix}.$$

In generale, è ragionevole ritenere che le previsioni di base non soddisfino né i vincoli contemporanei né quelli temporali, ossia che non siano allineate con la struttura gerarchica completa. In altri termini, si è di fronte al caso in cui

$$\mathbf{H}'\widehat{\mathbf{Y}} \neq \mathbf{0}$$

e si è alla ricerca di previsioni riconciliate  $\widetilde{\mathbf{Y}}$  tali che

$$\mathbf{H}'\widetilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{0},$$

o equivalentemente  $\mathbf{U}'\widetilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{0}_{[n_a \times (k^* + m)]}$  e  $\mathbf{Z}'_1\widetilde{\mathbf{Y}}' = \mathbf{0}_{(k^* \times n)}$ .

### 3.3 L'approccio di combinazione ottimale

Si consideri ora il modello di regressione multivariata

$$\widehat{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y} + \mathbf{E}, \tag{3.9}$$

dove  $\widehat{\mathbf{Y}}$  è la matrice delle previsioni di base,  $\mathbf{Y}$  è la matrice dei valori medi dei veri (e ignoti) valori che si desidera prevedere ed  $\mathbf{E}$  è la matrice di errori

casuali. Tutte queste quantità hanno dimensione  $[n \times (k^* + m)]$ . Il modello (3.9) può essere vettorizzato in due modi diversi (ed equivalenti):

$$\text{vec}(\widehat{\mathbf{Y}}) = \text{vec}(\mathbf{Y}) + \text{vec}(\mathbf{E}) \Leftrightarrow \widehat{\mathcal{Y}} = \mathcal{Y} + \varepsilon, \quad (3.10)$$

e

$$\text{vec}(\widehat{\mathbf{Y}}') = \text{vec}(\mathbf{Y}') + \text{vec}(\mathbf{E}') \Leftrightarrow \widehat{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \eta. \quad (3.11)$$

La formulazione (3.10) assume la componente temporale come riferimento principale, cioè ogni ordine di aggregazione  $k$  contiene le  $n$  serie; al contrario, per la vettorizzazione (3.11) si fissa la serie e poi gli ordini di aggregazione. La matrice di commutazione  $\mathbf{P}$  (Magnus e Neudecker, 2019), di dimensione  $[n(k^* + m) \times n(k^* + m)]$ , permette facilmente di ricollegare le due forme:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\text{vec}(\mathbf{Y}) &= \text{vec}(\mathbf{Y}') \Leftrightarrow \mathbf{P}\mathcal{Y} = \mathbf{y}; \\ \mathbf{P}\text{vec}(\widehat{\mathbf{Y}}) &= \text{vec}(\widehat{\mathbf{Y}}') \Leftrightarrow \mathbf{P}\widehat{\mathcal{Y}} = \widehat{\mathbf{y}}; \\ \mathbf{P}\text{vec}(\mathbf{E}) &= \text{vec}(\mathbf{E}') \Leftrightarrow \mathbf{P}\varepsilon = \eta. \end{aligned}$$

Come conseguenza di questa duplice natura del problema, contemporanea e temporale, si hanno a disposizione due parametrizzazioni equivalenti per la matrice di covarianza:

- $\mathbf{W} = E[\varepsilon\varepsilon']$  riferita al vettore degli errori  $\varepsilon$ ;
- $\mathbf{\Omega} = E[\eta\eta']$  riferita al vettore degli errori  $\eta$ .

Essendo  $\varepsilon$  un riordinamento del vettore  $\eta$ , e viceversa, valgono le relazioni

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{P}\mathbf{W}\mathbf{P}' \quad \text{e} \quad \mathbf{W} = \mathbf{P}'\mathbf{\Omega}\mathbf{P}.$$

Privilegiando la formulazione (3.11), e seguendo l'approccio di proiezione (1.17) per esprimere il vettore delle previsioni puntuali riconciliate, si ha

$$\tilde{\mathbf{y}} = \widehat{\mathbf{y}} - \mathbf{\Omega}\mathbf{H}(\mathbf{H}'\mathbf{\Omega}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}'\widehat{\mathbf{y}},$$

dove  $\tilde{\mathbf{y}} = \text{vec}(\widetilde{\mathbf{Y}}')$  è il vettore delle previsioni riconciliate, mentre in termini strutturali (1.16) abbiamo che

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{Q}\check{\mathbf{S}} \left( \check{\mathbf{S}}'\mathbf{Q}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{Q}\check{\mathbf{S}} \right)^{-1} \check{\mathbf{S}}'\mathbf{Q}'\mathbf{\Omega}^{-1}\widehat{\mathbf{y}}.$$

Per applicare queste espressioni è necessario disporre di un'approssimazione per  $\mathbf{\Omega}$ , o analogamente per  $\mathbf{W}$ . Seguendo quanto già detto per i casi di gerarchia contemporanea e temporale presi singolarmente, è ragionevole sfruttare i residui *in-sample*, assumendo che siano una buona stima degli errori di previsione ad un passo *out-of-sample*<sup>1</sup>. Si può quindi definire la matrice  $(n \times N)$  contenente i residui *in-sample* per un singolo nodo della gerarchia cross-temporale

$$\widehat{\mathbf{E}}_l^{[k]}, \quad k \in \mathcal{K}, \quad l = 1, \dots, M_k,$$

Tali quantità, possono essere raggruppate in  $p$  matrici  $(n \times NM_k)$

$$\widehat{\mathbf{E}}^{[k]} = \left[ \widehat{\mathbf{E}}_1^{[k]} \quad \dots \quad \widehat{\mathbf{E}}_l^{[k]} \quad \dots \quad \widehat{\mathbf{E}}_{M_k}^{[k]} \right], \quad k \in \mathcal{K}.$$

Infine la matrice  $[n(k^* + m) \times N]$ , contenente tutti i residui di ogni serie storica a qualsiasi livello di aggregazione temporale, può essere scritta come

$$\widehat{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{E}}_1^{[m]} \\ \widehat{\mathbf{E}}_1^{[k_{p-1}]} \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{E}}_{\frac{m}{k_{p-1}}}^{[k_{p-1}]} \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{E}}_1^{[1]} \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{E}}_m^{[1]} \end{bmatrix} = \left[ \widehat{\mathbf{e}}_1 \quad \dots \quad \widehat{\mathbf{e}}_\tau \quad \dots \quad \widehat{\mathbf{e}}_N \right],$$

dove ciascun vettore  $\widehat{\mathbf{e}}_\tau$  raggruppa i residui per un ciclo  $\tau = 1, \dots, N$  disposti nel seguente modo:

$$\widehat{\mathbf{e}}_\tau = \left[ \underbrace{\widehat{e}_{1,\tau}^{[m]} \quad \dots \quad (\widehat{\mathbf{e}}_{1,\tau}^{[1]})'}_{k^*+m} \quad \dots \quad \underbrace{\widehat{e}_{n,\tau}^{[m]} \quad \dots \quad (\widehat{\mathbf{e}}_{n,\tau}^{[1]})'}_{k^*+m} \right]'$$

<sup>1</sup>Uno degli aspetti critici di questa assunzione, come riportato da Jeon *et al.* (2019), è il fatto che i pesi usati nella matrice di covarianza siano fissati e funzione degli errori *in-sample*, quando invece si vorrebbe che fossero direttamente determinati con riferimento alla funzione obiettivo utilizzata per valutare la qualità della previsione.

In questo campo non esiste praticamente letteratura a cui riferirsi, sicché si è provato a formulare delle approssimazioni delle matrici di covarianza in analogia a quanto proposto per la riconciliazione contemporanea e temporale, adattando il tutto al nuovo contesto cross-temporale. Anche in questo caso si userà un prefisso, 'oct-', per chiarire che le matrici proposte verranno usate in un contesto cross-temporale.

1. Identità (**oct-ols**):

$$\widehat{\mathbf{W}}_{\text{oct-ols}} = \widehat{\mathbf{\Omega}}_{\text{oct-ols}} = \mathbf{I}_{k^*+m}.$$

Questa struttura è la classica forma che riconduce ai minimi quadrati ordinari (OLS).

2. Strutturale (**oct-struct**):

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{W}}_{\text{oct-struct}} &= \text{diag}(\mathbf{P}'\mathbf{Q}\check{\mathbf{S}}\mathbf{1}_{n_b m}) \\ \widehat{\mathbf{\Omega}}_{\text{oct-struct}} &= \text{diag}(\mathbf{Q}\check{\mathbf{S}}\mathbf{1}_{n_b m})\end{aligned}$$

Come negli analoghi casi contemporaneo e temporale, si sta considerando la struttura dell'intera gerarchia cross-temporale, assumendo l'equivarianza degli errori esclusivamente per le serie storiche più disaggregate alla frequenza più alta. Ai livelli più elevati, la varianza di ogni singolo nodo è proporzionale al numero di nodi 'figli' che ad esso afferiscono. Un'altra particolarità è il fatto di non aver bisogno dei residui, come  $\widehat{\mathbf{W}}_{\text{oct-ols}}$  e  $\widehat{\mathbf{\Omega}}_{\text{oct-ols}}$ .

3. MinT-sam (**oct-sam**):

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{\Omega}}_{\text{oct-sam}} &= \frac{1}{N} \sum_{\tau=1}^N \hat{\mathbf{e}}_{\tau} (\hat{\mathbf{e}}_{\tau})' = \frac{1}{N} \widehat{\mathbf{E}}\widehat{\mathbf{E}}' \\ \widehat{\mathbf{W}}_{\text{oct-sam}} &= \mathbf{P}'\widehat{\mathbf{\Omega}}_{\text{oct-sam}}\mathbf{P}\end{aligned}$$

Si tratta della matrice dell'errore quadratico medio campionario dei residui di tutti i nodi della gerarchia. Poiché può facilmente accadere che la matrice  $\widehat{\mathbf{E}}$  abbia un numero di righe maggiore del numero di colonne, cioè  $N \leq n(k^* + m)$ ,  $\widehat{\mathbf{\Omega}}_{\text{oct-sam}}$  può risultare non definita positiva e di conseguenza non può essere usata per calcolare le previsioni riconciliate.

4. *Hierarchy variance scaling (oct-wlsh)*:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{W}}_{\text{oct-wlsh}} &= \mathbf{I} \odot \widehat{\mathbf{W}}_{\text{oct-sam}} \\ \widehat{\mathbf{\Omega}}_{\text{oct-wlsh}} &= \mathbf{I} \odot \widehat{\mathbf{\Omega}}_{\text{oct-sam}}\end{aligned}$$

Si tratta della diagonale della matrice di covarianza dei residui che, a meno di casi particolari (ad esempio se si hanno dei residui *in-sample* di un nodo tutti uguali tra di loro), è sempre definita positiva.

5. *Series variance scaling (oct-wlsv)*:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{\Omega}}_{\text{oct-wlsv}} &= \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{\Omega}}_{1,\text{wlsv}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \widehat{\mathbf{\Omega}}_{2,\text{wlsv}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \widehat{\mathbf{\Omega}}_{n,\text{wlsv}} \end{bmatrix} \\ \widehat{\mathbf{W}}_{\text{oct-wlsv}} &= \mathbf{P}' \widehat{\mathbf{\Omega}}_{\text{oct-wlsv}} \mathbf{P}\end{aligned}$$

dove  $\widehat{\mathbf{\Omega}}_{i,\text{wlsv}}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , equivale all'approssimazione della matrice di covarianza nel caso temporale  $\widehat{\mathbf{\Omega}}_{t,\text{wlsv}}$  per la serie storica  $i$  (si veda la sezione 2.2.2).

6. *MinT-shr (oct-shr)*:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{W}}_{\text{oct-shr}} &= \lambda \widehat{\mathbf{W}}_{\text{wlsh}} + (1 - \lambda) \widehat{\mathbf{W}}_{\text{oct-sam}} \\ \widehat{\mathbf{\Omega}}_{\text{oct-shr}} &= \lambda \widehat{\mathbf{\Omega}}_{\text{wlsh}} + (1 - \lambda) \widehat{\mathbf{\Omega}}_{\text{oct-sam}}\end{aligned}$$

dove il parametro di *shrinkage*  $\lambda$  viene calcolato secondo l'espressione (1.18). Questa matrice non dovrebbe presentare problemi di invertibilità ed inoltre, se  $\lambda \neq 1$ , consente di tenere conto anche delle relazioni tra i vari nodi della gerarchia cross-temporale.

7. *Block-diagonal cross-covariance scaling (oct-bdsam)*:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{W}}_{\text{oct-sam}}^{BD} &= \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{W}}_{\text{sam}}^{[m]} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{\frac{m}{k_{p-1}}} \otimes \widehat{\mathbf{W}}_{\text{sam}}^{[k_{p-1}]} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I}_m \otimes \widehat{\mathbf{W}}_{\text{sam}}^{[1]} \end{bmatrix} \\ \widehat{\mathbf{\Omega}}_{\text{oct-sam}}^{BD} &= \mathbf{P}' \widehat{\mathbf{W}}_{\text{oct-sam}}^{BD} \mathbf{P}\end{aligned}$$

dove

$$\widehat{\mathbf{W}}_{\text{sam}}^{[k]} = \frac{1}{NM_k} \widehat{\mathbf{E}}^{[k]} (\widehat{\mathbf{E}}^{[k]})', \quad k \in \mathcal{K}.$$

Nel caso in cui  $NM_k < n$ , per almeno un  $k \in \mathcal{K}$ , allora le matrici non sono definite positive.

8. *Block-diagonal shrunk cross-covariance scaling (oct-bdshr)*:

$$\widehat{\mathbf{W}}_{\text{oct-shr}}^{BD} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{W}}_{\text{shr}}^{[m]} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{\frac{m}{k_{p-1}}} \otimes \widehat{\mathbf{W}}_{\text{shr}}^{[k_{p-1}]} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I}_m \otimes \widehat{\mathbf{W}}_{\text{shr}}^{[1]} \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\mathbf{\Omega}}_{\text{oct-shr}}^{BD} = \mathbf{P}' \widehat{\mathbf{W}}_{\text{oct-shr}}^{BD} \mathbf{P}$$

con

$$\widehat{\mathbf{W}}_{\text{shr}}^{[k]} = \lambda_k \left( \mathbf{I}_n \odot \widehat{\mathbf{W}}_{\text{sam}}^{[k]} \right) + (1 - \lambda_k) \widehat{\mathbf{W}}_{\text{sam}}^{[k]},$$

dove i  $p$  coefficienti di *shrinkage*  $\lambda_k$  sono calcolati usando l'espressione (1.18). Per come sono ottenute, queste matrici non soffrono dei limiti di applicabilità legati al numero di residui utilizzabili che invece affliggono  $\widehat{\mathbf{W}}_{\text{oct-sam}}^{BD}$  o  $\widehat{\mathbf{\Omega}}_{\text{oct-sam}}^{BD}$ .

9. *Auto-covariance scaling (oct-acov)*:

$$\widehat{\mathbf{\Omega}}_{\text{oct-acov}} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{\Omega}}_{1,\text{acov}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \widehat{\mathbf{\Omega}}_{2,\text{acov}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \widehat{\mathbf{\Omega}}_{n,\text{acov}} \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\mathbf{W}}_{\text{oct-acov}} = \mathbf{P}' \widehat{\mathbf{\Omega}}_{\text{oct-acov}} \mathbf{P}$$

dove  $\widehat{\mathbf{\Omega}}_{i,\text{acov}}$  equivale all'approssimazione della matrice di covarianza nel caso temporale  $\widehat{\mathbf{\Omega}}_{t,\text{acov}}$  per la serie storica  $i$  (si veda la sezione 2.2.2).

### 3.4 Procedure euristiche

Quando si opera in un contesto cross-temporale, una possibile opzione pratica per ottenere delle previsioni cross-temporali riconciliate consiste nello sfruttare i vincoli di aggregazione contemporanei e temporali in modo separato.

**Procedura KA (Kourentzes e Athanasopoulos, 2019)**

Kourentzes e Athanasopoulos (2019) propongono una procedura in due passi, la quale fa uso della media delle matrici di proiezione che si ottengono dalla riconciliazione contemporanea delle previsioni di ciascuna serie presa singolarmente. Nello specifico, assumendo sempre  $h = 1$  per semplicità di notazione, la procedura si articola in tre passaggi.

1. Per ciascuna variabile, si ottengono le previsioni riconciliate temporalmente e le si raccolgono nella matrice  $\check{\mathbf{Y}}$  di dimensione  $[n \times (k^* + m)]$ :

$$\hat{\mathbf{Y}} \rightarrow \check{\mathbf{Y}}.$$

Per come sono state ottenute, le previsioni  $\check{\mathbf{Y}}$  sono tali per cui  $\mathbf{Z}'_1 \check{\mathbf{Y}}' = \mathbf{0}_{(k^* \times n)}$ , ma in generale esse non rispettano i vincoli contemporanei, ossia  $\mathbf{U}' \check{\mathbf{Y}} \neq \mathbf{0}_{n_a \times (k^* + m)}$ .

2. A questo punto, a partire dalla matrice  $\check{\mathbf{Y}}$ , per ciascun periodo di ogni livello di aggregazione temporale (ad esempio: anno, semestre, trimestre, ...) si procede con la riconciliazione contemporanea, ottenendo la matrice  $\check{\check{\mathbf{Y}}}$ ,  $[n \times (k^* + m)]$ :

$$\check{\mathbf{Y}} \rightarrow \check{\check{\mathbf{Y}}}.$$

In questo passaggio si ottengono, inoltre,  $p$  matrici  $(n \times n)$  di proiezione  $\mathbf{M}^{[k]}$  tali per cui

$$\check{\check{\mathbf{Y}}}^{[k]} = \mathbf{M}^{[k]} \check{\mathbf{Y}}^{[k]}, \quad k \in \mathcal{K},$$

con  $\mathbf{M}^{[k]} = \mathbf{I}_n - \mathbf{W}^{[k]} \mathbf{U} \left( \mathbf{U}' \mathbf{W}^{[k]} \mathbf{U} \right)^{-1} \mathbf{U}'$ ,  $\mathbf{W}^{[k]}$  matrice  $(n \times n)$  definita positiva,  $\mathbf{U}'$  matrice dei vincoli contemporanei e  $\check{\check{\mathbf{Y}}}^{[k]}$  blocco di dimensione  $(n \times M_k)$  della matrice  $\check{\check{\mathbf{Y}}}$  che può essere riscritta come

$$\check{\check{\mathbf{Y}}} = \left[ \check{\check{\mathbf{Y}}}^{[m]} \quad \check{\check{\mathbf{Y}}}^{[k_{p-1}]} \quad \dots \quad \check{\check{\mathbf{Y}}}^{[k_2]} \quad \check{\check{\mathbf{Y}}}^{[1]} \right].$$



Ora, al contrario di quanto avviene al passo 1, le previsioni riconciliate raccolte in  $\check{\mathbf{Y}}$  saranno allineate solo dal punto di vista contemporaneo, ossia  $\mathbf{U}'\check{\mathbf{Y}} = \mathbf{0}_{[n_a \times (k^* + m)]}$ , ma non da quello temporale,  $\mathbf{Z}'_1\check{\mathbf{Y}}' \neq \mathbf{0}_{(k^* \times n)}$ .

3. Date le matrici  $\mathbf{M}^{[k]}$  ottenute al passo precedente, è possibile calcolare la media di queste  $p$  matrici:

$$\bar{\mathbf{M}} = \frac{1}{p} \sum_{k \in \mathcal{K}} \mathbf{M}^{[k]}.$$

Riprendendo le previsioni riconciliate al passo 1,  $\check{\mathbf{Y}}$ , quelle riconciliate cross-temporalmente  $\check{\mathbf{Y}}^{KA}$  si possono calcolare con la seguente espressione:

$$\check{\mathbf{Y}}^{KA} = \bar{\mathbf{M}}\check{\mathbf{Y}}. \quad (3.12)$$

Dal momento che  $\mathbf{U}'\bar{\mathbf{M}} = \frac{1}{p} \sum_{k \in \mathcal{K}} \mathbf{U}'\mathbf{M}^{[k]} = \mathbf{0}_{(n_a \times n)}$ , e  $\mathbf{Z}'_1\check{\mathbf{Y}}' = \mathbf{0}_{(k^* \times n)}$ ,

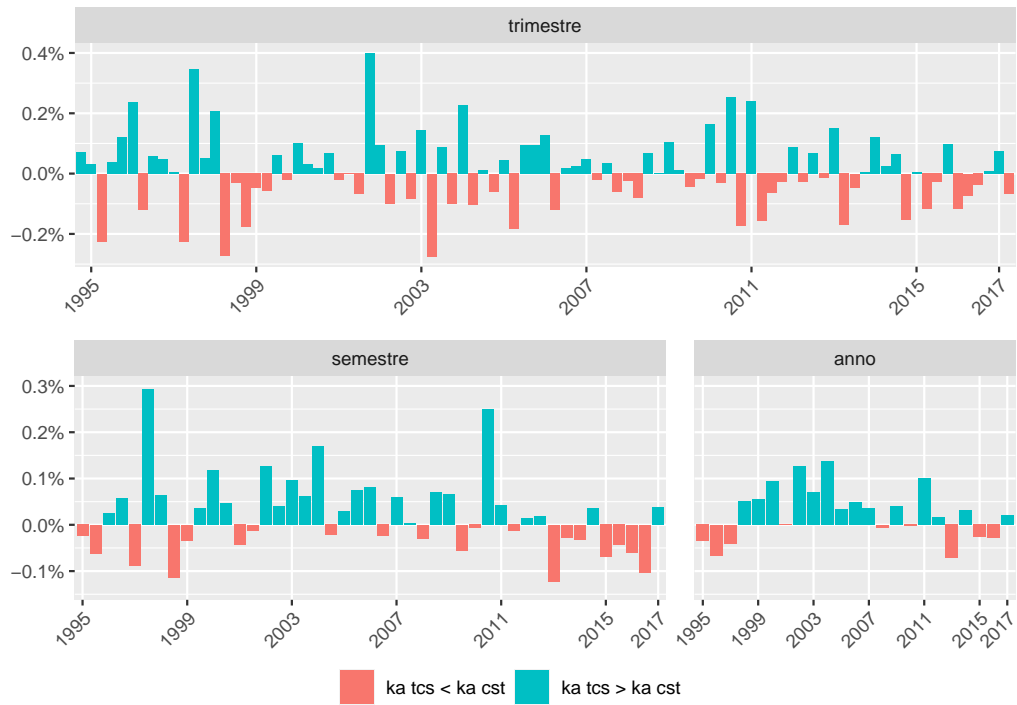
allora  $\check{\mathbf{Y}}^{KA}$  rispetta tanto i vincoli temporali quanto quelli contemporanei:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}'\check{\mathbf{Y}}^{KA} &= \mathbf{U}'\bar{\mathbf{M}}\check{\mathbf{Y}} = \mathbf{0}_{[n_a \times (k^* + m)]}, \\ \mathbf{Z}'_1 \left( \check{\mathbf{Y}}^{KA} \right)' &= \mathbf{Z}'_1 \check{\mathbf{Y}}' \bar{\mathbf{M}}' = \mathbf{0}_{(k^* \times n)}. \end{aligned}$$

Come matrici di covarianza da usare nei due step si possono considerare quelle descritte nei Capitoli 1 e 2. In particolare, Kourentzes e Athanasopoulos (2019) hanno proposto l'utilizzo di **t-struct** o **t-wlsv** nel passo temporale, e **cs-wls** o **cs-shr** nello step di riconciliazione contemporanea. Le quattro procedure che si ottengono in questo modo saranno contrassegnate nel seguito con la sigla **kah**. Le altre possibili combinazioni saranno caratterizzate dalla sigla **tcs**, a segnalare che si tratta di una procedura ottenuta applicando prima una tecnica di riconciliazione temporale e poi una cross-sezionale.

Nel seguito si sottolineano alcuni aspetti della proposta di Kourentzes e Athanasopoulos (2019):

- Questa procedura può essere vista come una applicazione consecutiva di due distinte procedure di riconciliazione multivariata, ognuna caratterizzata da matrice di covarianza e vincoli diversi.



**Figura 3.2:** Previsioni riconciliate trimestrali, semi-annuali e annuale del PIL Australiano un passo in avanti utilizzando la procedura cross-temporale di Kourentzes e Athanasopoulos (2019) (t-wlsv allo step temporale, cs-shr per quello contemporaneo) alternando la dimensione di riconciliazione di partenza. La discrepanza percentuale è stata calcolata dalla differenza delle previsioni delle due varianti riconciliazione diviso la loro media aritmetica.

- Al passo 2 si sono riconciliati  $k^* + m$  vettori di previsione, quindi ciascuna matrice  $\mathbf{M}^{[k]}$ ,  $k \in \mathcal{K}$ , è stata applicata a  $M_k$  differenti vettori ( $n \times 1$ ). In ragione di ciò, un'alternativa alla proposta di Kourentzes e Athanasopoulos (2019) potrebbe essere una media pesata delle matrici di proiezione:

$$\bar{\mathbf{M}}^* = \frac{1}{k^* + m} \sum_{k \in \mathcal{K}} M_k \mathbf{M}^{[k]}.$$

- Nulla vieta di invertire l'ordine di applicazione delle due procedure, cioè partire da una riconciliazione contemporanea piuttosto che temporale. Tuttavia i risultati delle previsioni riconciliate che si ottengono sono diversi e non vi è nessun motivo per ritenere che uno sia migliore (o più giustificato) dell'altro. Ad esempio, si prenda la riconciliazione cross-

temporale delle previsioni del PIL australiano, trattata in dettaglio nel Capitolo 6. La Figura 3.2 mostra la discrepanza in percentuale - alla prima replicazione dell'esperimento previsivo - delle previsioni un passo in avanti del Prodotto Interno Lordo australiano, calcolate prima partendo dalla dimensione temporale e poi da quella contemporanea. La discrepanza percentuale per questa importante variabile appare molto evidente (tra lo  $-0.3\%$  e lo  $0.4\%$ ).

Se si volesse procedere prima con la riconciliazione contemporanea e successivamente con quella temporale, la procedura si svilupperebbe nei tre passi seguenti:

1. Si riconcilia la matrice delle previsioni  $\widehat{\mathbf{Y}}$  attraverso un approccio contemporaneo fissato l'ordine di aggregazione  $k$  e i risultati vengono raccolti nella matrice  $\widetilde{\mathbf{Y}}$

$$\widehat{\mathbf{Y}} \rightarrow \widetilde{\mathbf{Y}}.$$

2. Per ciascuna variabile, si ricavano le previsioni riconciliate temporalmente  $\check{\mathbf{Y}}$  e le  $n$  matrici di proiezioni contemporanee  $\mathbf{M}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ :

$$\widetilde{\mathbf{Y}} \rightarrow \check{\mathbf{Y}}.$$

3. Attraverso la media delle  $n$  matrici  $\mathbf{M}_i$  del passo precedente si ottiene  $\overline{\mathbf{M}}^{\text{cst}}$ :

$$\overline{\mathbf{M}}^{\text{cst}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i.$$

Infine le previsioni riconciliate cross-temporali sono date da

$$\widetilde{\mathbf{Y}}^{\text{cst}} = \left( \overline{\mathbf{M}}^{\text{cst}} \check{\mathbf{Y}}' \right)' = \check{\mathbf{Y}} \left( \overline{\mathbf{M}}^{\text{cst}} \right)'. \quad (3.13)$$

Visto che  $\mathbf{U}' \check{\mathbf{Y}} = \mathbf{0}_{[n_a \times (k^* + m)]}$ , e  $\mathbf{Z}'_1 \overline{\mathbf{M}}^{\text{cst}} = n^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbf{Z}'_1 \mathbf{M}_i = \mathbf{0}_{[k^* \times (k^* + m)]}$ , le previsioni (3.13) rispettano entrambe le tipologie di vincoli:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}' \widetilde{\mathbf{Y}}^{\text{cst}} &= \mathbf{U}' \check{\mathbf{Y}} \left( \overline{\mathbf{M}}^{\text{cst}} \right)' = \mathbf{0}_{[n_a \times (k^* + m)]}, \\ \mathbf{Z}'_1 \left( \widetilde{\mathbf{Y}}^{\text{cst}} \right)' &= \mathbf{Z}'_1 \overline{\mathbf{M}}^{\text{cst}} \check{\mathbf{Y}}' = \mathbf{0}_{(k^* \times n)}. \end{aligned}$$

- Il calcolo della matrice  $\overline{\mathbf{M}}$  richiede la disponibilità delle matrici di proiezione usate al passo 2. Questo non è un problema se è possibile usare le formule di riconciliazione in forma chiusa. Tuttavia, se si è interessati ad imporre ulteriori vincoli (come ad esempio la non negatività delle previsioni) vi è la necessità di utilizzare delle appropriate tecniche numeriche, trattate nella sezione 4.3, che non generano automaticamente le matrici  $\mathbf{M}$  (o  $\mathbf{G}$ ). In altri termini, così com'è stata formulata la tecnica di Kourentzes e Athanasopoulos (2019) non sembra adatta a gestire questo aspetto, che non di rado è d'interesse per il decisore (si pensi al caso di previsioni delle vendite di più articoli di consumo o più in generale a casi in cui delle previsioni negative non hanno senso dal punto di vista pratico).

#### Procedura iterativa

Per ovviare ad alcune delle problematiche della procedura di Kourentzes e Athanasopoulos (2019), nel seguito se ne propone una versione iterativa, che non prevede il calcolo della media delle matrici di proiezione del secondo step, ma in cui ciascuna iterazione consiste nei primi due passi dell'euristica KA. Le previsioni vengono, quindi, riconciliate alternando la riconciliazione tramite le gerarchie contemporanee e le gerarchie temporali, in modo ciclico.

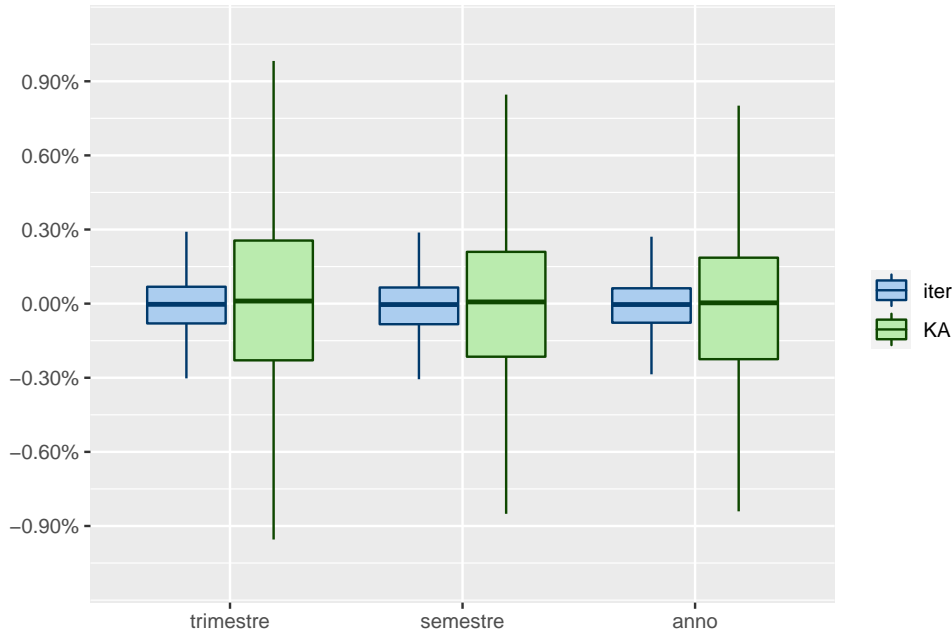
Partendo dalle previsioni di base  $\widehat{\mathbf{Y}}$ , possiamo definire la discrepanza contemporanea e quella temporale rispettivamente come:

$$d_{cs} = \left\| \mathbf{U}' \widehat{\mathbf{Y}} \right\|_1 \quad d_{te} = \left\| \mathbf{Z}'_1 \widehat{\mathbf{Y}} \right\|_1$$

dove  $\|\mathbf{X}\|_1 = \sum_{i,j} |x_{i,j}|$ . Dal momento che le previsioni di base non rispettano i vincoli di aggregazione, in generale entrambe le discrepanze  $d_{cs}$  e  $d_{te}$  sono maggiori di zero.

La procedura iterativa può essere riassunta come segue:

1. nella prima iterazione si calcolano le previsioni riconciliate temporalmente, raccolte in  $\widetilde{\mathbf{Y}}^{(1)}$ , tali per cui  $\mathbf{Z}'_1 (\widetilde{\mathbf{Y}}^{(1)})' = \mathbf{0}$  e  $d_{cs}^{(1)} = \left\| \mathbf{U}' \widetilde{\mathbf{Y}}^{(1)} \right\|_1 \geq 0$ ;
2. le previsioni puntuali nella matrice  $\widetilde{\mathbf{Y}}^{(1)}$  vengono quindi riconciliate contemporaneamente ottenendo la matrice  $\widetilde{\mathbf{Y}}^{(2)}$ , con la quale  $\mathbf{U}' \widetilde{\mathbf{Y}}^{(2)} = \mathbf{0}$ , e  $d_{te}^{(1)} = \left\| \mathbf{Z}'_1 (\widetilde{\mathbf{Y}}^{(2)})' \right\|_1 \geq 0$ ;



**Figura 3.3:** Boxplot della differenze percentuali (differenza diviso la media aritmetica) delle previsioni riconciliate trimestrali, semestrali ed annuali ad un passo in avanti di 79 su 95 serie storiche del PIL australiano dal lato del reddito e della spesa usando la procedura KA (t-wlsv per il passo temporale e cs-shr quello contemporaneo) e la sua variante iterativa, partendo prima con una riconciliazione temporale oppure con una riconciliazione contemporanea.

3. a questo punto per ogni iterazione  $j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , si ripetono i passi 1 e 2, fino a quando  $d_{te}^{(j)} < \delta$ , dove  $\delta$  è la tolleranza fissata dall'utente (ad esempio,  $\delta = 10^{-5}$ ). Se all'iterazione  $J$  il criterio di convergenza viene soddisfatto, allora la matrice  $\tilde{\mathbf{Y}}^{(2J)}$  rappresenta l'output della procedura iterativa che contiene le previsioni riconciliate cross-temporalmente.

Come nel caso della procedura KA, la scelta della dimensione (temporale o contemporanea) da cui far partire la riconciliazione è del tutto arbitraria, e non vi sono particolari motivi per cui una sia preferibile all'altra. Tuttavia, si può mostrare che l'uso di una procedura iterativa attenua di molto la dimensione delle 'incongruenze' che si registrano tra i risultati ottenuti partendo da una dimensione piuttosto che dall'altra. Si prenda, ad esempio, il caso della riconciliazione cross-temporale delle previsioni del PIL australiano (Capitolo 6). Alle previsioni di base di tutte le replicazioni dell'esperimento

di previsione sono state applicate le due euristiche nelle rispettive varianti utilizzando per la matrice di covarianza temporale l'approssimazione **t-wlsv**, mentre per quella contemporanea **cs-shr**. In Figura 3.3 è riportato il risultato considerando le previsioni delle 79 (su 95) variabili strettamente positive. Il boxplot riporta la distribuzione della differenze percentuali fissato l'ordine di aggregazione temporale (trimestre, semestre o anno). Come si può notare le differenze partendo da dimensioni di riconciliazione diverse sono abbastanza evidenti, tuttavia la variante iterativa presenta delle discrepanze meno grandi in valore assoluto rispetto alla versione originale KA. Inoltre il quadro non cambia se si adottano matrici di covarianza diverse<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>Per motivi di spazio, i risultati non vengono riportati, ma sono disponibili su richiesta.

# Capitolo 4

## Un pacchetto **R** per la riconciliazione delle previsioni: `forec`

### 4.1 I pacchetti classici

**R** (R Core Team, 2020) è un linguaggio di programmazione e un ambiente gratuito per elaborazioni statistiche sia analitiche che grafiche, che è stato supportato nel corso degli anni dalla *R Foundation for Statistical Computing*. Il progetto è stato concepito come evoluzione del linguaggio di programmazione **S** (Becker *et al.*, 1988) nel 1992, con una versione iniziale rilasciata nel 1995 e una versione beta stabile (v1.0) del 29 febbraio 2000. Essendo disponibile in forma gratuita e grazie alla naturale predisposizione a introdurre nuove tecniche attraverso ‘pacchetti’ integrativi, **R** si è ormai affermato come uno degli strumenti di calcolo più utilizzati in ambito statistico.

Rispetto alla riconciliazione contemporanea, il primo pacchetto utilizzabile in **R** è `hts` (Hyndman *et al.*, 2020b) pubblicato per la prima volta il 22 marzo del 2010 da Rob J. Hyndman, Roman A. Ahmed e Han Lin Shang. Nel corso degli anni sono state apportate modifiche volte a semplificare il codice ed aumentarne la velocità, nonché a perfezionare le tecniche messe a disposizione. Dal 3 aprile 2020, con la versione 6.0.0, il pacchetto `hts` non è più soggetto a miglioramenti (anche se il 6 agosto 2020 è stata rilasciata una versione 6.0.1 che risolve una piccola falla) ed è previsto che le procedure di riconciliazione vengano piano piano inglobate nel pacchetto `fable` (O’Hara-

Wild *et al.*, 2020), il quale raccoglie strutture e varie tecniche di previsione per serie storiche. Comunque, ad oggi, **hts** rimane il principale punto di riferimento per la riconciliazione delle previsioni di serie storiche gerarchiche o raggruppate.

van Erven e Cugliari (2015) hanno reso disponibile il pacchetto **gtop**, fondato essenzialmente sull'approccio di proiezione per la riconciliazione contemporanea. Esso, tuttavia presenta molti problemi quando deve gestire gerarchie composte da un numero abbastanza elevato di serie storiche e dispone di una varietà piuttosto ridotta di alternative per l'approssimazione della matrice **W**.

Per quanto riguarda la riconciliazione temporale, il 7 settembre del 2016 è stato rilasciato il pacchetto **thief** (Hyndman e Kourentzes, 2018), che offre ed estende la procedura di riconciliazione secondo le gerarchie temporali di Athanasopoulos *et al.* (2017).

## 4.2 **forec**: una nuova idea

I pacchetti **hts** e **thief** hanno aperto la strada per la riconciliazione delle previsioni di una serie storica gerarchica/raggruppata in **R**. Tuttavia essi presentano delle strutture ancora fortemente legate ai metodi con cui si costruiscono le previsioni di base e, di conseguenza, alle tecniche offerte dal pacchetto **forecast** (Hyndman *et al.*, 2020a), che comunque è una delle migliori raccolte di strumenti per la previsione di serie storiche. Vi è peraltro la possibilità di utilizzare funzioni indipendenti da **forecast**, ma in modo meno intuitivo. Inoltre, in questi casi, la riconciliazione è effettuata solo tramite la rappresentazione strutturale e, nel caso contemporaneo, si è legati ai limiti della costruzione della matrice **S** evidenziati nel Capitolo 1.

Per superare questi limiti, e per mettere a disposizione dell'utente strumenti di riconciliazione delle previsioni non disponibili in **hts** e **thief**, è stato sviluppato un pacchetto, chiamato **forec** da *forecast reconciliation*. Esso contiene principalmente tre gruppi di funzioni:

- per la riconciliazione contemporanea, la funzione **htsrec** che oltre ad offrire le tecniche fornite nel pacchetto **hts**, implementa alcune novità riguardanti la gestione di eventuali vincoli di non negatività imposti dall'utente;



- per la riconciliazione temporale, la funzione `thfrec` che espande le possibilità offerte da `thief`, considerando altre approssimazioni della matrice di covarianza non presenti nel pacchetto di Hyndman e Kourentzes permettendo all'utente di imporre anche vincoli di non negatività sulle previsioni riconciliate;
- per la riconciliazione cross-temporale, tecnica per la quale, per quello che ci è noto, non esistono programmi disponibili né per **R** né per altri ambienti, le funzioni `tcsrec`, `cstrec` e `iterec` che fanno riferimento alle procedure euristiche, e la funzione `octrec` per la riconciliazione ottimale delle previsioni di base.

Per quanto riguarda la rappresentazione utilizzata per riconciliare le previsioni, `forec`, di *default*, fa uso dell'approccio di proiezione. Tuttavia, ove lo desideri, l'utente può utilizzare la forma strutturale. Viene anche risolto il problema delle gerarchie sbilanciate (vedi Sezione 1.2): a differenza di `hts`, non vi è più la necessità di duplicare delle serie per gestire strutture non bilanciate, ma basterà fornire al programma la giusta matrice di aggregazione (**C**) o la matrice dei vincoli (**U'**) come mostrato nella Sezione 1.2.

Inoltre, perché il programma possa gestire grandi gerarchie in maniera efficiente sia in termini di calcolo sia di uso della memoria, `forec` si giova del pacchetto `Matrix` (Bates e Maechler, 2019) che permette la gestione di matrici di dimensioni elevate e, soprattutto, è in grado di governare in modo efficiente le matrici sparse.

### 4.3 Riconciliazione non negativa

Molte delle applicazioni legate alle strutture gerarchiche fanno riferimento a fenomeni per i quali è naturale assumere la non negatività delle misurazioni come ad esempio serie che descrivono conteggi, vendite, ecc. In queste circostanze è importante avere a disposizione delle previsioni riconciliate che, oltre a quelli imposti dalla struttura gerarchica o raggruppata di appartenenza, rispettino anche questi ulteriori vincoli. Come suggeriscono Wickramasuriya *et al.* (2020), l'imposizione di vincoli di non negatività delle previsioni non punta principalmente a migliorare la loro accuratezza, ma piuttosto ha come

obiettivo la disponibilità di valori utilizzabili per prendere decisioni allineate ad ogni livello e dotate di un significato operativo. Ovviamente se si ottengono miglioramenti dell'accuratezza si è di fronte a un gradito vantaggio collaterale.

Una prima soluzione per cercare di avere previsioni riconciliate non negative, potrebbe essere quella di porre pari a zero tutti i valori riconciliati negativi (Karjalainen e Karjalainen, 1991, Berry *et al.*, 2006). Tuttavia questa soluzione abbastanza semplice porta ad un risultato indesiderato in quanto le previsioni non sono più allineate con la struttura gerarchica contemporanea e/o temporale.

In **R**, l'unico tipo di riconciliazione non negativa proposta è quella contemporanea nel pacchetto **hts**. In particolare, l'ultima versione del pacchetto offre la tecnica *block principal pivoting* di Wickramasuriya *et al.* (2020) (proposta inizialmente come procedura per i minimi quadrati non negativi da Lawson e Hanson, 1974). L'idea di base di tale tecnica consiste nel trasformare il problema dei minimi quadrati con vincoli di disuguaglianza in una successione di problemi con vincoli lineari esatti.

In **forec**, invece si è deciso di intraprendere un'altra strada e di utilizzare il pacchetto **OSQP** (Stellato *et al.*, 2020) in cui è implementata la tecnica per risolvere problemi di programmazione quadratica basato sul metodo della direzione alternata dei moltiplicatori di Lagrange. L'algoritmo risulta essere robusto e non impone requisiti particolari come l'indipendenza lineare dei vincoli. Inoltre viene utilizzato anche una procedura di pulizia del risultato (*solution polishing*, Stellato *et al.*, 2020) che permette di avere una soluzione molto accurata. Nel seguito, si affronterà il problema dei vincoli di non negatività dal punto di vista dell'approccio di proiezione di Byron (1978), ma è analoga l'estensione alla formulazione strutturale.

## Formulazione del problema di riconciliazione con vincoli lineari esatti e di non negatività

Nel caso della riconciliazione contemporanea, il problema (1.17), fissato  $h = 1$ , può essere riscritto introducendo vincoli di non negatività come:

$$\min_{\mathbf{y}} \frac{1}{2} \mathbf{y}' \mathbf{W}^{-1} \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}' \mathbf{W}^{-1} \mathbf{y} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{U}' \mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{y} > \mathbf{0}, \quad (4.1)$$

dove  $\hat{\mathbf{y}}$  è il vettore ( $n \times 1$ ) delle previsioni di base,  $\mathbf{U}'$  è la matrice ( $n_a \times n$ ) dei vincoli di aggregazione contemporanea,  $\mathbf{W}$  una matrice definita positiva ( $n \times n$ ). Per come è stato strutturato il risolutore in **OSQP** è necessario formulare il problema di minimo nella forma generale:

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \mathbf{x}' \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{q}' \mathbf{x} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{l} \leq \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{u}. \quad (4.2)$$

Il problema (4.1) può quindi essere riscritto secondo la (4.2) ponendo

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{W}^{-1}, \\ \mathbf{q}' &= -\hat{\mathbf{y}}' \mathbf{W}^{-1} \rightarrow \mathbf{q} = -\mathbf{W}^{-1} \hat{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{I}_n \end{pmatrix}_{(n_a+n) \times n}, \\ \mathbf{l} &= \mathbf{0}_{(n_a+n) \times 1}, \\ \mathbf{u} &= \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n_a \times 1} \\ +\infty_{n \times 1} \end{pmatrix}_{(n_a+n) \times 1}. \end{aligned}$$

Tuttavia, scrivendo i vincoli in questo modo, si è in presenza di ridondanze che è preferibile evitare. Ad esempio, si prenda una semplice gerarchia a due livelli con due serie al livello più basso ( $n_b = 2$ ) e una in quello più alto ( $n_a = 1$ ). I vincoli espressi nella formulazione (4.1) posso essere resi esplicitamente come:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}' \mathbf{y} = \mathbf{0} &\rightarrow [1 \quad -1 \quad -1] \begin{bmatrix} y \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = y - y_1 - y_2 = 0, \\ \mathbf{y} > \mathbf{0} &\rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ y_1 > 0 \\ y_2 > 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Risulta immediato notare che se due numeri sono maggiori o uguali a zero, anche la loro somma sarà maggiore o uguale a 0. Il vincolo  $y > 0$  può non

essere preso in considerazione in quanto sottinteso dalle disequazioni  $y_1 > 0$  e  $y_2 > 0$ , ottenendo infine:

$$\begin{cases} \mathbf{U}'\mathbf{y} = 0 \\ \mathbf{y}_b > 0 \end{cases} .$$

dove  $\mathbf{y}_b$  è il vettore  $(2 \times 1)$  delle previsioni riconciliate delle serie corrispondenti al *bottom level*. Ritornando alla formulazione 4.2 e generalizzando per  $n_a$  ed  $n_b$ , i vincoli diventano:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}' \\ [\mathbf{0}_{n_a} \quad \mathbf{I}_{n_b}] \end{pmatrix}_{n \times n}, \quad \mathbf{l} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n_a \times 1} \\ \mathbf{0}_{n_b \times 1} \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{n \times 1}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n_a \times 1} \\ +\infty_{n_b \times 1} \end{pmatrix}_{n \times 1} .$$

Sfruttando quanto detto per le gerarchie contemporanee, si può estendere il risolutore **osqp**, anche alle gerarchie temporali e cross-temporali.

Nel caso temporale il problema di minimo (4.1) diventa

$$\min_{\mathbf{y}} \frac{1}{2} \mathbf{y}' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{y} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{Z}' \mathbf{y} = 0, \quad \mathbf{y} > 0, \quad (4.3)$$

dove  $\hat{\mathbf{y}}$  è il vettore  $((k^* + m) \times 1)$  delle previsioni di base,  $\mathbf{Z}'$  è la matrice  $(k^* \times (k^* + m))$  dei vincoli di aggregazione temporale,  $\boldsymbol{\Omega}$  è la matrice di covarianza  $((k^* + m) \times (k^* + m))$ . Quindi riformulando il tutto nella versione (4.2), eliminando già possibili ridondanze, si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \boldsymbol{\Omega}^{-1}, \\ \mathbf{q}' &= -\hat{\mathbf{y}}' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \rightarrow \mathbf{q} = -(\boldsymbol{\Omega}^{-1})' \hat{\mathbf{y}}, \\ \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} \mathbf{Z}' \\ [\mathbf{0}_{k^*} \quad \mathbf{I}_m] \end{pmatrix}_{(k^*+m) \times (k^*+m)}, \\ \mathbf{l} &= \mathbf{0}_{(k^*+m) \times 1}, \\ \mathbf{u} &= \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{k^* \times 1} \\ +\infty_{m \times 1} \end{pmatrix}_{(k^*+m) \times 1}. \end{aligned}$$

Nel caso cross-temporale bisogna porre particolare attenzione ai vincoli. Il problema di minimo può essere espresso in modo usuale da

$$\min_{\mathbf{y}} \frac{1}{2} \mathbf{y}' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{y} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{H}' \mathbf{y} = 0, \quad \mathbf{y} > 0, \quad (4.4)$$

dove  $\hat{\mathbf{y}} = \text{vec}(\hat{\mathbf{Y}}')$  è il vettore  $(n(k^* + m) \times 1)$  delle previsioni di base,  $\mathbf{H}'$  è la matrice dei vincoli di aggregazione cross-temporale,  $\mathbf{\Omega}$  è la matrice di varianza e covarianza  $(n(k^* + m) \times n(k^* + m))$ .

Come nei casi contemporaneo e temporale, è opportuno riscrivere i vincoli di non negatività per le sole serie ‘elementari’, quelle cioè al livello più disaggregato della gerarchia contemporanea a frequenza più alta. Fissato  $m$ ,  $n_a$  ed  $n_b$  le bts a frequenza più alta assumono sempre una posizione specifica nel vettore  $\mathbf{y}$  e si possono selezionare attraverso la matrice  $\mathbf{J}$ , di dimensioni  $(n_b m) \times (n(k^* + m))$ ,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n_b m) \times (n_a(k^* + m))} & \mathbf{I}_{n_b} \otimes [\mathbf{0}_{m \times k^*} & \mathbf{I}_m] \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

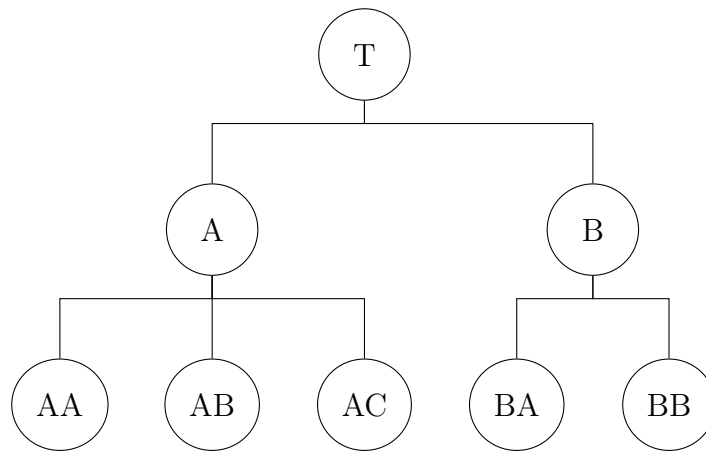
Quindi i vari elementi dell’espressione (4.2) sono dati da:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{\Omega}^{-1}, \\ \mathbf{q}' &= -\hat{\mathbf{y}}' \mathbf{\Omega}^{-1} \rightarrow \mathbf{q} = -(\mathbf{\Omega}^{-1})' \hat{\mathbf{y}}, \\ \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} \mathbf{H}' \\ \mathbf{J} \end{pmatrix}_{(n(k^* + m)) \times (n(k^* + m))}, \\ \mathbf{l} &= \mathbf{0}_{(n(k^* + m)) \times 1}, \\ \mathbf{u} &= \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{(n_a m + n k^*) \times 1} \\ +\infty_{n_b m \times 1} \end{pmatrix}_{(n(k^* + m)) \times 1}. \end{aligned}$$

## 4.4 Qualche esempio ed un confronto con hts e thief

Per mostrare le funzionalità e la qualità dei risultati prodotti dal pacchetto `forec`, dal punto di vista delle serie storiche gerarchiche contemporanee, si può considerare il dataset d’esempio `htseg1` del pacchetto `hts`. Esso contiene dati simulati con tre livelli gerarchici, come in Figura 4.1, per un totale di 8 serie ( $n = 8$ ), ciascuna con 10 osservazioni.

Nel Codice 4.1 si mostra come ricavare in modo automatico le previsioni con il semplice utilizzo della funzione `auto.arima` del pacchetto `forecast`, punto di partenza per poter poi applicare i metodi di riconciliazione. In seguito vengono calcolate le previsioni riconciliate prima utilizzando le funzioni del pacchetto `hts`, poi tramite `forec` e infine vengono confrontate tra di loro



**Figura 4.1:** Gerarchia contemporanea del dataset `htseg1` incluso nel pacchetto `hts`, con un totale di 8 variabili di cui 5 al livello *bottom*.

attraverso la norma 1. Nel caso dell'approccio `MinT-sam`, la funzione `MinT` di `hts` non riesce a invertire la matrice di covarianza necessaria alla procedura di riconciliazione. Questo non avviene con `htsrec`, che utilizza l'approccio di proiezione e fa uso di tecniche robuste per l'inversione di matrici tramite il pacchetto `Matrix`.

**Codice 4.1:** Codice **R** per ricavare in modo automatico le previsioni di base del dataset `htseg1` e riconciliarle tramite `hts` e `forec`.

```

library(hts)
library(forec)
data <- allts(htseg1)      # Dataset
C <- smatrix(htseg1)[1:3,] # Estrazione della matrice C
n <- NCOL(data)          # numero totale di seri (8)

# Previsioni di base fino a 10 orizzonti di previsione
base <- list()
for(i in 1:n) base[[i]] <- forecast(auto.arima(data[,i]))

# Matrice delle previsioni di base (8 x n)
BASE <- NULL
for(i in 1:n) BASE <- cbind(BASE,base[[i]]$mean)
colnames(BASE) <- colnames(data)

```

```
# Matrice dei residui
res <- NULL
for(i in 1:n) res <- cbind(res,base[[i]]$residuals)
colnames(res) <- colnames(data)

## Utilizzo del pacchetto hts
# ols
Y_hts_ols <- combinef(BASE, nodes=get_nodes(htseg1), keep="all")
# struc
w <- 1/apply(smatrix(htseg1),1,sum) # matrice dei pesi di struc
Y_hts_struc <- combinef(BASE, nodes=get_nodes(htseg1),
                        weights = w, keep="all")
# MinT-shr
Y_hts_shr <- MinT(BASE, nodes=get_nodes(htseg1), keep="all",
                  covariance = "shr", residual = res)
# Mint-sam
Y_hts_sam <- MinT(BASE, nodes=get_nodes(htseg1), keep="all",
                  covariance = "sam", residual = res)

## Utilizzo del pacchetto forec
# ols
Y_forec_ols <- htsrec(BASE, C=C, comb="ols")$recf
# struc
Y_forec_struc <- htsrec(BASE, C=C, comb="struc")$recf
# MinT-shr
Y_forec_shr <- htsrec(BASE, C=C, comb="shr", resmat=res)$recf
# Mint-sam
Y_forec_sam <- htsrec(BASE, C=C, comb="sam", resmat=res)$recf

## Controllo delle previsioni riconciliate
sum(abs(Y_hts_ols-as.matrix(Y_forec_ols))) # ols
# output: [1] 1.829648e-13
sum(abs(Y_hts_struc-as.matrix(Y_forec_struc))) # struc
# output: [1] 1.563194e-13
sum(abs(Y_hts_shr-as.matrix(Y_forec_shr))) # shr
# output: [1] 1.350031e-13
```

---

Passando ora alla riconciliazione tramite gerarchie temporali, si utilizza il dataset **AEdemand** presente in **thief**, che contiene i dati settimanali del totale dei pazienti ricoverati nel pronto soccorso inglese dal Gennaio 2011 a Dicembre 2014. Come per il caso contemporaneo, nel Codice 4.2 si effettuano le previsioni di base attraverso il pacchetto **forecast** e successivamente la riconciliazione tramite il pacchetto **thief** e **forec**. In aggiunta ai metodi mostrati, la funzione **thfrec** permette di utilizzare tutte le approssimazioni della matrice di covarianza viste nella Sezione 2.2.2.

**Codice 4.2:** Codice **R** per ricavare in modo automatico le previsioni di base del dataset **AEdemand** e riconciliarle tramite **thief** e **forec**.

```
library(thief)
library(forec)

# Estrazione della variabile "Total Emergency Admissions"
dataset <- window(AEdemand[,12], start = c(2011,1), end = c(2014,52))
# Estrazione di tutti i livelli di aggregazione temporale
data <- tsaggregates(dataset)

# Previsioni di base per due anni
base <- list()
for(i in 1:5)
  base[[i]] <- forecast(auto.arima(data[[i]]))
base[[6]] <- forecast(auto.arima(data[[6]]), h=2)

# Vettore contenente le previsioni di base
base_vec <- NULL
for(i in 6:1)
  base_vec <- c(base_vec, base[[i]]$mean)

# Vettore dei residui in-sample
res <- NULL
for(i in 6:1)
  res <- c(res, base[[i]]$residuals)

## Utilizzo del pacchetto hts
```



```
# ols
thief_ols <- thief(dataset, m=52, h=2*52, comb="ols", usemodel="arima")
# estrazione delle previsioni dall'oggetto thief
thief_ols <- tsaggregates(thief_ols$mean)
y_thief_ols <- NULL
for(i in 6:1) y_thief_ols <- c(y_thief_ols, thief_ols[[i]])
# struc
thief_struc <- thief(dataset, m=52, h=2*52, comb="struc", usemodel="arima"
)
# estrazione delle previsioni dall'oggetto thief
thief_struc <- tsaggregates(thief_struc$mean)
y_thief_struc <- NULL
for(i in 6:1) y_thief_struc <- c(y_thief_struc, thief_struc[[i]])
# wlsv
thief_wlsv <- thief(dataset, m=52, h=2*52, comb="mse", usemodel="arima")
# estrazione delle previsioni dall'oggetto thief
thief_wlsv <- tsaggregates(thief_wlsv$mean)
y_thief_wlsv <- NULL
for(i in 6:1) y_thief_wlsv <- c(y_thief_wlsv, thief_wlsv[[i]])
# MinT-shr
thief_shr <- thief(dataset, m=52, h=2*52, comb="shr", usemodel="arima")
# estrazione delle previsioni dall'oggetto thief
thief_shr <- tsaggregates(thief_shr$mean)
y_thief_shr <- NULL
for(i in 6:1) y_thief_shr <- c(y_thief_shr, thief_shr[[i]])

## Utilizzo del pacchetto forec
# ols
y_forec_ols <- thfrec(base_vec, m=52, comb="ols")$recf
# struc
y_forec_struc <- thfrec(base_vec, m=52, comb="struc")$recf
# wlsv
y_forec_wlsv <- thfrec(base_vec, m=52, comb="wlsv", res=res)$recf
# MinT-shr
y_forec_shr <- thfrec(base_vec, m=52, comb="shr", res=res)$recf
```

```
## Controllo delle previsioni riconciliate
sum(abs(y_thief_ols - y_forec_ols))    # ols
# output: [1] 3.812772e-11
sum(abs(y_thief_struc - y_forec_struc)) # struc
# output: [1] 2.243894e-11
sum(abs(y_thief_wlsv - y_forec_wlsv))  # wlsv
# output: [1] 1.821832e-11
sum(abs(y_thief_shr - y_forec_shr))    # shr
# output: [1] 1.939782e-11
```

---

In entrambe le applicazioni riportate i risultati di **forec** coincidono con la rispettiva variante dei pacchetti classici. Per maggiori dettagli si rimanda all'Appendice [D](#) per il manuale completo.

Infine, la valutazione delle performance di **forec** in termini di tempi di calcolo, condotta nel più impegnativo contesto della riconciliazione con vincoli di non negatività, è oggetto della prima delle due simulazioni Monte Carlo descritte nel prossimo capitolo.

# Capitolo 5

## Due esperimenti Monte Carlo

### 5.1 Tempi di calcolo `forec` e `hts`

Nel primo esperimento Monte Carlo vengono posti a confronto i tempi di calcolo necessari ai pacchetti `forec` e `hts` per risolvere il problema di previsioni di sistemi gerarchici contemporanei con e senza vincoli di non negatività delle previsioni. L'esperimento è stato effettuato usando **R** su una macchina macOS dotata di un processore Intel Core i5 Quad-core da 2,3 GHz e 8 GB di memoria (RAM). Per semplicità, si considerano le previsioni riconciliate secondo l'approccio **struc** (Capitolo 3 e Wickramasuriya *et al.*, 2019). L'efficienza computazionale dei pacchetti posti a confronto viene valutata su un gruppo di gerarchie di dimensioni variabili, passando da sistemi formati da poche serie storiche a sistemi molto numerosi.

Le schema dell'esperimento ricalca quello proposto Wickramasuriya *et al.* (2020). La prima, e più piccola, gerarchia presa in considerazione è formata da un solo livello ( $K = 1$ ) e tre serie ( $n_b = 3$ ) al livello più disaggregato. Le previsioni di base per la serie più aggregate vengono simulate attraverso una distribuzione  $\text{Uniforme}(1.5e^K, 2e^K)$ , dove  $K$  è il numero di livelli nella gerarchia. Queste vengono poi disaggregate per dare forma alle previsioni per il *bottom level* attraverso delle proporzioni che sommano a uno. Nello specifico, l'insieme dei pesi viene ottenuto simulando  $n_b$  valori da una distribuzione Gamma con parametri di forma e scala pari entrambi a 2, che

vengono successivamente normalizzati. Infine a questo insieme di previsioni di base, una volta aggregate, viene aggiunto un disturbo casuale per renderle incoerenti, attraverso la funzione `jitter`. A questo punto esse vengono riconciliate secondo l'approccio struc. L'intera procedura viene ripetuta fino a che la riconciliazione non produce almeno un valore riconciliato negativo, e sei di questi insiemi sono assegnati a specifici orizzonti di previsione. Infine si calcolano le riconciliazioni con i vincoli di non negatività. Successivamente si replica l'intera simulazione per 50 volte.

Il numero di livelli nella gerarchia viene gradualmente aumentato aggiungendo tre o quattro (per  $K > 9$  due o tre) nodi a ciascuna componente del *bottom level* della gerarchia precedente. Nella Tabella 5.1 viene riportato il numero totale di previsioni di base da riconciliare ( $n$ ) e il numero di bts ( $n_b$ ) al variare del numero di livelli che compongono la gerarchia considerata. Nella stessa tabella viene anche mostrato il numero medio (su 50 replicazioni) di previsioni riconciliate negative per ciascun orizzonte di previsione.

**Tabella 5.1:** Struttura di ciascuna gerarchia e numero medio delle previsioni riconciliate negative attraverso l'approccio struc. In *corsivo* è riportata la percentuale di zeri sul totale  $n$ ).

Livelli	n	n <sub>b</sub>	Orizzonti di previsione					
			1	2	3	4	5	6
1	4	3	1.00 <i>(25%)</i>	1.02 <i>(25%)</i>	1.00 <i>(25%)</i>	1.00 <i>(25%)</i>	1.00 <i>(25%)</i>	1.02 <i>(25%)</i>
2	14	10	1.24 <i>(9%)</i>	1.32 <i>(9%)</i>	1.36 <i>(10%)</i>	1.26 <i>(9%)</i>	1.48 <i>(11%)</i>	1.22 <i>(9%)</i>
3	49	35	3.80 <i>(8%)</i>	4.20 <i>(9%)</i>	4.06 <i>(8%)</i>	3.90 <i>(8%)</i>	3.76 <i>(8%)</i>	4.00 <i>(8%)</i>
4	171	122	18.64 <i>(11%)</i>	19.24 <i>(11%)</i>	18.78 <i>(11%)</i>	19.26 <i>(11%)</i>	18.36 <i>(11%)</i>	19.84 <i>(12%)</i>
5	598	427	83.84 <i>(14%)</i>	85.08 <i>(14%)</i>	86.02 <i>(14%)</i>	85.00 <i>(14%)</i>	85.26 <i>(14%)</i>	83.20 <i>(14%)</i>
6	2092	1494	374.84 <i>(18%)</i>	378.48 <i>(18%)</i>	375.12 <i>(18%)</i>	371.16 <i>(18%)</i>	371.10 <i>(18%)</i>	371.12 <i>(18%)</i>
7	7321	5229	1581.78 <i>(22%)</i>	1589.50 <i>(22%)</i>	1578.52 <i>(22%)</i>	1589.26 <i>(22%)</i>	1563.84 <i>(21%)</i>	1585.78 <i>(22%)</i>
8	25622	18301	6413.20 <i>(25%)</i>	6511.76 <i>(25%)</i>	6389.30 <i>(25%)</i>	6447.10 <i>(25%)</i>	6520.70 <i>(25%)</i>	6538.52 <i>(26%)</i>
9	89675	64053	25631.50 <i>(29%)</i>	25763.58 <i>(29%)</i>	25870.46 <i>(29%)</i>	25787.52 <i>(29%)</i>	25779.94 <i>(29%)</i>	25746.02 <i>(29%)</i>
10	249808	160133	65608.52 <i>(26%)</i>	65457.36 <i>(26%)</i>	65616.84 <i>(26%)</i>	65501.62 <i>(26%)</i>	65376.72 <i>(26%)</i>	65556.18 <i>(26%)</i>
11	650141	400333	152363.84 <i>(23%)</i>	156494.72 <i>(24%)</i>	155383.54 <i>(24%)</i>	155608.76 <i>(24%)</i>	153064.40 <i>(24%)</i>	154095.82 <i>(24%)</i>
12	1650974	1000833	366148.48 <i>(22%)</i>	368735.84 <i>(22%)</i>	365169.18 <i>(22%)</i>	365985.66 <i>(22%)</i>	365635.30 <i>(22%)</i>	368454.24 <i>(22%)</i>

La tabella 5.2 presenta i tempi di calcolo medi necessari ai pacchetti **forec** e **hts** per riconciliare le previsioni di base (in grassetto sono stati segnalati i tempi più bassi per ciascuna gerarchia). Nella quinta e ottava colonna viene presentata la differenza percentuale tra i tempi. Nella prima parte sono riportati i risultati per la riconciliazione senza imporre alcun vincolo di non negatività. In questo caso il pacchetto **forec** risulta sempre più veloce di **hts**, con guadagni che vanno dal 20% a quasi 50%. Per quanto riguarda la riconciliazione con vincoli di non negatività, detto che tanto **forec** quanto **hts** hanno raggiunto la convergenza, anche in questo caso **forec** ha fatto registrare i risultati migliori, con guadagni variabili dal 32% a poco meno dell'80%.

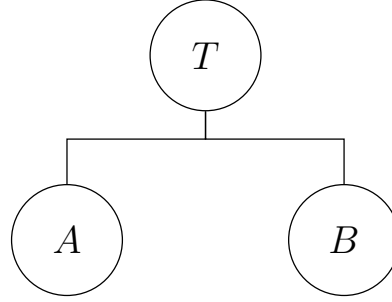
**Tabella 5.2:** Tempi di calcolo medi (in secondi) necessari ai pacchetti **forec** e **hts** per riconciliare le previsioni di base senza e con vincoli di non negatività.

Livelli	n	forec	hts	G%	forec	hts	G%
		<i>senza vincoli di non negatività</i>			<i>con vincoli di non negatività</i>		
1	4	<b>0.0054s</b>	0.0068s	20.92%	<b>0.0260s</b>	0.0819s	68.24%
2	14	<b>0.0055s</b>	0.0076s	27.14%	<b>0.0240s</b>	0.1016s	76.34%
3	49	<b>0.0054s</b>	0.0085s	36.17%	<b>0.0263s</b>	0.1182s	77.78%
4	171	<b>0.0055s</b>	0.0091s	39.27%	<b>0.0291s</b>	0.1432s	79.66%
5	598	<b>0.0061s</b>	0.0110s	44.53%	<b>0.0461s</b>	0.1994s	76.87%
6	2092	<b>0.0092s</b>	0.0168s	45.10%	<b>0.1115s</b>	0.3323s	66.46%
7	7321	<b>0.0230s</b>	0.0374s	38.40%	<b>0.3937s</b>	0.8247s	52.26%
8	25622	<b>0.0696s</b>	0.1375s	49.39%	<b>1.6976s</b>	2.6304s	35.46%
9	89675	<b>0.2750s</b>	0.4943s	44.36%	<b>6.4206s</b>	9.4621s	32.14%
10	249808	<b>0.8881s</b>	1.6541s	46.31%	<b>18.5188s</b>	32.0912s	42.29%
11	650141	<b>3.1245s</b>	5.0138s	37.68%	<b>55.5274s</b>	105.3644s	47.30%
12	1650974	<b>9.2005s</b>	15.4587s	40.48%	<b>158.9146s</b>	324.4572s	51.02%

$G\% = 100 \frac{x_{hts} - x_{forec}}{x_{hts}} \%$  dove  $x$  è il tempo in secondi.

## 5.2 Performance delle tecniche di riconciliazione

Il secondo esperimento Monte Carlo è volto ad analizzare l'impatto della struttura di correlazione sulle previsioni riconciliate, con l'intento di valutare le performance dei diversi approcci di riconciliazione contemporanea, temporale e cross-temporale, considerati in questo lavoro. A tale scopo, dal punto



**Figura 5.1:** Gerarchia contemporanea con due variabili al livello *bottom*.

di vista contemporaneo, si consideri una gerarchia con due serie al *bottom level* ( $n_b = 2$ ) e una serie data dalla somma di queste due ( $n_a = 1$ ), come in Figura 5.1. Dal punto di vista temporale, si è assunto che la frequenza più elevata sia pari a 4 (che equivale a considerare delle serie storiche trimestrali), e sono dunque state considerate le versioni semestrali e annuali delle tre variabili che formano questa semplice gerarchia. Riprendendo il lavoro di Wickramasuriya *et al.* (2019), come processo generatore delle bts trimestrali è stato scelto un VAR(1) bivariato :

$$\mathbf{B}\mathbf{z}_t = \Phi\mathbf{z}_{t-1} + \boldsymbol{\eta}_t,$$

dove

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{z}_t = \begin{bmatrix} y_{A,t}^{[1]} \\ y_{B,t}^{[1]} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_t = \begin{bmatrix} \eta_{A,t} \\ \eta_{B,t} \end{bmatrix}$$

con  $\eta_{A,t} \sim N(0, \sigma_A^2)$  e  $\eta_{B,t} \sim N(0, \sigma_B^2)$  processi *white noise* gaussiani indipendenti. Questa forma particolare di VAR(1) implica che  $y_{A,t}^{[1]}$  non abbia un effetto contemporaneo su  $y_{B,t}^{[1]}$  e che la matrice di correlazione contemporanea sia data da

$$\text{cor}(\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\eta}_t) = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{con} \quad \rho = \frac{-\gamma\sigma_B}{\sqrt{\sigma_A^2 + \gamma^2\sigma_B^2}}.$$

In questo modo per controllare la correlazione, dato  $\rho$ , si utilizza  $\gamma$  in modo tale che

$$\gamma = \frac{-\sigma_A^2 \rho}{\sigma_B^2 \sqrt{1 - \rho^2}}.$$

Per l'esperimento Monte Carlo, la scelta dei parametri è ricaduta sui valori  $\alpha = 0.8$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\rho \in \{-0.8, -0.6, -0.4, -0.2, 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$ ,  $\sigma_A^2 = 2$  e  $\sigma_A^2 = 4$ . In particolare, si sono considerate serie trimestrali lunghe 104 osservazioni (quindi 26 anni), in cui le prime 100 sono usate come insieme di stima e le ultime 4 come insieme di verifica. In questo modo, l'orizzonte di previsione è  $h_1 = 4$  per dati trimestrali,  $h_2 = 2$  per dati semestrali e  $h_4 = 1$  per dati annuali. Per ogni variabile, a tutti i livelli temporali, le previsioni di base sono state generate da un modello ARIMA usando le opzioni di default dell'algoritmo automatico proposto da Hyndman e Khandakar (2008) e reso disponibile dal pacchetto `forecast` (Hyndman *et al.*, 2020a) di **R**.

L'esperimento consiste di 1000 replicazioni che hanno richiesto un tempo di elaborazione dell'ordine di 12 ore.

### 5.2.1 Valutazione delle tecniche di previsione

Per valutare le prestazioni di  $J > 1$  procedure di riconciliazione, si sono usati degli indici basati sull'errore di previsione:

$$\hat{e}_{i,j,t}^{[k],h} = y_{i,t+h}^{[k]} - \hat{y}_{i,j,t}^{[k],h}, \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, n, \quad t = 1, \dots, q, \quad h = 1, \dots, h_k, \\ j = 0, \dots, J, \quad k \in \mathcal{K}, \end{array} \quad (5.1)$$

dove  $y$  e  $\hat{y}$  sono, rispettivamente, i valori osservati e previsti, l'indice  $i$  indica la serie (in cui  $i = 1, \dots, n_a$  indica le serie aggregate e  $i = (n_a + 1), \dots, n$ , indica quelle al livello più disaggregato),  $j = 0$  si riferisce alle previsioni di base,  $t$  indica la  $t$ -esima simulazione (o, successivamente, in presenza di un esperimento di previsione su un dataset reale,  $t$  indicherà l'origine delle previsioni), e  $h_4 = 1$ ,  $h_2 = 2$ ,  $h_1 = 4$  sono gli orizzonti di previsione per le serie storiche, rispettivamente, annuali, semestrali e trimestrali. Con gli errori (5.1) è possibile costruire l'errore quadratico medio (*Mean Square Error*, MSE) per una combinazione  $(h, k, j, i)$  in cui  $h$  è l'orizzonte di previsione,  $k$  è l'ordine

di aggregazione temporale,  $j$  è la tecnica di riconciliazione e  $i$  indica la serie:

$$\text{MSE}_{i,j}^{[k],h} = \frac{1}{q} \sum_{t=1}^q \left( \hat{e}_{i,j,t}^{[k],h} \right)^2, \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, n, \quad k \in \mathcal{K}, \\ j = 0, \dots, J, \quad h = 1, \dots, h_k. \end{array} \quad (5.2)$$

L'accuratezza delle previsioni viene calcolata attraverso l'AvgRelMSE (*Average Relative Mean Square Error*, Davydenko e Fildes, 2013) che si ottiene attraverso una media geometrica dell'errore quadratico medio relativo di tutte le  $n$  serie dato un orizzonte  $h$ , in cui le previsioni di base che non soddisfano nessun vincolo di aggregazione sono usate come *benchmark* ( $j = 0$ ):

$$\text{AvgRelMSE}_j^{[k],h} = \left( \prod_{i=1}^n \text{rMSE}_{i,j}^{[k],h} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad \begin{array}{l} j = 0, \dots, J, \quad k \in \mathcal{K}, \\ h = 1, \dots, h_k, \end{array} \quad (5.3)$$

dove  $\text{rMSE}_{i,j}^{[k],h}$  è l'MSE relativo:

$$\text{rMSE}_{i,j}^{[k],h} = \frac{\text{MSE}_{i,j}^{[k],h}}{\text{MSE}_{i,0}^{[k],h}}, \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, n, \quad k \in \mathcal{K}, \\ j = 0, \dots, J, \quad h = 1, \dots, h_k. \end{array}$$

A livello interpretativo, se le previsioni fornite da una certa tecnica sono migliori di quelle di base, allora l'AvgRelMSE risulta essere minore di 1 e la percentuale di guadagno in termini di accuratezza previsiva rispetto al *benchmark* è pari a  $\left(1 - \text{AvgRelMSE}_j^{[k],h}\right) \times 100$ .

L'espressione (5.3) a sua volta può essere usata per calcolare altri indici utili a confrontare gruppi di variabili, orizzonti di previsione multipli o differenti ordini di aggregazione. Nell'Appendice A, sono presentate le varie formulazioni per questi indicatori e l'estensione che utilizza l'errore assoluto al posto dell'errore quadratico.

## 5.2.2 Analisi dei risultati

I risultati che sono riportati di seguito riguardano le sei migliori procedure per ogni tipo di gerarchia (contemporanea, temporale e cross-temporale) che sono riportate nella Tabella 5.3.

I prefissi **cs** e **t** indicano tecniche di riconciliazione che operano solo lungo una dimensione: cross-sezionale o temporale. A livello cross-temporale, **ite**



**Tabella 5.3:** Le migliori sei procedure prese in considerazione nei confronti distinte per tipo di gerarchia.

Procedure per gerarchie		
contemporanee	temporali	cross-temporali
cs-bu ( <i>bottom-up</i> )	t-bu ( <i>bottom-up</i> )	ite-acov-shr
cs-ols	t-struc	ite-wlsv-shr
cs-struc	t-wlsv	kah-wlsv-shr
cs-wls	t-acov	tcs-acov-shr
cs-shr	t-sar1	oct-bdsam
cs-sam	t-har1	oct-BDshr

indica le procedure che fanno uso della tecnica iterativa (questo prefisso è seguito da due sigle, la prima relativa alla matrice di covarianza per il passo temporale, la seconda a quella per il passo contemporaneo). Analogamente **kah** e **tcs** si riferiscono, rispettivamente, alla procedura euristica KA con le matrici di covarianza proposte da Kourentzes e Athanasopoulos (2019), e alle varianti che fanno uso delle nuove matrici considerate in questa tesi (si veda il Capitolo 3). Infine, il prefisso **oct** indica la procedura di riconciliazione ottimale ed è seguito dalla pertinente sigla della matrice di covarianza cross-temporale.

Va inoltre precisato che l'analisi è stata condotta usando l'AvgRelMSE, ma risultati pressoché analoghi, non presentati per motivi di spazio, sono stati ottenuti usando l'indice AvgRelMAE.

La Figura 5.2 presenta i risultati per la riconciliazione contemporanea. A livello trimestrale ( $k = 1$ ) si può notare come cs-shr e cs-sam portino quasi sempre un miglioramento (i loro valori sono pressoché sempre minori di 1). Più cresce il livello di aggregazione temporale meno performanti sembrano essere le previsioni riconciliate rispetto a quelle di base. Nel complesso, sembrano esserci miglioramenti non trascurabili per valori di  $\rho$  minori di 0, mentre per valori positivi i miglioramenti sono contenuti e tendono a diminuire al crescere di  $\rho$ .

Se si guardano i risultati nel caso temporale (Figura 5.3), si può notare che a livello annuale ( $k = 4$ ) e semestrale ( $k = 2$ ) si verifica sempre un miglio-

ramento qualunque sia  $\rho$ . Nel caso trimestrale le previsioni riconciliate non migliorano di molto quelle di base - coerenza additiva a parte - e addirittura con t-struc si registra un peggioramento dell'accuratezza previsiva. Inoltre, le procedure che usano strutture più parametrizzate della matrice di covarianza, come t-sar1 e t-har1, sembrano fornire risultati migliori rispetto a tecniche più semplici come t-struc o *bottom-up* (t-bu). La riconciliazione temporale non sembra particolarmente influenzata dalla presenza di correlazione tra le serie del *bottom level*, il che appare ragionevole visto che in questo caso le previsioni riconciliate vengono calcolate in modo indipendente per ogni serie.

Guardando il caso cross-temporale (Figura 5.4), si nota che nelle serie aggregate l'andamento delle varie procedure è molto simile e la loro applicazione genera pressoché sempre un miglioramento, soprattutto per le previsioni da serie semestrali e annuali. Come nelle gerarchie contemporanee, i miglioramenti più evidenti rispetto alle previsioni di base si hanno con  $\rho < 0$ . A livello delle *bottom time series* si hanno sempre miglioramenti, eccetto che per le procedure KA con  $\rho = -0.8$ . In generale, le tecniche di riconciliazione ottimali e quelle iterative si comportano meglio.

In conclusione, in Figura 5.5 vengono confrontate le due procedure per ciascun approccio (contemporaneo, temporale e cross-temporale, rispettivamente con sfondo grigio, rosa e bianco) che hanno prodotto le previsioni riconciliate più accurate. Le tecniche che riconciliano lungo la dimensione contemporanea ottengono buoni risultati per le serie trimestrali, ma molto scarsi per le serie aggregate temporalmente; al contrario, quelle che operano lungo la sola dimensione temporale mostrano un buon esito per le frequenze annuali e semestrali. Va infine sottolineato che le procedure cross-temporali fanno quasi sempre registrare una maggiore accuratezza rispetto alle riconciliazioni coerenti rispetto ad una sola dimensione gerarchica. Quindi le tecniche di riconciliazione cross-temporale, oltre a fornire previsioni coerenti dal punto di vista temporale e da quello contemporaneo, si caratterizzano anche per una più elevata qualità, intesa come capacità di migliorare l'accuratezza delle previsioni di base.

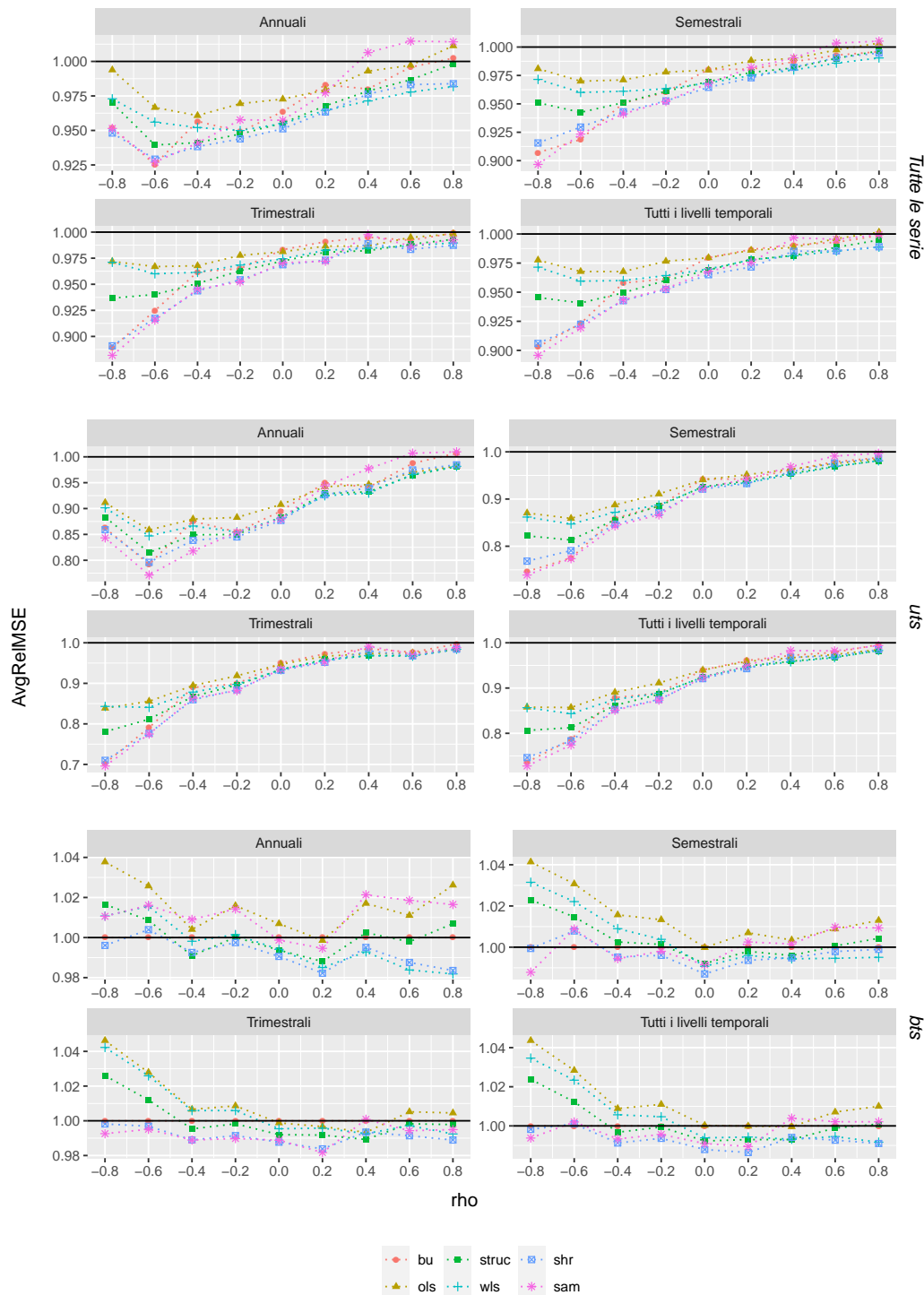
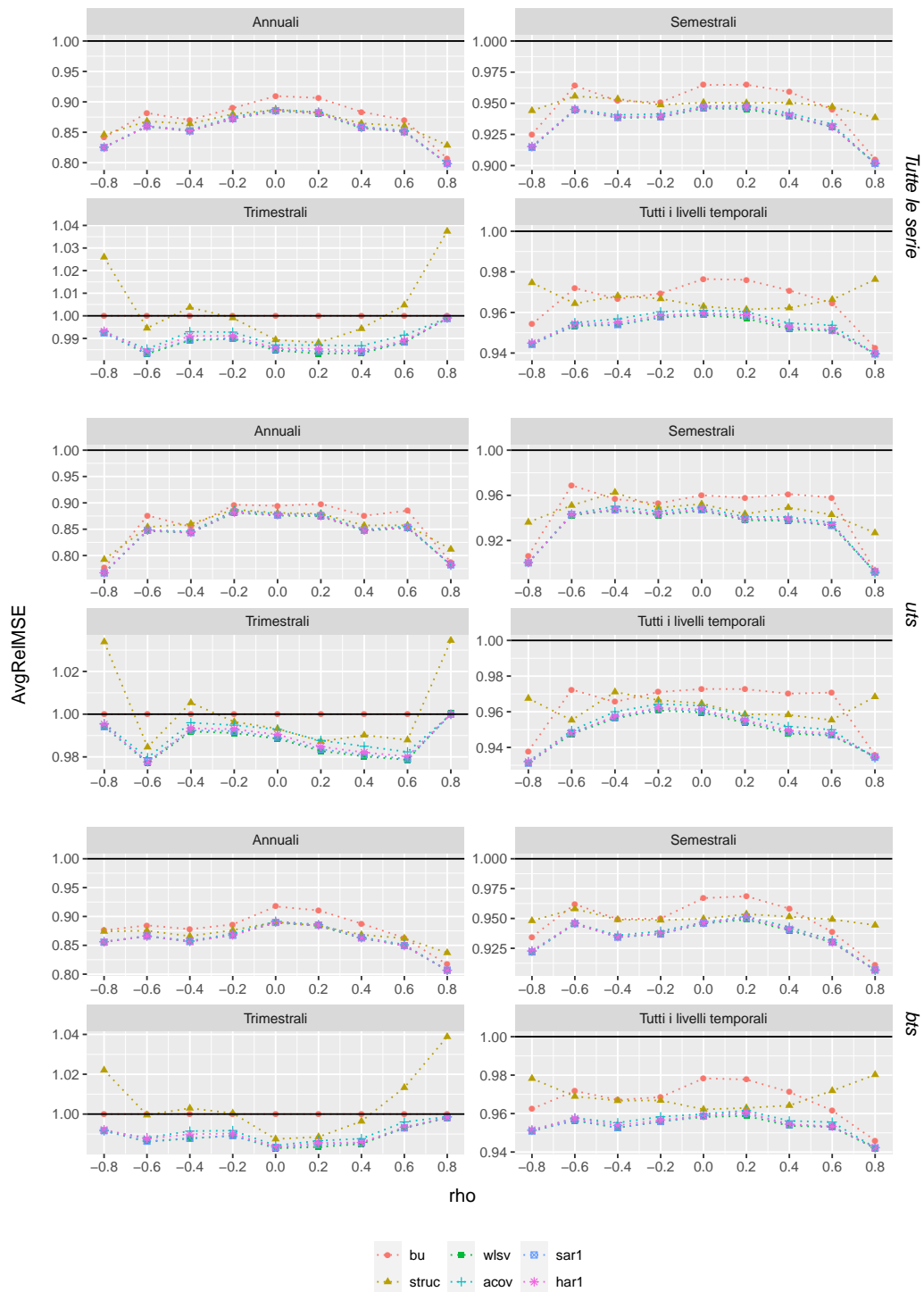
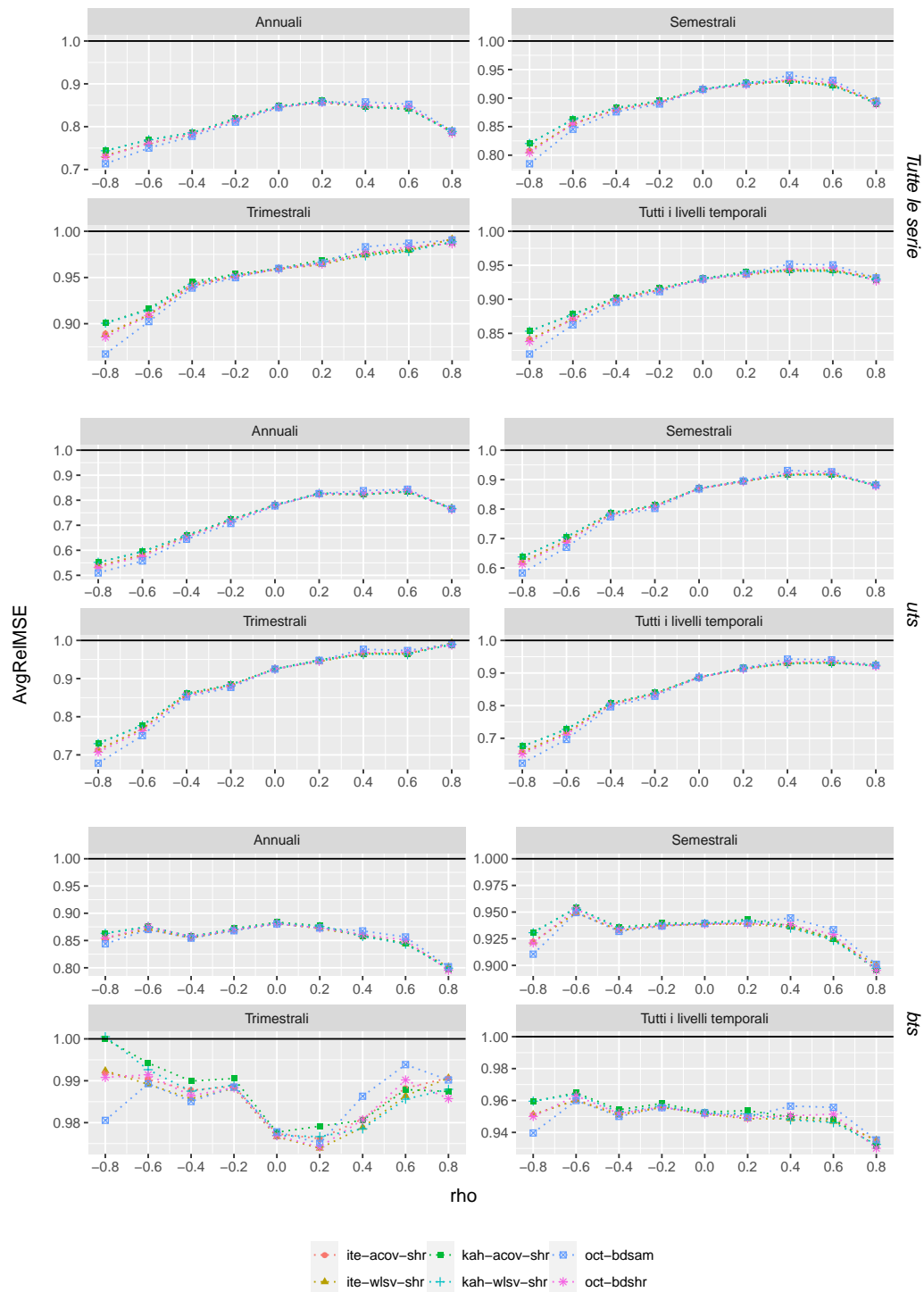


Figura 5.2: AvgRelMSE in base alla correlazione delle previsioni riconciliate attraverso tecniche contemporanee per tutte le serie (primo blocco in alto), per la sola serie  $y_T$  (secondo blocco) e per  $y_A$  ed  $y_B$  (ultimo blocco) per ogni livello di aggregazione temporale ( $k = 1$  dati trimestrali,  $k = 2$  semestrali,  $k = 4$  annuali). Ogni serie è formata da 104 osservazioni con parametri  $\alpha = 0.8$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\sigma_A^2 = 2$  e  $\sigma_B^2 = 4$ . L'esperimento è stato ripetuto 1000 volte.



**Figura 5.3:** AvgRelMSE in base alla correlazione delle previsioni riconciliate attraverso tecniche temporali per tutte le serie (primo blocco in alto), per la sola serie  $y_T$  (secondo blocco) e per  $y_A$  ed  $y_B$  (ultimo blocco) per ogni livello di aggregazione temporale ( $k = 1$  dati trimestrali,  $k = 2$  semestrali,  $k = 4$  annuali). Ogni serie è formata da 104 osservazioni con parametri  $\alpha = 0.8$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\sigma_A^2 = 2$  e  $\sigma_B^2 = 4$ . L'esperimento è stato ripetuto 1000 volte.



**Figura 5.4:** AvgRelMSE in base alla correlazione delle previsioni riconciliate attraverso tecniche cross-temporali ottimali ed euristiche per tutte le serie (primo blocco in alto), per la sola serie  $y_T$  (secondo blocco) e per  $y_A$  ed  $y_B$  (ultimo blocco) per ogni livello di aggregazione temporale ( $k = 1$  dati trimestrali,  $k = 2$  semestrali,  $k = 4$  annuali). Ogni serie è formata da 104 osservazioni con parametri  $\alpha = 0.8$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $\sigma_A^2 = 2$  e  $\sigma_B^2 = 4$ . L'esperimento è stato ripetuto 1000 volte.



**Figura 5.5:** AvgRelMSE in base alla correlazione delle previsioni riconciliate attraverso le migliori tecniche contemporanee, temporali e cross-temporali per le diverse frequenze (annuali, semestrali e trimestrali).

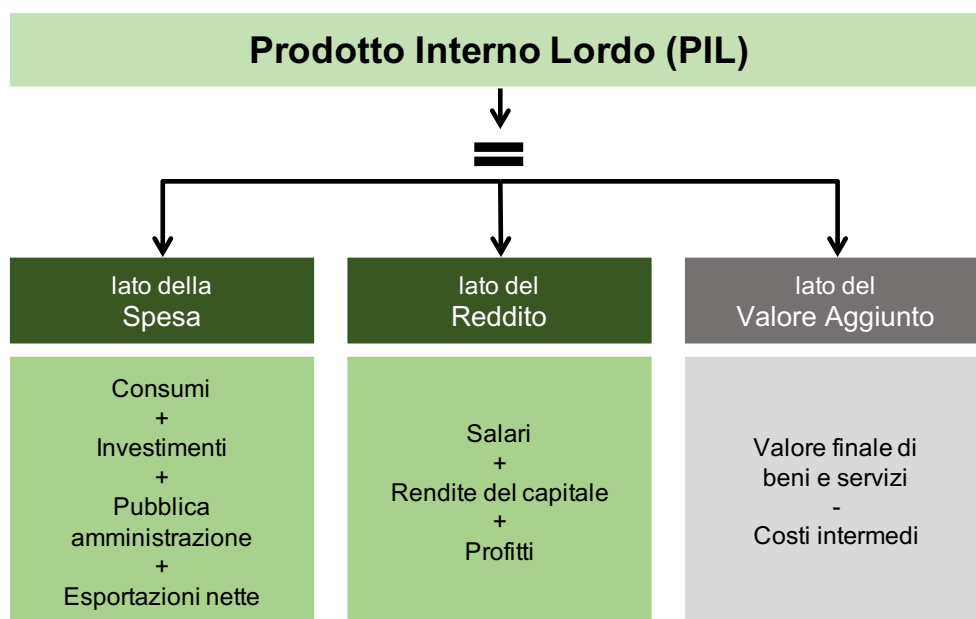
# Capitolo 6

## Prodotto Interno Lordo australiano (PIL) dal lato del Reddito e della Spesa

### 6.1 Descrizione del dataset

Il primo insieme di dati reali con cui si è deciso di lavorare per verificare la praticità e l'efficacia delle tecniche discusse finora è il Prodotto Interno Lordo australiano (*Australian GDP*), già utilizzato per sperimentare procedure di riconciliazione di previsioni puntuali e probabilistiche da Athanasopoulos *et al.* (2019). Si tratta di un sistema di 95 serie trimestrali (descritte in Appendice B) contemporaneamente vincolate che vanno dal quarto trimestre del 1984 (1984:Q4) al primo trimestre 2018 (2018:Q1), le quali possono essere temporalmente aggregate dando vita a serie semestrali e annuali.

In Contabilità Nazionale, il Prodotto Interno Lordo (PIL o *Gross Domestic Product*) è una grandezza macroeconomica che viene misurata dal lato del Valore Aggiunto (*Production*), del Reddito (*Income*) e della Spesa (*Expenditure*), Figura 6.1. Nel sistema australiano, il valore finale del PIL viene ottenuto come media di queste tre misure, le quali a loro volta sono aggregazioni di variabili di rilevante significato economico, come i Consumi e gli Investimenti, dal lato della Spesa, e i Redditi dei fattore produttivi (lavoro dipendente e risultato lordo di gestione) dal lato del Reddito. Dal momento che i dati non sono disponibili per il calcolo attraverso il Valore Aggiunto,



**Figura 6.1:** Quadro di sintesi del Prodotto Interno Lordo

l'analisi è stata condotta per i due restanti approcci.

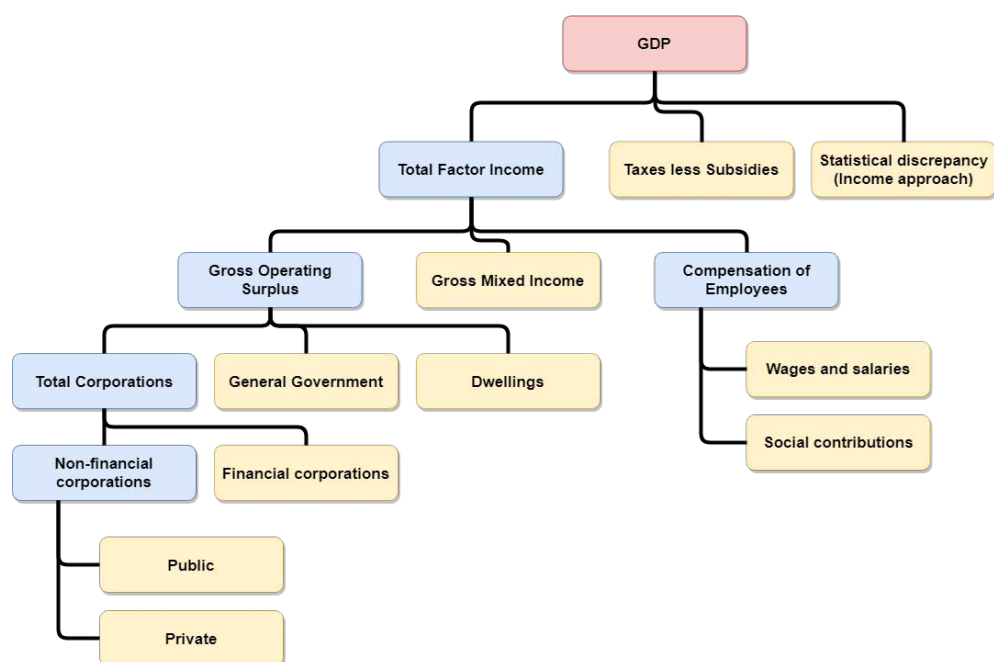
Infine, sebbene ci sia una piccola discrepanza statistica tra ciascuna serie e la cifra del PIL principale, tale discrepanza viene semplicemente considerata come una serie temporale a sé stante, pubblicata dall'Australian Bureau of Statistics (ABS). Per maggiori dettagli sull'argomento si può consultare Australian Bureau of Statistics (2020).

In Figura 6.2 è stata rappresentata la struttura gerarchica contemporanea formata da tutti gli aggregati che contribuiscono a formare il Prodotto Interno Lordo dal lato del Reddito. La gerarchia si presenta su 3 livelli: in particolare si hanno 10 serie storiche al livello *bottom* e 16 (15, se si esclude il PIL) ai livelli superiori.

Le Figure 6.3, 6.4 e 6.5, invece, mostrano l'intera gerarchia contemporanea con tutti gli aggregati che formano il PIL dal lato della Spesa. In questo caso la struttura si divide in 4 livelli, con 53 serie storiche al livello più disaggregato e 27 (26 escludendo il PIL) nei restanti livelli.

Nel lavoro di Athanasopoulos *et al.* (2019) le previsioni per le serie coinvolte nelle due strutture gerarchiche sono state riconciliate solo con tecniche contemporanee ed in modo separato ottenendo così, per ogni previsione del PIL, due valori: uno dal lato del Reddito e uno da quello della Spesa. Si



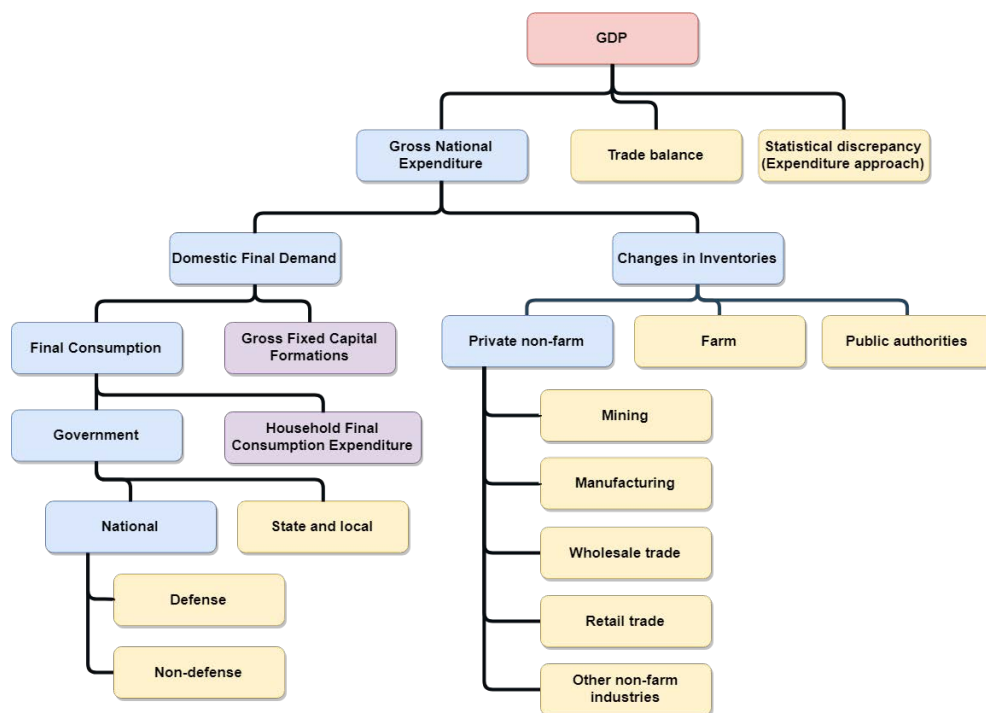


**Figura 6.2:** Gerarchia contemporanea del PIL dal lato del Reddito, tratta da Athanasopoulos *et al.* (2019). Il colore rosa indica il PIL (la serie più aggregata), il blu le serie al livello intermedio e il giallo quelle al livello più disaggregato.

tratta di una questione piuttosto delicata, perché secondo questo approccio la previsione della stessa variabile, che risulta anche essere di gran lunga la più importante del sistema, varia a seconda della visione economica con cui essa viene calcolata, pur partendo dalle stesse previsioni di base. Tutto ciò non è ovviamente in linea con l'aspirazione di disporre di un'unica previsione (*one-number forecast*) e, per di più, non sfrutta tutta l'informazione resa disponibile dall'intero sistema.

La scelta di Athanasopoulos *et al.* (2019) è probabilmente dovuta al fatto che la gerarchia raggruppata che si viene a formare considerando tutte le 95 variabili risulta essere anomala: le serie al livello disaggregato non sono le stesse dal lato del Reddito e della Spesa, e ciò non permette di formulare il problema tramite una rappresentazione strutturale standard.

Bisaglia *et al.* (2020) mostrano come sia possibile ottenere un unico valore previsto per il Prodotto Interno Lordo, coerente con le previsioni di tutti gli altri aggregati, tanto dal lato del Reddito quanto da quello della Spesa, utilizzando l'intera gerarchia raggruppata contemporanea attraverso l'approccio

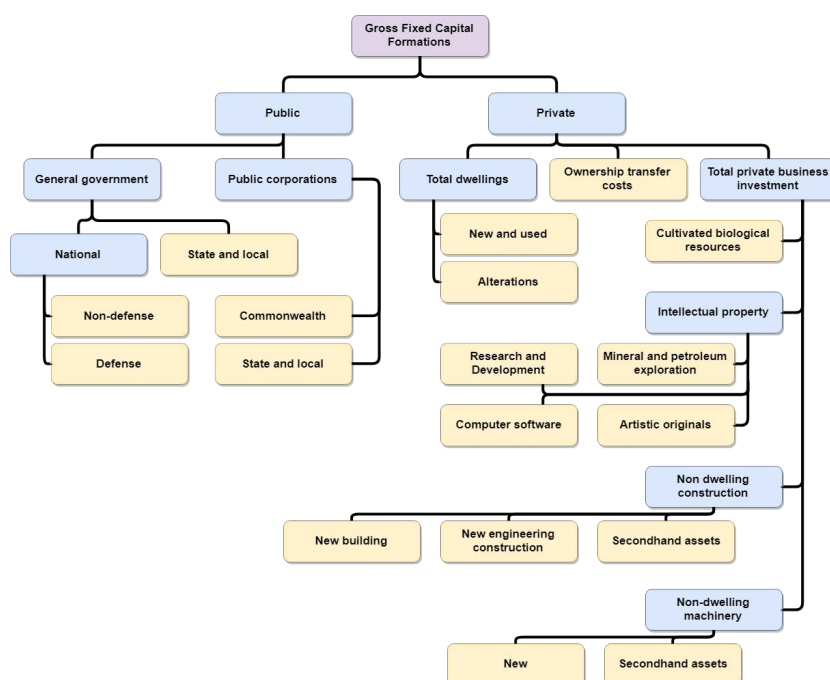


**Figura 6.3:** Gerarchia contemporanea del PIL dal lato della Spesa, tratta da Athanasopoulos *et al.* (2019). Il colore rosa indica il PIL (la serie più aggregata), il blu e viola le serie ai livelli intermedi e il giallo quelle al livello più disaggregato. Le serie di colore viola sono ulteriormente disaggregate nelle Figure 6.4 e 6.5.

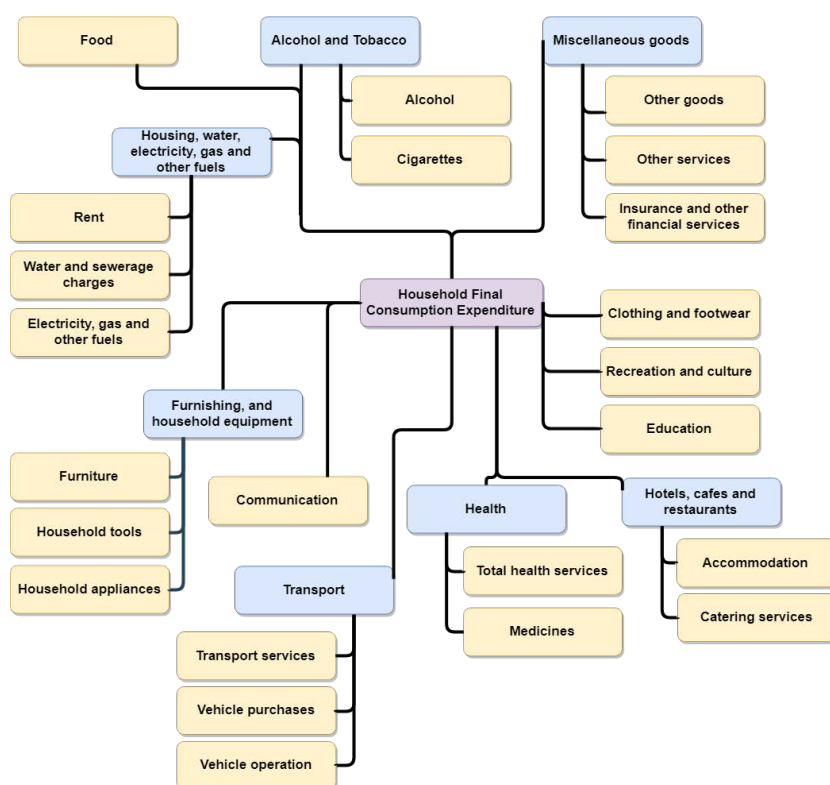
di proiezione. Il sistema completo di 95 serie non ha infatti le caratteristiche standard di una serie gerarchica/raggruppata, ma è a pieno titolo una serie linearmente vincolata con matrice dei vincoli, di dimensione  $(33 \times 95)$ , data da:

$$\mathbf{U}' = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}'_5 & -\mathbf{1}'_{10} & \mathbf{0}'_{26} & \mathbf{0}'_{53} \\ 1 & \mathbf{0}'_5 & \mathbf{0}'_{10} & \mathbf{0}'_{26} & -\mathbf{1}'_{53} \\ \mathbf{0}_5 & \mathbf{I}_5 & -\mathbf{C}^I & \mathbf{0}_{5 \times 26} & \mathbf{0}_{5 \times 53} \\ \mathbf{0}_{26} & \mathbf{0}_{26 \times 5} & \mathbf{0}_{26 \times 10} & \mathbf{I}_{26} & -\mathbf{C}^E \end{bmatrix},$$

dove  $\mathbf{C}^I$  e  $\mathbf{C}^E$  sono le matrici, rispettivamente, di dimensione  $(5 \times 10)$  e  $(26 \times 53)$  che descrivono le relazioni tra le serie più aggregate e quelle ai livelli superiori (escluso il PIL) per il lato del Reddito e della Spesa. Sfruttando questo risultato, in quanto segue si estende il caso di riconciliazione contemporanea a quelle temporale e cross-temporale.



**Figura 6.4:** Gerarchia contemporanea degli Investimenti Fissi Lordi (*Gross Fixed Capital Formations*), tratta da Athanasopoulos *et al.* (2019). Parte della Figura 6.3.



**Figura 6.5:** Gerarchia contemporanea degli Spesa per Consumi Finali delle Famiglie (*Household Final Consumption Expenditure*), tratta da Athanasopoulos *et al.* (2019). Parte della Figura 6.3.

## 6.2 Esperimento di previsione

Riprendendo quanto detto in precedenza, i dati per il PIL australiano a nostra disposizione vanno dal quarto trimestre 1984 al primo trimestre del 2018. L'esperimento di previsione condotto per questo lavoro riprende la proposta di Athanasopoulos *et al.* (2019), estendendola a tutti i 95 aggregati e considerando assieme la riconciliazione contemporanea di previsioni trimestrali e le previsioni ottenute con i dati semestrali e annuali.

L'esperimento di previsione prevede l'utilizzo di *training set* via via più grandi (*expanding window*). In altre parole, dato il primo *training set* dal 1984:Q4 al 1994:Q3, si ottengono le previsioni per il quarto trimestre 1994 fino al terzo trimestre del 1995. Successivamente, si andrà avanti 'allungando' il *training set* di un trimestre fino al 2017:Q1, per un totale di 91 origini di previsione diverse. Allo stesso modo si sono calcolate le previsioni uno e due passi in avanti per le serie storiche ottenute aggregando temporalmente due trimestri successivi e le previsioni a un passo in avanti per le serie storiche aggregate temporalmente con quattro trimestri successivi.

I dati trimestrali, semestrali e annuali sono stati previsti in modo separato per ciascuna serie del sistema dal lato del Reddito e della Spesa per un totale di 95 serie per tre ordini temporali diversi. Data la natura variegata delle variabili in gioco, si è ritenuto ragionevole, e lo si è pertanto adottato in questo esperimento, l'approccio proposto da Athanasopoulos *et al.* (2019), che permette di avere una certa flessibilità e velocità di calcolo. Perciò si è considerata la famiglia dei modelli ARIMA univariati utilizzando, per l'individuazione del modello corretto, le opzioni di default dell'algoritmo presentato da Hyndman e Khandakar (2008) implementato nel pacchetto *forecast* di R (Hyndman *et al.*, 2020a). Questi metodi scelgono il modello da utilizzare in modo automatico attraverso la minimizzazione del criterio di informazione di Akaike, in particolare la versione corretta AICc di Burnham e Anderson (2002).

Per valutare l'accuratezza delle varie tecniche si sono utilizzati gli indicatori presentati nella Sezione 5.2.1 (si veda anche l'Appendice A). Infine, si fa uso del test non parametrico di Friedman e del *post-hoc* test di Nemenyi (Koning *et al.*, 2005, Hibon *et al.*, 2012) per stabilire se le differenze nelle

previsioni riconciliate, fornite dalle diverse procedure prese in considerazione, sono significative. In particolare, attraverso il test di Friedman si valuterà se almeno un metodo fornisce previsioni significativamente diverse dagli altri, e successivamente con il test di Nemenyi si cercherà di identificare gruppi di approcci per i quali non vi sono evidenze di differenze significative tra le previsioni. Il vantaggio di questa procedura di test (Kourentzes e Athanasopoulos, 2019) è che essa non impone alcuna ipotesi distributiva e non richiede test multipli a coppie tra le previsioni, che potrebbero portare a distorsioni nelle valutazioni dei risultati. Per poter applicare i test di Friedman e di Nemenyi è stato usato il pacchetto `tsutils` di **R** (Kourentzes, 2020).

### 6.3 Analisi dei risultati

In questa sezione saranno presentati i risultati basati sull'indice MSE per i diversi ordini di aggregazione temporale e orizzonti di previsione per un selezionato insieme di procedure di riconciliazione. Nell'Appendice B sono riportati i risultati in formato esteso, anche attraverso l'utilizzo dell'errore assoluto medio (MAE).

Più nel dettaglio, si considerano cinque procedure già presenti nella letteratura della riconciliazione di previsioni per serie gerarchiche:

- `cs-shr` (Wickramasuriya *et al.*, 2019),
- `t-wlsv` (Athanasopoulos *et al.*, 2017),
- `t-acov` (Nystrup *et al.*, 2020),
- `t-sar1` (Nystrup *et al.*, 2020),
- `kah-wlsv-shr` (Kourentzes e Athanasopoulos, 2019).

Queste procedure hanno dato buoni risultati nello studio di vari dataset (ad esempio Wickramasuriya *et al.*, 2019, Athanasopoulos *et al.*, 2017, Bisaglia *et al.*, 2020, Nystrup *et al.*, 2020). Anche se le prime quattro tecniche riguardano la riconciliazione lungo solo una dimensione della gerarchia cross-temporale, vale la pena includerle nelle analisi in quanto sono utili come ulteriore confronto per gli approcci cross-temporali. Essi infatti hanno l'ambizioso obiettivo di fornire previsioni simultaneamente riconciliate lungo entrambe le dimensioni nello spirito della *one-number-forecast* precedentemente

citato. In quest'ottica sono state considerate 5 procedure tra le iterative (con il prefisso **ite**) e le varianti non incluse nella prima proposta di Kourentzes e Athanasopoulos (2019):

- tcs-acov-shr (con t-acov matrice di covarianza al passo temporale, e cs-shr al passo contemporaneo),
- tcs-sar1-shr (con t-sar1 matrice di covarianza al passo temporale, e cs-shr al passo contemporaneo),
- ite-wlsv-shr (con t-wlsv matrice di covarianza al passo temporale dell'iterazione, e cs-shr al passo contemporaneo dell'iterazione),
- ite-acov-shr (con t-acov matrice di covarianza al passo temporale dell'iterazione, e cs-shr al passo contemporaneo dell'iterazione),
- ite-sar1-shr (con t-sar1 matrice di covarianza al passo temporale dell'iterazione, e cs-shr al passo contemporaneo dell'iterazione).

Infine, sono state incluse tre procedure ottimali:

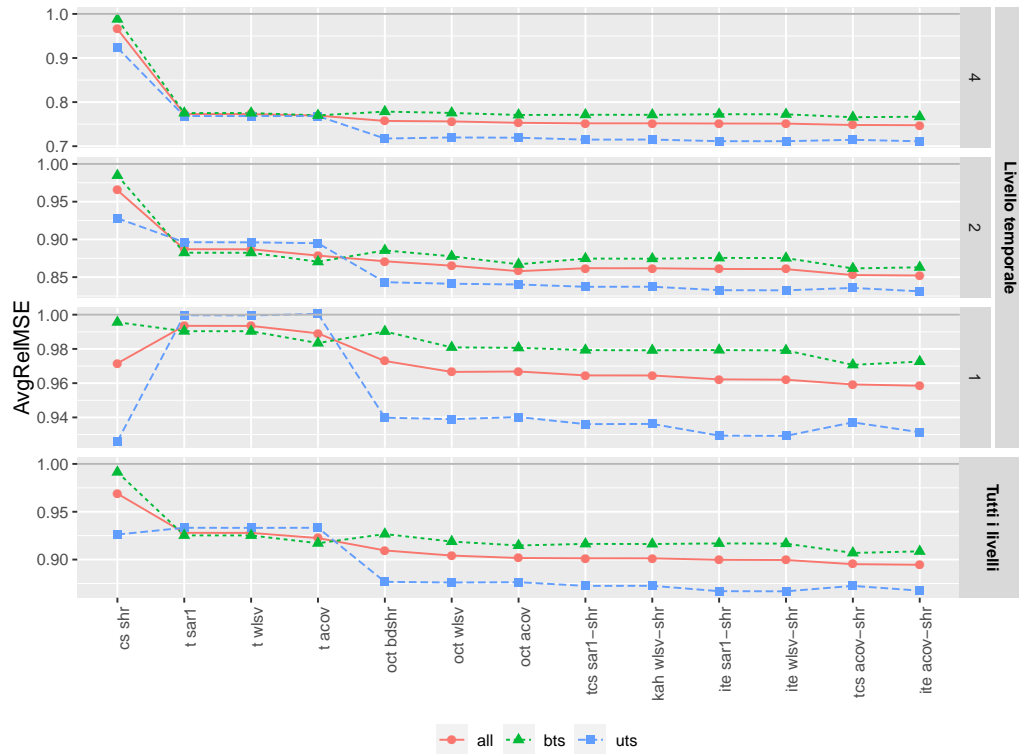
- oct-wlsv (presentata nella Sezione 3.3),
- oct-bdshr (presentata nella Sezione 3.3),
- oct-acov (presentata nella Sezione 3.3).

Nella Tabella 6.1 sono raccolti i risultati calcolati attraverso l'indicatore AvgRelMSE delle 13 procedure. Ovviamente per una veloce lettura si riporta anche la riga per le previsioni di base, che sono state usate come *benchmark*. I risultati sono stati divisi per il numero di serie che coinvolgono: un indicatore per tutte le serie, solo per quelle più disaggregate ( $n_b = 63$ ) e per le restanti ( $n_a = 32$ ). Per ciascuna colonna è stato evidenziato in **grassetto rosso** il valore più basso (a segnalare il massimo guadagno ottenuto rispetto alle previsioni di base), mentre in **grassetto nero** sono evidenziati i valori maggiori di uno (che segnalano un 'peggiore' dell'accuratezza delle previsioni riconciliate rispetto al *benchmark*).

I vari AvgRelMSE attraverso tutti gli orizzonti di previsione presentati in questa tabella sono stati riportati graficamente nel pannello in alto della Figura 6.6. Successivamente è stata calcolata la classifica e riprodotta nel pannello in basso della stessa figura, colorando lo sfondo della griglia con una sfumatura dal verde al rosso per indicare le migliori e le peggiori. L'ordine in

**Tabella 6.1:** AvgRelMSE a qualsiasi ordine di aggregazione  $k$  e orizzonte di previsione.

Procedure	Trimestrali					Semi-annuali			Annuali	Tutte
	1	2	3	4	1-4	1	2	1-2	1	
<i>Tutte le 95 serie</i>										
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
cs-shr	0.9583	0.9701	0.9757	0.9824	0.9716	0.9526	0.9781	0.9652	0.9657	0.9689
t-wlsv	<b>1.0017</b>	0.9994	0.9875	0.9853	0.9934	0.8444	0.9316	0.8869	0.7729	0.9279
t-acov	0.9780	0.9912	0.9986	0.9888	0.9891	0.8253	0.9353	0.8786	0.7694	0.9225
t-sar1	<b>1.0018</b>	0.9994	0.9875	0.9854	0.9935	0.8445	0.9317	0.8870	0.7729	0.9279
kah-wlsv-shr	0.9684	0.9697	0.9596	<b>0.9603</b>	0.9645	0.8175	<b>0.9085</b>	0.8618	0.7518	0.9013
tcs-acov-shr	0.9453	<b>0.9583</b>	0.9710	0.9626	0.9592	0.7977	0.9117	0.8528	0.7481	0.8952
tcs-sar1-shr	0.9684	0.9697	0.9597	0.9603	0.9645	0.8175	0.9086	0.8619	0.7518	0.9013
ite-wlsv-shr	0.9611	0.9680	<b>0.9587</b>	0.9604	0.9620	0.8148	0.9091	0.8606	0.7512	0.8995
ite-acov-shr	<b>0.9398</b>	0.9583	0.9709	0.9653	<b>0.9585</b>	<b>0.7957</b>	0.9127	<b>0.8522</b>	<b>0.7476</b>	<b>0.8945</b>
ite-sar1-shr	0.9613	0.9683	0.9588	0.9605	0.9622	0.8151	0.9092	0.8609	0.7514	0.8997
oct-wlsv	0.9692	0.9719	0.9622	0.9631	0.9666	0.8203	0.9125	0.8652	0.7562	0.9042
oct-bdshr	0.9838	0.9798	0.9618	0.9665	0.9730	0.8297	0.9144	0.8710	0.7573	0.9095
oct-acov	0.9553	0.9648	0.9767	0.9707	0.9668	0.8013	0.9185	0.8579	0.7531	0.9016
<i>Le 32 serie aggregate</i>										
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
cs-shr	<b>0.9157</b>	<b>0.927</b>	0.9300	0.9315	<b>0.926</b>	0.9174	0.9387	0.928	0.9232	0.9262
t-wlsv	<b>1.0064</b>	<b>1.0091</b>	0.9909	0.9920	0.9996	0.8556	0.9386	0.8961	0.7684	0.9331
t-acov	<b>1.0018</b>	<b>1.0146</b>	0.9922	0.9934	<b>1.0004</b>	0.8537	0.9382	0.8950	0.7683	0.9332
t-sar1	<b>1.0066</b>	<b>1.0093</b>	0.9908	0.9921	0.9997	0.8560	0.9386	0.8963	0.7684	0.9333
kah-wlsv-shr	0.9398	0.9467	0.9281	0.9302	0.9362	0.7996	0.8769	0.8373	0.7151	0.8726
tcs-acov-shr	0.9411	0.9435	0.9307	0.9331	0.9371	0.7956	0.8779	0.8357	0.7146	0.8725
tcs-sar1-shr	0.9399	0.9464	0.9280	0.9301	0.9361	0.7995	0.8767	0.8372	0.7149	0.8725
ite-wlsv-shr	0.9253	0.9420	0.9224	0.9274	0.9292	0.7932	0.8739	0.8326	0.7114	<b>0.8668</b>
ite-acov-shr	0.9283	0.9398	0.9259	0.9314	0.9313	<b>0.7893</b>	0.8754	<b>0.8313</b>	<b>0.7111</b>	0.8675
ite-sar1-shr	0.9256	0.9424	<b>0.9223</b>	<b>0.9274</b>	0.9294	0.7936	<b>0.8738</b>	0.8327	0.7114	0.8669
oct-wlsv	0.9411	0.9506	0.9316	0.9326	0.939	0.8032	0.8811	0.8412	0.7198	0.8760
oct-bdshr	0.9453	0.9559	0.9246	0.9340	0.9399	0.8091	0.8791	0.8433	0.7174	0.8767
oct-acov	0.9388	0.9498	0.9353	0.9371	0.9402	0.7984	0.8844	0.8403	0.7193	0.8763
<i>Le 63 serie bottom</i>										
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
cs-shr	0.9806	0.9928	0.9998	<b>1.0094</b>	0.9956	0.9709	0.9987	0.9847	0.9880	0.9914
t-wlsv	0.9992	0.9945	0.9858	0.9819	0.9903	0.8387	0.9281	0.8823	0.7752	0.9252
t-acov	0.9661	0.9796	<b>1.0019</b>	0.9864	0.9834	0.8112	0.9338	0.8704	0.7699	0.9171
t-sar1	0.9994	0.9944	0.9858	0.9820	0.9904	0.8388	0.9282	0.8824	0.7752	0.9253
kah-wlsv-shr	0.9832	0.9817	<b>0.976</b>	<b>0.9759</b>	0.9792	0.8267	<b>0.9250</b>	0.8745	0.7712	0.9163
tcs-acov-shr	0.9474	<b>0.9659</b>	0.9921	0.9780	<b>0.9707</b>	<b>0.7988</b>	0.9294	<b>0.8616</b>	<b>0.7658</b>	<b>0.9069</b>
tcs-sar1-shr	0.9832	0.9818	0.9762	0.9761	0.9793	0.8268	0.9253	0.8746	0.7713	0.9164
ite-wlsv-shr	0.9798	0.9814	0.9776	0.9776	0.9791	0.8259	0.9275	0.8753	0.7723	0.9166
ite-acov-shr	<b>0.9457</b>	0.9679	0.9945	0.9830	0.9726	0.7989	0.9323	0.8631	0.7669	0.9086
ite-sar1-shr	0.9800	0.9817	0.9779	0.9778	0.9793	0.8262	0.9278	0.8755	0.7725	0.9169
oct-wlsv	0.9837	0.9828	0.9782	0.9789	0.9809	0.8292	0.9288	0.8776	0.7754	0.9188
oct-bdshr	<b>1.0040</b>	0.9922	0.9813	0.9835	0.9902	0.8404	0.9329	0.8854	0.7784	0.9267
oct-acov	0.9639	0.9725	0.9984	0.9881	0.9806	0.8028	0.9363	0.8670	0.7709	0.9147



	all				bts				uts			
	all	1	2	4	all	1	2	4	all	1	2	4
ite acov-shr	1	1	1	1	2	2	2	2	3	4	1	1
tcs acov-shr	2	2	2	2	1	1	1	1	5	7	4	4
ite wlsv-shr	3	3	4	3	6	3	7	7	1	2	2	2
ite sar1-shr	4	4	5	4	7	6	8	8	2	3	3	3
kah wlsv-shr	5	5	6	5	4	4	5	5	6	6	6	6
tcs sar1-shr	6	6	7	6	5	5	6	6	4	5	5	5
oct acov	7	8	3	7	3	7	3	4	8	10	7	8
oct wlsv	8	7	8	8	9	8	9	11	7	8	8	9
oct bdsr	9	10	9	9	12	10	12	12	9	9	9	7
t acov	10	11	10	10	8	9	4	3	12	14	10	10
t wlsv	11	12	11	12	10	11	10	10	11	11	11	11
t sar1	12	13	12	11	11	12	11	9	13	12	12	12
cs shr	13	9	13	13	13	13	13	13	10	1	13	13
base	14	14	14	14	14	14	14	14	14	13	14	14

Figura 6.6: Nel pannello in alto vi è l’Average Relative MSE calcolato con tutte le serie e tutti gli orizzonti di previsione per ciascuna frequenza temporale. Nel pannello in basso vi sono le graduatorie divise per frequenza e orizzonte di previsione.



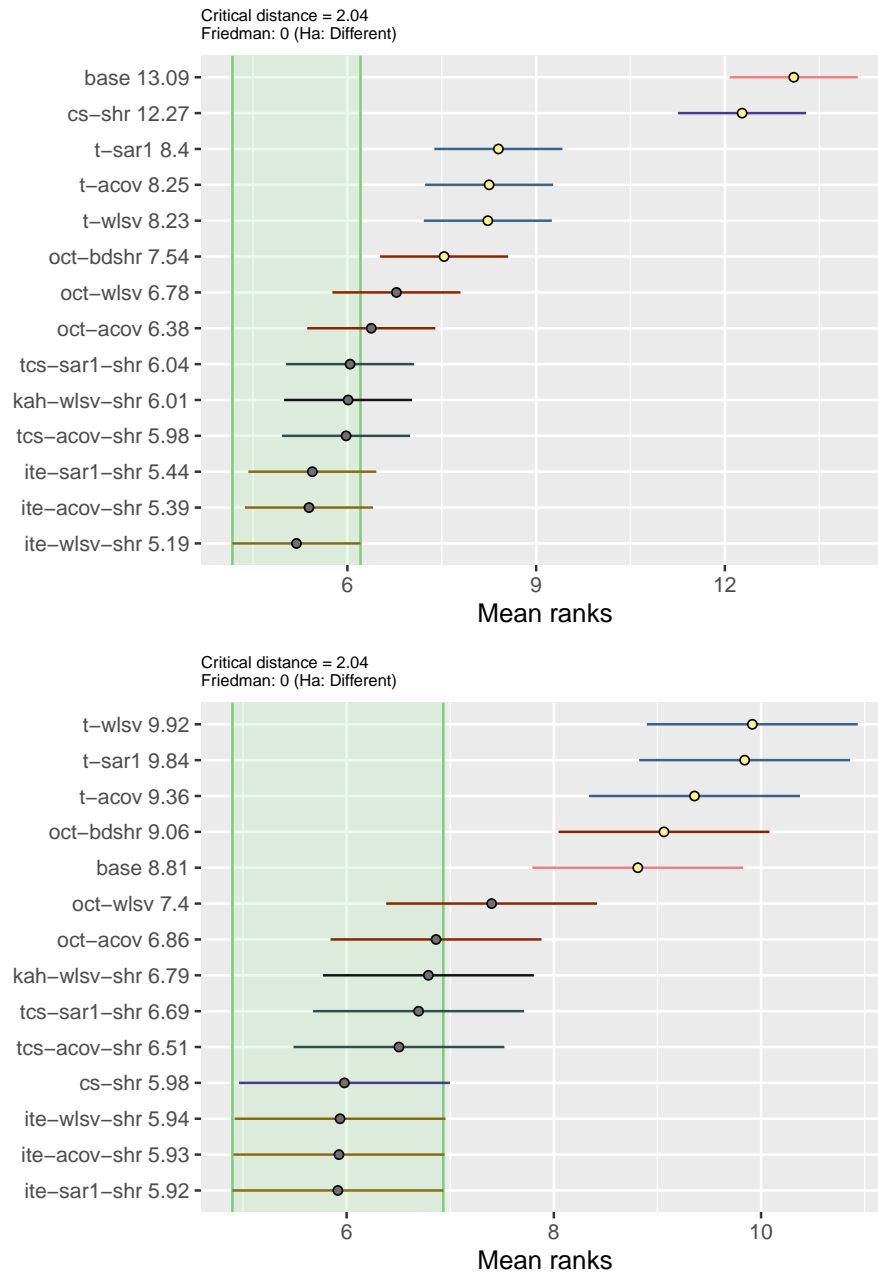
cui le procedure di riconciliazione vengono scritte nei vari grafici è dato dall’AvgRelMSE complessivo (ultima colonna della prima porzione della Tabella 6.1), il quale sembra un buon compromesso come indicatore ‘assoluto’.

I confronti multipli (*Multiple Comparison with the Best*) con il test di Nemenyi sono riportati in Figura 6.7. In questo caso è sembrato utile riportare il test anche per le previsioni trimestrali un passo in avanti (pannello in basso) e non solo per tutti gli ordini di previsione a qualsiasi orizzonte (pannello in alto).

Confrontando le procedure di riconciliazione lungo una dimensione e le previsioni di base con procedure che sfruttano le gerarchie cross-temporali, è chiaro come vi sia una diminuzione dell’AvgRelMSE per le serie aggregate nella dimensione contemporanea a qualsiasi ordine di aggregazione temporale. Questo guadagno in termini di accuratezza previsiva è meno marcato per le serie più disaggregate. Un altro aspetto molto importante è che le procedure iterative risultano sempre migliori rispetto alla corrispondente versione che riproduce la logica della proposta di Kourentzes e Athanasopoulos (2019). Se si prendono in considerazione solo le procedure che forniscono una *one-number forecast*, per questo dataset le riconciliazioni euristiche forniscono risultati migliori delle procedure ottimali.

Se ci si addentra maggiormente in ciascuna procedura, bisogna considerare l’approccio cs-shr, che presenta quasi sempre un miglioramento abbastanza evidente. Anche il pannello in basso di Figura 6.7 mostra come non sono significativamente diverse dalle previsioni di ite-acov-shr (classificatasi al primo posto in questo contesto) per le previsioni trimestrali a un passo in avanti. Tuttavia, in questo caso la dimensione temporale non viene considerata e il guadagno in termini di AvgRelMSE diminuisce man mano che il livello di aggregazione temporale cresce.

Complessivamente, ite-acov-shr risulta essere la migliore procedura di riconciliazione per il PIL australiano, seguita da tcs-acov-shr. Tale tecnica fornisce buoni risultati anche per le sole 32 serie aggregate, dove però i maggiori guadagni si hanno con ite-sar1-shr e ite-wlsv-shr. Comunque la Figura 6.7 mostra come le differenze nelle previsioni prodotte da tutte le procedure euristiche non possano essere ritenute significativamente diverse. Questo vale anche per due procedure ottimali (oct-acov e oct-wlsv), mentre le previ-



**Figura 6.7:** Test di Nemenyi per tutte le 95 serie con un livello di significatività del 5%. Le procedure di riconciliazione sono ordinate verticalmente seguendo il rank medio dell'MSE (i) per le previsioni a tutte le frequenze e qualsiasi orizzonte di previsione (pannello in alto) e (ii) per le previsioni trimestrali a un passo in avanti (pannello in basso).

sioni riconciliate tramite oct-bdshr risultano significativamente differenti da quelle prodotte dalla tecnica di riconciliazione che ha fatto registrare gli esiti migliori in termini di accuratezza puntuale.

Infine, in Tabella 6.2 viene riportato l'AvgRelMSE per una selezione di serie storiche aggregate per le cinque migliori procedure discusse in precedenza. Le serie che sono state considerate riguardano il primo livello sia della gerarchia dal lato del Reddito sia di quella dal lato della Spesa:

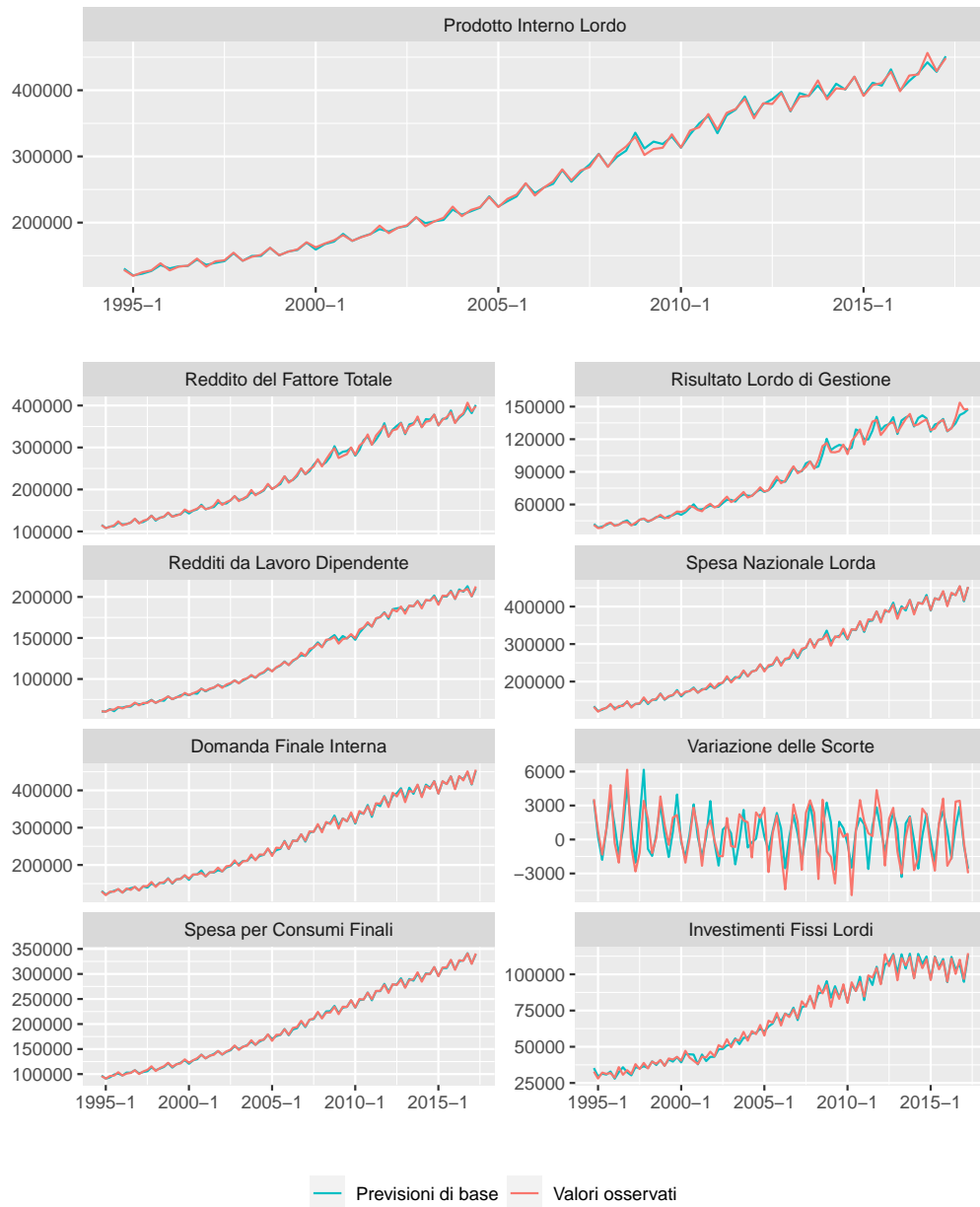
- Prodotto Interno Lordo (*Gross Domestic Product*)
- Reddito Totale dei Fattori (*Total Factor Income*)
- Risultato Lordo di Gestione (*Gross Operating Surplus*)
- Redditi da Lavoro Dipendente (*Compensation of Employees*)
- Spesa Nazionale Lorda (*Gross National Expenditure*)
- Domanda Finale Interna (*Domestic Final Demand*)
- Variazione delle Scorte (*Changes in Inventories*)
- Spesa per Consumi Finali (*Final Consumption Expenditures*)
- Investimenti Fissi Lordi (*Gross Fixed Capital Formation*)

Anche in questo caso emerge in modo chiaro la capacità di cs-shr di migliorare le previsioni a breve termine, con la sola eccezione della Variazione delle Scorte, le cui previsioni trimestrali hanno fatto registrare un AvgRelMSE quasi sempre maggiore di 1. Va peraltro detto che anche le altre procedure non ottengono buoni risultati per questa variabile, probabilmente a causa della bassa qualità delle previsioni di base (Figura 6.8).

Il guadagno generale medio, mostrato nell'ultima colonna della Tabella 6.2, indica come le procedure di riconciliazione cross-temporale permettono di avere delle previsioni accettabili per dati trimestrali e molto buone per dati semi-annuali e annuali, con la caratteristica di essere coerenti sia dal punto di vista contemporaneo che temporale.

**Tabella 6.2:** AvgRelMSE a qualsiasi ordine di aggregazione  $k$  e orizzonte di previsione per un selezionato insieme di serie storiche aggregate.

Procedure	Trimestrali					Semi-annuali			Annuali	Tutti
	1	2	3	4	1-4	1	2	1-2	1	
<i>Prodotto Interno Lordo</i>										
cs-shr	<b>0.9740</b>	<b>0.9397</b>	0.9028	<b>0.8924</b>	<b>0.9267</b>	0.8382	0.8713	0.8546	0.7116	0.8719
t-acov	<b>1.0883</b>	<b>1.0356</b>	<b>1.0108</b>	1.0000	<b>1.0331</b>	0.6539	0.8717	0.7549	0.6047	0.8750
kah-wlsv-shr	<b>1.1249</b>	0.9876	0.9068	0.8719	0.9681	0.6510	<b>0.7698</b>	0.7079	0.5485	0.8163
ite-acov-shr	<b>1.0503</b>	0.9808	0.9027	0.8853	0.9526	0.6281	0.7730	0.6968	0.5427	0.8039
oct-acov	<b>1.0696</b>	0.9689	<b>0.8975</b>	0.8926	0.9545	<b>0.6245</b>	0.7745	<b>0.6954</b>	<b>0.5402</b>	<b>0.8039</b>
<i>Reddito del Fattore Totale</i>										
cs-shr	<b>0.8316</b>	<b>0.9002</b>	0.8769	0.8335	<b>0.8600</b>	0.8232	0.8760	0.8492	0.7162	0.8348
t-acov	<b>1.0434</b>	<b>1.0927</b>	0.9971	0.9818	<b>1.0279</b>	0.7174	0.9408	0.8215	0.6636	0.9057
kah-wlsv-shr	0.9598	0.9523	0.8696	0.7984	0.8925	0.6353	<b>0.7870</b>	0.7071	0.5680	0.7829
ite-acov-shr	0.8995	0.9428	<b>0.8663</b>	<b>0.8134</b>	0.8792	0.6141	0.7909	0.6969	0.5642	0.7722
oct-acov	0.8819	0.9335	0.8635	0.8131	0.8719	<b>0.6078</b>	0.7907	<b>0.6932</b>	<b>0.5603</b>	<b>0.7666</b>
<i>Risultato Lordo di Gestione</i>										
cs-shr	<b>0.9170</b>	<b>0.8834</b>	0.9140	0.9008	<b>0.9037</b>	<b>1.0425</b>	<b>1.0489</b>	<b>1.0457</b>	0.9354	0.9468
t-acov	<b>1.0180</b>	0.9768	0.9760	0.9459	0.9789	0.8958	<b>1.1015</b>	0.9933	0.8807	0.9682
kah-wlsv-shr	0.9867	0.9139	0.8988	<b>0.8717</b>	0.9168	0.8572	<b>1.0133</b>	0.9320	0.8134	0.9055
ite-acov-shr	0.9673	0.8943	<b>0.8985</b>	0.8810	0.9097	<b>0.8338</b>	<b>1.0147</b>	<b>0.9199</b>	<b>0.8083</b>	<b>0.8973</b>
oct-acov	0.9524	0.9233	0.9181	0.8826	0.9187	0.8534	<b>1.0301</b>	0.9376	0.8262	0.9102
<i>Redditi da Lavoro Dipendente</i>										
cs-shr	<b>0.9416</b>	<b>0.9880</b>	1.0172	1.0112	<b>0.9891</b>	<b>1.0519</b>	<b>1.0820</b>	<b>1.0669</b>	<b>1.0488</b>	<b>1.0192</b>
t-acov	<b>1.0635</b>	<b>1.0506</b>	<b>1.0593</b>	<b>1.0365</b>	<b>1.0524</b>	0.7474	0.8618	<b>0.8026</b>	0.5876	0.8962
kah-wlsv-shr	<b>1.0893</b>	<b>1.0739</b>	<b>1.0886</b>	<b>1.0330</b>	<b>1.0709</b>	0.7663	0.8726	0.8177	0.5932	0.9112
ite-acov-shr	<b>1.0060</b>	<b>1.0417</b>	<b>1.0778</b>	<b>1.0668</b>	<b>1.0477</b>	<b>0.7326</b>	0.8859	0.8056	0.5931	0.8961
oct-acov	<b>1.0585</b>	<b>1.0662</b>	<b>1.0576</b>	<b>1.0251</b>	<b>1.0517</b>	0.7560	<b>0.8567</b>	0.8048	<b>0.5853</b>	<b>0.8960</b>
<i>Spesa Nazionale Lorda</i>										
cs-shr	<b>0.9243</b>	<b>0.9407</b>	0.9212	<b>0.8897</b>	<b>0.9188</b>	0.9865	0.8728	0.9280	0.9302	0.9230
t-acov	<b>1.0197</b>	<b>1.0367</b>	<b>1.0113</b>	<b>1.0060</b>	<b>1.0184</b>	0.8447	0.9008	0.8723	0.6630	0.9164
kah-wlsv-shr	0.9966	0.9959	0.9265	0.9017	0.9542	0.8284	0.8113	0.8198	0.6156	0.8583
ite-acov-shr	0.9723	0.9925	<b>0.9155</b>	0.9094	0.9467	0.8244	0.8158	0.8201	0.6156	<b>0.8545</b>
oct-acov	<b>1.0071</b>	<b>1.0002</b>	0.9278	0.9031	0.9585	<b>0.8193</b>	<b>0.8075</b>	<b>0.8133</b>	<b>0.6064</b>	0.8567
<i>Domanda Finale Interna</i>										
cs-shr	<b>0.8713</b>	<b>0.9737</b>	<b>1.0182</b>	0.9958	<b>0.9631</b>	0.9787	<b>1.0192</b>	0.9988	<b>1.0038</b>	0.9789
t-acov	0.9844	<b>1.0002</b>	<b>1.0031</b>	<b>0.9851</b>	0.9932	0.8656	<b>0.9421</b>	0.9030	0.6745	0.9146
kah-wlsv-shr	0.9112	<b>1.0152</b>	<b>1.0136</b>	<b>1.0039</b>	0.9850	0.8184	0.9562	0.8846	0.6747	0.9049
ite-acov-shr	0.8843	<b>1.0014</b>	<b>1.0049</b>	<b>1.0161</b>	0.9751	<b>0.8119</b>	0.9662	0.8857	0.6758	0.9003
oct-acov	0.9274	<b>1.0114</b>	<b>1.0088</b>	0.9956	0.9852	0.8142	0.9428	<b>0.8761</b>	<b>0.6608</b>	<b>0.8999</b>
<i>Variazione delle Scorte</i>										
cs-shr	<b>1.0791</b>	<b>1.0228</b>	<b>1.0412</b>	<b>0.9250</b>	<b>1.0154</b>	0.7215	0.8134	0.7661	0.8811	0.9181
t-acov	<b>1.0382</b>	<b>1.0609</b>	<b>1.0032</b>	0.9999	<b>1.0253</b>	0.6886	0.7098	0.6991	0.8996	0.9020
kah-wlsv-shr	<b>1.0204</b>	<b>1.0339</b>	<b>1.0163</b>	0.9467	<b>1.0037</b>	<b>0.6644</b>	0.6795	<b>0.6719</b>	<b>0.8369</b>	0.8720
ite-acov-shr	<b>1.0317</b>	<b>1.0239</b>	<b>0.9908</b>	0.9285	<b>0.9929</b>	0.6776	<b>0.6676</b>	0.6726	0.8407	<b>0.8674</b>
oct-acov	<b>1.0074</b>	<b>1.0401</b>	<b>1.0087</b>	0.9540	<b>1.0021</b>	0.6813	0.7051	0.6931	0.9084	0.8894
<i>Spesa per Consumi Finali</i>										
cs-shr	<b>0.8826</b>	<b>0.8184</b>	<b>0.8216</b>	<b>0.8223</b>	<b>0.8358</b>	0.9482	0.9741	0.9611	0.9988	0.8923
t-acov	0.9956	<b>1.0268</b>	0.9982	<b>1.0199</b>	<b>1.0100</b>	0.8978	0.9456	0.9214	0.7540	0.9436
kah-wlsv-shr	0.9370	0.9094	0.9000	0.8956	0.9104	0.8077	0.8395	0.8234	0.6708	0.8469
ite-acov-shr	0.9263	0.8804	0.8963	0.8913	0.8984	<b>0.7861</b>	<b>0.8331</b>	<b>0.8093</b>	<b>0.6593</b>	<b>0.8343</b>
oct-acov	0.9691	0.9489	0.9310	0.9373	0.9464	0.8277	0.8673	0.8473	0.6888	0.8763
<i>Investimenti Fissi Lordi</i>										
cs-shr	<b>0.9442</b>	<b>0.9828</b>	<b>1.0156</b>	<b>1.0096</b>	0.9876	<b>1.0225</b>	<b>1.0185</b>	<b>1.0205</b>	0.9719	0.9946
t-acov	0.9875	<b>1.0066</b>	0.9967	0.9653	0.9889	0.8881	<b>1.0002</b>	0.9425	0.7258	0.9333
kah-wlsv-shr	0.9875	0.9790	0.9768	0.9663	0.9774	0.8480	0.9829	0.9130	0.7052	0.9149
ite-acov-shr	0.9524	0.9827	0.9651	0.9859	0.9714	0.8453	0.9973	0.9182	0.7097	0.9140
oct-acov	0.9498	0.9511	<b>0.9539</b>	<b>0.9426</b>	<b>0.9448</b>	<b>0.8149</b>	<b>0.9476</b>	<b>0.8787</b>	<b>0.6726</b>	<b>0.8816</b>



**Figura 6.8:** Serie trimestrali del PIL e di un insieme selezionato di variabili aggregate dal lato del Reddito e della Spesa: valori osservati e previsioni di base un passo in avanti per il periodo di test (1994:Q4 - 2018:Q1).



# Capitolo 7

## Previsione dei flussi turistici australiani

### 7.1 Descrizione del dataset

La seconda applicazione sviluppata per valutare le performance delle procedure di riconciliazione descritte nei capitoli precedenti riguarda i dati mensili (dal Gennaio 1998 al Dicembre 2017) dei flussi turistici australiani (*Australian Tourism Demand*, ATD), provenienti dal progetto governativo ‘National Visitor Survey’ che misura i flussi in termini di arrivi e di notti trascorse nelle strutture turistiche. Il settore del turismo è particolarmente interessante anche per l’impatto e l’importanza che ha sull’economia di un paese. In particolare per l’Australia, durante il 2016–2017, questo settore ha contribuito con \$55.3 miliardi, pari al 3,2% del PIL e a livello di occupazione coinvolge poco meno di 600 000 addetti, pari al 4,9% del totale. Questo dataset è molto usato nella letteratura della riconciliazione di serie storiche, tanto nella scomposizione geografica a cui si farà riferimento in questo lavoro (riprendendo Kourentzes e Athanasopoulos, 2019 e Panagiotelis *et al.*, 2020a) quanto nella versione ancora più disaggregata che tiene conto anche dei motivi del viaggio (*purpose of travel*) usata, tra gli altri, da Wickramasuriya *et al.* (2019), Ashouri *et al.* (2019), Wickramasuriya *et al.* (2020) e Bertani *et al.* (2020).

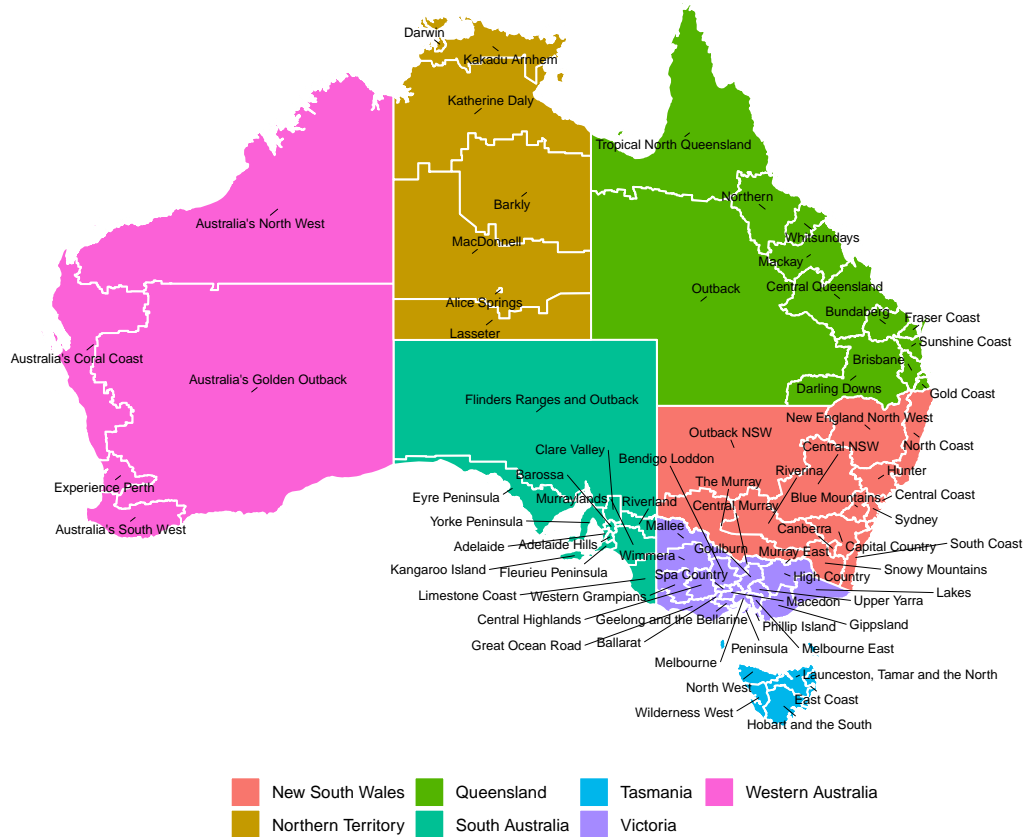


Figura 7.1: Cartina dell’Australia divisa per Stati e Regioni.

I dati utilizzati per questo lavoro<sup>1</sup>, presentano una struttura gerarchica contemporanea legata alla geografia del territorio: la serie totale australiana viene disaggregata nelle serie degli stati e delle zone turistiche che, a loro volta, sono divise per le varie regioni. La Figura 7.1 mostra la cartina geografica dell’Australia con la suddivisione per stati e regioni, la cui lista organizzata in forma gerarchica con le zone si trova nella Tabella 7.1.

È importante notare che, a livello di zone turistiche (serie da 9 a 35, etichette AA-GB) sono presenti 6 nodi della gerarchia, riportati in grassetto e contrassegnati da un asterisco, che hanno un solo ‘figlio’: ad esempio, la serie 11 (zona ‘South Coast’, etichetta AC) fa riferimento alla sola regione ‘South Coast’ (serie 41, etichetta ACA). Ciò vuol dire che la gerarchia è sbilanciata (si veda la Sezione 1.2) e dunque per essa si adotteranno gli accorgimenti

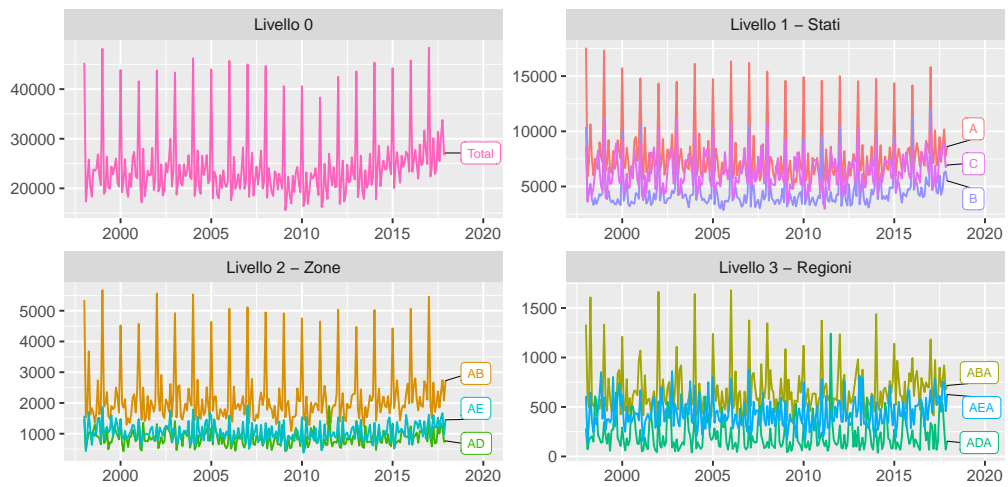
<sup>1</sup>Si ringrazia il professore George Athanasopoulos (Monash University, Melbourne, Australia), per aver gentilmente fornito i dati.



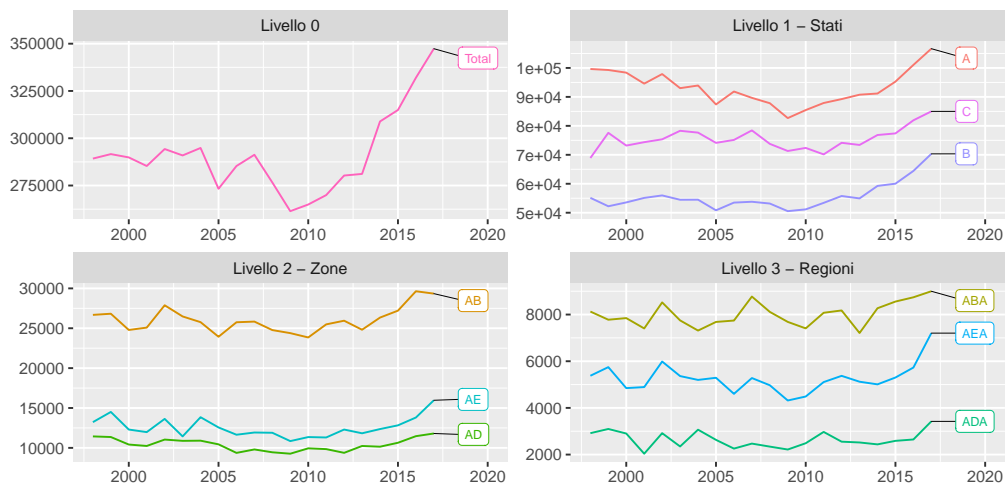
**Tabella 7.1:** Suddivisione geografica dell’Australia in stati, zone e regioni. In grassetto sono state evidenziate le zone formate da una sola regione.

Serie	Nome	Label	Serie	Nome	Label
<i>Total</i>			<i>Continuo delle regioni</i>		
1	Australia	Total	55	Lakes	BCA
<i>Stati</i>			56	Gippsland	BCB
2	New South Wales (NSW)	A	57	Phillip Island	BCC
3	Victoria (VIC)	B	58	Central Murray	BDA
4	Queensland (QLD)	C	59	Goulburn	BDB
5	South Australia (SA)	D	60	High Country	BDC
6	Western Australia (WA)	E	61	Melbourne East	BDD
7	Tasmania (TAS)	F	62	Upper Yarra	BDE
8	Northern Territory (NT)	G	63	MurrayEast	BDF
<i>Zone</i>			64	Wimmera+Mallee	BEA
9	Metro NSW	AA	65	Western Grampians	BEB
10	Nth Coast NSW	AB	66	Bendigo Loddon	BEC
*11	<b>Sth Coast NSW</b>	<b>AC</b>	67	Macedon	BED
12	Sth NSW	AD	68	Spa Country	BEE
13	Nth NSW	AE	69	Ballarat	BEF
*14	<b>ACT</b>	<b>AF</b>	70	Central Highlands	BEG
15	Metro VIC	BA	71	Gold Coast	CAA
*16	<b>West Coast VIC</b>	<b>BB</b>	72	Brisbane	CAB
17	East Coast VIC	BC	73	Sunshine Coast	CAC
18	Nth East VIC	BD	74	Central Queensland	CBA
19	Nth West VIC	BE	75	Bundaberg	CBB
20	Metro QLD	CA	76	Fraser Coast	CBC
21	Central Coast QLD	CB	77	Mackay	CBD
22	Nth Coast QLD	CC	78	Whitsundays	CCA
23	Inland QLD	CD	79	Northern	CCB
24	Metro SA	DA	80	Tropical North Queensland	CCC
25	Sth Coast SA	DB	81	Darling Downs	CDA
26	Inland SA	DC	82	Outback	CDB
27	West Coast SA	DD	83	Adelaide	DAA
28	West CoastWA	EA	84	Barossa	DAB
*29	<b>Nth WA</b>	<b>EB</b>	85	Adelaide Hills	DAC
*30	<b>SthWA</b>	<b>EC</b>	86	Limestone Coast	DBA
*31	<b>Sth TAS</b>	<b>FA</b>	87	Fleurieu Peninsula	DBB
32	Nth East TAS	FB	88	Kangaroo Island	DBC
33	Nth West TAS	FC	89	Murraylands	DCA
34	Nth Coast NT	GA	90	Riverland	DCB
35	Central NT	GB	91	Clare Valley	DCC
<i>Regioni</i>			92	Flinders Range and Outback	DCD
36	Sydney	AAA	93	Eyre Peninsula	DDA
37	Central Coast	AAB	94	Yorke Peninsula	DDB
38	Hunter	ABA	95	Australia’s Coral Coast	EAA
39	North Coast NSW	ABB	96	Experience Perth	EAB
40	Northern Rivers Tropical NSW	ABC	97	Australia’s SouthWest	EAC
41	South Coast	ACA	98	Australia’s North West	EBA
42	Snowy Mountains	ADA	99	Australia’s Golden Outback	ECA
43	Capital Country	ADB	100	Hobart and the South	FAA
44	The Murray	ADC	101	East Coast	FBA
45	Riverina	ADD	102	Launceston, Tamar and the North	FBB
46	Central NSW	AEA	103	North West	FCA
47	New England North West	AEB	104	WildernessWest	FCB
48	Outback NSW	AEC	105	Darwin	GAA
49	Blue Mountains	AED	106	Kakadu Arnhem	GAB
50	Canberra	AFA	107	Katherine Daly	GAC
51	Melbourne	BAA	108	Barkly	GBA
52	Peninsula	BAB	109	Lasseter	GBB
53	Geelong	BAC	110	Alice Springs	GBC
54	Western	BBA	111	MacDonnell	GBD

Fonte: Wickramasuriya *et al.* (2019)



**Figura 7.2:** Andamento mensile di dieci serie storiche divise per il livello della gerarchia contemporanea: ‘Australia’ (Total), ‘New South Wales’ (A), ‘Victoria’ (B), ‘Queensland’ (C), ‘Nth Coast NSW’ (AB), ‘Sth NSW’ (AD), ‘Nth NSW’ (AE), ‘Hunter’ (ABA), ‘Snowy Mountains’ (ADA) e ‘Central NSW’ (AEA).



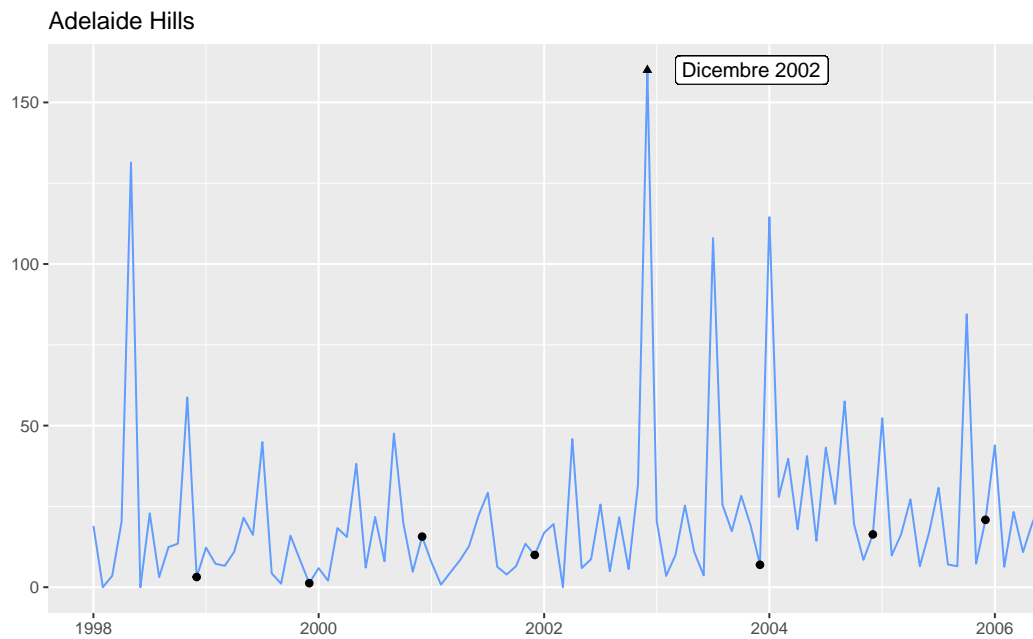
**Figura 7.3:** Andamento annuale di dieci serie storiche divise per il livello della gerarchia contemporanea: ‘Australia’ (Total), ‘New South Wales’ (A), ‘Victoria’ (B), ‘Queensland’ (C), ‘Nth Coast NSW’ (AB), ‘Sth NSW’ (AD), ‘Nth NSW’ (AE), ‘Hunter’ (ABA), ‘Snowy Mountains’ (ADA) e ‘Central NSW’ (AEA).

atti ad evitare duplicazioni delle serie in fase di riconciliazione delle relative previsioni. In questo modo si hanno a disposizione 105 serie storiche (111 meno le 6 zone con una sola regione) divise in: 29 serie aggregate, o uts, (Australia, 7 stati e 21 zone turistiche) e 76 serie al livello più disaggregato, o bts.

Una tale struttura si caratterizza per le forti differenze tra le varie variabili sia in termini di scala, sia in termini di trend e stagionalità. In Figura 7.2 è stato rappresentato l'andamento mensile di dieci variabili. Il riquadro in alto a sinistra mostra la serie totale, che presenta una forte componente stagionale, con il picco a Gennaio di ogni anno che coincide con le vacanze estive in Australia. Inoltre c'è anche una tendenza crescente dal 2010 fino alla fine del periodo considerato. Queste caratteristiche sono sempre meno evidenti quanto più si scende nei livelli inferiori: sebbene esse possano ancora essere presenti, sono molto più difficili da individuare e modellare. Pertanto, alcune delle serie che fanno riferimento alle zone o alle regioni, mostrano caratteristiche molto meno pronunciate rispetto ai livelli superiori.

I dati in questione sono a frequenza mensile,  $m = 12$ . Quindi a livello temporale, per ciascuna serie storica è possibile ricavare serie temporalmente aggregate a 2 mesi, a 3 mesi, a 4 mesi, a 6 mesi ed, infine, a 12 mesi (in altri termini,  $\mathcal{K} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ ). La Figura 7.3 mostra l'andamento annuale delle stesse serie di Figura 7.2: il trend diventa molto più evidente e anche le fluttuazioni cicliche emergono con chiarezza in questo caso, poiché per effetto dell'aggregazione temporale la stagionalità scompare e il 'rumore' viene attenuato.

Andando a vedere come si comportano le serie osservate nel tempo, Panagiotelis *et al.* (2020a) individuano un dato anomalo (con un valore osservato estremamente alto) nel Dicembre 2002 per la regione 'Adelaide Hills'. In Figura 7.4 si è rappresentata in blu la serie storica, con i punti i valori che la serie assume a Dicembre di ogni anno, mentre con il triangolo l'*outlier*. Dal momento che Kourentzes e Athanasopoulos (2019) non modificano questo dato e che lo scopo principale di questo lavoro è mostrare come un processo di riconciliazione migliori qualsiasi tipo di previsione di base, si è deciso di usare il dataset nella sua forma originale, senza interventi di 'aggiustamento' preventivo dei dati.



**Figura 7.4:** Andamento della serie storica mensile riguardante la regione ‘Adelaide Hills’ dal Gennaio 1998 al febbraio 2006: i punti indicano i valori a Dicembre di ogni anno, mentre il triangolo segnala il valore anomalo del Dicembre 2002.

## 7.2 Calcolo delle previsioni di base

Come detto, i dati a disposizione coprono il periodo che va dal Gennaio 1998 fino a Dicembre 2017. Per l’esperimento di previsione si è deciso di utilizzare come *training set* una finestra mobile (*rolling window*) di ampiezza pari a 12 anni (144 mesi) con un passo di un mese. Come *test set* vengono utilizzati i restanti 6 anni (72 mesi) per cui si avranno a disposizione 61 origini di previsione diverse (da Gennaio 2012 a Gennaio 2017). Inoltre l’orizzonte di previsione della gerarchia viene fissato pari ad un anno, quindi per dati mensili si ha  $h_1 = 12$ , bimensili  $h_2 = 6$ , trimestrali  $h_3 = 4$ , quadrimestrali  $h_4 = 3$ , semestrali  $h_6 = 2$  e annuali  $h_{12} = 1$ . Come nell’esperimento di previsione per il PIL (Sezione 6.2) tutte le previsioni di base sono state calcolate con modelli ARIMA identificati secondo l’approccio automatico fornito dal pacchetto `forecast` (Hyndman *et al.*, 2020a) di **R**.

Per valutare i risultati di riconciliazione, come indice di accuratezza è stato usato l’AvgRelMSE già descritto nella Sezione 5.2.1 e nell’Appendice A. Inoltre, dato il grande numero di procedure di riconciliazione analizzate, anche in questo caso è stato applicato il test non parametrico di Friedman e il *post-hoc* test di Nemenyi fornito dal pacchetto `tsutils` (Kourentzes, 2020) di **R**.

## 7.3 Previsioni con valori negativi

Il fenomeno analizzato dà per sua natura origine a valori non negativi. Risulta, perciò, particolarmente importante che questa fondamentale caratteristica sia rispettata anche dalle previsioni: un valore negativo, oltre a essere concettualmente sbagliato, rende ardua l’analisi economica e l’interpretazione del fenomeno oggetto d’interesse. Tuttavia in assenza di una specifica ‘attenzione’ a questo aspetto, i modelli statistici utilizzati tanto per calcolare le previsioni di base, quanto quelle riconciliate, potrebbero dare luogo a uno o più valori negativi. A tal proposito si può operare in due modi:

1. usare dei modelli in grado di generare previsioni di base che rispettino i vincoli di non negatività;
2. utilizzare delle tecniche di riconciliazione che garantiscano la non negatività dei risultati.

La prima soluzione può sembrare la più semplice, ma avere delle previsioni di base non negative non garantisce che le previsioni riconciliate siano maggiori o uguali a zero, soprattutto se le prime hanno valori molto vicini allo zero. Il secondo approccio ha, invece, il pregio di operare con qualunque modello per ottenere le previsioni di base, in quanto il rispetto dei vincoli è totalmente a carico della procedura di riconciliazione.

**Tabella 7.2:** Quadro di sintesi dei valori negativi riscontrati nelle previsioni di base

Procedura	$k$	# di neg.	# di prev.	% di neg.
base	4	1	19215	0.0052
	2	1	38430	0.0026
	1	3	76860	0.0039

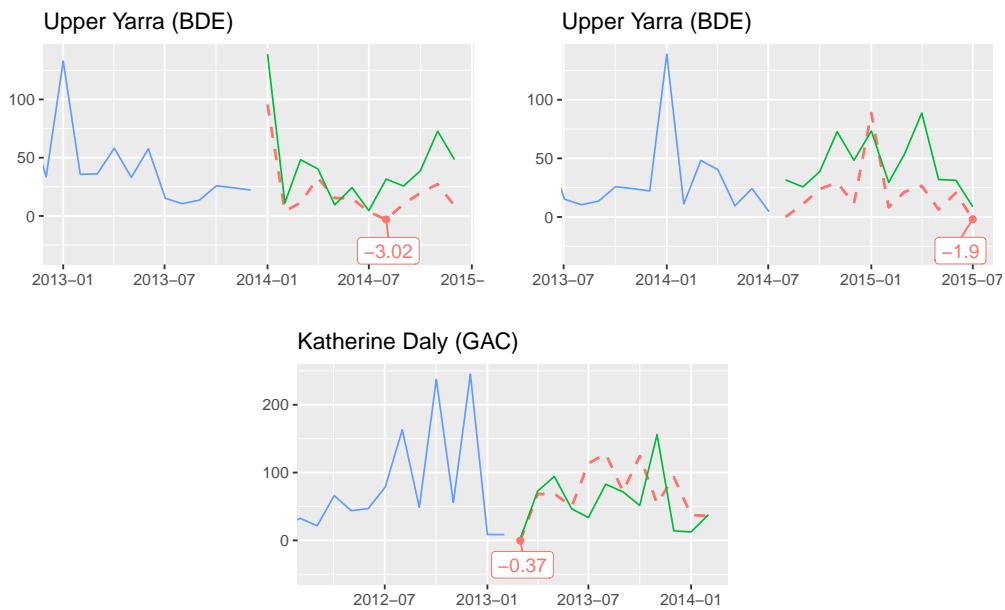
La Tabella 7.2 riporta il numero di previsioni di base negative riscontrate a seguito dell'utilizzo dei modelli ARIMA per produrre le previsioni di base. La percentuale di valori negativi sul totale dei valori previsti è molto bassa, ciò nonostante la questione merita di essere segnalata, perché trascurarla in alcuni casi potrebbe rivelarsi particolarmente problematico. Wickramasuriya *et al.* (2019), operando su un dataset sull'ATD allargato a 555 variabili (di cui solo 525 'uniche'), ottengono un numero di previsioni di base e riconciliate negative decisamente non trascurabile (Di Flavia, 2019 e Wickramasuriya *et al.*, 2020). Più in generale, la questione ha rilievo per le previsioni di serie intermittenti, caratterizzate da numerosi valori nulli. Per questo tipo di serie, Kourentzes e Athanasopoulos (2020) suggeriscono una semplice procedura per ovviare al problema specifico per il caso di gerarchie temporali. L'uso congiunto di gerarchie cross-temporali e della procedura di ottimizzazione lineare presentata nella Sezione 4.3 di fatto risolve questa delicata questione.

In Figura 7.5 sono state riportate le serie storiche mensili che presentano questo tipo di problema. Come si può vedere i valori negativi sono dovuti a periodi di decrescita in seguito al quale il modello prevede un valore minore di zero.

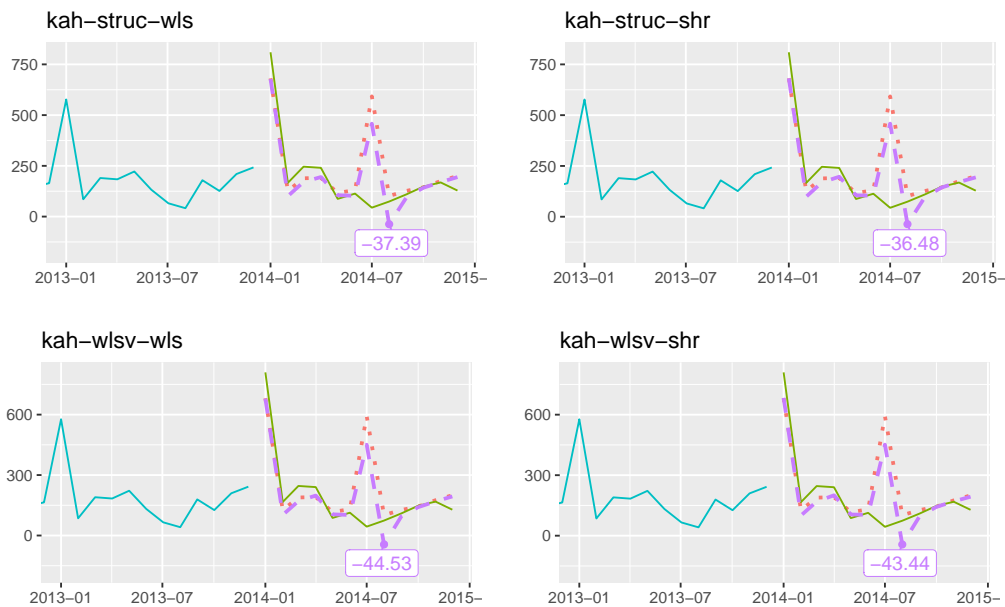
Questa questione nell'articolo di Kourentzes e Athanasopoulos (2019) non è stata presa in considerazione. Tuttavia, come si può vedere nella Tabella 7.3, anche con le procedure euristiche si rischia di incorrere in questo problema. In aggiunta, può succedere che le procedure generino valori negativi anche per serie che non presentavano questo problema nelle previsioni di base, e ciò a causa dell'aggiustamento che è necessario imporre affinché tutti i vincoli di aggregazione gerarchica vengano rispettati. In Figura 7.6 viene mostrata la serie 'Phillip Island' mensile, per la quale i valori negativi non sono così piccoli da poter essere trascurati.

**Tabella 7.3:** Quadro di sintesi dei valori negativi riscontrati nelle previsioni riconciliate con l'approccio a due passi di Kourentzes e Athanasopoulos (2019)

Procedura	$k$	# di neg.	# di prev.	% di neg.
kah-struc-shr	1	3	76860	0.0039
kah-struc-wls	1	2	76860	0.0026
kah-wlsv-shr	1	3	76860	0.0039
kah-wlsv-wls	1	2	76860	0.0026



**Figura 7.5:** Grafico delle serie storiche mensili con almeno una previsione di base negativa. In blu sono rappresentate le ultime dodici osservazioni del *training set*, in arancione (tratteggiata) le previsioni di base fino a dodici passi in avanti ed in verde i valori osservati.



**Figura 7.6:** Grafico della serie storica 'Phillip Island' mensile con origine di previsione numero 25. In blu sono rappresentate le ultime dodici osservazioni del *training set*, in arancione (puntinata) e in viola (tratteggiata) le previsioni, rispettivamente di base e riconciliate fino a dodici passi in avanti ed in verde i valori osservati.

## 7.4 Analisi dei risultati

In questa sezione vengono presentati gli indici di accuratezza delle previsioni in base all'errore quadratico medio per gruppi di variabili (tutte, uts e bts). Il resto dei risultati, riguardanti tutte le tecniche di previsione proposte e che fanno uso anche dell'indice MAE, sono riportati nell'Appendice C. Dato l'elevato numero di tecniche analizzate, è stato necessario operare delle scelte per permettere confronti ragionevoli dal punto di vista del significato economico delle previsioni ottenute e delle ipotesi statistiche sottostanti.

Come si è potuto notare nella Sezione 7.3, il problema della presenza dei valori negativi è di ridotta entità. Tuttavia, dal momento che si ha a disposizione nel pacchetto `forec` lo strumento per includere questi ulteriori vincoli, sono state considerate le procedure che hanno prodotto previsioni riconciliate non negative. Ciò non è stato possibile per le tecniche che fanno uso dell'euristica a due passi e, quindi, per le quattro varianti di Kourentzes e Athanasopoulos (2019) (kah-struc-wls, kah-struc-shr, kah-wlsv-wls, kah-wlsv-shr). Per questo motivo sono state incluse nell'analisi le migliori due estensioni iterative proprie di Kourentzes e Athanasopoulos (2019) (ite-struc-shr, ite-wlsv-shr) e, per avere un ulteriore *benchmark*, kah-wlsv-shr\* (l'asterisco finale sta a indicare che i valori riconciliati presentano valori minori di zero).

Nel dettaglio, sono state considerate le seguenti procedure:

- cs-struc (Wickramasuriya *et al.*, 2019),
- cs-shr (Wickramasuriya *et al.*, 2019),
- t-struc (Athanasopoulos *et al.*, 2017),
- t-wlsv (Athanasopoulos *et al.*, 2017),
- t-sar1 (Nystrup *et al.*, 2020),
- kah-wlsv-shr\* (Kourentzes e Athanasopoulos, 2019),
- ite-struc-struc (t-struc al passo temporale, e cs-struc al passo contemporaneo),
- ite-struc-shr (t-struc al passo temporale, e cs-shr al passo contemporaneo),
- ite-wlsv-struc (t-wlsv al passo temporale dell'iterazione, e cs-struc al passo contemporaneo),



- ite-wlsv-shr (t-wlsv al passo temporale dell'iterazione, e cs-shr al passo contemporaneo),
- ite-sar1-struc (t-sar1 al passo temporale, e cs-struc al passo contemporaneo),
- ite-sar1-shr (t-sar1 al passo temporale, e cs-shr al passo contemporaneo),
- oct-ols (si veda la Sezione 3.3),
- oct-struc (si veda la Sezione 3.3),
- oct-wlsv (si veda la Sezione 3.3),
- oct-bdshr (si veda la Sezione 3.3).

Come nel caso della riconciliazione delle previsioni del PIL australiano, le tecniche di riconciliazione unidimensionale vengono considerate come un ulteriore 'banco di prova' per la riconciliazione cross-temporale. Ad esse vanno aggiunte anche le previsioni di base, le quali tuttavia non sono soggette ai vincoli di non negatività.

Nella Tabella 7.4 sono stati riportati i risultati per l'AvgRelMSE. In particolare, fissato l'ordine di aggregazione temporale  $k$  è stato calcolato l'indicatore per le previsioni ad un passo e fino a  $h_k$  passi in avanti (dove  $h_1 = 12$ ,  $h_2 = 6$ ,  $h_3 = 4$ ,  $h_4 = 3$ ,  $h_6 = 2$  e  $h_{12} = 1$ ) per tutte le serie, per le serie al livello più disaggregato ( $n_b = 76$ ) e per le serie aggregate ( $n_a = 29$ ). Per ciascuna colonna il valore minimo è stato segnalato in **grassetto rosso**. Alcune colonne della Tabella 7.4 sono state rappresentate graficamente nel pannello in alto della Figura 7.7, la cui parte bassa contiene la classifica evidenziata attraverso una scala di colore dal verde al rosso. La Figura 7.8 rappresenta i confronti multipli con il test di Nemenyi, per tutti gli ordini di previsione a qualsiasi orizzonte (pannello in alto) e per le previsioni mensili un passo in avanti (pannello in basso).

Se ci si concentra sui risultati ottenuti dalle procedure di riconciliazione lungo una sola dimensione, è evidente che la migliore performance è ottenuta da cs-shr. Inoltre, le riconciliazioni temporali presentano un AvgRelMSE molto vicino a 1 per le serie uts a livello semestrale ( $k = 6$ )<sup>2</sup>. Va peraltro

<sup>2</sup>L'AvgRelMAE (Appendice C) segnala addirittura alcuni peggioramenti in termini di accuratezza rispetto alle previsioni di base.

**Tabella 7.4:** AvgRelMSE delle previsioni un passo in avanti e fino a  $h_k$  passi per tutti i livelli di aggregazione temporale  $k$ .

Procedure	Mensili		bimensili		Trimestrali		Quadrimestrali		Semi-annuali		Annuali	Tutte
	1	1-12	1	1-6	1	1-4	1	1-3	1	1-2	1	
<i>Tutte le 105 serie</i>												
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
cs-struc	0.9588	0.9571	0.9464	0.9462	0.9400	0.9358	0.9357	0.9320	0.9396	0.9266	0.9156	0.9453
cs-shr	0.9321	0.9297	0.9363	0.9363	0.9349	0.9350	0.9296	0.9277	0.9417	0.9434	0.8880	0.9311
t-struc	0.9743	0.9647	0.9664	0.9651	0.9469	0.9520	0.9308	0.9439	0.9023	0.9262	0.8720	0.9545
t-wlsv	0.9731	0.9642	0.9636	0.9647	0.9434	0.9521	0.9278	0.9443	0.9009	0.9272	0.8769	0.9545
t-sar1	0.9731	0.9642	0.9637	0.9647	0.9437	0.9522	0.9279	0.9443	0.9008	0.9272	0.8772	0.9545
kah-wlsv-shr*	0.9319	0.9235	0.9227	0.9180	0.8955	0.8968	0.8727	0.8821	0.8357	0.8562	0.7955	0.9042
ite-struc-struc	0.9378	0.9271	0.9209	0.9151	0.8934	0.8910	0.8681	0.8721	0.8283	0.8427	0.7689	0.9010
ite-struc-shr	0.9244	0.9183	0.9223	0.9168	0.8975	0.8967	0.8750	0.8818	0.8388	0.8578	0.7964	0.9018
ite-wlsv-struc	0.9356	0.9255	0.9165	0.9128	0.8878	0.8884	0.8624	0.8694	0.8231	0.8394	<b>0.7681</b>	0.8989
ite-wlsv-shr	0.9227	0.9167	0.9183	0.9143	0.8926	0.8938	0.8697	0.8787	0.8334	0.8538	0.7940	0.8995
ite-sar1-struc	0.9355	0.9256	0.9166	0.9129	0.8882	0.8887	0.8626	0.8697	0.8236	0.8398	0.7692	0.8991
ite-sar1-shr	0.9227	0.9167	0.9184	0.9143	0.8927	0.8938	0.8697	0.8787	0.8333	0.8537	0.7941	0.8995
oct-ols	0.9726	0.9515	0.9471	0.9336	0.9227	0.9063	0.9027	0.8897	0.8640	0.8601	0.7708	0.9207
oct-struc	0.9378	0.9271	0.9209	0.9151	0.8934	0.8910	0.8681	0.8721	0.8283	0.8427	0.7689	0.9010
oct-wlsv	0.9471	0.9395	0.9416	0.9403	0.9202	0.9251	0.9018	0.9140	0.8707	0.8940	0.8406	0.9279
oct-bdshr	<b>0.9194</b>	<b>0.9127</b>	<b>0.9137</b>	<b>0.9068</b>	<b>0.8853</b>	<b>0.8839</b>	<b>0.8594</b>	<b>0.8664</b>	<b>0.8199</b>	<b>0.8383</b>	0.7759	<b>0.8916</b>
<i>Le 29 serie aggregate</i>												
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
cs-struc	0.9316	0.9425	0.9281	0.9328	0.9026	0.9040	0.9049	0.8986	0.9150	0.9100	0.8749	0.9253
cs-shr	0.9106	0.9201	0.9260	0.9296	0.9149	0.9207	0.9243	0.9197	0.9544	0.9691	0.8479	0.9229
t-struc	0.9742	0.9632	0.9576	0.9512	0.9390	0.9382	0.9502	0.9490	0.9579	0.9934	0.8174	0.9520
t-wlsv	0.9702	0.9621	0.9486	0.9495	0.9296	0.9377	0.9419	0.9486	0.9531	0.9951	0.8241	0.9514
t-sar1	0.9703	0.9621	0.9486	0.9493	0.9295	0.9374	0.9410	0.9480	0.9515	0.9938	0.8228	0.9511
kah-wlsv-shr*	0.9315	0.9287	0.9170	0.9146	0.8873	0.8928	0.8952	0.8984	0.8865	0.9258	0.7387	0.9095
ite-struc-struc	0.9303	0.9249	0.9104	0.9052	0.8796	0.8788	0.8804	0.8775	0.8665	0.8961	0.6953	0.8975
ite-struc-shr	0.9212	0.9225	0.9217	0.9157	0.8952	0.8952	0.9034	0.9016	0.8942	0.9298	0.7409	0.9082
ite-wlsv-struc	0.9251	0.9221	<b>0.8999</b>	0.9006	<b>0.8683</b>	0.8738	<b>0.8691</b>	0.8720	0.8562	0.8900	0.6916	0.8934
ite-wlsv-shr	0.9164	0.9195	0.9116	0.9106	0.8843	0.8897	0.8925	0.8954	0.8841	0.9232	0.7366	0.9037
ite-sar1-struc	0.9254	0.9221	0.9003	0.9006	0.8687	0.8739	0.8693	0.8721	0.8560	0.8896	0.6915	0.8935
ite-sar1-shr	0.9166	0.9193	0.9116	0.9104	0.8843	0.8893	0.8922	0.8950	0.8830	0.9221	0.7356	0.9034
oct-ols	0.9520	0.9243	0.9126	<b>0.8874</b>	0.8735	<b>0.8494</b>	0.8742	<b>0.8444</b>	<b>0.8488</b>	<b>0.8487</b>	<b>0.6231</b>	<b>0.8786</b>
oct-struc	0.9303	0.9249	0.9104	0.9052	0.8796	0.8788	0.8804	0.8775	0.8665	0.8961	0.6953	0.8975
oct-wlsv	0.9504	0.9521	0.9456	0.9494	0.9261	0.9362	0.9412	0.9481	0.9448	0.9883	0.8055	0.9457
oct-bdshr	<b>0.9084</b>	<b>0.9108</b>	0.9009	0.8956	0.8696	0.8714	0.8724	0.8728	0.8584	0.8940	0.7056	0.8884
<i>Le 76 serie bottom</i>												
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
cs-struc	0.9693	0.9627	0.9535	0.9514	0.9547	0.9482	0.9477	0.9451	0.9492	0.9330	0.9316	0.9530
cs-shr	0.9404	0.9335	0.9403	0.9388	0.9427	0.9405	0.9316	0.9308	0.9369	0.9338	0.9038	0.9343
t-struc	0.9744	0.9653	0.9698	0.9705	0.9500	0.9573	0.9236	0.9420	0.8819	0.9017	0.8938	0.9554
t-wlsv	0.9742	0.9650	0.9693	0.9706	0.9488	0.9576	0.9224	0.9427	0.8817	0.9026	0.8979	0.9556
t-sar1	0.9742	0.9650	0.9695	0.9706	0.9492	0.9578	0.9229	0.9429	0.8821	0.9030	0.8990	0.9558
kah-wlsv-shr*	0.9321	0.9215	0.9249	0.9193	0.8987	0.8984	0.8643	0.8760	0.8171	0.8311	0.8183	0.9022
ite-struc-struc	0.9406	0.9279	0.9249	0.9189	0.8987	0.8957	0.8634	0.8701	0.8142	0.8232	0.7989	0.9024
ite-struc-shr	0.9257	0.9166	0.9225	0.9172	0.8984	0.8972	0.8644	0.8744	0.8186	0.8317	0.8187	0.8994
ite-wlsv-struc	0.9397	0.9268	0.9228	0.9175	0.8954	0.8941	0.8598	0.8684	0.8108	0.8209	0.7995	0.9010
ite-wlsv-shr	0.9251	0.9156	0.9209	0.9157	0.8957	0.8953	0.8611	0.8724	0.8149	0.8288	0.8171	0.8979
ite-sar1-struc	0.9393	0.9269	0.9229	0.9177	0.8958	0.8944	0.8601	0.8688	0.8115	0.8215	0.8011	0.9013
ite-sar1-shr	0.9251	0.9157	0.9210	0.9158	0.8960	0.8955	0.8613	0.8725	0.8151	0.8290	0.8176	0.8980
oct-ols	0.9806	0.9621	0.9605	0.9518	0.9422	0.9290	0.9138	0.9076	0.8698	0.8646	0.8360	0.9372
oct-struc	0.9406	0.9279	0.9249	0.9189	0.8987	0.8957	0.8634	0.8701	0.8142	0.8232	<b>0.7989</b>	0.9024
oct-wlsv	0.9458	0.9347	0.9401	0.9369	0.9180	0.9209	0.8871	0.9014	0.8441	0.8604	0.8544	0.9211
oct-bdshr	<b>0.9236</b>	<b>0.9134</b>	<b>0.9186</b>	<b>0.9111</b>	<b>0.8914</b>	<b>0.8887</b>	<b>0.8544</b>	<b>0.8639</b>	<b>0.8057</b>	<b>0.8180</b>	0.8045	<b>0.8928</b>

osservato che è ragionevole ritenere la cadenza temporale semestrale relativamente meno importante in termini di supporto alle decisioni rispetto ad altre frequenze, quali ad esempio quelle mensili, trimestrali e annuali.

Per quanto riguarda le procedure cross-temporali, per questo dataset le previsioni riconciliate con tecniche di combinazione ottimale risultano essere migliori delle varie euristiche iterative e a due step. Comunque sono degne di nota le buone performance offerte da *ite-struc-struc*, *oct-struc* e *oct-ols*, ossia procedure che non fanno uso di residui, ma si giovano esclusivamente della conformazione della struttura gerarchica per il calcolo delle previsioni riconciliate. In particolare, *oct-ols* fornisce buoni ‘guadagni’ per le serie aggregate, non confermati ai livelli più disaggregati. Ciò ha conseguenze sugli esiti del test di Nemenyi (Figura 7.8), da cui emerge che *oct-ols* fornisce risultati significativamente diversi dalle prime procedure, al contrario di *ite-struc-struc* e *oct-struc* che riescono ad avere delle discrete performance.

In conclusione, *oct-bdshr* è la procedura che produce i migliori risultati seguita da *ite-wlsv-shr* e *ite-sar1-shr*, soprattutto in corrispondenza delle serie al livello più disaggregato. Guardando il pannello in alto di Figura 7.8 si può vedere come le previsioni riconciliate con procedure cross-temporali risultino significativamente migliori delle riconciliazioni che operano lungo una sola dimensione. Questa osservazione trova conferma anche a livello più disaggregato (parte bassa di Figura 7.8), anche se la procedura *cs-shr*, come nel caso del PIL, risulta essere molto competitiva per le previsioni mensili un passo in avanti.

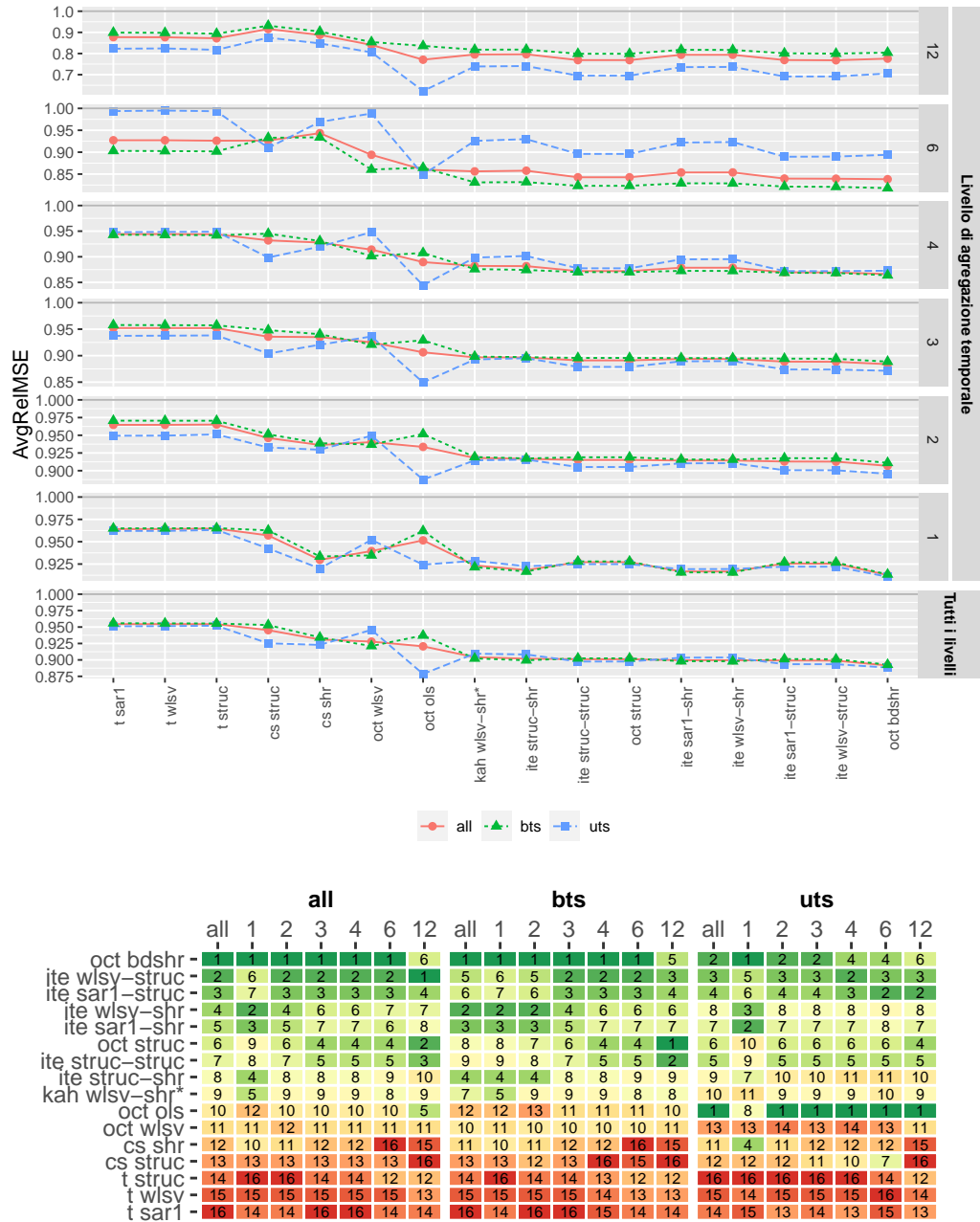
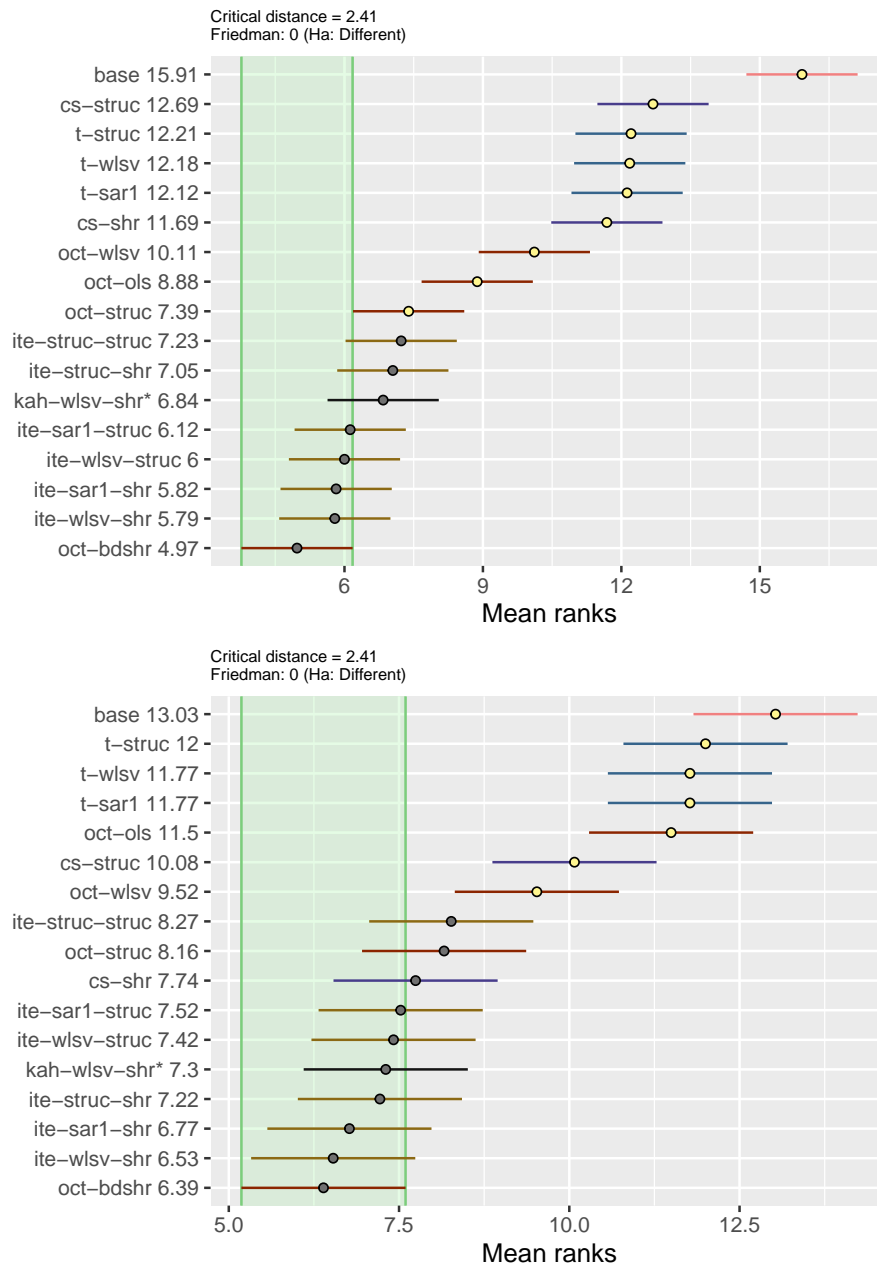


Figura 7.7: Nel pannello in alto vi è l’Average Relative MSE calcolato con tutte le serie e tutti gli orizzonti di previsione per ciascuna frequenza temporale. Nel pannello in basso vi sono le graduatorie divise per frequenza e orizzonte di previsione.



**Figura 7.8:** Test di Nemenyi per tutte le 105 serie con un livello di significatività del 5%. Le procedure di riconciliazione sono ordinate verticalmente seguendo il rank medio dell'MSE (i) per le previsioni a tutte le frequenze e qualsiasi orizzonte di previsione (pannello in alto) e (ii) per le previsioni mensili a un passo in avanti (pannello in basso).



# Conclusioni

Le tecniche di riconciliazione delle previsioni si sono rivelate molto utili per migliorare l'accuratezza delle previsioni in molti campi applicativi. In questo lavoro si è avuto modo di verificare tale affermazione sia sul piano metodologico quanto su quello pratico, fornendo anche elementi innovativi rispetto alla letteratura attualmente disponibile.

Si è partiti mostrando le varie tecniche utilizzate per le strutture gerarchiche contemporanee e temporali considerate separatamente. In particolare si sono presentati l'approccio strutturale e di proiezione per ottenere le previsioni riconciliate ottimali che fanno uso dell'informazione proveniente da tutte le previsioni di base. Va peraltro detto che nel lavoro, coerentemente con la letteratura più recente, si è dato molto spazio ad approssimazioni di matrici di covarianza calcolate usando gli errori *in-sample*, e non mediante pesi determinati direttamente dalla funzione obiettivo utilizzata per la riconciliazione (Jeon *et al.*, 2019).

Molto importante è stato il lavoro svolto sulle gerarchie cross-temporali, solitamente non prese in considerazione poiché la complessità e le dimensioni del problema crescono molto rapidamente insieme al tempo e alle risorse di calcolo necessarie (Kourentzes e Athanasopoulos, 2019, Nystrup *et al.*, 2020). Per questo motivo si sono presentate due procedure euristiche: quella a due passi proposta da Kourentzes e Athanasopoulos (2019) e la versione iterativa, la quale ne estende l'utilizzo in vari ambiti. Riguardo la soluzione ottimale, in grado di soddisfare simultaneamente sia i vincoli contemporanei quanto quelli temporali, sono state usate due rappresentazioni vettoriali di un modello di regressione multivariata. Attraverso degli strumenti di algebra lineare, si è potuto ricavare la soluzione in termini strutturali (tramite  $\check{\mathbf{S}}$ ) e

di proiezione, fornendo inoltre delle prime forme semplici di approssimazione della matrice di covarianza.

Tutti i risultati ottenuti sono stati inseriti in un pacchetto di R, **forec**, in modo da rendere l'utilizzo delle tecniche proposte semplice e intuitivo. Rispetto ai programmi per la riconciliazione delle previsioni attualmente disponibili, questo pacchetto amplia la gamma degli strumenti messi a disposizione dell'utente. Tra l'altro, **forec** consente di gestire anche vincoli di non negatività attraverso l'adattamento dell'ottimizzatore **osqp** in contesti, quali quelli temporali e cross-temporali, finora privi di tale opzione. Inoltre, attraverso un esperimento Monte Carlo, si è visto che **forec** è in grado di riconciliare in modo più veloce di **hts**, a parità di condizioni.

Per valutare le performance delle tecniche proposte, si sono utilizzati dei dati simulati e due dataset reali: il primo relativo al PIL australiano proposto da Athanasopoulos *et al.* (2019) e il secondo ai flussi turistici australiani di Kourentzes e Athanasopoulos (2019). I risultati ottenuti sono molto incoraggianti e rivelano il potenziale dell'approccio di riconciliazione delle previsioni usando le gerarchie cross-temporali. Infatti le tecniche di riconciliazione cross-temporale hanno pressoché sempre prodotto risultati migliori delle semplici previsioni di base e di quelle riconciliate solo lungo una dimensione.

Per quanto riguarda ulteriori sviluppi in questo campo, molte strade sono ancora aperte. Innanzitutto si potrebbero prendere in considerazione strutture di matrici di covarianza cross-temporale che riescano a cogliere meglio le due dimensioni della gerarchia. Invece di usare i residui *in-sample* si potrebbero utilizzare tecniche di *cross validation* (Jeon *et al.*, 2019) oppure di *Machine Learning* (Mancuso *et al.*, 2020, Spiliotis *et al.*, 2020). Infine, in questo lavoro si è trattato il problema della riconciliazione cross-temporale delle previsioni puntuali, mentre non è stato affrontato il problema della riconciliazione di previsioni probabilistiche (Gamakumara *et al.*, 2018, Jeon *et al.*, 2019, Ben Taieb *et al.*, 2020, Panagiotelis *et al.*, 2020b) per ottenere risultati più solidi dal punto di vista statistico e per migliorare ulteriormente la qualità previsiva.



# Bibliografia

- Amemiya, T. e Wu, R. Y. (1972). «The effect of aggregation on prediction in the autoregressive model». In: *Journal of the American Statistical Association* 67, 339, pp. 628–632.
- Ashouri, M., Hyndman, R. J. e Shmueli, G. (2019). «Fast Forecast Reconciliation Using Linear Models». In: *Monash Econometrics and Business Statistics Working Papers* 29/19.
- Athanasopoulos, G., Ahmed, R. A. e Hyndman, R. J. (2009). «Hierarchical forecasts for Australian domestic tourism». In: *International Journal of Forecasting* 25, 1, pp. 146–166.
- Athanasopoulos, G., Hyndman, R. J., Kourentzes, N. e Petropoulos, F. (2017). «Forecasting with temporal hierarchies». In: *European Journal of Operational Research* 262, 1, pp. 60–74.
- Athanasopoulos, G., Gamakumara, P., Panagiotelis, A., Hyndman, R. J. e Affan, M. (2019). «Hierarchical Forecasting». In: *Macroeconomic Forecasting in the Era of Big Data*. Cham: Springer, pp. 703–733.
- Australian Bureau of Statistics (2020). *Australian National Accounts: National Income, Expenditure and Product*.
- Bates, D. e Maechler, M. (2019). *Matrix: Sparse and Dense Matrix Classes and Methods*. URL: <https://cran.r-project.org/package=Matrix>.
- Becker, R. A., Chambers, J. M. e Wilks, A. R. (1988). *The New S Language: A Programming Environment for Data Analysis and Graphics*. Pacific Grove, CA, USA: Wadsworth & Brooks/Cole.
- Ben Taieb, S., Taylor, J. W. e Hyndman, R. J. (2020). «Hierarchical Probabilistic Forecasting of Electricity Demand With Smart Meter Data». In: *Journal of the American Statistical Association* in press.

- Berry, M. W., Berry, M. W., Browne, M., Langville, A. N., Pauca, V. P. e Plemmons, R. J. (2006). «Algorithms and applications for approximate nonnegative matrix factorization». In: *Computational Statistics and Data Analysis* 52, pp. 155–173.
- Bertani, N., Boukhatem, A., Diecidue, E., Perny, P. e Viappiani, P. (2020). «Fast and Simple Adaptive Elicitations: Experimental Test for Probability Weighting». In: *SSRN Electronic Journal*. URL: <https://papers.ssrn.com/abstract=3569625>.
- Bisaglia, L., Di Fonzo, T. e Girolimetto, D. (2020). «Fully reconciled GDP forecasts from Income and Expenditure sides». In: arXiv: 2004.03864. URL: <http://arxiv.org/abs/2004.03864>.
- Box, G. e Jenkins, G. (1970). «Time Series Analysis-Forecasting and Control.» In: *San Francisco, Holden Day*.
- Burnham, K. P. e Anderson, D. R. (2002). *A practical information-theoretic approach*. 2nd ed. New York: Springer.
- Byron, R. P. (1978). «The Estimation of Large Social Account Matrices». In: *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)* 141, 3, p. 359.
- Cheng, Y. Y., Chan, P. P. e Qiu, Z. W. (2012). «Random forest based ensemble system for short term load forecasting». In: *Proceedings - International Conference on Machine Learning and Cybernetics*. Vol. 1, pp. 52–56.
- Davydenko, A. e Fildes, R. (2013). «Measuring Forecasting Accuracy: The Case Of Judgmental Adjustments To Sku-Level Demand Forecasts». In: *International Journal of Forecasting* 29, 3, pp. 510–522.
- Di Flavia, V (2019). «Combinazione efficiente di gerarchie contemporanee e temporali per la previsione di sistemi di serie storiche». In: *Tesi di laurea magistrale in Scienze Statistiche, Università degli Studi di Padova*.
- Di Fonzo, T. (1990). «The Estimation of M Disaggregate Time Series When Contemporaneous and Temporal Aggregates Are Known». In: *The Review of Economics and Statistics* 72, 1, pp. 178–182.
- Di Fonzo, T. e Marini, M. (2011). «Simultaneous and two-step reconciliation of systems of time series: methodological and practical issues». In: *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)* 60, 2, pp. 143–164.

- van Erven, T. e Cugliari, J. (2015). «Game-Theoretically Optimal reconciliation of contemporaneous hierarchical time series forecasts». In: *Modeling and Stochastic Learning for Forecasting in High Dimensions*. A cura di A. Antoniadis, J. Poggi e X. Brossat. Springer Science e Business Media, LLC, pp. 297–317.
- Fliedner, G. (2001). «Hierarchical forecasting: Issues and use guidelines». In: *Industrial Management & Data Systems* 101, 1, pp. 5–12.
- Gamakumara, P., Panagiotelis, A., Athanasopoulos, G. e Hyndman, R. J. (2018). «Probabilistic forecasts in hierarchical time series». In: *Monash Econometrics and Business Statistics Working Papers*. URL: <https://ideas.repec.org/p/msh/ebswps/2018-11.html>.
- Gross, C. W. e Sohl, J. E. (1990). «Disaggregation methods to expedite product line forecasting». In: *Journal of Forecasting* 9, 3, pp. 233–254.
- Han, L., Shang, P. e Smith, W. F. (2013). «Grouped time-series forecasting with an application to regional infant mortality counts». In: *ESRC Centre for Population Change Working Paper Series* 40.
- Harter, H. L. (1960). «Tables of Range and Studentized Range». In: *Annals of Mathematical Statistics* 31, 4, pp. 1122–1147.
- Hibon, M., Crone, S. e Kourentzes, N. (2012). «Statistical Significance of Forecasting Methods». In: *32nd Annual International Symposium on Forecasting*. URL: [https://kourentzes.com/forecasting/wp-content/uploads/2014/04/ISF2012\\_Tests\\_Kourentzes.pdf](https://kourentzes.com/forecasting/wp-content/uploads/2014/04/ISF2012_Tests_Kourentzes.pdf).
- Hollander, M., A. Wolfe, D. e Chicken, E. (2015). *Nonparametric Statistical Methods*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley.
- Hyndman, R. J. e Athanasopoulos, G. (2018). *Forecasting: Principles and Practice*. URL: <https://otexts.com/fpp2/> (visitato il 01/09/2020).
- Hyndman, R. J. e Khandakar, Y. (2008). «Automatic time series forecasting: the forecast package for R». In: *Journal of Statistical Software* 26, 3, pp. 1–22.
- Hyndman, R. J. e Kourentzes, N. (2018). *thief: Temporal HIERarchical Forecasting*. URL: <http://pkg.robjhyndman.com/thief>.
- Hyndman, R. J., Lee, A. J. e Wang, E. (2016). «Fast computation of reconciled forecasts for hierarchical and grouped time series». In: *Computational Statistics and Data Analysis* 97, pp. 16–32.

- Hyndman, R. J., Koehler, A. B., Snyder, R. D. e Grose, S. (2002). «A state space framework for automatic forecasting using exponential smoothing methods». In: *International Journal of Forecasting* 18, 3, pp. 439–454.
- Hyndman, R. J., Ahmed, R. A., Athanasopoulos, G. e Shang, H. L. (2011). «Optimal combination forecasts for hierarchical time series». In: *Computational Statistics and Data Analysis* 55, 9, pp. 2579–2589.
- Hyndman, R. J., Athanasopoulos, G., Bergmeir, C., Caceres, G., Chhay, L., O’Hara-Wild, M., Petropoulos, F., Razbash, S., Wang, E. e Yasmeen, F. (2020a). *forecast: Forecasting functions for time series and linear models*. URL: <http://pkg.robjhyndman.com/forecast>.
- Hyndman, R. J., Lee, A., Wang, E. e Wickramasuriya, S. L. (2020b). *hts: Hierarchical and Grouped Time Series*. URL: <https://cran.r-project.org/package=hts>.
- Jain, A., Moinzadeh, K. e Zhou, Y. P. (2012). «A single-supplier, multiple-retailer model with single-season, multiple-ordering opportunities, and fixed ordering cost». In: *Operations Research* 60, 5, pp. 1098–1110.
- Jeon, J., Panagiotelis, A. e Petropoulos, F. (2019). «Probabilistic forecast reconciliation with applications to wind power and electric load». In: *European Journal of Operational Research* 279, 2, pp. 364–379.
- Karjalainen, E. J. e Karjalainen, U. P. (1991). «Component reconstruction in the primary space of spectra and concentrations. Alternating regression and related direct methods». In: *Analytica Chimica Acta* 250, C, pp. 169–179.
- Koning, A. J., Franses, P. H., Hibon, M. e Stekler, H. O. (2005). «The M3 competition: Statistical tests of the results». In: *International Journal of Forecasting* 21, 3, pp. 397–409.
- Kourentzes, N. (2019). *Towards the “one-number forecast”*. URL: <https://kourentzes.com/forecasting/2019/02/09/towards-the-one-number-forecast/> (visitato il 23/06/2020).
- (2020). *tsutils: Time Series Exploration, Modelling and Forecasting*. URL: <https://cran.r-project.org/package=tsutils>.
- Kourentzes, N. e Athanasopoulos, G. (2019). «Cross-temporal coherent forecasts for Australian tourism». In: *Annals of Tourism Research* 75, pp. 393–409.

- (2020). «Elucidate structure in intermittent demand series». In: *European Journal of Operational Research*.
- Lawson, C. L. e Hanson, R. J. (1974). *Solving least squares problems*. New Jersey: Prentice Hall.
- Ledoit, O. e Wolf, M. (2004). «Honey, I Shrunk the Sample Covariance Matrix». In: *J. Portfolio Management* 30, pp. 110–119.
- Lütkepohl, H. (2005). *New introduction to multiple time series analysis*. New York: Springer.
- Magnus, J. e Neudecker, H (2019). *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*. third edit. New York: Wiley.
- Mancuso, P., Piccialli, V. e Sudoso, A. M. (2020). «A machine learning approach for forecasting hierarchical time series». In: arXiv: 2006.00630. URL: <http://arxiv.org/abs/2006.00630>.
- McDonald, B. J. e Thompson, W. A. (1967). «Rank Sum Multiple Comparisons in One- and Two-Way Classifications». In: *Biometrika* 54, 3/4, p. 487.
- (1972). «Correction and Amendments: Rank Sum Multiple Comparisons in One- and Two- Way Classifications». In: *Biometrika* 59, 3, p. 699.
- Nystrup, P., Lindström, E., Pinson, P. e Madsen, H. (2020). «Temporal hierarchies with autocorrelation for load forecasting». In: *European Journal of Operational Research* 280, 3, pp. 876–888.
- O’Hara-Wild, M., Hyndman, R. J. e Wang, E. (2020). *fable: Forecasting Models for Tidy Time Series*. URL: <https://cran.r-project.org/package=fable>.
- Orcutt, G. H., Watts, H. W. e Edwards, J. B. (1968). «Data aggregation and information loss». In: *The American economic review* 58, 4, pp. 773–787.
- Panagiotelis, A., Gamakumara, P., Athanasopoulos, G. e Hyndman, R. J. (2020a). «Forecast Reconciliation: A geometric View with New Insights on Bias Correction». In: *International Journal of Forecasting* in press.
- (2020b). «Probabilistic Forecast Reconciliation: Properties, Evaluation and Score Optimisation». In: *Monash Econometrics and Business Statistics Working Papers* 26/20.

- R Core Team (2020). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing. Vienna, Austria. URL: <https://www.r-project.org/>.
- Schäfer, J. e Strimmer, K. (2005). «A shrinkage approach to large-scale covariance matrix estimation and implications for functional genomics». In: *Statistical Applications in Genetics and Molecular Biology* 4, 1, pp. 1–30.
- Schwarzkopf, A. B., Tersine, R. J. e Morris, J. S. (1988). «Top-down versus bottom-up forecasting strategies». In: *International Journal of Production Research* 26, 11, pp. 1833–1843.
- Silvestrini, A. e Veredas, D. (2008). «Temporal aggregation of univariate and multivariate time series models: A survey». In: *Journal of Economic Surveys* 22, 3, pp. 458–497.
- Spiliotis, E., Abolghasemi, M., Hyndman, R. J., Petropoulos, F. e Assimakopoulos, V. (2020). «Hierarchical forecast reconciliation with machine learning». In: arXiv: 2006.02043. URL: <http://arxiv.org/abs/2006.02043>.
- Stellato, B., Banjac, G., Goulart, P., Bemporad, A. e Boyd, S. (2020). «OSQP: an operator splitting solver for quadratic programs». In: *Mathematical Programming Computation*. URL: <http://link.springer.com/10.1007/s12532-020-00179-2>.
- Stone, R., Champernowne, D. G. e Meade, J. E. (1942). «The Precision of National Income Estimates». In: *The Review of Economic Studies* 9, 2, pp. 111–125.
- Tiao, G. C. (1972). «Asymptotic behaviour of temporal aggregates of time series». In: *Biometrika* 59, 3, pp. 525–531.
- Wickramasuriya, S. L., Athanasopoulos, G. e Hyndman, R. J. (2019). «Optimal Forecast Reconciliation for Hierarchical and Grouped Time Series Through Trace Minimization». In: *Journal of the American Statistical Association* 114, 526, pp. 804–819.
- Wickramasuriya, S. L., Turlach, B. A. e Hyndman, R. J. (2020). «Optimal non-negative forecast reconciliation». In: *Statistics and Computing* 30, 5, pp. 1167–1182.

# Appendice A

## Indici di accuratezza e confronti multipli

### A.1 Indici di accuratezza

Sia

$$\hat{e}_{i,j,t}^{[k],h} = y_{i,t+h}^{[k]} - \hat{y}_{i,j,t}^{[k],h}, \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, n, \\ j = 0, \dots, J, \end{array} \quad t = 1, \dots, q, \quad \begin{array}{l} k \in \mathcal{K}, \\ h = 1, \dots, h_k, \end{array}$$

l'errore di previsione dove  $y$  e  $\hat{y}$  sono, rispettivamente, il valore vero e previsto, l'indice  $i$  denota la variabile di interesse,  $j$  è la tecnica di previsione, dove  $j = 0$  rappresenta la tecnica di previsione adottata come benchmark di riferimento per i confronti (solitamente, si tratta della tecnica usata per calcolare le previsioni di base non riconciliate),  $t$  è l'origine di previsione,  $\mathcal{K}$  è l'insieme delle frequenze a cui la serie può venire aggregata e  $h$  è l'orizzonte di previsione che dipende dalla frequenza  $k$ .

Si può quindi chiamare  $A_{i,j}^{[k],h}$  l'accuratezza di previsione della tecnica  $j$ , lungo le  $q$  origini per le previsioni  $h$  passi in avanti della variabile  $i$  con ordine di aggregazione temporale  $k$ . Ad esempio  $A_{i,j}^{[k],h} = MSE_{i,j}^{[k],h}$ , come nell'espressione (5.2), oppure si può avere  $A_{i,j}^{[k],h} = MAE_{i,j}^{[k],h}$  o  $A_{i,j}^{[k],h} = RMSE_{i,j}^{[k],h}$ , dove

$$MAE_{i,j}^{[k],h} = \frac{1}{q} \sum_{t=1}^q \left| \hat{e}_{i,j,t}^{[k],h} \right|$$
$$RMSE_{i,j}^{[k],h} = \sqrt{\frac{1}{q} \sum_{t=1}^q \left( \hat{e}_{i,j,t}^{[k],h} \right)^2}$$

In ogni caso, si può ricavare la versione relativa dell'indice  $A_{i,j}^{[k],h}$  rispetto alla procedura  $j = 0$  come

$$r_{i,j}^{[k],h} = \frac{A_{i,j}^{[k],h}}{A_{i,0}^{[k],h}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 0, \dots, J, \quad k \in \mathcal{K}, \quad h = 1, \dots, M_k,$$

e usarla per calcolare l'indice medio relativo di accuratezza delle previsioni riconciliate con la procedura  $j$ , fissati  $k$  e  $h$ , attraverso una media geometrica

$$\text{AvgRelA}_j^{[k],h} = \left( \prod_{i=1}^n r_{i,j}^{[k],h} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad j = 0, \dots, J.$$

A questo punto si possono considerare i seguenti indici di accuratezza per un gruppo di variabili e/o di frequenze e/o di orizzonti di previsione:

- per una singola variabile, fissata la frequenza ( $k \in \mathcal{K}$ ), per un orizzonte di previsione multiplo:

$$\text{AvgRelA}_{i,j}^{[k],h_1:h_2} = \left( \prod_{h=h_1}^{h_2} r_{i,j}^{[k],h} \right)^{\frac{1}{h_2-h_1+1}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 0, \dots, J;$$

- per tutte o un gruppo di variabili (ad esempio, le uts indicate in seguito con a e le bts con b) fissata la frequenza ( $k \in \mathcal{K}$ ):

$$\text{AvgRelA}_j^{[k],h} = \left( \prod_{i=1}^n r_{i,j}^{[k],h} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad j = 0, \dots, J, \quad h = 1, \dots, M_k$$

$$\text{AvgRelA}_{a,j}^{[k],h} = \left( \prod_{i=1}^{n_a} r_{i,j}^{[k],h} \right)^{\frac{1}{n_a}}, \quad j = 0, \dots, J,$$

$$\text{AvgRelA}_{b,j}^{[k],h} = \left( \prod_{i=n_a+1}^n r_{i,j}^{[k],h} \right)^{\frac{1}{n_b}}, \quad j = 0, \dots, J,$$

$$\text{AvgRelA}_j^{[k]} = \left( \prod_{i=1}^n \prod_{h=1}^{M_k} r_{i,j}^{[k],h} \right)^{\frac{1}{nM_k}}, \quad j = 0, \dots, J,$$

$$\text{AvgRelA}_{a,j}^{[k]} = \left( \prod_{i=1}^{n_a} \prod_{h=1}^{M_k} r_{i,j}^{[k],h} \right)^{\frac{1}{n_a M_k}}, \quad j = 0, \dots, J,$$

$$\text{AvgRelA}_{b,j}^{[k]} = \left( \prod_{i=n_a+1}^n \prod_{h=1}^{M_k} r_{i,j}^{[k],h} \right)^{\frac{1}{n_b M_k}}, \quad j = 0, \dots, J;$$



- per una singola variabile, per tutte o per un gruppo (a: uts, b: bts), per tutti gli orizzonti di previsioni e le frequenze:

$$\begin{aligned} \text{AvgRelMSE}_{i,j} &= \left( \prod_{k \in \mathcal{K}} \prod_{h=1}^{M_k} \text{RelMSE}_{i,j}^{[k],h} \right)^{\frac{1}{k^*+m}}, & i = 1, \dots, n \\ & & j = 0, \dots, J \\ \text{AvgRelMSE}_j &= \left( \prod_{i=1}^n \prod_{k \in \mathcal{K}} \prod_{h=1}^{M_k} \text{RelMSE}_{i,j}^{[k],h} \right)^{\frac{1}{n(k^*+m)}}, & j = 0, \dots, J \\ \text{AvgRelMSE}_{a,j} &= \left( \prod_{i=1}^{n_a} \prod_{k \in \mathcal{K}} \prod_{h=1}^{M_k} \text{RelMSE}_{i,j}^{[k],h} \right)^{\frac{1}{n_a(k^*+m)}}, & j = 0, \dots, J \\ \text{AvgRelMSE}_{b,j} &= \left( \prod_{i=n_a+1}^n \prod_{k \in \mathcal{K}} \prod_{h=1}^{M_k} \text{RelMSE}_{i,j}^{[k],h} \right)^{\frac{1}{n_b(k^*+m)}}, & j = 0, \dots, J \end{aligned}$$

## A.2 Test per i confronti multipli

Il test di Nemenyi, come riportato da Koning *et al.* (2005), è utile per confrontare i diversi modelli e fornire dei gruppi che sono significativamente diversi tra di loro. Il test funziona misurando la distanza dei vari modelli utilizzando il rank: dati  $d$  modelli ed  $N$  serie possiamo calcolare un indice  $\text{IND}_{i,j}$ , con  $i = 1, \dots, N$  e  $j = 1, \dots, d$ , a nostro piacimento; ordinando i vari risultati possiamo ottenere dei rank fissata la serie  $R_{i,j}$  e successivamente un rank medio  $\bar{R}_j$ .

Tale test nasce come variante del test di Friedman, basato su un'analisi non parametrica dei rank, dove in modo intuitivo quello che si vuole verificare è il sistema d'ipotesi:

$$\begin{cases} H_0 : & \bar{R}_1 = \dots = \bar{R}_d \\ H_1 : & \text{almeno uno è diverso} \end{cases} .$$

In particolare, il test di Nemenyi fa uso della procedura per confronti multipli di sistemi d'ipotesi introdotta da McDonald e Thompson (1967, 1972), in cui si confrontano due metodi alla volta

$$\begin{cases} H_0 : & \bar{R}_i = \bar{R}_j \\ H_1 : & \bar{R}_i \neq \bar{R}_j \end{cases} .$$

In base al livello di confidenza  $1 - \alpha$  a cui siamo interessati possiamo calcolare la distanza critica:

$$r_{\alpha,d,N} \approx q_{\alpha,d} \sqrt{\frac{d(d+1)}{12N}},$$

dove  $q_{\alpha,d}$  è il percentile di livello  $1 - \alpha$ . Questo valore è stato tabulato in Harter (1960) e Hollander *et al.* (2015). Dati quindi due modelli, l'ipotesi nulla che essi portino allo stesso risultato a livello di prestazioni viene rifiutata se

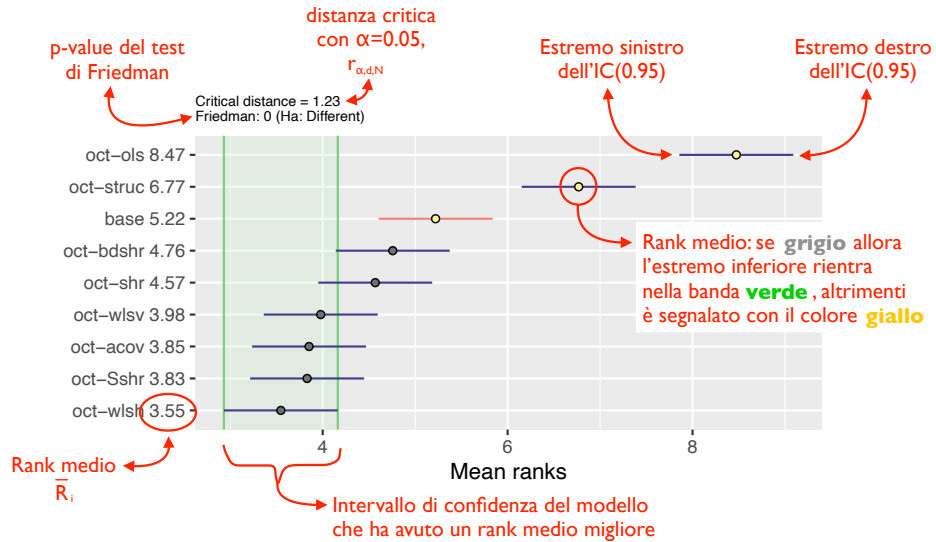
$$|\bar{R}_j - \bar{R}_l| \geq r_{\alpha,d,N}.$$

A questo punto può essere calcolato l'intervallo di confidenza con livello  $1 - \alpha$  per il modello  $i$  come

$$[\bar{R}_i - 0.5 r_{\alpha,d,N}; \bar{R}_i + 0.5 r_{\alpha,d,N}].$$

Risulta molto importante quindi non solo il numero di modelli che si sceglie di confrontare, ma anche il numero di serie da prendere in considerazione.

Per interpretare i risultati della funzione `nemenyi` del pacchetto `tsutils` di **R** utile per questa tipologia di test, in Figura A.1 viene riportato il grafico *Multiple Comparison with the Best* in cui viene data un esempio di lettura.



**Figura A.1:** Grafico *Multiple Comparison with the Best* (MCB) in cui vengono annotate in rosso le varie indicazioni per una corretta lettura.

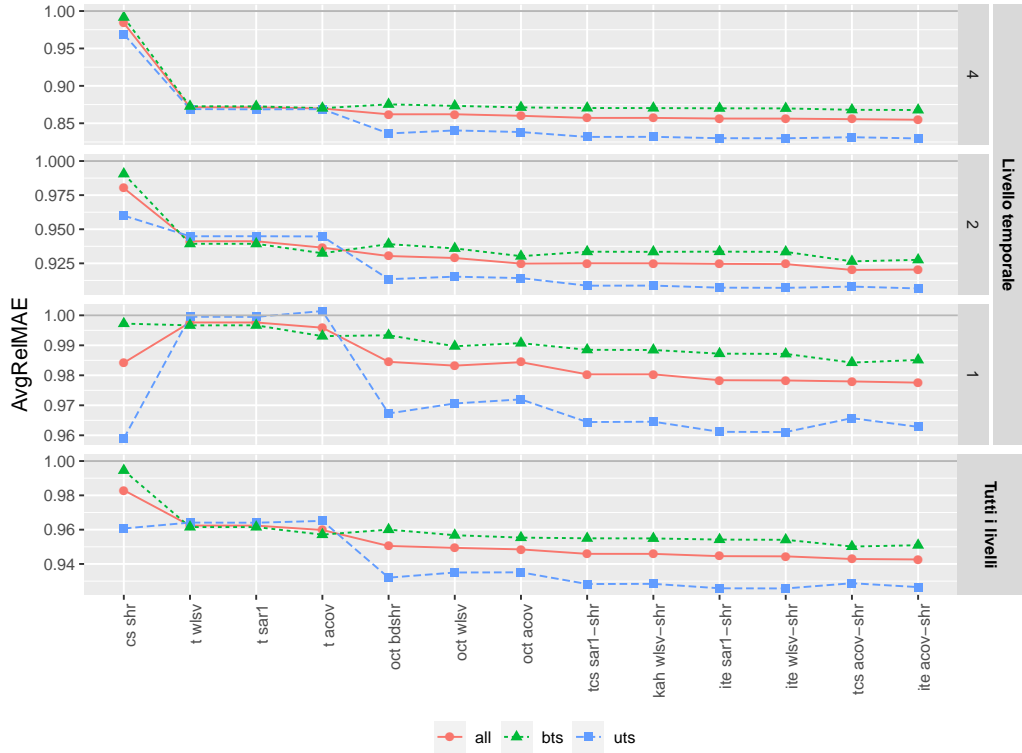
# Appendice B

## PIL: descrizione e risultati estesi

### B.1 Risultati usando l'AvgRelMAE per le procedure di riconciliazione selezionate

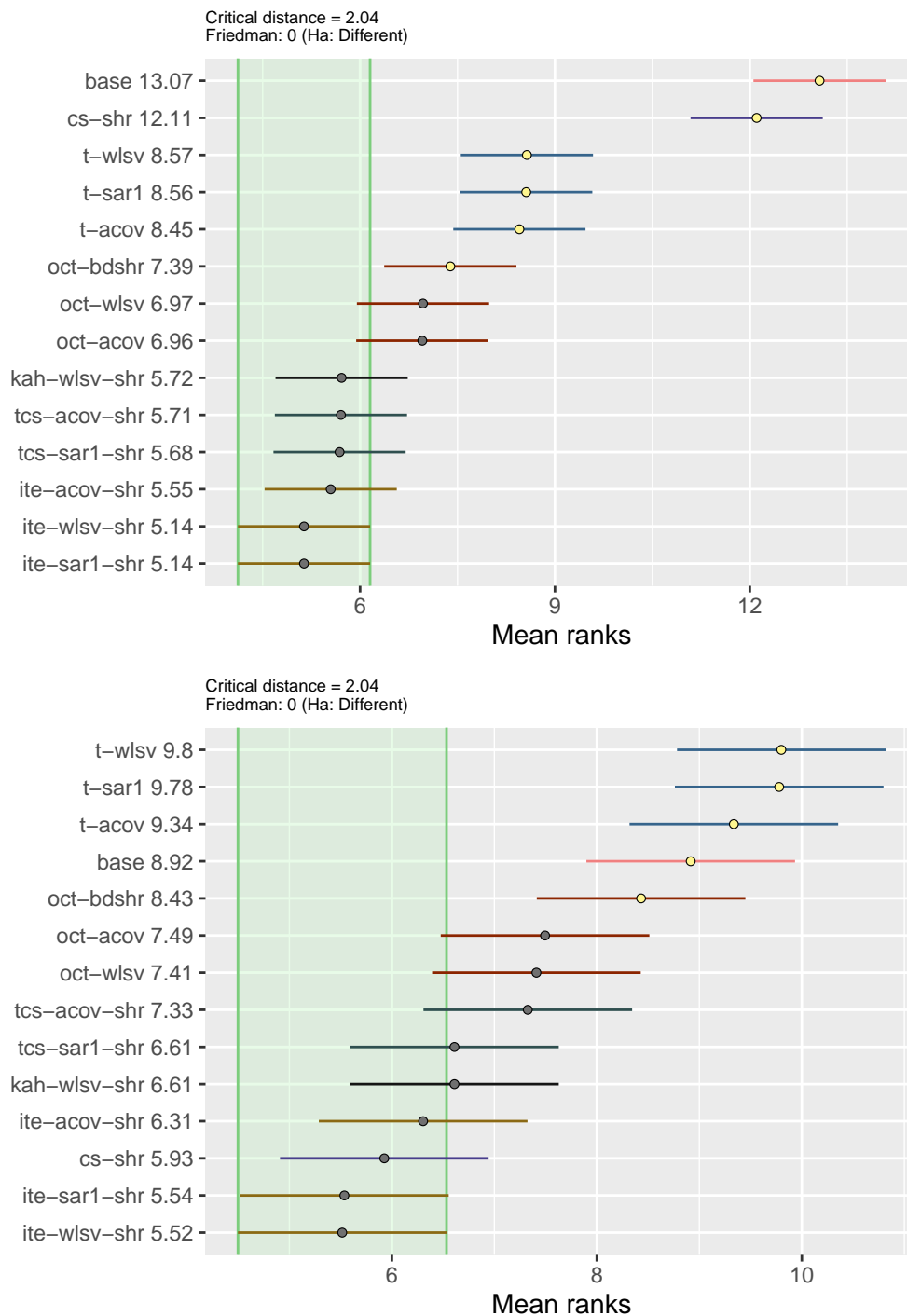
Tabella B.1: AvgRelMAE a qualsiasi ordine di aggregazione  $k$  e orizzonte di previsione.

Procedure	Trimestrali					Semi-annuali			Annuali	Tutte
	1	2	3	4	1-4	1	2	1-2	1	
<i>Tutte le 95 serie</i>										
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
cs-shr	0.9769	0.9842	0.9863	0.9893	0.9842	0.9733	0.9871	0.9802	0.9840	0.9830
t-wlsv	0.9997	0.9988	0.9967	0.9953	0.9976	0.9212	0.9617	0.9412	0.8714	0.9624
t-acov	0.9893	0.9951	<b>1.002</b>	0.9971	0.9959	0.9106	0.9632	0.9365	0.8697	0.9598
t-sar1	0.9997	0.999	0.9964	0.9953	0.9976	0.9213	0.9615	0.9412	0.8712	0.9624
kah-wlsv-shr	0.9796	0.9829	0.9797	0.9790	0.9803	0.9046	0.9459	0.9250	0.8572	0.9459
tcs-acov-shr	0.9698	<b>0.9764</b>	0.9852	0.9805	0.9780	0.8936	0.9476	<b>0.9202</b>	0.8555	0.9429
tcs-sar1-shr	0.9797	0.9830	0.9796	0.9790	0.9803	0.9048	<b>0.9459</b>	0.9251	0.8572	0.9459
ite-wlsv-shr	0.9750	0.9815	0.9783	<b>0.9784</b>	0.9783	0.9035	0.9459	0.9245	0.8562	0.9444
ite-acov-shr	<b>0.9672</b>	0.9770	0.9849	0.9812	<b>0.9776</b>	<b>0.8936</b>	0.9481	0.9205	<b>0.8547</b>	<b>0.9426</b>
ite-sar1-shr	0.9751	0.9819	<b>0.9781</b>	0.9784	0.9784	0.9038	0.9459	0.9246	0.8563	0.9445
oct-wlsv	0.9813	0.9858	0.9829	0.9830	0.9832	0.9078	0.9506	0.9289	0.8620	0.9494
oct-bdshr	0.9858	0.9880	0.9809	0.9833	0.9845	0.9112	0.9499	0.9304	0.8620	0.9505
oct-acov	0.9762	0.9831	0.9904	0.9879	0.9844	0.8965	0.9541	0.9248	0.8600	0.9485
<i>Le 32 serie aggregate</i>										
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
cs-shr	0.9484	<b>0.9628</b>	<b>0.9595</b>	<b>0.9652</b>	<b>0.959</b>	0.9521	0.9679	0.9600	0.9691	0.9607
t-wlsv	0.9947	<b>1.0034</b>	0.9994	<b>1.0006</b>	0.9995	0.9273	0.9628	0.9448	0.8689	0.9641
t-acov	0.9965	<b>1.0061</b>	<b>1.0019</b>	<b>1.0011</b>	<b>1.0014</b>	0.9270	0.9627	0.9447	0.8688	0.9651
t-sar1	0.9947	<b>1.0034</b>	0.9993	<b>1.0005</b>	0.9995	0.9275	0.9626	0.9449	0.8686	0.9640
kah-wlsv-shr	0.9538	0.9713	0.9646	0.9685	0.9645	0.8912	0.9265	0.9087	0.8319	0.9284
tcs-acov-shr	0.9595	0.9679	0.9655	0.9700	0.9657	0.8895	0.9269	0.9080	0.8314	0.9288
tcs-sar1-shr	0.9539	0.9711	0.9643	0.9684	0.9644	0.8913	0.9263	0.9086	0.8318	0.9283
ite-wlsv-shr	<b>0.9466</b>	0.9700	0.9614	0.9665	0.9611	0.8897	0.9247	0.9071	0.8299	<b>0.9257</b>
ite-acov-shr	0.9528	0.9674	0.9627	0.9684	0.9628	<b>0.8879</b>	0.9257	<b>0.9066</b>	<b>0.8297</b>	0.9265
ite-sar1-shr	0.9469	0.9704	0.9611	0.9665	0.9612	0.8901	<b>0.9246</b>	0.9072	0.8300	0.9258
oct-wlsv	0.9589	0.9773	0.9712	0.9752	0.9706	0.8969	0.9339	0.9152	0.8404	0.9350
oct-bdshr	0.9552	0.9790	0.9632	0.9719	0.9673	0.8983	0.9288	0.9134	0.8364	0.9320
oct-acov	0.9631	0.9756	0.9729	0.9764	0.9720	0.8933	0.9356	0.9142	0.8383	0.9351
<i>Le 63 serie bottom</i>										
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
cs-shr	0.9917	0.9953	<b>1.0002</b>	<b>1.0018</b>	0.9972	0.9842	0.997	0.9906	0.9917	0.9945
t-wlsv	<b>1.0022</b>	0.9965	0.9953	0.9926	0.9967	0.9181	0.9611	0.9393	0.8727	0.9615
t-acov	0.9856	0.9896	<b>1.0021</b>	0.9951	0.9931	0.9023	0.9635	0.9324	0.8702	0.9571
t-sar1	<b>1.0023</b>	0.9968	0.9950	0.9926	0.9967	0.9183	0.9609	0.9393	0.8726	0.9615
kah-wlsv-shr	0.9930	0.9888	0.9875	0.9844	0.9884	0.9115	<b>0.9559</b>	0.9334	0.8703	0.9549
tcs-acov-shr	0.9751	<b>0.9807</b>	0.9953	0.9859	<b>0.9842</b>	<b>0.8957</b>	0.9582	<b>0.9265</b>	0.8680	<b>0.9502</b>
tcs-sar1-shr	0.9930	0.9891	0.9875	0.9844	0.9885	0.9117	0.9559	0.9335	0.8704	0.9550
ite-wlsv-shr	0.9898	0.9874	0.9869	<b>0.9844</b>	0.9871	0.9106	0.9568	0.9334	0.8699	0.9541
ite-acov-shr	<b>0.9746</b>	0.9819	0.9963	0.9878	0.9851	0.8965	0.9597	0.9276	<b>0.8677</b>	0.9509
ite-sar1-shr	0.9897	0.9879	<b>0.9869</b>	0.9844	0.9872	0.9109	0.9569	0.9336	0.8700	0.9542
oct-wlsv	0.9929	0.9901	0.9888	0.9870	0.9897	0.9133	0.9591	0.9360	0.8732	0.9568
oct-bdshr	<b>1.0018</b>	0.9925	0.9900	0.9892	0.9933	0.9178	0.9609	0.9391	0.8753	0.9600
oct-acov	0.9830	0.9869	0.9994	0.9937	0.9907	0.8981	0.9636	0.9303	0.8712	0.9554



	all				bts				uts			
	all	1	2	4	all	1	2	4	all	1	2	4
ite acov-shr	1	1	2	1	2	2	2	1	3	4	1	1
tcs acov-shr	2	2	1	2	1	1	1	2	6	7	4	4
ite wlsy-shr	3	3	3	3	3	3	5	3	1	2	2	2
ite sar1-shr	4	4	4	4	4	4	8	4	2	3	3	3
kah wlsy-shr	5	6	6	5	5	5	6	6	5	6	6	6
tcs sar1-shr	6	5	7	6	6	6	7	7	4	5	5	5
oct acov	7	9	5	7	7	8	3	8	9	10	8	8
oct wlsy	8	7	8	9	8	7	9	11	8	9	9	9
oct bdsyr	9	10	9	8	10	10	10	12	7	8	7	7
t acov	10	11	10	10	9	9	4	5	13	14	10	11
t sar1	11	12	12	11	11	12	11	9	11	11	12	10
t wlsy	12	13	11	12	12	11	12	10	12	12	11	12
cs shr	13	8	13	13	13	13	13	13	10	1	13	13
base	14	14	14	14	14	14	14	14	14	13	14	14

Figura B.1: Nel pannello in alto vi è l’Average Relative MAE calcolato con tutte le serie e tutti gli orizzonti di previsione per ciascuna frequenza temporale. Nel pannello in basso vi sono le graduatorie divise per frequenza e orizzonte di previsione.



**Figura B.2:** Test di Nemenyi per tutte le 95 serie con un livello di significatività del 5%. Le procedure di riconciliazione sono ordinate verticalmente seguendo il rank medio dell'MAE (i) per le previsioni a tutte le frequenze e qualsiasi orizzonte di previsione (pannello in alto) e (ii) per le previsioni trimestrali un passo in avanti (pannello in basso).

## B.2 Procedure di riconciliazione contemporanea e temporale

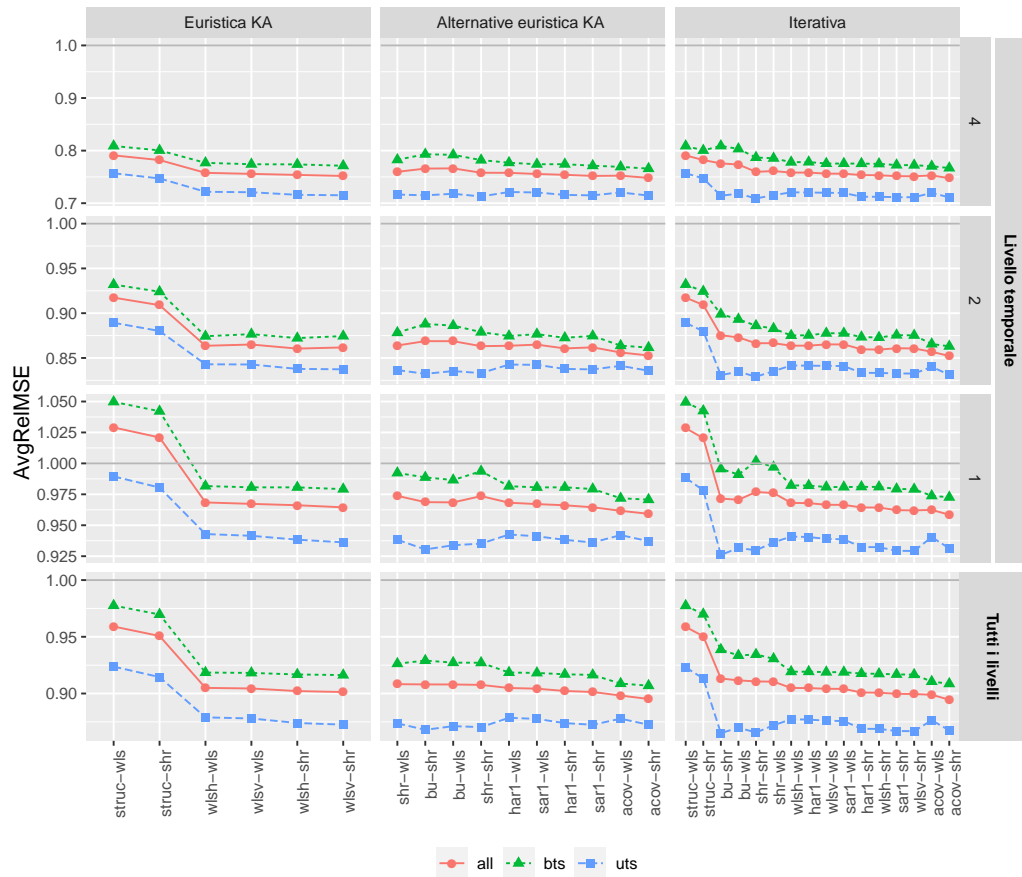
Tabella B.2: AvgRelMSE a qualsiasi ordine di aggregazione  $k$  e orizzonte di previsione.

Procedure	Trimestrali				Semi-annuali			Annuali	Tutte	
	1	2	3	4	1-4	1	2	1-2	1	
<i>Tutte le 95 serie</i>										
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
cs-ols	<b>1.2189</b>	<b>1.1663</b>	<b>1.1631</b>	<b>1.1510</b>	<b>1.1745</b>	<b>1.1427</b>	<b>1.1428</b>	<b>1.1427</b>	<b>1.2238</b>	<b>1.1722</b>
cs-struc	<b>1.1911</b>	<b>1.1363</b>	<b>1.1248</b>	<b>1.1049</b>	<b>1.1388</b>	<b>1.1058</b>	<b>1.0733</b>	<b>1.0894</b>	<b>1.1046</b>	<b>1.1196</b>
cs-wls	0.9619	<b>0.9698</b>	<b>0.9730</b>	<b>0.9778</b>	<b>0.9706</b>	0.9613	0.9741	0.9677	0.9724	0.9700
cs-shr	<b>0.9583</b>	0.9701	0.9757	0.9824	0.9716	0.9526	0.9781	0.9652	0.9657	0.9689
t-bu	1	1	1	1	1	0.8476	0.9475	0.8961	0.7885	0.9368
t-ols	<b>1.3297</b>	<b>1.1369</b>	<b>1.0590</b>	<b>1.0225</b>	<b>1.1311</b>	<b>1.0380</b>	0.9840	<b>1.0106</b>	0.8603	<b>1.0533</b>
t-struc	<b>1.1581</b>	<b>1.0538</b>	<b>1.0105</b>	0.9926	<b>1.0519</b>	0.9263	0.9450	0.9356	0.8042	0.9790
t-wlsh	0.9893	0.9994	<b>1.0004</b>	0.9891	0.9945	0.8364	0.9369	0.8853	0.7747	0.9283
t-wlsv	<b>1.0017</b>	0.9994	0.9875	0.9853	0.9934	0.8444	<b>0.9316</b>	0.8869	0.7729	0.9279
t-shr	<b>1.0005</b>	<b>1.0067</b>	<b>1.0183</b>	<b>1.0065</b>	<b>1.0080</b>	0.8378	0.9507	0.8924	0.7805	0.9386
t-acov	0.9780	0.9912	0.9986	0.9888	0.9891	<b>0.8253</b>	0.9353	<b>0.8786</b>	<b>0.7694</b>	<b>0.9225</b>
t-strarl	<b>1.1578</b>	<b>1.0545</b>	<b>1.0112</b>	0.9929	<b>1.0522</b>	0.9267	0.9454	0.9360	0.8045	0.9793
t-sarl	<b>1.0018</b>	0.9994	0.9875	0.9854	0.9935	0.8445	0.9317	0.8870	0.7729	0.9279
t-harl	0.9886	0.9995	<b>1.0005</b>	0.9894	0.9945	0.8366	0.9372	0.8855	0.7749	0.9284
<i>Le 32 serie aggregate</i>										
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
cs-ols	0.9713	0.9767	0.9798	0.9852	0.9782	0.9508	0.9854	0.9679	<b>1.0166</b>	0.9807
cs-struc	0.9720	0.9696	0.9655	0.9610	0.9670	0.9480	0.9486	0.9483	0.9602	0.9607
cs-wls	0.9271	0.9324	0.9349	0.9323	0.9317	0.9256	<b>0.9310</b>	0.9283	0.9255	0.9298
cs-shr	<b>0.9157</b>	<b>0.9270</b>	<b>0.9300</b>	<b>0.9315</b>	<b>0.9260</b>	0.9174	0.9387	0.9280	0.9232	<b>0.9262</b>
t-bu	1	1	1	1	1	<b>0.8487</b>	0.9486	0.8973	0.7714	0.9342
t-ols	<b>1.2332</b>	<b>1.1338</b>	<b>1.0538</b>	<b>1.0386</b>	<b>1.1122</b>	<b>1.0203</b>	0.9950	<b>1.0076</b>	0.8555	<b>1.0415</b>
t-struc	<b>1.0944</b>	<b>1.0565</b>	<b>1.0106</b>	<b>1.0057</b>	<b>1.0412</b>	0.9180	0.9555	0.9366	0.7986	0.9726
t-wlsh	<b>1.0054</b>	<b>1.0128</b>	0.9886	0.9938	<b>1.0001</b>	0.8558	0.9383	0.8961	0.7687	0.9334
t-wlsv	<b>1.0064</b>	<b>1.0091</b>	0.9909	0.9920	0.9996	0.8556	0.9386	0.8961	0.7684	0.9331
t-shr	<b>1.0147</b>	<b>1.0165</b>	<b>1.0008</b>	0.9982	<b>1.0075</b>	0.8577	0.9433	0.8995	0.7711	0.9388
t-acov	<b>1.0018</b>	<b>1.0146</b>	0.9922	0.9934	<b>1.0004</b>	0.8537	0.9382	<b>0.895</b>	<b>0.7683</b>	0.9332
t-strarl	<b>1.0950</b>	<b>1.0556</b>	<b>1.0100</b>	<b>1.0059</b>	<b>1.0410</b>	0.9177	0.9553	0.9363	0.7981	0.9723
t-sarl	<b>1.0066</b>	<b>1.0093</b>	0.9908	0.9921	0.9997	0.8560	0.9386	0.8963	0.7684	0.9333
t-harl	<b>1.0056</b>	<b>1.0130</b>	0.9884	0.9939	<b>1.0002</b>	0.8562	0.9383	0.8963	0.7688	0.9336
<i>Le 63 serie bottom</i>										
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
cs-ols	<b>1.3679</b>	<b>1.2763</b>	<b>1.2690</b>	<b>1.2456</b>	<b>1.2889</b>	<b>1.2545</b>	<b>1.2321</b>	<b>1.2433</b>	<b>1.3448</b>	<b>1.2834</b>
cs-struc	<b>1.3207</b>	<b>1.2316</b>	<b>1.2155</b>	<b>1.1861</b>	<b>1.2375</b>	<b>1.1957</b>	<b>1.1427</b>	<b>1.1689</b>	<b>1.1861</b>	<b>1.2101</b>
cs-wls	0.9801	0.9894	0.9929	<b>1.0017</b>	0.9910	0.9800	0.9968	0.9884	0.9971	0.9911
cs-shr	0.9806	0.9928	0.9998	<b>1.0094</b>	0.9956	0.9709	0.9987	0.9847	0.9880	0.9914
t-bu	1	1	1	1	1	0.8470	0.9469	0.8956	0.7973	0.9381
t-ols	<b>1.3816</b>	<b>1.1384</b>	<b>1.0617</b>	<b>1.0145</b>	<b>1.1408</b>	<b>1.0471</b>	0.9784	<b>1.0122</b>	0.8627	<b>1.0594</b>
t-struc	<b>1.1919</b>	<b>1.0525</b>	<b>1.0105</b>	0.9860	<b>1.0573</b>	0.9306	0.9397	0.9351	0.8071	0.9822
t-wlsh	0.9812	0.9926	<b>1.0065</b>	0.9867	0.9917	0.8267	0.9363	0.8798	0.7778	0.9257
t-wlsv	0.9992	0.9945	0.9858	<b>0.9819</b>	0.9903	0.8387	<b>0.9281</b>	0.8823	0.7752	0.9252
t-shr	0.9933	<b>1.0018</b>	<b>1.0272</b>	<b>1.0107</b>	<b>1.0082</b>	0.8278	0.9544	0.8889	0.7853	0.9384
t-acov	<b>0.9661</b>	<b>0.9796</b>	<b>1.0019</b>	0.9864	<b>0.9834</b>	<b>0.8112</b>	0.9338	<b>0.8704</b>	<b>0.7699</b>	<b>0.9171</b>
t-strarl	<b>1.1910</b>	<b>1.0540</b>	<b>1.0118</b>	0.9863	<b>1.0579</b>	0.9313	0.9404	0.9358	0.8078	0.9829
t-sarl	0.9994	0.9944	<b>0.9858</b>	0.9820	0.9904	0.8388	0.9282	0.8824	0.7752	0.9253
t-harl	0.9801	0.9927	<b>1.0068</b>	0.9871	0.9916	0.8268	0.9367	0.8801	0.7780	0.9257

**Tabella B.3:** AvgRelMAE a qualsiasi ordine di aggregazione  $k$  e orizzonte di previsione.

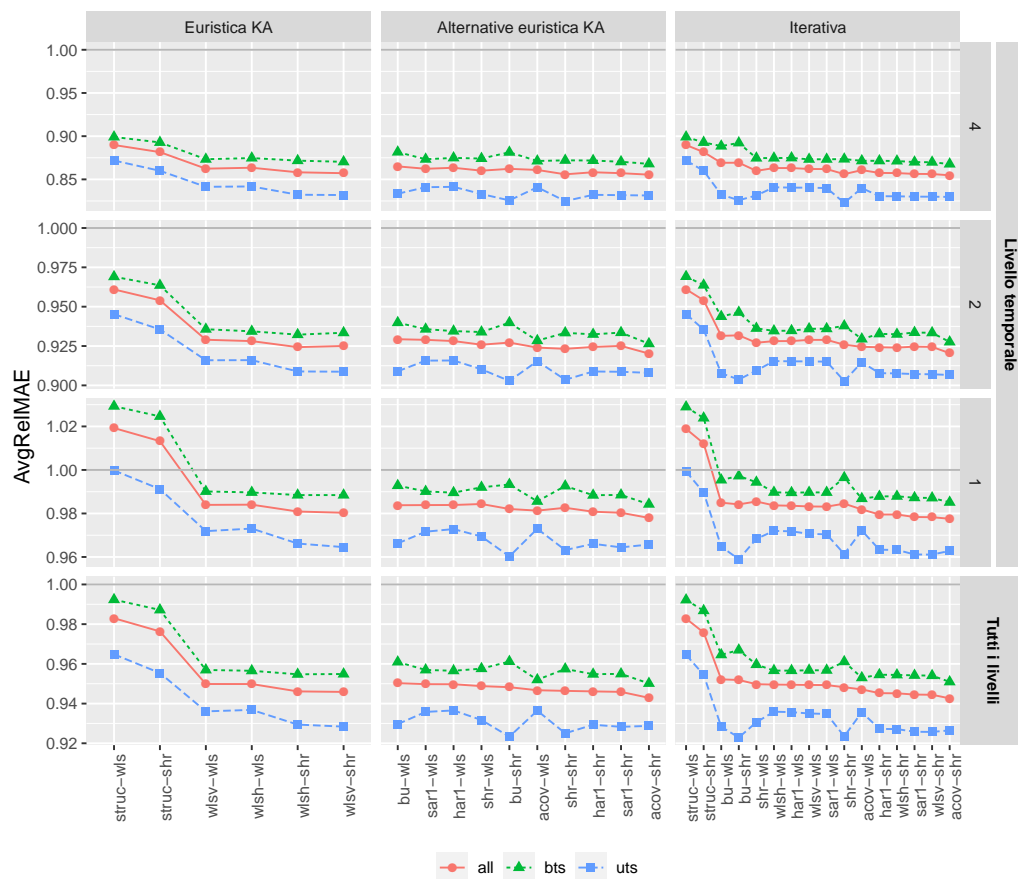
Procedure	Trimestrali					Semi-annuali			Annuali	Tutte
	1	2	3	4	1-4	1	2	1-2	1	
<i>Tutte le 95 serie</i>										
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
cs-ols	<b>1.1168</b>	<b>1.0846</b>	<b>1.0806</b>	<b>1.0716</b>	<b>1.0883</b>	<b>1.0722</b>	<b>1.0621</b>	<b>1.0672</b>	<b>1.1032</b>	<b>1.0843</b>
cs-struc	<b>1.0997</b>	<b>1.0679</b>	<b>1.0600</b>	<b>1.0497</b>	<b>1.0692</b>	<b>1.0473</b>	<b>1.0306</b>	<b>1.0389</b>	<b>1.0536</b>	<b>1.0582</b>
cs-wls	0.9793	0.9846	0.9866	<b>0.9893</b>	0.9850	0.9788	0.9857	0.9823	0.9907	0.9850
cs-shr	<b>0.9769</b>	<b>0.9842</b>	<b>0.9863</b>	0.9893	<b>0.9842</b>	0.9733	0.9871	0.9802	0.9840	0.9830
t-bu	1	1	1	1	1	0.9219	0.9665	0.9439	0.8763	0.9653
t-ols	<b>1.1554</b>	<b>1.0714</b>	<b>1.0422</b>	<b>1.0240</b>	<b>1.0721</b>	<b>1.0243</b>	0.9987	<b>1.0114</b>	0.9294	<b>1.0331</b>
t-struc	<b>1.0772</b>	<b>1.0288</b>	<b>1.0146</b>	<b>1.0060</b>	<b>1.0313</b>	0.9671	0.9755	0.9713	0.8964	0.9937
t-wlsh	0.9919	0.9992	<b>1.0025</b>	0.9969	0.9976	0.9170	0.9642	0.9403	0.8726	0.9623
t-wlsv	0.9997	0.9988	0.9967	0.9953	0.9976	0.9212	0.9617	0.9412	0.8714	0.9624
t-shr	0.9973	<b>1.0007</b>	<b>1.0059</b>	<b>1.0032</b>	<b>1.0017</b>	0.9166	0.9675	0.9417	0.8707	0.9647
t-acov	0.9893	0.9951	<b>1.0020</b>	0.9971	0.9959	<b>0.9106</b>	0.9632	<b>0.9365</b>	<b>0.8697</b>	<b>0.9598</b>
t-strar1	<b>1.0773</b>	<b>1.0291</b>	<b>1.0148</b>	<b>1.0062</b>	<b>1.0315</b>	0.9672	0.9757	0.9714	0.8965	0.9938
t-sar1	0.9997	0.9990	0.9964	0.9953	0.9976	0.9213	<b>0.9615</b>	0.9412	0.8712	0.9624
t-har1	0.9915	0.9993	<b>1.0024</b>	0.9969	0.9975	0.9171	0.9642	0.9404	0.8725	0.9623
<i>Le 32 serie aggregate</i>										
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
cs-ols	0.9820	0.9878	0.9875	0.9852	0.9856	0.9704	0.9857	0.9780	<b>1.0073</b>	0.9865
cs-struc	0.9821	0.9876	0.9840	0.9849	0.9846	0.9664	0.9738	0.9701	0.9927	0.9816
cs-wls	0.9562	0.9673	0.9664	0.9692	0.9648	0.9565	0.9656	0.9610	0.9775	0.9655
cs-shr	<b>0.9484</b>	<b>0.9628</b>	<b>0.9595</b>	<b>0.9652</b>	<b>0.9590</b>	0.9521	0.9679	0.9600	0.9691	<b>0.9607</b>
t-bu	1	1	1	1	1	<b>0.9246</b>	0.9628	<b>0.9435</b>	0.8665	0.9636
t-ols	<b>1.0976</b>	<b>1.0686</b>	<b>1.0406</b>	<b>1.0339</b>	<b>1.0599</b>	<b>1.0120</b>	<b>1.0011</b>	<b>1.0065</b>	0.9280	<b>1.0247</b>
t-struc	<b>1.0350</b>	<b>1.0291</b>	<b>1.0157</b>	<b>1.0148</b>	<b>1.0236</b>	0.9613	0.9784	0.9698	0.8941	0.9887
t-wlsh	0.9953	<b>1.0063</b>	0.9996	<b>1.0017</b>	<b>1.0007</b>	0.9278	0.9629	0.9452	0.8694	0.9650
t-wlsv	0.9947	<b>1.0034</b>	0.9994	<b>1.0006</b>	0.9995	0.9273	0.9628	0.9448	0.8689	0.9641
t-shr	<b>1.0044</b>	<b>1.0068</b>	0.9992	<b>1.0025</b>	<b>1.0032</b>	0.9310	<b>0.9617</b>	0.9462	<b>0.8656</b>	0.9660
t-acov	0.9965	<b>1.0061</b>	<b>1.0019</b>	<b>1.0011</b>	<b>1.0014</b>	0.9270	0.9627	0.9447	0.8688	0.9651
t-strar1	<b>1.0355</b>	<b>1.0282</b>	<b>1.0151</b>	<b>1.0148</b>	<b>1.0234</b>	0.9612	0.9781	0.9696	0.8936	0.9884
t-sar1	0.9947	<b>1.0034</b>	0.9993	<b>1.0005</b>	0.9995	0.9275	0.9626	0.9449	0.8686	0.9640
t-har1	0.9954	<b>1.0063</b>	0.9995	<b>1.0015</b>	<b>1.0007</b>	0.9281	0.9628	0.9453	0.8691	0.9649
<i>Le 63 serie bottom</i>										
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
cs-ols	<b>1.1922</b>	<b>1.1373</b>	<b>1.1313</b>	<b>1.1183</b>	<b>1.1444</b>	<b>1.1280</b>	<b>1.1032</b>	<b>1.1155</b>	<b>1.1553</b>	<b>1.1376</b>
cs-struc	<b>1.1647</b>	<b>1.1111</b>	<b>1.1009</b>	<b>1.0842</b>	<b>1.1148</b>	<b>1.0909</b>	<b>1.0607</b>	<b>1.0757</b>	<b>1.0860</b>	<b>1.0994</b>
cs-wls	0.9913	0.9936	0.9971	0.9996	0.9954	0.9903	0.9961	0.9932	0.9975	0.9951
cs-shr	0.9917	0.9953	<b>1.0002</b>	<b>1.0018</b>	0.9972	0.9842	0.9970	0.9906	0.9917	0.9945
t-bu	1	1	1	1	1	0.9205	0.9684	0.9441	0.8813	0.9661
t-ols	<b>1.1859</b>	<b>1.0728</b>	<b>1.0430</b>	<b>1.0190</b>	<b>1.0783</b>	<b>1.0306</b>	0.9974	<b>1.0139</b>	0.9301	<b>1.0373</b>
t-struc	<b>1.0993</b>	<b>1.0287</b>	<b>1.0140</b>	<b>1.0016</b>	<b>1.0352</b>	0.9700	0.9741	0.9721	0.8976	0.9963
t-wlsh	0.9902	0.9956	<b>1.0040</b>	0.9944	0.9960	0.9116	0.9649	0.9378	0.8743	0.9610
t-wlsv	<b>1.0022</b>	0.9965	0.9953	<b>0.9926</b>	0.9967	0.9181	0.9611	0.9393	0.8727	0.9615
t-shr	0.9936	0.9975	<b>1.0093</b>	<b>1.0035</b>	<b>1.0010</b>	0.9094	0.9705	0.9395	0.8733	0.9640
t-acov	<b>0.9856</b>	<b>0.9896</b>	<b>1.0021</b>	0.9951	<b>0.9931</b>	<b>0.9023</b>	0.9635	<b>0.9324</b>	<b>0.8702</b>	<b>0.9571</b>
t-strar1	<b>1.0991</b>	<b>1.0295</b>	<b>1.0147</b>	<b>1.0018</b>	<b>1.0356</b>	0.9703	0.9744	0.9724	0.8980	0.9966
t-sar1	<b>1.0023</b>	0.9968	<b>0.9950</b>	0.9926	0.9967	0.9183	<b>0.9609</b>	0.9393	0.8726	0.9615
t-har1	0.9896	0.9957	<b>1.0039</b>	0.9946	0.9959	0.9116	0.9649	0.9379	0.8743	0.9609

### B.3 Procedure euristiche cross-temporali



**Figura B.3:** Average Relative MSE calcolato con tutte le serie e tutti gli orizzonti di previsioni per ciascuna frequenza.





**Figura B.4:** Average Relative MAE calcolato con tutte le serie e tutti gli orizzonti di previsioni per ciascuna frequenza.

	all				bts				uts			
	all	1	2	4	all	1	2	4	all	1	2	4
ite acov-shr	1	1	1	1	2	3	2	2	5	6	3	2
tcs acov-shr	2	2	2	2	1	1	1	1	14	15	13	9
tcs acov-wls	3	3	3	7	3	2	3	3	25	26	21	24
ite acov-wls	4	6	4	8	4	4	4	4	21	21	19	20
ite wlsv-shr	5	4	8	3	7	5	14	7	3	2	5	3
ite sar1-shr	6	5	10	4	9	8	16	8	4	3	6	4
ite wls-shr	7	7	5	9	11	15	7	13	7	8	8	5
ite har1-shr	8	8	6	10	12	16	8	14	8	9	9	6
kah wlsv-shr	9	9	11	5	5	6	10	5	15	14	16	12
tcs sar1-shr	10	10	12	6	6	7	12	6	13	12	15	10
kah wls-shr	11	12	7	11	8	10	5	9	18	18	18	15
tcs har1-shr	12	11	9	12	10	11	6	12	17	16	17	14
ite sar1-wls	13	13	21	15	17	13	20	15	19	19	20	19
ite wlsv-wls	14	14	22	16	18	14	19	16	20	20	22	21
tcs sar1-wls	15	15	19	13	13	9	18	10	24	24	25	23
kah wlsv-wls	16	16	20	14	14	12	17	11	26	25	27	26
ite har1-wls	17	17	17	21	20	19	15	20	22	22	23	22
tcs har1-wls	18	19	15	18	16	17	11	18	27	27	26	27
ite wls-wls	19	18	16	20	19	20	13	19	23	23	24	25
kah wls-wls	20	20	14	17	15	18	9	17	28	28	28	28
tcs shr-shr	21	25	13	19	22	25	22	21	10	11	7	7
tcs bu-wls	22	21	25	26	23	21	25	25	11	10	12	17
tcs bu-shr	23	22	26	25	24	22	26	26	6	5	4	11
tcs shr-wls	24	26	18	22	21	24	21	22	16	17	14	16
ite shr-wls	25	27	24	24	25	27	23	23	12	13	11	13
ite shr-shr	26	28	23	23	27	28	24	24	2	4	1	1
ite bu-wls	27	23	27	27	26	23	27	31	9	7	10	18
ite bu-shr	28	24	28	28	28	26	28	34	1	1	2	8
ite struc-shr	29	29	30	29	30	30	30	28	43	49	45	45
kah struc-shr	30	31	29	30	29	29	29	27	45	57	48	46
ite strar1-shr	31	30	32	32	32	32	32	30	44	52	46	44
tcs strar1-shr	32	32	31	31	31	31	31	29	46	58	47	43
ite struc-wls	33	33	34	33.5	33	33	34	33	62	62	63	49
ite strar1-wls	34	34	36	36	35	35	36	35	61	61	61	48
kah struc-wls	35	35	33	33.5	34	34	33	32	64	64	64	50
tcs strar1-wls	36	36	35	35	36	36	35	36	63	63	62	47
tcs ols-shr	37	37	37	37	37	37	37	37	73	73	73	69
ite ols-shr	38	38	38	38	38	38	38	38	74	74	74	74
tcs ols-wls	39	39	49	40	40	39	39	40	75	75	75	75
ite ols-wls	40	40	50	39	39	40	40	39	76	76	76	76
ite wlsv-struc	41.5	41.5	43	43	41.5	41.5	45	43.5	33	33.5	42	37
tcs wlsv-struc	41.5	41.5	44	44	41.5	41.5	46	43.5	34	33.5	41	38
tcs sar1-struc	43.5	43.5	48	45.5	43.5	43.5	49.5	46	31.5	31.5	40	33
ite sar1-struc	43.5	43.5	47	45.5	43.5	43.5	49.5	45	31.5	31.5	39	34
ite wls-shr	45.5	45.5	41.5	47.5	45.5	45.5	43.5	47.5	39	37	37	39.5
tcs wls-shr	45.5	45.5	41.5	47.5	45.5	45.5	43.5	47.5	40	38	38	39.5
ite har1-struc	47	47.5	45	49.5	47	47.5	47.5	50	37	35.5	33	35
tcs har1-struc	48	47.5	46	49.5	48	47.5	47.5	49	38	35.5	34	36
ite acov-struc	49.5	49.5	39	41	49.5	49.5	41	41	35	39	30	29.5
tcs acov-struc	49.5	49.5	40	42	49.5	49.5	42	42	36	40	29	29.5
ite struc-struc	51.5	53	51.5	52	51.5	51	52	52	67	67.5	67.5	68
tcs struc-struc	51.5	54	51.5	51	51.5	52	51	51	68	67.5	67.5	67
ite strar1-struc	53.5	55	53	53.5	53	53	53.5	53	65.5	65	65.5	66
tcs strar1-struc	53.5	56	54	53.5	54	54	53.5	54	65.5	66	65.5	65
tcs bu-struc	55.5	51.5	55.5	57.5	55	55.5	55	57	29.5	30	32	41.5
ite bu-struc	55.5	51.5	55.5	57.5	56	55.5	56	58	29.5	29	31	41.5
ite shr-struc	57.5	67.5	57.5	55	61.5	67.5	57.5	55	41	41	35	31
tcs shr-struc	57.5	67.5	57.5	56	61.5	67.5	57.5	56	42	42	36	32
tcs wlsv-ols	59	57.5	63.5	61	57	57	63	63	52	46	53	55.5
ite wlsv-ols	60	57.5	63.5	62	58	58	64	64	51	45	54	55.5
tcs sar1-ols	61	59	67.5	65.5	59.5	59	67	67	49	43	55	54
ite sar1-ols	62	60	67.5	65.5	59.5	60	68	68	50	44	56	53
tcs wls-ols	63	61	62	63	63	61	61.5	65	54	55.5	50	58
ite wls-ols	64	62	61	64	64	62	61.5	66	53	55.5	49	57
tcs acov-ols	65.5	65	59	59	67	65	59	61	48	48	44	52
ite acov-ols	65.5	66	60	60	68	66	60	62	47	47	43	51
tcs har1-ols	67.5	63.5	65	67.5	65.5	63.5	65.5	69	55.5	53	51	60
ite har1-ols	67.5	63.5	66	67.5	65.5	63.5	65.5	70	55.5	54	52	59
tcs bu-ols	69.5	69.5	71	77	75	73	75	77	57.5	51	57	63.5
ite bu-ols	69.5	69.5	72	78	76	74	76	78	57.5	50	58	63.5
tcs struc-ols	71.5	71	70	69.5	69.5	69	69.5	71.5	71.5	71.5	71.5	72
ite struc-ols	71.5	72	69	69.5	69.5	70	69.5	71.5	71.5	71.5	71.5	73
tcs strar1-ols	73.5	73.5	73.5	71	71.5	71.5	71	73	69	69	69.5	70
ite strar1-ols	73.5	73.5	73.5	72	71.5	71.5	72	74	70	70	69.5	71
tcs shr-ols	75	75.5	75.5	75.5	77	77	77.5	75.5	59.5	59.5	59.5	61
ite shr-ols	76	75.5	75.5	75.5	78	78	77.5	75.5	59.5	59.5	59.5	62
ite ols-struc	77.5	77.5	77.5	73	73	75.5	73.5	59	77.5	77.5	77	77
tcs ols-struc	77.5	77.5	77.5	74	74	75.5	73.5	60	77.5	77.5	78	78
tcs ols-ols	79.5	79	79.5	79.5	79	79	79.5	79.5	79.5	79.5	79.5	79.5
ite ols-ols	79.5	80	79.5	79.5	80	80	79.5	79.5	79.5	79.5	79.5	79.5

Figura B.5: Graduatorie (Average Relative MSE) divise per frequenza e orizzonte di previsione.

	all				bts				uts			
	all	1	2	4	all	1	2	4	all	1	2	4
ite acov-shr	1	1	2	1	2	2	2	1	7	6	5	5
tcs acov-shr	2	2	1	2	1	1	1	2	13	13	11	10
ite wlsv-shr	3	3	9	5	5	5	10	3	5	3	6	6
ite sar1-shr	4	4	11	6	6	6	13	4	6	4	7	7
ite wls-shr	5	6	5	9	7	8	7	7	8	8	8	8
ite har1-shr	6	5	6	10	8	7	8	9	9	9	10	9
kah wlsv-shr	7	8	12	7	11	10	11	5	12	11	13	13
tcs sar1-shr	8	7	13	8	12	12	12	6	10	10	12	12
kah wls-shr	9	10	7	11	9	11	5	11	15	15	15	15
tcs har1-shr	10	9	8	12	10	9	6	12	14	14	14	14
tcs shr-shr	11	14	3	3	21	22	9	13	4	7	3	2
tcs acov-wls	12	11	4	16	3	3	3	8	26	27	23	24
ite acov-wls	13	12	10	15	4	4	4	10	21	25	19	19
ite shr-wls	14	26	14	4	25	27	24	18	3	5	1	1
tcs bu-shr	15	13	17	19	26	24	25	25	2	2	2	3
tcs shr-wls	16	25	15	14	22	21	14	19	18	18	18	17
ite sar1-wls	17	15	22	17	18	16	22	15	19	19	20	20
ite wlsv-wls	18	16	23	18	17	17	21	14	20	20	21	21
ite har1-wls	19	17	20	22	15	13	18	23	22	22	22	22
ite wls-wls	20	18	18	23	16	18	17	21	24	24	24	23
tcs har1-wls	21	21	21	24	14	14	16	24	27	26	26	26
ite shr-wls	22	28	16	13	23	25	23	20	17	17	17	11
tcs sar1-wls	23	20	24	20	20	19	20	17	23	21	25	25
kah wls-wls	24	23	19	25	13	15	15	22	28	28	28	28
kah wlsv-wls	25	22	25	21	19	20	19	16	25	23	27	27
tcs bu-wls	26	19	26	26	24	23	26	26	16	16	16	18
ite bu-shr	27	24	28	28	28	28	28	28	1	1	4	4
ite bu-wls	28	27	27	27	27	26	27	27	11	12	9	16
ite struc-shr	29	29	30	30	29	29	30	30	58	56	57	59
ite strar1-shr	30	30	32	32	31	30	32	32	57	55	58	57
kah struc-shr	31	31	29	29	30	31	29	29	60	60	59	60
tcs strar1-shr	32	32	31	31	32	32	31	31	59	59	60	58
ite struc-wls	33	33	34	33	33	33	34	34	63	62	64	63
ite strar1-wls	34	34	36	36	35	34	36	36	61	61	62	61
kah struc-wls	35	35	33	34	34	35	33	33	64	64	63	64
tcs strar1-wls	36	36	35	35	36	36	35	35	62	63	61	62
tcs ols-shr	37	37	47	37	37	38	37	38	73	73	73	73
ite ols-shr	38	38	48	38	38	37	38	37	74	74	74	74
ite wlsv-struc	39.5	39.5	41	43	41	41.5	45	43	33.5	35	39.5	39
tcs wlsv-struc	39.5	39.5	42	44	42	41.5	46	44	33.5	36	39.5	40
ite sar1-struc	41	41	45	41.5	43.5	43.5	49.5	45	31.5	33	35	36
tcs sar1-struc	42	42	46	41.5	43.5	43.5	49.5	46	31.5	34	36	35
ite wls-shr	43.5	43.5	39	47.5	45.5	45.5	43.5	47	39	43	41.5	41.5
tcs wls-shr	43.5	43.5	40	47.5	45.5	45.5	43.5	48	40	44	41.5	41.5
ite har1-struc	45.5	45	43	45	47	47	47	49.5	35	41.5	37	37
tcs har1-struc	45.5	46	44	46	48	48	48	49.5	36	41.5	38	38
ite acov-struc	47.5	49	37	39.5	49.5	49.5	41.5	41	43	47	34	33.5
tcs acov-struc	47.5	50	38	39.5	49.5	49.5	41.5	42	44	48	33	33.5
tcs ols-wls	49	48	49	50	40	40	39	40	75	75	75	75
ite ols-wls	50	47	50	49	39	39	40	39	76	76	76	76
tcs bu-struc	51.5	51.5	54	58	55.5	55.5	57.5	58	29.5	29.5	30	32
ite bu-struc	51.5	51.5	53	57	55.5	55.5	57.5	57	29.5	29.5	29	31
ite shr-struc	53	59.5	51.5	51	57	57	55.5	55	37	53.5	31	29
tcs shr-struc	54	59.5	51.5	52	58	58	55.5	56	38	53.5	32	30
ite struc-struc	55.5	53.5	55.5	55	51.5	51.5	51.5	51.5	67	67.5	67	67.5
tcs struc-struc	55.5	53.5	55.5	56	51.5	51.5	51.5	51.5	68	67.5	68	67.5
ite strar1-struc	57	55.5	57	53.5	53	53.5	53.5	53	65.5	65.5	65	66
tcs strar1-struc	58	55.5	58	53.5	54	53.5	53.5	54	65.5	65.5	66	65
tcs wlsv-ols	59	57.5	61	61.5	59.5	59	61.5	63	47.5	39.5	51	53.5
ite wlsv-ols	60	57.5	62	61.5	59.5	60	61.5	64	47.5	39.5	52	53.5
tcs sar1-ols	61.5	61.5	65.5	66	61.5	61.5	65	67.5	45	37	47	50
ite sar1-ols	61.5	61.5	65.5	65	61.5	61.5	66	67.5	46	38	48	49
tcs wls-ols	63.5	63.5	63.5	63	63	63	64	65	53.5	51.5	56	55.5
ite wls-ols	63.5	63.5	63.5	64	64	64	63	66	53.5	51.5	55	55.5
tcs acov-ols	65	67	59.5	59.5	67.5	67.5	59.5	59.5	49.5	45.5	45.5	47.5
ite acov-ols	66	68	59.5	59.5	67.5	67.5	59.5	59.5	49.5	45.5	45.5	47.5
tcs har1-ols	67	65.5	67	67.5	65.5	65.5	67	69.5	51.5	49	53.5	52
ite har1-ols	68	65.5	68	67.5	65.5	65.5	68	69.5	51.5	50	53.5	51
tcs bu-ols	69.5	69.5	69	75	75	73.5	75.5	77	41.5	32	43	45.5
ite bu-ols	69.5	69.5	70	76	76	73.5	75.5	78	41.5	31	44	45.5
tcs struc-ols	71.5	71	71.5	69	69.5	69	69	71.5	71.5	71	71.5	71
ite struc-ols	71.5	72	71.5	70	69.5	70	70	71.5	71.5	72	71.5	72
tcs strar1-ols	73.5	73.5	73.5	71	71.5	71.5	71	73	69.5	69.5	69.5	69
ite strar1-ols	73.5	73.5	73.5	72	71.5	71.5	72	74	69.5	69.5	69.5	70
tcs shr-ols	75.5	75.5	76	73.5	77.5	77	77.5	75.5	55.5	57.5	50	43.5
ite shr-ols	75.5	75.5	75	73.5	77.5	78	77.5	75.5	55.5	57.5	49	43.5
tcs ols-struc	77.5	77.5	78	78	73.5	76	73.5	62	77.5	77.5	78	78
ite ols-struc	77.5	77.5	77	77	73.5	75	73.5	61	77.5	77.5	77	77
tcs ols-ols	79.5	79.5	79	79.5	79.5	79	79.5	79.5	79.5	80	79	79
ite ols-ols	79.5	79.5	80	79.5	79.5	80	79.5	79.5	79.5	79	80	80

Figura B.6: Graduatorie (Average Relative MAE) divise per frequenza e orizzonte di previsione.

Tabella B.4: AvgRelMSE per le 63 bts a qualsiasi ordine di aggregazione  $k$  e orizzonte di previsione.

Procedure	Quarterly bts					Semi-annual bts			Annual bts	All bts
	1	2	3	4	1-4	1	2	1-2	1	1
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
kah-struc-shr	1.1655	1.037	0.9986	0.9774	1.0422	0.9146	0.9335	0.9240	0.8004	0.9697
kah-struc-wls	1.1776	1.044	1.0045	0.9832	1.0497	0.9241	0.9399	0.9320	0.8088	0.9775
kah-wlsh-shr	0.9665	0.9806	0.9954	0.9802	0.9806	0.8156	0.9327	0.8722	0.7738	0.9168
kah-wlsh-wls	0.9677	0.9812	0.9961	0.9819	0.9817	0.8180	0.9344	0.8743	0.7767	0.9185
kah-wlsv-shr	0.9832	0.9817	0.9760	0.9759	0.9792	0.8267	0.9250	0.8745	0.7712	0.9163
kah-wlsv-wls	0.9852	0.9826	0.9772	0.9776	0.9806	0.8292	0.9267	0.8766	0.7741	0.9182
tcs-acov-ols	1.3388	1.2584	1.2274	1.1982	1.2546	1.0590	1.1541	1.1055	0.9941	1.1705
tcs-acov-shr	0.9474	0.9659	0.9921	0.9780	0.9707	0.7988	0.9294	0.8616	0.7658	0.9069
tcs-acov-struc	1.3029	1.2033	1.1716	1.1406	1.2031	1.0117	1.0845	1.0474	0.9149	1.1120
tcs-acov-wls	0.9482	0.9664	0.9926	0.9806	0.9718	0.8009	0.9316	0.8638	0.7691	0.9088
tcs-bu-ols	1.3679	1.2763	1.2690	1.2456	1.2889	1.1056	1.2150	1.1590	1.0525	1.2147
tcs-bu-shr	0.9829	0.9880	0.9886	0.9953	0.9887	0.8347	0.9445	0.8879	0.7931	0.9291
tcs-bu-struc	1.3207	1.2316	1.2155	1.1861	1.2375	1.0595	1.1444	1.1011	0.9765	1.1571
tcs-bu-wls	0.9802	0.9852	0.9866	0.9943	0.9866	0.8331	0.9426	0.8862	0.7920	0.9272
tcs-har1-ols	1.3363	1.2496	1.2271	1.1976	1.2516	1.0619	1.1568	1.1083	0.9982	1.1704
tcs-har1-shr	0.9653	0.9809	0.9959	0.9808	0.9806	0.8157	0.9333	0.8725	0.7742	0.917
tcs-har1-struc	1.2958	1.1954	1.1721	1.1392	1.1993	1.0126	1.0866	1.049	0.9180	1.1110
tcs-har1-wls	0.9664	0.9812	0.9965	0.9824	0.9816	0.8179	0.9350	0.8745	0.7770	0.9185
tcs-ols-ols	1.7104	1.3863	1.2740	1.2026	1.3806	1.2869	1.1842	1.2345	1.0876	1.2924
tcs-ols-shr	1.3474	1.1180	1.0442	1.0021	1.1205	1.0262	0.9673	0.9963	0.8529	1.0421
tcs-ols-struc	1.6399	1.3133	1.2004	1.1375	1.3095	1.2109	1.1017	1.1550	0.9844	1.2129
tcs-ols-wls	1.3654	1.1295	1.0541	1.0111	1.1323	1.0407	0.9776	1.0086	0.8656	1.0543
tcs-sar1-ols	1.3374	1.2433	1.2162	1.1903	1.2456	1.0659	1.1529	1.1085	0.9975	1.1672
tcs-sar1-shr	0.9832	0.9818	0.9762	0.9761	0.9793	0.8268	0.9253	0.8746	0.7713	0.9164
tcs-sar1-struc	1.2916	1.1925	1.1595	1.1318	1.1924	1.0168	1.0828	1.0493	0.9171	1.1073
tcs-sar1-wls	0.9850	0.9824	0.9773	0.9777	0.9806	0.8291	0.9268	0.8766	0.7740	0.9181
tcs-shr-ols	1.4139	1.3282	1.2923	1.2264	1.3135	1.1276	1.1991	1.1628	1.0454	1.2278
tcs-shr-shr	0.9704	0.9856	1.0148	1.0045	0.9937	0.8118	0.9515	0.8789	0.7819	0.9271
tcs-shr-struc	1.3675	1.2744	1.2369	1.1710	1.2605	1.0762	1.1297	1.1027	0.9616	1.1672
tcs-shr-wls	0.9675	0.9832	1.0146	1.0045	0.9923	0.8103	0.9518	0.8782	0.7826	0.9263
tcs-strar1-ols	1.4718	1.2772	1.2113	1.1662	1.2765	1.1307	1.1334	1.1321	1.0033	1.1918
tcs-strar1-shr	1.1644	1.0386	1.0001	0.9778	1.0428	0.9152	0.9344	0.9247	0.8011	0.9704
tcs-strar1-struc	1.4217	1.2193	1.1495	1.1083	1.2191	1.0749	1.0620	1.0684	0.9202	1.1278
tcs-strar1-wls	1.1764	1.0453	1.0057	0.9836	1.0502	0.9245	0.9407	0.9326	0.8093	0.9780
tcs-struc-ols	1.4716	1.2748	1.2104	1.1649	1.2753	1.1291	1.1323	1.1307	1.0022	1.1905
tcs-struc-struc	1.4219	1.2178	1.1486	1.1073	1.2182	1.074	1.0610	1.0675	0.9196	1.1269
tcs-wlsh-ols	1.3362	1.2468	1.2255	1.1961	1.2501	1.0595	1.1553	1.1063	0.9964	1.1687
tcs-wlsh-struc	1.2960	1.1939	1.1712	1.1385	1.1985	1.0112	1.0857	1.0478	0.9173	1.1101
tcs-wlsv-ols	1.3368	1.2407	1.2151	1.1890	1.2442	1.0637	1.1515	1.1067	0.9958	1.1656
tcs-wlsv-struc	1.2917	1.1909	1.1589	1.1311	1.1916	1.0156	1.0821	1.0483	0.9165	1.1065
ite-acov-ols	1.3388	1.2584	1.2274	1.1982	1.2546	1.0590	1.1541	1.1055	0.9941	1.1705
ite-acov-shr	0.9457	0.9679	0.9945	0.9830	0.9726	0.7989	0.9323	0.8631	0.7669	0.9086
ite-acov-struc	1.3029	1.2033	1.1716	1.1406	1.2031	1.0117	1.0845	1.0474	0.9149	1.1120
ite-acov-wls	0.9482	0.9698	0.9942	0.9836	0.9738	0.8022	0.9340	0.8656	0.7703	0.9106
ite-bu-ols	1.3679	1.2763	1.2690	1.2456	1.2889	1.1056	1.2150	1.1590	1.0525	1.2147
ite-bu-shr	0.9806	0.9928	0.9998	1.0094	0.9956	0.8384	0.9639	0.8989	0.809	0.9387
ite-bu-struc	1.3207	1.2316	1.2155	1.1861	1.2375	1.0595	1.1444	1.1011	0.9765	1.1571
ite-bu-wls	0.9801	0.9894	0.9929	1.0017	0.9910	0.8366	0.9534	0.8931	0.8032	0.9335
ite-har1-ols	1.3363	1.2496	1.2271	1.1976	1.2516	1.0619	1.1568	1.1083	0.9982	1.1704
ite-har1-shr	0.9606	0.9813	0.9984	0.9843	0.9811	0.8147	0.9362	0.8733	0.7753	0.9176
ite-har1-struc	1.2958	1.1954	1.1721	1.1392	1.1993	1.0126	1.0866	1.049	0.9180	1.1110
ite-har1-wls	0.9634	0.9826	0.9980	0.9845	0.9821	0.8175	0.9372	0.8753	0.7782	0.9193
ite-ols-ols	1.7104	1.3863	1.2740	1.2026	1.3806	1.2869	1.1842	1.2345	1.0876	1.2924
ite-ols-shr	1.3601	1.1188	1.0441	0.9997	1.1226	1.0313	0.9661	0.9982	0.8531	1.0438
ite-ols-struc	1.6399	1.3133	1.2004	1.1375	1.3095	1.2109	1.1017	1.1550	0.9844	1.2129
ite-ols-wls	1.3694	1.1288	1.0536	1.0100	1.1325	1.0414	0.9773	1.0088	0.8641	1.0542
ite-sar1-ols	1.3374	1.2433	1.2162	1.1903	1.2456	1.0659	1.1529	1.1085	0.9975	1.1672
ite-sar1-shr	0.9800	0.9817	0.9779	0.9778	0.9793	0.8262	0.9278	0.8755	0.7725	0.9169
ite-sar1-struc	1.2916	1.1925	1.1595	1.1318	1.1924	1.0168	1.0828	1.0493	0.9171	1.1073
ite-sar1-wls	0.9836	0.9826	0.9783	0.9790	0.9809	0.8290	0.9290	0.8776	0.7754	0.9188
ite-shr-ols	1.4139	1.3282	1.2923	1.2264	1.3135	1.1276	1.1991	1.1628	1.0454	1.2278
ite-shr-shr	0.9786	0.9960	1.0231	1.0095	1.0017	0.8204	0.9570	0.8861	0.7869	0.9344
ite-shr-struc	1.3675	1.2744	1.2369	1.1710	1.2605	1.0762	1.1297	1.1027	0.9616	1.1672
ite-shr-wls	0.9710	0.9911	1.0195	1.0070	0.9970	0.8156	0.9556	0.8828	0.7854	0.9307
ite-strar1-ols	1.4718	1.2772	1.2113	1.1662	1.2765	1.1307	1.1334	1.1321	1.0033	1.1918
ite-strar1-shr	1.1692	1.0373	0.9997	0.9768	1.0432	0.9161	0.9345	0.9252	0.8012	0.9707
ite-strar1-struc	1.4217	1.2193	1.1495	1.1083	1.2191	1.0749	1.0620	1.0684	0.9202	1.1278
ite-strar1-wls	1.1782	1.0441	1.0049	0.9830	1.0499	0.9245	0.9409	0.9327	0.8093	0.9779
ite-struc-ols	1.4716	1.2748	1.2104	1.1649	1.2753	1.1291	1.1323	1.1307	1.0022	1.1905
ite-struc-shr	1.1699	1.0357	0.9983	0.9764	1.0425	0.9152	0.9336	0.9244	0.8004	0.9700
ite-struc-struc	1.4219	1.2178	1.1486	1.1073	1.2182	1.074	1.0610	1.0675	0.9196	1.1269
ite-struc-wls	1.1793	1.043	1.0036	0.9826	1.0495	0.9241	0.9402	0.9321	0.8088	0.9774
ite-wlsh-ols	1.3362	1.2468	1.2255	1.1961	1.2501	1.0595	1.1553	1.1063	0.9964	1.1687
ite-wlsh-shr	0.9618	0.9809	0.9979	0.9837	0.9810	0.8144	0.9355	0.8729	0.7748	0.9174
ite-wlsh-struc	1.2960	1.1939	1.1712	1.1385	1.1985	1.0112	1.0857	1.0478	0.9173	1.1101
ite-wlsh-wls	0.9649	0.9826	0.9976	0.9841	0.9822	0.8176	0.9367	0.8751	0.7780	0.9192
ite-wlsv-ols	1.3368	1.2407	1.2151	1.1890	1.2442	1.0637	1.1515	1.1067	0.9958	1.1656
ite-wlsv-shr	0.9798	0.9814	0.9776	0.9776	0.9791	0.8259	0.9275	0.8753	0.7723	0.9166
ite-wlsv-struc	1.2917	1.1909	1.1589	1.1311	1.1916	1.0156	1.0821	1.0483	0.9165	1.1065
ite-wlsv-wls	0.9837	0.9828	0.9782	0.9789	0.9809	0.8292	0.9288	0.8776	0.7754	0.9188

Tabella B.5: AvgRelMSE per le 32 uts a qualsiasi ordine di aggregazione  $k$  e orizzonte di previsione.

Procedure	Quarterly bts					Semi-annual bts			Annual bts	All bts
	1	2	3	4	1-4	1	2	1-2	1	1
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
kah-struc-shr	<b>1.0261</b>	0.9976	0.9521	0.9483	0.9805	0.863	0.8976	0.8801	0.7471	0.9145
kah-struc-wls	<b>1.0369</b>	<b>1.0072</b>	0.9605	0.9556	0.9895	0.8729	0.9060	0.8893	0.757	0.9237
kah-wlsh-shr	0.9432	0.9481	0.9295	0.9326	0.9383	0.7995	0.8780	0.8378	0.7159	0.8740
kah-wlsh-wls	0.9469	0.9544	0.9345	0.9359	0.9429	0.8047	0.883	0.843	0.7217	0.8790
kah-wlsv-shr	0.9398	0.9467	0.9281	0.9302	0.9362	0.7996	0.8769	0.8373	0.7151	0.8726
kah-wlsv-wls	0.9457	0.9528	0.9335	0.9341	0.9415	0.8053	0.8819	0.8427	0.7209	0.8780
tcs-acov-ols	0.9727	0.9873	0.9744	0.9779	0.9781	0.8319	0.9306	0.8799	0.7600	0.9154
tcs-acov-shr	0.9411	0.9435	0.9307	0.9331	0.9371	0.7956	0.8779	0.8357	0.7146	0.8725
tcs-acov-struc	0.9820	0.9837	0.9593	0.9579	0.9706	0.8277	0.9055	0.8657	0.7411	0.9039
tcs-acov-wls	0.9447	0.9513	0.9351	0.9371	0.942	0.8012	0.8832	0.8412	0.7205	0.8778
tcs-bu-ols	0.9713	0.9767	0.9798	0.9852	0.9782	0.8325	0.9403	0.8847	0.7659	0.9179
tcs-bu-shr	0.9278	0.9299	0.9327	0.9313	0.9305	0.7864	0.8809	0.8323	0.7150	0.8680
tcs-bu-struc	0.9720	0.9696	0.9655	0.9610	0.967	0.8219	0.9132	0.8663	0.7443	0.9027
tcs-bu-wls	0.9316	0.9342	0.9362	0.9333	0.9338	0.7898	0.8837	0.8354	0.7179	0.8712
tcs-har1-ols	0.9774	0.9857	0.9723	0.9795	0.9787	0.8351	0.9316	0.8821	0.7613	0.9166
tcs-har1-shr	0.9432	0.9480	0.9294	0.9325	0.9382	0.7995	0.8779	0.8377	0.7158	0.8739
tcs-har1-struc	0.9826	0.9827	0.9576	0.9582	0.9702	0.8296	0.9058	0.8668	0.7419	0.9041
tcs-har1-wls	0.9467	0.9538	0.9341	0.9356	0.9425	0.8044	0.8826	0.8426	0.7213	0.8786
tcs-ols-ols	<b>1.2156</b>	<b>1.1122</b>	<b>1.0452</b>	<b>1.0300</b>	<b>1.0984</b>	<b>1.0087</b>	0.9962	<b>1.0024</b>	0.858	<b>1.0330</b>
tcs-ols-shr	<b>1.1411</b>	<b>1.0635</b>	0.9885	0.9758	<b>1.0402</b>	0.9478	0.9300	0.9388	0.7931	0.9718
tcs-ols-struc	<b>1.1940</b>	<b>1.0989</b>	<b>1.0203</b>	<b>1.0044</b>	<b>1.0768</b>	0.9860	0.9627	0.9743	0.827	<b>1.0078</b>
tcs-ols-wls	<b>1.1567</b>	<b>1.0767</b>	<b>1.0007</b>	0.9859	<b>1.0528</b>	0.9620	0.9418	0.9518	0.8071	0.9848
tcs-sar1-ols	0.9788	0.9832	0.9727	0.9763	0.9778	0.8369	0.9307	0.8825	0.7610	0.9162
tcs-sar1-shr	0.9399	0.9464	0.9280	0.9301	0.9361	0.7995	0.8767	0.8372	0.7149	0.8725
tcs-sar1-struc	0.9819	0.9802	0.9568	0.9560	0.9686	0.8307	0.9054	0.8672	0.7417	0.9034
tcs-sar1-wls	0.9454	0.9522	0.9331	0.9338	0.9411	0.8049	0.8815	0.8423	0.7204	0.8776
tcs-shr-ols	0.9825	0.9866	0.9832	0.9846	0.9842	0.8367	0.9369	0.8854	0.7650	0.9211
tcs-shr-shr	0.9375	0.9368	0.9300	0.9363	0.9352	0.7905	0.8780	0.8331	0.7128	0.8704
tcs-shr-struc	0.9825	0.9789	0.9637	0.9645	0.9724	0.8262	0.9096	0.8669	0.7415	0.9052
tcs-shr-wls	0.9375	0.9410	0.9359	0.9387	0.9383	0.7927	0.8826	0.8365	0.7165	0.8737
tcs-strar1-ols	<b>1.0736</b>	<b>1.031</b>	0.9969	0.9946	<b>1.0235</b>	0.9021	0.9524	0.9269	0.7954	0.9597
tcs-strar1-shr	<b>1.0269</b>	0.9968	0.9520	0.9486	0.9805	0.8629	0.8977	0.8801	0.7471	0.9145
tcs-strar1-struc	<b>1.0668</b>	<b>1.0255</b>	0.9776	0.9729	<b>1.0100</b>	0.8908	0.9245	0.9075	0.7726	0.9428
tcs-strar1-wls	<b>1.0373</b>	<b>1.0057</b>	0.9600	0.9557	0.9891	0.8723	0.9058	0.8889	0.7565	0.9233
tcs-struc-ols	<b>1.0727</b>	<b>1.0323</b>	0.9980	0.9940	<b>1.0238</b>	0.9024	0.9526	0.9272	0.7957	0.9600
tcs-struc-shr	<b>1.0664</b>	<b>1.0268</b>	0.9786	0.9726	<b>1.0104</b>	0.8912	0.9249	0.9079	0.7731	0.9432
tcs-struc-wls	0.9774	0.9856	0.9727	0.9793	0.9787	0.8348	0.9317	0.8819	0.7612	0.9165
tcs-wlsh-shr	0.9828	0.9829	0.958	0.9585	0.9705	0.8295	0.9062	0.8670	0.7422	0.9044
tcs-wlsh-ols	0.9789	0.9832	0.9731	0.9761	0.9778	0.8367	0.9307	0.8825	0.7610	0.9162
tcs-wlsv-struc	0.9823	0.9804	0.9572	0.9561	0.9689	0.8307	0.9057	0.8674	0.7420	0.9036
ite-acov-ols	0.9727	0.9873	0.9744	0.9779	0.9781	0.8319	0.9306	0.8799	0.7600	0.9154
ite-acov-shr	0.9283	0.9398	0.9259	0.9314	0.9313	0.7893	0.8754	0.8313	0.7111	0.8675
ite-acov-struc	0.9820	0.9837	0.9593	0.9579	0.9706	0.8277	0.9055	0.8657	0.7411	0.9039
ite-acov-wls	0.9414	0.9502	0.9337	0.9364	0.9404	0.7997	0.8825	0.8401	0.7196	0.8764
ite-bu-ols	0.9713	0.9767	0.9798	0.9852	0.9782	0.8325	0.9403	0.8847	0.7659	0.9179
ite-bu-shr	<b>0.9157</b>	<b>0.9270</b>	0.9300	0.9315	<b>0.9260</b>	<b>0.7824</b>	0.8823	0.8309	0.7142	<b>0.8651</b>
ite-bu-struc	0.9720	0.9696	0.9655	0.9610	0.967	0.8219	0.9132	0.8663	0.7443	0.9027
ite-bu-wls	0.9271	0.9324	0.9349	0.9323	0.9317	0.7883	0.8837	0.8346	0.7182	0.8699
ite-har1-ols	0.9774	0.9857	0.9723	0.9795	0.9787	0.8351	0.9316	0.8821	0.7613	0.9166
ite-har1-shr	0.9305	0.9452	0.9240	0.9301	0.9324	0.7939	0.8750	0.8335	0.7123	0.8689
ite-har1-struc	0.9826	0.9827	0.9576	0.9582	0.9702	0.8296	0.9058	0.8668	0.7419	0.9041
ite-har1-wls	0.9428	0.9523	0.9324	0.9346	0.9405	0.8028	0.8818	0.8414	0.7204	0.8770
ite-ols-ols	<b>1.2156</b>	<b>1.1122</b>	<b>1.0452</b>	<b>1.0300</b>	<b>1.0984</b>	<b>1.0087</b>	0.9962	<b>1.0024</b>	0.858	<b>1.0330</b>
ite-ols-shr	<b>1.1518</b>	<b>1.0704</b>	0.9897	0.9751	<b>1.0444</b>	0.9589	0.9320	0.9454	0.7990	0.9770
ite-ols-struc	<b>1.1940</b>	<b>1.0989</b>	<b>1.0203</b>	<b>1.0044</b>	<b>1.0768</b>	0.9860	0.9627	0.9743	0.8270	<b>1.0078</b>
ite-ols-wls	<b>1.1593</b>	<b>1.0771</b>	<b>1.0004</b>	0.9847	<b>1.0531</b>	0.9646	0.9421	0.9533	0.8083	0.9856
ite-sar1-ols	0.9788	0.9832	0.9727	0.9763	0.9778	0.8369	0.9307	0.8825	0.7610	0.9162
ite-sar1-shr	0.9256	0.9424	<b>0.9223</b>	<b>0.9274</b>	0.9294	0.7936	<b>0.8738</b>	0.8327	0.7114	0.8669
ite-sar1-struc	0.9819	0.9802	0.9568	0.9560	0.9686	0.8307	0.9054	0.8672	0.7417	0.9034
ite-sar1-wls	0.9409	0.9500	0.9312	0.9324	0.9386	0.803	0.8807	0.8409	0.7195	0.8757
ite-shr-ols	0.9825	0.9866	0.9832	0.9846	0.9842	0.8367	0.9369	0.8854	0.7650	0.9211
ite-shr-shr	0.9277	0.9340	0.9234	0.9340	0.9298	0.7864	0.8741	<b>0.8291</b>	<b>0.709</b>	0.8656
ite-shr-struc	0.9825	0.9789	0.9637	0.9645	0.9724	0.8262	0.9096	0.8669	0.7415	0.9052
ite-shr-wls	0.9329	0.9405	0.9333	0.9380	0.9362	0.7915	0.8813	0.8352	0.7154	0.8720
ite-strar1-ols	<b>1.0736</b>	<b>1.0310</b>	0.9969	0.9946	<b>1.0235</b>	0.9021	0.9524	0.9269	0.7954	0.9597
ite-strar1-shr	<b>1.0230</b>	0.9967	0.9489	0.9467	0.9783	0.8635	0.8966	0.8799	0.7471	0.9132
ite-strar1-struc	<b>1.0668</b>	<b>1.0255</b>	0.9776	0.9729	<b>1.0100</b>	0.8908	0.9245	0.9075	0.7726	0.9428
ite-strar1-wls	<b>1.0362</b>	<b>1.0045</b>	0.9588	0.9547	0.9879	0.8722	0.9056	0.8888	0.7565	0.9227
ite-struc-ols	<b>1.0727</b>	<b>1.0323</b>	0.9980	0.9940	<b>1.0238</b>	0.9024	0.9526	0.9272	0.7957	0.9600
ite-struc-shr	<b>1.0220</b>	0.9975	0.9493	0.9462	0.9782	0.8635	0.8966	0.8799	0.7471	0.9132
ite-struc-wls	<b>1.0664</b>	<b>1.0268</b>	0.9786	0.9726	<b>1.0104</b>	0.8912	0.9249	0.9079	0.7731	0.9432
ite-wlsh-ols	<b>1.0357</b>	<b>1.0060</b>	0.9594	0.9544	0.9883	0.8728	0.9059	0.8892	0.757	0.9231
ite-wlsh-shr	0.9774	0.9856	0.9727	0.9793	0.9787	0.8348	0.9317	0.8819	0.7612	0.9165
ite-wlsh-struc	0.9302	0.9448	0.9242	0.9301	0.9323	0.7934	0.8751	0.8333	0.7122	0.8688
ite-wlsh-wls	0.9828	0.9829	0.958	0.9585	0.9705	0.8295	0.9062	0.8670	0.7422	0.9044
ite-wlsv-ols	0.943	0.9528	0.9328	0.9349	0.9408	0.803	0.8821	0.8417	0.7207	0.8773
ite-wlsv-shr	0.9789	0.9832	0.9731	0.9761	0.9778	0.8367	0.9307	0.8825	0.7610	0.9162
ite-wlsv-wls	0.9253	0.9420	0.9224	0.9274	0.9292	0.7932	0.8739	0.8326	0.7114	0.8668
ite-wlsv-struc	0.9823	0.9804	0.9572	0.9561	0.9689	0.8307	0.9057	0.8674	0.7420	0.9036
ite-wlsv-wls	0.9411	0.9506	0.9316	0.9326	0.9390	0.8032	0.8811	0.8412	0.7198	0.8760

Tabella B.6: AvgRelMSE per tutte le 95 serie a qualsiasi ordine di aggregazione  $k$  e orizzonte di previsione.

Procedure	Quarterly					Semi-annual			Annual	All	
	all	1	2	3	4	1-4	1	2	1-2	1	all
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
kah-struc-shr	<b>1.1165</b>	<b>1.0235</b>	0.9827	0.9675	<b>1.021</b>	0.8968	0.9212	0.9090	0.7820	0.9507	
kah-struc-wls	<b>1.1282</b>	<b>1.0314</b>	0.9894	0.9738	<b>1.029</b>	0.9065	0.9284	0.9174	0.7909	0.9591	
kah-wlsh-shr	0.9586	0.9696	0.9727	0.9639	0.9662	0.8101	0.9139	0.8605	0.7538	0.9021	
kah-wlsh-wls	0.9607	0.9721	0.9749	0.9662	0.9684	0.8135	0.9168	0.8636	0.7578	0.9050	
kah-wlsv-shr	0.9684	0.9697	0.9596	<b>0.9603</b>	0.9645	0.8175	<b>0.9085</b>	0.8618	0.7518	0.9013	
kah-wlsv-wls	0.9717	0.9725	0.9623	0.9627	0.9673	0.8211	0.9113	0.8650	0.7557	0.9044	
tcs-acov-ols	<b>1.2022</b>	<b>1.1597</b>	<b>1.1356</b>	<b>1.1189</b>	<b>1.1537</b>	0.9763	<b>1.0734</b>	<b>1.0237</b>	0.9082	<b>1.0775</b>	
tcs-acov-shr	0.9453	<b>0.9583</b>	0.9710	0.9626	0.9592	0.7977	0.9117	0.8528	0.7481	0.8952	
tcs-acov-struc	<b>1.1845</b>	<b>1.1243</b>	<b>1.0953</b>	<b>1.0755</b>	<b>1.1192</b>	0.9455	<b>1.0205</b>	0.9823	0.8522	<b>1.0371</b>	
tcs-acov-wls	0.9470	0.9613	0.9729	0.9657	0.9617	0.8010	0.9150	0.8561	0.7524	0.8982	
tcs-bu-ols	<b>1.2189</b>	<b>1.1663</b>	<b>1.1631</b>	<b>1.1510</b>	<b>1.1745</b>	<b>1.0049</b>	<b>1.1145</b>	<b>1.0583</b>	0.9456	<b>1.1053</b>	
tcs-bu-shr	0.9640	0.9680	0.9694	0.9733	0.9687	0.8181	0.9226	0.8688	0.7659	0.9080	
tcs-bu-struc	<b>1.1911</b>	<b>1.1363</b>	<b>1.1248</b>	<b>1.1049</b>	<b>1.1388</b>	0.9726	<b>1.0607</b>	<b>1.0157</b>	0.8912	<b>1.0643</b>	
tcs-bu-wls	0.9635	0.9678	0.9693	0.9733	0.9685	0.8183	0.9223	0.8687	0.7662	0.9080	
tcs-har1-ols	<b>1.2027</b>	<b>1.1537</b>	<b>1.1345</b>	<b>1.1192</b>	<b>1.1521</b>	0.9793	<b>1.0755</b>	<b>1.0263</b>	0.9111	<b>1.0779</b>	
tcs-har1-shr	0.9578	0.9697	0.9730	0.9642	0.9661	0.8102	0.9143	0.8607	0.7540	0.9022	
tcs-har1-struc	<b>1.1805</b>	<b>1.1191</b>	<b>1.0949</b>	<b>1.0747</b>	<b>1.1166</b>	0.9468	<b>1.0220</b>	0.9837	0.8544	<b>1.0365</b>	
tcs-har1-wls	0.9597	0.9719	0.9750	0.9664	0.9682	0.8134	0.9170	0.8636	0.7578	0.9049	
tcs-ols-ols	<b>1.5246</b>	<b>1.2871</b>	<b>1.1918</b>	<b>1.1415</b>	<b>1.2782</b>	<b>1.1855</b>	<b>1.1172</b>	<b>1.1508</b>	<b>1.0041</b>	<b>1.1984</b>	
tcs-ols-shr	<b>1.2740</b>	<b>1.0994</b>	<b>1.0251</b>	0.9932	<b>1.0928</b>	0.9991	0.9545	0.9765	0.8323	<b>1.0178</b>	
tcs-ols-struc	<b>1.4737</b>	<b>1.2368</b>	<b>1.1364</b>	<b>1.0908</b>	<b>1.2260</b>	<b>1.1299</b>	<b>1.0528</b>	<b>1.0907</b>	0.9283	<b>1.1395</b>	
tcs-ols-wls	<b>1.2912</b>	<b>1.1114</b>	<b>1.0358</b>	<b>1.0026</b>	<b>1.1049</b>	<b>1.0135</b>	0.9654	0.9891	0.8455	<b>1.0303</b>	
tcs-sar1-ols	<b>1.2039</b>	<b>1.1488</b>	<b>1.1281</b>	<b>1.1134</b>	<b>1.1481</b>	0.9825	<b>1.0727</b>	<b>1.0266</b>	0.9106	<b>1.0757</b>	
tcs-sar1-shr	0.9684	0.9697	0.9597	0.9603	0.9645	0.8175	0.9086	0.8619	0.7518	0.9013	
tcs-sar1-struc	<b>1.1777</b>	<b>1.1163</b>	<b>1.0869</b>	<b>1.0692</b>	<b>1.1118</b>	0.9498	<b>1.0195</b>	0.9841	0.8538	<b>1.0339</b>	
tcs-sar1-wls	0.9715	0.9721	0.9622	0.9627	0.9671	0.8209	0.9113	0.8649	0.7555	0.9043	
tcs-shr-ols	<b>1.2507</b>	<b>1.2016</b>	<b>1.1786</b>	<b>1.1390</b>	<b>1.1918</b>	<b>1.0198</b>	<b>1.1035</b>	<b>1.0608</b>	0.9410	<b>1.1146</b>	
tcs-shr-shr	0.9592	0.9689	0.9854	0.9810	0.9736	0.8045	0.9261	0.8632	0.7579	0.9076	
tcs-shr-struc	<b>1.2234</b>	<b>1.166</b>	<b>1.1372</b>	<b>1.0969</b>	<b>1.1550</b>	0.9845	<b>1.0502</b>	<b>1.0168</b>	0.8810	<b>1.0714</b>	
tcs-shr-wls	0.9573	0.9688	0.9874	0.9818	0.9738	0.8044	0.9279	0.8640	0.7597	0.9082	
tcs-strar1-ols	<b>1.3234</b>	<b>1.1883</b>	<b>1.1344</b>	<b>1.1053</b>	<b>1.1850</b>	<b>1.0479</b>	<b>1.0689</b>	<b>1.0583</b>	0.9278	<b>1.1079</b>	
tcs-strar1-shr	<b>1.1161</b>	<b>1.0243</b>	0.9836	0.9679	<b>1.0214</b>	0.8972	0.9219	0.9095	0.7825	0.9512	
tcs-strar1-struc	<b>1.2906</b>	<b>1.1503</b>	<b>1.0885</b>	<b>1.0607</b>	<b>1.1442</b>	<b>1.009</b>	<b>1.0135</b>	<b>1.0113</b>	0.8676	<b>1.0617</b>	
tcs-strar1-wls	<b>1.1276</b>	<b>1.0318</b>	0.9900	0.9741	<b>1.0292</b>	0.9066	0.9288	0.9176	0.7911	0.9593	
tcs-struc-ols	<b>1.3229</b>	<b>1.1874</b>	<b>1.1342</b>	<b>1.1043</b>	<b>1.1843</b>	<b>1.0470</b>	<b>1.0683</b>	<b>1.0576</b>	0.9272	<b>1.1073</b>	
tcs-struc-struc	<b>1.2906</b>	<b>1.1497</b>	<b>1.0883</b>	<b>1.0600</b>	<b>1.1438</b>	<b>1.0086</b>	<b>1.0131</b>	<b>1.0108</b>	0.8674	<b>1.0613</b>	
tcs-wlsh-ols	<b>1.2026</b>	<b>1.1519</b>	<b>1.1338</b>	<b>1.1182</b>	<b>1.1512</b>	0.9777	<b>1.0746</b>	<b>1.0250</b>	0.9100	<b>1.0768</b>	
tcs-wlsh-struc	<b>1.1807</b>	<b>1.1182</b>	<b>1.0946</b>	<b>1.0744</b>	<b>1.1163</b>	0.9459	<b>1.0216</b>	0.9830	0.8541	<b>1.0361</b>	
tcs-wlsv-ols	<b>1.2036</b>	<b>1.1472</b>	<b>1.1275</b>	<b>1.1125</b>	<b>1.1472</b>	0.9810	<b>1.0719</b>	<b>1.0254</b>	0.9096	<b>1.0748</b>	
tcs-wlsv-struc	<b>1.1779</b>	<b>1.1154</b>	<b>1.0867</b>	<b>1.0688</b>	<b>1.1114</b>	0.9491	<b>1.0192</b>	0.9835	0.8535	<b>1.0335</b>	
ite-acov-ols	<b>1.2022</b>	<b>1.1597</b>	<b>1.1356</b>	<b>1.1189</b>	<b>1.1537</b>	0.9763	<b>1.0734</b>	<b>1.0237</b>	0.9082	<b>1.0775</b>	
ite-acov-shr	<b>0.9398</b>	0.9583	0.9709	0.9653	<b>0.9585</b>	<b>0.7957</b>	0.9127	<b>0.8522</b>	<b>0.7476</b>	<b>0.8945</b>	
ite-acov-struc	<b>1.1845</b>	<b>1.1243</b>	<b>1.0953</b>	<b>1.0755</b>	<b>1.1192</b>	0.9455	<b>1.0205</b>	0.9823	0.8522	<b>1.0371</b>	
ite-acov-wls	0.9459	0.9632	0.9734	0.9674	0.9624	0.8013	0.9163	0.8569	0.7528	0.8989	
ite-bu-ols	<b>1.2189</b>	<b>1.1663</b>	<b>1.1631</b>	<b>1.1510</b>	<b>1.1745</b>	<b>1.0049</b>	<b>1.1145</b>	<b>1.0583</b>	0.9456	<b>1.1053</b>	
ite-bu-shr	0.9583	0.9701	0.9757	0.9824	0.9716	0.8191	0.9356	0.8754	0.7757	0.9132	
ite-bu-struc	<b>1.1911</b>	<b>1.1363</b>	<b>1.1248</b>	<b>1.1049</b>	<b>1.1388</b>	0.9726	<b>1.0607</b>	<b>1.0157</b>	0.8912	<b>1.0643</b>	
ite-bu-wls	0.9619	0.9698	0.9730	0.9778	0.9706	0.8200	0.9293	0.8730	0.7735	0.9116	
ite-har1-ols	<b>1.2027</b>	<b>1.1537</b>	<b>1.1345</b>	<b>1.1192</b>	<b>1.1521</b>	0.9793	<b>1.0755</b>	<b>1.0263</b>	0.9111	<b>1.0779</b>	
ite-har1-shr	0.9504	0.9690	0.9727	0.9657	0.9644	0.8076	0.9151	0.8597	0.7535	0.9009	
ite-har1-struc	<b>1.1805</b>	<b>1.1191</b>	<b>1.0949</b>	<b>1.0747</b>	<b>1.1166</b>	0.9468	<b>1.0220</b>	0.9837	0.8544	<b>1.0365</b>	
ite-har1-wls	0.9565	0.9723	0.9754	0.9674	0.9679	0.8125	0.9182	0.8637	0.7582	0.9048	
ite-ols-ols	<b>1.5246</b>	<b>1.2871</b>	<b>1.1918</b>	<b>1.1415</b>	<b>1.2782</b>	<b>1.1855</b>	<b>1.1172</b>	<b>1.1508</b>	<b>1.0041</b>	<b>1.1984</b>	
ite-ols-shr	<b>1.286</b>	<b>1.1022</b>	<b>1.0254</b>	0.9913	<b>1.0956</b>	<b>1.0063</b>	0.9545	0.9801	0.8345	<b>1.0208</b>	
ite-ols-struc	<b>1.4737</b>	<b>1.2368</b>	<b>1.1364</b>	<b>1.0908</b>	<b>1.2260</b>	<b>1.1299</b>	<b>1.0528</b>	<b>1.0907</b>	0.9283	<b>1.1395</b>	
ite-ols-wls	<b>1.2947</b>	<b>1.1111</b>	<b>1.0353</b>	<b>1.0014</b>	<b>1.1051</b>	<b>1.0149</b>	0.9653	0.9898	0.8449	<b>1.0306</b>	
ite-sar1-ols	<b>1.2039</b>	<b>1.1488</b>	<b>1.1281</b>	<b>1.1134</b>	<b>1.1481</b>	0.9825	<b>1.0727</b>	<b>1.0266</b>	0.9106	<b>1.0757</b>	
ite-sar1-shr	0.9613	0.9683	0.9588	0.9605	0.9622	0.8151	0.9092	0.8609	0.7514	0.8997	
ite-sar1-struc	<b>1.1777</b>	<b>1.1163</b>	<b>1.0869</b>	<b>1.0692</b>	<b>1.1118</b>	0.9498	<b>1.0195</b>	0.9841	0.8538	<b>1.0339</b>	
ite-sar1-wls	0.9690	0.9715	0.9622	0.9631	0.9664	0.8202	0.9125	0.8651	0.7561	0.9041	
ite-shr-ols	<b>1.2507</b>	<b>1.2016</b>	<b>1.1786</b>	<b>1.1390</b>	<b>1.1918</b>	<b>1.0198</b>	<b>1.1035</b>	<b>1.0608</b>	0.9410	<b>1.1146</b>	
ite-shr-shr	0.9612	0.9747	0.9884	0.9834	0.9769	0.8088	0.9282	0.8664	0.7597	0.9107	
ite-shr-struc	<b>1.2234</b>	<b>1.1660</b>	<b>1.1372</b>	<b>1.0969</b>	<b>1.1550</b>	0.9845	<b>1.0502</b>	<b>1.0168</b>	0.8810	<b>1.0714</b>	
ite-shr-wls	0.9580	0.9738	0.9896	0.9832	0.9761	0.8074	0.9299	0.8665	0.7611	0.9105	
ite-strar1-ols	<b>1.3234</b>	<b>1.1883</b>	<b>1.1344</b>	<b>1.1053</b>	<b>1.1850</b>	<b>1.0479</b>	<b>1.0689</b>	<b>1.0583</b>	0.9278	<b>1.1079</b>	
ite-strar1-shr	<b>1.1178</b>	<b>1.0235</b>	0.9823	0.9666	<b>1.0209</b>	0.8980	0.9215	0.9097	0.7825	0.9510	
ite-strar1-struc	<b>1.2906</b>	<b>1.1503</b>	<b>1.0885</b>	<b>1.0607</b>	<b>1.1442</b>	<b>1.009</b>	<b>1.0135</b>	<b>1.0113</b>	0.8676	<b>1.0617</b>	
ite-strar1-wls	<b>1.1283</b>	<b>1.0306</b>	0.9891	0.9734	<b>1.0286</b>	0.9065	0.9289	0.9176	0.7911	0.9590	
ite-struc-ols	<b>1.3229</b>	<b>1.1874</b>	<b>1.1342</b>	<b>1.1043</b>	<b>1.1843</b>	<b>1.047</b>	<b>1.0683</b>	<b>1.0576</b>	0.9272	<b>1.1073</b>	
ite-struc-shr	<b>1.1178</b>	<b>1.0227</b>	0.9815	0.9661	<b>1.0204</b>	0.8975	0.9210	0.9091	0.7820	0.9505	
ite-struc-struc	<b>1.2906</b>	<b>1.1497</b>	<b>1.0883</b>	<b>1.0600</b>	<b>1.1438</b>	<b>1.0086</b>	<b>1.0131</b>	<b>1.0108</b>	0.8674	<b>1.0613</b>	
ite-struc-wls	<b>1.1289</b>	<b>1.0304</b>	0.9885	0.9730	<b>1.0284</b>	0.9065	0.9285	0.9174	0.7909	0.9588	
ite-wlsh-ols	<b>1.2026</b>	<b>1.1519</b>	<b>1.1338</b>	<b>1.1182</b>	<b>1.1512</b>	0.9777	<b>1.0746</b>	<b>1.0250</b>	0.9100	<b>1.0768</b>	
ite-wlsh-shr	0.9510	0.9686</									

Tabella B.7: AvgRelMAE per le 63 bts a qualsiasi ordine di aggregazione  $k$  e orizzonte di previsione.

Procedure	Quarterly bts					Semi-annual bts			Annual bts	All bts
	1	2	3	4	1-4	1	2	1-2	1	1
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
kah-struc-shr	<b>1.0858</b>	<b>1.0187</b>	<b>1.0046</b>	0.9918	<b>1.0246</b>	0.9603	0.9669	0.9636	0.8928	0.9872
kah-struc-wls	<b>1.092</b>	<b>1.0238</b>	<b>1.0082</b>	0.9957	<b>1.0293</b>	0.9665	0.9716	0.9690	0.8991	0.9923
kah-wlsh-shr	0.9833	0.9884	0.9960	0.9861	0.9884	0.9054	0.9598	0.9322	0.8717	0.9548
kah-wlsh-wls	0.9840	0.9895	0.9969	0.9882	0.9897	0.9072	0.9622	0.9343	0.8747	0.9565
kah-wlsv-shr	0.9930	0.9888	0.9875	0.9844	0.9884	0.9115	<b>0.9559</b>	0.9334	0.8703	0.9549
kah-wlsv-wls	0.9949	0.9906	0.9887	0.9863	0.9901	0.9137	0.9582	0.9357	0.8733	0.9569
tcs-acov-ols	<b>1.1773</b>	<b>1.1274</b>	<b>1.1123</b>	<b>1.0935</b>	<b>1.1272</b>	<b>1.0369</b>	<b>1.0682</b>	<b>1.0525</b>	0.9922	<b>1.0853</b>
tcs-acov-shr	0.9751	<b>0.9807</b>	0.9953	0.9859	<b>0.9842</b>	<b>0.8957</b>	0.9582	<b>0.9265</b>	0.8680	<b>0.9502</b>
tcs-acov-struc	<b>1.1558</b>	<b>1.0964</b>	<b>1.0830</b>	<b>1.0631</b>	<b>1.0991</b>	<b>1.0106</b>	<b>1.0329</b>	<b>1.0217</b>	0.9488	<b>1.0540</b>
tcs-acov-wls	0.9756	0.9820	0.9962	0.9886	0.9856	0.8972	0.9607	0.9284	0.8713	0.9520
tcs-bu-ols	<b>1.1922</b>	<b>1.1373</b>	<b>1.1313</b>	<b>1.1183</b>	<b>1.1444</b>	<b>1.0589</b>	<b>1.100</b>	<b>1.0792</b>	<b>1.0212</b>	<b>1.1072</b>
tcs-bu-shr	0.9934	0.9921	0.9939	0.9939	0.9933	0.9146	0.9657	0.9398	0.8814	0.9612
tcs-bu-struc	<b>1.1647</b>	<b>1.1111</b>	<b>1.1009</b>	<b>1.0842</b>	<b>1.1148</b>	<b>1.0333</b>	<b>1.0615</b>	<b>1.0473</b>	0.9774	<b>1.0747</b>
tcs-bu-wls	0.9918	0.9911	0.9935	0.9949	0.9928	0.9141	0.9663	0.9398	0.8816	0.9609
tcs-har1-ols	<b>1.1751</b>	<b>1.1244</b>	<b>1.1108</b>	<b>1.0933</b>	<b>1.1255</b>	<b>1.0387</b>	<b>1.0703</b>	<b>1.0544</b>	0.9942	<b>1.0853</b>
tcs-har1-shr	0.9827	0.9886	0.9961	0.9862	0.9884	0.9056	0.9600	0.9324	0.8718	0.9548
tcs-har1-struc	<b>1.1501</b>	<b>1.0937</b>	<b>1.0816</b>	<b>1.0630</b>	<b>1.0966</b>	<b>1.0104</b>	<b>1.0348</b>	<b>1.0225</b>	0.9500	<b>1.0531</b>
tcs-har1-wls	0.9833	0.9897	0.9970	0.9884	0.9896	0.9074	0.9624	0.9345	0.8749	0.9565
tcs-ols-ols	<b>1.3301</b>	<b>1.1831</b>	<b>1.1399</b>	<b>1.0992</b>	<b>1.1850</b>	<b>1.1405</b>	<b>1.0880</b>	<b>1.1139</b>	<b>1.0419</b>	<b>1.1430</b>
tcs-ols-shr	<b>1.1678</b>	<b>1.0611</b>	<b>1.0312</b>	<b>1.0070</b>	<b>1.0650</b>	<b>1.0194</b>	0.9877	<b>1.0034</b>	0.9239	<b>1.0260</b>
tcs-ols-struc	<b>1.2967</b>	<b>1.1489</b>	<b>1.1052</b>	<b>1.0676</b>	<b>1.1514</b>	<b>1.1045</b>	<b>1.049</b>	<b>1.0764</b>	0.9922	<b>1.1057</b>
tcs-ols-wls	<b>1.1774</b>	<b>1.0673</b>	<b>1.0362</b>	<b>1.0124</b>	<b>1.0716</b>	<b>1.0273</b>	0.9938	<b>1.0104</b>	0.9322	<b>1.0330</b>
tcs-sar1-ols	<b>1.1759</b>	<b>1.1220</b>	<b>1.1060</b>	<b>1.0914</b>	<b>1.1234</b>	<b>1.0402</b>	<b>1.0684</b>	<b>1.0542</b>	0.9939	<b>1.0840</b>
tcs-sar1-shr	0.9930	0.9891	0.9875	0.9844	0.9885	0.9117	0.9559	0.9335	0.8704	0.9550
tcs-sar1-struc	<b>1.1516</b>	<b>1.0929</b>	<b>1.0761</b>	<b>1.0605</b>	<b>1.0947</b>	<b>1.0123</b>	<b>1.0330</b>	<b>1.0226</b>	0.9497	<b>1.0520</b>
tcs-sar1-wls	0.9947	0.9908	0.9886	0.9863	0.9901	0.9138	0.9582	0.9357	0.8733	0.9569
tcs-shr-ols	<b>1.2098</b>	<b>1.1593</b>	<b>1.1377</b>	<b>1.1055</b>	<b>1.1525</b>	<b>1.0714</b>	<b>1.0884</b>	<b>1.0799</b>	<b>1.0161</b>	<b>1.1111</b>
tcs-shr-shr	0.9854	0.9883	0.9915	0.9954	0.9926	0.9015	0.9664	0.9334	0.8720	0.9574
tcs-shr-struc	<b>1.1808</b>	<b>1.1267</b>	<b>1.1050</b>	<b>1.0757</b>	<b>1.1214</b>	<b>1.0403</b>	<b>1.0513</b>	<b>1.0458</b>	0.9676	<b>1.0763</b>
tcs-shr-wls	0.9828	0.9867	0.9921	0.9965	0.9920	0.9007	0.9683	0.9339	0.8741	0.9576
tcs-strar1-ols	<b>1.2352</b>	<b>1.1351</b>	<b>1.1060</b>	<b>1.0815</b>	<b>1.1380</b>	<b>1.0681</b>	<b>1.0623</b>	<b>1.0652</b>	0.9987	<b>1.0961</b>
tcs-strar1-shr	<b>1.0852</b>	<b>1.0195</b>	<b>1.0055</b>	0.9920	<b>1.0250</b>	0.9606	0.9674	0.9640	0.8934	0.9876
tcs-strar1-struc	<b>1.2088</b>	<b>1.1065</b>	<b>1.0768</b>	<b>1.0526</b>	<b>1.1096</b>	<b>1.0406</b>	<b>1.0279</b>	<b>1.0342</b>	0.9566	<b>1.0647</b>
tcs-strar1-wls	<b>1.0916</b>	<b>1.0245</b>	<b>1.0089</b>	0.9959	<b>1.0296</b>	0.9668	0.9720	0.9694	0.8994	0.9927
tcs-struc-ols	<b>1.2344</b>	<b>1.1341</b>	<b>1.1058</b>	<b>1.0811</b>	<b>1.1374</b>	<b>1.0672</b>	<b>1.0619</b>	<b>1.0645</b>	0.9983	<b>1.0955</b>
tcs-struc-shr	<b>1.2084</b>	<b>1.1061</b>	<b>1.0763</b>	<b>1.0521</b>	<b>1.1092</b>	<b>1.0398</b>	<b>1.0277</b>	<b>1.0337</b>	0.9565	<b>1.0643</b>
tcs-wlsh-ols	<b>1.1747</b>	<b>1.1229</b>	<b>1.1101</b>	<b>1.0928</b>	<b>1.1247</b>	<b>1.0370</b>	<b>1.0696</b>	<b>1.0532</b>	0.9934	<b>1.0844</b>
tcs-wlsh-struc	<b>1.1500</b>	<b>1.0931</b>	<b>1.0812</b>	<b>1.0627</b>	<b>1.0963</b>	<b>1.0097</b>	<b>1.0344</b>	<b>1.0220</b>	0.9499	<b>1.0527</b>
tcs-wlsh-wls	<b>1.1752</b>	<b>1.1203</b>	<b>1.1054</b>	<b>1.0909</b>	<b>1.1225</b>	<b>1.0384</b>	<b>1.0679</b>	<b>1.0530</b>	0.9931	<b>1.0831</b>
tcs-wlsv-struc	<b>1.1512</b>	<b>1.0921</b>	<b>1.0759</b>	<b>1.0602</b>	<b>1.0943</b>	<b>1.0118</b>	<b>1.0328</b>	<b>1.0222</b>	0.9495	<b>1.0517</b>
ite-acov-ols	<b>1.1773</b>	<b>1.1274</b>	<b>1.1123</b>	<b>1.0935</b>	<b>1.1272</b>	<b>1.0369</b>	<b>1.0682</b>	<b>1.0525</b>	0.9922	<b>1.0853</b>
ite-acov-shr	<b>0.9746</b>	0.9819	0.9963	0.9878	0.9851	0.8965	0.9597	0.9276	<b>0.8677</b>	0.9509
ite-acov-struc	<b>1.1558</b>	<b>1.0964</b>	<b>1.0830</b>	<b>1.0631</b>	<b>1.0991</b>	<b>1.0106</b>	<b>1.0329</b>	<b>1.0217</b>	0.9488	<b>1.0540</b>
ite-acov-wls	0.9758	0.9839	0.9972	0.9905	0.9868	0.8980	0.9620	0.9295	0.8715	0.9530
ite-bu-ols	<b>1.1922</b>	<b>1.1373</b>	<b>1.1313</b>	<b>1.1183</b>	<b>1.1444</b>	<b>1.0589</b>	<b>1.100</b>	<b>1.0792</b>	<b>1.0212</b>	<b>1.1072</b>
ite-bu-shr	0.9917	0.9953	0.9963	0.9918	0.9972	0.9175	0.9763	0.9464	0.8922	0.9669
ite-bu-struc	<b>1.1647</b>	<b>1.1111</b>	<b>1.1009</b>	<b>1.0842</b>	<b>1.1148</b>	<b>1.0333</b>	<b>1.0615</b>	<b>1.0473</b>	0.9774	<b>1.0747</b>
ite-bu-wls	0.9913	0.9936	0.9971	0.9996	0.9954	0.9162	0.9721	0.9438	0.8885	0.9646
ite-har1-ols	<b>1.1751</b>	<b>1.1244</b>	<b>1.1108</b>	<b>1.0933</b>	<b>1.1255</b>	<b>1.0387</b>	<b>1.0703</b>	<b>1.0544</b>	0.9942	<b>1.0853</b>
ite-har1-shr	0.9794	0.9880	0.9967	0.9874	0.9878	0.9053	0.9610	0.9327	0.8715	0.9545
ite-har1-struc	<b>1.1501</b>	<b>1.0937</b>	<b>1.0816</b>	<b>1.0630</b>	<b>1.0966</b>	<b>1.0104</b>	<b>1.0348</b>	<b>1.0225</b>	0.9500	<b>1.0531</b>
ite-har1-wls	0.9806	0.9901	0.9978	0.9898	0.9896	0.9070	0.9633	0.9348	0.8749	0.9566
ite-ols-ols	<b>1.3301</b>	<b>1.1831</b>	<b>1.1399</b>	<b>1.0992</b>	<b>1.1850</b>	<b>1.1405</b>	<b>1.0880</b>	<b>1.1139</b>	<b>1.0419</b>	<b>1.1430</b>
ite-ols-shr	<b>1.1712</b>	<b>1.0600</b>	<b>1.0301</b>	<b>1.0057</b>	<b>1.0649</b>	<b>1.0218</b>	0.9868	<b>1.0041</b>	0.9234	<b>1.0261</b>
ite-ols-struc	<b>1.2967</b>	<b>1.1489</b>	<b>1.1052</b>	<b>1.0676</b>	<b>1.1514</b>	<b>1.1045</b>	<b>1.049</b>	<b>1.0764</b>	0.9922	<b>1.1057</b>
ite-ols-wls	<b>1.1782</b>	<b>1.0661</b>	<b>1.0356</b>	<b>1.0120</b>	<b>1.0711</b>	<b>1.0279</b>	0.9937	<b>1.0107</b>	0.9307	<b>1.0326</b>
ite-sar1-ols	<b>1.1759</b>	<b>1.1220</b>	<b>1.1060</b>	<b>1.0914</b>	<b>1.1234</b>	<b>1.0402</b>	<b>1.0684</b>	<b>1.0542</b>	0.9939	<b>1.0840</b>
ite-sar1-shr	0.9897	0.9879	<b>0.9869</b>	0.9844	0.9872	0.9109	0.9569	0.9336	0.8700	0.9542
ite-sar1-struc	<b>1.1516</b>	<b>1.0929</b>	<b>1.0761</b>	<b>1.0605</b>	<b>1.0947</b>	<b>1.0123</b>	<b>1.0330</b>	<b>1.0226</b>	0.9497	<b>1.0520</b>
ite-sar1-wls	0.9927	0.9903	0.9887	0.9870	0.9897	0.9134	0.9591	0.9360	0.8733	0.9568
ite-shr-ols	<b>1.2098</b>	<b>1.1593</b>	<b>1.1377</b>	<b>1.1055</b>	<b>1.1525</b>	<b>1.0714</b>	<b>1.0884</b>	<b>1.0799</b>	<b>1.0161</b>	<b>1.1111</b>
ite-shr-shr	0.9895	0.9931	0.9957	0.9976	0.9965	0.9075	0.9691	0.9378	0.8735	0.9611
ite-shr-struc	<b>1.1808</b>	<b>1.1267</b>	<b>1.1050</b>	<b>1.0757</b>	<b>1.1214</b>	<b>1.0403</b>	<b>1.0513</b>	<b>1.0458</b>	0.9676	<b>1.0763</b>
ite-shr-wls	0.9831	0.9915	0.9949	0.9980	0.9943	0.9036	0.9700	0.9362	0.8746	0.9596
ite-strar1-ols	<b>1.2352</b>	<b>1.1351</b>	<b>1.1060</b>	<b>1.0815</b>	<b>1.1380</b>	<b>1.0681</b>	<b>1.0623</b>	<b>1.0652</b>	0.9987	<b>1.0961</b>
ite-strar1-shr	<b>1.0854</b>	<b>1.0180</b>	<b>1.0047</b>	0.9915	<b>1.0243</b>	0.9607	0.9676	0.9641	0.8934	0.9872
ite-strar1-struc	<b>1.2088</b>	<b>1.1065</b>	<b>1.0768</b>	<b>1.0526</b>	<b>1.1096</b>	<b>1.0406</b>	<b>1.0279</b>	<b>1.0342</b>	0.9566	<b>1.0647</b>
ite-strar1-wls	<b>1.0919</b>	<b>1.0236</b>	<b>1.0085</b>	0.9957	<b>1.0293</b>	0.9667	0.9723	0.9695	0.8994	0.9925
ite-struc-ols	<b>1.2344</b>	<b>1.1341</b>	<b>1.1058</b>	<b>1.0811</b>	<b>1.1374</b>	<b>1.0672</b>	<b>1.0619</b>	<b>1.0645</b>	0.9983	<b>1.0955</b>
ite-struc-shr	<b>1.0856</b>	<b>1.0172</b>	<b>1.0038</b>	0.9913	<b>1.0239</b>	0.9603	0.9671	0.9637	0.8928	0.9868
ite-struc-struc	<b>1.2084</b>	<b>1.1061</b>	<b>1.0763</b>	<b>1.0521</b>	<b>1.1092</b>	<b>1.0398</b>	<b>1.0277</b>	<b>1.0337</b>	0.9565	<b>1.0643</b>
ite-struc-wls	<b>1.0923</b>	<b>1.0228</b>	<b>1.0078</b>	0.9955	<b>1.029</b>	0.9664	0.9719	0.9692	0.8991	0.9922
ite-wlsh-ols	<b>1.1747</b>	<b>1.1229</b>	<b>1.1101</b>	<b>1.0928</b>	<b>1.1247</b>	<b>1.037</b>	<b>1.0696</b>	<b>1.0532</b>	0.9934	<b>1.0844</b>
ite-wlsh-shr	0.9801	0.9877	0.9966	0.9872	0.9879	0.9051	0.9607	0.9325	0.8713	0.9544
ite-wlsh-struc	<b>1.1500</b>	<b>1.0931</b>	<b>1.0812</b>	<b>1.0627</b>	<b>1.0963</b>	<b>1.0097</b>	<b>1.0344</b>	<b>1.0220</b>	0.9499	<b>1.0527</b>
ite-wlsh-wls	0.9815	0.9899	0.9979	0.9897	0.9897	0.9069	0.9632	0.9346	0.8747	0.9566
ite-wlsv-ols	<b>1.1752</b>	<b>1.1203</b>	<b>1.1054</b>	<b>1.0909</b>	<b>1.1225</b>	<b>1.0384</b>	<b>1.0679</b>	<b>1.053</b>	0.9931	<b>1.0831</b>
ite-wlsv-shr	0.9898	0.9874	0.9869	<b>0.9844</b>	0.9871	0.9106	0.9568	0.9334	0.8699	0.9541
ite-wlsv-struc	<b>1.1512</b>	<b>1.0921</b>	<b>1.0759</b>	<b>1.0602</b>	<b>1.0943</b>	<b>1.0118</b>	<b>1.0328</b>	<b>1.0222</b>	0.9495	<b>1.0517</b>
ite-wlsv-wls	0.9929	0.9901	0.9888	0.9870	0.9897	0.9133	0.9591	0.9360	0.8732	0.9568

Tabella B.8: AvgRelMAE per le 32 uts a qualsiasi ordine di aggregazione  $k$  e orizzonte di previsione.

Procedure	Quarterly bts					Semi-annual bts			Annual bts	All bts
	1	2	3	4	1-4	1	2	1-2	1	1
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
kah-struc-shr	0.9972	0.9988	0.9846	0.9842	0.9912	0.9266	0.9447	0.9356	0.8599	0.9554
kah-struc-wls	<b>1.0058</b>	<b>1.0070</b>	0.9925	0.9938	0.9998	0.9351	0.9555	0.9452	0.8718	0.9648
kah-wlsh-shr	0.9584	0.9711	0.9655	0.9697	0.9662	0.8909	0.9271	0.9088	0.8322	0.9294
kah-wlsh-wls	0.9644	0.9777	0.9727	0.9775	0.9731	0.8969	0.9356	0.9160	0.8418	0.9368
kah-wlsv-shr	0.9538	0.9713	0.9646	0.9685	0.9645	0.8912	0.9265	0.9087	0.8319	0.9284
kah-wlsv-wls	0.9610	0.9780	0.9724	0.9763	0.9719	0.8975	0.9347	0.9160	0.8414	0.9361
tcs-acov-ols	0.9798	0.9938	0.9886	0.9891	0.9878	0.9113	0.9531	0.9319	0.8571	0.9520
tcs-acov-shr	0.9595	0.9679	0.9655	0.9700	0.9657	0.8895	0.9269	0.9080	0.8314	0.9288
tcs-acov-struc	0.9850	0.9926	0.9848	0.9888	0.9878	0.9113	0.9482	0.9296	0.8524	0.9506
tcs-acov-wls	0.9656	0.9752	0.9729	0.9782	0.9730	0.8956	0.9356	0.9154	0.8409	0.9364
tcs-bu-ols	0.9820	0.9878	0.9875	0.9852	0.9856	0.9104	0.9522	0.9311	0.8570	0.9505
tcs-bu-shr	0.9541	<b>0.9618</b>	0.9611	<b>0.9640</b>	0.9603	<b>0.8834</b>	0.9226	0.9028	0.8257	0.9233
tcs-bu-struc	0.9821	0.9876	0.9840	0.9849	0.9846	0.9082	0.9465	0.9271	0.8491	0.9476
tcs-bu-wls	0.9588	0.9682	0.9677	0.9704	0.9663	0.8887	0.9297	0.9090	0.8334	0.9297
tcs-har1-ols	0.9806	0.9937	0.9884	0.9892	0.9880	0.9125	0.9537	0.9329	0.8578	0.9525
tcs-har1-shr	0.9584	0.9710	0.9652	0.9696	0.9661	0.8910	0.9270	0.9088	0.8321	0.9293
tcs-har1-struc	0.9816	0.9930	0.9844	0.9882	0.9868	0.9122	0.9482	0.9300	0.853	0.9502
tcs-har1-wls	0.9643	0.9773	0.9724	0.9773	0.9728	0.8969	0.9351	0.9158	0.8414	0.9366
tcs-ols-ols	<b>1.0857</b>	<b>1.0534</b>	<b>1.0331</b>	<b>1.0249</b>	<b>1.0491</b>	<b>1.0027</b>	0.9971	0.9999	0.9226	<b>1.0159</b>
tcs-ols-shr	<b>1.0498</b>	<b>1.0321</b>	<b>1.0073</b>	<b>1.0025</b>	<b>1.0227</b>	0.9725	0.9664	0.9695	0.8934	0.9880
tcs-ols-struc	<b>1.0772</b>	<b>1.0535</b>	<b>1.0276</b>	<b>1.0205</b>	<b>1.0445</b>	0.9935	0.9912	0.9923	0.9169	<b>1.0103</b>
tcs-ols-wls	<b>1.0616</b>	<b>1.0427</b>	<b>1.0171</b>	<b>1.0137</b>	<b>1.0336</b>	0.9827	0.9791	0.9809	0.9067	0.9994
tcs-sar1-ols	0.9793	0.9913	0.9877	0.9875	0.9864	0.9129	0.9529	0.9327	0.8576	0.9516
tcs-sar1-shr	0.9539	0.9711	0.9643	0.9684	0.9644	0.8913	0.9263	0.9086	0.8318	0.9283
tcs-sar1-struc	0.9790	0.9928	0.9840	0.9873	0.9858	0.9119	0.9483	0.9299	0.8529	0.9496
tcs-sar1-wls	0.9610	0.9776	0.9720	0.9760	0.9716	0.8975	0.9344	0.9157	0.8410	0.9358
tcs-shr-ols	0.9926	0.9919	0.9878	0.9907	0.9907	0.9134	0.9526	0.9328	0.8569	0.9538
tcs-shr-shr	0.9617	0.9623	0.9588	0.9699	0.9632	0.8836	0.9240	0.9036	0.8249	0.9250
tcs-shr-struc	0.9913	0.9900	0.9837	0.9911	0.9890	0.9101	0.9486	0.9291	0.8487	0.9505
tcs-shr-wls	0.9638	0.9688	0.9676	0.9775	0.9694	0.8882	0.9327	0.9102	0.8331	0.9317
tcs-strar1-ols	<b>1.0214</b>	<b>1.0151</b>	<b>1.0039</b>	<b>1.0034</b>	<b>1.0109</b>	0.9469	0.9693	0.958	0.8837	0.9766
tcs-strar1-shr	0.9975	0.9983	0.9843	0.9844	0.9911	0.9267	0.9446	0.9356	0.8598	0.9553
tcs-strar1-struc	<b>1.0173</b>	<b>1.0161</b>	<b>1.0006</b>	<b>1.0003</b>	<b>1.0085</b>	0.9431	0.9647	0.9538	0.8793	0.9733
tcs-strar1-wls	<b>1.0060</b>	<b>1.0062</b>	0.9919	0.9939	0.9995	0.9350	0.9551	0.945	0.8714	0.9645
tcs-struc-ols	<b>1.0209</b>	<b>1.0163</b>	<b>1.0046</b>	<b>1.0032</b>	<b>1.0112</b>	0.9473	0.9697	0.9584	0.8841	0.9769
tcs-struc-struc	<b>1.0170</b>	<b>1.0171</b>	<b>1.0013</b>	<b>1.0003</b>	<b>1.0089</b>	0.9433	0.9651	0.9541	0.8800	0.9737
tcs-struc-wls	0.9805	0.9940	0.9888	0.9893	0.9881	0.9124	0.9541	0.9330	0.8581	0.9527
tcs-wlsh-struc	0.9817	0.9934	0.9848	0.9885	0.9871	0.9121	0.9487	0.9302	0.8534	0.9505
tcs-wlsv-ols	0.9792	0.9918	0.9881	0.9875	0.9866	0.9103	0.9532	0.9329	0.8579	0.9518
tcs-wlsv-struc	0.9790	0.9930	0.9845	0.9874	0.9860	0.9118	0.9488	0.9301	0.8533	0.9499
ite-acov-ols	0.9798	0.9938	0.9886	0.9891	0.9878	0.9113	0.9531	0.9319	0.8571	0.9520
ite-acov-shr	0.9528	0.9674	0.9627	0.9684	0.9628	0.8879	0.9257	0.9066	0.8297	0.9265
ite-acov-struc	0.9850	0.9926	0.9848	0.9888	0.9878	0.9113	0.9482	0.9296	0.8524	0.9506
ite-acov-wls	0.9640	0.9750	0.9720	0.9778	0.9722	0.8950	0.9349	0.9147	0.8399	0.9357
ite-bu-ols	0.9820	0.9878	0.9875	0.9852	0.9856	0.9104	0.9522	0.9311	0.857	0.9505
ite-bu-shr	0.9484	0.9628	0.9595	0.9652	<b>0.9590</b>	0.8844	0.9234	0.9037	0.8259	<b>0.9229</b>
ite-bu-struc	0.9821	0.9876	0.9840	0.9849	0.9846	0.9082	0.9465	0.9271	0.8491	0.9476
ite-bu-wls	0.9562	0.9673	0.9664	0.9692	0.9648	0.8875	0.9283	0.9077	0.8323	0.9283
ite-har1-ols	0.9806	0.9937	0.9884	0.9892	0.9880	0.9125	0.9537	0.9329	0.8578	0.9525
ite-har1-shr	0.9517	0.9712	0.9624	0.9681	0.9633	0.8901	0.9257	0.9078	0.8305	0.9273
ite-har1-struc	0.9816	0.9930	0.9844	0.9882	0.9868	0.9122	0.9482	0.9300	0.853	0.9502
ite-har1-wls	0.9621	0.9770	0.9714	0.9768	0.9718	0.8965	0.9345	0.9153	0.8405	0.9357
ite-ols-ols	<b>1.0857</b>	<b>1.0534</b>	<b>1.0331</b>	<b>1.0249</b>	<b>1.0491</b>	<b>1.0027</b>	0.9971	0.9999	0.9226	<b>1.0159</b>
ite-ols-shr	<b>1.0534</b>	<b>1.0362</b>	<b>1.0083</b>	<b>1.0026</b>	<b>1.0249</b>	0.9781	0.9685	0.9733	0.8972	0.9909
ite-ols-struc	<b>1.0772</b>	<b>1.0535</b>	<b>1.0276</b>	<b>1.0205</b>	<b>1.0445</b>	0.9935	0.9912	0.9923	0.9169	<b>1.0103</b>
ite-ols-wls	<b>1.0629</b>	<b>1.0435</b>	<b>1.0175</b>	<b>1.0135</b>	<b>1.0342</b>	0.9851	0.9803	0.9827	0.9084	<b>1.0005</b>
ite-sar1-ols	0.9793	0.9913	0.9877	0.9875	0.9864	0.9129	0.9529	0.9327	0.8576	0.9516
ite-sar1-shr	0.9469	0.9704	0.9611	0.9665	0.9612	0.8901	0.9246	0.9072	0.8300	0.9258
ite-sar1-struc	0.9790	0.9928	0.9840	0.9873	0.9858	0.9119	0.9483	0.9299	0.8529	0.9496
ite-sar1-wls	0.9589	0.9770	0.9708	0.9750	0.9704	0.8970	0.9335	0.9151	0.8400	0.9348
ite-shr-ols	0.9926	0.9919	0.9878	0.9907	0.9907	0.9134	0.9526	0.9328	0.8569	0.9538
ite-shr-shr	0.9585	0.9624	<b>0.9562</b>	0.9684	0.9614	0.8838	<b>0.9221</b>	<b>0.9028</b>	<b>0.8229</b>	0.9235
ite-shr-struc	0.9913	0.9900	0.9837	0.9911	0.9890	0.9101	0.9486	0.9291	0.8487	0.9505
ite-shr-wls	0.9615	0.9690	0.9657	0.9772	0.9683	0.8874	0.9319	0.9094	0.8314	0.9306
ite-strar1-ols	<b>1.0214</b>	<b>1.0151</b>	<b>1.0039</b>	<b>1.0034</b>	<b>1.0109</b>	0.9469	0.9693	0.9580	0.8837	0.9766
ite-strar1-shr	0.9946	0.9986	0.9823	0.9829	0.9896	0.9270	0.9441	0.9355	0.8598	0.9545
ite-strar1-struc	<b>1.0173</b>	<b>1.0161</b>	<b>1.0006</b>	<b>1.0003</b>	<b>1.0085</b>	0.9431	0.9647	0.9538	0.8793	0.9733
ite-strar1-wls	<b>1.0055</b>	<b>1.0056</b>	0.9915	0.9932	0.9990	0.9352	0.9550	0.9451	0.8714	0.9642
ite-struc-ols	<b>1.0209</b>	<b>1.0163</b>	<b>1.0046</b>	<b>1.0032</b>	<b>1.0112</b>	0.9473	0.9697	0.9584	0.8841	0.9769
ite-struc-shr	0.9941	0.999	0.9829	0.9827	0.9896	0.9267	0.9442	0.9354	0.8599	0.9545
ite-struc-struc	<b>1.0170</b>	<b>1.0171</b>	<b>1.0013</b>	<b>1.0003</b>	<b>1.0089</b>	0.9433	0.9651	0.9541	0.8800	0.9737
ite-struc-wls	<b>1.0054</b>	<b>1.0065</b>	0.9922	0.9932	0.9993	0.9353	0.9554	0.9453	0.8718	0.9646
ite-wlsh-ols	0.9805	0.9940	0.9888	0.9893	0.9881	0.9124	0.9541	0.9330	0.8581	0.9527
ite-wlsh-shr	0.9515	0.9709	0.9627	0.9681	0.9633	0.8897	0.9258	0.9076	0.8304	0.9272
ite-wlsh-struc	0.9817	0.9934	0.9848	0.9885	0.9871	0.9121	0.9487	0.9302	0.8534	0.9505
ite-wlsh-wls	0.9621	0.9773	0.9717	0.9770	0.9720	0.8964	0.9349	0.9155	0.8409	0.9350
ite-wlsv-ols	0.9792	0.9918	0.9881	0.9875	0.9866	0.9130	0.9532	0.9329	0.8579	0.9518
ite-wlsv-shr	<b>0.9466</b>	0.9700	0.9614	0.9665	0.9611	0.8897	0.9247	0.9071	0.8299	0.9257
ite-wlsv-struc	0.9790	0.9930	0.9845	0.9874	0.9860	0.9118	0.9488	0.9301	0.8533	0.9499
ite-wlsv-wls	0.9589	0.9773	0.9712	0.9752	0.9706	0.8969	0.9339	0.9152	0.8404	0.9350



Tabella B.9: AvgRelMAE per tutte le 95 serie a qualsiasi ordine di aggregazione  $k$  e orizzonte di previsione.

Procedure	Quarterly					Semi-annual			Annual	All	
	all	1	2	3	4	1-4	1	2	1-2	1	all
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
kah-struc-shr	<b>1.0551</b>	<b>1.0120</b>	0.9978	0.9893	<b>1.0132</b>	0.9488	0.9593	0.954	0.8816	0.9763	
kah-struc-wls	<b>1.0622</b>	<b>1.0181</b>	<b>1.0029</b>	0.9951	<b>1.0192</b>	0.9558	0.9661	0.9610	0.8898	0.9830	
kah-wlsh-shr	0.9749	0.9826	0.9856	0.9805	0.9809	0.9005	0.9487	0.9243	0.8582	0.9461	
kah-wlsh-wls	0.9774	0.9855	0.9887	0.9846	0.9840	0.9038	0.9532	0.9281	0.8635	0.9498	
kah-wlsv-shr	0.9796	0.9829	0.9797	0.9790	0.9803	0.9046	0.9459	0.9250	0.8572	0.9459	
kah-wlsv-wls	0.9833	0.9863	0.9832	0.9829	0.9839	0.9082	0.9502	0.9290	0.8624	0.9499	
tcs-acov-ols	<b>1.1067</b>	<b>1.0805</b>	<b>1.0690</b>	<b>1.0571</b>	<b>1.0782</b>	0.9928	<b>1.028</b>	<b>1.0102</b>	0.9444	<b>1.0385</b>	
tcs-acov-shr	0.9698	<b>0.9764</b>	0.9852	0.9805	0.9780	0.8936	0.9476	<b>0.9202</b>	0.8555	0.9429	
tcs-acov-struc	<b>1.0952</b>	<b>1.0603</b>	<b>1.0489</b>	<b>1.0375</b>	<b>1.0603</b>	0.9760	<b>1.0036</b>	0.9897	0.9152	<b>1.0180</b>	
tcs-acov-wls	0.9723	0.9797	0.9883	0.9851	0.9813	0.8967	0.9522	0.9240	0.8609	0.9467	
tcs-bu-ols	<b>1.1168</b>	<b>1.0846</b>	<b>1.0806</b>	<b>1.0716</b>	<b>1.0883</b>	<b>1.0064</b>	<b>1.0478</b>	<b>1.0269</b>	0.9626	<b>1.0518</b>	
tcs-bu-shr	0.9800	0.9818	0.9827	0.9837	0.9821	0.9040	0.9510	0.9272	0.8622	0.9483	
tcs-bu-struc	<b>1.0997</b>	<b>1.0679</b>	<b>1.0600</b>	<b>1.0497</b>	<b>1.0692</b>	0.9893	<b>1.0213</b>	<b>1.0052</b>	0.9322	<b>1.0301</b>	
tcs-bu-wls	0.9805	0.9833	0.9847	0.9866	0.9838	0.9055	0.9538	0.9293	0.8650	0.9503	
tcs-har1-ols	<b>1.1056</b>	<b>1.0786</b>	<b>1.0680</b>	<b>1.0571</b>	<b>1.0772</b>	0.9944	<b>1.0295</b>	<b>1.0118</b>	0.9460	<b>1.0386</b>	
tcs-har1-shr	0.9745	0.9826	0.9856	0.9806	0.9808	0.9007	0.9488	0.9244	0.8583	0.9461	
tcs-har1-struc	<b>1.0903</b>	<b>1.0587</b>	<b>1.0478</b>	<b>1.0372</b>	<b>1.0583</b>	0.9762	<b>1.0048</b>	0.9904	0.9162	<b>1.0173</b>	
tcs-har1-wls	0.9768	0.9855	0.9886	0.9847	0.9839	0.9038	0.9531	0.9282	0.8634	0.9497	
tcs-ols-ols	<b>1.2422</b>	<b>1.1377</b>	<b>1.1027</b>	<b>1.0736</b>	<b>1.1373</b>	<b>1.0921</b>	<b>1.0565</b>	<b>1.0741</b>	<b>1.0001</b>	<b>1.0985</b>	
tcs-ols-shr	<b>1.1267</b>	<b>1.0512</b>	<b>1.0231</b>	<b>1.0055</b>	<b>1.0506</b>	<b>1.0034</b>	0.9805	0.9919	0.9135	<b>1.0130</b>	
tcs-ols-struc	<b>1.2181</b>	<b>1.1158</b>	<b>1.0785</b>	<b>1.0515</b>	<b>1.1142</b>	<b>1.0658</b>	<b>1.0292</b>	<b>1.0473</b>	0.9662	<b>1.0726</b>	
tcs-ols-wls	<b>1.137</b>	<b>1.0590</b>	<b>1.0298</b>	<b>1.0129</b>	<b>1.0586</b>	<b>1.0121</b>	0.9888	<b>1.0004</b>	0.9235	<b>1.0215</b>	
tcs-sar1-ols	<b>1.1056</b>	<b>1.0762</b>	<b>1.0646</b>	<b>1.0552</b>	<b>1.0752</b>	0.9954	<b>1.028</b>	<b>1.0116</b>	0.9457	<b>1.0375</b>	
tcs-sar1-shr	0.9797	0.9830	0.9796	0.9790	0.9803	0.9048	<b>0.9459</b>	0.9251	0.8572	0.9459	
tcs-sar1-struc	<b>1.0903</b>	<b>1.0581</b>	<b>1.0441</b>	<b>1.0353</b>	<b>1.0567</b>	0.9773	<b>1.0037</b>	0.9904	0.9159	<b>1.0164</b>	
tcs-sar1-wls	0.9832	0.9864	0.9830	0.9828	0.9839	0.9082	0.9501	0.9289	0.8623	0.9498	
tcs-shr-ols	<b>1.1318</b>	<b>1.100</b>	<b>1.0848</b>	<b>1.0654</b>	<b>1.0952</b>	<b>1.0153</b>	<b>1.0407</b>	<b>1.0279</b>	0.9594	<b>1.0554</b>	
tcs-shr-shr	0.9773	0.9795	0.9869	0.9867	0.9826	0.8954	0.9519	0.9232	0.8558	0.9464	
tcs-shr-struc	<b>1.1133</b>	<b>1.0787</b>	<b>1.0626</b>	<b>1.0464</b>	<b>1.0749</b>	0.9945	<b>1.0155</b>	<b>1.0049</b>	0.9258	<b>1.0322</b>	
tcs-shr-wls	0.9763	0.9807	0.9904	0.9901	0.9843	0.8965	0.9561	0.9258	0.8601	0.9488	
tcs-strar1-ols	<b>1.1586</b>	<b>1.0932</b>	<b>1.0705</b>	<b>1.0546</b>	<b>1.0935</b>	<b>1.0256</b>	<b>1.0300</b>	<b>1.0278</b>	0.9584	<b>1.0543</b>	
tcs-strar1-shr	<b>1.0549</b>	<b>1.0123</b>	0.9983	0.9894	<b>1.0134</b>	0.9491	0.9596	0.9543	0.8819	0.9766	
tcs-strar1-struc	<b>1.1406</b>	<b>1.0752</b>	<b>1.0505</b>	<b>1.0347</b>	<b>1.0745</b>	<b>1.0067</b>	<b>1.0062</b>	<b>1.0064</b>	0.9299	<b>1.0330</b>	
tcs-strar1-wls	<b>1.0620</b>	<b>1.0183</b>	<b>1.0031</b>	0.9952	<b>1.0193</b>	0.9560	0.9662	0.9611	0.8899	0.9831	
tcs-struc-ols	<b>1.1579</b>	<b>1.0929</b>	<b>1.0707</b>	<b>1.0542</b>	<b>1.0932</b>	<b>1.0252</b>	<b>1.0299</b>	<b>1.0275</b>	0.9583	<b>1.0540</b>	
tcs-struc-struc	<b>1.1402</b>	<b>1.0753</b>	<b>1.0504</b>	<b>1.0343</b>	<b>1.0743</b>	<b>1.0062</b>	<b>1.0062</b>	<b>1.0062</b>	0.9300	<b>1.0329</b>	
tcs-wlsh-ols	<b>1.1053</b>	<b>1.0777</b>	<b>1.0677</b>	<b>1.0568</b>	<b>1.0767</b>	0.9932	<b>1.0292</b>	<b>1.0111</b>	0.9456	<b>1.0381</b>	
tcs-wlsh-struc	<b>1.0903</b>	<b>1.0585</b>	<b>1.0477</b>	<b>1.0371</b>	<b>1.0582</b>	0.9757	<b>1.0047</b>	0.9901	0.9162	<b>1.0171</b>	
tcs-wlsh-wls	<b>1.1052</b>	<b>1.0752</b>	<b>1.0644</b>	<b>1.0549</b>	<b>1.0748</b>	0.9943	<b>1.0278</b>	<b>1.0109</b>	0.9453	<b>1.0369</b>	
tcs-wlsv-struc	<b>1.0901</b>	<b>1.0576</b>	<b>1.0442</b>	<b>1.0351</b>	<b>1.0566</b>	0.9770	<b>1.0037</b>	0.9902	0.9160	<b>1.0162</b>	
ite-acov-ols	<b>1.1067</b>	<b>1.0805</b>	<b>1.0690</b>	<b>1.0571</b>	<b>1.0782</b>	0.9928	<b>1.028</b>	<b>1.0102</b>	0.9444	<b>1.0385</b>	
ite-acov-shr	<b>0.9672</b>	0.9770	0.9849	0.9812	<b>0.9776</b>	<b>0.8936</b>	0.9481	0.9205	<b>0.8547</b>	<b>0.9426</b>	
ite-acov-struc	<b>1.0952</b>	<b>1.0603</b>	<b>1.0489</b>	<b>1.0375</b>	<b>1.0603</b>	0.9760	<b>1.0036</b>	0.9897	0.9152	<b>1.0180</b>	
ite-acov-wls	0.9718	0.9809	0.9887	0.9862	0.9819	0.8970	0.9528	0.9245	0.8607	0.9471	
ite-bu-ols	<b>1.1168</b>	<b>1.0846</b>	<b>1.0806</b>	<b>1.0716</b>	<b>1.0883</b>	<b>1.0064</b>	<b>1.0478</b>	<b>1.0269</b>	0.9626	<b>1.0518</b>	
ite-bu-shr	0.9769	0.9842	0.9863	0.9893	0.9842	0.9062	0.9581	0.9318	0.8693	0.9519	
ite-bu-struc	<b>1.0997</b>	<b>1.0679</b>	<b>1.0600</b>	<b>1.0497</b>	<b>1.0692</b>	0.9893	<b>1.0213</b>	<b>1.0052</b>	0.9322	<b>1.0301</b>	
ite-bu-wls	0.9793	0.9846	0.9866	0.9893	0.9850	0.9065	0.9572	0.9315	0.8692	0.9522	
ite-har1-ols	<b>1.1056</b>	<b>1.0786</b>	<b>1.0680</b>	<b>1.0571</b>	<b>1.0772</b>	0.9944	<b>1.0295</b>	<b>1.0118</b>	0.9460	<b>1.0386</b>	
ite-har1-shr	0.9700	0.9823	0.9850	0.9808	0.9795	0.9002	0.9489	0.9242	0.8575	0.9453	
ite-har1-struc	<b>1.0903</b>	<b>1.0587</b>	<b>1.0478</b>	<b>1.0372</b>	<b>1.0583</b>	0.9762	<b>1.0048</b>	0.9904	0.9162	<b>1.0173</b>	
ite-har1-wls	0.9743	0.9856	0.9889	0.9854	0.9835	0.9035	0.9535	0.9282	0.8631	0.9495	
ite-ols-ols	<b>1.2422</b>	<b>1.1377</b>	<b>1.1027</b>	<b>1.0736</b>	<b>1.1373</b>	<b>1.0921</b>	<b>1.0565</b>	<b>1.0741</b>	<b>1.0001</b>	<b>1.0985</b>	
ite-ols-shr	<b>1.1301</b>	<b>1.0519</b>	<b>1.0227</b>	<b>1.0047</b>	<b>1.0513</b>	<b>1.0068</b>	0.9806	0.9936	0.9145	<b>1.0141</b>	
ite-ols-struc	<b>1.2181</b>	<b>1.1158</b>	<b>1.0785</b>	<b>1.0515</b>	<b>1.1142</b>	<b>1.0658</b>	<b>1.0292</b>	<b>1.0473</b>	0.9662	<b>1.0726</b>	
ite-ols-wls	<b>1.1380</b>	<b>1.0584</b>	<b>1.0295</b>	<b>1.0125</b>	<b>1.0585</b>	<b>1.0133</b>	0.9892	<b>1.0012</b>	0.9231	<b>1.0216</b>	
ite-sar1-ols	<b>1.1056</b>	<b>1.0762</b>	<b>1.0646</b>	<b>1.0552</b>	<b>1.0752</b>	0.9954	<b>1.028</b>	<b>1.0116</b>	0.9457	<b>1.0375</b>	
ite-sar1-shr	0.9751	0.9819	<b>0.9781</b>	0.9784	0.9784	0.9038	0.9459	0.9246	0.8563	0.9445	
ite-sar1-struc	<b>1.0903</b>	<b>1.0581</b>	<b>1.0441</b>	<b>1.0353</b>	<b>1.0567</b>	0.9773	<b>1.0037</b>	0.9904	0.9159	<b>1.0164</b>	
ite-sar1-wls	0.9812	0.9858	0.9827	0.9829	0.9831	0.9078	0.9504	0.9289	0.8619	0.9493	
ite-shr-ols	<b>1.1318</b>	<b>1.100</b>	<b>1.0848</b>	<b>1.0654</b>	<b>1.0952</b>	<b>1.0153</b>	<b>1.0407</b>	<b>1.0279</b>	0.9594	<b>1.0554</b>	
ite-shr-shr	0.9790	0.9827	0.9888	0.9877	0.9845	0.8994	0.9530	0.9258	0.8561	0.9483	
ite-shr-struc	<b>1.1133</b>	<b>1.0787</b>	<b>1.0626</b>	<b>1.0464</b>	<b>1.0749</b>	0.9945	<b>1.0155</b>	<b>1.0049</b>	0.9258	<b>1.0322</b>	
ite-shr-wls	0.9758	0.9839	0.9915	0.9909	0.9855	0.8981	0.9570	0.9271	0.8598	0.9498	
ite-strar1-ols	<b>1.1586</b>	<b>1.0932</b>	<b>1.0705</b>	<b>1.0546</b>	<b>1.0935</b>	<b>1.0256</b>	<b>1.0300</b>	<b>1.0278</b>	0.9584	<b>1.0543</b>	
ite-strar1-shr	<b>1.0539</b>	<b>1.0114</b>	0.9971	0.9886	<b>1.0125</b>	0.9492	0.9596	0.9544	0.8819	0.9761	
ite-strar1-struc	<b>1.1406</b>	<b>1.0752</b>	<b>1.0505</b>	<b>1.0347</b>	<b>1.0745</b>	<b>1.0067</b>	<b>1.0062</b>	<b>1.0064</b>	0.9299	<b>1.0330</b>	
ite-strar1-wls	<b>1.0620</b>	<b>1.0175</b>	<b>1.0027</b>	0.9949	<b>1.0190</b>	0.9560	0.9665	0.9612	0.8899	0.9829	
ite-struc-ols	<b>1.1579</b>	<b>1.0929</b>	<b>1.0707</b>	<b>1.0542</b>	<b>1.0932</b>	<b>1.0252</b>	<b>1.0299</b>	<b>1.0275</b>	0.9583	<b>1.0540</b>	
ite-struc-shr	<b>1.0539</b>	<b>1.0110</b>	0.9967	0.9884	<b>1.0122</b>	0.9489	0.9593	0.9541	0.8816	0.9758	
ite-struc-struc	<b>1.1402</b>	<b>1.0753</b>	<b>1.0504</b>	<b>1.0343</b>	<b>1.0743</b>	<b>1.0062</b>	<b>1.0062</b>	<b>1.0062</b>	0.9300	<b>1.0329</b>	
ite-struc-wls	<b>1.0622</b>	<b>1.0173</b>	<b>1.0025</b>	0.9947	<b>1.0189</b>	0.9558	0.9663	0.9611	0.8898	0.9828	
ite-wlsh-ols	<b>1.1053</b>	<b>1.0777</b>	<b>1.0677</b>	<b>1.0568</b>	<b>1.0767</b>	0.9932	<b>1.0292</b>	<b>1.0111</b>	0.9456	<b>1.0381</b>	
ite-wlsh-shr	0.9703	0.9820									

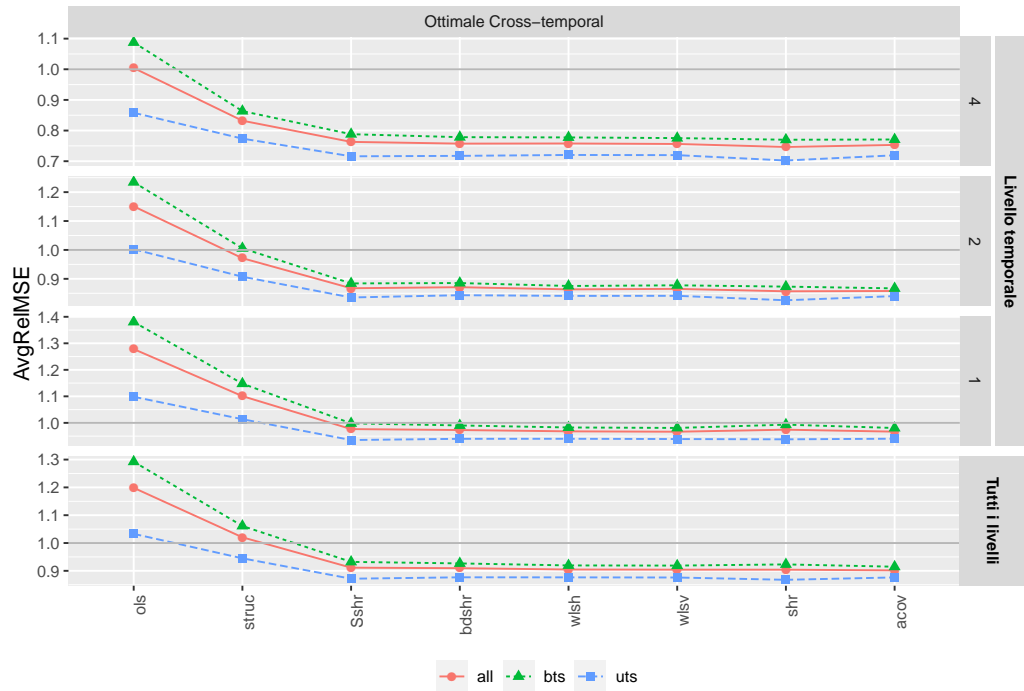
## B.4 Procedure di riconciliazione ottimale cross-temporale

**Tabella B.10:** AvgRelMSE a qualsiasi ordine di aggregazione  $k$  e orizzonte di previsione.

Procedure	Quarterly					Semi-annual			Annual	All
	1	2	3	4	1-4	1	2	1-2	1	
<i>all 95 series</i>										
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
oct-ols	<b>1.5246</b>	<b>1.2871</b>	<b>1.1918</b>	<b>1.1415</b>	<b>1.2782</b>	<b>1.1855</b>	<b>1.1172</b>	<b>1.1508</b>	<b>1.0041</b>	<b>1.1984</b>
oct-struc	<b>1.2511</b>	<b>1.1084</b>	<b>1.0430</b>	<b>1.0154</b>	<b>1.1008</b>	0.9746	0.9682	0.9714	0.8322	<b>1.0206</b>
oct-wlsh	0.9548	0.9718	0.9760	0.9696	0.9680	0.8112	0.9194	0.8636	0.7579	0.9048
oct-wlsv	0.9692	0.9719	0.9622	<b>0.9631</b>	<b>0.9666</b>	0.8203	<b>0.9125</b>	0.8652	0.7562	0.9042
oct-bdshr	0.9838	0.9798	<b>0.9618</b>	0.9665	0.9730	0.8297	0.9144	0.8710	0.7573	0.9095
oct-acov	0.9553	0.9648	0.9767	0.9707	0.9668	0.8013	0.9185	0.8579	0.7531	<b>0.9016</b>
oct-shr	0.9652	<b>0.9610</b>	0.9875	0.9835	0.9742	<b>0.7971</b>	0.9211	<b>0.8569</b>	<b>0.7465</b>	0.9041
oct-Sshr	<b>0.9547</b>	0.9720	0.9913	0.9884	0.9765	0.8054	0.9343	0.8674	0.7631	0.9113
<i>32 upper series</i>										
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
oct-ols	<b>1.2156</b>	<b>1.1122</b>	<b>1.0452</b>	<b>1.0300</b>	<b>1.0984</b>	<b>1.0087</b>	0.9962	<b>1.0024</b>	0.858	<b>1.0330</b>
oct-struc	<b>1.0667</b>	<b>1.0341</b>	0.9814	0.9756	<b>1.0138</b>	0.8898	0.9252	0.9073	0.7737	0.9449
oct-wlsh	0.9387	0.9510	0.9339	0.9360	0.9399	0.7999	0.8842	0.8410	0.7204	0.8766
oct-wlsv	0.9411	0.9506	0.9316	<b>0.9326</b>	0.9390	0.8032	0.8811	0.8412	0.7198	0.8760
oct-bdshr	0.9453	0.9559	<b>0.9246</b>	0.9340	0.9399	0.8091	<b>0.8791</b>	0.8433	0.7174	0.8767
oct-acov	0.9388	0.9498	0.9353	0.9371	0.9402	0.7984	0.8844	0.8403	0.7193	0.8763
oct-shr	0.9309	<b>0.9237</b>	0.9438	0.9532	0.9379	<b>0.7691</b>	0.8867	<b>0.8258</b>	<b>0.7023</b>	<b>0.8678</b>
oct-Sshr	<b>0.9291</b>	0.9381	0.9339	0.9398	<b>0.9352</b>	0.7892	0.8846	0.8355	0.7160	0.8717
<i>63 bottom series</i>										
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
oct-ols	<b>1.7104</b>	<b>1.3863</b>	<b>1.2740</b>	<b>1.2026</b>	<b>1.3806</b>	<b>1.2869</b>	<b>1.1842</b>	<b>1.2345</b>	<b>1.0876</b>	<b>1.2924</b>
oct-struc	<b>1.3567</b>	<b>1.1481</b>	<b>1.0757</b>	<b>1.0362</b>	<b>1.1479</b>	<b>1.0208</b>	0.9908	<b>1.0057</b>	0.8636	<b>1.0613</b>
oct-wlsh	<b>0.9631</b>	0.9825	0.9981	0.9871	0.9826	0.8170	0.9378	0.8753	0.7776	0.9194
oct-wlsv	0.9837	0.9828	<b>0.9782</b>	<b>0.9789</b>	0.9809	0.8292	<b>0.9288</b>	0.8776	0.7754	0.9188
oct-bdshr	<b>1.004</b>	0.9922	0.9813	0.9835	0.9902	0.8404	0.9329	0.8854	0.7784	0.9267
oct-acov	0.9639	<b>0.9725</b>	0.9984	0.9881	<b>0.9806</b>	<b>0.8028</b>	0.9363	<b>0.8670</b>	0.7709	<b>0.9147</b>
oct-shr	0.9830	0.9805	<b>1.0105</b>	0.9992	0.9932	0.8117	0.9391	0.8731	<b>0.7700</b>	0.9231
oct-Sshr	0.9680	0.9897	<b>1.0218</b>	<b>1.0140</b>	0.9982	0.8138	0.9606	0.8841	0.7881	0.9322

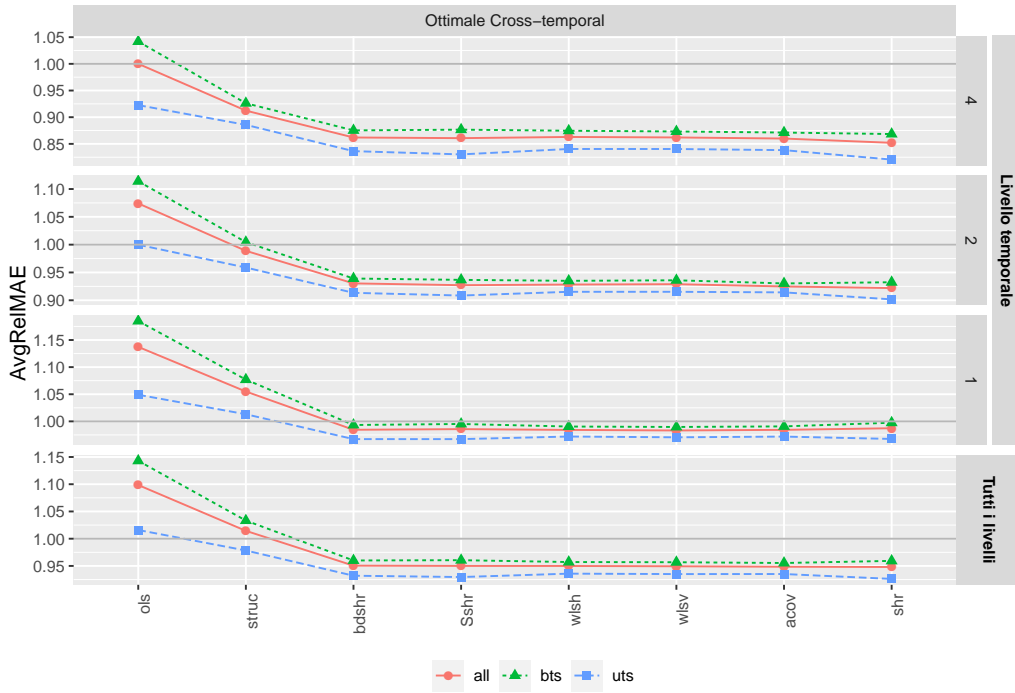
Tabella B.11: AvgRelMAE a qualsiasi ordine di aggregazione  $k$  e orizzonte di previsione.

Procedure	Quarterly					Semi-annual			Annual	All
	1	2	3	4	1-4	1	2	1-2	1	
<i>all 95 series</i>										
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
oct-ols	<b>1.2422</b>	<b>1.1377</b>	<b>1.1027</b>	<b>1.0736</b>	<b>1.1373</b>	<b>1.0921</b>	<b>1.0565</b>	<b>1.0741</b>	<b>1.0001</b>	<b>1.0985</b>
oct-struct	<b>1.1219</b>	<b>1.0563</b>	<b>1.0298</b>	<b>1.0153</b>	<b>1.0551</b>	0.9908	0.9870	0.9889	0.9123	<b>1.0144</b>
oct-wlsh	0.9745	0.9863	0.9895	0.9867	0.9842	0.9028	0.9545	0.9283	0.8630	0.9499
oct-wlsv	0.9813	0.9858	0.9829	<b>0.9830</b>	<b>0.9832</b>	0.9078	0.9506	0.9289	0.8620	0.9494
oct-bdshr	0.9858	0.9880	<b>0.9809</b>	0.9833	0.9845	0.9112	<b>0.9499</b>	0.9304	0.8620	0.9505
oct-acov	0.9762	0.9831	0.9904	0.9879	0.9844	0.8965	0.9541	0.9248	0.8600	0.9485
oct-shr	0.9825	<b>0.9804</b>	0.9944	0.9920	0.9873	<b>0.8939</b>	0.9509	<b>0.9219</b>	<b>0.8520</b>	<b>0.9480</b>
oct-Sshr	<b>0.9739</b>	0.9832	0.9922	0.9936	0.9857	0.8962	0.9591	0.9271	0.8607	0.9500
<i>32 upper series</i>										
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
oct-ols	<b>1.0857</b>	<b>1.0534</b>	<b>1.0331</b>	<b>1.0249</b>	<b>1.0491</b>	<b>1.0027</b>	0.9971	0.9999	0.9226	<b>1.0159</b>
oct-struct	<b>1.0173</b>	<b>1.0227</b>	<b>1.0058</b>	<b>1.0069</b>	<b>1.0131</b>	0.9467	0.9712	0.9589	0.8857	0.9784
oct-wlsh	0.9604	0.9780	0.9727	0.9773	0.9721	0.8948	0.9362	0.9152	0.8404	0.9358
oct-wlsv	0.9589	0.9773	0.9712	0.9752	0.9706	0.8969	0.9339	0.9152	0.8404	0.9350
oct-bdshr	<b>0.9552</b>	0.9790	<b>0.9632</b>	<b>0.9719</b>	0.9673	0.8983	<b>0.9288</b>	0.9134	0.8364	0.9320
oct-acov	0.9631	0.9756	0.9729	0.9764	0.9720	0.8933	0.9356	0.9142	0.8383	0.9351
oct-shr	0.9591	<b>0.9594</b>	0.9700	0.9820	0.9676	<b>0.8746</b>	0.9295	<b>0.9016</b>	<b>0.8205</b>	<b>0.9262</b>
oct-Sshr	0.9587	0.9675	0.9660	0.9769	<b>0.9673</b>	0.885	0.9327	0.9085	0.8303	0.9296
<i>63 bottom series</i>										
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
oct-ols	<b>1.3301</b>	<b>1.1831</b>	<b>1.1399</b>	<b>1.0992</b>	<b>1.1850</b>	<b>1.1405</b>	<b>1.088</b>	<b>1.1139</b>	<b>1.0419</b>	<b>1.1430</b>
oct-struct	<b>1.1791</b>	<b>1.0737</b>	<b>1.0422</b>	<b>1.0196</b>	<b>1.0770</b>	<b>1.0140</b>	0.9951	<b>1.0045</b>	0.9262	<b>1.0333</b>
oct-wlsh	0.9818	0.9906	0.9981	0.9916	0.9905	0.9069	0.9639	0.9350	0.8746	0.9571
oct-wlsv	0.9929	0.9901	<b>0.9888</b>	<b>0.9870</b>	<b>0.9897</b>	0.9133	<b>0.9591</b>	0.9360	0.8732	0.9568
oct-bdshr	<b>1.0018</b>	0.9925	0.9900	0.9892	0.9933	0.9178	0.9609	0.9391	0.8753	0.9600
oct-acov	0.9830	<b>0.9869</b>	0.9994	0.9937	0.9907	<b>0.8981</b>	0.9636	<b>0.9303</b>	0.8712	<b>0.9554</b>
oct-shr	0.9946	0.9913	<b>1.0070</b>	0.9972	0.9975	0.9038	0.9619	0.9324	<b>0.8684</b>	0.9593
oct-Sshr	<b>0.9818</b>	0.9912	<b>1.0059</b>	<b>1.0021</b>	0.9952	0.9019	0.9728	0.9367	0.8766	0.9606



	all				bts				uts			
	all	1	2	4	all	1	2	4	all	1	2	4
oct acov	1	2	2	2	1	1	1	2	4	6	3	4
oct shr	2	5	1	1	4	5	2	1	1	2	1	1
oct wlsv	3	1	4	3	2	2	4	3	3	3	5	5
oct wlsh	4	3	3	5	3	3	3	4	5	5	4	6
oct bdshr	5	4	6	4	5	4	6	5	6	4	6	3
oct Sshr	6	6	5	6	6	6	5	6	2	1	2	2
base	7	7	8	8	7	7	7	8	8	7	8	9
oct struc	8	8	7	7	8	8	8	7	7	8	7	7
oct ols	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	8

**Figura B.7:** Nel pannello in alto vi è l’Average Relative MSE calcolato con tutte le serie e tutti gli orizzonti di previsione per ciascuna frequenza temporale. Nel pannello in basso vi sono le graduatorie divise per frequenza e orizzonte di previsione.



	all				bts				uts			
	all	1	2	4	all	1	2	4	all	1	2	4
oct shr -	1	6	1	1	4	6	2	1	1	3	1	1
oct acov -	2	3	2	2	1	3	1	2	5	5	4	4
oct wlsv -	3	1	5	5	2	1	4	3	4	4	5	5
oct wls -	4	2	4	6	3	2	3	4	6	6	6	6
oct Sshr -	5	5	3	3	6	5	5	6	2	1	2	2
oct bdshr -	6	4	6	4	5	4	6	5	3	2	3	3
base -	7	7	8	8	7	7	7	8	8	7	9	9
oct struc -	8	8	7	7	8	8	8	7	7	8	7	7
oct ols -	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	8	8

**Figura B.8:** Nel pannello in alto vi è l’Average Relative MAE calcolato con tutte le serie e tutti gli orizzonti di previsione per ciascuna frequenza temporale. Nel pannello in basso vi sono le graduatorie divise per frequenza e orizzonte di previsione.

## B.5 Elenco variabili presenti del dataset

Tabella B.12: Variabili, ID e descrizione.

Variabile	ID	Descrizione
Gdp	A2302467A	GDP - Gross Domestic Product
<i>Expenditure Approach</i>		
Sde	A2302566J	Statistical Discrepancy(E)
Exp	A2302564C	Exports of goods and services
Imp	A2302565F	Imports of goods and services
Gne	A2302563A	Gross national exp.
GneDfdFceGvtNatDef	A2302523J	Gen. gov. - National; Final consumption exp. - Defence
GneDfdFceGvtNatNdf	A2302524K	Gen. gov. - National; Final consumption exp. - Non-defence
GneDfdFceGvtNat	A2302525L	Gen. gov. - National; Final consumption exp.
GneDfdFceGvtSnl	A2302526R	Gen. gov. - State and local; Final consumption exp.
GneDfdFceGvt	A2302527T	Gen. gov.; Final consumption exp.
GneDfdFce	A2302529W	All sectors; Final consumption exp.
GneDfdGfcPvtTdwNnu	A2302543T	Pvt.; Gross fixed capital formation (GFCF)
GneDfdGfcPvtTdwAna	A2302544V	Pvt.; GFCF - Dwellings - Alterations and additions
GneDfdGfcPvtTdw	A2302545W	Pvt.; GFCF - Dwellings - Total
GneDfdGfcPvtOtc	A2302546X	Pvt.; GFCF - Ownership transfer costs
GneDfdGfcPvtPbiNdcNbd	A2302533L	Pvt. GFCF - Non-dwelling construction - New building
GneDfdGfcPvtPbiNdcNec	A2302534R	Pvt.; GFCF - Non-dwelling construction - New engineering construction
GneDfdGfcPvtPbiNdcSha	A2302535T	Pvt.; GFCF - Non-dwelling construction - Net purchase of second hand assets
GneDfdGfcPvtPbiNdc	A2302536V	Pvt.; GFCF - Non-dwelling construction - Total
GneDfdGfcPvtPbiNdmNew	A2302530F	Pvt.; GFCF - Machinery and equipment - New
GneDfdGfcPvtPbiNdmSha	A2302531J	Pvt.; GFCF - Machinery and equipment - Net purchase of second hand assets
GneDfdGfcPvtPbiNdm	A2302532K	Pvt.; GFCF - Machinery and equipment - Total
GneDfdGfcPvtPbiCbr	A2716219R	Pvt.; GFCF - Cultivated biological resources
GneDfdGfcPvtPbiIprRnd	A2716221A	Pvt.; GFCF - Intellectual property products - Research and development
GneDfdGfcPvtPbiIprMnp	A2302539A	Pvt.; GFCF - Intellectual property products - Mineral and petroleum exploration
GneDfdGfcPvtPbiIprCom	A2302538X	Pvt.; GFCF - Intellectual property products - Computer software
GneDfdGfcPvtPbiIprArt	A2302540K	Pvt.; GFCF - Intellectual property products - Artistic originals
GneDfdGfcPvtPbiIpr	A2716220X	Pvt.; GFCF - Intellectual property products Total
GneDfdGfcPvtPbi	A2302542R	Pvt.; GFCF - Total private business investment
GneDfdGfcPvt	A2302547A	Pvt.; GFCF

Continua nella pagina successiva

Tabella B.12 – Continuazione della pagina precedente

Variabile	ID	Descrizione
GneDfdGfcPubPcpCmw	A2302548C	Plc. corporations - Commonwealth; GFCF
GneDfdGfcPubPcpSnl	A2302549F	Plc. corporations - State and local; GFCF
GneDfdGfcPubPcp	A2302550R	Plc. corporations; GFCF Total
GneDfdGfcPubGvtNatDef	A2302551T	Gen. gov. - National; GFCF - Defence
GneDfdGfcPubGvtNatNdf	A2302552V	Gen. gov. - National ; GFCF - Non-defence
GneDfdGfcPubGvtNat	A2302553W	Gen. gov. - National ; GFCF Total
GneDfdGfcPubGvtSnl	A2302554X	Gen. gov. - State and local; GFCF
GneDfdGfcPubGvt	A2302555A	Gen. gov.; GFCF
GneDfdGfcPub	A2302556C	Plc.; GFCF
GneDfdGfc	A2302557F	All sectors; GFCF
GneDfdHfc	A2302254W	Household Final Consumption Expenditure
GneDfdFceHfcFud	A2302237V	Food
GneDfdFceHfcAbt	A3605816F	Alcoholic beverages and tobacco
GneDfdFceHfcAbtCig	A2302238W	Cigarettes and tobacco
GneDfdFceHfcAbtAlc	A2302239X	Alcoholic beverages
GneDfdFceHfcCnf	A2302240J	Clothing and footwear
GneDfdFceHfcHwe	A3605680F	Housing, water, electricity, gas and other fuels
GneDfdFceHfcHweRnt	A3605681J	Actual and imputed rent for housing
GneDfdFceHfcHweWsc	A3605682K	Water and sewerage charges
GneDfdFceHfcHweEgf	A2302242L	Electricity, gas and other fuel
GneDfdFceHfcFhe	A2302243R	Furnishings and household equipment
GneDfdFceHfcFheFnt	A3605683L	Furniture, floor coverings and household goods
GneDfdFceHfcFheApp	A3605684R	Household appliances
GneDfdFceHfcFheTls	A3605685T	Household tools
GneDfdFceHfcHlt	A2302244T	Health
GneDfdFceHfcHltMed	A3605686V	Medicines, medical aids and therapeutic appliances
GneDfdFceHfcHltHsv	A3605687W	Total health services
GneDfdFceHfcTpt	A3605688X	Transport
GneDfdFceHfcTptPvh	A2302245V	Purchase of vehicles
GneDfdFceHfcTptOvh	A2302246W	Operation of vehicles
GneDfdFceHfcTptTsv	A2302247X	Transport services
GneDfdFceHfcCom	A2302248A	Communications
GneDfdFceHfcRnc	A2302249C	Recreation and culture
GneDfdFceHfcEdc	A2302250L	Education services
GneDfdFceHfcHcr	A2302251R	Hotels, cafes and restaurants
GneDfdFceHfcHcrCsv	A3605694V	Catering services
GneDfdFceHfcHcrAsv	A3605695W	Accommodation services
GneDfdFceHfcMis	A3605696X	Miscellaneous goods and services
GneDfdFceHfcMisOgd	A3605697A	Other goods
GneDfdFceHfcMisIfs	A2302252T	Insurance and other financial services
GneDfdFceHfcMisOsv	A3606485T	Other services
GneCii	A2302562X	Changes in Inventories
GneCiiPfm	A2302560V	Farm
GneCiiPba	A2302561W	Public authorities

Continua nella pagina successiva

Tabella B.12 – Continuazione della pagina precedente

<b>Variabile</b>	<b>ID</b>	<b>Descrizione</b>
GneCiiPnf	A2302559K	Private; Non-farm Total
GneCiiPnfMin	A83722619L	Private; Mining (B)
GneCiiPnfMan	A3348511X	Private; Manufacturing (C)
GneCiiPnfWht	A3348512A	Private; Wholesale trade (F)
GneCiiPnfRet	A3348513C	Private; Retail trade (G)
GneCiiPnfOnf	A2302273C	Private; Non-farm; Other non-farm industries
<i>Income Approach</i>		
Sdi	A2302413V	Statistical discrepancy (I)
Tsi	A2302412T	Taxes less subsidies (I)
TfiCoeWns	A2302399K	Compensation of employees; Wages and salaries
TfiCoeEsc	A2302400J	Compensation of employees; Employers' social contributions
TfiCoe	A2302401K	Compensation of employees
TfiGosCopNfnPvt	A2323369L	Private non-financial corporations; Gross operating surplus
TfiGosCopNfnPub	A2302403R	Public non-financial corporations; Gross operating surplus
TfiGosCopNfn	A2302404T	Non-financial corporations; Gross operating surplus
TfiGosCopFin	A2302405V	Financial corporations; Gross operating surplus
TfiGosCop	A2302406W	Total corporations; Gross operating surplus
TfiGosGvt	A2298711F	General government; Gross operating surplus
TfiGosDwl	A2302408A	Dwellings owned by persons; Gross operating surplus
TfiGos	A2302409C	All sectors; Gross operating surplus
TfiGmi	A2302410L	Gross mixed income
Tfi	A2302411R	Total factor income



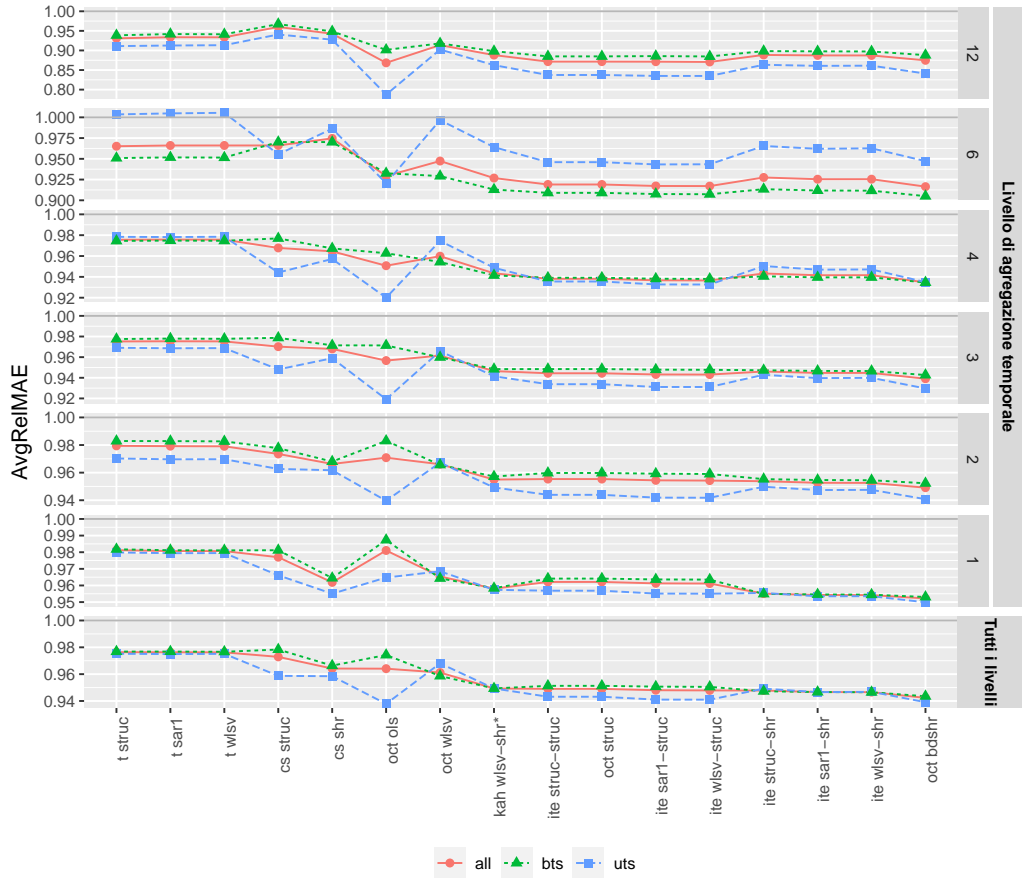
# Appendice C

## ATD: descrizione e risultati estesi

### C.1 Risultati usando l'AvgRelMAE per le procedure di riconciliazione selezionate

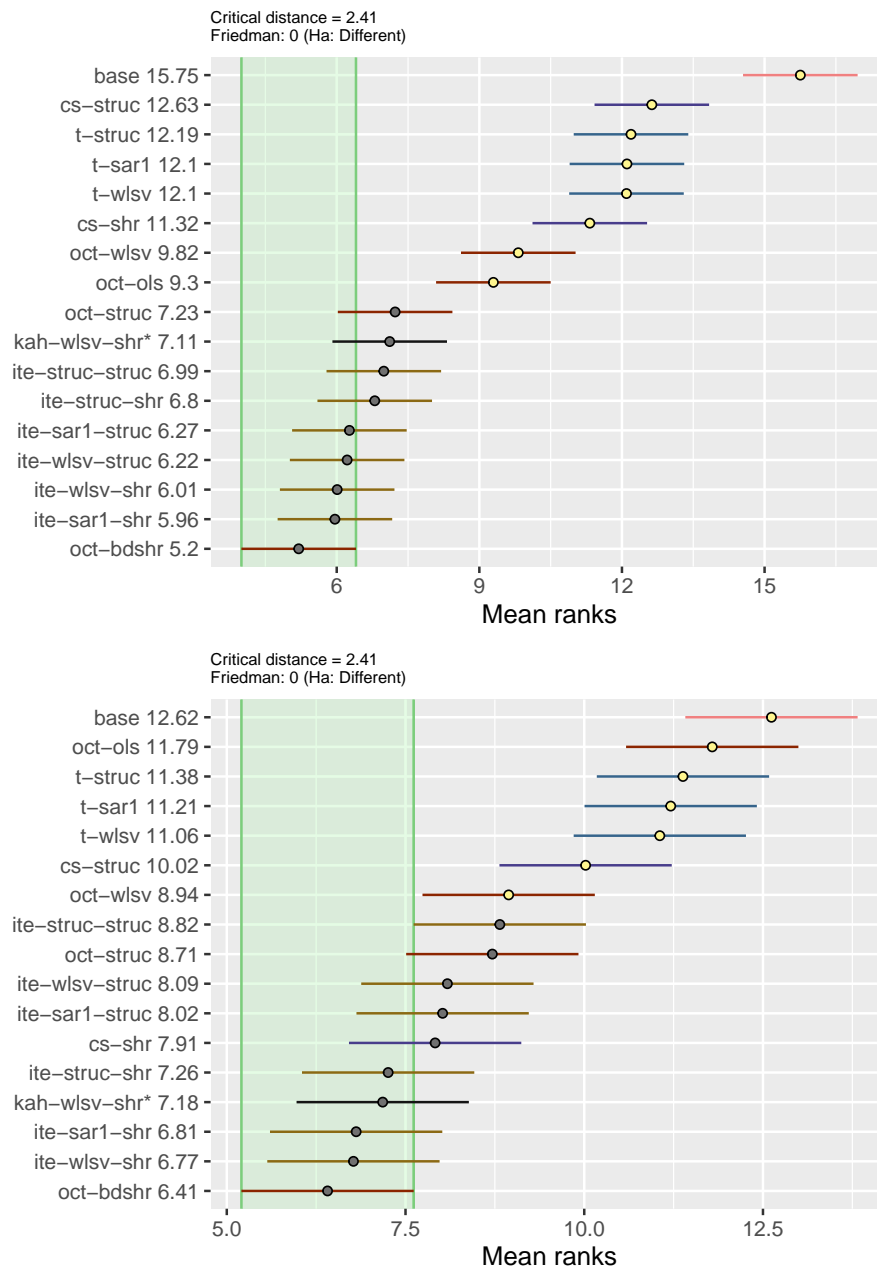
**Tabella C.1:** AvgRelMAE delle previsioni un passo in avanti e fino a  $h_k$  passi per tutti i livelli di aggregazione temporale  $k$ .

Procedure	Mensili		bimensili		Trimestrali		Quadrimestrali		Semi-annuali		Annuali	Tutte
	1	1-12	1	1-6	1	1-4	1	1-3	1	1-2	1	
<i>Tutte le 105 serie</i>												
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
cs-struc	0.9801	0.9770	0.9736	0.9735	0.9713	0.9702	0.9676	0.9678	0.9734	0.9661	0.9599	0.9729
cs-shr	0.9647	0.9618	0.9662	0.9663	0.9688	0.9680	0.9637	0.9645	0.9735	0.9746	0.9427	0.9642
t-struc	0.9846	0.9812	0.9800	0.9794	0.9725	0.9752	0.9688	0.9756	0.9530	0.9652	0.9309	0.9764
t-wlsv	0.9841	0.9807	0.9782	0.9791	0.9710	0.9753	0.9670	0.9757	0.9525	0.9661	0.9335	0.9763
t-sar1	0.9842	0.9807	0.9782	0.9792	0.9712	0.9754	0.9669	0.9757	0.9523	0.9661	0.9337	0.9763
kah-wlsv-shr*	0.9623	0.9581	0.9569	0.9550	0.9448	0.9465	0.9380	0.9434	0.9144	0.9268	0.8881	0.9493
ite-struc-struc	0.9684	0.9621	0.9598	0.9553	0.9458	0.9444	0.9355	0.9381	0.9109	0.9191	0.8715	0.9490
ite-struc-shr	0.9589	0.9551	0.9562	0.9538	0.9454	0.9461	0.9394	0.9432	0.9159	0.9275	0.8885	0.9478
ite-wlsv-struc	0.9674	0.9612	0.9573	0.9542	0.9429	0.9431	0.9320	0.9365	0.9078	0.9171	0.8706	0.9479
ite-wlsv-shr	0.9581	0.9542	0.9544	0.9525	0.9432	0.9447	0.9365	0.9416	0.9130	0.9255	0.8872	0.9466
ite-sar1-struc	0.9673	0.9613	0.9573	0.9544	0.9430	0.9432	0.9318	0.9367	0.9080	0.9173	0.8713	0.9480
ite-sar1-shr	0.9581	0.9543	0.9544	0.9526	0.9431	0.9447	0.9362	0.9416	0.9129	0.9254	0.8873	0.9466
oct-ols	0.9938	0.9811	0.9815	0.9708	0.9676	0.9567	0.9596	0.9507	0.9330	0.9293	<b>0.8684</b>	0.9641
oct-struc	0.9684	0.9621	0.9598	0.9553	0.9458	0.9444	0.9355	0.9381	0.9109	0.9191	0.8715	0.9490
oct-wlsv	0.9692	0.9654	0.9662	0.9661	0.9580	0.9615	0.9524	0.9598	0.9342	0.9474	0.9136	0.9612
oct-bdshr	<b>0.9571</b>	<b>0.9522</b>	<b>0.9523</b>	<b>0.9491</b>	<b>0.9395</b>	<b>0.9391</b>	<b>0.9308</b>	<b>0.9347</b>	<b>0.9053</b>	<b>0.9165</b>	0.8748	<b>0.9423</b>
<i>Le 29 serie aggregate</i>												
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
cs-struc	0.9568	0.9661	0.9614	0.9627	0.9432	0.9481	0.9451	0.9442	0.9587	0.9554	0.9407	0.9587
cs-shr	0.9464	0.9550	0.9590	0.9617	0.9546	0.9589	0.9575	0.9572	0.9788	0.9864	0.9274	0.9585
t-struc	0.9803	0.9798	0.9756	0.9703	0.9715	0.9691	0.9838	0.9784	0.9867	<b>1.0035</b>	0.9110	0.9752
t-wlsv	0.9791	0.9795	0.9703	0.9697	0.9657	0.9688	0.9786	0.9785	0.9841	<b>1.0055</b>	0.9134	0.9751
t-sar1	0.9789	0.9794	0.9701	0.9697	0.9659	0.9686	0.9781	0.9782	0.9831	<b>1.0048</b>	0.9126	0.9750
kah-wlsv-shr*	0.9534	0.9574	0.9516	0.9492	0.9369	0.9415	0.9485	0.9487	0.9396	0.9641	0.8625	0.9493
ite-struc-struc	0.9548	0.9569	0.9497	0.9439	0.9339	0.9338	0.9386	0.9356	0.9269	0.9460	0.8374	0.9432
ite-struc-shr	0.9478	0.9555	0.9550	0.9498	0.9421	0.9429	0.9536	0.9504	0.9433	0.9655	0.8634	0.9492
ite-wlsv-struc	0.9521	0.9551	<b>0.9439</b>	0.9418	<b>0.9268</b>	0.9311	0.9317	0.9326	0.9212	0.9434	0.8349	0.9410
ite-wlsv-shr	0.9455	0.9536	0.9497	0.9475	0.9352	0.9399	0.9471	0.9471	0.9380	0.9627	0.8612	0.9468
ite-sar1-struc	0.9522	0.9551	0.9441	0.9419	0.9270	0.9311	<b>0.9316</b>	0.9327	0.9211	0.9433	0.8350	0.9410
ite-sar1-shr	0.9454	0.9535	0.9496	0.9474	0.9351	0.9397	0.9468	0.9469	0.9373	0.9621	0.8607	0.9466
oct-ols	0.9764	0.9648	0.9599	<b>0.9396</b>	0.9372	<b>0.9192</b>	0.9424	<b>0.9200</b>	<b>0.9196</b>	<b>0.9206</b>	<b>0.7873</b>	<b>0.9379</b>
oct-struc	0.9548	0.9569	0.9497	0.9439	0.9339	0.9338	0.9386	0.9356	0.9269	0.9460	0.8374	0.9432
oct-wlsv	0.9624	0.9685	0.9657	0.9673	0.9588	0.9659	0.9715	0.9745	0.9717	0.9966	0.9023	0.9680
oct-bdshr	<b>0.9441</b>	<b>0.9499</b>	0.9451	0.9408	0.9272	0.9297	0.9366	0.9349	0.9233	0.9472	0.8410	0.9391
<i>Le 76 serie bottom</i>												
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
cs-struc	0.9892	0.9812	0.9784	0.9777	0.9823	0.9787	0.9764	0.9769	0.9791	0.9702	0.9673	0.9784
cs-shr	0.9718	0.9645	0.9690	0.9680	0.9742	0.9714	0.9661	0.9673	0.9715	0.9702	0.9485	0.9664
t-struc	0.9863	0.9818	0.9817	0.9829	0.9729	0.9776	0.9631	0.9745	0.9405	0.9509	0.9386	0.9768
t-wlsv	0.9860	0.9811	0.9813	0.9827	0.9730	0.9778	0.9625	0.9746	0.9407	0.9515	0.9413	0.9767
t-sar1	0.9862	0.9812	0.9813	0.9829	0.9732	0.9780	0.9627	0.9748	0.9409	0.9517	0.9419	0.9768
kah-wlsv-shr*	0.9658	0.9584	0.9589	0.9572	0.9478	0.9484	0.9340	0.9414	0.9050	0.9129	0.8981	0.9493
ite-struc-struc	0.9736	0.9641	0.9637	0.9597	0.9504	0.9485	0.9344	0.9391	0.9049	0.9090	0.8849	0.9513
ite-struc-shr	0.9631	0.9549	0.9567	0.9553	0.9466	0.9473	0.9340	0.9405	0.9056	0.9134	0.8983	0.9473
ite-wlsv-struc	0.9733	0.9635	0.9625	0.9590	0.9491	0.9477	0.9321	0.9380	0.9028	0.9073	<b>0.8847</b>	0.9505
ite-wlsv-shr	0.9630	0.9545	0.9562	0.9545	0.9462	0.9466	0.9324	0.9395	0.9036	0.9116	0.8974	0.9465
ite-sar1-struc	0.9731	0.9636	0.9624	0.9592	0.9491	0.9479	0.9319	0.9382	0.9030	0.9076	0.8856	0.9507
ite-sar1-shr	0.9631	0.9546	0.9563	0.9547	0.9462	0.9467	0.9322	0.9395	0.9038	0.9118	0.8977	0.9467
oct-ols	<b>1.0005</b>	0.9873	0.9899	0.9830	0.9794	0.9714	0.9663	0.9627	0.9381	0.9326	0.9015	0.9743
oct-struc	0.9736	0.9641	0.9637	0.9597	0.9504	0.9485	0.9344	0.9391	0.9049	0.9090	0.8849	0.9513
oct-wlsv	0.9718	0.9643	0.9664	0.9656	0.9577	0.9598	0.9452	0.9543	0.9202	0.9292	0.9180	0.9586
oct-bdshr	<b>0.9621</b>	<b>0.9531</b>	<b>0.9551</b>	<b>0.9523</b>	<b>0.9443</b>	<b>0.9427</b>	<b>0.9287</b>	<b>0.9346</b>	<b>0.8985</b>	<b>0.9050</b>	0.8881	<b>0.9435</b>



	all						bts						uts								
	all	1	2	3	4	6	12	all	1	2	3	4	6	12	all	1	2	3	4	6	12
oct bdsr	1	1	1	1	1	1	6	1	1	1	1	1	1	5	2	1	2	2	4	6	6
ite wlsv-shr	2	2	2	6	7	7	7	2	2	2	2	6	6	6	8	3	8	8	9	9	8
ite sar1-shr	3	3	3	7	6	6	8	3	3	3	3	7	7	7	7	2	7	7	8	8	7
ite struc-shr	4	4	4	8	8	9	10	4	4	4	4	8	9	9	9	7	10	10	11	11	10
ite wlsv-struc	5	6	5	2	2	2	2	6	6	6	5	2	2	1	3	5	3	4	2	3	2
ite sar1-struc	6	7	6	3	3	3	3	7	7	7	6	3	3	4	4	6	4	3	3	2	3
oct struc	7	10	8	4	4	4	4	8	9	8	8	4	4	2	6	9	6	6	6	5	4
ite struc-struc	8	9	9	5	5	5	5	9	8	9	9	5	5	3	5	8	5	5	5	4	5
kah wlsv-shr*	9	5	7	9	9	8	9	5	5	5	7	9	8	8	10	10	9	9	10	10	9
oct wlsv	10	11	10	11	11	11	11	10	10	10	10	10	10	11	13	13	13	13	13	13	11
oct ols	11	15	12	10	10	10	1	12	16	16	11	11	11	10	1	11	1	1	1	1	1
cs shr	12	8	11	12	12	16	15	11	11	11	12	12	15	15	11	4	11	12	12	12	15
cs struc	13	12	13	13	13	15	16	16	13	12	16	16	16	16	12	12	12	11	7	7	16
t wlsv	14	13	14	15	15	14	13	13	12	13	14	14	13	13	15	15	15	15	16	16	14
t sar1	15	14	15	16	16	13	14	15	14	14	15	15	14	14	14	14	14	14	14	15	13
t struc	16	16	16	14	14	12	12	14	15	15	13	13	12	12	16	16	16	16	15	14	12

Figura C.1: Nel pannello in alto vi è l’Average Relative MAE calcolato con tutte le serie e tutti gli orizzonti di previsione per ciascuna frequenza temporale. Nel pannello in basso vi sono le graduatorie divise per frequenza e orizzonte di previsione.



**Figura C.2:** Test di Nemenyi per tutte le 105 serie con un livello di significatività del 5%. Le procedure di riconciliazione sono ordinate verticalmente seguendo il rank medio dell'MAE (i) per le previsioni a tutte le frequenze e qualsiasi orizzonte di previsione (pannello in alto) e (ii) per le previsioni mensili un passo in avanti (pannello in basso).

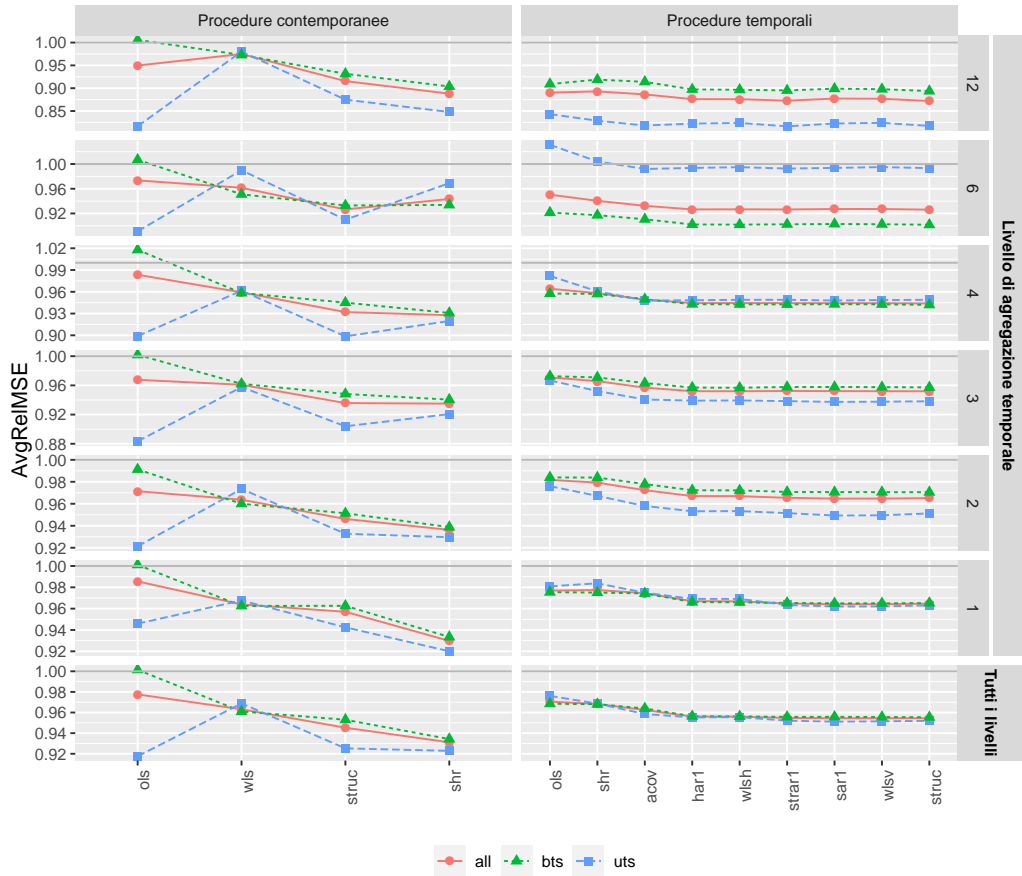
## C.2 Procedure di riconciliazione contemporanea e temporale

Tabella C.2: AvgRelMSE delle previsioni un passo in avanti e fino a  $h_k$  passi per tutti i livelli di aggregazione temporale  $k$ .

Procedure	Mensili		bimensili		Trimestrali		Quadrimestrali		Semi-annuali		Annuali	Tutte
	1	1-12	1	1-6	1	1-4	1	1-3	1	1-2	1	
<i>Tutte le 105 serie</i>												
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
cs-ols	0.9992	0.9856	0.9712	0.9714	0.9830	0.9677	<b>1.0018</b>	0.9835	<b>1.0119</b>	0.9735	0.9497	0.9776
cs-struc	0.9588	0.9571	0.9464	0.9462	0.9400	0.9358	0.9357	0.9320	0.9306	0.9266	0.9156	0.9453
cs-wls	0.9635	0.9640	0.9639	0.9637	0.9595	0.9609	0.9587	0.9592	0.9588	0.9616	0.9749	0.9632
cs-shr	<b>0.9321</b>	<b>0.9297</b>	<b>0.9363</b>	<b>0.9363</b>	<b>0.9349</b>	<b>0.9350</b>	0.9296	<b>0.9277</b>	0.9417	0.9434	0.8880	<b>0.9311</b>
t-ols	0.9843	0.9770	0.9850	0.9818	0.9705	0.9710	0.9586	0.9642	0.9313	0.9505	0.8904	0.9706
t-struc	0.9743	0.9647	0.9664	0.9651	0.9469	0.9520	0.9308	0.9439	0.9023	<b>0.9262</b>	<b>0.8720</b>	0.9545
t-wlsh	0.9767	0.9668	0.9677	0.9669	0.9441	0.9520	<b>0.9273</b>	0.9444	0.9000	0.9267	0.8759	0.9560
t-wlsv	0.9731	0.9642	0.9636	0.9647	0.9434	0.9521	0.9278	0.9443	0.9009	0.9272	0.8769	0.9545
t-acov	0.9892	0.9745	0.9726	0.9724	0.9479	0.9569	0.9335	0.9492	0.9074	0.9324	0.8864	0.9625
t-strar1	0.9745	0.9648	0.9668	0.9654	0.9475	0.9524	0.9313	0.9443	0.9026	0.9265	0.8727	0.9547
t-har1	0.9769	0.9670	0.9679	0.9670	0.9444	0.9521	0.9274	0.9444	<b>0.8998</b>	0.9266	0.8760	0.9561
t-sar1	0.9731	0.9642	0.9637	0.9647	0.9437	0.9522	0.9279	0.9443	0.9008	0.9272	0.8772	0.9545
t-shr	0.9804	0.9774	0.9775	0.9792	0.9560	0.9658	0.9393	0.9581	0.9120	0.9405	0.8931	0.9683
<i>Le 29 serie aggregate</i>												
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
cs-ols	0.9578	0.9459	<b>0.9126</b>	<b>0.9213</b>	<b>0.8985</b>	<b>0.8834</b>	0.9296	0.8989	0.9342	<b>0.8911</b>	0.8168	<b>0.9176</b>
cs-struc	0.9316	0.9425	0.9281	0.9328	0.9026	0.9040	<b>0.9049</b>	<b>0.8986</b>	<b>0.9150</b>	0.9100	0.8749	0.9253
cs-wls	0.9516	0.9677	0.9685	0.9735	0.9504	0.9577	0.9628	0.9615	0.9733	0.9900	0.9802	0.9688
cs-shr	<b>0.9106</b>	<b>0.9201</b>	0.9260	0.9296	0.9149	0.9207	0.9243	0.9197	0.9544	0.9691	0.8479	0.9229
t-ols	0.9903	0.9810	0.9885	0.9760	0.9784	0.9668	0.9946	0.9819	<b>1.0037</b>	<b>1.0310</b>	0.8431	0.9761
t-struc	0.9742	0.9632	0.9576	0.9512	0.9390	0.9382	0.9502	0.9490	0.9579	0.9934	0.8174	0.9520
t-wlsh	0.9790	0.9691	0.9552	0.9533	0.9318	0.9394	0.9419	0.9490	0.9544	0.9950	0.8239	0.9555
t-wlsv	0.9702	0.9621	0.9486	0.9495	0.9296	0.9377	0.9419	0.9486	0.9531	0.9951	0.8241	0.9514
t-acov	0.9849	0.9749	0.9580	0.9580	0.9318	0.9407	0.9417	0.9479	0.9473	0.9920	0.8182	0.9586
t-strar1	0.9746	0.9634	0.9579	0.9515	0.9393	0.9384	0.9499	0.9490	0.9569	0.9927	<b>0.8164</b>	0.9521
t-har1	0.9789	0.9692	0.9551	0.9532	0.9318	0.9391	0.9411	0.9483	0.9528	0.9937	0.8225	0.9553
t-sar1	0.9703	0.9621	0.9486	0.9493	0.9295	0.9374	0.9410	0.9480	0.9515	0.9938	0.8228	0.9511
t-shr	0.9842	0.9837	0.9612	0.9672	0.9342	0.9522	0.9442	0.9606	0.9525	<b>1.0043</b>	0.8289	0.9686
<i>Le 76 serie bottom</i>												
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
cs-ols	<b>1.0155</b>	<b>1.0011</b>	0.9945	0.9913	<b>1.0173</b>	<b>1.0019</b>	<b>1.0309</b>	<b>1.0178</b>	<b>1.0433</b>	<b>1.0070</b>	<b>1.0059</b>	<b>1.0015</b>
cs-struc	0.9693	0.9627	0.9535	0.9514	0.9547	0.9482	0.9477	0.9451	0.9492	0.9330	0.9316	0.9530
cs-wls	0.9681	0.9625	0.9621	0.9600	0.9629	0.9621	0.9571	0.9583	0.9533	0.9510	0.9729	0.9610
cs-shr	<b>0.9404</b>	<b>0.9335</b>	<b>0.9403</b>	<b>0.9388</b>	<b>0.9427</b>	<b>0.9405</b>	0.9316	<b>0.9308</b>	0.9369	0.9338	0.9038	<b>0.9343</b>
t-ols	0.9821	0.9754	0.9837	0.9840	0.9675	0.9726	0.9453	0.9576	0.9051	0.9214	0.9091	0.9685
t-struc	0.9744	0.9653	0.9698	0.9705	0.9500	0.9573	0.9236	0.9420	0.8819	<b>0.9017</b>	<b>0.8938</b>	0.9554
t-wlsh	0.9759	0.9660	0.9725	0.9722	0.9488	0.9568	<b>0.9218</b>	0.9427	<b>0.8801</b>	0.9019	0.8966	0.9562
t-wlsv	0.9742	0.9650	0.9693	0.9706	0.9488	0.9576	0.9224	0.9427	0.8817	0.9026	0.8979	0.9556
t-acov	0.9909	0.9743	0.9782	0.9779	0.9541	0.9632	0.9304	0.9497	0.8926	0.9106	0.9139	0.9639
t-strar1	0.9745	0.9653	0.9702	0.9708	0.9507	0.9578	0.9243	0.9426	0.8827	0.9025	0.8952	0.9558
t-har1	0.9761	0.9661	0.9729	0.9723	0.9493	0.9570	0.9223	0.9429	0.8803	0.9022	0.8973	0.9564
t-sar1	0.9742	0.9650	0.9695	0.9706	0.9492	0.9578	0.9229	0.9429	0.8821	0.9030	0.8990	0.9558
t-shr	0.9789	0.9751	0.9838	0.9839	0.9644	0.9710	0.9375	0.9571	0.8970	0.9173	0.9189	0.9681

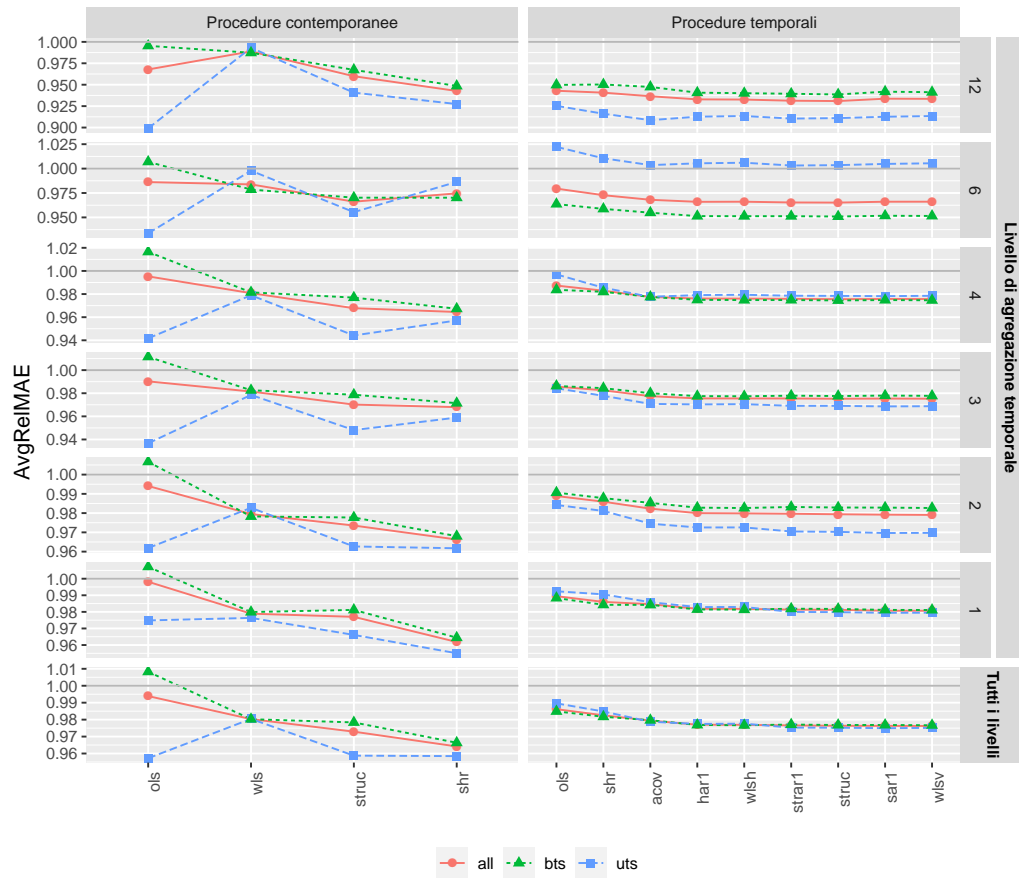
**Tabella C.3:** AvgRelMAE delle previsioni un passo in avanti e fino a  $h_k$  passi per tutti i livelli di aggregazione temporale  $k$ .

Procedure	Mensili		bimensili		Trimestrali		Quadrimestrali		Semi-annuali		Annuali	Tutte
	1	1-12	1	1-6	1	1-4	1	1-3	1	1-2	1	
<i>Tutte le 105 serie</i>												
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
cs-ols	<b>1.0104</b>	0.9981	0.9959	0.9941	0.9972	0.9903	<b>1.0056</b>	0.9953	<b>1.0039</b>	0.9862	0.9678	0.9939
cs-struc	0.9801	0.9770	0.9736	0.9735	0.9713	0.9702	0.9676	0.9678	0.9734	0.9661	0.9599	0.9729
cs-wls	0.9781	0.9789	0.9800	0.9795	0.9808	0.9815	0.9785	0.9808	0.9813	0.9838	0.9889	0.9803
cs-shr	<b>0.9647</b>	<b>0.9618</b>	<b>0.9662</b>	<b>0.9663</b>	<b>0.9688</b>	<b>0.9680</b>	<b>0.9637</b>	<b>0.9645</b>	0.9735	0.9746	0.9427	<b>0.9642</b>
t-ols	0.9907	0.9895	0.9904	0.9889	0.9853	0.9858	0.9842	0.9873	0.9697	0.9795	0.9430	0.9862
t-struc	0.9846	0.9812	0.9800	0.9794	0.9725	0.9752	0.9688	0.9756	0.9530	<b>0.9652</b>	<b>0.9309</b>	0.9764
t-wlsh	0.9847	0.9818	0.9804	0.9799	0.9711	0.9755	0.9660	0.9761	0.9523	0.9661	0.9327	0.9769
t-wlsv	0.9841	0.9807	0.9782	0.9791	0.9710	0.9753	0.9670	0.9757	0.9525	0.9661	0.9335	0.9763
t-acov	0.9900	0.9847	0.9825	0.9823	0.9722	0.9775	0.9685	0.9775	0.9557	0.9680	0.9365	0.9794
t-strar1	0.9847	0.9814	0.9801	0.9797	0.9728	0.9755	0.9690	0.9759	0.9531	0.9653	0.9313	0.9766
t-har1	0.9848	0.9819	0.9804	0.9800	0.9712	0.9755	0.9661	0.9761	<b>0.9521</b>	0.9660	0.9329	0.9770
t-sar1	0.9842	0.9807	0.9782	0.9792	0.9712	0.9754	0.9669	0.9757	0.9523	0.9661	0.9337	0.9763
t-shr	0.9863	0.9860	0.9864	0.9859	0.9771	0.9826	0.9723	0.9829	0.9581	0.9728	0.9407	0.9826
<i>Le 29 serie aggregate</i>												
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
cs-ols	0.9808	0.9748	<b>0.9589</b>	0.9619	<b>0.9429</b>	<b>0.9367</b>	0.9629	<b>0.9417</b>	<b>0.9540</b>	<b>0.9337</b>	<b>0.8991</b>	<b>0.9572</b>
cs-struc	0.9568	0.9661	0.9614	0.9627	0.9432	0.9481	<b>0.9451</b>	0.9442	0.9587	0.9554	0.9407	0.9587
cs-wls	0.9621	0.9764	0.9801	0.9828	0.9726	0.9785	0.9769	0.9789	0.9889	0.9978	0.9931	0.9804
cs-shr	<b>0.9464</b>	<b>0.9550</b>	0.9590	<b>0.9617</b>	0.9546	0.9589	0.9575	0.9572	0.9788	0.9864	0.9274	0.9585
t-ols	0.9899	0.9924	0.9930	0.9842	0.9926	0.9843	<b>1.0082</b>	0.9970	<b>1.0095</b>	<b>1.0223</b>	0.9253	0.9896
t-struc	0.9803	0.9798	0.9756	0.9703	0.9715	0.9691	0.9838	0.9784	0.9867	<b>1.0035</b>	0.9110	0.9752
t-wlsh	0.9817	0.9829	0.9743	0.9726	0.9670	0.9706	0.9778	0.9794	0.9855	<b>1.0060</b>	0.9135	0.9776
t-wlsv	0.9791	0.9795	0.9703	0.9697	0.9657	0.9688	0.9786	0.9785	0.9841	<b>1.0055</b>	0.9134	0.9751
t-acov	0.9829	0.9858	0.9772	0.9745	0.9674	0.9708	0.9777	0.9776	0.9815	<b>1.0036</b>	0.9086	0.9787
t-strar1	0.9803	0.9800	0.9756	0.9705	0.9719	0.9691	0.9837	0.9786	0.9860	<b>1.0032</b>	0.9105	0.9753
t-har1	0.9815	0.9829	0.9740	0.9726	0.9672	0.9703	0.9774	0.9791	0.9846	<b>1.0054</b>	0.9127	0.9775
t-sar1	0.9789	0.9794	0.9701	0.9697	0.9659	0.9686	0.9781	0.9782	0.9831	<b>1.0048</b>	0.9126	0.9750
t-shr	0.9870	0.9906	0.9805	0.9811	0.9688	0.9778	0.9789	0.9855	0.9837	<b>1.0106</b>	0.9161	0.9848
<i>Le 76 serie bottom</i>												
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
cs-ols	<b>1.0219</b>	<b>1.0072</b>	<b>1.0103</b>	<b>1.0066</b>	<b>1.0188</b>	<b>1.0115</b>	<b>1.0224</b>	<b>1.0165</b>	<b>1.0236</b>	<b>1.0070</b>	0.9954	<b>1.0082</b>
cs-struc	0.9892	0.9812	0.9784	0.9777	0.9823	0.9787	0.9764	0.9769	0.9791	0.9702	0.9673	0.9784
cs-wls	0.9843	0.9799	0.9800	0.9783	0.9839	0.9826	0.9791	0.9815	0.9784	0.9785	0.9873	0.9803
cs-shr	<b>0.9718</b>	<b>0.9645</b>	<b>0.9690</b>	<b>0.9680</b>	0.9742	<b>0.9714</b>	0.9661	<b>0.9673</b>	0.9715	0.9702	0.9485	<b>0.9664</b>
t-ols	0.9910	0.9883	0.9894	0.9907	0.9826	0.9863	0.9752	0.9837	0.9549	0.9637	0.9498	0.9849
t-struc	0.9863	0.9818	0.9817	0.9829	0.9729	0.9776	0.9631	0.9745	0.9405	<b>0.9509</b>	<b>0.9386</b>	0.9768
t-wlsh	0.9858	0.9813	0.9827	0.9826	<b>0.9727</b>	0.9774	<b>0.9616</b>	0.9748	<b>0.9400</b>	0.9513	0.9401	0.9767
t-wlsv	0.9860	0.9811	0.9813	0.9827	0.9730	0.9778	0.9625	0.9746	0.9407	0.9515	0.9413	0.9767
t-acov	0.9928	0.9842	0.9846	0.9853	0.9741	0.9800	0.9650	0.9775	0.9461	0.9548	0.9474	0.9797
t-strar1	0.9864	0.9819	0.9818	0.9832	0.9732	0.9779	0.9634	0.9748	0.9408	0.9512	0.9394	0.9771
t-har1	0.9860	0.9815	0.9828	0.9828	0.9728	0.9775	0.9619	0.9750	0.9400	0.9513	0.9407	0.9768
t-sar1	0.9862	0.9812	0.9813	0.9829	0.9732	0.9780	0.9627	0.9748	0.9409	0.9517	0.9419	0.9768
t-shr	0.9860	0.9843	0.9887	0.9878	0.9803	0.9844	0.9698	0.9820	0.9485	0.9587	0.9503	0.9817



	all							bts					uts								
	all	1	2	3	4	6	12	all	1	2	3	4	6	12	all	1	2	3	4	6	12
cs shr	1	1	1	1	1	10	8	1	1	1	1	1	11	7	2	1	2	3	3	3	11
cs struc	2	2	2	2	2	3	11	2	3	2	2	8	10	11	3	2	3	2	1	2	12
t struc	3	6	6	4	3	1	1	3	6	4	5	2	1	1	6	6	6	6	10	7	3
t wlsv	4	5	5	5	4	7	5	4	5	5	6	4	5	5	5	4	5	5	7	11	8
t sar1	5	4	4	7	6	6	6	6	4	6	8	7	6	6	4	5	4	4	5	9	6
t strar1	6	7	7	8	5	2	2	5	7	7	7	3	4	2	7	7	7	7	9	6	1
t wsh	7	8	8	3	8	5	3	7	8	8	3	5	2	3	9	9	9	9	8	10	7
t har1	8	9	9	6	7	4	4	8	9	9	4	6	3	4	8	10	8	8	6	8	5
t acov	9	10	11	9	9	8	7	10	10	10	10	9	7	9	10	11	10	10	4	5	4
cs wls	10	3	3	10	11	12	13	9	2	3	9	12	12	12	12	8	12	12	12	4	13
t shr	11	12	12	11	10	9	10	11	11	11	11	10	8	10	11	13	11	11	11	13	9
t ols	12	11	13	13	12	11	9	12	12	12	12	11	9	8	13	12	13	13	13	14	10
cs ols	13	13	10	12	13	13	12	14	14	13	14	14	14	14	1	3	1	1	2	1	2
base	14	14	14	14	14	14	14	13	13	14	13	13	13	13	14	14	14	14	14	12	14

Figura C.3: Nel pannello in alto vi è l’Average Relative MSE calcolato con tutte le serie e tutti gli orizzonti di previsione per ciascuna frequenza temporale. Nel pannello in basso vi sono le graduatorie divise per frequenza e orizzonte di previsione.



	all						bts						uts								
	all	1	2	3	4	6	12	all	1	2	3	4	6	12	all	1	2	3	4	6	12
cs shr	1	1	1	1	1	10	9	1	1	1	1	1	10	8	2	1	1	3	3	3	11
cs struc	2	2	2	2	2	7	11	8	4	2	8	8	11	11	3	2	3	2	2	2	12
t wls	3	4	3	4	4	6	5	3	3	5	5	3	5	5	5	6	5	5	7	11	7
t sar1	4	5	4	5	5	4	6	5	5	7	7	5	6	6	4	5	4	4	5	9	5
t struc	5	6	5	3	3	1	1	4	8	8	4	2	1	1	6	7	6	6	6	7	4
t strar1	6	7	7	6	6	2	2	7	9	9	6	6	2	2	7	8	7	7	8	6	3
t wls	7	8	8	7	7	5	3	2	6	4	2	4	3	3	9	10	9	9	11	12	8
t har1	8	9	9	8	8	3	4	6	7	6	3	7	4	4	8	9	8	8	10	10	6
t acov	9	10	10	9	9	8	7	9	10	10	9	9	7	7	10	11	10	10	4	8	2
cs wls	10	3	6	10	10	12	13	10	2	3	10	10	12	12	11	4	12	12	9	4	13
t shr	11	11	11	11	11	9	8	11	11	11	11	11	8	10	12	12	11	11	12	13	9
t ols	12	12	12	12	12	11	10	12	12	12	12	12	9	9	13	13	13	13	13	14	10
cs ols	13	13	13	13	13	13	12	14	14	14	14	14	14	13	1	3	2	1	1	1	1
base	14	14	14	14	14	14	14	13	13	13	13	13	13	14	14	14	14	14	14	5	14

Figura C.4: Nel pannello in alto vi è l’Average Relative MAE calcolato con tutte le serie e tutti gli orizzonti di previsione per ciascuna frequenza temporale. Nel pannello in basso vi sono le graduatorie divise per frequenza e orizzonte di previsione.

### C.3 Procedure euristiche cross-temporali

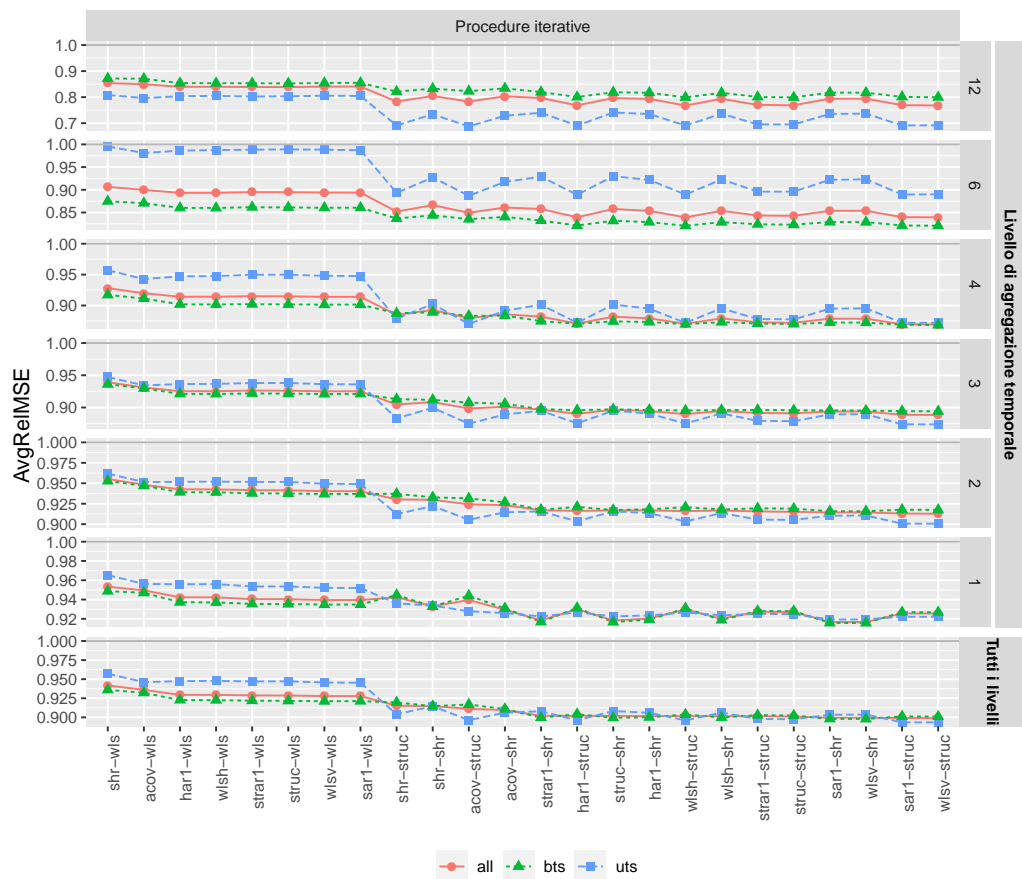
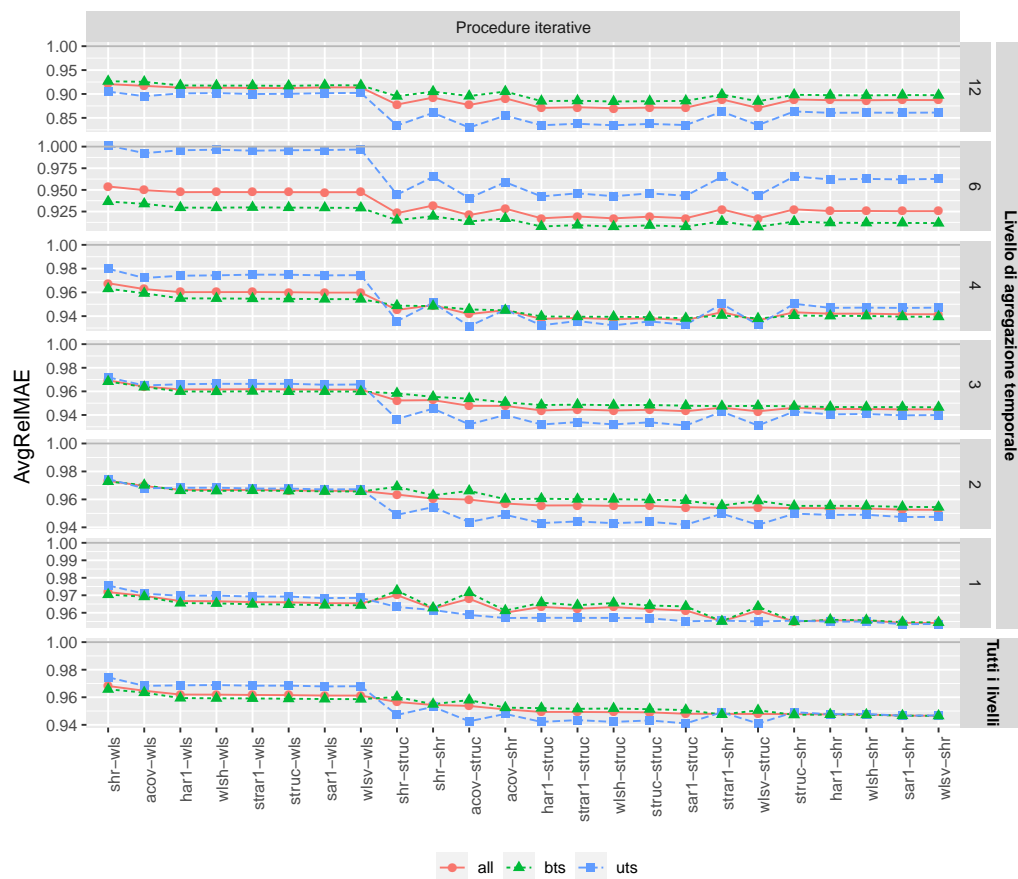


Figura C.5: Average Relative MSE calcolato con tutte le serie e tutti gli orizzonti di previsioni per ciascuna frequenza.





**Figura C.6:** Average Relative MAE calcolato con tutte le serie e tutti gli orizzonti di previsioni per ciascuna frequenza.

	all							bts							uts						
	all	1	2	3	4	6	12	all	1	2	3	4	6	12	all	1	2	3	4	6	12
ite wlsv-struc-	1	7	1	6	7	8	8	7	7	4	1	1	2	3	10	11	10	10	12	14	15
ite sar1-struc-	2	8	4	7	8	10	11	8	8	6	2	2	4	6	11	12	11	11	14	13	14
ite wlsv-shr-	3	1	7	13	14	19	21	1	1	1	3	7	8	10	19	9	19	21	24	25	27
ite sar1-shr-	4	2	8	14	15	17	22	2	2	2	5	8	10	11	18	8	18	20	22	22	25
ite struc-struc-	5	9	9	11	11	11	10	9	9	9	6	4	5	1	15	18	14	15	15	17	16
ite struc-ols-	6	18	2	1	1	1	1	19	28	16	15	15	16	16	3	3	3	3	6	6	1
ite strar1-struc-	7	10	10	12	12	12	12	10	11	10	10	6	6	5	16	19	16	16	16	16	17
ite wlsh-shr-	8	5	13	15	16	18	20	5	5	7	8	9	7	8	23	16	22	23	23	24	26
ite wlsh-struc-	9	12	11	9	9	7	7	11	13	11	4	3	1	2	12	21	12	13	11	12	12
ite har1-shr-	10	6	15	16	17	16	19	6	6	8	9	10	9	9	21	15	21	22	21	21	24
ite struc-shr-	11	3	14	17	19	20	23	3	3	3	11	11	11	12	25	14	25	25	27	28	29
ite har1-struc-	12	14	12	10	10	9	9	12	14	12	7	5	3	4	13	22	13	14	13	11	11
ite strar1-shr-	13	4	16	18	20	21	24	4	4	5	12	12	12	13	24	13	24	24	25	27	28
ite wlsv-ols-	14	17	3	2	2	4	4	25	29	19	18	18	21	23	1	1	1	1	2	3	5
ite strar1-ols-	15	20	6	3	3	2	2	20	30	18	16	16	17	17	4	4	6	6	7	7	2
ite sar1-ols-	16	19	5	4	4	6	6	27	31	20	20	20	23	25	2	2	2	2	5	5	7
ite wlsh-ols-	17	30	17	5	5	3	3	29	33	29	22	22	20	22	5	5	4	4	3	2	4
ite har1-ols-	18	31	18	8	6	5	5	30	34	30	24	23	22	24	6	6	5	5	4	4	6
ite acov-shr-	19	11	19	21	22	24	25	13	12	13	13	14	15	19	22	20	23	19	20	20	21
ite acov-struc-	20	21	20	19	18	14	16	16	24	14	14	13	13	15	14	23	15	12	10	10	10
ite shr-shr-	21	16	22	24	25	25	26	15	15	15	17	19	18	18	26	25	26	27	28	26	23
ite shr-struc-	22	28	23	22	21	15	15	18	25	24	19	17	14	14	20	26	20	18	17	15	13
ite acov-ols-	23	36	21	20	13	13	14	36	44	34	33	31	31	32	7	7	7	7	1	1	3
ite ols-struc-	24	24	24	25	26	26	17	17	23	21	21	21	19	7	29	28	28	29	29	29	22
ite ols-shr-	25	15	26	27	28	27	27	14	10	17	23	24	24	20	30	27	30	30	30	30	30
ite bu-shr-	26	13	27	28	27	28	30	31	16	32	34	34	36	37	17	10	17	17	18	18	19
ite ols-ols-	27	33	25	23	23	23	13	35	35	33	31	32	32	21	9	17	9	9	9	9	9
ite sar1-wls-	28	22	28	30	29	31	34	22	18	23	27	26	28	31	31	31	31	32	33	33	36
ite wlsv-wls-	29	23	29	29	30	32	33	21	17	22	25	25	27	30	32	32	32	33	35	36	38
ite struc-wls-	30	25	31	33	33	33	28	23	19	25	29	27	29	26	35	34	35	37	37	37	33
ite strar1-wls-	31	26	32	34	34	34	29	24	20	26	30	30	30	27	34	33	34	36	36	35	32
ite shr-ols-	32	38	30	26	24	22	18	37	48	37	37	36	35	36	8	24	8	8	8	8	8
ite wlsh-wls-	33	27	33	31	32	30	32	26	21	27	26	28	25	28	37	36	37	35	34	34	37
ite har1-wls-	34	29	34	32	31	29	31	28	22	28	28	29	26	29	36	35	36	34	32	32	34
ite acov-wls-	35	32	35	35	35	35	35	32	27	31	32	33	33	33	33	37	33	31	31	31	31
ite shr-wls-	36	35	36	36	36	36	36	33	32	35	35	35	34	35	38	38	38	38	38	38	39
ite ols-wls-	37	34	37	37	37	37	37	34	26	36	36	37	37	34	40	40	40	40	40	41	40
ite bu-struc-	38	37	38	38	38	38	38	45	37	45	47	45	47	48	28	29	29	28	26	23	20
ite bu-wls-	39	39	39	39	39	39	43	46	36	48	48	48	48	47	39	39	39	39	39	39	35
ite struc-bu-	40	43	41	42	40	40	39	38	40	38	40	38	38	38	43	47	45	45	45	43	42
ite wlsv-bu-	41	42	40	43	44	44	44	39	39	39	41	40	42	42	47	44	43	46	47	48	47
ite strar1-bu-	42	44	43	44	43	43	40	40	41	41	42	39	41	39	48	48	46	48	46	44	43
ite sar1-bu-	43	41	42	45	45	45	45	41	38	40	43	43	43	43	46	43	44	47	48	47	46
ite wlsh-bu-	44	45	44	40	41	41	41	42	42	42	38	41	39	40	45	46	48	43	43	46	45
ite har1-bu-	45	46	45	41	42	42	42	43	43	43	39	42	40	41	44	45	47	44	44	45	44
ite acov-bu-	46	47	46	46	46	46	46	44	45	44	44	44	44	45	42	42	42	42	42	42	41
ite bu-ols-	47	40	48	48	47	49	49	50	50	50	50	50	50	50	27	30	27	26	19	19	18
ite shr-bu-	48	48	49	47	48	47	48	47	46	46	45	46	45	46	49	49	49	49	49	49	48
ite ols-bu-	49	49	50	49	49	48	47	48	47	47	46	47	46	44	50	50	50	50	50	50	49
base	50	50	47	50	50	50	50	49	49	49	49	49	49	49	41	41	41	41	41	40	50

Figura C.7: Graduatorie (Average Relative MSE) divise per frequenza e orizzonte di previsione.

	all							bts							uts						
	all	1	2	3	4	6	12	all	1	2	3	4	6	12	all	1	2	3	4	6	12
ite wlsv-shr -	1	1	1	11	15	17	21	1	1	1	1	5	7	13	19	5	19	21	24	24	27
ite sar1-shr -	2	2	2	12	14	16	22	2	2	2	2	6	8	15	18	4	18	19	22	23	25
ite wls-shr -	3	5	3	15	18	20	19	4	5	3	3	9	9	11	22	8	23	24	25	25	26
ite har1-shr -	4	6	4	14	17	19	20	6	6	5	4	10	10	14	21	7	20	23	23	22	24
ite struc-shr -	5	3	5	17	19	21	23	3	3	4	5	11	11	16	25	12	25	26	26	28	29
ite wlsv-struc -	6	8	7	1	5	7	10	7	10	7	7	1	1	2	10	10	10	11	13	14	14
ite strar1-shr -	7	4	6	18	20	22	24	5	4	6	6	12	13	19	24	13	24	25	27	26	28
ite sar1-struc -	8	9	8	2	7	10	12	8	11	8	8	2	2	5	11	11	11	10	14	13	15
ite struc-struc -	9	11	9	9	11	12	13	9	12	9	11	3	5	3	15	15	15	16	15	17	16
ite wls-shr -	10	15	10	5	9	8	9	11	21	12	9	4	3	1	12	18	12	14	11	12	12
ite strar1-struc -	11	12	12	10	12	13	14	10	14	10	12	7	6	6	17	19	16	17	17	18	18
ite har1-struc -	12	16	11	6	10	9	11	12	22	13	10	8	4	4	13	20	13	12	12	11	13
ite acov-shr -	13	7	13	19	21	23	25	13	7	11	13	13	15	24	23	17	21	22	21	21	21
ite struc-ols -	14	27	14	3	1	1	1	27	29	28	24	17	16	7	3	3	3	5	6	6	2
ite wlsv-ols -	15	28	15	4	2	3	4	29	31	30	27	19	19	18	1	1	1	1	2	3	5
ite strar1-ols -	16	30	18	8	4	2	2	28	30	29	26	18	17	8	4	6	4	6	7	8	3
ite sar1-ols -	17	29	17	7	3	5	6	30	32	31	28	21	21	21	2	2	2	2	5	5	7
ite acov-struc -	18	23	16	20	16	14	16	16	25	20	14	14	12	10	14	21	14	13	10	10	10
ite shr-shr -	19	13	19	23	23	25	26	14	9	14	15	15	18	23	27	23	26	28	28	27	23
ite wls-shr -	20	33	20	13	6	4	3	32	41	33	29	23	20	17	5	14	5	3	3	2	4
ite har1-ols -	21	34	21	16	8	6	5	34	42	34	30	24	22	20	6	16	6	4	4	4	6
ite shr-struc -	22	25	22	22	22	15	17	23	28	23	17	16	14	9	20	24	22	18	16	15	11
ite bu-shr -	23	10	24	24	26	27	28	25	16	26	32	31	33	37	16	9	17	15	18	19	19
ite ols-shr -	24	14	23	27	28	28	27	15	8	15	16	22	25	25	30	27	30	30	30	30	30
ite ols-struc -	25	26	27	25	27	26	18	24	27	24	18	20	23	12	29	28	28	29	29	29	22
ite acov-ols -	26	38	32	21	13	11	7	36	47	41	35	33	24	26	7	22	7	7	1	1	1
ite wlsv-wls -	27	17	25	29	30	30	33	17	13	16	20	25	26	32	32	31	32	33	35	37	38
ite sar1-wls -	28	18	26	30	29	29	34	18	15	17	22	26	27	33	31	30	31	32	33	35	36
ite struc-wls -	29	19	28	33	31	32	29	19	17	18	21	27	30	27	35	32	33	37	36	34	33
ite strar1-wls -	30	20	30	34	34	33	30	20	18	22	25	28	31	30	34	33	34	35	37	32	32
ite wls-shr -	31	21	29	32	33	34	31	21	19	19	19	29	28	29	37	35	37	36	34	36	37
ite har1-wls -	32	22	31	31	32	31	32	22	20	21	23	30	29	31	36	34	36	34	32	33	34
ite ols-ols -	33	37	34	26	25	24	8	35	45	40	36	34	32	22	9	25	9	9	9	9	9
ite acov-wls -	34	24	33	35	35	35	35	26	23	25	31	32	34	34	33	36	35	31	31	31	31
ite shr-ols -	35	39	36	28	24	18	15	47	48	46	43	37	35	28	8	29	8	8	8	7	8
ite shr-wls -	36	31	35	36	36	37	36	31	24	27	33	35	36	35	38	38	38	38	38	40	39
ite ols-wls -	37	32	37	38	38	38	38	33	26	32	34	36	37	36	40	40	40	40	40	41	40
ite bu-struc -	38	35	38	37	37	36	37	44	35	45	45	45	44	47	26	26	27	27	20	20	20
ite bu-wls -	39	36	39	39	39	39	39	45	33	48	48	47	47	48	39	39	39	39	39	39	35
ite wls-bu -	40	40	40	40	41	43	42	37	37	35	37	40	40	40	44	44	45	46	45	46	45
ite har1-bu -	41	41	43	42	44	42	43	41	38	37	38	43	41	41	43	43	46	44	44	45	44
ite wlsv-bu -	42	42	41	44	42	44	44	38	34	36	40	39	42	42	48	46	48	47	47	48	47
ite struc-bu -	43	44	42	41	40	40	40	39	39	39	39	38	38	38	45	47	43	43	43	44	42
ite sar1-bu -	44	43	44	45	45	45	45	40	36	38	42	41	43	43	47	45	47	48	48	47	46
ite strar1-bu -	45	45	45	43	43	41	41	42	40	42	41	42	39	39	46	48	44	45	46	43	43
ite acov-bu -	46	46	46	46	46	46	46	43	43	43	44	44	45	44	42	42	42	42	42	42	41
ite shr-bu -	47	47	47	47	47	47	47	46	44	44	46	46	46	46	49	49	49	49	49	49	48
ite ols-bu -	48	49	49	48	49	49	48	48	46	47	47	48	48	45	50	50	50	50	50	50	49
ite bu-ols -	49	48	50	49	48	48	49	50	50	50	50	50	50	50	28	37	29	20	19	16	17
base -	50	50	48	50	50	50	50	49	49	49	49	49	49	49	41	41	41	41	41	38	50

Figura C.8: Graduatorie (Average Relative MAE) divise per frequenza e orizzonte di previsione.

Tabella C.4: AvgRelMSE delle previsioni un passo in avanti e fino a  $h_k$  passi per tutte le 105 serie.

Procedure	Mensili		bimensili		Trimestrali		Quadrimestrali		Semi-annuali		Annuali	Tutte
	1	1-12	1	1-6	1	1-4	1	1-3	1	1-2	1	1
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ite-acov-bu	<b>1.0112</b>	0.9924	0.9962	0.9949	0.9699	0.9793	0.9578	0.9745	0.9300	0.9560	0.9060	0.9833
ite-acov-ols	0.9806	0.9565	0.9330	0.9280	0.9031	0.8995	0.8801	0.8771	0.8440	0.8464	0.7816	0.9185
ite-acov-shr	0.9435	0.9295	0.9293	0.9233	0.9004	0.9012	0.8780	0.8858	0.8413	0.8610	0.8033	0.9096
ite-acov-struc	0.9558	0.9395	0.9277	0.9243	0.8969	0.8985	0.8720	0.8796	0.8327	0.8493	0.7831	0.9111
ite-acov-wls	0.9636	0.9495	0.9509	0.9481	0.9262	0.9310	0.9087	0.9199	0.8777	0.8998	0.8496	0.9360
ite-bu-ols	0.9992	0.9856	<b>1.0048</b>	<b>1.0021</b>	0.9896	0.9929	0.9881	0.9852	0.9786	0.9827	0.9645	0.9891
ite-bu-shr	0.9321	0.9297	0.9412	0.9369	0.9144	0.9187	0.8898	0.9031	0.8595	0.8855	0.8392	0.9202
ite-bu-struc	0.9588	0.9571	0.9681	0.9682	0.9502	0.9543	0.9319	0.9404	0.9040	0.9243	0.8771	0.9519
ite-bu-wls	0.9635	0.9640	0.9808	0.9822	0.9665	0.9732	0.9499	0.9638	0.9235	0.9489	0.8965	0.9655
ite-har1-bu	0.9980	0.9874	0.9926	0.9921	0.9677	0.9764	0.9537	0.9717	0.9220	0.9516	0.8958	0.9791
ite-har1-ols	0.9671	0.9438	0.9264	0.9183	0.8931	0.8892	0.8704	0.8685	0.8358	0.8367	0.7662	0.9074
ite-har1-shr	0.9259	0.9203	0.9221	0.9169	0.8935	0.8946	0.8696	0.8792	0.8329	0.8536	0.7935	0.9017
ite-har1-struc	0.9406	0.9300	0.9208	0.9162	0.8891	0.8901	0.8628	0.8708	0.8231	0.8396	0.7685	0.9019
ite-har1-wls	0.9506	0.9423	0.9458	0.9426	0.9214	0.9253	0.9016	0.9142	0.8699	0.8933	0.8397	0.9295
ite-ols-bu	<b>1.0065</b>	0.9977	<b>1.0087</b>	<b>1.0057</b>	0.9918	0.9948	0.9822	0.9897	0.9540	0.9757	0.9141	0.9934
ite-ols-ols	0.9726	0.9515	0.9471	0.9335	0.9227	0.9063	0.9027	0.8896	0.8640	0.8601	0.7708	0.9207
ite-ols-shr	0.9343	0.9307	0.9423	0.9347	0.9226	0.9176	0.9046	0.9046	0.8705	0.8848	0.8172	0.9192
ite-ols-struc	0.9496	0.9399	0.9421	0.9334	0.9201	0.9119	0.8992	0.8958	0.8613	0.8702	0.7894	0.9188
ite-ols-wls	0.9592	0.9524	0.9650	0.9592	0.9492	0.9469	0.9353	0.9382	0.9063	0.9232	0.8635	0.9461
ite-sar1-bu	0.9950	0.9864	0.9886	0.9905	0.9674	0.9773	0.9546	0.9721	0.9242	0.9526	0.8974	0.9787
ite-sar1-ols	0.9586	0.9364	0.9221	0.9137	0.8914	0.8866	0.8705	0.8671	0.8365	0.8369	0.7670	0.9029
ite-sar1-shr	0.9227	0.9167	0.9184	0.9143	0.8927	0.8938	0.8697	0.8787	0.8333	0.8537	0.7941	0.8995
ite-sar1-struc	0.9355	0.9256	0.9166	0.9129	0.8882	0.8887	0.8626	0.8697	0.8236	0.8398	0.7692	0.8991
ite-sar1-wls	0.9471	0.9395	0.9417	0.9403	0.9205	0.9252	0.9018	0.9140	0.8706	0.8938	0.8407	0.9278
ite-shr-bu	0.9977	0.9954	<b>1.0013</b>	<b>1.0033</b>	0.9811	0.9908	0.9671	0.9857	0.9373	0.9671	0.9150	0.9904
ite-shr-ols	0.9842	0.9629	0.9468	0.9408	0.9135	0.9119	0.8905	0.8924	0.8507	0.8589	0.7916	0.9288
ite-shr-shr	0.9338	0.9330	0.9317	0.9298	0.9042	0.9084	0.8793	0.8928	0.8415	0.8662	0.8043	0.9147
ite-shr-struc	0.9454	0.9423	0.9298	0.9303	0.8999	0.9047	0.8717	0.8849	0.8300	0.8521	0.7831	0.9153
ite-shr-wls	0.9544	0.9533	0.9548	0.9552	0.9316	0.9392	0.9118	0.9280	0.8795	0.9066	0.8538	0.9418
ite-strar1-bu	0.9959	0.9869	0.9907	0.9908	0.9699	0.9773	0.9567	0.9717	0.9252	0.9518	0.8936	0.9787
ite-strar1-ols	0.9600	0.9370	0.9251	0.9142	0.8945	0.8859	0.8722	0.8660	0.8355	0.8345	0.7578	0.9024
ite-strar1-shr	0.9246	0.9184	0.9225	0.9170	0.8978	0.8968	0.8752	0.8820	0.8389	0.8578	0.7967	0.9020
ite-strar1-struc	0.9378	0.9273	0.9212	0.9155	0.8940	0.8916	0.8687	0.8728	0.8292	0.8434	0.7702	0.9015
ite-strar1-wls	0.9487	0.9404	0.9451	0.9416	0.9248	0.9263	0.9059	0.9150	0.8738	0.8949	0.8390	0.9288
ite-struc-bu	0.9956	0.9868	0.9901	0.9905	0.9690	0.9768	0.9557	0.9711	0.9244	0.9512	0.8925	0.9784
ite-struc-ols	0.9598	0.9363	0.9244	0.9129	0.8935	<b>0.8843</b>	0.8712	<b>0.8640</b>	0.8330	<b>0.8323</b>	<b>0.7547</b>	0.9011
ite-struc-shr	0.9244	0.9183	0.9223	0.9168	0.8975	0.8967	0.8750	0.8818	0.8388	0.8578	0.7964	0.9018
ite-struc-struc	0.9378	0.9271	0.9209	0.9151	0.8934	0.8910	0.8681	0.8721	0.8283	0.8427	0.7689	0.9010
ite-struc-wls	0.9485	0.9403	0.9449	0.9414	0.9243	0.9260	0.9055	0.9148	0.8737	0.8948	0.8386	0.9286
ite-wlsh-bu	0.9975	0.9873	0.9920	0.9920	0.9670	0.9762	0.9531	0.9715	0.9218	0.9515	0.8954	0.9790
ite-wlsh-ols	0.9671	0.9432	0.9262	0.9174	0.8928	0.8882	0.8702	0.8673	0.8346	0.8355	0.7640	0.9065
ite-wlsh-shr	0.9258	0.9201	0.9219	0.9167	0.8934	0.8946	0.8695	0.8792	0.8331	0.8537	0.7935	0.9016
ite-wlsh-struc	0.9406	0.9297	0.9206	0.9159	0.8887	0.8897	0.8625	0.8704	<b>0.8228</b>	0.8393	0.7676	0.9016
ite-wlsh-wls	0.9504	0.9422	0.9456	0.9425	0.9211	0.9253	0.9014	0.9142	0.8702	0.8935	0.8398	0.9294
ite-wlsv-bu	0.9948	0.9865	0.9883	0.9905	0.9668	0.9771	0.9539	0.9718	0.9238	0.9523	0.8967	0.9786
ite-wlsv-ols	0.9586	0.9360	0.9218	0.9129	0.8910	0.8856	0.8702	0.8658	0.8351	0.8356	0.7645	0.9021
ite-wlsv-shr	<b>0.9227</b>	<b>0.9167</b>	0.9183	0.9143	0.8926	0.8938	0.8697	0.8787	0.8334	0.8538	0.7940	0.8995
ite-wlsv-struc	0.9356	0.9255	<b>0.9165</b>	<b>0.9128</b>	<b>0.8878</b>	0.8884	<b>0.8624</b>	0.8694	0.8231	0.8394	0.7681	<b>0.8989</b>
ite-wlsv-wls	0.9471	0.9395	0.9416	0.9403	0.9202	0.9251	0.9018	0.9140	0.8707	0.8940	0.8406	0.9279

**Tabella C.5:** AvgRelMSE delle previsioni un passo in avanti e fino a  $h_k$  passi per le 29 serie aggregate.

Procedure	Mensili		bimensili		Trimestrali		Quadrimestrali		Semi-annuali		Annuali	Tutte
	1	1-12	1	1-6	1	1-4	1	1-3	1	1-2	1	1
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ite-acov-bu	<b>1.0666</b>	<b>1.0412</b>	<b>1.0451</b>	<b>1.0408</b>	<b>1.0124</b>	<b>1.0230</b>	<b>1.0335</b>	<b>1.0425</b>	<b>1.0356</b>	<b>1.0861</b>	0.8857	<b>1.0358</b>
ite-acov-ols	0.9372	0.9178	0.8736	0.8673	0.8282	0.8244	0.8256	<b>0.8074</b>	0.7984	<b>0.8053</b>	0.5973	0.8593
ite-acov-shr	0.9351	0.9260	0.9210	0.9145	0.8856	0.8892	0.8908	0.8915	0.8777	0.9175	0.7286	0.9061
ite-acov-struc	0.9392	0.9278	0.9086	0.9054	0.8709	0.8749	0.8696	0.8701	0.8526	0.8869	0.6876	0.8964
ite-acov-wls	0.9660	0.9562	0.9535	0.9515	0.9260	0.9343	0.9379	0.9429	0.9371	0.9810	0.7966	0.9462
ite-bu-ols	0.9578	0.9459	0.9185	0.9279	0.8761	0.8962	0.8951	0.8911	0.8988	0.9117	0.7151	0.9172
ite-bu-shr	<b>0.9106</b>	0.9201	0.9025	0.9097	0.8631	0.8814	0.8652	0.8812	0.8539	0.9038	0.7160	0.8988
ite-bu-struc	0.9316	0.9425	0.9178	0.9320	0.8832	0.9046	0.8871	0.9015	0.8787	0.9228	0.7209	0.9200
ite-bu-wls	0.9516	0.9677	0.9543	0.9716	0.9306	0.9545	0.9447	0.9630	0.9452	0.9993	0.8040	0.9620
ite-har1-bu	<b>1.0576</b>	<b>1.0453</b>	<b>1.0463</b>	<b>1.0459</b>	<b>1.0175</b>	<b>1.0290</b>	<b>1.0413</b>	<b>1.0512</b>	<b>1.0407</b>	<b>1.0943</b>	0.8918	<b>1.0412</b>
ite-har1-ols	0.9363	0.9122	0.8710	0.8637	0.8256	0.8229	0.8230	0.8093	0.8019	0.8075	0.5999	0.8566
ite-har1-shr	0.9239	0.9235	0.9175	0.9134	0.8851	0.8905	0.8920	0.8950	0.8828	0.9218	0.7352	0.9060
ite-har1-struc	0.9319	0.9267	0.9054	0.9035	0.8700	0.8753	0.8690	0.8720	0.8555	0.8891	0.6909	0.8961
ite-har1-wls	0.9583	0.9558	0.9521	0.9517	0.9277	0.9363	0.9406	0.9472	0.9431	0.9863	0.8036	0.9475
ite-ols-bu	<b>1.0734</b>	<b>1.0586</b>	<b>1.0771</b>	<b>1.0651</b>	<b>1.0583</b>	<b>1.0553</b>	<b>1.0861</b>	<b>1.0790</b>	<b>1.0949</b>	<b>1.1336</b>	0.9272	<b>1.0618</b>
ite-ols-ols	0.9520	0.9243	0.9126	0.8874	0.8736	0.8494	0.8742	0.8444	0.8488	0.8487	0.6231	0.8786
ite-ols-shr	0.9370	0.9374	0.9526	0.9386	0.9329	0.9237	0.9457	0.9337	0.9412	0.9704	0.7748	0.9313
ite-ols-struc	0.9486	0.9395	0.9437	0.9283	0.9195	0.9070	0.9252	0.9102	0.9162	0.9375	0.7301	0.9208
ite-ols-wls	0.9723	0.9686	0.9865	0.9754	0.9744	0.9675	0.9933	0.9838	<b>1.0011</b>	<b>1.0332</b>	0.8424	0.9712
ite-sar1-bu	<b>1.0515</b>	<b>1.0450</b>	<b>1.0407</b>	<b>1.0445</b>	<b>1.0167</b>	<b>1.0302</b>	<b>1.0430</b>	<b>1.0527</b>	<b>1.0444</b>	<b>1.0961</b>	0.8933	<b>1.0413</b>
ite-sar1-ols	0.9295	0.9057	0.8687	0.8602	0.8239	0.8205	0.8240	0.8095	0.8028	0.8080	0.6003	0.8529
ite-sar1-shr	0.9166	0.9193	0.9116	0.9104	0.8843	0.8893	0.8922	0.8950	0.8830	0.9221	0.7356	0.9034
ite-sar1-struc	0.9254	0.9221	0.9003	0.9006	0.8687	0.8739	0.8693	0.8721	0.8560	0.8896	0.6915	0.8935
ite-sar1-wls	0.9508	0.9519	0.9458	0.9491	0.9264	0.9359	0.9411	0.9477	0.9438	0.9872	0.8045	0.9453
ite-shr-bu	<b>1.0486</b>	<b>1.0509</b>	<b>1.0487</b>	<b>1.0560</b>	<b>1.0263</b>	<b>1.0446</b>	<b>1.0492</b>	<b>1.0648</b>	<b>1.0517</b>	<b>1.1110</b>	0.9050	<b>1.0511</b>
ite-shr-ols	0.9468	0.9288	0.8731	0.8794	<b>0.8204</b>	0.8348	<b>0.8183</b>	0.8224	<b>0.7885</b>	0.8155	0.6055	0.8707
ite-shr-shr	0.9222	0.9337	0.9141	0.9221	0.8821	0.8995	0.8871	0.9025	0.8761	0.9273	0.7344	0.9146
ite-shr-struc	0.9282	0.9361	0.9013	0.9124	0.8642	0.8832	0.8609	0.8787	0.8446	0.8933	0.6913	0.9041
ite-shr-wls	0.9548	0.9654	0.9518	0.9618	0.9267	0.9474	0.9389	0.9570	0.9403	0.9955	0.8082	0.9571
ite-strar1-bu	<b>1.0545</b>	<b>1.0456</b>	<b>1.0465</b>	<b>1.0452</b>	<b>1.0222</b>	<b>1.0303</b>	<b>1.0471</b>	<b>1.0524</b>	<b>1.0465</b>	<b>1.0943</b>	0.8892	<b>1.0414</b>
ite-strar1-ols	0.9346	0.9080	0.8787	0.8640	0.8337	0.8234	0.8326	0.8131	0.8086	0.8108	0.5973	0.8556
ite-strar1-shr	0.9216	0.9225	0.9219	0.9156	0.8954	0.8950	0.9032	0.9013	0.8933	0.9289	0.7399	0.9080
ite-strar1-struc	0.9309	0.9251	0.9111	0.9056	0.8803	0.8792	0.8810	0.8781	0.8668	0.8960	0.6955	0.8979
ite-strar1-wls	0.9551	0.9536	0.9545	0.9516	0.9355	0.9380	0.9491	0.9498	0.9496	0.9883	0.8023	0.9471
ite-struc-bu	<b>1.0535</b>	<b>1.0456</b>	<b>1.0453</b>	<b>1.0448</b>	<b>1.0206</b>	<b>1.0298</b>	<b>1.0454</b>	<b>1.0517</b>	<b>1.0454</b>	<b>1.0940</b>	0.8890	<b>1.0411</b>
ite-struc-ols	0.9337	0.9069	0.8776	0.8622	0.8327	0.8214	0.8314	0.8106	0.8059	0.8084	<b>0.5947</b>	0.8538
ite-struc-shr	0.9212	0.9225	0.9217	0.9157	0.8952	0.8952	0.9034	0.9016	0.8942	0.9298	0.7409	0.9082
ite-struc-struc	0.9303	0.9249	0.9104	0.9052	0.8796	0.8788	0.8804	0.8775	0.8665	0.8961	0.6953	0.8975
ite-struc-wls	0.9545	0.9536	0.9540	0.9516	0.9349	0.9381	0.9489	0.9499	0.9502	0.9891	0.8031	0.9472
ite-wsh-bu	<b>1.0567</b>	<b>1.0455</b>	<b>1.0450</b>	<b>1.0459</b>	<b>1.0164</b>	<b>1.0290</b>	<b>1.0401</b>	<b>1.0511</b>	<b>1.0406</b>	<b>1.0947</b>	0.8922	<b>1.0413</b>
ite-wsh-ols	0.9361	0.9115	0.8707	0.8627	0.8255	0.8219	0.8228	0.8081	0.8009	0.8066	0.5983	0.8556
ite-wsh-shr	0.9238	0.9236	0.9174	0.9136	0.8852	0.8909	0.8924	0.8954	0.8839	0.9228	0.7361	0.9063
ite-wsh-struc	0.9315	0.9266	0.9050	0.9034	0.8696	0.8751	0.8688	0.8719	0.8558	0.8895	0.6911	0.8960
ite-wsh-wls	0.9579	0.9560	0.9517	0.9520	0.9274	0.9367	0.9407	0.9477	0.9442	0.9875	0.8047	0.9478
ite-wslv-bu	<b>1.0507</b>	<b>1.0452</b>	<b>1.0398</b>	<b>1.0445</b>	<b>1.0156</b>	<b>1.0301</b>	<b>1.0418</b>	<b>1.0524</b>	<b>1.0439</b>	<b>1.0962</b>	0.8934	<b>1.0414</b>
ite-wslv-ols	0.9290	<b>0.9051</b>	<b>0.8681</b>	<b>0.8592</b>	0.8235	<b>0.8194</b>	0.8237	0.8081	0.8015	0.8070	0.5985	<b>0.8520</b>
ite-wslv-shr	0.9164	0.9195	0.9116	0.9106	0.8843	0.8897	0.8925	0.8954	0.8841	0.9232	0.7366	0.9037
ite-wslv-struc	0.9251	0.9221	0.8999	0.9006	0.8683	0.8738	0.8691	0.8720	0.8562	0.8900	0.6916	0.8934
ite-wslv-wls	0.9504	0.9521	0.9456	0.9494	0.9261	0.9362	0.9412	0.9481	0.9448	0.9883	0.8055	0.9457

Tabella C.6: AvgRelMSE delle previsioni un passo in avanti e fino a  $h_k$  passi per le 76 serie *bottom*.

Procedure	Mensili		bimensili		Trimestrali		Quadrimestrali		Semi-annuali		Annuali	Tutte
	1	1-12	1	1-6	1	1-4	1	1-3	1	1-2	1	1
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ite-acov-bu	0.9909	0.9743	0.9782	0.9779	0.9541	0.9632	0.9304	0.9497	0.8926	0.9106	0.9139	0.9639
ite-acov-ols	0.9977	0.9717	0.9568	0.9522	0.9334	0.9299	0.9018	0.9052	0.8621	0.8626	0.8660	0.9422
ite-acov-shr	0.9467	0.9309	0.9325	0.9267	0.9061	0.9058	0.8731	0.8836	0.8278	0.8403	0.8338	0.9109
ite-acov-struc	0.9623	0.9439	0.9351	0.9316	0.9070	0.9077	0.8729	0.8833	0.8252	0.8354	0.8230	0.9168
ite-acov-wls	0.9627	0.9470	0.9499	0.9469	0.9262	0.9298	0.8978	0.9113	0.8560	0.8706	0.8708	0.9322
ite-bu-ols	<b>1.0155</b>	<b>1.0011</b>	<b>1.0398</b>	<b>1.0319</b>	<b>1.0367</b>	<b>1.0325</b>	<b>1.0260</b>	<b>1.0237</b>	<b>1.0109</b>	<b>1.0112</b>	<b>1.0811</b>	<b>1.0180</b>
ite-bu-shr	0.9404	0.9335	0.9563	0.9474	0.9347	0.9333	0.8993	0.9116	0.8617	0.8786	0.8916	0.9285
ite-bu-struc	0.9693	0.9627	0.9880	0.9824	0.9771	0.9740	0.9496	0.9557	0.9139	0.9249	0.9453	0.9643
ite-bu-wls	0.9681	0.9625	0.9911	0.9863	0.9805	0.9804	0.9519	0.9641	0.9153	0.9304	0.9346	0.9669
ite-har1-bu	0.9761	0.9661	0.9729	0.9723	0.9493	0.9570	0.9223	0.9429	0.8803	0.9022	0.8973	0.9564
ite-har1-ols	0.9791	0.9562	0.9484	0.9400	0.9203	0.9159	0.8893	0.8922	0.8491	0.8481	0.8412	0.9276
ite-har1-shr	0.9267	0.9191	0.9238	0.9182	0.8967	0.8961	0.8612	0.8733	0.8146	0.8289	0.8169	0.9001
ite-har1-struc	0.9439	0.9312	0.9268	0.9211	0.8965	0.8958	0.8604	0.8704	0.8111	0.8214	0.8004	0.9042
ite-har1-wls	0.9477	0.9373	0.9434	0.9391	0.9189	0.9212	0.8871	0.9019	0.8435	0.8602	0.8539	0.9227
ite-ols-bu	0.9821	0.9754	0.9837	0.9840	0.9675	0.9726	0.9453	0.9576	0.9051	0.9214	0.9091	0.9685
ite-ols-ols	0.9806	0.9621	0.9605	0.9518	0.9422	0.9290	0.9138	0.9076	0.8698	0.8646	0.8360	0.9372
ite-ols-shr	0.9333	0.9281	0.9385	0.9332	0.9187	0.9153	0.8894	0.8937	0.8449	0.8542	0.8340	0.9146
ite-ols-struc	0.9500	0.9400	0.9415	0.9354	0.9203	0.9138	0.8894	0.8904	0.8412	0.8458	0.8133	0.9180
ite-ols-wls	0.9542	0.9464	0.9570	0.9531	0.9397	0.9392	0.9141	0.9214	0.8726	0.8844	0.8717	0.9368
ite-sar1-bu	0.9742	0.9650	0.9695	0.9706	0.9492	0.9578	0.9229	0.9429	0.8821	0.9030	0.8990	0.9558
ite-sar1-ols	0.9699	0.9484	0.9434	0.9349	0.9187	0.9132	0.8889	0.8901	0.8497	0.8482	0.8422	0.9227
ite-sar1-shr	<b>0.9251</b>	0.9157	0.9210	0.9158	0.8960	0.8955	0.8613	0.8725	0.8151	0.8290	0.8176	0.8980
ite-sar1-struc	0.9393	0.9269	0.9229	0.9177	0.8958	0.8944	0.8601	0.8688	0.8115	0.8215	0.8011	0.9013
ite-sar1-wls	0.9458	0.9348	0.9401	0.9370	0.9182	0.9211	0.8873	0.9015	0.8441	0.8606	0.8549	0.9213
ite-shr-bu	0.9789	0.9751	0.9838	0.9839	0.9644	0.9710	0.9375	0.9571	0.8970	0.9173	0.9189	0.9681
ite-shr-ols	0.9989	0.9762	0.9765	0.9653	0.9517	0.9432	0.9197	0.9207	0.8757	0.8761	0.8769	0.9520
ite-shr-shr	0.9382	0.9328	0.9385	0.9328	0.9128	0.9119	0.8763	0.8891	0.8287	0.8439	0.8328	0.9147
ite-shr-struc	0.9521	0.9447	0.9409	0.9372	0.9140	0.9130	0.8758	0.8873	0.8245	0.8369	0.8212	0.9196
ite-shr-wls	0.9542	0.9487	0.9560	0.9528	0.9335	0.9361	0.9017	0.9172	0.8574	0.8748	0.8719	0.9361
ite-strar1-bu	0.9745	0.9653	0.9702	0.9708	0.9507	0.9578	0.9243	0.9426	0.8827	0.9025	0.8952	0.9558
ite-strar1-ols	0.9698	0.9483	0.9435	0.9341	0.9188	0.9109	0.8878	0.8871	0.8460	0.8437	0.8298	0.9210
ite-strar1-shr	0.9257	0.9168	0.9227	0.9175	0.8988	0.8975	0.8648	0.8747	0.8191	0.8322	0.8195	0.8997
ite-strar1-struc	0.9404	0.9281	0.9251	0.9193	0.8993	0.8963	0.8640	0.8709	0.8152	0.8241	0.8008	0.9029
ite-strar1-wls	0.9463	0.9355	0.9416	0.9378	0.9207	0.9219	0.8899	0.9021	0.8466	0.8616	0.8535	0.9219
ite-struc-bu	0.9744	0.9653	0.9698	0.9705	0.9500	0.9573	0.9236	0.9420	0.8819	0.9017	0.8938	0.9554
ite-struc-ols	0.9699	0.9478	0.9430	0.9330	0.9178	0.9095	0.8869	0.8853	0.8437	0.8416	0.8266	0.9198
ite-struc-shr	0.9257	0.9166	0.9225	0.9172	0.8984	0.8972	0.8644	0.8744	0.8186	0.8317	0.8187	0.8994
ite-struc-struc	0.9406	0.9279	0.9249	0.9189	0.8987	0.8957	0.8634	0.8701	0.8142	0.8232	<b>0.7989</b>	0.9024
ite-struc-wls	0.9463	0.9353	0.9414	0.9375	0.9203	0.9215	0.8895	0.9017	0.8462	0.8612	0.8526	0.9216
ite-wlsh-bu	0.9759	0.9660	0.9725	0.9722	0.9488	0.9568	0.9218	0.9427	0.8801	0.9019	0.8966	0.9562
ite-wlsh-ols	0.9792	0.9556	0.9483	0.9392	0.9198	0.9149	0.8890	0.8911	0.8479	0.8468	0.8387	0.9267
ite-wlsh-shr	0.9266	0.9188	0.9237	0.9180	0.8965	0.8960	0.8610	0.8731	0.8145	0.8287	0.8165	0.8998
ite-wlsh-struc	0.9441	0.9309	0.9267	0.9207	0.8961	0.8953	0.8601	0.8698	<b>0.8105</b>	<b>0.8209</b>	0.7990	0.9037
ite-wlsh-wls	0.9476	0.9370	0.9432	0.9389	0.9187	0.9210	0.8869	0.9017	0.8435	0.8601	0.8535	0.9225
ite-wlsv-bu	0.9742	0.9650	0.9693	0.9706	0.9488	0.9576	0.9224	0.9427	0.8817	0.9026	0.8979	0.9556
ite-wlsv-ols	0.9701	0.9481	0.9432	0.9343	0.9182	0.9123	0.8886	0.8890	0.8483	0.8468	0.8393	0.9220
ite-wlsv-shr	0.9251	<b>0.9156</b>	<b>0.9209</b>	<b>0.9157</b>	0.8957	0.8953	0.8611	0.8724	0.8149	0.8288	0.8171	<b>0.8979</b>
ite-wlsv-struc	0.9397	0.9268	0.9228	0.9175	<b>0.8954</b>	<b>0.8941</b>	<b>0.8598</b>	<b>0.8684</b>	0.8108	0.8209	0.7995	0.9010
ite-wlsv-wls	0.9458	0.9347	0.9401	0.9369	0.9180	0.9209	0.8871	0.9014	0.8441	0.8604	0.8544	0.9211

**Tabella C.7:** AvgRelMAE delle previsioni un passo in avanti e fino a  $h_k$  passi per tutte le 105 serie.

Procedure	Mensili		bimensili		Trimestrali		Quadrimestrali		Semi-annuali		Annuali	Tutte
	1	1-12	1	1-6	1	1-4	1	1-3	1	1-2	1	1
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ite-acov-bu	0.9996	0.9916	0.9935	0.9928	0.9812	0.9873	0.9776	0.9884	0.9626	0.9770	0.9466	0.9882
ite-acov-ols	0.9961	0.9821	0.9744	0.9677	0.9572	0.9506	0.9437	0.9411	0.9170	0.9187	0.8671	0.9611
ite-acov-shr	0.9672	0.9601	0.9606	0.9570	0.9464	0.9477	0.9397	0.9451	0.9163	0.9283	0.8909	0.9512
ite-acov-struc	0.9773	0.9680	0.9636	0.9599	0.9483	0.9478	0.9360	0.9417	0.9111	0.9209	0.8770	0.9537
ite-acov-wls	0.9766	0.9697	0.9706	0.9696	0.9606	0.9640	0.9549	0.9628	0.9372	0.9497	0.9170	0.9647
ite-bu-ols	<b>1.0104</b>	0.9981	<b>1.0126</b>	<b>1.0055</b>	<b>1.0004</b>	0.9980	<b>1.0002</b>	0.9950	0.9821	0.9849	0.9608	0.9971
ite-bu-shr	0.9647	0.9618	0.9678	0.9650	0.9532	0.9562	0.9449	0.9514	0.9224	0.9373	0.9065	0.9568
ite-bu-struc	0.9801	0.9770	0.9845	0.9804	0.9756	0.9729	0.9673	0.9684	0.9435	0.9535	0.9212	0.9725
ite-bu-wls	0.9781	0.9789	0.9877	0.9878	0.9811	0.9842	0.9755	0.9821	0.9569	0.9703	0.9400	0.9799
ite-har1-bu	0.9937	0.9902	0.9919	0.9915	0.9811	0.9864	0.9765	0.9877	0.9589	0.9755	0.9428	0.9869
ite-har1-ols	0.9910	0.9763	0.9707	0.9627	0.9498	0.9453	0.9390	0.9371	0.9136	0.9147	0.8608	0.9558
ite-har1-shr	0.9592	0.9557	0.9565	0.9536	0.9432	0.9450	0.9356	0.9421	0.9128	0.9256	0.8871	0.9475
ite-har1-struc	0.9706	0.9634	0.9592	0.9556	0.9435	0.9439	0.9318	0.9377	<b>0.9075</b>	0.9172	0.8708	0.9493
ite-har1-wls	0.9712	0.9667	0.9679	0.9668	0.9582	0.9616	0.9517	0.9602	0.9338	0.9474	0.9133	0.9620
ite-ols-bu	<b>1.0018</b>	0.9982	<b>1.0028</b>	<b>1.0010</b>	0.9947	0.9971	0.9936	0.9983	0.9779	0.9902	0.9547	0.9965
ite-ols-ols	0.9938	0.9810	0.9815	0.9708	0.9676	0.9567	0.9596	0.9507	0.9330	0.9293	0.8684	0.9641
ite-ols-shr	0.9644	0.9631	0.9674	0.9643	0.9596	0.9579	0.9564	0.9569	0.9363	0.9445	0.9021	0.9584
ite-ols-struc	0.9754	0.9710	0.9724	0.9665	0.9605	0.9566	0.9533	0.9523	0.9320	0.9359	0.8865	0.9603
ite-ols-wls	0.9762	0.9739	0.9790	0.9768	0.9735	0.9733	0.9715	0.9739	0.9552	0.9645	0.9280	0.9721
ite-sar1-bu	0.9936	0.9903	0.9906	0.9916	0.9814	0.9870	0.9777	0.9878	0.9600	0.9760	0.9439	0.9871
ite-sar1-ols	0.9863	0.9715	0.9682	0.9601	0.9486	0.9440	0.9387	0.9356	0.9143	0.9146	0.8612	0.9529
ite-sar1-shr	0.9581	0.9543	<b>0.9544</b>	0.9526	0.9431	0.9447	0.9362	0.9416	0.9129	0.9254	0.8873	0.9466
ite-sar1-struc	0.9673	0.9613	0.9573	0.9544	0.9430	0.9432	<b>0.9318</b>	0.9367	0.9080	0.9173	0.8713	0.9480
ite-sar1-wls	0.9692	0.9655	0.9662	0.9661	0.9580	0.9615	0.9522	0.9598	0.9339	0.9473	0.9138	0.9612
ite-shr-bu	0.9920	0.9931	0.9969	0.9970	0.9877	0.9937	0.9840	0.9950	0.9674	0.9839	0.9526	0.9921
ite-shr-ols	<b>1.0040</b>	0.9880	0.9840	0.9754	0.9623	0.9586	0.9485	0.9497	0.9196	0.9255	0.8735	0.9681
ite-shr-shr	0.9638	0.9624	0.9631	0.9606	0.9489	0.9526	0.9407	0.9492	0.9165	0.9319	0.8924	0.9544
ite-shr-struc	0.9739	0.9701	0.9658	0.9635	0.9502	0.9523	0.9364	0.9452	0.9090	0.9231	0.8779	0.9566
ite-shr-wls	0.9723	0.9718	0.9735	0.9733	0.9640	0.9693	0.9572	0.9677	0.9382	0.9540	0.9206	0.9682
ite-strar1-bu	0.9943	0.9910	0.9918	0.9918	0.9822	0.9867	0.9787	0.9876	0.9603	0.9753	0.9409	0.9872
ite-strar1-ols	0.9870	0.9716	0.9702	0.9602	0.9512	0.9440	0.9411	0.9359	0.9145	0.9136	0.8565	0.9528
ite-strar1-shr	0.9589	0.9552	0.9563	0.9540	0.9454	0.9462	0.9393	0.9433	0.9158	0.9275	0.8887	0.9479
ite-strar1-struc	0.9684	0.9623	0.9600	0.9557	0.9460	0.9446	0.9356	0.9385	0.9112	0.9193	0.8722	0.9493
ite-strar1-wls	0.9699	0.9661	0.9680	0.9667	0.9599	0.9618	0.9545	0.9602	0.9351	0.9474	0.9126	0.9617
ite-struc-bu	0.9941	0.9909	0.9916	0.9915	0.9818	0.9864	0.9782	0.9873	0.9600	0.9751	0.9404	0.9870
ite-struc-ols	0.9871	0.9712	0.9698	0.9594	0.9509	0.9432	0.9408	<b>0.9348</b>	0.9133	<b>0.9126</b>	<b>0.8548</b>	0.9521
ite-struc-shr	0.9589	0.9551	0.9562	0.9538	0.9454	0.9461	0.9394	0.9432	0.9159	0.9275	0.8885	0.9478
ite-struc-struc	0.9684	0.9621	0.9598	0.9553	0.9458	0.9444	0.9355	0.9381	0.9109	0.9191	0.8715	0.9490
ite-struc-wls	0.9699	0.9660	0.9679	0.9665	0.9598	0.9617	0.9545	0.9601	0.9352	0.9474	0.9123	0.9615
ite-wlsh-bu	0.9935	0.9901	0.9917	0.9914	0.9809	0.9863	0.9761	0.9875	0.9589	0.9755	0.9424	0.9868
ite-wlsh-ols	0.9911	0.9760	0.9708	0.9622	0.9498	0.9449	0.9391	0.9366	0.9133	0.9143	0.8596	0.9554
ite-wlsh-shr	0.9591	0.9555	0.9564	0.9535	0.9433	0.9451	0.9358	0.9421	0.9130	0.9257	0.8869	0.9475
ite-wlsh-struc	0.9707	0.9632	0.9592	0.9554	0.9435	0.9438	0.9319	0.9375	0.9076	0.9171	0.8702	0.9492
ite-wlsh-wls	0.9712	0.9666	0.9678	0.9667	0.9582	0.9616	0.9519	0.9602	0.9342	0.9475	0.9132	0.9619
ite-wlsv-bu	0.9934	0.9902	0.9905	0.9915	0.9812	0.9868	0.9774	0.9876	0.9600	0.9759	0.9435	0.9870
ite-wlsv-ols	0.9865	0.9713	0.9681	0.9597	0.9485	0.9435	0.9389	0.9350	0.9138	0.9141	0.8598	0.9525
ite-wlsv-shr	<b>0.9581</b>	<b>0.9542</b>	0.9544	<b>0.9525</b>	0.9432	0.9447	0.9365	0.9416	0.9130	0.9255	0.8872	<b>0.9466</b>
ite-wlsv-struc	0.9674	0.9612	0.9573	0.9542	<b>0.9429</b>	<b>0.9431</b>	0.9320	0.9365	0.9078	0.9171	0.8706	0.9479
ite-wlsv-wls	0.9692	0.9654	0.9662	0.9661	0.9580	0.9615	0.9524	0.9598	0.9342	0.9474	0.9136	0.9612

**Tabella C.8:** AvgRelMAE delle previsioni un passo in avanti e fino a  $h_k$  passi per le 29 serie aggregate.

Procedure	Mensili		bimensili		Trimestrali		Quadrimestrali		Semi-annuali		Annuali	Tutte
	1	1-12	1	1-6	1	1-4	1	1-3	1	1-2	1	1
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ite-acov-bu	<b>1.0176</b>	<b>1.0112</b>	<b>1.0171</b>	<b>1.0126</b>	0.9999	<b>1.0067</b>	<b>1.0114</b>	<b>1.0174</b>	<b>1.0072</b>	<b>1.0375</b>	0.9447	<b>1.0109</b>
ite-acov-ols	0.9610	0.9593	0.9366	0.9284	0.9079	0.9025	0.9089	<b>0.8939</b>	0.8887	<b>0.8955</b>	<b>0.7626</b>	0.9250
ite-acov-shr	0.9554	0.9570	0.9541	0.9489	0.9361	0.9400	0.9458	0.9455	0.9338	0.9589	0.8548	0.9479
ite-acov-struc	0.9574	0.9588	0.9485	0.9438	0.9289	0.9320	0.9318	0.9316	0.9180	0.9405	0.8298	0.9426
ite-acov-wls	0.9690	0.9709	0.9697	0.9680	0.9588	0.9650	0.9694	0.9721	0.9671	0.9925	0.8953	0.9683
ite-bu-ols	0.9808	0.9748	0.9649	0.9626	0.9302	0.9399	0.9471	0.9371	0.9374	0.9448	0.8374	0.9557
ite-bu-shr	0.9464	0.9550	0.9449	0.9453	0.9217	0.9330	0.9307	0.9359	0.9202	0.9489	0.8455	0.9432
ite-bu-struc	0.9568	0.9661	0.9538	0.9548	0.9374	0.9441	0.9414	0.9444	0.9313	0.9554	0.8488	0.9530
ite-bu-wls	0.9621	0.9764	0.9707	0.9764	0.9607	0.9730	0.9724	0.9802	0.9719	<b>1.0001</b>	0.9015	0.9752
ite-har1-bu	<b>1.0141</b>	<b>1.0135</b>	<b>1.0162</b>	<b>1.0148</b>	<b>1.0032</b>	<b>1.0100</b>	<b>1.0157</b>	<b>1.0216</b>	<b>1.0102</b>	<b>1.0418</b>	0.9482	<b>1.0137</b>
ite-har1-ols	0.9634	0.9569	0.9363	0.9270	0.9040	0.9007	0.9061	0.8962	0.8911	0.8973	0.7667	0.9240
ite-har1-shr	0.9487	0.9549	0.9528	0.9489	0.9353	0.9405	0.9460	0.9470	0.9375	0.9621	0.8605	0.9477
ite-har1-struc	0.9549	0.9571	0.9467	0.9430	0.9277	0.9319	0.9306	0.9323	0.9203	0.9424	0.8346	0.9421
ite-har1-wls	0.9657	0.9697	0.9687	0.9683	0.9591	0.9660	0.9703	0.9740	0.9710	0.9958	0.9012	0.9687
ite-ols-bu	<b>1.0305</b>	<b>1.0245</b>	<b>1.0389</b>	<b>1.0285</b>	<b>1.0273</b>	<b>1.0260</b>	<b>1.0435</b>	<b>1.0377</b>	<b>1.0407</b>	<b>1.0633</b>	0.9678	<b>1.0276</b>
ite-ols-ols	0.9764	0.9648	0.9598	0.9396	0.9372	0.9192	0.9424	0.9200	0.9196	0.9206	0.7873	0.9379
ite-ols-shr	0.9590	0.9662	0.9745	0.9640	0.9660	0.9598	0.9800	0.9703	0.9703	0.9884	0.8846	0.9638
ite-ols-struc	0.9670	0.9678	0.9710	0.9592	0.9585	0.9508	0.9666	0.9564	0.9559	0.9692	0.8591	0.9583
ite-ols-wls	0.9762	0.9799	0.9903	0.9826	0.9877	0.9831	<b>1.0025</b>	0.9949	<b>1.0006</b>	<b>1.0188</b>	0.9225	0.9831
ite-sar1-bu	<b>1.0135</b>	<b>1.0145</b>	<b>1.0153</b>	<b>1.0149</b>	<b>1.0034</b>	<b>1.0109</b>	<b>1.0179</b>	<b>1.0226</b>	<b>1.0122</b>	<b>1.0427</b>	0.9491	<b>1.0145</b>
ite-sar1-ols	0.9619	0.9523	0.9346	0.9242	0.9022	0.8988	0.9068	0.8962	0.8919	0.8976	0.7671	0.9213
ite-sar1-shr	<b>0.9454</b>	0.9535	0.9496	0.9474	0.9351	0.9397	0.9468	0.9469	0.9373	0.9621	0.8607	0.9466
ite-sar1-struc	0.9522	0.9551	0.9441	0.9419	0.9270	0.9311	0.9316	0.9327	0.9211	0.9433	0.8350	0.9410
ite-sar1-wls	0.9624	0.9684	0.9658	0.9671	0.9589	0.9656	0.9713	0.9743	0.9709	0.9960	0.9017	0.9678
ite-shr-bu	<b>1.0077</b>	<b>1.0167</b>	<b>1.0186</b>	<b>1.0214</b>	<b>1.0074</b>	<b>1.0187</b>	<b>1.0222</b>	<b>1.0300</b>	<b>1.0190</b>	<b>1.0532</b>	0.9587	<b>1.0198</b>
ite-shr-ols	0.9745	0.9679	0.9383	0.9367	<b>0.9019</b>	0.9078	<b>0.9026</b>	0.9018	<b>0.8799</b>	0.8990	0.7685	0.9325
ite-shr-shr	0.9495	0.9616	0.9524	0.9545	0.9332	0.9454	0.9441	0.9512	0.9332	0.9650	0.8604	0.9531
ite-shr-struc	0.9551	0.9633	0.9465	0.9490	0.9245	0.9366	0.9274	0.9358	0.9131	0.9446	0.8340	0.9472
ite-shr-wls	0.9645	0.9756	0.9699	0.9746	0.9582	0.9719	0.9706	0.9799	0.9697	<b>1.0013</b>	0.9050	0.9745
ite-strar1-bu	<b>1.0153</b>	<b>1.0151</b>	<b>1.0185</b>	<b>1.0148</b>	<b>1.0063</b>	<b>1.0100</b>	<b>1.0198</b>	<b>1.0219</b>	<b>1.0131</b>	<b>1.0411</b>	0.9449	<b>1.0143</b>
ite-strar1-ols	0.9652	0.9537	0.9404	0.9260	0.9109	0.9016	0.9148	0.8994	0.8970	0.9000	0.7653	0.9231
ite-strar1-shr	0.9479	0.9555	0.9550	0.9497	0.9422	0.9428	0.9536	0.9504	0.9427	0.9650	0.8630	0.9491
ite-strar1-struc	0.9550	0.9571	0.9501	0.9442	0.9342	0.9340	0.9387	0.9359	0.9271	0.9460	0.8377	0.9434
ite-strar1-wls	0.9640	0.9693	0.9704	0.9678	0.9643	0.9664	0.9760	0.9749	0.9730	0.9953	0.8999	0.9684
ite-struc-bu	<b>1.0149</b>	<b>1.0151</b>	<b>1.0180</b>	<b>1.0146</b>	<b>1.0055</b>	<b>1.0099</b>	<b>1.0191</b>	<b>1.0216</b>	<b>1.0131</b>	<b>1.0413</b>	0.9449	<b>1.0142</b>
ite-struc-ols	0.9647	0.9531	0.9397	0.9250	0.9103	0.9008	0.9146	0.8982	0.8957	0.8989	0.7634	0.9222
ite-struc-shr	0.9478	0.9555	0.9550	0.9498	0.9421	0.9429	0.9536	0.9504	0.9433	0.9655	0.8634	0.9492
ite-struc-struc	0.9548	0.9569	0.9497	0.9439	0.9339	0.9338	0.9386	0.9356	0.9269	0.9460	0.8374	0.9432
ite-struc-wls	0.9639	0.9693	0.9701	0.9677	0.9639	0.9665	0.9759	0.9749	0.9735	0.9958	0.9003	0.9684
ite-wlsh-bu	<b>1.0140</b>	<b>1.0135</b>	<b>1.0157</b>	<b>1.0148</b>	<b>1.0026</b>	<b>1.0102</b>	<b>1.0153</b>	<b>1.0216</b>	<b>1.0105</b>	<b>1.0422</b>	0.9484	<b>1.0138</b>
ite-wlsh-ols	0.9633	0.9566	0.9362	0.9264	0.9040	0.9004	0.9063	0.8956	0.8907	0.8970	0.7656	0.9236
ite-wlsh-shr	0.9488	0.9549	0.9529	0.9490	0.9353	0.9408	0.9463	0.9472	0.9383	0.9627	0.8610	0.9478
ite-wlsh-struc	0.9549	0.9571	0.9465	0.9430	0.9276	0.9320	0.9307	0.9323	0.9205	0.9427	0.8345	0.9421
ite-wlsh-wls	0.9657	0.9698	0.9685	0.9684	0.9590	0.9664	0.9705	0.9743	0.9719	0.9964	0.9019	0.9689
ite-wlsv-bu	<b>1.0132</b>	<b>1.0146</b>	<b>1.0151</b>	<b>1.0149</b>	<b>1.0030</b>	<b>1.0108</b>	<b>1.0176</b>	<b>1.0225</b>	<b>1.0124</b>	<b>1.0430</b>	0.9492	<b>1.0145</b>
ite-wlsv-ols	0.9616	<b>0.9521</b>	<b>0.9342</b>	<b>0.9237</b>	0.9020	<b>0.8984</b>	0.9071	0.8955	0.8913	0.8972	0.7658	<b>0.9208</b>
ite-wlsv-shr	0.9455	0.9536	0.9497	0.9475	0.9352	0.9399	0.9471	0.9471	0.9380	0.9627	0.8612	0.9468
ite-wlsv-struc	0.9521	0.9551	0.9439	0.9418	0.9268	0.9311	0.9317	0.9326	0.9212	0.9434	0.8349	0.9410
ite-wlsv-wls	0.9624	0.9685	0.9657	0.9673	0.9588	0.9659	0.9715	0.9745	0.9717	0.9966	0.9023	0.9680



**Tabella C.9:** AvgRelMAE delle previsioni un passo in avanti e fino a  $h_k$  passi per le 76 serie *bottom*.

Procedure	Mensili		bimensili		Trimestrali		Quadrimestrali		Semi-annuali		Annuali	Tutte
	1	1-12	1	1-6	1	1-4	1	1-3	1	1-2	1	1
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ite-acov-bu	0.9928	0.9842	0.9846	0.9853	0.9741	0.9800	0.9650	0.9775	0.9461	0.9548	0.9474	0.9797
ite-acov-ols	<b>1.0098</b>	0.9909	0.9892	0.9831	0.9768	0.9696	0.9574	0.9598	0.9280	0.9277	0.9106	0.9752
ite-acov-shr	0.9717	0.9612	0.9631	0.9602	0.9504	0.9507	0.9373	0.9449	0.9097	0.9169	0.9051	0.9524
ite-acov-struc	0.9851	0.9715	0.9695	0.9661	0.9558	0.9538	0.9376	0.9456	0.9085	0.9135	0.8956	0.9580
ite-acov-wls	0.9795	0.9692	0.9709	0.9702	0.9612	0.9637	0.9495	0.9592	0.9260	0.9339	0.9254	0.9634
ite-bu-ols	<b>1.0219</b>	<b>1.0072</b>	<b>1.0314</b>	<b>1.0224</b>	<b>1.0286</b>	<b>1.0211</b>	<b>1.0212</b>	<b>1.0181</b>	0.9997	<b>1.0006</b>	<b>1.0126</b>	<b>1.0133</b>
ite-bu-shr	0.9718	0.9645	0.9767	0.9726	0.9655	0.9652	0.9504	0.9574	0.9233	0.9328	0.9309	0.9620
ite-bu-struc	0.9892	0.9812	0.9965	0.9903	0.9906	0.9841	0.9773	0.9777	0.9482	0.9528	0.9505	0.9800
ite-bu-wls	0.9843	0.9799	0.9943	0.9922	0.9890	0.9885	0.9767	0.9829	0.9513	0.9592	0.9551	0.9817
ite-har1-bu	0.9860	0.9815	0.9828	0.9828	0.9728	0.9775	0.9619	0.9750	0.9400	0.9513	0.9407	0.9768
ite-har1-ols	<b>1.0017</b>	0.9838	0.9842	0.9767	0.9679	0.9629	0.9519	0.9533	0.9224	0.9214	0.8997	0.9683
ite-har1-shr	0.9632	0.9560	0.9578	0.9554	0.9463	0.9467	<b>0.9317</b>	0.9402	0.9035	0.9120	0.8974	0.9475
ite-har1-struc	0.9767	0.9658	0.9640	0.9605	0.9496	0.9485	0.9323	0.9398	0.9027	0.9077	0.8851	0.9521
ite-har1-wls	0.9733	0.9656	0.9676	0.9663	0.9578	0.9599	0.9447	0.9550	0.9201	0.9295	0.9179	0.9594
ite-ols-bu	0.9910	0.9883	0.9894	0.9907	0.9826	0.9863	0.9752	0.9837	0.9549	0.9637	0.9498	0.9849
ite-ols-ols	<b>1.0005</b>	0.9873	0.9899	0.9830	0.9794	0.9714	0.9663	0.9627	0.9381	0.9326	0.9015	0.9743
ite-ols-shr	0.9665	0.9619	0.9648	0.9643	0.9572	0.9572	0.9476	0.9518	0.9237	0.9283	0.9089	0.9563
ite-ols-struc	0.9786	0.9723	0.9730	0.9693	0.9613	0.9588	0.9482	0.9508	0.9230	0.9235	0.8972	0.9611
ite-ols-wls	0.9762	0.9716	0.9747	0.9746	0.9681	0.9696	0.9599	0.9660	0.9384	0.9446	0.9301	0.9679
ite-sar1-bu	0.9862	0.9812	0.9813	0.9829	0.9732	0.9780	0.9627	0.9748	0.9409	0.9517	0.9419	0.9768
ite-sar1-ols	0.9958	0.9789	0.9814	0.9742	0.9669	0.9618	0.9512	0.9512	0.9230	0.9212	0.9001	0.9653
ite-sar1-shr	0.9631	0.9546	0.9563	0.9547	<b>0.9462</b>	0.9467	0.9322	0.9395	0.9038	0.9118	0.8977	0.9467
ite-sar1-struc	0.9731	0.9636	0.9624	0.9592	0.9491	0.9479	0.9319	0.9382	0.9030	0.9076	0.8856	0.9507
ite-sar1-wls	0.9719	0.9644	0.9663	0.9657	0.9577	0.9599	0.9450	0.9543	0.9202	0.9293	0.9184	0.9587
ite-shr-bu	0.9860	0.9843	0.9887	0.9878	0.9803	0.9844	0.9698	0.9820	0.9485	0.9587	0.9503	0.9817
ite-shr-ols	<b>1.0154</b>	0.9958	<b>1.0020</b>	0.9906	0.9864	0.9788	0.9667	0.9687	0.9352	0.9358	0.9172	0.9820
ite-shr-shr	0.9693	0.9628	0.9672	0.9629	0.9549	0.9553	0.9395	0.9485	0.9102	0.9196	0.9049	0.9549
ite-shr-struc	0.9811	0.9727	0.9733	0.9690	0.9602	0.9583	0.9399	0.9488	0.9074	0.9150	0.8953	0.9602
ite-shr-wls	0.9754	0.9704	0.9749	0.9728	0.9663	0.9683	0.9522	0.9631	0.9264	0.9365	0.9266	0.9658
ite-strar1-bu	0.9864	0.9819	0.9818	0.9832	0.9732	0.9779	0.9634	0.9748	0.9408	0.9512	0.9394	0.9771
ite-strar1-ols	0.9955	0.9785	0.9818	0.9736	0.9670	0.9607	0.9514	0.9502	0.9213	0.9189	0.8940	0.9644
ite-strar1-shr	0.9632	0.9551	0.9568	0.9556	0.9467	0.9475	0.9339	0.9407	0.9058	0.9136	0.8987	0.9475
ite-strar1-struc	0.9735	0.9643	0.9638	0.9601	0.9505	0.9487	0.9345	0.9395	0.9052	0.9093	0.8858	0.9516
ite-strar1-wls	0.9722	0.9649	0.9672	0.9663	0.9583	0.9601	0.9464	0.9547	0.9210	0.9298	0.9175	0.9591
ite-struc-bu	0.9863	0.9818	0.9817	0.9829	0.9729	0.9776	0.9631	0.9745	0.9405	0.9509	0.9386	0.9768
ite-struc-ols	0.9958	0.9783	0.9816	0.9729	0.9668	0.9600	0.9510	0.9492	0.9202	0.9178	0.8925	0.9638
ite-struc-shr	0.9631	0.9549	0.9567	0.9553	0.9466	0.9473	0.9340	0.9405	0.9056	0.9134	0.8983	0.9473
ite-struc-struc	0.9736	0.9641	0.9637	0.9597	0.9504	0.9485	0.9344	0.9391	0.9049	0.9090	0.8849	0.9513
ite-struc-wls	0.9722	0.9647	0.9671	0.9661	0.9582	0.9599	0.9465	0.9546	0.9209	0.9295	0.9169	0.9589
ite-wlsh-bu	0.9858	0.9813	0.9827	0.9826	0.9727	0.9774	0.9616	0.9748	0.9400	0.9513	0.9401	0.9767
ite-wlsh-ols	<b>1.0019</b>	0.9835	0.9843	0.9762	0.9679	0.9624	0.9519	0.9527	0.9221	0.9210	0.8984	0.9678
ite-wlsh-shr	0.9631	0.9557	0.9578	0.9552	0.9464	0.9467	0.9319	0.9402	0.9035	0.9119	0.8970	0.9473
ite-wlsh-struc	0.9768	0.9656	0.9640	0.9602	0.9497	0.9483	0.9324	0.9395	<b>0.9026</b>	0.9076	<b>0.8842</b>	0.9519
ite-wlsh-wls	0.9732	0.9654	0.9675	0.9661	0.9579	0.9598	0.9449	0.9549	0.9202	0.9294	0.9175	0.9592
ite-wlsv-bu	0.9860	0.9811	0.9813	0.9827	0.9730	0.9778	0.9625	0.9746	0.9407	0.9515	0.9413	0.9767
ite-wlsv-ols	0.9961	0.9787	0.9814	0.9738	0.9669	0.9613	0.9513	0.9505	0.9225	0.9206	0.8986	0.9649
ite-wlsv-shr	<b>0.9630</b>	<b>0.9545</b>	<b>0.9562</b>	<b>0.9545</b>	0.9462	<b>0.9466</b>	0.9324	0.9395	0.9036	0.9116	0.8974	<b>0.9465</b>
ite-wlsv-struc	0.9733	0.9635	0.9625	0.9590	0.9491	0.9477	0.9321	<b>0.9380</b>	0.9028	<b>0.9073</b>	0.8847	0.9505
ite-wlsv-wls	0.9718	0.9643	0.9664	0.9656	0.9577	0.9598	0.9452	0.9543	0.9202	0.9292	0.9180	0.9586

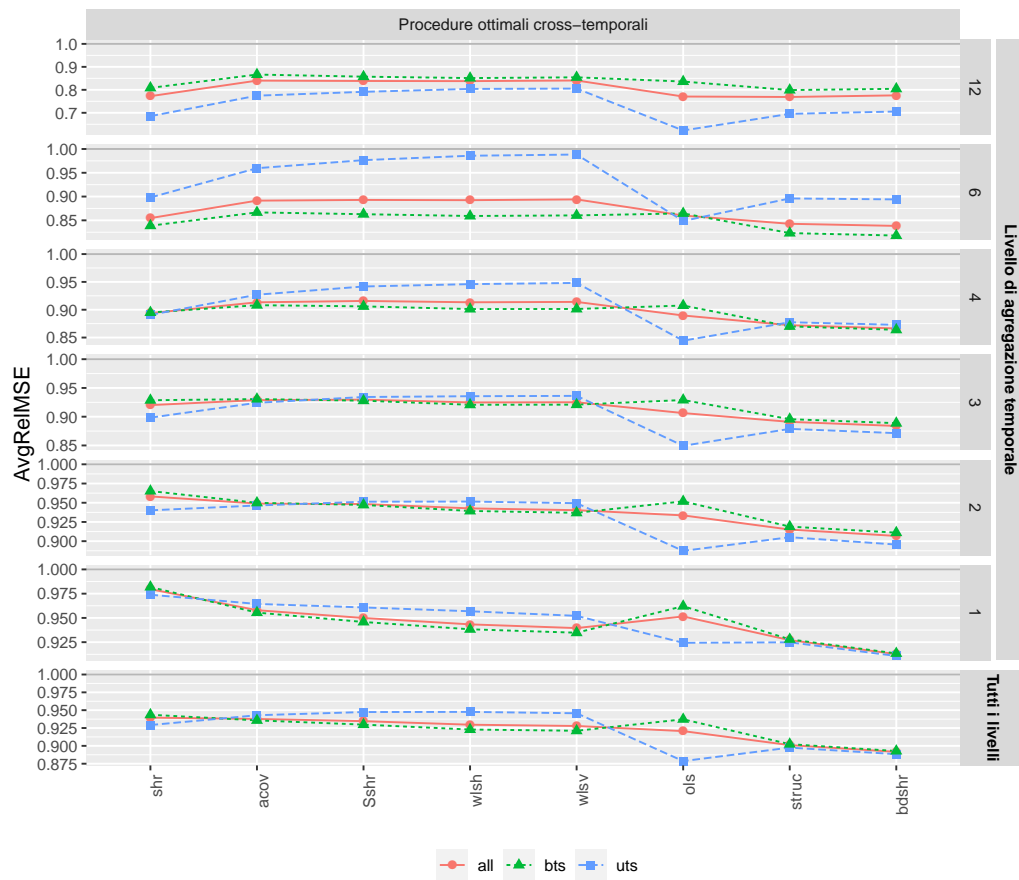
## C.4 Procedure di riconciliazione ottimale cross-temporale

**Tabella C.10:** AvgRelMSE delle previsioni un passo in avanti e fino a  $h_k$  passi per tutti i livelli di aggregazione temporale  $k$ .

Procedure	Mensili		bimensili		Trimestrali		Quadrimestrali		Semi-annuali		Annuali	Tutte
	1	1-12	1	1-6	1	1-4	1	1-3	1	1-2	1	
<i>Tutte le 105 serie</i>												
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
oct-ols	0.9726	0.9515	0.9471	0.9336	0.9227	0.9063	0.9027	0.8897	0.8640	0.8601	0.7708	0.9207
oct-struct	0.9378	0.9271	0.9209	0.9151	0.8934	0.8910	0.8681	0.8721	0.8283	0.8427	<b>0.7689</b>	0.9010
oct-wlsh	0.9510	0.9434	0.9443	0.9427	0.9188	0.9248	0.8993	0.9134	0.8676	0.8924	0.8379	0.9296
oct-wlsv	0.9471	0.9395	0.9416	0.9403	0.9202	0.9251	0.9018	0.9140	0.8707	0.8940	0.8406	0.9279
oct-shr	0.9865	0.9796	0.9675	0.9582	0.9215	0.9202	0.8858	0.8938	0.8319	0.8547	0.7724	0.9396
oct-Sshr	0.9530	0.9499	0.9500	0.9483	0.9227	0.9296	0.8999	0.9158	0.8656	0.8929	0.8385	0.9346
oct-acov	0.9658	0.9579	0.9520	0.9489	0.9189	0.9289	0.8965	0.9133	0.8664	0.8914	0.8400	0.9377
oct-bdshr	<b>0.9194</b>	<b>0.9127</b>	<b>0.9137</b>	<b>0.9068</b>	<b>0.8853</b>	<b>0.8839</b>	<b>0.8594</b>	<b>0.8664</b>	<b>0.8199</b>	<b>0.8383</b>	0.7759	<b>0.8916</b>
<i>Le 29 serie aggregate</i>												
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
oct-ols	0.9520	0.9243	0.9126	<b>0.8874</b>	0.8735	<b>0.8494</b>	0.8742	<b>0.8444</b>	<b>0.8488</b>	<b>0.8487</b>	<b>0.6231</b>	<b>0.8786</b>
oct-struct	0.9303	0.9249	0.9104	0.9052	0.8796	0.8788	0.8804	0.8775	0.8665	0.8961	0.6953	0.8975
oct-wlsh	0.9579	0.9569	0.9495	0.9515	0.9246	0.9356	0.9380	0.9460	0.9413	0.9858	0.8039	0.9476
oct-wlsv	0.9504	0.9521	0.9456	0.9494	0.9261	0.9362	0.9412	0.9481	0.9448	0.9883	0.8055	0.9457
oct-shr	0.9717	0.9739	0.9496	0.9401	0.8965	0.8984	0.8900	0.8908	0.8590	0.8981	0.6854	0.9292
oct-Sshr	0.9485	0.9608	0.9417	0.9513	0.9136	0.9343	0.9227	0.9418	0.9202	0.9765	0.7913	0.9474
oct-acov	0.9567	0.9644	0.9465	0.9464	0.9058	0.9242	0.9114	0.9270	0.9093	0.9596	0.7745	0.9429
oct-bdshr	<b>0.9084</b>	<b>0.9108</b>	<b>0.9009</b>	0.8956	<b>0.8696</b>	0.8714	<b>0.8724</b>	0.8728	0.8584	0.8940	0.7056	0.8884
<i>Le 76 serie bottom</i>												
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
oct-ols	0.9806	0.9621	0.9605	0.9518	0.9422	0.9290	0.9138	0.9076	0.8698	0.8646	0.8360	0.9372
oct-struct	0.9406	0.9279	0.9249	0.9189	0.8987	0.8957	0.8634	0.8701	0.8142	0.8232	<b>0.7989</b>	0.9024
oct-wlsh	0.9483	0.9383	0.9423	0.9393	0.9166	0.9207	0.8849	0.9013	0.8410	0.8592	0.8512	0.9229
oct-wlsv	0.9458	0.9347	0.9401	0.9369	0.9180	0.9209	0.8871	0.9014	0.8441	0.8604	0.8544	0.9211
oct-shr	0.9922	0.9818	0.9744	0.9652	0.9312	0.9286	0.8842	0.8950	0.8218	0.8387	0.8084	0.9436
oct-Sshr	0.9547	0.9458	0.9532	0.9472	0.9262	0.9278	0.8913	0.9060	0.8456	0.8629	0.8573	0.9298
oct-acov	0.9693	0.9555	0.9542	0.9499	0.9240	0.9307	0.8909	0.9082	0.8505	0.8667	0.8665	0.9357
oct-bdshr	<b>0.9236</b>	<b>0.9134</b>	<b>0.9186</b>	<b>0.9111</b>	<b>0.8914</b>	<b>0.8887</b>	<b>0.8544</b>	<b>0.8639</b>	<b>0.8057</b>	<b>0.8180</b>	0.8045	<b>0.8928</b>

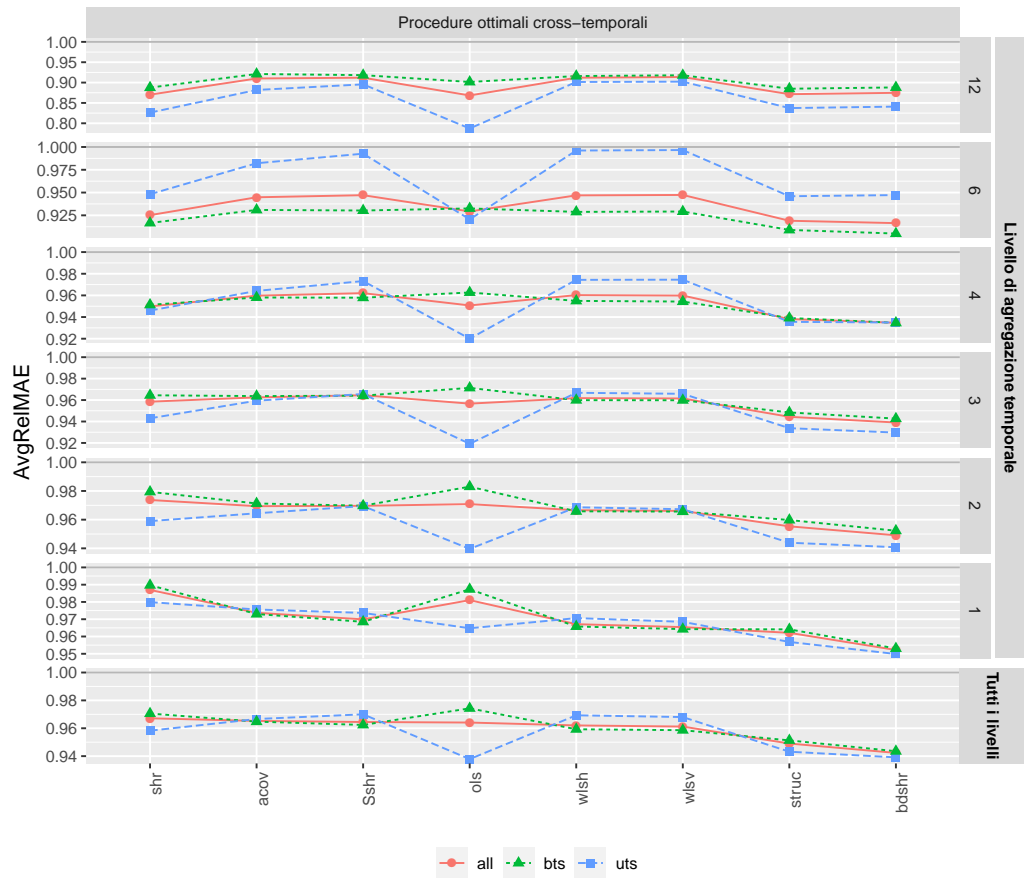
**Tabella C.11:** AvgRelMAE delle previsioni un passo in avanti e fino a  $h_k$  passi per tutti i livelli di aggregazione temporale  $k$ .

Procedure	Mensili		bimensili		Trimestrali		Quadrimestrali		Semi-annuali		Annuali	Tutte
	1	1-12	1	1-6	1	1-4	1	1-3	1	1-2	1	
<i>Tutte le 105 serie</i>												
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
oct-ols	0.9938	0.9811	0.9815	0.9708	0.9676	0.9567	0.9596	0.9507	0.9330	0.9293	<b>0.8684</b>	0.9641
oct-struct	0.9684	0.9621	0.9598	0.9553	0.9458	0.9444	0.9355	0.9381	0.9109	0.9191	0.8715	0.9490
oct-wlsh	0.9722	0.9671	0.9669	0.9666	0.9576	0.9618	0.9511	0.9603	0.9325	0.9469	0.9120	0.9620
oct-wlsv	0.9692	0.9654	0.9662	0.9661	0.9580	0.9615	0.9524	0.9598	0.9342	0.9474	0.9136	0.9612
oct-shr	0.9905	0.9870	0.9780	0.9737	0.9581	0.9585	0.9447	0.9498	0.9121	0.9252	0.8703	0.9671
oct-Sshr	0.9712	0.9699	0.9704	0.9697	0.9589	0.9645	0.9516	0.9621	0.9308	0.9471	0.9120	0.9645
oct-acov	0.9802	0.9737	0.9709	0.9694	0.9569	0.9625	0.9492	0.9597	0.9305	0.9448	0.9101	0.9653
oct-bdshr	<b>0.9571</b>	<b>0.9522</b>	<b>0.9523</b>	<b>0.9491</b>	<b>0.9395</b>	<b>0.9391</b>	<b>0.9308</b>	<b>0.9347</b>	<b>0.9053</b>	<b>0.9165</b>	0.8748	<b>0.9423</b>
<i>Le 29 serie aggregate</i>												
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
oct-ols	0.9764	0.9648	0.9599	<b>0.9396</b>	0.9372	<b>0.9192</b>	0.9424	<b>0.9200</b>	<b>0.9196</b>	<b>0.9206</b>	<b>0.7873</b>	<b>0.9379</b>
oct-struct	0.9548	0.9569	0.9497	0.9439	0.9339	0.9338	0.9386	0.9356	0.9269	0.9460	0.8374	0.9432
oct-wlsh	0.9667	0.9707	0.9678	0.9686	0.9585	0.9668	0.9699	0.9744	0.9708	0.9961	0.9015	0.9693
oct-wlsv	0.9624	0.9685	0.9657	0.9673	0.9588	0.9659	0.9715	0.9745	0.9717	0.9966	0.9023	0.9680
oct-shr	0.9738	0.9799	0.9648	0.9590	0.9393	0.9430	0.9465	0.9460	0.9246	0.9482	0.8262	0.9583
oct-Sshr	0.9611	0.9737	0.9642	0.9695	0.9504	0.9656	0.9631	0.9732	0.9607	0.9927	0.8957	0.9700
oct-acov	0.9678	0.9756	0.9653	0.9644	0.9472	0.9594	0.9552	0.9642	0.9535	0.9822	0.8819	0.9666
oct-bdshr	<b>0.9441</b>	<b>0.9499</b>	<b>0.9451</b>	0.9408	<b>0.9272</b>	<b>0.9366</b>	0.9349	0.9233	0.9472	0.8410	0.9391	
<i>Le 76 serie bottom</i>												
base	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
oct-ols	<b>1.0005</b>	0.9873	0.9899	0.9830	0.9794	0.9714	0.9663	0.9627	0.9381	0.9326	0.9015	0.9743
oct-struct	0.9736	0.9641	0.9637	0.9597	0.9504	0.9485	0.9344	0.9391	0.9049	0.9090	<b>0.8849</b>	0.9513
oct-wlsh	0.9743	0.9658	0.9666	0.9658	0.9572	0.9599	0.9440	0.9549	0.9183	0.9288	0.9160	0.9593
oct-wlsv	0.9718	0.9643	0.9664	0.9656	0.9577	0.9598	0.9452	0.9543	0.9202	0.9292	0.9180	0.9586
oct-shr	0.9969	0.9897	0.9831	0.9794	0.9654	0.9645	0.9441	0.9513	0.9074	0.9166	0.8877	0.9706
oct-Sshr	0.9751	0.9685	0.9728	0.9697	0.9621	0.9641	0.9472	0.9579	0.9197	0.9303	0.9183	0.9624
oct-acov	0.9850	0.9730	0.9731	0.9713	0.9606	0.9637	0.9469	0.9581	0.9219	0.9309	0.9211	0.9647
oct-bdshr	<b>0.9621</b>	<b>0.9531</b>	<b>0.9551</b>	<b>0.9523</b>	<b>0.9443</b>	<b>0.9427</b>	<b>0.9287</b>	<b>0.9346</b>	<b>0.8985</b>	<b>0.9050</b>	0.8881	<b>0.9435</b>



	all							bts						uts							
	all	1	2	3	4	6	12	all	1	2	3	4	6	12	all	1	2	3	4	6	12
oct bdshr -	1	1	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	2	2	1	2	2	2	2	4
oct struc -	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	1	3	3	3	3	3	3	3
oct ols -	3	6	3	3	3	4	2	7	7	7	7	7	7	4	1	2	1	1	1	1	1
oct w/sv -	4	3	4	6	7	8	8	3	3	3	4	5	5	6	6	4	6	8	8	8	8
oct w/sh -	5	4	5	5	6	6	5	4	4	4	3	4	4	5	8	5	8	7	7	7	7
oct Sshr -	6	5	6	8	8	7	6	5	5	5	5	6	6	7	7	6	7	6	6	6	6
oct acov -	7	7	7	7	5	5	7	6	6	6	8	8	8	8	5	7	5	5	5	5	5
oct shr -	8	8	8	4	4	3	3	8	8	8	6	3	3	3	4	8	4	4	4	4	2
base -	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

**Figura C.9:** Nel pannello in alto vi è l’Average Relative MSE calcolato con tutte le serie e tutti gli orizzonti di previsione per ciascuna frequenza temporale. Nel pannello in basso vi sono le graduatorie divise per frequenza e orizzonte di previsione.



	all						bts						uts								
	all	1	2	3	4	6	12	all	1	2	3	4	6	12	all	1	2	3	4	6	12
oct bdshr	1	1	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	3	2	1	2	2	2	3	4
oct struc	2	2	2	2	2	2	3	2	2	2	2	2	2	1	3	2	3	3	3	2	3
oct wlsv	3	3	3	5	6	8	8	3	3	3	3	4	5	6	6	4	6	7	8	8	8
oct wls	4	4	4	6	7	6	7	4	4	4	4	5	4	5	7	5	7	8	7	7	7
oct ols	5	7	7	3	4	4	1	8	7	8	8	8	8	4	1	3	1	1	1	1	1
oct Sshr	6	5	6	8	8	7	6	5	5	5	6	6	6	7	8	6	8	6	6	6	6
oct acov	7	6	5	7	5	5	5	6	6	6	5	7	7	8	5	7	5	5	5	5	5
oct shr	8	8	8	4	3	3	2	7	8	7	7	3	3	2	4	8	4	4	4	4	2
base	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

**Figura C.10:** Nel pannello in alto vi è l’Average Relative MAE calcolato con tutte le serie e tutti gli orizzonti di previsione per ciascuna frequenza temporale. Nel pannello in basso vi sono le graduatorie divise per frequenza e orizzonte di previsione.

# Appendice D

## Manuale FOREC



### Descrizione

Il pacchetto `forec` (**f**orecast **r**econciliation) permette di trattare problemi di riconciliazione di previsioni puntuali, attraverso un processo di *post-forecasting* volto a migliorare la qualità delle previsioni di base per un sistema di serie storiche gerarchiche/raggruppate contemporanee, temporali e cross-temporali.

### Installazione in R

Una versione stabile può essere installata dalla raccolta **R CRAN**<sup>1</sup>:

---

```
install.packages("forec", dependencies = TRUE)
```

---

Una versione in via di sviluppo è disponibile attraverso il sito **GitHub**:

---

```
# install.packages("devtools")  
devtools::install_github("daniGiro/forec")
```

---

### Link utili

- **R CRAN**<sup>1</sup>: <https://cran.r-project.org/package=forec>
- Codice (**GitHub**): <https://github.com/daniGiro/forec>
- Sito con documentazione: <https://danigiro.github.io/forec/>

---

<sup>1</sup>In data 2 settembre 2020 non ancora disponibile.

# Package ‘forec’

September 2, 2020

**Type** Package

**Title** Forecast Reconciliation

**Version** 0.9.0.0

**Description**

An R package offering classical (bottom-up), optimal and heuristic combination forecast reconciliation procedures for cross temporal, cross sectional and temporal linearly constrained time series.

**BugReports** <https://github.com/daniGiro/forec/issues>

**URL** <https://github.com/daniGiro/forec>,  
<https://danigiuro.github.io/forec/>

**License** GPL-3

**Depends** R (>= 3.2.0), stats, Matrix, osqp

**Imports** pracma, corpcor, methods, cli

**Suggests** knitr, rmarkdown

**Encoding** UTF-8

**LazyData** true

**VignetteBuilder** knitr

**RoxygenNote** 7.1.1

**NeedsCompilation** no

**Author** Daniele Girolimetto [aut, cre, fnd]

**Maintainer** Daniele Girolimetto <daniele.girolimetto@studenti.unipd.it>

## R topics documented:

forec-package . . . . .	2
Cmatrix . . . . .	3
commat . . . . .	3
crosstemporal_data . . . . .	4
cstrec . . . . .	5
ctbu . . . . .	6
ctf_tools . . . . .	7
forec-hts . . . . .	8
forec-thief . . . . .	10
forec2ts . . . . .	12

htsrec . . . . .	13
hts_tools . . . . .	16
iterec . . . . .	17
octrec . . . . .	20
score_index . . . . .	22
shrink_estim . . . . .	24
tcsrec . . . . .	25
thfrec . . . . .	27
thf_tools . . . . .	29

<b>Index</b>	<b>31</b>
--------------	-----------

---

forec-package	<i>forec: Forecast Reconciliation</i>
---------------	---------------------------------------

---

## Description

An R package offering classical (bottom-up), optimal and heuristic combination forecast reconciliation procedures for cross-sectional, temporal and cross-temporal linearly constrained time series.

## Details

The forec package is designed for point forecast reconciliation, a post-forecasting process aimed to improve the quality of the base forecasts for a system of linearly constrained (e.g. hierarchical/grouped) time series. The main functions are:

- `htsrec()`: cross-sectional (contemporaneous) forecast reconciliation.
- `thfrec()`: forecast reconciliation for a single time series through temporal hierarchies.
- `tcsrec()`: heuristic first-temporal-then-cross-sectional cross-temporal forecast reconciliation (Kourentzes and Athanasopoulos, 2019).
- `cstrec()`: heuristic first-cross-sectional-then-temporal cross-temporal forecast reconciliation.
- `iterec()`: heuristic iterative cross-temporal forecast reconciliation.
- `octrec()`: optimal combination cross-temporal forecast reconciliation.

## Author(s)

Daniele Girolimetto, Department of Statistical Sciences, University of Padua (Italy).

## References

Di Fonzo, T., Girolimetto, D. (2020), Cross-Temporal Forecast Reconciliation: Optimal Combination Method and Heuristic Alternatives, Department of Statistical Sciences, University of Padua, [arXiv:2006.08570](https://arxiv.org/abs/2006.08570).

---

Cmatrix	<i>Cross-sectional (contemporaneous) matrix</i>
---------	---

---

**Description**

The (na x nb) cross-sectional (contemporaneous) matrix mapping the bottom level series into the higher level ones. (Experimental version)

**Usage**

```
Cmatrix(formula, data, sep = "_", sparse = TRUE)
```

**Arguments**

formula	The specification of hierarchical structure: grouped hierarchies are specified using <code>~ g1 * g2</code> and nested hierarchies are specified using <code>~ parent / child</code> . Mixtures of the two formulations are also possible, like <code>~ g1 * (grandparent / parent / child)</code> .
data	A dataset in which each column contains the values of the variables in the formula and each row represents a lower time series (at bottom level).
sep	Character to separate the names of the aggregated series ( <i>default</i> is <code>"_"</code> ).
sparse	Option to return sparse matrix ( <i>default</i> is <code>TRUE</code> ).

**Value**

A (na x nb) matrix.

**Examples**

```
## Not run:
# Names of bottom level variables
data_bts <- data.frame(X1 = "Tot",
                      X2 = c("A", "A", "B", "B", "C"),
                      X3 = c("A", "B", "A", "B", NA))
# Cross-sectional aggregation matrix
C <- Cmatrix(~ X1 / X2 / X3, data_bts, sep = "")

## End(Not run)
```

---

commat	<i>Commutation Matrix</i>
--------	---------------------------

---

**Description**

This function returns the  $((r\ c) \times (r\ c))$  commutation matrix  $K$  such that

$$K \text{vec}(Y) = \text{vec}(Y')$$

where  $Y$  is a  $(r \times c)$  matrix.



**Usage**

```
commat(r, c)
```

**Arguments**

**r** number of rows of  $Y$ .  
**c** number of columns of  $Y$ .

**Value**

a sparse  $((r \ c) \times (r \ c))$  matrix.

**References**

Magnus, J.R., Neudecker, H. (2019), Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics, third edition, New York, Wiley, pp. 54-55.

**Examples**

```
Y <- matrix(rnorm(30), 5, 6)
P <- commat(5, 6)
P %% as.vector(Y) == as.vector(t(Y)) # check
```

---

crosstemporal\_data      *Forecast reconciliation for a simulated hierarchical time series*

---

**Description**

A 2 levels hierarchy with  $n = 8$  variables and monthly data. In the cross-sectional framework,  $Tot = A + B + C$ ,  $A = AA + AB$  and  $B = BA + BB$  ( $nb = 5$  at the bottom level). For monthly data, the observations are aggregated to annual ( $k = 12$ ), semi-annual ( $k = 6$ ), four-monthly ( $k = 4$ ), quarterly ( $k = 3$ ) and bi-monthly ( $k = 2$ ) observations. The bottom time series are simulated from ARIMA(1, 1, 0) models. There are 180 (15 years) monthly observations: the first 168 values (14 years) are used for training set, and the last 12 form the test set.

**Usage**

```
data(crosstemporal_data)
```

**Format**

An object of class "list":

**base** Matrix of base forecasts.

**test** Matrix of test set.

**res** Matrix of residuals.

**C** Cross-sectional (contemporaneous) aggregation matrix.

**obs** List of the observations at any levels and temporal frequency.

---

cstrec	<i>Heuristic first-Cross-sectional-than-Temporal Cross-temporal Forecast Reconciliation</i>
--------	---

---

### Description

The order of application of the two reconciliation steps considered by `tcsrec` may be inverted. This function performs cross-sectional reconciliation (`htsrec`) first, then temporal reconciliation (`thfrec`), and finally applies the average of the projection matrices obtained in the second step to the one dimensional reconciled values obtained in the first step.

### Usage

```
cstrec(basef, m, C, thf_comb, hts_comb, Ut, nb, res, W, Omega,
       mse = TRUE, corpcor = FALSE, nn = FALSE,
       settings = osqpSettings(verbose = FALSE, eps_abs = 1e-5,
                               eps_rel = 1e-5, polish_refine_iter = 100, polish = TRUE))
```

### Arguments

basef	( $n \times h(k^* + m)$ ) matrix of base forecasts to be reconciled; $n$ is the number of cross-sectional time series, $m$ is the highest frequency, $k^*$ is the sum of $(p-1)$ factors of $m$ (exclude $m$ as factors) and $h$ is the forecast horizon. Each row indicates a time series and the forecasts are ordered as [lowest_freq' ... highest_freq']'.
m	Highest available sampling frequency per seasonal cycle (max. order of temporal aggregation).
C	( $n_a \times n_b$ ) cross-sectional (contemporaneous) matrix mapping the bottom level series into the higher level ones.
thf_comb	Type of the $((k^* + m) \times (k^* + m))$ covariance matrix to be used in the temporal reconciliation, see more in comb param of <code>thfrec</code> .
hts_comb	Type of the $(n \times n)$ covariance matrix to be used in the cross-sectional reconciliation, see more in comb param of <code>htsrec</code> .
Ut	( $n_a \times n$ ) zero constraints cross-sectional (contemporaneous) kernel matrix $U'Y = \mathbf{0}_{[n_a \times (k^* + m)]}$ spanning the null space valid for the reconciled forecasts. It can be used instead of parameter C, but needs nb ( $n = n_a + n_b$ ).
nb	Number of bottom time series; if C is present, nb is not used.
res	( $n \times N(k^* + m)$ ) matrix containing the residuals at all the temporal frequencies ordered [lowest_freq' ... highest_freq']' (columns) for each variable (row), needed to estimate the covariance matrix when <code>hts_comb = {"wls", "shr", "sam"}</code> and/or <code>hts_comb = {"wlsv", "wlsh", "acov", "strar1", "sar1", "har1", "shr", "sam"}</code> . The row must be in the same order as basef.
W	This option permits to directly enter the covariance matrix in the cross-sectional reconciliation, see more in W param of <code>htsrec</code> .
Omega	This option permits to directly enter the covariance matrix in the cross-sectional reconciliation, see more in Omega param of <code>thfrec</code> .
mse	Logical value: TRUE (default) calculates the covariance matrix of the in-sample residuals (when necessary) according to the original <b>hts</b> and <b>thief</b> formulation: no mean correction, T as denominator.

corpcor	Logical value: TRUE if <b>corpcor</b> (Schäfer et al., 2017) must be used to shrink the sample covariance matrix according to Schäfer and Strimmer (2005), otherwise the function uses the same implementation as package <b>hts</b> .
nn	Logical value, TRUE if non-negative reconciled forecasts are wished. <b>Warning</b> , the two-step heuristic reconciliation allows non negativity constraints only in the first step. This means that non-negativity is not guaranteed in the final reconciled values.
settings	Settings for <b>osqp</b> (object <b>osqpSettings</b> ). The default options are: verbose = FALSE, eps_abs = 1e-5, eps_rel = 1e-5, polish_refine_iter = 100 and polish = TRUE. For details, see the <b>osqp documentation</b> .

### Value

The function returns a list with two elements:

recf	(n x h(k* + m)) reconciled forecasts matrix.
M	Projection matrix (projection approach).

### References

Di Fonzo, T., Girolimetto, D. (2020), Cross-Temporal Forecast Reconciliation: Optimal Combination Method and Heuristic Alternatives, Department of Statistical Sciences, University of Padua, [arXiv:2006.08570](https://arxiv.org/abs/2006.08570).

Kourentzes, N., Athanasopoulos, G. (2019), Cross-temporal coherent forecasts for Australian tourism, *Annals of Tourism Research*, 75, 393-409.

### Examples

```
## Not run:
data(crosstemporal_data)
obj <- cstrec(crosstemporal_data$base, m = 12, C = crosstemporal_data$C, thf_comb = "acov",
             hts_comb = "shr", res = crosstemporal_data$res)

## End(Not run)
```

---

ctbu

*Bottom-up Cross-temporal Reconciliation*

---

### Description

Cross temporal reconciled forecasts for all series at any temporal aggregation level can be easily computed by appropriate summation of the high-frequency bottom base forecasts  $\hat{\mathbf{b}}_i, i = 1, \dots, n_b$ , according to a bottom-up procedure like what is currently done in both the cross-sectional and temporal frameworks.

### Usage

```
ctbu(Bmat, m, C)
```

**Arguments**

Bmat	(nb x (h m)) matrix of high-frequency bottom time series base forecasts. h is the forecast horizon for the lowest frequency (most temporally aggregated) time series.
m	Highest available sampling frequency per seasonal cycle (max. order of temporal aggregation).
C	(na x nb) cross-sectional (contemporaneous) matrix mapping the bottom level series into the higher level ones.

**Value**

The function returns a (n x (h (k\* + m))) matrix of bottom-up cross-temporally reconciled forecasts.

**References**

Di Fonzo, T., Girolimetto, D. (2020), Cross-Temporal Forecast Reconciliation: Optimal Combination Method and Heuristic Alternatives, Department of Statistical Sciences, University of Padua, [arXiv:2006.08570](https://arxiv.org/abs/2006.08570).

**Examples**

```
## Not run:
data(crosstemporal_data)
id <- which(simplify2array(strsplit(colnames(crosstemporal_data$base),
                                     split = "_"))[1, ] == "k1")
hfbts <- crosstemporal_data$base[-c(1:3), id]
obj <- ctbu(Bmat = hfbts, m = 12, C = crosstemporal_data$C)
rownames(obj) <- rownames(crosstemporal_data$base)

## End(Not run)
```

ctf\_tools

*Cross-Temporal Reconciliation Tools***Description**

Some useful tools for the cross-temporal reconciliation of temporally and hierarchically constrained time series

**Usage**

```
ctf_tools(C, m, h = 1, Ut, nb, note = TRUE, Sstruc = FALSE)
```

**Arguments**

C	(na x nb) cross-sectional (contemporaneous) matrix mapping the bottom level series into the higher level ones.
m	Highest available sampling frequency per seasonal cycle (max. order of temporal aggregation).

h	Forecast horizon for the lowest frequency (most temporally aggregated) time series ( <i>default</i> is 1).
Ut	$(n_a \times n)$ zero constraints cross-sectional (contemporaneous) kernel matrix $\mathbf{U}'\mathbf{Y} = \mathbf{0}_{[n_a \times (k^* + m)]}$ spanning the null space valid for the reconciled forecasts. It can be used instead of parameter C, but needs nb ( $n = n_a + nb$ ).
nb	Number of bottom time series; if C is present, nb is not used.
note	If note = TRUE ( <i>default</i> ) the function writes some notes to the console, otherwise no note is produced.
Sstruc	If note = TRUE the function returns also the structural representation matrix of a cross-temporal system some notes to the console ( <i>default</i> is FALSE).

### Value

**ctf** list with:

Ht	Full row-rank cross-temporal zero-valued constraints (kernel) matrix, $\mathbf{H}'\mathbf{y} = \mathbf{0}$ .
Htbreve	Complete, not full row-rank cross-temporal zero-valued constraints (kernel) matrix.
Htstruc	Zero constraints full row-rank cross-temporal kernel matrix (structural representation), $\tilde{\mathbf{H}}'$ .
Sstruc	Cross-temporal summing matrix (structural representation), $\tilde{\mathbf{S}}$ .

**hts** list from [hts\\_tools](#)

**thf** list from [thf\\_tools](#)

### Examples

```
# One level hierarchy (na = 1, nb = 2) with quarterly data
obj <- ctf_tools(C = matrix(c(1, 1), 1), m = 4, Sstruc = TRUE)
```

---

forec-hts

*Simple examples to compare forec and hts packages*

---

### Description

Datasets in the **hts** package are used to show how to get the same results with the **forec** package. At first, let's consider the `htseg1` dataset (simulated data with three levels, a total of 8 series each of length 10). After, we take the `htseg2` dataset (simulated data with four levels, a total of 17 series each of length 16). `htseg1` and `htseg2` are objects of class `hts` in **hts**.

### References

Hyndman, R. J., Lee, A., Wang, E., and Wickramasuriya, S. (2020). `hts`: Hierarchical and Grouped Time Series, *R package version 6.0.1*, <https://CRAN.R-project.org/package=hts>.

**Examples**

```

## Not run:
library(hts)
require(forec)

##### htseg1 #####
data <- allts(htseg1)
C <- smatrix(htseg1)[1:3, ]
n <- NCOL(data)

# Base forecasts
base <- list()
for (i in 1:n) {
  base[[i]] <- forecast(auto.arima(data[, i]))
}

# Matrix of base forecasts
BASE <- NULL
for (i in 1:n) {
  BASE <- cbind(BASE, base[[i]]$mean)
}
colnames(BASE) <- colnames(data)

# Matrix of residuals
res <- NULL
for (i in 1:n) {
  res <- cbind(res, base[[i]]$residuals)
}
colnames(res) <- colnames(data)

# ols
Y_hts_ols <- combinef(BASE, nodes = get_nodes(htseg1), keep = "all")
Y_forec_ols <- htsrec(BASE, C = C, comb = "ols")$recf
sum((Y_hts_ols - Y_forec_ols) > 1e-10)

# struc
w <- 1 / apply(smatrix(htseg1), 1, sum)
Y_hts_struc <- combinef(BASE, nodes = get_nodes(htseg1), weights = w, keep = "all")
Y_forec_struc <- htsrec(BASE, C = C, comb = "struc")$recf
sum((Y_hts_struc - Y_forec_struc) > 1e-10)

# shr
Y_hts_shr <- MinT(BASE, nodes = get_nodes(htseg1), keep = "all", covariance = "shr", residual = res)
Y_forec_shr <- htsrec(BASE, C = C, comb = "shr", res = res)$recf
sum((Y_hts_shr - Y_forec_shr) > 1e-10)

# sam - hts error "MinT needs covariance matrix to be positive definite"
#       The covariance matrix is non-singular, but its condition number is very low,
#       and hts considers it as non-invertible
Y_hts_sam <- MinT(BASE, nodes = get_nodes(htseg1), keep = "all", covariance = "sam", residual = res)
Y_forec_sam <- htsrec(BASE, C = C, comb = "sam", res = res)$recf
# sum((Y_hts_sam-Y_forec_sam)>1e-10)

##### htseg2 #####
data <- allts(htseg2)
C <- smatrix(htseg2)[1:7, ]

```

```

n <- NCOL(data)

## In forec the forecasting part must be done externally
# Base forecasts
base <- list()
for (i in 1:n) {
  base[[i]] <- forecast(auto.arima(data[, i]))
}

# Matrix of base forecasts
BASE <- NULL
for (i in 1:n) {
  BASE <- cbind(BASE, base[[i]]$mean)
}
colnames(BASE) <- colnames(data)

# Matrix of residuals
res <- NULL
for (i in 1:n) {
  res <- cbind(res, base[[i]]$residuals)
}
colnames(res) <- colnames(data)

## Comparison
# ols
y_hts <- forecast(htseg2, method = "comb", fmethod = "arima", weights = "ols")
y_forec <- htsrec(BASE, C = C, comb = "ols")$recf
sum(abs(as.matrix(allts(y_hts)) - as.matrix(y_forec)) > 1e-10)

# struc
y_hts <- forecast(htseg2, method = "comb", fmethod = "arima", weights = "nseries")
y_forec <- htsrec(BASE, C = C, comb = "struc")$recf
sum(abs(as.matrix(allts(y_hts)) - as.matrix(y_forec)) > 1e-10)

# wls
y_hts <- forecast(htseg2, method = "comb", fmethod = "arima", weights = "wls")
y_forec <- htsrec(BASE, C = C, comb = "wls", resmat = res)$recf
sum(abs(as.matrix(allts(y_hts)) - as.matrix(y_forec)) > 1e-10)

# shr
y_hts <- forecast(htseg2, method = "comb", fmethod = "arima", weights = "mint", covariance = "shr")
y_forec <- htsrec(BASE, C = C, comb = "shr", resmat = res)$recf
sum(abs(as.matrix(allts(y_hts)) - as.matrix(y_forec)) > 1e-10)

# sam - covariance matrix is not positive definite
# y_hts <- forecast(htseg2, method = "comb", fmethod = "arima",
#                   weights = "mint", covariance = "sam")
# y_forec <- htsrec(BASE, C=C, comb = "sam", resmat = res)$recf
# sum(abs(as.matrix(allts(y_hts))-as.matrix(y_forec))>1e-10)

## End(Not run)

```

## Description

The dataset in the thief package is used to show how to get the same results with the forec package. In particular we take the Accident and Emergency demand in the UK, AEdemand, from 1 January 2011 to 31 December 2014.

## References

Hyndman, R. J., Kourentzes, N. (2018), thief: Temporal HIERarchical Forecasting, *R package version 0.3*, <https://CRAN.R-project.org/package=thief>.

## Examples

```
## Not run:
library(thief)
require(forec)
dataset <- window(AEdemand[, 12], start = c(2011, 1), end = c(2014, 52))
data <- tsaggregates(dataset)
# Base forecasts
base <- list()
for (i in 1:5) {
  base[[i]] <- forecast(auto.arima(data[[i]]))
}
base[[6]] <- forecast(auto.arima(data[[6]]), h = 2)
# Base forecasts vector
base_vec <- NULL
for (i in 6:1) {
  base_vec <- c(base_vec, base[[i]]$mean)
}
# Residual vector
res <- NULL
for (i in 6:1) {
  res <- c(res, base[[i]]$residuals)
}

# OLS
obj_thief <- thief(dataset, m = 52, h = 2 * 52, comb = "ols", usemodel = "arima")
obj_thief <- tsaggregates(obj_thief$mean)
y_thief <- NULL
for (i in 6:1) {
  y_thief <- c(y_thief, obj_thief[[i]])
}
y_forec <- thfrec(base_vec, 52, comb = "ols")$recf
sum(abs(y_forec - y_thief) > 1e-10)

# STRUC
obj_thief <- thief(dataset, m = 52, h = 2 * 52, comb = "struc", usemodel = "arima")
obj_thief <- tsaggregates(obj_thief$mean)
y_thief <- NULL
for (i in 6:1) {
  y_thief <- c(y_thief, obj_thief[[i]])
}
y_forec <- thfrec(base_vec, 52, comb = "struc")$recf
sum(abs(y_forec - y_thief) > 1e-10)

# BU
obj_thief <- thief(dataset, m = 52, h = 2 * 52, comb = "bu", usemodel = "arima")
```



```

obj_thief <- tsaggregates(obj_thief$mean)
y_thief <- NULL
for (i in 6:1) {
  y_thief <- c(y_thief, obj_thief[[i]])
}
y_forec <- thfrec(base_vec, 52, comb = "bu")$recf
sum(abs(y_forec - y_thief) > 1e-10)

# WLSV
obj_thief <- thief(dataset, m = 52, h = 2 * 52, comb = "mse", usemodel = "arima")
obj_thief <- tsaggregates(obj_thief$mean)
y_thief <- NULL
for (i in 6:1) {
  y_thief <- c(y_thief, obj_thief[[i]])
}
y_forec <- thfrec(base_vec, 52, comb = "wlsv", res = res)$recf
sum(abs(y_forec - y_thief) > 1e-10)

# SHR
obj_thief <- thief(dataset, m = 52, h = 2 * 52, comb = "shr", usemodel = "arima")
obj_thief <- tsaggregates(obj_thief$mean)
y_thief <- NULL
for (i in 6:1) {
  y_thief <- c(y_thief, obj_thief[[i]])
}
y_forec <- thfrec(base_vec, 52, comb = "shr", res = res)$recf
sum(abs(y_forec - y_thief) > 1e-10)

# SAM - covariance matrix is not positive definite
# obj_thief <- thief(dataset, m = 52, h=2*52, comb="sam", usemodel = "arima")
# obj_thief <- tsaggregates(obj_thief$mean)
# y_thief <- NULL
# for(i in 6:1)
#   y_thief <- c(y_thief,obj_thief[[i]])
# y_forec <- thfrec(base_vec, 52, comb = "sam", res = res)$recf
# sum(abs(y_forec-y_thief)>1e-10)

## End(Not run)

```

---

forec2ts

*Reconciled forecasts matrix/vector to time-series class*


---

## Description

Function to transform the matrix/vector of reconciled forecasts (recf from [htsrec](#), [thfrec](#), [octrec](#), [tcsrec](#), [cstrec](#), [iterec](#), [ctbu](#)) into a list of time series objects.

## Usage

```
forec2ts(recf, ...)
```

**Arguments**

recf (h(k\* + m) × 1) reconciled forecasts vector from [thfrec](#), (h × n) reconciled forecasts matrix from [htsrec](#) or (n × h(k\* + m)) reconciled forecasts matrix from [octrec](#), [tcsrec](#), [cstrec](#), [iterec](#), [ctbu](#).

... optional arguments to [ts](#) (i.e. starting date); frequency is only required for the cross-sectional system. .

**Value**

A list of class "ts" objects

**Examples**

```
## Not run:
data(crosstemporal_data)
# Cross-temporal framework
oct_recf <- octrec(crosstemporal_data$base, m = 12, C = crosstemporal_data$C,
                  comb = "bdshr", res = crosstemporal_data$res)$recf
obj_oct <- forec2ts(recf = oct_recf, start = c(15, 1))

# Cross-sectional framework
# monthly base forecasts
id <- which(simplify2array(strsplit(colnames(crosstemporal_data$base),
                                   split = "_"))[1, ] == "k1")
mbase <- t(crosstemporal_data$base[, id])
# monthly residuals
id <- which(simplify2array(strsplit(colnames(crosstemporal_data$res),
                                   split = "_"))[1, ] == "k1")
mres <- t(crosstemporal_data$res[, id])
hts_recf <- htsrec(mbase, C = crosstemporal_data$C, comb = "shr", res = mres)$recf
obj_hts <- forec2ts(recf = hts_recf, start = c(15, 1), frequency = 12)

# Temporal framework
# top ts base forecasts ([lowest_freq' ... highest_freq'])
topbase <- crosstemporal_data$base[1, ]
# top ts residuals ([lowest_freq' ... highest_freq'])
topres <- crosstemporal_data$res[1, ]
thf_recf <- thfrec(topbase, m = 12, comb = "acov", res = topres)$recf
obj_thf <- forec2ts(recf = thf_recf, start = c(15, 1))

## End(Not run)
```

**Description**

Cross-sectional (contemporaneous) forecast reconciliation of hierarchical and grouped time series. The reconciled forecasts are calculated either through a projection approach (Byron, 1978, see also van Erven and Cugliari, 2015, and Wickramasuriya et al., 2019), or the equivalent structural approach by Hyndman et al. (2011). Moreover, the classic bottom-up approach is available.

**Usage**

```
htsrec(basef, comb, C, res, Ut, nb, mse = TRUE, corpcor = FALSE, W,
       type = "M", sol = "direct", nn = FALSE, keep = "list",
       settings = osqpSettings(verbose = FALSE, eps_abs = 1e-5,
                               eps_rel = 1e-5, polish_refine_iter = 100, polish=TRUE))
```

**Arguments**

basef	(h x n) matrix of base forecasts to be reconciled; h is the forecast horizon and n is the number of total time series.
comb	Type of the reconciliation. Except for Bottom-up, each option corresponds to a specified (n x n) covariance matrix: <ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>bu</b> (Bottom-up);</li> <li>• <b>ols</b> (Identity);</li> <li>• <b>struc</b> (Structural variances);</li> <li>• <b>wls</b> (Series variances) - uses res;</li> <li>• <b>shr</b> (Shrunk covariance matrix - MinT-shr) - uses res;</li> <li>• <b>sam</b> (Sample covariance matrix - MinT-sam) - uses res;</li> <li>• <b>w</b> use your personal matrix W in param W.</li> </ul>
C	(na x nb) cross-sectional (contemporaneous) matrix mapping the bottom level series into the higher level ones.
res	(N x n) in-sample residuals matrix needed when comb = {"wls", "shr", "sam"}. The columns must be in the same order as basef.
Ut	(na x n) zero constraints cross-sectional (contemporaneous) kernel matrix $U'Y = \mathbf{0}_{[n_a \times (k^* + m)]}$ spanning the null space valid for the reconciled forecasts. It can be used instead of parameter C, but needs nb (n = na + nb).
nb	Number of bottom time series; if C is present, nb is not used.
mse	Logical value: TRUE (default) calculates the covariance matrix of the in-sample residuals (when necessary) according to the original <b>hts</b> and <b>thief</b> formulation: no mean correction, T as denominator.
corpcor	Logical value: TRUE if <b>corpcor</b> (Schäfer et al., 2017) must be used to shrink the sample covariance matrix according to Schäfer and Strimmer (2005), otherwise the function uses the same implementation as package <b>hts</b> .
W	This option permits to directly enter the covariance matrix: <ol style="list-style-type: none"> <li>1. W must be a p.d. (n x n) matrix;</li> <li>2. if comb is different from "w", W is not used.</li> </ol>
type	Approach used to compute the reconciled forecasts: "M" for the projection approach with matrix M (default), or "S" for the structural approach with summing matrix S.
sol	Solution technique for the reconciliation problem: either "direct" for the direct solution or "osqp" for the numerical solution (solving a linearly constrained quadratic program using <a href="#">solve_osqp</a> ).
nn	Logical value: TRUE if non-negative reconciled forecasts are wished.
keep	Return a list object or the reconciled forecasts at all levels.
settings	Settings for <b>osqp</b> (object <a href="#">osqpSettings</a> ). The default options are: verbose = FALSE, eps_abs = 1e-5, eps_rel = 1e-5, polish_refine_iter = 100 and polish = TRUE. For details, see the <a href="#">osqp documentation</a> .

## Details

In case of non-negativity constraints, there are two ways:

1. `sol = "direct"` and `nn = TRUE`: the base forecasts will be reconciled at first without non-negativity constraints, then, in presence of negative reconciled values, it use the "osqp" solver.
2. `sol = "osqp"` and `nn = TRUE`: the base forecasts will be reconciled through the "osqp" solver.

## Value

If the parameter `keep` is equal to "recf" then the function returns only the (h x n) reconciled forecasts matrix, otherwise (`keep="all"`) it a list that mainly depends on what type of representation (type) and methodology (`sol`) it has been used:

<code>recf</code>	(h x n) reconciled forecasts matrix.
<code>W</code>	Covariance matrix used for reconciled forecasts.
<code>nn_check</code>	Number of negative values (if zero, there are no values below zero).
<code>rec_check</code>	Logical value: has the hierarchy been respected?
<code>M (type="M" and type="direct")</code>	Projection matrix (projection approach)
<code>G (type="S" and type="direct")</code>	Projection matrix (structural approach).
<code>S (type="S" and type="direct")</code>	Cross-sectional summing matrix, <b>S</b> .
<code>info (type="osqp")</code>	matrix with some useful indicators (columns) for each forecast horizon h (rows): run time ( <code>run_time</code> ) number of iteration, norm of primal residual ( <code>pri_res</code> ), status of osqp's solution ( <code>status</code> ) and polish's status ( <code>status_polish</code> ).

Only if `comb = "bu"`, the function returns `recf`, `S` and `M`.

## References

- Byron, R.P. (1978), The estimation of large social accounts matrices, *Journal of the Royal Statistical Society A*, 141, 3, 359-367.
- Di Fonzo, T., Girolimetto, D. (2020), Cross-Temporal Forecast Reconciliation: Optimal Combination Method and Heuristic Alternatives, Department of Statistical Sciences, University of Padua, [arXiv:2006.08570](https://arxiv.org/abs/2006.08570).
- Hyndman, R.J., Ahmed, R.A., Athanasopoulos, G., Shang, H.L.(2011), Optimal combination forecasts for hierarchical time series, *Computational Statistics & Data Analysis*, 55, 9, 2579-2589.
- Schäfer, J.L., Opgen-Rhein, R., Zuber, V., Ahdesmaki, M., Duarte Silva, A.P., Strimmer, K. (2017), *Package 'corpcor'*, R package version 1.6.9 (April 1, 2017).
- Schäfer, J.L., Strimmer, K. (2005), A Shrinkage Approach to Large-Scale Covariance Matrix Estimation and Implications for Functional Genomics, *Statistical Applications in Genetics and Molecular Biology*, 4, 1.
- Stellato, B., Banjac, G., Goulart, P., Bemporad, A., Boyd and S. (2018). OSQP: An Operator Splitting Solver for Quadratic Programs. *ArXiv e-prints*. 1711.08013.
- Stone, R., Champernowne, D.G., Meade, J.E. (1942), The precision of national income estimates, *The Review of Economic Studies*, 9, 2, 111-125.

van Erven, T., Cugliari, J. (2015), Game-theoretically Optimal Reconciliation of Contemporaneous Hierarchical Time Series Forecasts, in Antoniadis, A., Poggi, J.M., Brossat, X. (eds.), *Modeling and Stochastic Learning for Forecasting in High Dimensions*, Berlin, Springer, 297-317.

Wickramasuriya, S.L., Athanasopoulos, G., Hyndman, R.J. (2019), Optimal forecast reconciliation for hierarchical and grouped time series through trace minimization, *Journal of the American Statistical Association*, 114, 526, 804-819.

## Examples

```
## Not run:
data(crosstemporal_data)
# monthly base forecasts
id <- which(simplify2array(strsplit(colnames(crosstemporal_data$base),
                                     split = "_"))[1, ] == "k1")
mbase <- t(crosstemporal_data$base[, id])
# monthly residuals
id <- which(simplify2array(strsplit(colnames(crosstemporal_data$res),
                                     split = "_"))[1, ] == "k1")
mres <- t(crosstemporal_data$res[, id])
obj <- htsrec(mbase, C = crosstemporal_data$C, comb = "shr", res = mres)

## End(Not run)
```

---

hts\_tools

*Cross-Sectional Reconciliation Tools*

---

## Description

Some useful tools for the cross-sectional reconciliation of linearly and hierarchically constrained time series

## Usage

```
hts_tools(C, h = 1, Ut, nb, sparse = TRUE)
```

## Arguments

C	(na x nb) cross-sectional (contemporaneous) matrix mapping the bottom level series into the higher level ones.
h	Forecast horizon ( <i>default</i> is 1).
Ut	(na x n) zero constraints cross-sectional (contemporaneous) kernel matrix $\mathbf{U}'\mathbf{Y} = \mathbf{0}_{[n_a \times (k^* + m)]}$ spanning the null space valid for the reconciled forecasts. It can be used instead of parameter C, but needs nb (n = na + nb).
nb	Number of bottom time series; if C is present, nb is not used.
sparse	Option to return sparse object ( <i>default</i> is TRUE).

**Value**

A list of five elements:

S	(n x nb) cross-sectional (contemporaneous) summing matrix.
Ut	(na x n) zero constraints cross-sectional (contemporaneous) kernel matrix.
n	Number of variables na + nb.
na	Number of upper level variables.
nb	Number of bottom level variables.

**Examples**

```
# One level hierarchy (na = 1, nb = 2)
obj <- hts_tools(C = matrix(c(1, 1), 1), sparse = FALSE)
```

---

 iterec

---

*Iterative Heuristic Cross-temporal Forecast Reconciliation*


---

**Description**

Iterative procedure which produces cross-temporally reconciled forecasts by alternating forecast reconciliation along one single dimension (either cross-sectional or temporal) at each iteration step. **Each iteration** consists in the first two steps of the heuristic KA procedure, so the forecasts are reconciled by alternating cross-sectional (contemporaneous) reconciliation, and reconciliation through temporal hierarchies in a cyclic fashion. The choice of the dimension along with the first reconciliation step in each iteration is performed is up to the user (param `start_rec`), and there is no particular reason why one should perform the temporal reconciliation first, and the cross-sectional reconciliation then. The iterative procedure allows the user to get non-negative reconciled forecasts.

**Usage**

```
iterec(basef, m, C, thf_comb, hts_comb, Ut, nb, res, W,
       Omega, mse = TRUE, corpcor = FALSE, type = "M",
       sol = "direct", nn = FALSE, maxit = 100, tol = 1e-5,
       start_rec = "auto", note = TRUE, plot = "mti",
       settings = osqpSettings(verbose = FALSE, eps_abs = 1e-5,
       eps_rel = 1e-5, polish_refine_iter = 100, polish = TRUE))
```

**Arguments**

basef	(n x h(k* + m)) matrix of base forecasts to be reconciled; n is the number of cross-sectional time series, m is the highest frequency, k* is the sum of (p-1) factors of m (exclude m as factors) and h is the forecast horizon. Each row indicates a time series and the forecasts are ordered as [lowest_freq' ... highest_freq']'.
m	Highest available sampling frequency per seasonal cycle (max. order of temporal aggregation).
C	(na x nb) cross-sectional (contemporaneous) matrix mapping the bottom level series into the higher level ones.
thf_comb	Type of the ((k* + m) x (k* + m)) covariance matrix to be used in the temporal reconciliation, see more in comb param of <a href="#">thfrec</a> .

hts_comb	Type of the (n × n) covariance matrix to be used in the cross-sectional reconciliation, see more in comb param of <a href="#">htsrec</a> .
Ut	(na × n) zero constraints cross-sectional (contemporaneous) kernel matrix $U'Y = \mathbf{0}_{[n_a \times (k^* + m)]}$ spanning the null space valid for the reconciled forecasts. It can be used instead of parameter C, but needs nb (n = na + nb).
nb	Number of bottom time series; if C is present, nb is not used.
res	(n × N(k* + m)) matrix containing the residuals at all the temporal frequencies ordered [lowest_freq' ... highest_freq'] (columns) for each variable (row), needed to estimate the covariance matrix when hts_comb = {"wls", "shr", "sam"} and/or hts_comb = {"wlsv", "wlsh", "acov", "strar1", "sar1", "har1", "shr", "sam"}. The row must be in the same order as basef.
W	This option permits to directly enter the covariance matrix in the cross-sectional reconciliation, see more in W param of <a href="#">htsrec</a> .
Omega	This option permits to directly enter the covariance matrix in the cross-sectional reconciliation, see more in Omega param of <a href="#">thfrec</a> .
mse	Logical value: TRUE (default) calculates the covariance matrix of the in-sample residuals (when necessary) according to the original <b>hts</b> and <b>thief</b> formulation: no mean correction, T as denominator.
corpcor	Logical value: TRUE if <b>corpcor</b> (Schäfer et al., 2017) must be used to shrink the sample covariance matrix according to Schäfer and Strimmer (2005), otherwise the function uses the same implementation as package <b>hts</b> .
type	Approach used to compute the reconciled forecasts: "M" for the projection approach with matrix M (default), or "S" for the structural approach with summing matrix S.
sol	Solution technique for the reconciliation problem: either "direct" for the direct solution or "osqp" for the numerical solution (solving a linearly constrained quadratic program using <a href="#">solve_osqp</a> ).
nn	Logical value: TRUE if non-negative reconciled forecasts are wished.
maxit	Max number of iteration (100, <i>default</i> ).
tol	Convergence tolerance (1e-5, <i>default</i> ).
start_rec	Dimension along with the first reconciliation step in each iteration is performed: it start from temporal reconciliation with "thf", from cross-sectional with "hts" and it does both reconciliation with "auto" (default).
note	If note = TRUE ( <i>default</i> ) the function writes some notes to the console, otherwise no note is produced (also no plot).
plot	Some useful plot: "mti" ( <i>default</i> ) marginal trend inconsistencies, "pat" step by step inconsistency pattern for each iteration, "distf" distance forecasts iteration i and i-1, "all" all the plots.
settings	Settings for <b>osqp</b> (object <a href="#">osqpSettings</a> ). The default options are: verbose = FALSE, eps_abs = 1e-5, eps_rel = 1e-5, polish_refine_iter = 100 and polish = TRUE. For details, see the <a href="#">osqp documentation</a> .

## Details

The above procedure can be seen as an extension of the well known iterative proportional fitting procedure (Deming and Stephan, 1940, Johnston and Pattie, 1993), also known as RAS method (Miller and Blair, 2009), to adjust the internal cell values of a two-dimensional matrix until they sum to some predetermined row and column totals. In that case the adjustment follows a proportional

adjustment scheme, whereas in the cross-temporal reconciliation framework each adjustment step is made according to the penalty function associated to the single-dimension reconciliation procedure adopted.

Control status of iterative reconciliation:

- 2 Temporal/Cross-sectional reconciliation does not work.
- 1 Convergence not achieved (maximum iteration limit reached).
- 0 Convergence achieved.
- +1 Convergence achieved: incoherence has increased in the next iteration (at least one time).
- +2 Convergence achieved: incoherence has increased in the next two or more iteration (at least one time).
- +3 The forecasts are already reconciled.

### Value

`iterec` returns a list with:

<code>recf</code>	( $n \times h(k^* + m)$ ) matrix of reconciled forecasts.
<code>d_cs</code>	Cross-sectional incoherence at each iteration.
<code>d_te</code>	Temporal incoherence at each iteration.
<code>start_rec</code>	Starting coherence dimension (thf or hts).
<code>tol</code>	Tolerance.
<code>flag</code>	Control code (see <i>details</i> ).
<code>time</code>	Elapsed time.
<code>dist</code>	If <code>start_rec = "auto"</code> , matrix of distances of the forecasts reconciled from the base.

### References

- Deming, E., Stephan, F.F. (1940), On a least squares adjustment of a sampled frequency table when the expected marginal totals are known, *The Annals of Mathematical Statistics*, 11, 4, 427–444.
- Di Fonzo, T., Girolimetto, D. (2020), Cross-Temporal Forecast Reconciliation: Optimal Combination Method and Heuristic Alternatives, Department of Statistical Sciences, University of Padua, [arXiv:2006.08570](https://arxiv.org/abs/2006.08570).
- Johnston, R.J., Pattie, C.J. (1993), Entropy-Maximizing and the Iterative Proportional Fitting Procedure, *The Professional Geographer*, 45, 3, 317–322.
- Kourentzes, N., Athanasopoulos, G. (2019), Cross-temporal coherent forecasts for Australian tourism, *Annals of Tourism Research*, 75, 393-409.
- Miller, R.E., Blair, P.D. (2009), Input-output analysis: foundations and extensions, 2nd edition, New York, Cambridge University Press.

### Examples

```
## Not run:
data(crosstemporal_data)
obj <- iterec(crosstemporal_data$base,
  m = 12, C = crosstemporal_data$C, thf_comb = "acov",
  hts_comb = "shr", res = crosstemporal_data$res, start_rec = "thf"
)
```



```
## End(Not run)
```

---

 octrec
 

---

*Optimal Cross-temporal Forecast Reconciliation*


---

## Description

Optimal (in least squares sense) combination cross-temporal forecast reconciliation. The reconciled forecasts are calculated either through a projection approach (Byron, 1978), or the equivalent structural approach by Hyndman et al. (2011).

## Usage

```
octrec(basef, m, C, comb, res, Ut, nb, W, Sstruc, note = TRUE,
       mse = TRUE, corpcor = FALSE, type = "M", sol = "direct",
       nn = FALSE, keep = "list",
       settings = osqpSettings(verbose = FALSE, eps_abs = 1e-5,
                               eps_rel = 1e-5, polish_refine_iter = 100, polish=TRUE))
```

## Arguments

- |       |   |
|-------|---|
| basef | ( $n \times h(k^* + m)$ ) matrix of base forecasts to be reconciled; $n$ is the number of cross-sectional time series, $m$ is the highest frequency, $k^*$ is the sum of $(p-1)$ factors of $m$ (exclude $m$ as factors) and $h$ is the forecast horizon. Each row indicates a time series and the forecasts are ordered as [lowest_freq' ... highest_freq']'.  |
| m     | Highest available sampling frequency per seasonal cycle (max. order of temporal aggregation).   |
| C     | ( $n_a \times n_b$ ) cross-sectional (contemporaneous) matrix mapping the bottom level series into the higher level ones.   |
| comb  | Type of the reconciliation, it correspond to a different covariance matrix ( $n(k^* + m) \times n(k^* + m)$ ), $k^*$ is the sum of $(p-1)$ factors of $m$ (exclude $m$ as factors) and $n$ is the number of variables: <ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>ols</b> (Identity);</li> <li>• <b>struc</b> (Cross-temporal summing matrix, use the Sstruc param to reduce computation time);</li> <li>• <b>wlsh</b> (Hierarchy variances matrix);</li> <li>• <b>wlsv</b> (Series variances matrix);</li> <li>• <b>bdsshr</b> (Shrunk cross-covariance matrix, cross-sectional framework);</li> <li>• <b>bdsam</b> (Sample cross-covariance matrix, cross-sectional framework);</li> <li>• <b>acov</b> (Series auto-covariance matrix);</li> <li>• <b>Sshr</b> (Series shrunk cross-covariance matrix);</li> <li>• <b>Ssam</b> (Series cross-covariance matrix);</li> <li>• <b>shr</b> (Shrunk cross-covariance matrix);</li> <li>• <b>sam</b> (Sample cross-covariance matrix);</li> <li>• <b>w</b> use your personal matrix <math>W</math> in param <math>W</math>.</li> </ul> |

res	( $n \times N(k^* + m)$ ) matrix containing the residuals at all the temporal frequencies ordered [lowest_freq' ... highest_freq'] (columns) for each variable (row), needed to estimate the covariance matrix when comb = {"sam", "wlsv", "wlsH", "acov", "Ssam", "Sshr", "Sshr1", "shr"}.
Ut	( $n_a \times n$ ) zero constraints cross-sectional (contemporaneous) kernel matrix $U'Y = \mathbf{0}_{[n_a \times (k^* + m)]}$ spanning the null space valid for the reconciled forecasts. It can be used instead of parameter C, but needs nb ( $n = n_a + nb$ ).
nb	Number of bottom time series; if C is present, nb is not used.
W	This option permits to directly enter the covariance matrix: <ol style="list-style-type: none"> <li>1. W must be a p.d. (<math>n(k^* + m) \times n(k^* + m)</math>) matrix;</li> <li>2. if comb is different from "w", W is not used.</li> </ol>
Sstruc	Cross-temporal summing matrix (structural representation), $\tilde{S}$ ; can be obtained through the function <code>ctf_tools</code> .
note	If note = TRUE ( <i>default</i> ) the function writes some notes to the console, otherwise no note is produced.
mse	Logical value: TRUE (default) calculates the covariance matrix of the in-sample residuals (when necessary) according to the original <b>hts</b> and <b>thief</b> formulation: no mean correction, T as denominator.
corpcor	Logical value: TRUE if <b>corpcor</b> (Schäfer et al., 2017) must be used to shrink the sample covariance matrix according to Schäfer and Strimmer (2005), otherwise the function uses the same implementation as package <b>hts</b> .
type	Approach used to compute the reconciled forecasts: "M" for the projection approach with matrix M (default), or "S" for the structural approach with summing matrix S.
sol	Solution technique for the reconciliation problem: either "direct" for the direct solution or "osqp" for the numerical solution (solving a linearly constrained quadratic program using <code>solve_osqp</code> ).
nn	Logical value: TRUE if non-negative reconciled forecasts are wished.
keep	Return a list object or the reconciled forecasts at all levels.
settings	Settings for <b>osqp</b> (object <code>osqpSettings</code> ). The default options are: verbose = FALSE, eps_abs = 1e-5, eps_rel = 1e-5, polish_refine_iter = 100 and polish = TRUE. For details, see the <b>osqp documentation</b> .

## Details

In case of non-negativity constraints, there are two ways:

1. sol = "direct" and nn = TRUE: the base forecasts will be reconciled at first without non-negativity constraints, then, in presence of negative reconciled values, it use the "osqp" solver.
2. sol = "osqp" and nn = TRUE: the base forecasts will be reconciled through the "osqp" solver.

## Value

If the parameter keep is equal to "recf" then the function returns only the ( $n \times h(k^* + m)$ ) reconciled forecasts matrix, otherwise (keep="all") it a list that mainly depends on what type of representation (type) and methodology (sol) it has been used:

recf	( $n \times h(k^* + m)$ ) reconciled forecasts matrix.
Omega	Covariance matrix used for reconciled forecasts (vec( $Y'$ ) representation).

W Covariance matrix used for reconciled forecasts (vec(Y) representation).

nn\_check Number of negative values (if zero, there are no values below zero).

rec\_check Logical value: has the hierarchy been respected?

M (type="M" and type="direct")  
Projection matrix (projection approach).

G (type="S" and type="direct")  
Projection matrix (structural approach).

S (type="S" and type="direct")  
Cross-temporal summing matrix,  $\mathbf{Q}\check{\mathbf{S}}$  (vec(Y') representation).

info (type="osqp")  
matrix with some useful indicators (columns) for each forecast horizon h (rows):  
run time (run\_time) number of iteration, norm of primal residual (pri\_res),  
status of osqp's solution (status) and polish's status (status\_polish).

## References

- Byron, R.P. (1978), The estimation of large social accounts matrices, *Journal of the Royal Statistical Society A*, 141, 3, 359-367.
- Di Fonzo, T., Girolimetto, D. (2020), Cross-Temporal Forecast Reconciliation: Optimal Combination Method and Heuristic Alternatives, Department of Statistical Sciences, University of Padua, [arXiv:2006.08570](https://arxiv.org/abs/2006.08570).
- Schäfer, J.L., Opgen-Rhein, R., Zuber, V., Ahdesmaki, M., Duarte Silva, A.P., Strimmer, K. (2017), Package 'corpcor', R package version 1.6.9 (April 1, 2017).
- Schäfer, J.L., Strimmer, K. (2005), A Shrinkage Approach to Large-Scale Covariance Matrix Estimation and Implications for Functional Genomics, *Statistical Applications in Genetics and Molecular Biology*, 4, 1.
- Stellato, B., Banjac, G., Goulart, P., Bemporad, A., Boyd and S. (2018). OSQP: An Operator Splitting Solver for Quadratic Programs. *ArXiv e-prints*. 1711.08013.
- Stone, R., Champnowne, D.G., Meade, J.E. (1942), The precision of national income estimates, *The Review of Economic Studies*, 9, 2, 111-125.

## Examples

```
## Not run:
data(crosstemporal_data)
obj <- octrec(crosstemporal_data$base, m = 12, C = crosstemporal_data$C,
             comb = "bdshr", res = crosstemporal_data$res)

## End(Not run)
```

---

score\_index

*Measuring forecasting accuracy*

---

## Description

Function to calculate the quality indices of the reconciled forecasts of a cross-temporal (not only, see examples) system (more in [Average relative accuracy indices](#)).

**Usage**

```
score_index(recf, base, test, m, nb, type = "mse", compact = T)
```

**Arguments**

recf	list of $q$ (forecasting origins) reconciled forecasts' matrices ( $[n \times h(k^* + m)]$ in the cross-temporal, $[h \times n]$ in cross-sectional and vectors of length $[h(k^* + m)]$ in temporal framework).
base	list of $q$ (forecasting origins) base forecasts' matrices ( $[n \times h(k^* + m)]$ in the cross-temporal, $[n \times h]$ in cross-sectional and $[h(k^* + m) \times 1]$ in temporal framework).
test	list of $q$ (forecasting origins) test observations' matrices ( $[n \times h(k^* + m)]$ in the cross-temporal, $[n \times h]$ in cross-sectional and $[h(k^* + m) \times 1]$ in temporal framework).
m	highest frequency of the forecasted time series.
nb	number of bottom time series in the cross-sectional framework.
type	type of measure ("mse" Mean Square Error or "mae" Mean Absolute Error)
compact	if TRUE return only the summary matrix.

**Value**

It returns a summary table called Avg\_mat (if compact option is TRUE, *default*), otherwise it returns a list of four tables (more in [Average relative accuracy indices](#)).

**References**

Di Fonzo, T., Girolimetto, D. (2020), Cross-Temporal Forecast Reconciliation: Optimal Combination Method and Heuristic Alternatives, Department of Statistical Sciences, University of Padua, [arXiv:2006.08570](#).

**Examples**

```
## Not run:
data(crosstemporal_data)

# Cross-temporal framework
oct_recf <- octrec(crosstemporal_data$base, m = 12, C = crosstemporal_data$C,
                 comb = "bdshr", res = crosstemporal_data$res)$recf
oct_score <- score_index(recf = oct_recf,
                        base = crosstemporal_data$base,
                        test = crosstemporal_data$test, m = 12, nb = 5)

# Cross-sectional framework#'
# monthly base forecasts
id <- which(simplify2array(strsplit(colnames(crosstemporal_data$base), split = "_"))[1, ] == "k1")
mbase <- t(crosstemporal_data$base[, id])
# monthly test set
mtest <- t(crosstemporal_data$test[, id])
# monthly residuals
id <- which(simplify2array(strsplit(colnames(crosstemporal_data$res), split = "_"))[1, ] == "k1")
mres <- t(crosstemporal_data$res[, id])
# monthly reconciled forecasts
mrecf <- htsrec(mbase, C = crosstemporal_data$C, comb = "shr", res = mres)$recf
```

```

# score
hts_score <- score_index(recf = mrecf, base = mbase, test = mtest, nb = 5)

# Temporal framework
data(crosstemporal_data)
# top ts base forecasts ([lowest_freq' ... highest_freq'])
topbase <- crosstemporal_data$base[1, ]
# top ts residuals ([lowest_freq' ... highest_freq'])
topres <- crosstemporal_data$res[1, ]
# top ts test ([lowest_freq' ... highest_freq'])
toptest <- crosstemporal_data$test[1, ]
# top ts recf ([lowest_freq' ... highest_freq'])
toprecf <- thfrec(topbase, m = 12, comb = "acov", res = topres)$recf
# score
thf_score <- score_index(recf = toprecf, base = topbase, test = toptest, m = 12)

## End(Not run)

```

shrink\_estim

*Shrunk Covariance Matrix***Description**

Shrunk covariance matrix according to Schäfer and Strimmer (2005).

**Usage**

```
shrink_estim(x, minT = T)
```

**Arguments**

x	residual matrix
minT	this param allows to calculate the covariance matrix according to the original hts formulation (TRUE) or according to the standard approach (FALSE).

**Value**

A list with two object: the first (`$scov`) is the shrunk covariance matrix and the second (`$lambda`) is shrinkage intensity.

**Author(s)**

This function is a review of the **hts** package's hidden shrunk function.

**References**

Schäfer, J.L., Strimmer, K. (2005), A Shrinkage Approach to Large-Scale Covariance Matrix Estimation and Implications for Functional Genomics, *Statistical Applications in Genetics and Molecular Biology*, 4, 1

Hyndman, R. J., Lee, A., Wang, E., and Wickramasuriya, S. (2020). hts: Hierarchical and Grouped Time Series, *R package version 6.0.1*, <https://CRAN.R-project.org/package=hts>.

---

tcsrec	<i>Heuristic first-Temporal-than-Cross-sectional Cross-temporal Forecast Reconciliation</i>
--------	---

---

## Description

The cross-temporal forecast reconciliation procedure by Kourentzes and Athanasopoulos (2019) can be viewed as an ensemble forecasting procedure which exploits the simple averaging of different forecasts. First, for each time series the forecasts at any temporal aggregation order are reconciled using temporal hierarchies ([thfrec](#)), then time-by-time cross-sectional reconciliation is performed ([htsrec](#)). The projection matrices obtained at this step are then averaged and used to cross-sectionally reconcile the forecasts obtained at step 1, by this way fulfilling both cross-sectional and temporal constraints.

## Usage

```
tcsrec(basef, m, C, thf_comb, hts_comb, Ut, nb, res, W, Omega,
       mse = TRUE, corpcor = FALSE, avg="KA", nn= FALSE,
       settings = osqpSettings(verbose = FALSE, eps_abs = 1e-5,
                               eps_rel = 1e-5, polish_refine_iter = 100, polish = TRUE))
```

## Arguments

basef	( $n \times h(k^* + m)$ ) matrix of base forecasts to be reconciled; $n$ is the number of cross-sectional time series, $m$ is the highest frequency, $k^*$ is the sum of $(p-1)$ factors of $m$ (exclude $m$ as factors) and $h$ is the forecast horizon. Each row indicates a time series and the forecasts are ordered as [lowest_freq' ... highest_freq']'.
m	Highest available sampling frequency per seasonal cycle (max. order of temporal aggregation).
C	( $n_a \times n_b$ ) cross-sectional (contemporaneous) matrix mapping the bottom level series into the higher level ones.
thf_comb	Type of the $((k^* + m) \times (k^* + m))$ covariance matrix to be used in the temporal reconciliation, see more in comb param of <a href="#">thfrec</a> .
hts_comb	Type of the $(n \times n)$ covariance matrix to be used in the cross-sectional reconciliation, see more in comb param of <a href="#">htsrec</a> .
Ut	( $n_a \times n$ ) zero constraints cross-sectional (contemporaneous) kernel matrix $U'Y = \mathbf{0}_{[n_a \times (k^* + m)]}$ spanning the null space valid for the reconciled forecasts. It can be used instead of parameter C, but needs nb ( $n = n_a + n_b$ ).
nb	Number of bottom time series; if C is present, nb is not used.
res	( $n \times N(k^* + m)$ ) matrix containing the residuals at all the temporal frequencies ordered [lowest_freq' ... highest_freq']' (columns) for each variable (row), needed to estimate the covariance matrix when $hts\_comb = \{"wls", "shr", "sam"\}$ and/or $hts\_comb = \{"wlsv", "wlsh", "acov", "strar1", "sar1", "har1", "shr", "sam"\}$ . The row must be in the same order as basef.
W	This option permits to directly enter the covariance matrix in the cross-sectional reconciliation, see more in W param of <a href="#">htsrec</a> .
Omega	This option permits to directly enter the covariance matrix in the cross-sectional reconciliation, see more in Omega param of <a href="#">thfrec</a> .

mse	Logical value: TRUE (default) calculates the covariance matrix of the in-sample residuals (when necessary) according to the original <b>hts</b> and <b>thief</b> formulation: no mean correction, T as denominator.
corpcor	Logical value: TRUE if <b>corpcor</b> (Schäfer et al., 2017) must be used to shrink the sample covariance matrix according to Schäfer and Strimmer (2005), otherwise the function uses the same implementation as package <b>hts</b> .
avg	If avg = "KA" ( <i>default</i> ), the final projection matrix M is the one proposed by Kourentzes and Athanasopoulos (2019), otherwise it is calculated as simple average of all the involved projection matrices at step 2 of the procedure (see Di Fonzo and Girolimetto, 2020).
nn	Logical value, TRUE if non-negative reconciled forecasts are wished. <b>Warning</b> , the two-step heuristic reconciliation allows non-negativity constraints only in the first step. This means that non-negativity is not guaranteed in the final reconciled values.
settings	Settings for <b>osqp</b> (object <code>osqpSettings</code> ). The default options are: verbose = FALSE, eps_abs = 1e-5, eps_rel = 1e-5, polish_refine_iter = 100 and polish = TRUE. For details, see the <b>osqp documentation</b> .

## Details

This function is able to do two-step cross-temporal reconciliation with any approximation of the covariance matrix. If the combinations used by Kourentzes and Athanasopoulos (2019) are wished, `thf_comb` must be set equal to "struc" or "wlsv", and `hts_comb` equal to "shr" or "wls".

## Value

The function returns a list with two elements:

recf	( $n \times h(k^* + m)$ ) reconciled forecasts matrix.
M	Projection matrix (projection approach).

## References

Di Fonzo, T., Girolimetto, D. (2020), Cross-Temporal Forecast Reconciliation: Optimal Combination Method and Heuristic Alternatives, Department of Statistical Sciences, University of Padua, [arXiv:2006.08570](https://arxiv.org/abs/2006.08570).

Kourentzes, N., Athanasopoulos, G. (2019), Cross-temporal coherent forecasts for Australian tourism, *Annals of Tourism Research*, 75, 393-409.

## Examples

```
## Not run:
data(crosstemporal_data)
obj <- tcsrec(crosstemporal_data$base, m = 12, C = crosstemporal_data$C, thf_comb = "acov",
             hts_comb = "shr", res = crosstemporal_data$res)

## End(Not run)
```

---

 thfrec *Temporal Forecast Reconciliation*


---

**Description**

Forecast reconciliation of one time series through temporal hierarchies (Athanasopoulos et al., 2017). The reconciled forecasts are calculated either through a projection approach (Byron, 1978), or the equivalent structural approach by Hyndman et al. (2011). Moreover, the classic bottom-up approach is available.

**Usage**

```
thfrec(basef, m, comb, res, mse = TRUE, corpcor = FALSE, Omega,
       type = "M", sol = "direct", nn = FALSE, keep = "list",
       settings = osqpSettings(verbose = FALSE, eps_abs = 1e-5,
                               eps_rel = 1e-5, polish_refine_iter = 100, polish=TRUE))
```

**Arguments**

basef	Base forecasts to be reconciled vector containing the forecasts at all the needed temporal frequency ordered as [lowest_freq' ... highest_freq']'.
m	Highest available sampling frequency per seasonal cycle (max. order of temporal aggregation).
comb	Type of the reconciliation. Except for bottom up, all other options correspond to a different $((k^* + m) \times (k^* + m))$ covariance matrix, $k^*$ is the sum of $(p-1)$ factors of $m$ (exclude $m$ as factors): <ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>bu</b> (Bottom-up);</li> <li>• <b>ols</b> (Identity);</li> <li>• <b>struc</b> (Structural variances);</li> <li>• <b>wlsv</b> (Series variances);</li> <li>• <b>wlsh</b> (Hierarchy variances);</li> <li>• <b>acov</b> (Auto-covariance matrix);</li> <li>• <b>strar1</b> (Structural Markov);</li> <li>• <b>sar1</b> (Series Markov);</li> <li>• <b>har1</b> (Hierarchy Markov);</li> <li>• <b>shr</b> (Shrunk cross-covariance matrix);</li> <li>• <b>sam</b> (Sample cross-covariance matrix);</li> <li>• <b>omega</b> use your personal matrix Omega in param Omega.</li> </ul>
res	vector containing the in-sample residuals at all the temporal frequencies ordered as basef, i.e. [lowest_freq' ... highest_freq']', needed to estimate the covariance matrix when comb = {"wlsv", "wlsh", "acov", "strar1", "sar1", "har1", "shr", "sam"}.
mse	Logical value: TRUE (default) calculates the covariance matrix of the in-sample residuals (when necessary) according to the original <b>hts</b> and <b>thief</b> formulation: no mean correction, T as denominator.
corpcor	Logical value: TRUE if <b>corpcor</b> (Schäfer et al., 2017) must be used to shrink the sample covariance matrix according to Schäfer and Strimmer (2005), otherwise the function uses the same implementation as package <b>hts</b> .



Omega	This option permits to directly enter the covariance matrix: <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Omega must be a p.d. <math>((k^* + m) \times (k^* + m))</math> matrix;</li> <li>2. if comb is different from "omega", Omega is not used.</li> </ol>
type	Approach used to compute the reconciled forecasts: "M" for the projection approach with matrix M (default), or "S" for the structural approach with summing matrix S.
sol	Solution technique for the reconciliation problem: either "direct" for the direct solution or "osqp" for the numerical solution (solving a linearly constrained quadratic program using <a href="#">solve_osqp</a> ).
nn	Logical value: TRUE if non-negative reconciled forecasts are wished.
keep	Return a list object or the reconciled forecasts at all levels.
settings	Settings for <b>osqp</b> (object <a href="#">osqpSettings</a> ). The default options are: verbose = FALSE, eps_abs = 1e-5, eps_rel = 1e-5, polish_refine_iter = 100 and polish = TRUE. For details, see the <a href="#">osqp documentation</a> .

### Details

In case of non-negativity constraints, there are two ways:

1. sol = "direct" and nn = TRUE: the base forecasts will be reconciled at first without non-negativity constraints, then, in presence of negative reconciled values, it use the "osqp" solver.
2. sol = "osqp" and nn = TRUE: the base forecasts will be reconciled through the "osqp" solver.

### Value

If the parameter keep is equal to "recf" then the function returns only the reconciled forecasts vector, otherwise (keep="all") it a list that mainly depends on what type of representation (type) and methodology (sol) it has been used:

recf	$(h(k^* + m) \times 1)$ reconciled forecasts vector.
Omega	Covariance matrix used for reconciled forecasts.
nn_check	Number of negative values (if zero, there are no values below zero).
rec_check	Logical value: has the hierarchy been respected?
M (type="M" and type="direct")	Projection matrix (projection approach)
G (type="S" and type="direct")	Projection matrix (structural approach).
S (type="S" and type="direct")	Temporal summing matrix, <b>R</b> .
info (type="osqp")	matrix with some useful indicators (columns) for each forecast horizon h (rows): run time (run_time) number of iteration, norm of primal residual (pri_res), status of osqp's solution (status) and polish's status (status_polish).

Only if comb = "bu", the function returns recf, S and M.

## References

- Athanasopoulos, G., Hyndman, R.J., Kourentzes, N., Petropoulos, F. (2017), Forecasting with Temporal Hierarchies, *European Journal of Operational Research*, 262, 1, 60-74.
- Byron, R.P. (1978), The estimation of large social accounts matrices, *Journal of the Royal Statistical Society A*, 141, 3, 359-367.
- Di Fonzo, T., Girolimetto, D. (2020), Cross-Temporal Forecast Reconciliation: Optimal Combination Method and Heuristic Alternatives, Department of Statistical Sciences, University of Padua, [arXiv:2006.08570](https://arxiv.org/abs/2006.08570).
- Hyndman, R.J., Ahmed, R.A., Athanasopoulos, G., Shang, H.L. (2011), Optimal combination forecasts for hierarchical time series, *Computational Statistics & Data Analysis*, 55, 9, 2579-2589.
- Nystrup, P., Lindström, E., Pinson, P., Madsen, H. (2020), Temporal hierarchies with autocorrelation for load forecasting, *European Journal of Operational Research*, 280, 1, 876-888.
- Schäfer, J.L., Opgen-Rhein, R., Zuber, V., Ahdesmaki, M., Duarte Silva, A.P., Strimmer, K. (2017), *Package 'corpcor'*, R package version 1.6.9 (April 1, 2017).
- Schafer, J.L., Strimmer, K. (2005), A Shrinkage Approach to Large-Scale Covariance Matrix Estimation and Implications for Functional Genomics, *Statistical Applications in Genetics and Molecular Biology*, 4, 1
- Stellato, B., Banjac, G., Goulart, P., Bemporad, A., Boyd and S. (2018). OSQP: An Operator Splitting Solver for Quadratic Programs. *ArXiv e-prints*. 1711.08013.

## Examples

```
## Not run:
data(crosstemporal_data)
# top ts base forecasts ([lowest_freq' ... highest_freq'])
topbase <- crosstemporal_data$base[1, ]
# top ts residuals ([lowest_freq' ... highest_freq'])
topres <- crosstemporal_data$res[1, ]
obj <- thfrec(topbase, m = 12, comb = "acov", res = topres)

## End(Not run)
```

---

 thf\_tools

*Temporal Reconciliation Tools*


---

## Description

Some useful tools for the temporal reconciliation of a time series

## Usage

```
thf_tools(m, h = 1, sparse = TRUE)
```

## Arguments

- |        |  |
|--------|--|
| m      | Highest available sampling frequency per seasonal cycle (max. order of temporal aggregation).              |
| h      | Forecast horizon for the lowest frequency (most temporally aggregated) time series ( <i>default</i> is 1). |
| sparse | Option to return sparse object ( <i>default</i> is TRUE).  |

**Value**

A list of seven elements:

K	Temporal aggregation matrix.
R	Temporal summing matrix.
Zt	Zero constraints temporal kernel matrix, $\mathbf{Z}'_h \mathbf{Y}' = \mathbf{0}_{[hk^* \times n]}$ .
kset	Set of factors (p) of m in descending order (from m to 1), $\mathcal{K} = \{k_p, k_{p-1}, \dots, k_2, k_1\}$ , $k_p = m$ , $k_1 = 1$ .
p	Number of elements of kset, ( $\mathcal{K}$ ).
ks	Sum of p-1 factors of m (out of m itself), $k^*$ .
kt	Sum of all factors of m ( $k^{tot} = k^* + m$ ).

**Examples**

```
# quarterly data
obj <- thf_tools(m = 4, sparse = FALSE)
```

# Index

- \* **bottom-up**
    - ctbu, 6
  - \* **datasets**
    - crosstemporal\_data, 4
    - forec-hts, 8
    - forec-thief, 10
  - \* **heuristic**
    - csrec, 5
    - iterec, 17
    - tcsrec, 25
  - \* **package**
    - forec-package, 2
  - \* **reconciliation**
    - csrec, 5
    - ctbu, 6
    - htsrec, 13
    - iterec, 17
    - octrec, 20
    - tcsrec, 25
    - thfrec, 27
  - \* **utilities**
    - commat, 3
    - ctf\_tools, 7
    - forec2ts, 12
    - hts\_tools, 16
    - score\_index, 22
    - shrink\_estim, 24
    - thf\_tools, 29
- Cmatrix, 3  
commat, 3  
crosstemporal\_data, 4  
csrec, 2, 5, 12, 13  
ctbu, 6, 12, 13  
ctf\_tools, 7, 21
- forec-hts, 8  
forec-package, 2  
forec-thief, 10  
forec2ts, 12
- hts\_tools, 8, 16  
htsrec, 2, 5, 12, 13, 13, 18, 25
- iterec, 2, 12, 13, 17
- octrec, 2, 12, 13, 20  
osqpSettings, 6, 14, 18, 21, 26, 28
- score\_index, 22  
shrink\_estim, 24  
solve\_osqp, 14, 18, 21, 28
- tcsrec, 2, 5, 12, 13, 25  
thf\_tools, 8, 29  
thfrec, 2, 5, 12, 13, 17, 18, 25, 27  
ts, 13