

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA**

**DIPARTIMENTO DI FISICA ED ASTRONOMIA "GALILEO GALILEI"**



**CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN ASTRONOMIA**

**Evoluzione di Perturbazioni di Densità Lineare  
in Diversi Modelli Cosmologici**

**Candidato:  
Roberta Rufolo**

**Relatore:  
Nicola Bartolo  
Correlatore:  
Giampaolo Benevento**

**ANNO ACCADEMICO 2017-2018**



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1	Principio Cosmologico . . . . .	1
1.2	Metrica di Robertson e Walker . . . . .	2
1.3	L'Espansione dell'Universo . . . . .	3
1.4	Equazioni di Friedmann . . . . .	4
1.5	Geometria dell'Universo . . . . .	5
1.6	Modelli di Friedmann . . . . .	7
1.7	Parametri Cosmologici . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Modelli <math>\Lambda</math>CDM e di Gravità Modificata</b>	<b>11</b>
2.1	Modello $\Lambda$ CDM . . . . .	11
2.1.1	Evidenze Osservative dell' Energia Oscura . . . . .	12
2.1.2	La Costante Cosmologica $\Lambda$ . . . . .	14
2.1.3	Problemi per la Costante Cosmologica . . . . .	16
2.1.4	Modelli di Campi Scalari di Energia Oscura . . . . .	17
2.2	Modelli di gravità modificata . . . . .	18
2.2.1	Modello f(R) . . . . .	18
2.2.2	Modello K-mouflage . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Instabilità Gravitazionale</b>	<b>23</b>
3.1	Teoria di Jeans per un Universo statico . . . . .	23
3.2	Teoria di Jeans per un Universo in Espansione . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Perturbazioni di Materia Oscura</b>	<b>29</b>
4.1	Grandi Scale . . . . .	32
4.1.1	Soluzioni Sopra l'Orizzonte . . . . .	33
4.1.2	Attraversamento dell'Orizzonte Cosmologico . . . . .	34
4.2	Piccole Scale . . . . .	35
4.2.1	Attraversamento dell'Orizzonte . . . . .	35
4.2.2	Soluzioni Sotto l'Orizzonte . . . . .	38
4.3	Funzione di Crescita . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Soluzione per il Growth Factor</b>	<b>43</b>
5.1	Implementazione Numerica . . . . .	43
5.2	Risoluzione per il modello $\Lambda$ CDM . . . . .	44

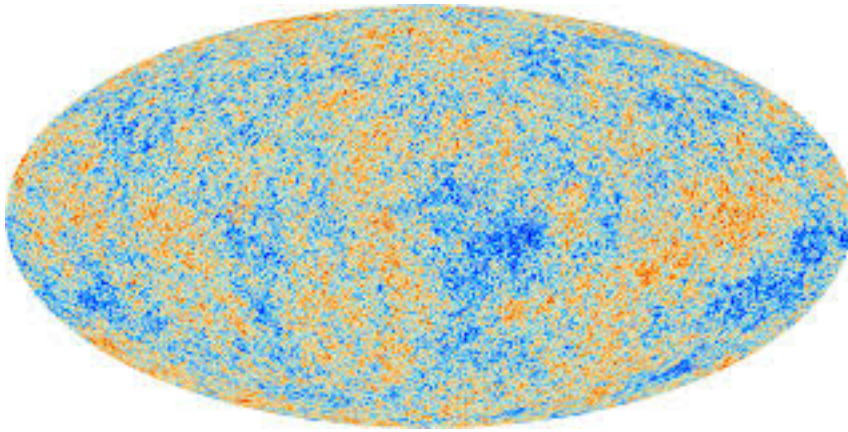
5.2.1	Implementazione in Python . . . . .	45
5.3	Risoluzione per il modello K-mouflage . . . . .	45
5.3.1	Implementazione in Python . . . . .	48
<b>6</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>51</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>53</b>

## Introduzione

Presentiamo in questo capitolo gli strumenti matematici e i principi che sono alla base delle teorie che verranno esposte in seguito nell'elaborato.

### 1.1 Principio Cosmologico

Il punto di partenza della cosmologia moderna è il Principio Cosmologico. Einstein, che fu il primo a teorizzarlo, introdusse tale approssimazione da un punto di vista puramente teorico soltanto per semplificare la trattazione matematica per il suo primo modello di Universo. Il principio cosmologico asserisce che l'Universo si presenta omogeneo ed isotropo. Ad oggi vi è un'ampia evidenza sperimentale: l'isotropia, ad esempio, è stata confermata dalla grande uniformità della temperatura della radiazione di fondo cosmico a microonde mentre l'omogeneità, sebbene più difficilmente, è stata confermata con statistiche di conteggi ed analisi 3D. Per Universo omogeneo intendiamo la proprietà dell'Universo di presentarsi uguale in ogni suo punto, mentre per Universo isotropo intendiamo la proprietà di apparire lo stesso in ogni direzione lo si osservi. Su piccole scale tale principio viene a cadere poiché si evidenziano delle disomogeneità: se si introduce il concetto di densità media dell'Universo  $\rho_b$  (dove il pedice  $b$  sta per *background*), si osserva che tutte le strutture cosmiche su scale minori degli ammassi di galassie presentano una densità media molto maggiore della  $\rho_b$ . Se al contrario, si studiano sorgenti cosmiche nelle bande elettromagnetiche radio e X, si nota un maggior grado di omogeneità e isotropia. Di conseguenza, il modo più preciso di formulare il principio cosmologico è dire che "l'Universo, visto da osservatori fondamentali, a un tempo cosmico fissato, si presenta omogeneo ed isotropo su scale sufficientemente grandi" (ossia maggiori di 200/300 Mpc). Per osservatore fondamentale intendiamo un osservatore il cui sistema di riferimento è solidale con il substrato cosmico; se il substrato è in movimento l'osservatore sarà comovente con questo. Per substrato cosmico intendiamo l'universo schematizzato come un fluido di materia e radiazione. Definiamo tempo cosmico il tempo proprio degli osservatori comoventi, ossia il tempo misurato, ad esempio, dal Big Bang, in riferimento al quale gli osservatori fondamentali, che facciano una misura, osserverebbero le stesse proprietà generali dell'Universo. L'istante zero è, di conseguenza, quello del Big Bang e il valore del tempo cosmologico coincide con l'età dell'Universo. Il principio cosmologico rappresenta un postulato che semplifica



**Figura 1.1:** Mappa della anisotropie della radiazione cosmica di fondo ottenuta dai dati di Planck (ESA). La radiazione cosmica di fondo è isotropa fino a circa una parte su  $10^5$

drasticamente la modellizzazione fisico-matematico dell'Universo: si sta supponendo che noi non occupiamo una posizione privilegiata e che sia possibile applicare a tutto il cosmo le leggi della fisica (valide nella nostra porzione di Universo).

## 1.2 Metrica di Robertson e Walker

Per avere un'adeguata rappresentazione matematico-fisica del cosmo è necessaria una teoria completa della struttura spaziale e temporale dell'Universo e della gravità. In Relatività Generale la distanza spaziale tra due punti può esser scritta come:

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.1)$$

ove  $g_{\mu\nu}$  è la metrica, essa dipende dalla posizione e dal tempo e determina la curvatura dello spazio;  $\mu, \nu$  sono indici che vanno da 0 a 3;  $x^0$  è la coordinata temporale mentre  $x^1, x^2, x^3$  sono le coordinate spaziali. Robertson e Walker derivarono la metrica dello spaziotempo indipendentemente dalla relatività generale ed avvalendosi del principio cosmologico, della metrica di Minkowski e della legge di Hubble. La metrica di RW è data da:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\phi^2) \right] \quad (1.2)$$

ove  $a(t)$  è il fattore di scala dell'Universo,  $c$  è la velocità della luce,  $r$  è la distanza radiale comovente ed è una quantità adimensionale;  $\Theta$  e  $\phi$  sono le coordinate sferiche comoventi,  $t$  è il tempo cosmico misurato da un osservatore fondamentale e  $k$  è il parametro di curvatura, riscalato in modo da assumere solo valori 1, -1 e 0. Evidenziamo che il fattore di scala descrive il tasso di espansione dell'Universo ed è funzione solo del tempo;  $a(t)$  è definito come:

$$\vec{d} = a(t)\vec{x} \quad (1.3)$$

ove con  $\vec{d}$  intendiamo la distanza fisica tra due oggetti e con  $\vec{x}$  la distanza comovente. Il vantaggio di usare un sistema di coordinate comoventi è che queste seguono

l'espansione dell'Universo. Per definizione, potendo scegliere la normalizzazione di  $a(t)$ , il valore di  $a(t_0)$  al tempo cosmico attuale è 1 (con il pedice 0 intendiamo grandezze e costanti al tempo attuale). Va infine precisato che la metrica di RW vale solo laddove valga il principio cosmologico; su scale piccole, ove l'universo non è omogeneo ed isotropo, bisogna ricorrere alla metrica di Schwarzschild.

### 1.3 L'Espansione dell'Universo

Nel 1929 Hubble realizzò un'importante scoperta: l'Universo si sta espandendo. Egli osservò che le righe spettrali di galassie sufficientemente lontane mostrano uno spostamento verso il rosso; Tanto maggiore dista la galassia tanto maggiore questo spostamento è marcato. Questi spostamenti sono il frutto di un fenomeno relativistico: l'Effetto Doppler che consiste nel cambiamento apparente della lunghezza d'onda emessa da una sorgente che si trova in moto rispetto ad un osservatore che riceve tale segnale. Fisicamente l'Effetto Doppler è definito come:

$$\lambda_o = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \lambda_e \quad (1.4)$$

ove con  $\lambda_o$  intendiamo la lunghezza d'onda osservata,  $\lambda_e$  la lunghezza d'onda emessa dalla sorgente,  $c$  la velocità della luce e  $v$  velocità relativa tra il sistema sorgente-osservatore. Per  $v$  sufficientemente minori di  $c$  abbiamo la seguente relazione per il redshift  $z$ :

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_e} = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} \approx \frac{v}{c} = z \quad (1.5)$$

Hubble mostrò che la relazione tra distanza  $d$  e redshift è una relazione lineare:

$$z = \text{costante} \times d \quad (1.6)$$

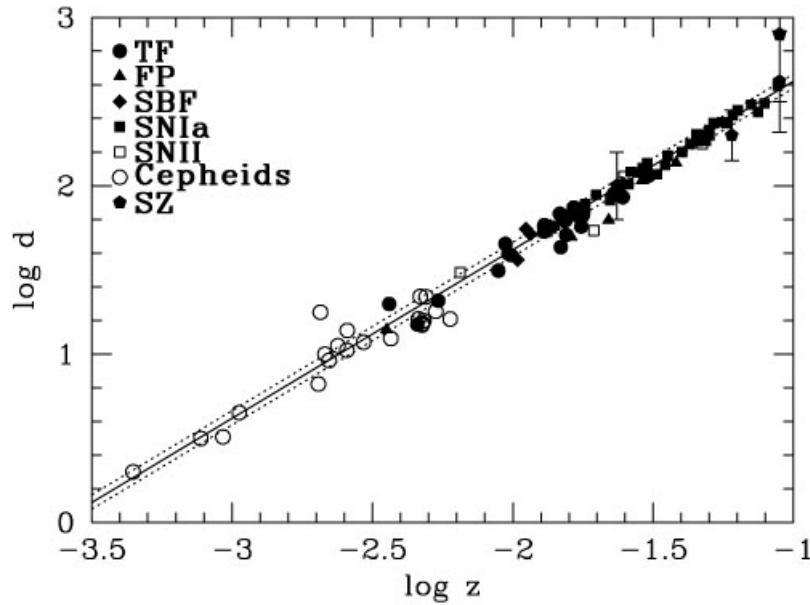
Unendo assieme le ultime due relazioni si ottiene la legge di Hubble:

$$v \cong zc = H_0 d \quad (1.7)$$

con  $H_0$  costante di Hubble che ad oggi è stimata avere il valore di  $H_0 \cong 100 \cdot h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  con  $h = 0.72 \pm 0.08$ . La legge di Hubble non è propriamente esatta perchè per le galassie vicine andrebbero considerati i loro moti peculiari, che per galassie lontane possono essere trascurati. Poichè il valore della costante di Hubble è positiva, mettendo assieme il principio cosmologico e la legge di Hubble si può mostrare che non sono le galassie ad allontanarsi da noi ma che è l'intero Universo ad espandersi. La velocità di recessione è quindi una velocità apparente dovuta all'espansione dell'Universo. Se consideriamo un sistema di coordinate comoving, è possibile riscrivere la legge di Hubble come:

$$\vec{v} = \frac{|\dot{\vec{r}}|}{|\vec{r}|} \vec{r} = \frac{\dot{a}}{a} \vec{r} = H \vec{r} \quad (1.8)$$

ove si è usata la relazione  $\vec{r} = a\vec{x}$  ricordando che la coordinata comoving  $\vec{x}$  è costante. Quindi il parametro di proporzionalità, ossia il parametro di Hubble, è definito come  $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$  e quindi  $H_0$  è il parametro di Hubble al presente.



**Figura 1.2:** Versione moderna della legge di Hubble ottenuta dai risultati di osservazioni con Hubble Space Telescope (da Freedman et al. 2000 [13])

## 1.4 Equazioni di Friedmann

Per ottenere informazioni sull'evoluzione temporale del parametro di scala  $a(t)$  bisogna partire dalle equazioni di campo di Einstein, che prendono la seguente forma:

$$R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2}g_{\nu}^{\mu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\nu}^{\mu} \quad (1.9)$$

ove  $R_{\nu}^{\mu}$  è il tensore di Ricci,  $R$  lo scalare di Ricci,  $g_{\nu}^{\mu}$  è il tensore metrico e rappresenta le caratteristiche geometriche dello spazio,  $T_{\nu}^{\mu}$  è il tensore energia-impulso e descrive la distribuzione della materia e le sue proprietà fisiche; il termine  $\frac{8\pi G}{c^4}$  assicura che l'equazione di Poisson (che descrive la gravità Newtoniana) risulti come la condizione limite per un campo gravitazionale debole. L'equazione di Poisson è:

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \quad (1.10)$$

L'equazione (1.9) collega le caratteristiche geometriche dello spazio tempo (primo membro) al suo contenuto di materia-energia (secondo membro). In seguito Einstein modificò tali equazioni inserendo un termine costante  $\Lambda$  che permettesse di ottenere una soluzione di Universo statico ma che mantenesse il carattere generale covariante dell'equazione. Dopo la scoperta, da parte di Hubble, di un Universo in espansione, Einstein abbandonò l'idea di questa costante definendola il suo più grande errore. Tuttavia tale modifica alle equazioni di campo venne successivamente ripresa dai cosmologi, infatti i risultati dei loro studi verranno mostrati e discussi in seguito. La soluzione delle equazioni di campo consente di determinare  $g_{\nu}^{\mu}$  da cui si ottiene la geometria dello spazio: inserendo la metrica di RW nelle equazioni di campo di Einstein si ottengono due equazioni indipendenti per il fattore di scala  $a(t)$  che prendono il nome di equazioni di Friedmann. La Prima Equazione della Dinamica è:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} \quad (1.11)$$



ove per comodità notazionale stiamo omettendo la dipendenza del fattore di scala dal tempo ( $a=a(t)$ ) e con il punto indichiamo la derivata fatta rispetto al tempo. Questa prima equazione mette in relazione l'energia cinetica (a sinistra) con l'energia potenziale gravitazionale (a destra) più una costante d'integrazione. Vedremo in seguito come  $k$ , a cui viene dato il nome di curvatura, ci dia informazioni sul carattere geometrico dell'Universo. La seconda equazione che otteniamo è l'equazione dell'accelerazione, detta anche Seconda Equazione della Dinamica, essa mette in relazione l'accelerazione delle particelle del sistema con le forze in gioco:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right) \quad (1.12)$$

Con  $p$  indichiamo la pressione e con  $\rho c^2$  la densità di energia della materia e radiazione nell'Universo, entrambe le quantità dipendono dal tempo. Notiamo che se la materia esercita zero pressione, questa aumenta la forza gravitazionale e ciò porta ad una decelerazione dell'espansione. Sottolineiamo inoltre che non ci sono forze associate alla pressione in un Universo isotropico, per cui non ci sono gradienti di pressione. Un'ulteriore relazione importante che si può ottenere dalla componente temporale dell'equazione di continuità per il tensore energia-momento è l'Equazione di Continuità:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a} \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0 \quad (1.13)$$

questa esprime il primo principio della termodinamica in forma relativistica. Come si può notare ci sono due fattori che danno un contributo al cambiamento di densità. Il primo termine in parentesi corrisponde alla diluizione della densità a causa dell'aumento del volume, mentre il secondo termine corrisponde ad una perdita di energia a causa del lavoro che compie la pressione del materiale per l'aumento del volume dell'Universo. Quest'energia persa si trasforma poi in energia potenziale gravitazionale. Le due equazioni di Friedmann includono la legge di conservazione dell'energia che è fondamentale per ricavare variazioni di densità e pressione. Osserviamo che, per risolvere l'equazione (1.13) in maniera da esplicitare  $\rho$  e  $p$ , occorre un'ulteriore equazione che lega tali parametri, ossia, un'equazione di stato.

## 1.5 Geometria dell'Universo

Quando abbiamo introdotto la metrica di RW abbiamo presentato un termine  $k$ , detto costante di curvatura dell'Universo o semplicemente curvatura, che descrive la geometria dell'Universo. Definendo opportunamente il parametro  $a(t)$  nella metrica di RW è possibile ottenere tre valori discreti per  $k$  il cui valore è associabile univocamente ad una rispettiva geometria spaziale. Vediamo i vari modelli ottenibili al variare di  $k$ .



Figura 1.3: Schema delle diverse geometrie dell'Universo al variare di  $k$

## Geometria Piatta

Con  $k=0$  otteniamo un Universo a curvatura nulla, o piatto (in quanto rappresenta uno spazio piatto, di tipo Euclideo), detto anche modello di Einstein-De Sitter. Si applica, dunque, la geometria Euclidea, basata su semplici assiomi come ad esempio che una linea retta definisce la distanza più piccola tra due punti. Ne seguono due conseguenze immediate: la lunghezza di una circonferenza è  $2\pi r$  e la somma degli angoli interni di un triangolo è  $180^\circ$ . L'universo deve essere infinitamente esteso poiché se vi fosse un bordo verrebbe violato il principio di isotropia. Risolvendo le equazioni di Friedmann per  $k=0$  si ottiene che:

$$a(t) = a(t_0) \left( \frac{t}{t_0} \right)^{2/3} \quad (1.14)$$

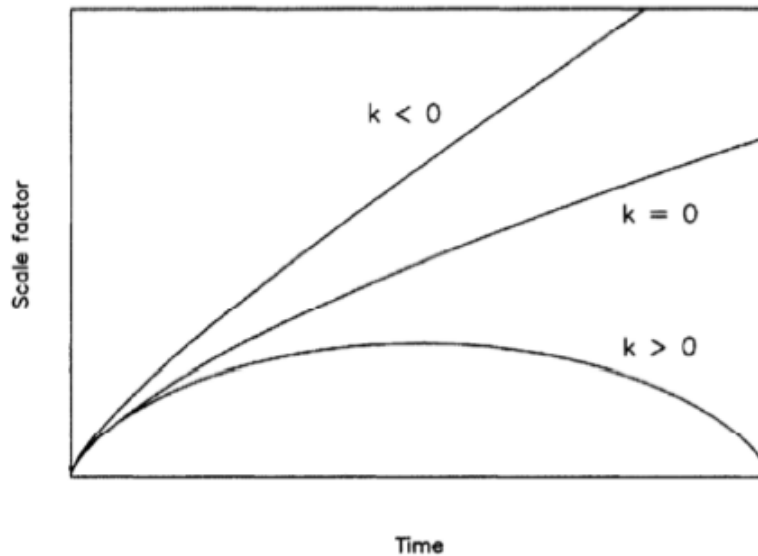
Nel caso di Universo dominato da materia, abbiamo che per  $t \rightarrow +\infty \Rightarrow \dot{a} \rightarrow 0$  e per  $t \rightarrow 0 \Rightarrow \dot{a} \rightarrow +\infty$ . Ciò significa che esiste un istante per cui il parametro  $a(t)$  è zero, quest'istante viene definito Big Bang.

## Geometria Sferica

Con  $k=+1$  otteniamo un Universo chiuso, o con geometria sferica; Dal momento che la superficie di una sfera è finita ( $4\pi r^2$ ) e priva di bordi, l'Universo risulta chiuso e finito e il principio di isotropia resta valido in maniera naturale. Non è possibile applicare la geometria Euclidea in quanto vedrebbe violato il quinto assioma. Ne consegue che la somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di  $180^\circ$  e che la lunghezza di una circonferenza è minore di  $2\pi r$ . Risolvendo le equazioni di Friedmann, sempre sotto l'ipotesi di un Universo dominato da materia, per  $k=+1$  si ottiene che per  $t$  molto grandi  $\dot{a}(t) = 0$  e poiché  $\ddot{a}(t) < 0$  il termine di curvatura tende ad aumentare fino a dominare portando ad un punto in cui l'espansione dell'Universo si ferma per poi avere un collasso dello stesso.

## Geometria Iperbolica

Con  $k=-1$  otteniamo un Universo aperto, o con geometria iperbolica, di conseguenza l'Universo risulta essere infinitamente esteso. Anche qui l'isotropia è definita e non si può applicare la geometria Euclidea per gli stessi motivi visti per il caso  $k=1$ . La differenza dal caso sferico è racchiusa nel fatto che la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di  $180^\circ$  e che la lunghezza di una circonferenza è maggiore



**Figura 1.4:** Tre possibili evoluzioni dell'Universo al variare del parametro  $k$  (da Liddle, 2003 [15])

di  $2\pi r$ . Risolvendo le equazioni di Friedmann a tempi molto grandi prevale il termine  $k/a^2$  e ciò porta a:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{k}{a^2} \Rightarrow \dot{a} = -k \Rightarrow a \propto t \quad (1.15)$$

L'Universo con curvatura negativa assume una velocità costante di espansione ed è caratterizzato da una proporzionalità diretta tra  $a$  e  $t$ ; per tale motivo questo modello è detto di Espansione Libera.

Graficamente tutti questi modelli possono essere visualizzati come mostrato in Figura 1.4. Evidenziamo che tutti questi modelli prevedono una singolarità per  $a(t)$  che tende a zero, singolarità che prende il nome di Big Bang.

## 1.6 Modelli di Friedmann

Prima di parlare delle relazioni che si ottengono risolvendo le equazioni di Friedmann, è utile introdurre un'importante relazione tra il fattore di scala, i tempi, le frequenze e il redshift. Tale relazione, che scaturisce dalla metrica di RW, considerando due eventi collegati tra loro risulta essere:

$$\frac{dt_o}{dt_e} = \frac{\nu_e}{\nu_o} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} = 1 + z \quad (1.16)$$

ove con il pedice  $o$  indichiamo l'osservatore e con il pedice  $e$  la sorgente. Se l'Universo si espande si verifica uno spostamento delle frequenze verso valori minori a causa dell'aumento del fattore di scala che corrisponde a un arrossamento dello spettro. Se, invece, l'Universo si contrae, e quindi gli oggetti si avvicinano, si ha un blue-shift. Il redshift, quindi, costituisce un osservabile diretto della cosmologia ed è una misura di quanto sia cambiato il fattore di scala tra il momento di emissione di un

fotone al momento della sua osservazione. Pertanto, in un Universo vicino, il redshift è legato ad un effetto doppler generato dai moti relativi tra sorgente ed osservatore; la metrica da utilizzare è quella dello spazio di Minkowski e gli effetti di curvatura sono trascurabili. In un Universo lontano il redshift è legato alle trasformazioni dei tempi provocate dalla variazione del fattore di scala, la metrica da applicare è quella di Robertson Walker e gli effetti di curvatura sono significativi.

Studiamo ora due particolari soluzioni per le equazioni di Friedmann; per farlo prendiamo in considerazione l'equazione di stato che collega pressione e densità:

$$p = w\rho c^2 \quad (1.17)$$

Il parametro  $w$  è una costante, detta parametro di stato, e vale circa 0 per un Universo di materia (considerato come un fluido non relativistico che esercita una pressione trascurabile),  $1/3$  per un Universo di radiazione (considerato come un fluido relativistico) e  $-1$  per un Universo di energia oscura. Inoltre è legato alla velocità del suono nel fluido dalla relazione:

$$v_s^2 = \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s = wc^2 \quad (1.18)$$

quindi per un Universo di materia  $v_s = 0$  mentre per un Universo di radiazione  $v_s = c/\sqrt{3}$ . Consideriamo ora la Matter Dominated Era, ossia l'era in cui l'Universo è dominato dalla materia. Dalle equazioni della fluidodinamica si ricavano le seguenti relazioni:

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{a^3} = \frac{\rho_0 t_0^2}{t^2} \quad (1.19a)$$

$$a(t) = \left( \frac{t}{t_0} \right)^{2/3} \quad (1.19b)$$

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{2t} \quad (1.19c)$$

Notiamo da quest'ultima relazione che con il crescere del tempo  $H$  decresce. Ciò significa che con il passare del tempo l'accelerazione dell'Universo decresce. Tuttavia la materia dell'Universo non ricollasserà su se stessa ma continuerà ad espandersi per sempre, anche se più lentamente. Consideriamo il secondo caso, la Radiation Dominated Era, ossia il periodo in cui l'Universo è dominato dalla radiazione. Otteniamo le seguenti relazioni:

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{a^4} = \frac{\rho_0 t_0^2}{t^2} \quad (1.20a)$$

$$a(t) = \left( \frac{t}{t_0} \right)^{1/2} \quad (1.20b)$$

Notiamo che l'Universo si espande in maniera più lenta rispetto al caso *Matter Dominated* come conseguenza della decelerazione extra fornita dalla pressione; I fotoni degradano in energia di un fattore proporzionale a  $(1+z)^{-1}$  e questo spiega come mai per questi vi sia un fattore  $a(t)$  aggiuntivo. Un'ultima situazione più generale potrebbe essere quella di un Universo misto di radiazione e materia. Per questo otteniamo:

$$\rho(t) = \rho_{mat} + \rho_{rad} \quad (1.21)$$

e abbiamo due casi:

Caso 1: Radiazione > Materia

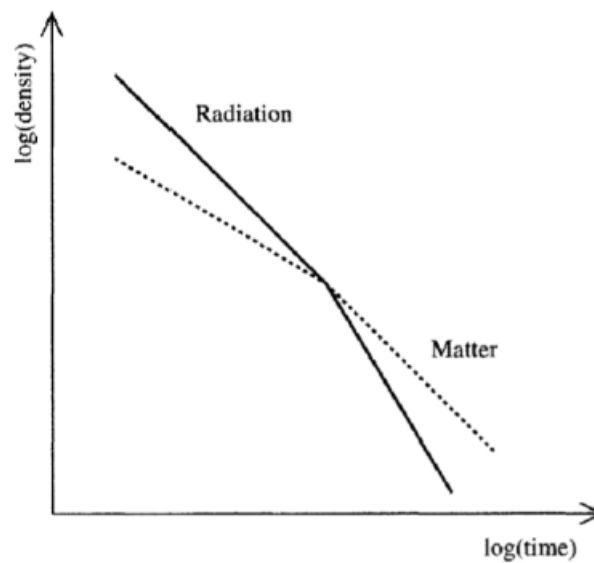
$$a(t) \propto t^{1/2}; \quad \rho_{rad} \propto \frac{1}{t^2}; \quad \rho_{mat} \propto \frac{1}{a^3} \propto \frac{1}{t^{3/2}} \quad (1.22)$$

Notiamo che la densità della materia diminuisce più lentamente di quella della radiazione, per cui la situazione in cui la radiazione domina sulla materia non può durare a lungo in quanto è una situazione instabile.

Caso 2: Materia > Radiazione

$$a(t) \propto t^{2/3}; \quad \rho_{mat} \propto \frac{1}{t^2}; \quad \rho_{rad} \propto \frac{1}{a^4} \propto \frac{1}{t^{8/3}} \quad (1.23)$$

In questo caso la situazione risulta stabile. La materia domina sulla radiazione in relazione al trascorrere del tempo.



**Figura 1.5:** Schema dell'evoluzione dell'Universo contenente materia e radiazione (da Liddle, 2003 [15])

## 1.7 Parametri Cosmologici

Introduciamo ora dei parametri che ci permettano di riparametrizzare quanto appena detto in funzione di termini determinabili sperimentalmente in maniera più semplice. Abbiamo già introdotto il parametro di Hubble, la costante di Hubble è il parametro di Hubble al tempo odierno:  $H(t_0) = 67.4 \pm 0.5 \text{ Km/s/Mpc}$  [18].

Definiamo la densità critica ( $\rho_c$ ) come la densità che l'Universo dovrebbe avere affinché si abbia  $k=0$ ; la si ottiene dall'eq. (1.11):

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (1.24)$$

che dipende dal tempo dal momento che anche  $H$  dipende dal tempo. Definiamo il parametro di densità, quantità adimensionale, legato alla densità di materia

nell'Universo:

$$\Omega(t) = \frac{8\pi G\rho(t)}{3H^2(t)} = \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)} \quad (1.25)$$

In particolare se  $k=0$  allora  $\Omega(t) = 1$ , questo risultato è ottenuto mettendo assieme la (1.11) e la (1.17). Come ultimo parametro introduciamo il parametro di decelerazione:

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}(t)}{a(t_0)} \frac{1}{H^2} \quad (1.26)$$

La densità di materia è legata alla decelerazione dell'espansione dalla relazione:

$$\Omega(t) = 2q(t) \quad (1.27)$$

Una misura di  $q_0$  ci porta immediatamente una misura di  $\Omega_0$ .

## Modelli $\Lambda$ CDM e di Gravità Modificata

In questo capitolo presenteremo alcuni modelli cosmologici il cui scopo è una descrizione accurata dall'Universo. In particolare la nostra attenzione è focalizzata sul modello  $\Lambda$ CDM e sul modello K-mouflage ai quali verranno dedicati i prossimi capitoli che si concentreranno sullo studio del fattore di crescita delle perturbazioni cosmologiche.

### 2.1 Modello $\Lambda$ CDM

Il modello  $\Lambda$ CDM, definito anche modello Standard, ad oggi, riproduce al meglio le osservazioni cosmologiche. È in grado, infatti, di spiegare le osservazioni della CMB, la struttura a grande scala e l'espansione dell'Universo, le oscillazioni acustiche barioniche e l'abbondanza di elio, idrogeno e litio. Per descrivere la gravità, il modello  $\Lambda$ CDM si avvale della Relatività Generale e del Principio Cosmologico. L'Universo, secondo tale modello, è composto da:

- **Materia Barionica:** 4.9 %, formata principalmente da elementi leggeri quali l'idrogeno, il litio e l'elio.
- **Materia Oscura Fredda (*Cold Dark Matter*, CDM):** 27 %, è un'ipotetica forma di particelle "lente" e quindi "fredde" non interagenti. Questa componente serve a giustificare la formazione delle strutture su grande scala. Sebbene vi siano prove indirette della sua presenza, come la curva di rotazione piatta delle galassie a spirale o il lensing gravitazionale, questa non è ancora stata rilevata in laboratorio e quindi la sua natura resta tutt'ora sconosciuta.
- **Energia oscura :** (*Dark Energy*) 68%, rappresenterebbe un'energia che dinamicamente agirebbe come una forza repulsiva su grande scala, spiegando così l'espansione accelerata dell'Universo. Le forme proposte di energia oscura più quotate sono la costante cosmologica  $\Lambda$  e la Quintessenza. La prima rappresenta una costante equivalente all'energia del vuoto e corrisponde a un'equazione di stato  $w_\Lambda = -1$ . La Quintessenza è, invece, un campo scalare la cui densità d'energia varia nello spazio e nel tempo.

Il modello è parametrizzato da sei parametri: la costante di Hubble  $H$  che, come abbiamo visto, determina la velocità d'espansione dell'universo; Le densità di materia barionica, di materia oscura e di energia oscura, rispettivamente:  $\Omega_b$ ,  $\Omega_m$ ,  $\Omega_\Lambda$ . Poichè dalle molte prove osservative, l'Universo è assunto piatto, la somma delle densità deve essere pari ad uno ( $\Omega_b + \Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$ ), ragion per cui la densità dell'energia oscura non è un parametro libero. Gli altri tre parametri sono: la profondità ottica al momento della reionizzazione,  $\tau$ , l'ampiezza delle fluttuazioni primordiali (dall'inflazione cosmica)  $A_s$  e l'indice spettrale  $n_s$ .

### 2.1.1 Evidenze Osservative dell' Energia Oscura

Proponiamo qui di seguito le prove più significative per la presenza di energia oscura nel nostro Universo.

#### Supernova Ia

Nel 1998 con lo studio di distanze di luminosità di Supernova di tipo Ia (SN Ia) è stata accertata l'espansione dell'Universo [19]. Le SN Ia hanno origine da nane bianche. Queste sono stelle originate dallo "spegnimento" di stelle di massa medio-piccola, il cui nucleo ha cessato la sua attività di fusione nucleare. Tuttavia le nane bianche, costituite da un nucleo di Carbonio ed Ossigeno e situate generalmente in un sistema binario, possono aumentare gradualmente la loro massa, grazie alla compagna del sistema, e raggiungere la temperatura richiesta per innescare la fusione del carbonio. Le nane bianche che arrivano a superare il limite di massa, detto limite di Chandrasekhar corrispondente a circa 1,44 masse solari, subiscono una reazione termonucleare incontrollata con la conseguente violenta esplosione. La luminosità piuttosto ben definita e comune ad ognuna di esse, indipendentemente dal redshift a cui si trovano, fa sì che le SN Ia possano essere utilizzate come candele standard per misurare la distanza tra noi e la galassia che le ospita. Quindi dalla relazione del modulo di distanza:

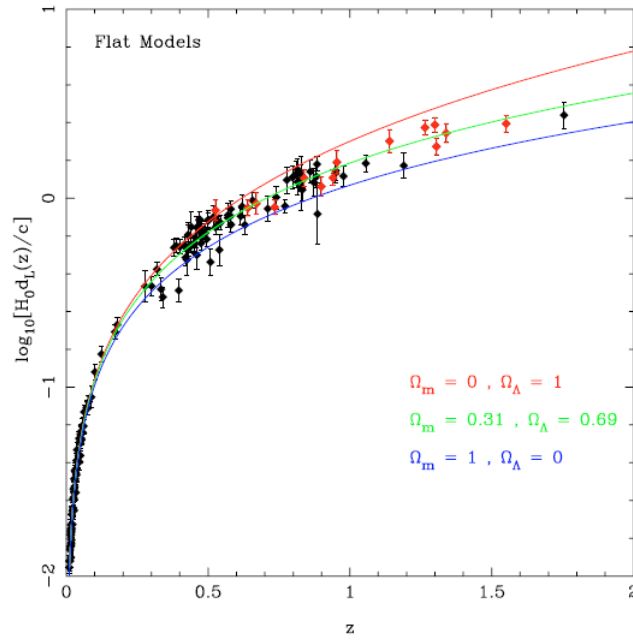
$$m - M = 5 \log_{10} \frac{d_L}{Mpc} + 25 \quad (2.1)$$

misurata la magnitudine apparente  $m$ , conoscendo la magnitudine assoluta  $M$ , che è la stessa per ogni SN Ia, si determina la distanza di luminosità (in Mpc). Conoscendo la relazione tra redshift e distanza di luminosità si può determinare  $z$ :

$$d_L = \frac{(1+z)}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\sum_i \Omega_i^{(0)} (1+z')^{3(1+\omega_i)}}} \quad (2.2)$$

Considerando un numero elevato di SN Ia si può costruire il diagramma di Hubble che mette in relazione redshift e distanza di luminosità, come fatto, ad esempio nel 2004 da Riess et al. [20] che aggiunsero i dati provenienti da HST al catalogo "Gold" come mostrato in figura 2.1. Ne risulta che il modello di Universo dominato da materia e senza costante cosmologica ( $\Omega_m^{(0)} = 1$ ) non fitta i dati, mentre il miglior fit è ottenuto considerando  $\Omega_m^{(0)} = 0.31$ . Dunque l'Universo non può essere composto esclusivamente da materia e radiazione, serve un'ulteriore componente energetica che contribuisca in maniera negativa al parametro di decelerazione  $q(z)$ , che risulta essere negativo suggerendoci un Universo in espansione accelerata.





**Figura 2.1:** Diagramma di Hubble per un campione di Supernove 1a, le curve rappresentano modelli cosmologici piatti con valori diversi per i parametri di densità. (da Choudhury T.R. e Padmanabhan T., 2005 [9]). I punti neri rappresentano i dati del catalogo "Gold" (da Riess et al., 2004 [20]) i punti rossi sono i dati recenti dati da HST.

## Età dell'Universo

Un'altra evidenza interessante emerge confrontando l'età dell'Universo ( $t_0$ ) con l'età delle stelle più vecchie ( $t_s$ ). Dovrebbe, ovviamente, risultare che  $t_0 > t_s$ , tuttavia non è facile soddisfare questa condizione considerando un Universo piatto e composto solo da materia e radiazione. Studiando le stelle più vecchie, ossia quelle a bassa metallicità appartenenti ad ammassi globulari della Via Lattea, si è stimata un'età  $t_s = 13.5 \pm 2$  Gyr (da Jimenez et al., 1996[14]). Considerando l'equazione di Friedmann (1.11) e considerando i tre contributi dati dalla materia ( $w_m \cong 0$ ), dalla radiazione ( $w_r = 1/3$ ) e dalla costante cosmologica ( $w_\Lambda = -1$ ), l'equazione (1.11) può essere scritta come:

$$H^2(a) = H_0^2 \left[ \Omega_r^{(0)} \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-4} + \Omega_m^{(0)} \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3} - \Omega_k^{(0)} \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-2} + \Omega_\Lambda^{(0)} \right] \quad (2.3)$$

ove  $\Omega_k^{(0)} = k/(a_0^2 H_0^2)$ . Conoscendo la relazione tra il fattore di scala ed il redshift si può scrivere  $H(a)$  in funzione di  $z$  per poi ottenere l'età dell'universo:

$$t_0 = \int_0^{t_0} dt' = \int_0^\infty \frac{dz}{H(1+z)} = \int_0^\infty \frac{dz}{H_0(1+z) \left[ \Omega_r^{(0)}(1+z)^4 + \Omega_m^{(0)}(1+z)^3 - \Omega_k^{(0)}(1+z)^2 + \Omega_\Lambda^{(0)} \right]^{1/2}} \quad (2.4)$$

Possiamo porre a zero  $\Omega_r^{(0)}$  poichè il periodo dominato dalla radiazione è stato molto breve, e studiando il caso per  $\Omega_k^{(0)} = 0, \Omega_m^{(0)} = 1$  e  $\Omega_\Lambda^{(0)} = 0$  si ottiene:

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} \cong 8 - 10 \text{Gyr} \quad (2.5)$$

che è inconsistente con l'età stimata per gli ammassi globulari. Condiderando un Universo piatto con  $\Omega_\Lambda^{(0)} \neq 0$  si ottiene dall'integrale della formula (2.4) un tempo  $\cong 13-14$  Gyr e dunque la presenza della costante cosmologica risolve il problema. Con i recenti dati Planck (2018) abbiamo che l'età stimata è  $t_s = 13.801 \pm 0.0061$  [18].

### Vincoli Cosmologici dati dalla CMB

La radiazione cosmica di fondo (CMB) è un'altra prova a favore del modello  $\Lambda$ CDM. La radiazione cosmica di fondo è la radiazione elettromagnetica che permea l'Universo, proveniente dalla superficie di ultimo scattering: i fotoni, in equilibrio con il plasma primordiale, si sono disaccoppiati e da quell'istante in poi si sono propagati liberamente. La CMB assume la forma di una radiazione con spettro isotropo di corpo nero ed è una prova rilevante dell'isotropia dell'Universo, mentre le anisotropie che la CMB presenta sono causate da piccoli addensamenti del plasma all'epoca del disaccoppiamento. Oggi i fotoni diffusi da queste buche di potenziale appaiono più freddi degli altri poichè hanno subito un leggero redshift extra. È possibile analizzare statisticamente le anisotropie e i processi che le hanno generate per limitare i parametri cosmologici. Considerando i recenti dati di Planck si ha che  $\Omega_k^0 = -0.001 \pm 0.002$ , consistente con un Universo piatto [18]. In figura 5.2 mostriamo le regioni di confidenza dati dalle SN Ia, la CBM e gli ammassi di galassie su larghe scale.

### 2.1.2 La Costante Cosmologica $\Lambda$

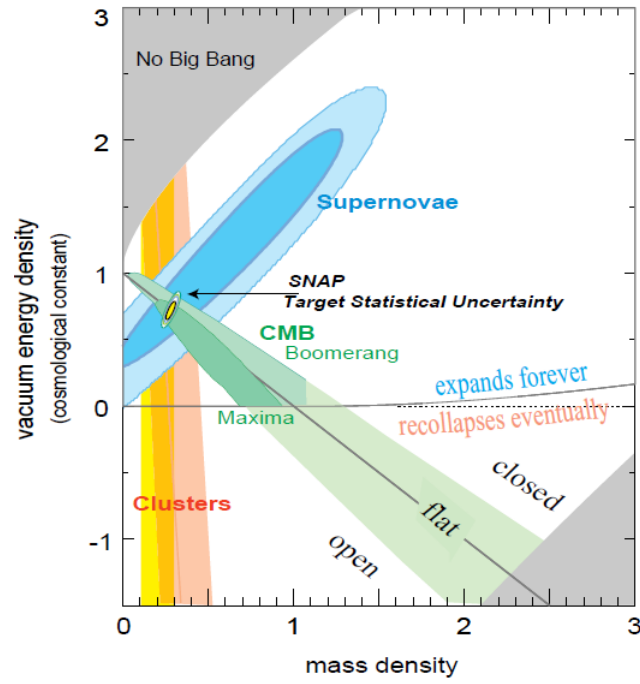
Nel 1917 Einstein introdusse la costante cosmologica per ottenere un modello di Universo stazionario. Quando Hubble, nel 1929, scoprì l'espansione dell'Universo, questa costante fu accantonata ma i cosmologi di oggi hanno rimesso in gioco la costante cosmologica dandole il significato fisico di densità di energia del vuoto. Le equazioni di Friedmann modificate con l'aggiunta di  $\Lambda$  diventano:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.6)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.7)$$

$\Lambda$  ha le dimensioni di un  $[\text{tempo}]^{-2}$ . Un valore positivo di  $\Lambda$  dà un contributo positivo ad  $\ddot{a}$ , quindi l'effetto è quello di una forza repulsiva che se sufficientemente grande può portare a un'accelerazione dell'Universo. Definiamo il parametro di densità per l'energia oscura:

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} \quad (2.8)$$



**Figura 2.2:** Vincoli osservativi nel piano  $\Omega_m^{(0)} - \Omega_\Lambda^{(0)}$  di SN Ia, CMB e ammassi di galassie (da Aldering, G. et al., 2002 [1])

e notiamo che sebbene  $\Lambda$  sia costante,  $\Omega_\Lambda$  non lo è in quanto dipende anche dal parametro  $H(t)$ , che a sua volta dipende dal tempo. Otteniamo dall'equazione di Friedmann la seguente relazione:

$$\Omega + \Omega_\Lambda - 1 = \frac{k}{a^2 H^2} \quad (2.9)$$

possiamo descrivere la geometria dell'Universo attraverso questo nuovo parametro, con l'ipotesi semplificativa di essere in una geometria piatta:

Universo Aperto		$0 < \Omega_\Lambda + \Omega < 1$
Universo Piatto		$\Omega_\Lambda + \Omega = 1$
Universo Chiuso		$\Omega_\Lambda + \Omega > 1$

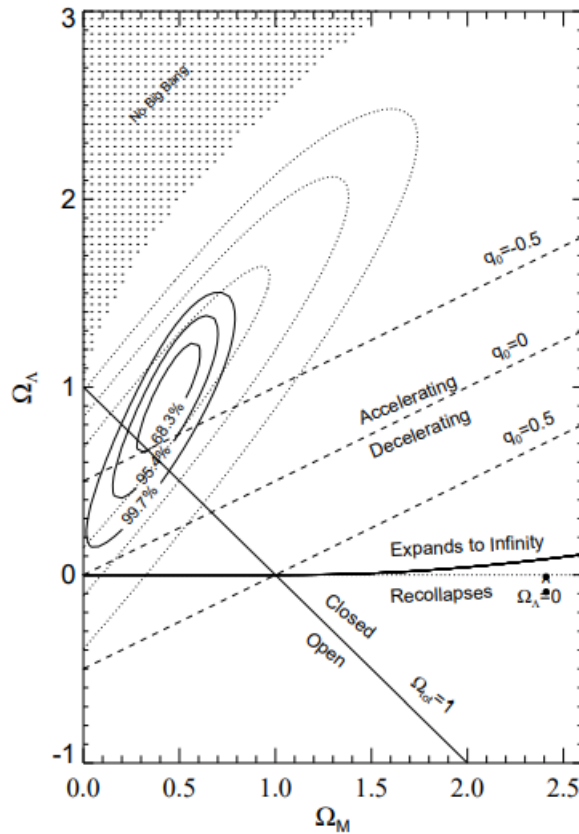
Immaginiamo l'energia oscura come un fluido che permea l'intero Universo, caratterizzato da una densità  $\rho_\Lambda$  e da una pressione  $p_\Lambda$ . L'equazione (2.6) diviene:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho + \rho_\Lambda) - \frac{kc^2}{a^2} \quad (2.10)$$

questo definisce  $\Omega_\Lambda = \rho_\Lambda / \rho_c$ , con  $\rho_c$  densità critica. Considerando l'equazione fluida per  $\Lambda$ :

$$\dot{\rho}_\Lambda + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho_\Lambda + \frac{p_\Lambda}{c^2}\right) \quad (2.11)$$

poichè  $\rho_\Lambda$  è costante, per definizione otteniamo che  $p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2$  a conferma di quanto detto prima, ossia che l'energia oscura esercita una pressione negativa. Notiamo che con l'introduzione della costante cosmologica si aprono per l'Universo nuovi scenari di evoluzione molto diversi tra loro che dipendono dal segno di  $\Lambda$  (come



**Figura 2.3:** Grafico riassuntivo delle varie soluzioni di modelli che includono la costante cosmologica (da Riess et al., 2004 [20])

mostrato in figura 2.3). In questa figura la linea diagonale continua rappresenta soluzioni con geometria piatta, quella orizzontale continua separa universi in espansione da universi destinati a ricollassare. Le linee diagonali tratteggiate separano universi in cui l'espansione accelera da quelli la cui espansione decelera. La zona ombreggiata (corrispondente a bassi valori di  $\Omega_m$  ed alti di  $\Omega_\Lambda$ ) corrisponde a casi privi della singolarità iniziale, infine le ellissi corrispondono a contorni di probabilità che i valori cosmologici si trovino all'interno di queste mentre i diversi tratti indicano diversi dati di osservazione.

### 2.1.3 Problemi per la Costante Cosmologica

Nonostante l'introduzione di una costante cosmologica permetta la descrizione teorica di un Universo con i dati osservativi, questa è affetta da alcuni problemi di origine teorica come per esempio il "Fine Tuning". Osservativamente sappiamo che  $\Lambda$  deve essere pari al valore attuale dei parametri di Hubble, ossia  $\Lambda \approx H_0^2$ , che corrisponde ad una densità critica:

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda m_{pl}^2}{8\pi} \approx 10^{-47} GeV^4 \quad (2.12)$$

Invece, servendoci della teoria dei campi e decomponendo i campi quantistici in oscillatori armonici e considerando come scala valida quella fino ad un certo valore di

"cut-off", oltre al quale la gravità non è più trascurabile - scala che può essere quella data dalla massa di Planck ( $m_{pl} = 1.22 \times 10^{19} GeV$ ) nel caso della relatività generale - la densità di energia del vuoto verrebbe ad essere  $\rho_{vac} \approx 10^{74} GeV^4$ , di  $10^{121}$  ordini di magnitudine maggiore rispetto al valore trovato osservativamente. La questione può essere migliorata considerando altre scale di cut-off o considerando teorie di supersimmetria che introducono particelle che possono far diminuire il valore di  $\rho_{vac}$ . Tuttavia non si riesce ad ottenere il valore osservato con nessuno di questi metodi, lasciando così il problema irrisolto.

### 2.1.4 Modelli di Campi Scalari di Energia Oscura

Abbiamo visto che il modello  $\Lambda$ CDM descrive l'energia oscura con un'equazione di stato  $w = -1$  che non cambia col tempo. Possiamo considerare modelli che vedono l'equazione di stato dell'energia oscura in maniera dinamica, ossia dipendente dal tempo. Un esempio di ciò è dato dai modelli di campi scalari per l'energia oscura come la Quintessenza e la K-essenza.

#### Quintessenza

La Quintessenza è una forma di energia oscura descritta come un campo scalare minimamente accoppiato con la gravità ma caratterizzato da un potenziale che produce un'inflazione negli ultimi tempi. L'azione caratterizzante la Quintessenza è data da:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right] \quad (2.13)$$

ove  $g$  è il determinante del tensore metrico  $g_{\mu\nu}$ ,  $\phi$  è il campo e  $V(\phi)$  il suo potenziale. Al livello del background il campo si comporta come un perfetto fluido caratterizzato da pressione e densità date rispettivamente da:

$$p = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (2.14)$$

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (2.15)$$

e l'equazione di stato che ne risulta è:

$$w_\phi = \frac{p}{\rho} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)} \quad (2.16)$$

Il requisito per avere un'accelerazione negli ultimi tempi corrisponde a  $w_\phi < -1/3$  e  $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ . Nella situazione di *slow-roll*, lento rotolamento, ove l'energia potenziale domina sull'energia cinetica, si ha che la Quintessenza assume un valore  $w \cong -1$ , ossia tende alla costante cosmologica. Bisogna quindi trovare un potenziale che possa essere in accordo con i risultati osservativi e che possa essere associato ad un determinato fenomeno fisico.

### K-essenza

È possibile considerare che l'accelerazione dell'Universo sorga da una modifica dell'energia cinetica del campo scalare. Questo scenario è stato proposto dai lavori di Chiba, et. al [8] sulla base di lavori di Armendariz-Picon et a., 1999 [3]. Tale scenario prende il nome di "K-essenza". Il campo scalare si presenta con un'energia cinetica non canonica e l'azione di questo campo scalare è data da:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} p(\phi, X) \quad (2.17)$$

ove  $X \equiv -(1/2)(\nabla\phi)^2$ . Il termine cinetico  $X$  gioca un ruolo fondamentale nell'equazione di stato di  $w_\phi$ . Tanti sono i modelli proposti per la forma di  $p(X)$  che hanno come obiettivo la risoluzione del problema della coincidenza dell'energia oscura; uno di questi è:

$$p(\phi, X) = f(\phi)(-X + X^2) \quad (2.18)$$

. per una pressione di tale forma, la densità di energia è:

$$\rho = 2X \frac{\partial p}{\partial X} - p = f(\phi)(-X + 3X^2) \quad (2.19)$$

questo porta ad un'equazione di stato:

$$w_\phi = \frac{p}{\rho} = \frac{1 - X}{1 - 3X} \quad (2.20)$$

e si ottiene l'equazione di stato della costante cosmologica ( $w_\phi = -1$ ) per  $X=1/2$ . Con  $X < 2/3$  abbiamo che l'equazione di stato è  $w_\phi < -1/3$ , condizione necessaria per spiegare l'accelerazione dell'Universo. Bisogna porre attenzione alla messa a punto per  $f(\phi)$  in modo tale che sia dell'ordine dell'attuale densità di energia dell'Universo.

## 2.2 Modelli di gravità modificata

Possiamo ottenere un'espansione accelerata dell'Universo andando o ad aggiungere una forma esotica di materia come la costante cosmologica o un campo scalare, oppure andando a modificare la geometria dell'Universo. I modelli di Gravità Modificata, come suggerisce il nome, si basano proprio sulla modifica della Relatività Generale, che porta ad un cambiamento della geometria.

### 2.2.1 Modello $f(R)$

Tanti meccanismi sono stati proposti per creare modelli alternativi, uno tra quelli più citati è il modello  $f(R)$  che alla base ha l'idea semplice di andare a modificare l'azione di Hilbert-Einstein andando a sostituire allo scalare di Ricci ( $R$ ) una funzione di questo ( $f(R)$ ). L'azione risulta essere:

$$S = \int d^x \sqrt{-g} f(R) \quad (2.21)$$

Un primo approccio potrebbe essere considerare un termine quadratico per  $R$  in quanto porterebbe ad una soluzione inflazionaria nell'universo primordiale [22]. Amendola, L. et al, 2007 [2] mostrano che tutte le teorie con  $f(R)$  data come potenza di  $R$  hanno un fattore di scala che, durante l'era dominata dalla materia, si evolve come  $a \propto t^{1/2}$  piuttosto che come  $a \propto t^{2/3}$ . Ma questo è incompatibile con le osservazioni cosmologiche. C'è, tuttavia, un altro approccio detto "formalismo di Palatini" che conduce a equazioni differenziali di secondo ordine con termini non lineari in  $R$ . In questo formalismo l'azione viene fatta variare rispetto alla metrica e alla connessione, che vengono trattate come variabili di campo indipendenti. Considerando l'azione di Einstein Hilbert, ma includendo anche funzioni non lineari dello scalare di Ricci, i due approcci portano ad equazioni di campo differenti. Sembrerebbe che il formalismo di Palatini, che fornisce equazioni di secondo ordine, sia privo di problemi di instabilità, tuttavia Flanagan E. [12] ha fatto notare che anche questo formalismo è affetto da problemi di instabilità.

### 2.2.2 Modello K-mouflage

Il modello K-mouflage è un meccansimo di gravità modificata che ha il vantaggio di ricondursi alla Relatività Generale su piccole scale, quali quelle del Sistema Solare, ove questa è stata ben testata. L'espansione accelerata dell'Universo sarebbe giustificata, quindi, da una modifica della gravità su grandi scale. Il modello è caratterizzato da un'azione della forma:

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[ \frac{\tilde{M}_{Pl}^2}{2} \tilde{R} + \tilde{\mathcal{L}}_\varphi(\varphi) \right] + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m(\psi_m^{(i)}, g_{\mu\nu}) \quad (2.22)$$

Questa coinvolge due metriche: il frame di Jordan,  $g_{\mu\nu}$  con determinante  $g$ , e il frame di Einstein  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  con determinante  $\tilde{g}$ . Indicheremo con la tilda le quantità date nel frame di Einstein per distinguerle da quelle date nel frame di Jordan.  $\mathcal{L}_m$  è la densità Lagrangiana,  $\psi_m^{(i)}$  sono i vari campi scalari,  $\tilde{M}_{Pl}$  è la massa di Planck e  $\tilde{\mathcal{L}}_\varphi$  è la densità Lagrangiana del campo scalare. Il frame di Einstein e il frame di Jordan sono collegati da una trasformazione conforme:

$$g_{\mu\nu} = A^2(\varphi) \tilde{g}_{\mu\nu} \quad (2.23)$$

ove  $A(\varphi)$  è la funzione di accoppiamento. Se le due metriche fossero uguali (ossia  $A(\varphi) = 1$ ) ci si ricondurrebbe ad uno scenario di Quintessenza con un campo scalare addizionale a quelli dati dalla materia e dalla radiazione. Il fatto che  $A(\varphi)$  sia diverso da 1 fa sì che venga fuori un accoppiamento tra materia e campo scalare. Nel frame di Einstein ritroviamo la Relatività Generale ma le equazioni del moto della materia non sono più quelle standard, ad esempio l'equazione di continuità mostrerà un termine sorgente e la densità di materia non sarà conservata. Nel frame di Jordan, invece, avremo che le equazioni del moto della materia saranno nella loro forma normale ma la gravità sarà modificata, le equazioni di Friedmann cambieranno.

Il modello K-mouflage è caratterizzato da una Lagrangiana con un termine cinetico non-standard:

$$\tilde{\mathcal{L}}_\varphi = \mathcal{M}^4 K(\tilde{\chi}), \quad \tilde{\chi} = -\frac{1}{2\mathcal{M}^4} \tilde{\nabla}^\mu \varphi \tilde{\nabla}_\mu \varphi \quad (2.24)$$

ove  $\tilde{\nabla}_\mu$  (e  $\nabla_\mu$ ) sono le derivate covarianti delle metriche  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  ( $g_{\mu\nu}$ ).  $\mathcal{M}^4$  è la scala di energia, è dell'ordine dell'energia oscura oggi e serve per ritrovare la recente espansione accelerata dell'Universo. Bisogna specificare la forma della funzione cinetica e vi sono diverse scelte che garantiscono la soddisfazione dei vincoli dati dalle osservazioni, il più importante è che a bassi redshift, nell'era dominata dall'energia oscura, il modello si riconduca al modello  $\Lambda$ CDM. La non-linearità della funzione cinetica gioca un ruolo importante ad alti redshift, ove l'energia oscura diventa subdominante. Per la funzione di accoppiamento consideriamo la forma esponenziale:

$$A(\varphi) = e^{\beta\varphi/M_{Pl}} \quad (2.25)$$

senza perdita di generalità questa viene normalizzata in modo che sia  $A_0 = A(a = 1) = 1$ .  $\beta$  viene definito accoppiamento:

$$\beta(a) = \tilde{M}_{Pl} \frac{d \ln A}{d\varphi} \quad (2.26)$$

I vincoli cosmologici e del Sistema Solare implicano che  $\beta \lesssim 0.1$  [4].

Per il lavoro che andremo a presentare conviene utilizzare il frame di Jordan, il tensore del momento dell'energia della materia è  $\nabla_\mu T_\nu^\mu = 0$  e quindi la densità di materia obbedisce alle equazioni di conservazione. Inoltre, per avere una descrizione completa per il nostro modello K-mouflage dobbiamo conoscere i seguenti parametri:  $\beta$ ,  $K_0$ ,  $m$ ,  $\mathcal{M}^4$  oltre ai soliti parametri cosmologici.

Ricordiamo brevemente qui le equazioni del moto che governano le dinamiche delle cosmologie nel modello K-mouflage nel frame di Jordan. L'equazione di Friedmann viene ad essere:

$$3M_{Pl}^2 H^2 (1 - \epsilon_2)^2 = \rho + \rho_{rad} + \rho_\varphi \quad (2.27)$$

con  $M_{Pl}$  massa di Planck,  $\rho(a)$  la densità di energia della materia,  $\rho_{rad}(a)$  la densità di energia della radiazione e  $\epsilon_2 = d \ln A / d \ln a$ . La densità di energia del campo scalare è data da:

$$\rho_\varphi = A^{-4} \mathcal{M}^4 (-K + 2\tilde{\chi} K') \quad (2.28)$$

ove

$$\tilde{\chi} = \frac{A^2}{2\mathcal{M}^4} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2$$

### Perturbazioni Lineari

Mostriamo i risultati di base per la teoria della perturbazione lineare nei modelli K-mouflage, con lo scopo di studiare la crescita delle perturbazioni di materia nel capitolo 5. Al livello perturbativo, le equazioni di Einstein possono essere studiate con il gauge Newtoniano, nell'approssimazione di livello lineare nelle fluttuazioni della metrica e della densità:

$$ds^2 = a^2 [-(1 + 2\Phi)d\eta^2 + (1 - 2\Psi)dx^2] \quad (2.29)$$

con  $\eta$  tempo conforme (alle volte indicato anche con  $\tau$ ). I due potenziali gravitazionali  $\Phi$  e  $\Psi$ , tuttavia sono differenti, ma in un limite non relativistico ( $\Phi \ll 1$ ,  $\Psi \ll 1$  e  $v^2 \ll 1$ ), su piccole scale ( $k^2/a^2 H^2 \ll 1$ ):

$$\Phi = (1 + \epsilon_1)\Psi_N; \quad \Psi = (1 - \epsilon_1)\Psi_N \quad (2.30)$$



ove  $\epsilon_1$  è definito come:

$$\epsilon_1 = \frac{2\beta^2}{K'} \quad (2.31)$$

e il potenziale Newtoniano nel frame di Jordan è dato da:

$$\frac{\nabla^2}{a^2} \Psi_N = \frac{\delta\rho}{2M_{Pl}^2} \quad (2.32)$$

Per quest'ultima equazione abbiamo usato l'assunzione che le fluttuazioni di densità di energia del campo scalare sono minori delle fluttuazioni di densità di energia della materia ( $\delta\rho_\varphi \ll \delta\rho$ ), nel limite di piccole scale. Inoltre, al livello lineare, gli effetti di screening compaiono attraverso il fattore  $\epsilon_1$  che misura la deviazione tra i due diversi potenziali. Quando  $\epsilon_1 \ll 1$ , non ci sono modifiche alla gravità e i due potenziali tendono a coincidere.

L'equazione di Continuità e di Eulero nel frame di Jordan diventano:

$$\frac{\partial\rho}{\partial\eta} + \nabla \cdot (\rho v) + 3\mathcal{H}\rho = 0 \quad (2.33)$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial\eta} + (v \cdot \nabla)v + \mathcal{H}v = -\nabla\Phi - \frac{\nabla p}{\rho} \quad (2.34)$$

Nel frame di Jordan queste due ultime equazioni assumono la stessa forma data nel modello  $\Lambda$ CDM e l'accoppiamento del campo scalare modifica solo l'equazione di Poisson:

$$\frac{1}{a^2} \nabla^2 \phi = \frac{\beta A}{K' M_{Pl}} \delta\rho \quad (2.35)$$

Per studiare le perturbazioni al livello lineare consideriamo piccole fluttuazioni nelle densità ( $\delta\rho = \rho - \bar{\rho}$ ) e nel campo scalare ( $\delta\varphi = \varphi - \bar{\varphi}$ ). Le perturbazioni del campo scalare e della densità di materia sono collegate tramite l'equazione di Klein-Gordon:

$$\frac{d}{dt} \left[ \tilde{a}^3 \frac{d\varphi}{dt} K' \right] = -\tilde{a}^3 \tilde{\rho} \frac{d \ln A}{d\varphi} \quad (2.36)$$

che diviene:

$$\frac{1}{a^3} \frac{\partial}{\partial t} \left( a^3 \frac{d\varphi}{dt} K' \right) - \frac{1}{a^2} \nabla \cdot (\nabla\varphi K') = -\frac{dA}{d\varphi} \rho_m \quad (2.37)$$

Linearizzando questa, le equazioni di Poisson, di Eulero e di Continuità e combinando i risultati, arriviamo ad ottenere l'equazione che descrive l'evoluzione per le fluttuazioni di materia (in funzione del contrasto di densità  $\delta = \delta\rho/\rho$ ) all'ordine lineare di perturbazione e su scale sotto l'orizzonte:

$$\frac{d^2\delta}{d(\ln a)^2} + \left( 2 + \frac{1}{H^2} \frac{dH}{dt} \right) \frac{d\delta}{d \ln a} - \frac{3}{2} \Omega_m (1 + \epsilon_1) \delta = 0 \quad (2.38)$$

Come vedremo anche per il caso  $\Lambda$ CDM, questa equazione ha due soluzioni: un modo di crescita e un modo di decadimento. Noi ci interesseremo alla soluzione di crescita. L'equazione del fattore di crescita lineare nel modello K-mouflage è indipendente dalla scala, infatti tutte le quantità in gioco dipendono solo dal tempo (tramite  $a(t)$ ). Questo deriva dal fatto che nella Lagrangiana del campo scalare non è stato incluso un potenziale  $V(\varphi)$ . L'unica differenza data col modello  $\Lambda$ CDM è dovuta alla presenza dei due fattori  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  (Nascosto nel parametro H) in particolare  $(1 + \epsilon_1)$  dà un'amplificazione dipendente dal tempo per il termine gravitazionale.



## Instabilità Gravitazionale

All'inizio del '900 Sir James Hopwood Jeans, astronomo, fisico e matematico britannico, cercando di comprendere il meccanismo alla base della formazione di stelle e pianeti pose le basi della teoria dell'instabilità gravitazionale. Il fenomeno di instabilità scoperto nell'evoluzione delle nubi di gas, in seguito definito come instabilità gravitazionale di Jeans, è alla base dei presenti modelli cosmologici che hanno lo scopo di spiegare la formazione delle galassie e delle strutture su grande scala. Jeans dimostrò che descrivendo l'Universo come un fluido omogeneo, isotropo e stazionario, piccole fluttuazioni della densità ( $\delta\rho$ ) e della velocità, ( $\delta v$ ) possono evolvere nel tempo. In particolare le piccole fluttuazioni di densità portano, col crescere del tempo, alla formazione di oggetti di piccola massa, i quali successivamente si aggregano per formare oggetti di dimensioni maggiori, secondo un processo detto "clustering gerarchico". Le fluttuazioni iniziali sono molto piccole,  $\delta \ll 1$ , e crescono in modo lineare; quando queste si avvicinano a valori  $\delta \sim 1$  si passa a regimi non lineari. Le forze di pressione in gioco non sono più in grado di controbilanciare la forza di auto-gravità e segue quindi il collasso gravitazionale del sistema che porta alla luce una struttura stabile in equilibrio viriale. Con il passare del tempo questa teoria si è evoluta, soprattutto a causa dei nuovi modelli cosmologici seguiti dalla scoperta di un Universo in espansione, nel quale le fluttuazioni evolvono con leggi di potenza e non più esponenzialmente. Lo studio dell'evoluzione delle perturbazioni richiede una trattazione notevolmente tecnica, tuttavia la teoria di Jeans può essere considerata come esempio semplificato. In vigore del fatto che l'Universo viene considerato come un fluido di materia e radiazione, è possibile utilizzare le equazioni dell'idrodinamica classica per descriverne la sua evoluzione. Iniziamo, per semplicità, con il mostrare le soluzioni che si ottengono assumendo un Universo statico per poi estendere il lavoro al caso di un Universo in espansione.

### 3.1 Teoria di Jeans per un Universo statico

Le equazioni che descrivono il moto di un fluido omogeneo, isotropo e stazionario sono, rispettivamente, l'equazione di Continuità, che esprime la conservazione della massa, l'equazione di Eulero, che esprime la conservazione dei momenti, l'equazione di Poisson, che relaziona il campo gravitazionale alla sua sorgente, e l'equazione di Continuità per l'Entropia, che descriva l'evoluzione temporale

dell'entropia):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} = 0 \quad (3.1a)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \phi = 0 \quad (3.1b)$$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad (3.1c)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} s = 0 \quad (3.1d)$$

Il limitarsi a sistemi adiabatici fa sì che la pressione  $p$  sia solo funzione della densità  $\rho$  e che  $\frac{\partial s}{\partial t} = 0$ . Il sistema (3.1) ammette la soluzione statica  $\rho = \rho_0$ ,  $\vec{v} = 0$ ,  $s = s_0$ ,  $p = p_0$ ,  $\vec{\nabla} \phi = 0$ . Tale risultato, tuttavia, è in contrasto con l'equazione di Poisson. Quest'ultima infatti non può essere risolta richiedendo che siano valide contemporaneamente  $\rho_0 \neq 0$  e  $\phi = \text{cost}$ . Questo si spiega con il fatto che non possiamo avere una condizione statica per il fluido, alla perturbazione deve seguire un collasso gravitazionale o un'espansione. Ciononostante è utile studiare l'eventuale presenza di soluzioni che rappresentino delle piccole perturbazioni della soluzione imperturbata, soluzioni del tipo:

$$\rho = \rho_0 + \delta \rho \quad (3.2a)$$

$$\vec{v} = \delta \vec{v} \quad (3.2b)$$

$$p = p_0 + \delta p \quad (3.2c)$$

$$s = s_0 + \delta s \quad (3.2d)$$

$$\phi = \phi_0 + \delta \phi \quad (3.2e)$$

Imponendo tali soluzioni nel sistema (3.1) e trascurando gli ordini superiori si trova:

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \delta \vec{v} = 0 \quad (3.3a)$$

$$\frac{\partial \delta \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \vec{\nabla} \delta \rho + \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \vec{\nabla} \delta s + \vec{\nabla} \delta \phi = 0 \quad (3.3b)$$

$$\nabla^2 \delta \phi = 4\pi G \delta \rho \quad (3.3c)$$

$$\frac{\partial \delta s}{\partial t} = 0 \quad (3.3d)$$

Dato questo sistema, si cercano soluzioni del tipo di onde piane (questo equivale a passare allo spazio di Fourier) della forma:

$$f(\vec{r}, t) = f_k \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)} \quad (3.4)$$

con  $\vec{k}$  vettore d'onda,  $\vec{r}$  vettore posizione,  $\omega$  pulsazione e  $f_k$  ampiezza dell'onda (indipendente da  $t$  e da  $\vec{r}$ ). Definiamo inoltre  $\delta_0 = \delta \rho_k / \rho_0$ . Le soluzioni del sistema saranno del tipo:

$$\delta \rho(\vec{r}, t) = \delta_{\rho, k} \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)} \quad (3.5a)$$

$$\delta v(\vec{r}, t) = \delta_{v, k} \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)} \quad (3.5b)$$

$$\delta\phi(\vec{r}, t) = \delta_{\phi,k} \cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}+\omega t)} \quad (3.5c)$$

ove con  $\delta_{\rho,k}$ ,  $\delta_{v,k}$ ,  $\delta_{\phi,k}$  e  $\delta_{s,k}$  intendiamo le ampiezze rispettive. Sostituendo queste nel sistema (3.3) e svolgendo i conti si ottiene la cosiddetta Relazione di Dispersione:

$$\omega^2 = k^2 v_s^2 - 4\pi G \rho_0 \quad (3.6)$$

ove  $v_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$  è la velocità del suono. Questa relazione descrive oscillazioni o instabilità nel fluido a seconda del segno di  $\omega^2$ . Per  $\omega^2 = 0$  si determina la lunghezza d'onda di Jeans  $\lambda_J$ :

$$\lambda_J = v_s \sqrt{\frac{\pi}{G \rho_0}} \quad (3.7)$$

che consente di separare i due regimi.

- Nel caso in cui  $\omega^2 > 0$ , ossia  $\lambda < \lambda_J$ , la pulsazione  $\omega$  è reale ( $\omega \in \mathbb{R}$ ):

$$\omega = \pm v_s k \left[ 1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_J} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.8)$$

Le soluzioni descrivono due onde sonore piane che si propagano nelle direzioni  $\pm k$  con forma:

$$\frac{\delta\rho}{\rho_0} = \delta_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} \pm |\omega|t)} \quad (3.9a)$$

$$\delta\vec{v} = \mp \frac{\vec{k}}{k} v_s \delta_0 \left[ 1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_J} \right)^2 \right]^{1/2} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} \pm |\omega|t)} \quad (3.9b)$$

$$\delta\phi = -\delta_0 v_s^2 \left( \frac{\lambda}{\lambda_J} \right)^2 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} \pm |\omega|t)} \quad (3.9c)$$

- Nel caso in cui  $\omega^2 < 0$ , ossia  $\lambda > \lambda_J$ , la pulsazione è immaginaria ( $\omega \in \mathbb{C}$ ):

$$\omega = \pm i(4\pi G \rho_0)^{1/2} \left[ 1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_J} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.10)$$

Le soluzioni sono oscillazioni che non si propagano, sono dunque onde stazionarie di ampiezza crescente o decrescente con un tempo caratteristico  $\tau = |\omega|^{-1}$ .

$$\frac{\delta\rho}{\rho_0} = \delta_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r})} e^{(\pm|\omega|t)} \quad (3.11a)$$

$$\delta\vec{v} = \mp \frac{\vec{k}\omega}{k} v_s \delta_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r})} e^{(\pm|\omega|t)} \quad (3.11b)$$

$$\delta\phi = -\delta_0 v_s^2 \left( \frac{\lambda}{\lambda_J} \right)^2 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}+\pi)} e^{(\pm|\omega|t)} \quad (3.11c)$$

Soluzioni di questo tipo mostrano il fenomeno dell'instabilità gravitazionale o di Jeans. Questo mostra come un Universo statico, approssimato come un fluido omogeneo e isotropo, si trovi in una condizione di instabilità.

Facendo delle semplici considerazioni qualitative possiamo comprendere maggiormente il significato fisico di  $\lambda_J$ . Consideriamo una regione sferica di raggio  $\lambda$  e partiamo con il caso  $\lambda \gg \lambda_J$ . Se la forza di autogravitazione ( $F_{grav}$ ) prevale sulla forza di pressione ( $F_p$ ) l'ampiezza della fluttuazione crescerà col tempo:

$$F_g \simeq G\rho\lambda > F_p \simeq \frac{p}{\rho\lambda} \simeq \frac{v_s^2}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda > \frac{v_s}{\sqrt{G\rho}} \simeq \lambda_J \quad (3.12)$$

Per cui  $\lambda_J$  definisce la scala oltre la quale si ha il collasso gravitazionale. Lo stesso risultato può esser ricavato partendo con l'ipotesi che valga il viceversa, in questo caso si avrà la semplice propagazione di un'onda sonora di lunghezza d'onda  $\lambda$ , poichè prevarrà la forza di pressione.

## 3.2 Teoria di Jeans per un Universo in Espansione

Passando alla trattazione per un Universo in espansione bisogna considerare la variazione di velocità del fluido. La strategia da seguire resta identica al caso statico, vengono introdotte ed analizzate piccole perturbazioni. Tuttavia, la trattazione diviene complicata a causa della presenza di un ulteriore componente della velocità che si aggiunge a quella peculiare. Andiamo a modificare le equazioni del sistema (3.3) definendo le quantità già introdotte in funzione del fattore di scala  $a(t)$ :

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 \quad (3.13a)$$

$$\vec{v} = \frac{\dot{a}}{a} \vec{r} \quad (3.13b)$$

$$\phi = \frac{2}{3} \pi G \rho r^2 \quad (3.13c)$$

$$p = p(\rho, S) \quad (3.13d)$$

$$s = cost \quad (3.13e)$$

$\vec{r}$  è una quantità fisica legata alla coordinata comovente  $\vec{r}_0$  :

$$\vec{r} = \vec{r}_0 \frac{a}{a_0} \quad (3.14)$$

Cerchiamo ancora soluzioni del tipo di onde piane, della forma:  $\delta f = f_k(t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r})$ . Tuttavia le ampiezze  $f_k(t)$  saranno dipendenti dal tempo, mentre il prodotto scalare  $\vec{k} \cdot \vec{r}$  risulta non dipendere dal tempo in quanto  $k$  varia come:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi a_0}{\lambda_0 a} = k_0 \frac{a_0}{a} \quad (3.15)$$

Agendo come fatto nel precedente caso, ma ricordando che i coefficienti dipendono dal tempo e trascurando i termini del second'ordine, otteniamo:

$$\dot{\delta}_{\rho,k} + 3\frac{\dot{a}}{a}\delta_{\rho,k} + i\vec{v} \cdot \vec{k}\delta_{\rho,k} + i\rho\vec{k} \cdot \delta_{v,k} \quad (3.16a)$$

$$\dot{\delta}_{v,k} + \frac{\dot{a}}{a}\delta_{v,k} + i\vec{v} \cdot \vec{k}\delta_{v,k} + iv_s^2 \vec{k} \frac{\delta_{\rho,k}}{\rho} + i\frac{\vec{k}}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_{\rho} \delta_{s,k} + i\vec{k}\delta_{\phi,k} \quad (3.16b)$$

$$k^2\delta_{\phi,k} + 4\pi G\delta_{\rho,k} = 0 \quad (3.16c)$$

$$\dot{\delta}_{s,k} + i\vec{v} \cdot \vec{k}\delta_{s,k} = 0 \quad (3.16d)$$

Le soluzioni di maggior interesse sono le soluzioni longitudinali ed adiabatiche, ossia parallele a  $\vec{k}$  e con  $\delta_{s,k} = 0$ , allora il sistema (3.16) diventa:

$$\dot{\delta}_{\rho,k} + 3\frac{\dot{a}}{a}\delta_{\rho,k} + i\rho\vec{k}\delta_{v,k} = 0 \quad (3.17a)$$

$$\dot{\delta}_{v,k} + \frac{\dot{a}}{a}\delta_{v,k} + i\vec{k} \left( v_s^2 - \frac{4\pi G\rho}{k^2} \right) \frac{\delta_{\rho,k}}{\rho} = 0 \quad (3.17b)$$

$$\dot{\delta}_{s,k} = 0 \quad (3.17c)$$

$$\delta_{\phi,k} = -\frac{4\pi G\delta_{\rho,k}}{k^2} \quad (3.17d)$$

Si tratta ora di ricondurci ad un'unica equazione ponendo particolare attenzione alle fluttuazioni di densità. Ponendo nella (3.17a)  $\delta = \delta_{\rho,k}/\rho$  ( $\delta =$  contrasto di densità) si ha:

$$\dot{\delta} + ik\delta_{v,k} = 0 \quad (3.18)$$

derivando ulteriormente si ottiene:

$$\ddot{\delta} + ik \left( \dot{\delta}_{v,k} - \frac{\dot{a}}{a}\delta_{v,k} \right) = 0 \quad (3.19)$$

Inserendo queste due ultime relazioni ottenute nella (3.17b) si ottiene:

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} + (v_s^2 k^2 - 4\pi G\rho)\delta = 0 \quad (3.20)$$

La (3.20) rappresenta l'evoluzione newtoniana delle disomogeneità del campo di densità, è un'equazione in funzione non più di  $\omega$  ma di  $\delta$ . Risolvendola otteniamo, come per il caso statico, una soluzione oscillante per  $\lambda < \lambda_J$  ed una soluzione che presenta l'instabilità gravitazionale per  $\lambda > \lambda_J$ . La differenza sostanziale dal caso statico è che ora le fluttuazioni crescono con una legge di potenza piuttosto che esponenzialmente. Le soluzioni della (3.20) dipendono dal modello di Universo considerato. Considerando il modello di Einstein-de Sitter per il quale valgono le seguenti relazioni:

$$a(t) = a_0 \left( \frac{t}{t_0} \right)^{2/3} \quad (3.21a)$$

$$\rho = \frac{\rho_0}{a^3} = \frac{1}{6\pi G t^2} \quad (3.21b)$$

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t} \quad (3.21c)$$

Sostituendo queste relazioni nella (3.20) si ottiene:

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3t}\dot{\delta} - \frac{2}{3t^2} \left( 1 - \frac{v_s^2 k^2}{4\pi G\rho} \right) \delta = 0 \quad (3.22)$$

Cerchiamo per quest'equazione differenziale soluzioni del tipo  $\delta = \delta_0 t^n$  ed otteniamo la seguente relazione di dispersione:

$$3n^2 + n + 2 \left( \frac{v_s^2 k^2}{4\pi G \rho} - 1 \right) = 0 \quad (3.23)$$

Il tipo di soluzione dipende dal segno del discriminante di questa ed il valore che serve da divisore è la lunghezza d'onda di Jeans:

$$\lambda'_J = \frac{v_s}{5} \sqrt{\frac{24\pi}{G\rho}} \quad (3.24)$$

Distinguiamo quindi i due casi:

- $\lambda > \lambda'_J$  : Il discriminante della (3.23) è maggiore di zero e dunque le soluzioni sono reali. Si presenta il fenomeno dell'instabilità gravitazionale, con un andamento del campo di densità del tipo:

$$\delta_{\pm}(\vec{x}, t) \propto \delta_k(t) \pm e^{(i\vec{k}\cdot\vec{x})} t^{(-1 \pm \sqrt{1 - (\lambda'_J/\lambda)^2})/6} \quad (3.25)$$

se  $\lambda \gg \lambda'_J$  allora si ha:

$$\delta_{\pm}(\vec{x}, t) \propto e^{(i\vec{k}\cdot\vec{x})} t^{(-1 \pm 5)/6} \quad (3.26)$$

Le due soluzioni identificano rispettivamente i modi crescente e decrescente della perturbazione; a noi interessa solo quella positiva che garantisce l'amplificazione della fluttuazione col trascorrere del tempo:

$$\delta_+(t) \propto t^{2/3} = a \quad (3.27)$$

Per cui la crescita di una perturbazione, in un Universo di Einstein-de Sitter, è solo algebrica e non esponenziale come ottenuto nel caso statico della teoria di Jeans.

- $\lambda < \lambda'_J$  : Il discriminante della (3.23) è minore di zero, le soluzioni sono immaginarie e rappresentano soluzioni oscillanti con campo di densità:

$$\delta_{\pm}(\vec{x}, t) \propto t^{-1/6} e^{(i\vec{k}\cdot\vec{x})} e^{(\pm \frac{5i}{6} \sqrt{(\lambda'_J/\lambda)^2 - 1}) \cdot \ln t} \quad (3.28)$$

Come vedremo nella sezione successiva, l'introduzione di una componente diversa dalla materia, detta Energia Oscura, porterà ad un allontanamento dalla condizione di linearità qui trovata.



## Perturbazioni di Materia Oscura

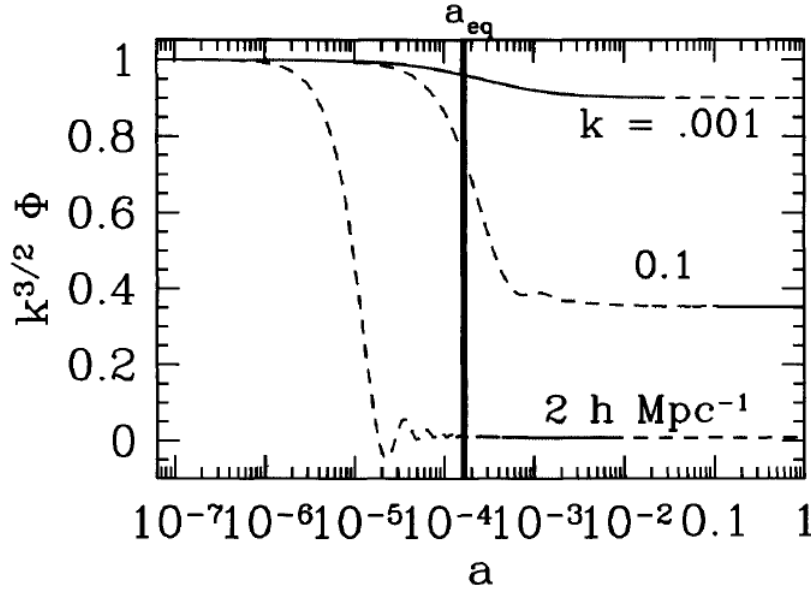
In questo capitolo ci occupiamo dell'evoluzione delle perturbazioni di materia seguendo lo schema ed il formalismo illustrato nel libro *Modern Cosmology* di Scott Dodelson [11]. La formazione delle strutture nell'Universo è generata dalle perturbazioni della densità di materia estese a scale cosmologiche dall'inflazione e si spiega attraverso l'evoluzione lineare del contrasto di densità di materia  $\delta$  (definito come  $\delta = \delta\rho/\rho$ ) che raggiunge il valore di circa 1 partendo da condizioni iniziali di isotropia. Quando diviene sufficientemente maggiore di 1, il regime lineare viene abbandonato e le perturbazioni diventano non lineari ma il loro studio diviene molto più complicato, perciò per i nostri scopi non andremo oltre il regime lineare. In questo capitolo vogliamo mostrare come si comportano le perturbazioni di materia nel caso in cui la componente a dominare sia la *Dark Matter* piuttosto che la materia barionica. Abbiamo già visto, con la teoria di Jeans, come l'instabilità gravitazionale porti alla formazione di strutture nel nostro Universo. L'idea è che, con il passare del tempo, vengano a crearsi regioni in cui la materia si va addensando. Queste regioni, indipendentemente dalla loro grandezza, iniziano ad attirare gravitazionalmente ulteriore materia, divenendo sempre più grandi fino a formare le strutture che poi sono evolute fino a divenire le galassie e gli ammassi che conosciamo oggi. Vedremo come queste instabilità gravitazionali crescano in maniera diversa considerando diversi ambienti cosmologici. In particolare, troveremo che in un Universo dominato da materia la crescita è proporzionale a una potenza del tempo, mentre in un Universo dominato da radiazione la crescita è logaritmica. L'evoluzione delle perturbazioni può essere suddivisa in tre parti, come mostrato in figura 4.1. Precisiamo innanzitutto che stiamo considerando le perturbazioni nello spazio di Fourier, perciò questo semplifica lo studio matematico, in particolare avremo:

$$\delta(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (4.1)$$

con:

$$\delta_{\vec{k}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} dx \in \mathbb{C} \quad (4.2)$$

ciascuno dei termini della somma in (4.1) è chiamato modo di Fourier. Un modo corrisponde, in generale, alla parte spaziale della lunghezza d'onda, quindi ad ogni numero d'onda  $k$  vedremo associato un modo. In figura 4.1 viene riportata l'evoluzione



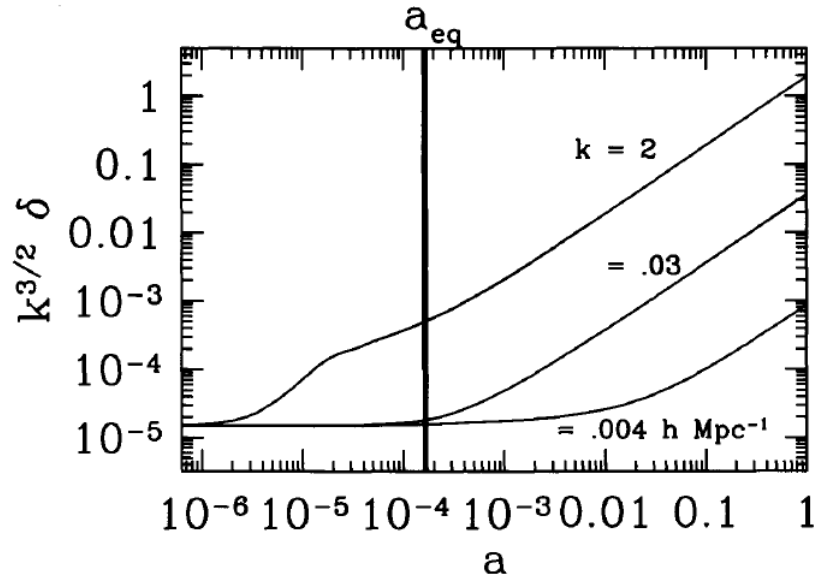
**Figura 4.1:** Evoluzione lineare del potenziale gravitazionale. Le linee tratteggiate denotano l'entrata in orizzonte dei modi (da Dodelson, 2003 [11])

del potenziale gravitazionale in funzione del fattore di scala per modi con lunghezze d'onda piccole, medie e grandi. Nei tempi iniziali tutti e tre i modi sono fuori dall'orizzonte cosmologico (ossia  $k\eta \ll 1$  ove  $\eta$  è il tempo conforme  $\eta = \int \frac{dt}{a(t)}$ ), segue poi un periodo intermedio in cui questi attraversano l'orizzonte e l'Universo passa dall'epoca dominata dalla radiazione all'epoca dominata dalla materia. L'ultimo periodo vede i potenziali dei tre modi evolvere in maniera costante in egual maniera. Per Orizzonte Cosmologico intendiamo la distanza che hanno percorso i fotoni dal Big Bang fino ad un certo tempo  $t_0$  che dipende dall'epoca considerata. Possiamo definire il potenziale che osserviamo oggi come:

$$\Phi(\vec{k}, a) = \Phi_p(\vec{k}) \times (T(k)) \times (D(a)) \quad (4.3)$$

ove  $\Phi_p(\vec{k})$  è il potenziale primordiale.  $T(k)$  rappresenta la funzione di Trasferimento e descrive l'evoluzione del potenziale nell'attraversamento dell'orizzonte e nel passaggio dall'era dominata dalla radiazione all'era dominata dalla materia.  $D(a)$  è la funzione di Crescita e descrive la crescita del potenziale in funzione del tempo. Notiamo in figura 4.1 che anche le perturbazioni su grandi scale presentano una leggera diminuzione del potenziale nell'attraversamento dall'epoca dominata dalla radiazione a quello dominato dalla materia. Tuttavia questa diminuzione viene convenzionalmente rimossa cosicchè la funzione di Trasferimento assume un valore pari ad 1 per i modi a grande scala. Questa scelta deriva dal fatto che sopra l'orizzonte cosmologico non è detto che due eventi siano entrati in contatto causale. Questo porterebbe ad una situazione "congelata" in quanto nessuna forza esterna, oltre la semplice espansione del background, è intervenuta, per cui si sono preservate le condizioni iniziali. La funzione di Trasferimento è definita come:

$$T(k) \equiv \frac{\Phi(k, a_{late})}{\Phi_{large-scale}(k, a_{late})} \quad (4.4)$$



**Figura 4.2:** Evoluzione delle perturbazioni di materia oscura dello stesso modello mostrato in figura 4.1 (da Dodelson, 2003 [11])

ove  $a_{late}$  indica un tempo molto in avanti rispetto l'epoca della transizione. Definiamo poi la funzione di crescita  $D_1(a)$  in funzione del potenziale gravitazionale:

$$\frac{\Phi(a)}{\Phi(a_{late})} \equiv \frac{D_1(a)}{a} \quad (a > a_{late}) \quad (4.5)$$

Mostriamo in figura 4.2 l'evoluzione del contrasto di densità in funzione del fattore di scala per i tre modi (grande, media e piccola scala). Notiamo che negli ultimi istanti, a cui corrisponde un potenziale costante, abbiamo una crescita lineare:  $a \propto \delta$ . Quindi ben dopo l'epoca dell'equivalenza, tutti i modi entrati in orizzonte evolvono identicamente e nel caso di Universo dominato da materia scalano con un fattore di crescita proporzionale al fattore di scala.

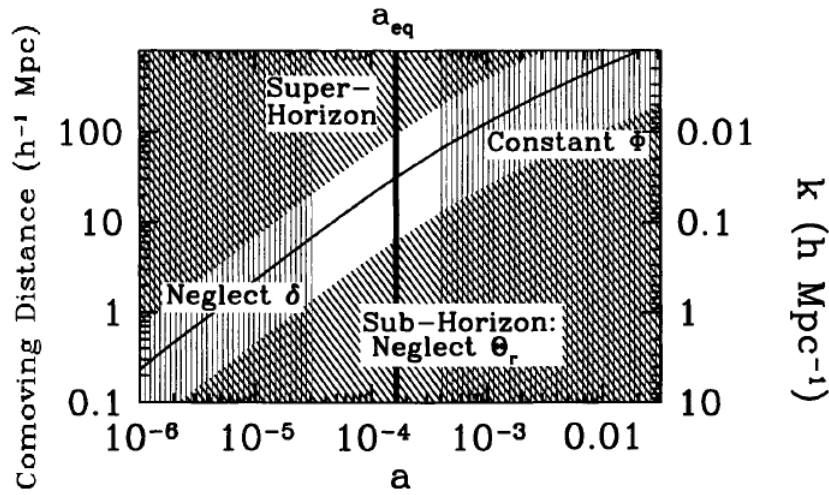
Il punto di partenza per la nostra analisi è dato dal set di equazioni di Boltzmann, che qui non deriveremo. Consideriamo tutti i momenti trascurabili eccetto il momento di monopolo  $\dot{\Theta}_{r,0}$  ed il momento di dipolo  $\dot{\Theta}_{r,1}$  per ottenere una completa descrizione della distribuzione dei fotoni. Sebbene, infatti, nell'epoca dopo il disaccoppiamento i fotoni smettano di essere accoppiati agli elettroni ed ai protoni, e quindi servano i momenti alti che ci diano l'esatta distribuzione dei fotoni, dopo l'epoca dell'equivalenza sono irrilevanti in quanto il potenziale è dominato dalla materia oscura. Le equazioni di Boltzmann quindi, con queste assunzioni, diventano:

$$\dot{\Theta}_{r,0} + \dot{\Theta}_{r,1} = -\Phi \quad (4.6a)$$

$$\dot{\Theta}_{r,1} - \frac{k}{3}\dot{\Theta}_{r,0} = \frac{-k}{3}\Phi \quad (4.6b)$$

$$\dot{\delta} + ikv = -3\dot{\Phi} \quad (4.6c)$$

$$\dot{v} + \frac{\dot{a}}{a}v = ik\Phi \quad (4.6d)$$



**Figura 4.3:** Schema della funzione di Transizione. La curva continua crescente rappresenta l'orizzonte comoviente. Le zone ombreggiate mostrano dove esiste una soluzione analitica, il gap bianco, invece, dove non ve ne sono (da Dodelson, 2003 [11])

(Il puntino in questo capitolo andrà ad indicare la derivata fatta rispetto al tempo conforme  $\eta$ ) Questo sistema va affiancato da delle equazioni per il potenziale  $\Phi$ , una è la componente tempo-tempo dell'equazione di Einstein:

$$k^2\Phi + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\dot{\Phi} + \frac{\dot{a}}{a}\Phi\right) = 4\pi G a^2[\rho_{dm}\delta + 4\rho_r\Theta_{r,0}] \quad (4.7)$$

ove stiamo trascurando il contributo dato dai barioni in quanto la loro densità è molto più piccola di quella data dalla materia ( $\rho_{dm}$ ). L'altra equazione che può esserci d'aiuto è l'equazione di Einstein nella forma algebrica, ossia senza derivate temporali:

$$k^2\Phi = 4\pi G a^2 \left[ \rho_{dm}\delta + 4\rho_r\Theta_{r,0} + \frac{3aH}{k} (i\rho_{dm}v + 4\rho_r\Theta_{r,1}) \right] \quad (4.8)$$

Tra queste due ultime equazioni ne servirà solo una per chiudere il set di equazioni per le variabili  $\delta$ ,  $v$ ,  $\Theta_{r,0}$ ,  $\Theta_{r,1}$  e  $\Phi$ .

Non è possibile ottenere una soluzione analitica per la densità di materia oscura valida su tutte le scale. Dovremo suddividere il problema considerando certe scale in certi periodi di tempo, così da ridurre il set di 5 equazioni ad un set di 2/3 equazioni più maneggevole. Considereremo quindi scale più grandi dell'orizzonte (*Super-Horizon*), il caso di scale molto più piccole dell'orizzonte (*Sub-Horizon*) e le scale che ne descrivono il passaggio intermedio (*Horizon-Crossing*).

## 4.1 Grandi Scale

Partiamo dallo studio delle perturbazioni su grande scala. Gli step da seguire per trovare una soluzione analitica sono: lo studio attraverso la transizione dall'era dominata da radiazione in quella dominata da materia e poi l'attraversamento dell'orizzonte.

### 4.1.1 Soluzioni Sopra l'Orizzonte

Per i modi che sono fuori dall'orizzonte abbiamo  $k\eta \ll 1$ , possiamo quindi trascurare tutti i termini dipendenti da  $k$  dal nostro set di equazioni (6.4). Questo riduce il sistema a 2 equazioni in quanto vediamo che  $v$  e  $\Theta_{r,1}$  si disaccoppiano. Consideriamo poi l'equazione (6.7) per chiudere il sistema:

$$\dot{\Theta}_{r,0} = -\dot{\Phi} \quad (4.9a)$$

$$\dot{\delta} = -3\dot{\Phi} \quad (4.9b)$$

$$3\frac{\dot{a}}{a} \left( \dot{\Phi} + \frac{\dot{a}}{a}\Phi \right) = 4\pi G a^2 [\rho_{dm}\delta + 4\rho_r\Theta_{r,0}] \quad (4.9c)$$

Notando che le prime due equazioni richiedono  $\delta - 3\Theta_{r,0} = \text{costante}$ , impostiamo che in condizione iniziale questa differenza sia 0, ossia  $\delta = 3\Theta_{r,0}$ . Usando poi il cambio di variabile:

$$y \equiv \frac{a}{a_{eq}} = \frac{\rho_{dm}}{\rho_r} \quad (4.10)$$

otteniamo che l'equazione (4.9c) diventa:

$$3\frac{\dot{a}}{a} \left( \dot{\Phi} + \frac{\dot{a}}{a}\Phi \right) = 4\pi G a^2 \rho_{dm}\delta \left( 1 + \frac{4}{3y} \right) \quad (4.11)$$

La derivata rispetto  $\eta$  ( $d\eta = dt/a$ ) è collegata a quella rispetto  $y$  da:

$$\frac{d}{d\eta} = \frac{dy}{d\eta} \frac{d}{dy} = \frac{d(a/a_{eq})}{dt} a \frac{d}{dy} = \frac{a}{a_{eq}} \frac{da}{dt} \frac{d}{dy} = y\dot{a} \frac{d}{dy} = yH a \frac{d}{dy} \quad (4.12)$$

Ove l'ultima uguaglianza si ottiene moltiplicando e dividendo per  $a$ . La strategia da seguire ora è quella di considerare l'equazione (1.9b) e l'equazione (1.11) che sono due equazioni di primo grado per  $\delta$  e  $\Phi$  ed ottenere da queste un'equazione di secondo grado per  $\Phi$ . Ciò che otteniamo è:

$$\Phi'' + \frac{21y^2 + 54y + 32}{2y(y+1)(3y+4)}\Phi' + \frac{\Phi}{y(y+1)(3y+4)} = 0 \quad (4.13)$$

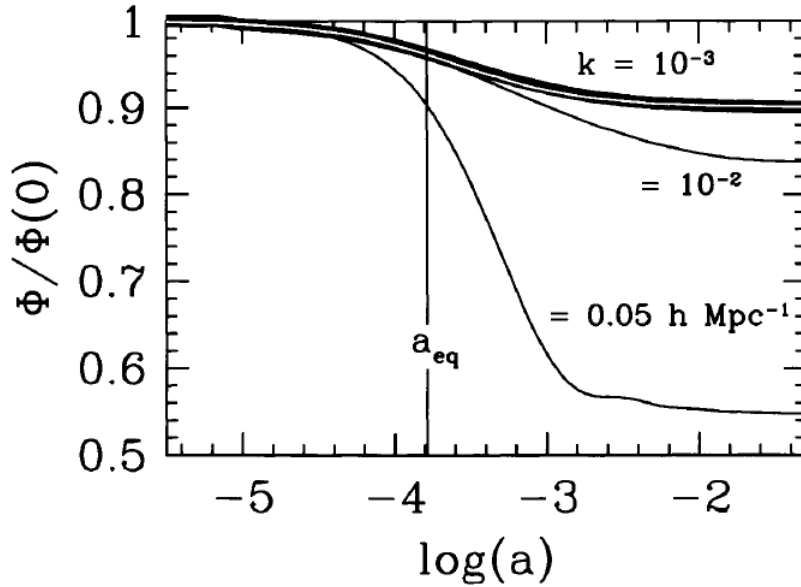
Quest'equazione è risolvibile analiticamente. Ad esempio Remarkably, Kodama e Sasaki (1984) introducendo una nuova variabile:

$$u \equiv \frac{y^3}{\sqrt{1+y}}\Phi \quad (4.14)$$

hanno ottenuto come soluzione (passando attraverso due integrazioni e riportando tutto in funzione di  $y$ ):

$$\Phi = \frac{\Phi(0)}{10} \frac{1}{y^3} \left[ 16\sqrt{1+y} + 9y^3 + 2y^2 - 8y - 16 \right] \quad (4.15)$$

Questa è l'espressione finale del potenziale per le scale sopra l'orizzonte. Per piccoli valori di  $y$  otteniamo che il potenziale è una costante,  $\Phi = \Phi(0)$ , mentre per valori grandi di  $y$  il termine cubico di  $y$  in parentesi domina ed otteniamo che il  $\Phi$  tende a  $(9/10)\Phi(0)$ . Questo mostra che il potenziale su grandi scale diminuisce del 10% quando si passa dall'era dominata dalla radiazione all'era dominata dalla materia. Notiamo che il potenziale, su grandi scale, è costante sia prima che dopo l'equivalenza ma la transizione tra le due epoche risulta molto lunga. Il potenziale, infatti, si stabilizza solo vicino ad  $a \cong 10^{-3}$ .



**Figura 4.4:** Soluzione dell'evoluzione del potenziale in un modello *Cold Dark Matter*. Per grandi scale ( $k=0.001h \text{ Mpc}^{-1}$ ) vediamo che la soluzione (7.30) funziona perfettamente, anzi otteniamo che è una buona approssimazione anche per scale con  $k=0.01h \text{ Mpc}^{-1}$  (da Dodelson, 2003 [11])

#### 4.1.2 Attraversamento dell'Orizzonte Cosmologico

Dalla figura 4.4 possiamo osservare che il potenziale resta costante quando il modo attraversa l'orizzonte. Per il modo con  $k = 10^{-3}$  questo avviene ad  $a \approx 0.03$ . Vogliamo dimostrare, avvalendoci del nostro sistema di equazioni, che quest'affermazione è vera. Come condizione iniziale abbiamo che il potenziale, su scale oltre l'orizzonte nell'era dominata dalla materia, è costante. Con  $\Phi = \text{const.} \Rightarrow \dot{\Phi} = 0$ , il set di equazioni che abbiamo diventa:

$$\dot{\delta} + ikv = 0 \quad (4.16a)$$

$$\dot{v} + aHv = ik\Phi \quad (4.16b)$$

$$k^2\Phi = \frac{3}{2}a^2H^2 \left[ \delta + \frac{3aHiv}{k} \right] \quad (4.16c)$$

Avendo preso l'equazione (4.8), trascurando la radiazione e ricordando che  $H^2 = (8/3)\pi G\rho_m$ . Possiamo usare l'equazione (4.16c) per ricavare  $\delta$  così da inserirla nell'equazione (4.16a). Notiamo che nell'era dominata dalla materia  $H \propto a^{-3/2}$ , allora abbiamo:

$$\frac{d(aH)}{d\eta} = \frac{d(a \cdot a^{-3/2})}{d\eta} = \frac{d(a^{-1/2})}{d\eta} = -\frac{1}{2}a^{-3/2}\dot{a} = -\frac{1}{2}a^2H^2$$

in quanto  $\dot{a} = a^2H$ . La  $\delta$  che ricaviamo dalla (4.16c) è:

$$\delta = \frac{2k^2\Phi}{3a^2H^2} + \frac{3aHiv}{k}$$

che sostituita nella (4.16a) porta:

$$\frac{2k^2\dot{\Phi}}{3a^2H^2} + \frac{2k^2\Phi}{3aH} - \frac{3aHiv}{k} + \frac{3a^2H^2iv}{k} + ikv = 0 \quad (4.17)$$

Condiderando quest'ultima equazione ottenuta e la (4.16b): abbiamo due equazioni del primo ordine per  $\Phi$  e per  $v$ . Vogliamo, come nel caso precedente, ottenere un'equazione del secondo ordine per il potenziale a partire da queste. Per prima cosa eliminiamo la derivata di  $v$  dalla (4.17) usando proprio la(4.16b):

$$\begin{aligned} \dot{v} &= ik\Phi - aHv \\ \frac{2k^2\dot{\Phi}}{3a^2H^2} + \frac{2k^2\Phi}{3aH} + 3aH\Phi + \frac{3a^2H^2iv}{k} + \frac{3a^2H^2iv}{2k} + ikv &= 0 \\ \frac{2k^2\dot{\Phi}}{3a^2H^2} + \left[ \frac{iv}{k} + \frac{2\Phi}{3aH} \right] \left( \frac{9a^2H^2}{2} + k^2 \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

differenziando quest'equazione otteniamo una EDO di secondo ordine della forma:  $\alpha\ddot{\Phi} + \beta\dot{\Phi} = 0$ . Non essendoci termini proporzionali a  $\Phi$  risulta che una soluzione è  $\Phi=\text{costante}$ . Differenziando quindi la (4.18) e considerando solo i termini proporzionali alle derivate di  $\Phi$  otteniamo:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{iv}{k} + \frac{\Phi}{3} \right] \left( \frac{9a^2H^2}{2} + k^2 \right) + \left[ \frac{iv}{k} + \frac{2\Phi}{3aH} \right] \frac{d}{d\eta} \left( \frac{9a^2H^2}{2} \right) &= \\ = - \left[ \frac{aHiv}{k} + \frac{2\Phi}{3} \right] (9a^2H^2 + k^2) & \end{aligned} \quad (4.19)$$

Vediamo dall'equazione (4.18) che i termini in parentesi quadra nella (4.19) sono proporzionali a  $\dot{\Phi}$ . Non essendoci termini nell'equazione di secondo grado proporzionali a  $\Phi$  abbiamo che una soluzione risulta proprio  $\Phi = \text{costante}$ . Il potenziale resta costante fin tanto che l'Universo resta dominato dalla materia. Nel momento in cui negli ultimi tempi subentra, ad esempio, come fattore dominante l'energia oscura, il potenziale decade e questo decadimento viene descritto dalla funzione di crescita. Riassumendo quanto visto in questa sezione abbiamo che la funzione di trasferimento è molto vicina all'unità per i modi la cui scala entra in orizzonte ben dopo l'equivalenza. Su grandi scale si ha un passaggio dall'epoca dominata della radiazione a quella della materia. Questo si traduce per il potenziale col passaggio da un certo valore costante, ad una costante pari ai 9/10 del valore iniziale. Ottenuta l'espressione per il potenziale è possibile poi ricavare un'espressione per le fluttuazioni di densità  $\rho$  così da poter derivare lo spettro di Potenza  $P(k)$ .

## 4.2 Piccole Scale

Passando allo studio di modi su piccole scale vediamo che questi attraversano l'orizzonte quando l'Universo è ancora dominato dalla radiazione. Il problema quindi si schematizza con due passaggi: modi che attraversano l'orizzonte nell'epoca della radiazione *Sub-Horizon* e modi che passano dall'epoca dominata da materia all'epoca dominata da radiazione.

### 4.2.1 Attraversamento dell'Orizzonte

Quando l'Universo è dominato dalla materia il potenziale è fissato delle perturbazioni di radiazione. Le perturbazioni di materia, invece, sono influenzate solo dal

potenziale e non dalle perturbazioni di radiazione. Partiamo con il risolvere il potenziale. Prendendo l'equazione (4.8) e trascurando tutti i termini determinati dalla materia, abbiamo:

$$\Phi = \frac{6a^2 H^2}{k^2} \left[ \Theta_{r,0} + \frac{3aH\Theta_{r,1}}{k} \right] \quad (4.20)$$

sostituendo  $H^2 = (8/3)\pi G\rho$ . Possiamo utilizzare l'equazione di Einstein modificata (4.20) per eliminare  $\Theta_{r,0}$  dalle altre due equazioni che consideriamo ((4.6a) e (4.6b)):

$$\begin{aligned} \Theta_{r,0} &= \Phi \frac{k^2}{6a^2 H^2} - \frac{3aH}{k} \Theta_{r,1} = \Phi \frac{k^2 \eta^2}{6} - \frac{3}{k\eta} \Theta_{r,1} \\ \dot{\Theta}_{r,0} &= \dot{\Phi} \frac{k^2 \eta^2}{6} + \Phi \frac{k^2 \eta}{3} - \dot{\Theta}_{r,1} \frac{3}{k\eta} + \Theta_{r,1} \frac{3}{k\eta^2} \end{aligned}$$

Considerando la (4.6a) e sostituendo quanto appena ottenuto ricaviamo:

$$-\frac{3}{k\eta} \dot{\Theta}_{r,1} + k\Theta_{r,1} \left[ 1 + \frac{3}{k^2 \eta^2} \right] = -\dot{\Phi} \left[ 1 + \frac{k^2 \eta^2}{6} \right] - \Phi \frac{k^2 \eta}{3} \quad (4.21)$$

Considerando la (4.6b) otteniamo invece:

$$\dot{\Theta}_{r,1} + \frac{1}{\eta} \Theta_{r,1} = \frac{-k}{3} \Phi \left[ 1 - \frac{k^2 H^2}{6} \right] \quad (4.22)$$

Possiamo rigirare queste due equazioni in una del secondo ordine per il potenziale. Ci serviamo della (4.22) per esplicitare  $\Theta_{r,1}$  in modo da sostituirla nella (4.21) ricavando così:

$$\dot{\Phi} + \frac{1}{\eta} \Phi = -\frac{6}{k\eta^2} \Theta_{r,1} \quad (4.23)$$

Differenziamo questa equazione per ottenere una edo di secondo grado:

$$\ddot{\Phi} + \frac{4}{\eta} \dot{\Phi} + \frac{k^2}{3} \Phi = 0 \quad (4.24)$$

Questa equazione può essere risolta analiticamente, considerando la condizione iniziale di  $\Phi$  costante ed applicando il cambio di variabile  $u = \Phi\eta$ :

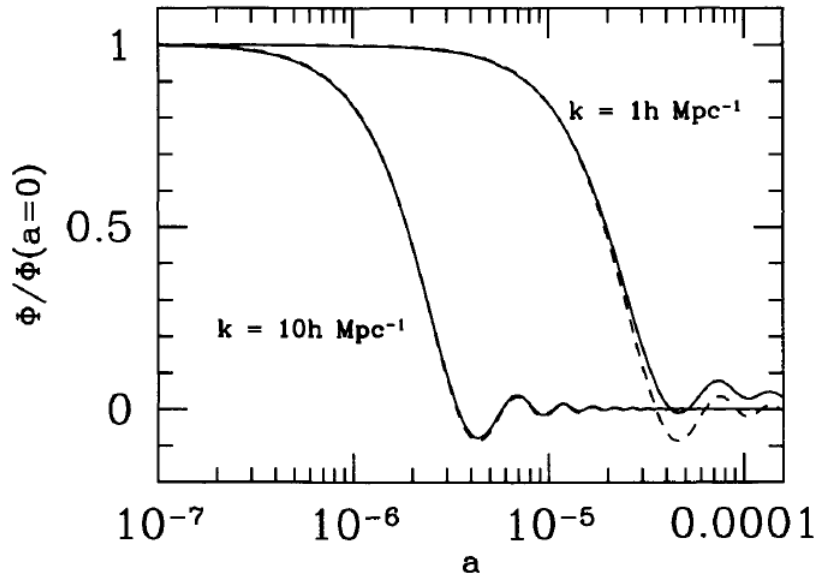
$$\ddot{u} + \frac{2}{\eta} \dot{u} + \left( \frac{k^2}{3} - \frac{2}{\eta^2} \right) u = 0 \quad (4.25)$$

Questa è un'equazione sferica di Bessel di ordine 1 la cui soluzione espressa in termini di funzioni trigonometriche è:

$$\Phi = 3\Phi_p \left( \frac{\sin(k\eta/\sqrt{3}) - (k\eta/\sqrt{3})\cos(k\eta/\sqrt{3})}{(k\eta/\sqrt{3})^3} \right) \quad (4.26)$$

Il fattore moltiplicativo 3 è un fattore di normalizzazione, mentre  $\Phi_p$  è il potenziale primordiale. Questo risultato ci dice che appena un modo entra in orizzonte durante l'era dominata dalla radiazione il suo potenziale inizia a decadere, dopo questa fase oscilla come mostrato in figura 4.5. Ritroviamo quindi le condizioni, già anticipate,





**Figura 4.5:** Evoluzione del potenziale nell'epoca dominata dalla radiazione. Le linee continue mostrano la soluzione esatta per i due modi di piccola scala, le linee tratteggiate sono le soluzioni analitiche approssimate (da Dodelson, 2003 [11])

secondo cui quando la pressione è forte, come nell'era della radiazione, le perturbazioni oscillano nel tempo. In un Universo che si espande, se le perturbazioni della componente dominante (in questo caso la radiazione) non crescono, il potenziale inizierà a decadere in quanto  $\Phi \sim \Theta_0/\eta^2$ . Sottolineiamo che quanto detto vale fino a quando si resta nell'era dominata dalla radiazione.

Determinato il comportamento del potenziale possiamo passare allo studio dell'evoluzione delle perturbazioni di materia riprendendo in esame le equazioni (4.6c) e (4.6d). Differenziamo la prima e usiamola per eliminare  $\dot{v}$  dalla seconda:

$$\ddot{\delta} + ik \left( -\frac{\dot{a}}{a} v + ik\Phi \right) = -3\ddot{\Phi} \quad (4.27)$$

Usiamo poi la (4.6c) per eliminare  $v$  ottenendo:

$$v = \frac{-3\dot{\Phi} - \dot{\delta}}{ik}$$

$$\ddot{\delta} + 3\dot{\Phi} \frac{\dot{a}}{a} + \dot{\delta} \frac{\dot{a}}{a} - k^2\Phi + 3\ddot{\Phi} = 0$$

ricordando che  $\dot{a}/a = aH = 1/\eta$ . Otteniamo quindi:

$$\ddot{\delta} + \frac{1}{\eta} \dot{\delta} = S(k, \eta) \quad (4.28)$$

$S(k, \eta) = -3\ddot{\Phi} + k^3\Phi - (3/\eta)\dot{\Phi}$  è il termine sorgente. Vediamo che le soluzioni dell'omogenea associata alla (4.28) sono  $\delta = \text{costante}$  e  $\delta = \ln(a)$ . Una soluzione dell'EDO completa si può ottenere dalla combinazione lineare delle due soluzioni dell'omogenea con l'aggiunta di una soluzione particolare. Servendoci della

funzione di Green, strumento matematico utilizzato per la risoluzione di equazioni differenziali non omogenee, otteniamo:

$$\delta(k, \eta) = C_1 + C_2 \ln(\eta) - \int_0^\eta d\eta' S(k, \eta') \eta' (\ln[k\eta'] - \ln[k\eta]) \quad (4.29)$$

Nei tempi iniziali l'integrale assume un valore piccolissimo, il coefficiente  $\ln \eta$  scompare, e con lui  $C_2$ , perchè la condizione iniziale è  $\delta = \text{costante}$ . Inoltre considerando l'equazione di Einstein (4.7) troviamo che  $C_1 = \delta(k, \eta = 0) = (3/2)\Phi_p$ . Appena il modo entra in orizzonte il termine sorgente scende a zero. Il contributo dominante nell'integrale viene fuori nelle epoche dove  $k\eta \approx 1$ . Dopo che il modo è entrato in orizzonte, ci aspettiamo :

$$\delta(k, \eta) = A\Phi_p \ln(Bk\eta) \quad (4.30)$$

ossia una costante  $A\Phi_p \ln(B)$  sommata a una crescita logaritmica  $A\Phi_p \ln(k\eta)$ . È possibile determinare le costanti A e B considerando le informazioni più rivelanti dateci dall'integrale in (4.29). Osserviamo che:

$$A\Phi_p \ln(B) = \frac{3}{2}\Phi_p - \int_0^\infty d\eta' S(k, \eta') \eta' \ln(k\eta') \quad (4.31)$$

mentre il coefficiente  $\ln(k\eta)$  è dato da:

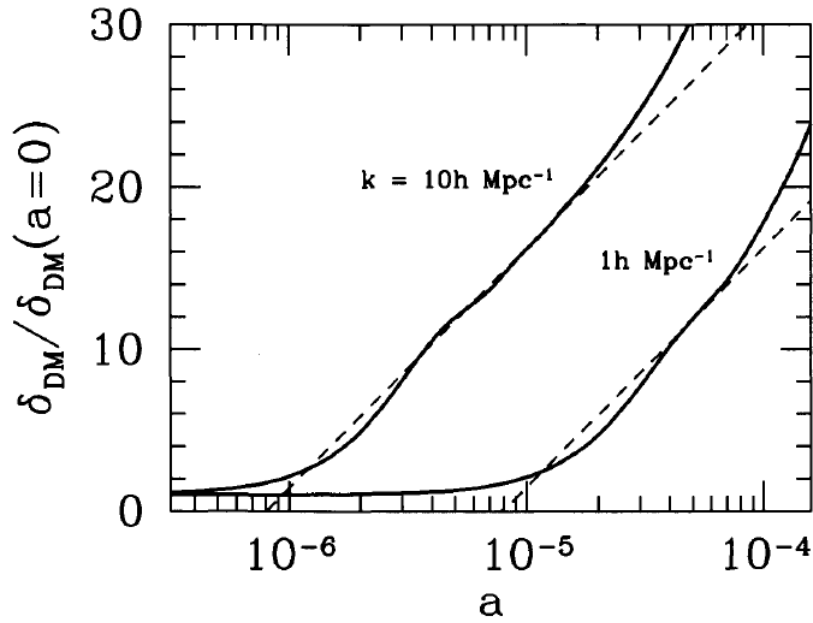
$$a\Phi_p = \int_0^\infty d\eta' S(k, \eta') \eta' \quad (4.32)$$

È possibile ottenere delle soluzioni analitiche per questi integrali come, ad esempio, hanno fatto Hu e Sugiyama (1996) che utilizzarono quest'approccio per studiare l'evoluzione della materia oscura nei tempi iniziali. In figura 4.6 possiamo vedere che le perturbazioni di materia crescono durante l'era dominata dalla radiazione. Non si tratta di una crescita così ripida come quella ottenuta nell'era dominata dalla materia (ove il potenziale costante prima e dopo l'equivalenza implica, considerando l'equazione (4.5), che  $\delta \propto a$ ) a causa della presenza della pressione della radiazione. La crescita che si ottiene è di tipo logaritmico. Quando ci stiamo avvicinando all'era dominata dalla materia, la pressione della radiazione inizia a ridursi e le perturbazioni assumono una crescita man mano più prominente.

## 4.2.2 Soluzioni Sotto l'Orizzonte

In questa sezione vogliamo risolvere le perturbazioni di materia e del potenziale ed unirle alla soluzione logaritmica trovata in (4.30). Fin quando l'Universo è dominato dalla radiazione, il potenziale è determinato dalla radiazione. La crescita più prominente delle perturbazioni di materia fa sì che ad un certo punto queste superino il contributo della radiazione. Possiamo allora ignorare la radiazione e concentrarci solo sull'evoluzione delle perturbazioni di materia. Consideriamo come equazioni di partenza la (4.6c) e la (4.6d) e l'equazione di Einstein (4.8). Scriviamo queste equazioni in termini della variabile  $y$  già introdotta e troviamo:

$$\delta' + \frac{ikv}{aHy} = -3\Phi' \quad (4.33a)$$



**Figura 4.6:** Evoluzione delle perturbazioni di materia nell'era dominata dalla radiazione. Sono mostrate le soluzioni per due diverse scale. Con le linee continue vengono indicate le soluzioni esatte, con le linee tratteggiate le soluzioni ottenute dalla (4.30) (da Dodelson, 2003 [11])

$$v' + \frac{v}{y} = \frac{ik\Phi}{aHy} \quad (4.33b)$$

$$k^2\Phi = \frac{3y}{2(y+1)}a^2H^2\delta \quad (4.33c)$$

Notiamo che con l'apice primo ( $'$ ) indichiamo la derivata fatta rispetto la nuova variabile  $y$ . Il potenziale è espresso in termini della sola  $\delta$ . Non c'è più dipendenza dalla radiazione perchè  $\rho_{dm}\delta$  ha iniziato a predominare su  $\Theta_{r,0}$ . Inoltre siamo ben dentro l'orizzonte quindi  $aH/k \ll 1$ . Differenziamo (4.33c) tenendo a mente che:

$$\frac{d(aHy)}{dy} = -(1+y)^{-1}(2aHy)^{-1}$$

$$\delta'' + \frac{ikv'}{aHy} - \frac{ikv}{(Hy)(2aHy)}$$

sostituendo  $v'$  con (4.33b)

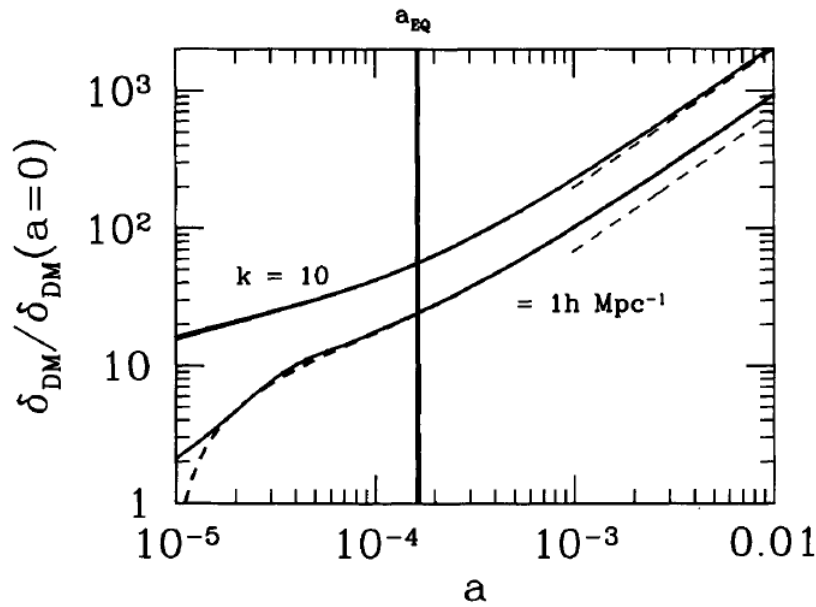
$$\delta'' \frac{ik}{aHy} \left( -\frac{v}{y} + \frac{ik\Phi}{aHy} \right) - \frac{ikv}{(1+y)(2aHy)} = -3\Phi''$$

ed otteniamo:

$$\delta'' - \frac{ikv(2+3y)}{2aHy^2(y+1)} = -3\Phi'' + \frac{k^2\Phi}{a^2H^2y^2} \quad (4.34)$$

Possiamo utilizzare la (4.33a) per ricavarci la velocità così da sostituirla nell'ultima equazione trovata, ed otteniamo:

$$\delta'' + \frac{2+3y}{2y(y+1)}\delta' - \frac{3}{2y(y+1)}\delta = 0 \quad (4.35)$$



**Figura 4.7:** Evoluzione delle perturbazioni di materia su piccola scala dentro l'orizzonte (da Dodelson, 2003 [11])

Quest'equazione descrive l'evoluzione delle perturbazioni di materia su scale al di sotto dell'orizzonte e prende il nome di equazione di Meszaros. Sappiamo che nell'era della materia le perturbazioni dentro l'orizzonte crescono proporzionali al fattore di scala; una soluzione della (4.34) sarà, dunque, un polinomio di primo grado (derivata seconda = 0). Imponendo ciò e risolvendo l'equazione che governa la funzione di crescita ( $D_1$ ) ricaviamo la soluzione:

$$D_1(y) = y + 2/3 \quad (4.36)$$

Per trovare l'altra soluzione facciamo un cambio di variabile  $u \equiv \delta/D_1$ :

$$\left(1 + \frac{3y}{2}\right) u'' + \frac{u'}{y(y+1)} [(21/4)y^2 + 3y + 1] = 0 \quad (4.37)$$

Si tratta di un'equazione di primo grado per  $u'$ . Integriamo due volte così da arrivare alla soluzione ottenendo:

$$u' \propto (y + 2/3)^{-2} y^{-1} (y + 1)^{-1/2} \quad (4.38)$$

$$D_2(y) = D_1(y) \ln \left[ \frac{\sqrt{1+y} + 1}{\sqrt{1+y} - 1} \right] - 2\sqrt{1+y} \quad (4.39)$$

Per cui negli ultimi tempi ( $y \ll 1$ ) la soluzione crescente è proporzionale a  $y$ , mentre il modo decrescente è proporzionale a  $y^{-3/2}$ . La soluzione generale all'equazione di Meszaros, per  $y \gg 1$ , è:

$$\delta(k, y) = C_1 D_1(y) + C_2 D_2 \quad (4.40)$$

ove  $C_1$  e  $C_2$  sono due costanti determinabili combinando questa all'equazione (4.20).

## 4.3 Funzione di Crescita

Negli ultimi tempi tutti i modi sono entrati in orizzonte perciò si può applicare il limite dell'equazione di Meszaros  $y \gg 1$  nel caso in cui sia a prevalere la materia barionica ( $\Omega_m$ ). Risulta, però, che nei modelli fin'ora studiati stiamo considerando un Universo la cui espansione è destinata a rallentare. Fino a che non introduciamo come ulteriore parametro la Costante Cosmologica. Considerando il caso  $y \gg 1$ , prendendo di nuovo in considerazione l'equazione di Meszaros ma aggiungendo i contributi dovuti alla costante cosmologica, otteniamo:

$$\frac{d\delta^2}{da^2} + \left( \frac{d\ln(H)}{da} + \frac{3}{a} \right) \frac{d\delta}{da} - \frac{3\Omega_m H_0^2}{2a^5 H^2} \delta = 0 \quad (4.41)$$

Siamo tornati ad esprimere tutto in funzione della variabile  $a$ . Questa equazione differenziale del secondo ordine ci descrive la funzione di crescita nel limite di Universo dominato da materia e  $y \gg 1$ . Nel capitolo successivo vedremo come è possibile risolvere numericamente quest'equazione e quali informazioni ne possiamo ricavare.



## Soluzione per il Growth Factor

In questo capitolo risolviamo e discutiamo del comportamento del fattore di crescita nel modello  $\Lambda$ CDM e nel modello K-mouflage. Per cercare una soluzione abbiamo bisogno di conoscere il comportamento dei coefficienti presenti che dipendono dal tempo.

### 5.1 Implementazione Numerica

Per ottenere il Growth Factor bisogna risolvere un'equazione differenziale di secondo grado (EDO). In analisi matematica un'equazione differenziale è una equazione che coinvolge  $f(t)$  ed un certo numero di sue derivate. La  $f(t)$  è una funzione definita su un intervallo  $I \subset \mathbb{R}^d$  e se dipende da una sola variabile l'equazione presenta soltanto derivate ordinarie e viene detta equazione differenziale ordinaria. Presa un'equazione differenziale ed un insieme di condizioni iniziali, il problema di determinare le soluzioni che soddisfino le condizioni iniziali assegnate, nella famiglia della soluzione generale, prende il nome di problema di Cauchy:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0 \tag{5.1}$$

dove  $f$  è una funzione che mappa  $[t_0, 1) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  e  $y_0 \in \mathbb{R}^d$  è la condizione iniziale. Abbiamo, senza perdita di generalità, che un EDO di grado maggiore può essere convertita in un sistema più grande di equazioni del primo ordine introducendo variabili extra. Raramente è possibile riuscire ad ottenere una soluzione  $y(t)$  usando il calcolo analitico, nella maggior parte dei casi fisici bisogna adottare un approccio numerico. Risolvere una EDO per via numerica significa avvalersi di un metodo mediante il quale si individuano un certo numero di "istanti di integrazione" e si cerca solo in questi il valore assunto dalla soluzione. Campioniamo variabili continue con un numero finito di punti con  $h = (T - t_0)/N$  passo temporale, con  $N$  numero grande intero. Notiamo che  $h$  può cambiare lungo l'intervallo, infatti vi sono metodi a passo variabile che utilizzano un passo "piccolo" solo quando strettamente necessario. Gli algoritmi da usare per ottenere una soluzione possono essere impliciti o espliciti. I metodi espliciti calcolano la soluzione di un sistema al momento  $t_i + 1$  a partire dalla soluzione nota del sistema al momento  $t_i$ , mentre i metodi impliciti trovano una soluzione risolvendo un'equazione che coinvolge sia lo stato attuale del sistema sia

quello successivo. Per risolvere la nostra EDO abbiamo utilizzato Python, in particolare ci siamo avvalsi di Odeint che è una moderna libreria C++, capace di risolvere numericamente equazioni differenziali ordinarie. Uno tra i tanti integratori numerici è *lsoda*, che si basa sul metodo implicito di Adams per problemi non rigidi, ma può essere utilizzabile anche per problemi non polifunzionali. Fa parte di ODEPACK: una raccolta di Fortran solvers per problemi con valore iniziale.

## 5.2 Risoluzione per il modello $\Lambda$ CDM

Abbiamo ottenuto per le perturbazioni di materia, per un Universo dominato da materia e nel limite di piccole scale ( $y \gg 1$ ), l'equazione:

$$\frac{d\delta^2}{da^2} + \left( \frac{d \ln(H)}{da} + \frac{3}{a} \right) \frac{d\delta}{da} - \frac{3\Omega_m H_0^2}{2a^5 H^2} \delta = 0 \quad (5.2)$$

Questa equazione di secondo grado ammette due soluzioni. Una soluzione è data da  $\delta \propto H$ , tuttavia questa soluzione non è quella che cerchiamo, dal momento che il parametro di Hubble è in decrescita per modelli privi della costante cosmologica. Vogliamo dunque trovare l'altra soluzione. Ci sono due modi di agire: analiticamente e numericamente. Seguendo l'approccio analitico, applicando la sostituzione  $u = \delta/H$  l'equazione diventa:

$$\frac{d^2 u}{da^2} + 3 \left[ \frac{d \ln(H)}{da} + \frac{1}{a} \right] \frac{du}{da} = 0 \quad (5.3)$$

integrando due volte si ottiene:

$$D_1(a) = \frac{5\Omega_m}{2} \frac{H(a)}{H_0} \int_0^a \frac{da'}{(a'H(a')/H_0)^3} \quad (5.4)$$

e risolvendo l'integrale si ottiene la funzione di crescita. Spostandoci sulla soluzione numerica, come già detto, ci siamo avvalsi dell'uso di Python. Il primo passo è stato ridurre quest'equazione differenziale di secondo grado in un sistema di EDO di primo grado, andando ad aggiungere una variabile.

$$y(a) = \delta'(a) \quad (5.5a)$$

$$y'(a) + \left( \frac{1}{H} \frac{dH}{da} + \frac{3}{a} \right) y - \frac{3\Omega_m H_0^2}{2a^5 H^2} \delta = 0 \quad (5.5b)$$

Il parametro di Hubble, in funzione del fattore di scala e dei parametri di densità, trascurando la radiazione, è dato da:

$$H(a) = H_0 \left( \frac{\Omega_m}{a^3} + \frac{\Omega_k}{a^2} + \Omega_\Lambda \right)^{1/2} \quad (5.6)$$

e la sua derivata risulta:

$$\frac{dH(a)}{da} = H_0 \left[ - \frac{\frac{2\Omega_k}{a^3} + \frac{3\Omega_m}{a^4}}{2\sqrt{\frac{\Omega_m}{a^3} + \frac{\Omega_k}{a^2} + \Omega_\Lambda}} \right] \quad (5.7)$$



**Tabella 5.1:** Valori dei parametri cosmologici assunti per i tre diversi modelli considerati

Modello	$\Omega_m$	$\Omega_k$	$\Omega_\Lambda$
1	1	0	0
2	0.315	0	0.685
3	0.315	0.685	0

Una volta costruito il nostro sistema differenziale di equazioni di primo ordine e mostrata la dipendenza di  $H$  dal fattore di scala, serve definire il valore iniziale  $y(0)$  e il valore delle costanti presenti in gioco. Per le condizioni iniziali, possiamo prendere  $\delta = \text{costante}$ , poichè abbiamo ottenuto che nell'epoca dominata dalla materia i modi, una volta entrati in orizzonte, evolvono identicamente e proporzionalmente al fattore di scala. Di conseguenza  $y(0) = 1$ . Per le costanti cosmologiche facciamo riferimento ai valori ottenuti da Planck, (2018) [18].

### 5.2.1 Implementazione in Python

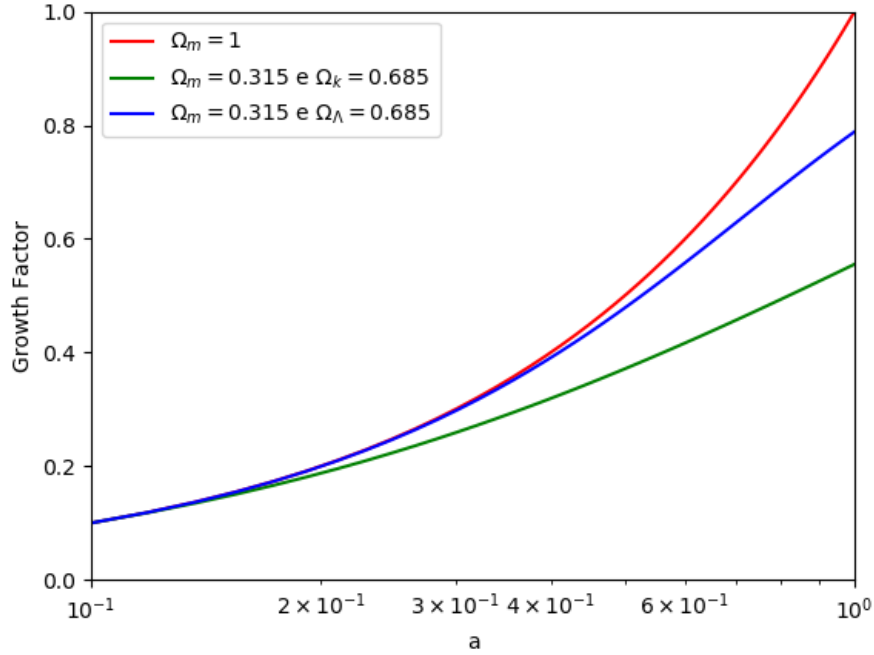
Diamo una breve descrizione dei passaggi seguiti su Python. Abbiamo analizzato tre possibili casistiche: un Universo piatto dominato da materia, un Universo piatto con costante cosmologica e un Universo aperto. Per prima cosa abbiamo definito i parametri  $H_0$ ,  $\Omega_m$ ,  $\Omega_\Lambda$  e  $\Omega_k$ , i cui valori, per i tre diversi modelli, vengono riportati in tabella 5.1. Abbiamo definito il fattore di scala, che rappresenta la variabile temporale, come un vettore il cui valore iniziale è stato fissato a  $a_i = 0.1$ . Il valore iniziale  $a_i$  non altera i risultati finali a patto che la condizione iniziale risieda nella profonda era dominata dalla materia ( $z > 10$ ). Abbiamo infine imposto come condizione iniziale  $\delta' = y(0) = 1$ . Lo step successivo è stato richiamare la funzione `odeint`, che richiede come input il vettore temporale, il sistema di EDO e le condizioni iniziali e ne restituisce la soluzione discretizzata in termini di vettori di uscita. Ciò che abbiamo ottenuto è visualizzabile nel grafico in figura 5.1. Da questo possiamo constatare come in un Universo piatto dominato da materia il fattore di crescita è uguale al fattore di scala ( $D_1 = a$ ). Nell'Universo aperto e in quello con la costante cosmologica vediamo che la crescita è soppressa negli ultimi istanti. Questo ci porta ad una conclusione importante: le strutture in un Universo aperto o dominato da Energia Oscura si sviluppano prima rispetto quanto fanno in un Universo piatto e dominato da materia.

## 5.3 Risoluzione per il modello K-mouflage

Per il modello K-mouflage abbiamo ottenuto:

$$\frac{d^2\delta}{d(\ln a)^2} + \left(2 + \frac{1}{H^2} \frac{dH}{dt}\right) \frac{d\delta}{d \ln a} - \frac{3}{2} \Omega_m (1 + \epsilon_1) \delta = 0 \quad (5.8)$$

Come per il caso  $\Lambda$ CDM, anche questa equazione ha due soluzioni: un modo di crescita e un modo di decadimento. Noi ci interesseremo alla soluzione di crescita, ma



**Figura 5.1:** Fattore di Crescita nelle tre diverse cosmologie considerate, l'asse del fattore di scala è dato in scala logaritmica

non è possibile agire per via analitica; dovremo cercare la nostra soluzione numericamente. Per prima cosa facciamo un cambio di variabile di derivazione per la nostra EDO, avvalendoci delle formule di Faà Bruno, assumendo che  $u = g(x)$  e  $y = f(u)$ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} \quad (5.9a)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{dy}{du} \frac{d^2u}{dx^2} \quad (5.9b)$$

ed otteniamo:

$$\frac{d^2\delta}{da^2} + \frac{1}{a} \left[ 1 + \left( 2 + \frac{1}{H^2} \frac{dH}{dt} \right) \right] \frac{d\delta}{da} - \frac{3}{2a^2} \Omega_m (1 + \epsilon_1) \delta = 0 \quad (5.10)$$

Per definire in maniera univoca il modello, dovremo definire le funzioni A e K, tutto in funzione dei parametri  $m$ ,  $\epsilon_{2,0}$ ,  $\gamma_A$ ,  $\gamma_U$  e  $\alpha_U$ , in aggiunta a quelli cosmologici. Il parametro di Hubble in un modello K-mouflage risulta:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{A}{(1 - \epsilon_2)^2} \left[ \frac{\Omega_{m0}}{a^3} + \frac{\Omega_{rad0}}{a^4} + \frac{\Omega_{\varphi 0}}{A^4} \frac{K - 2\tilde{\chi}K'}{K_0 - 2\tilde{\chi}_0 K'_0} \right] \quad (5.11)$$

La cui derivata rispetto al tempo è data da:

$$\begin{aligned} \frac{2}{-3H_0^2} \frac{dH}{dt} = & \frac{A^2}{1 - \epsilon_2} \left[ \frac{\Omega_{m0}}{a^3} + \frac{4\Omega_{rad0}}{3a^4} + \Omega_{\varphi 0} \frac{A^{-4}(2\chi K')}{A^{-4}(1)(-K_0 + 2\chi_0 K'_0)} \right] + \\ & + \frac{2A^2}{3(1 - \epsilon_2)^2} \left( \epsilon_2 - \frac{1}{1 - \epsilon_2} \frac{d\epsilon_2}{d \ln a} \right) \cdot \\ & \left[ \frac{\Omega_{m0}}{a^3} \frac{\Omega_{rad0}}{a^4} + \Omega_{\varphi 0} \frac{A^{-4}K}{A^{-4}(1)(-K_0 + 2\chi_0 K'_0)} \right] \end{aligned} \quad (5.12)$$

La funzione di accoppiamento  $A(a)$  è definita come:

$$A = 1 + \alpha_A - \alpha_A \left[ \frac{(\gamma_A + 1)a}{\gamma_A + a} \right]^{\nu_A} \quad (5.13a)$$

con

$$\alpha_A = - \frac{\epsilon_{2,0}(\gamma_A + 1)}{\nu_A \gamma_A} \quad (5.13b)$$

$$\nu_A = \frac{3(m - 1)}{2m - 1} \quad (5.13c)$$

E si ha che  $A_0 = A(a = 1) = 1$ . Il termine di densità iniziale del campo scalare  $\varphi$  è dato da:

$$\Omega_{\varphi 0} = (1 - \epsilon_{2,0}^2)\Omega_{DE,0} - (2\epsilon_{2,0} - \epsilon_{2,0}^2)(\Omega_{m0} + \Omega_{rad0}) \quad (5.14)$$

Il parametro, come già visto, è definito come  $\epsilon_2 = (d \ln A / d \ln a)$ , mentre il parametro  $\epsilon_1$  che compare in (5.10) come:

$$\epsilon_1 = -\epsilon_2 \frac{2(-3\epsilon_2 + \frac{d \ln U}{d \ln a})}{3\Omega_m} \quad (5.15)$$

La funzione  $U(a)$  definisce una parametrizzazione per il modello, [7]  $U(a) \equiv a^3 \sqrt{\chi} K'$  ed è definita come:

$$U(a) \propto \frac{a^2 \ln(\gamma_U + a)}{(\sqrt{a_{eq}} + \sqrt{a}) \ln(\gamma_U + a) + \alpha_U a^2} \quad (5.16)$$

normalizzata in modo che sia  $U_0 = U(a = 1)$ , con la costante  $U_0$  per  $K(a = 1) = K'_0 = 1$ :

$$U_0 = \sqrt{\frac{\rho}{\mathcal{M}^4} \frac{\epsilon_{2,0}}{2(-3\epsilon_{2,0} + \frac{d \ln U}{d \ln a}|_{a=1})}} \quad (5.17)$$

Riscrivendo la Klein-Gordon otteniamo:

$$\sqrt{\chi(a)} = -\frac{\rho}{\mathcal{M}^4} \frac{\epsilon_2 A^4}{2U(-3\epsilon_2 + \frac{d \ln U}{d \ln a})} \quad (5.18)$$

Dalla definizione di  $U(a)$  e  $\chi(a)$  otteniamo:

$$K'(a) = \frac{dK}{d\chi} = \frac{U(a)}{a^3 \sqrt{\chi}} \quad (5.19)$$

**Tabella 5.2:** Valori dei parametri del K-mouflage assunti per i tre diversi modelli considerati

Modello	$\alpha_U$	$\gamma_U$	$m$	$\epsilon_{2,0}$	$\gamma_A$
1	0.2	1	3	-0.01	0.2
2	0.2	1	3	-0.01	0.5
3	0.2	1	3	-0.01	2

integrando e considerando come condizione  $K(a = 1) = K_0 = -1$ , otteniamo:

$$K(a) = -1 + \int_0^{\ln a} \frac{U(a)}{a^3 \sqrt{\chi(a)}} \frac{d\chi}{d \ln a} d \ln a \quad (5.20)$$

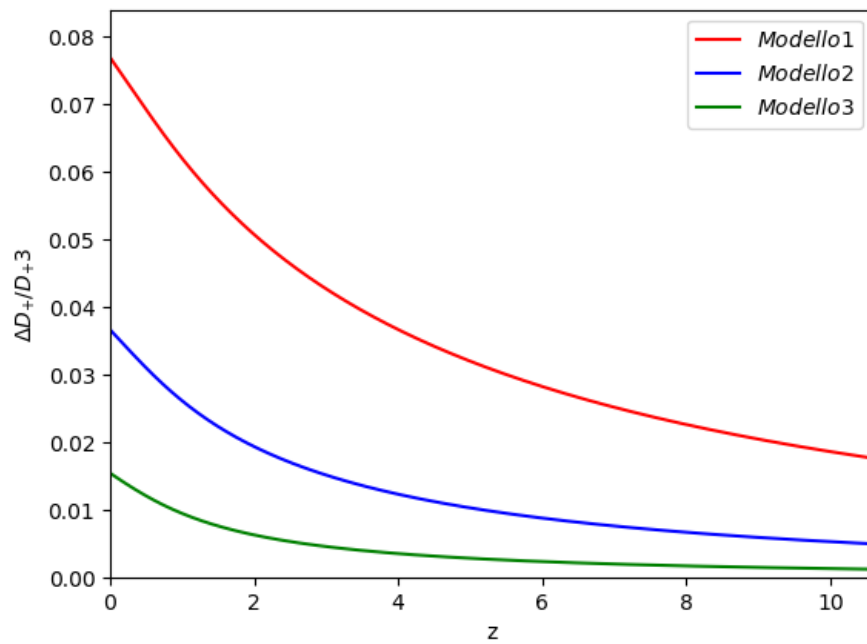
Scegliendo come normalizzazione  $K_0 = -1$ , otteniamo anche che la scala di energia è:

$$\frac{\mathcal{M}^4}{\rho} = \frac{\Omega_{\varphi 0}}{\Omega_{m 0}} + \frac{\epsilon_{2,0}}{-3\epsilon_{2,0} + \left. \frac{d \ln U}{d \ln a} \right|_{a=1}} \quad (5.21)$$

### 5.3.1 Implementazione in Python

Vediamo ora come incastrare queste equazioni per arrivare ad ottenere la nostra soluzione in Python. L'equazione (5.10) è stata ridotta ad un sistema di due equazioni differenziali di primo grado aggiungendo una variabile in più. Nel sistema, inoltre, abbiamo considerato l'equazione di Friedmann e l'equazione di Klein-Gordon. Una volta costruito il sistema è necessario dare le condizioni iniziali che vengono settate ad 1, perchè il presupposto è che il nostro punto di partenza sia la profonda era dominata dalla materia. Tutte le quantità definite nel modello K-mouflage tenderanno a convergere, andando indietro nel tempo, con quelle del modello  $\Lambda$ CDM. Abbiamo analizzato tre possibili modelli caratterizzati dai parametri  $m, \epsilon_{2,0}, \gamma_A, \gamma_U, \alpha_U$  i cui valori sono riportati in tabella 5.2. Abbiamo definito anche qui il fattore di scala come un vettore il cui valore iniziale è stato fissato a  $a_i = 0.1$ . Lo step successivo è stato richiamare la funzione `odeint` che richiede come input il vettore temporale, il sistema di EDO e le condizioni iniziali e ne restituisce la soluzione discretizzata in termini di vettori di uscita.

Mostriamo in figura 5.2 la deviazione relativa del fattore di crescita dei tre modelli K-mouflage dalle predizioni ottenute dal modello  $\Lambda$ CDM. Vediamo che le deviazioni oggi raggiungono un 9% secondo la scelta della parametrizzazione, perchè l'impatto della gravità modificata è cumulativo con il tempo sul modo di crescita lineare. Questo può produrre un fattore di amplificazione significativo. Le deviazioni aumentano dal modello 3 al 2 e dal 2 all'1 in corrispondenza a valori maggiori di  $\epsilon_2$  e  $\epsilon_1$  e minori di  $K'$  (questo corrisponde a valori minori di  $\gamma_A$ ). Tutti i modi di crescita lineare tendono a convergere ad alti redshift, nonostante i diversi tassi di espansione di Hubble. Infatti, nella prima era dominata dalla materia, ritroviamo il modello di Einstein-de Sitter, il termine di Hubble nella parentesi in Eq. (5.8) converge a  $(H^{-2} dH/dt) \rightarrow -3/2$ . Inoltre, il fattore  $\epsilon_1$  va a zero a causa del meccanismo di screening non lineare del K-mouflage, in quanto ad alti redshift  $K'$



**Figura 5.2:** Deviazione Relativa del modo di crescita lineare per i tre modelli K-mouflage dal modello  $\Lambda$ CDM.

diverge a  $+\infty$ . Questo comportamento è richiesto per garantire che la componente dell'Energia Oscura diventi sottodominante nei primi tempi.



## Conclusioni

In questo lavoro di tesi sono stati presentati alcuni dei principali modelli cosmologici che hanno come obiettivo la descrizione fisico-matematica completa dell'Universo. Siamo partiti dalle prime descrizioni classiche per poi spostarci, guidati dalla scoperta dell'espansione dell'Universo, verso modelli cosmologici che vanno ad aggiungere una costante cosmologica o che modificano la Relatività Generale: modelli che hanno al loro interno problematiche ancora irrisolte. Sono stati introdotti, dal punto di vista newtoniano, i modelli di Jeans per le perturbazioni di materia e radiazione e si è mostrato come queste evolvano in Universi in cui domina o l'una o l'altra componente. Abbiamo ripetuto tale studio con un formalismo differente, partendo dalle equazioni relativistiche di Boltzmann ed Einstein. Abbiamo studiato le perturbazioni di densità di materia e del potenziale su diverse scale cosmologiche in diverse epoche, fino a giungere all'equazione che ci descrive il fattore di crescita delle perturbazioni della materia. Lo studio dell'andamento del Growth Factor ha una grande importanza per la cosmologia moderna, poichè permette di comprendere la natura dell'Energia Oscura e il suo funzionamento. Abbiamo risolto numericamente la funzione del Growth Factor per modelli di Universo piatto dominato da materia e per modelli di Universo con una costante cosmologica e abbiamo visto come un modello dominato da un termine di Energia Oscura parametrizzi alla perfezione l'evoluzione dell'Universo. Abbiamo riprodotto, senza scendere in dettagli tecnici, lo studio della soluzione numerica del Growth Factor per 3 diversi modelli K-mouflage. Abbiamo trovato un buon accordo con le previsioni teoriche, osservando come la deviazione dal modello  $\Lambda$ CDM sia ridotta ad una piccola percentuale e come i due modelli tendano a convergere andando indietro nel tempo, a dimostrazione dell'effetto di screening del modello K-mouflage.





# Bibliografia

- [1] Aldering, G. [SNAP Collaboration], (2002), *Future Research Direction and Visions for Astronomy*, Alan M. Dressler, editor, Proceedings of the SPIE, 4835, 146-157, arXiv:astro-ph/0209550
- [2] Amendola, L., Polarski, D., Tsujikawa, S., 2007, Physical Review Letters, 98, 131302, arXiv:astro-ph/0603703
- [3] Armendariz-Picon, C., Damour, T., Mukhanov, V. , 1999, Physics Letters B, 458, 209; J. Garriga and V. Mukhanov, 1999, Physics Letters B, 458, 219
- [4] Barreira, A., Brax, P., Clesse, S., Valageas, P., 2015, Physical Review D, 91, 123522, arXiv:1504.01493
- [5] Benevento, G., *CMB-Galaxy Cross-Correlation as a Cosmological Test of Modified Gravity*, 2015, Tesi
- [6] Brax, P., Rizzo, L.A., Valageas, P., 2015, American Physical Society, 92, 34, arXiv:1505.05671
- [7] Brax, P., Valageas, P., 2016, Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2016, 20, arXiv:1509.00611
- [8] Chiba, T., Okabe, T., Yamaguchi, M., 2000, Physical Review D, 62, 023511
- [9] Choudhury, T.R., Padmanabhan, T., 2005, Astronomy and Astrophysics, 429, 807, arXiv:astro-ph/0311622
- [10] Copeland, E.J., Sami, M., Tsujikawa, S., 2006, International Journal of Modern Physics D, 15, 1753-1935, arXiv:hep-th/0603057
- [11] Dodelson, S., 2003, *Modern Cosmology*, Academic Press
- [12] Flanagan, E., 2004, Classical and Quantum Gravity, 21, 3817, arXiv:gr-qc/0403063
- [13] Freedman, W.L. et al., 2001, Astrophysical Journal, 553, 47, arXiv:astro-ph/0012376v1
- [14] Jimenez, R., et al., 1996, MNRAS, 282, 926

- [15] Liddle, A., 2003, *An Introduction to Cosmology*, John Wiley and Sons
- [16] Lucchin, F., 1990, *Introduzione alla Cosmologia*, Zanichelli
- [17] Matarrese, S., Colpi, M., Gorini, V., Moschella, U., 2011, *Dark Matter and Dark Energy: A Challenge for Modern Cosmology*, Springer
- [18] Planck Collaboration, 2018, Astronomy & Astrophysics manuscript no. ms, arXiv:1807.06209
- [19] Riess, A.G., et al., 1998, The Astronomical Journal, 116, 1009, arXiv:astro-ph/9805201
- [20] Riess, A.G., et al., 2004, The Astrophysical Journal, 607, 665, arXiv:astro-ph/0402512
- [21] Spergel, D.N., et al. [WMAP Collaboration], 2007, The Astrophysical Journal Supplement Series, 170, 377, arXiv:astro-ph/0603449
- [22] Starobinsky, A.A., 1980, Physics Letters B, 91, 99