



Università degli Studi di Padova

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria dell'Informazione

tesi di laurea

Termoregolazione di due locali adiacenti

Relatore: prof. Mauro Bisiacco

Laureanda: Giulia Zannon 609465 - INF

Indice

1	Obiettivo	1
2	Descrizione del modello	3
2.1	Definizione e valore dei parametri	5
2.2	Modello di stato e punti di equilibrio	6
3	Analisi del sistema	9
3.1	Funzioni di trasferimento del sistema	9
3.2	Studio di $G(s)$ e $H(s)$	11
3.3	Progetto di due compensatori per $G(s)$ e $H(s)$	12
4	Analisi del sistema con ritardo	17
4.1	Introduzione di un ritardo	17
4.2	Progetto di nuovi compensatori per il sistema con ritardo	19
5	Analisi del sistema con saturazione	25

Capitolo 1

Obiettivo

Lo scopo di tale elaborato è la costruzione di due efficienti regolatori di temperatura a partire dall'analisi di un modello fisico costituito da due stanze adiacenti e dall'ambiente ad esse esterno. Tali compensatori saranno totalmente indipendenti l'uno dall'altro e dovranno garantire il corretto funzionamento della termoregolazione all'interno delle stanze stesse tramite le principali figure di merito tipiche dei Controlli Automatici, evitando il più possibile di essere condizionati dal comportamento termico negli ambienti confinanti. Nel seguito del lavoro il modello fisico di partenza sarà poi affinato per permettere una rappresentazione matematica più fedele alla realtà. Questo studio è particolarmente importante in tutti i casi in cui la temperatura di un determinato locale debba essere mantenuta costante per i motivi più svariati, quali sicurezza, salute, ricerca o semplice benessere.

Capitolo 2

Descrizione del modello

Il modello fisico analizzato è costituito da due stanze poste l'una accanto all'altra e approssimabili con una semplice struttura cubica identificata dalle tre dimensioni (lunghezza)x(larghezza)x(altezza).

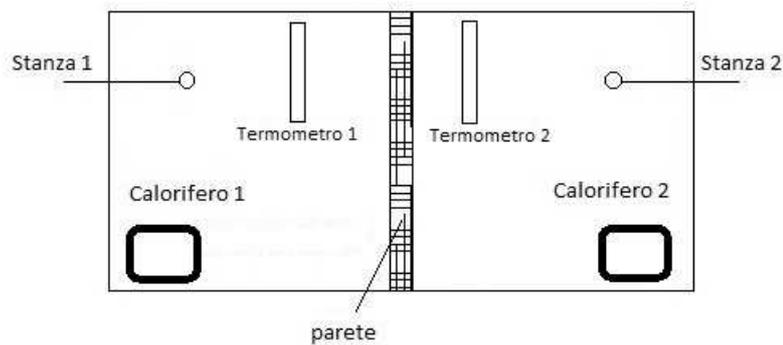


Figura 2.1: Rappresentazione bidimensionale semplificata del modello

La parete in comune e quelle laterali permettono poi lo scambio di calore per conduzione reciproco e direttamente con l'esterno, impedendo il desiderato e completo isolamento termico tra i due vani.

Il calore si propaga seguendo la legge di Fourier:

$$\dot{Q}(t) = \frac{k \cdot S}{d} \cdot \Delta\theta$$

dove

- $\dot{Q}(t)$ rappresenta il flusso di calore (quantità di calore trasmesso nell'unità di tempo [J/s])
- k la conducibilità o conduttività termica del muro [$\frac{W}{m \cdot K}$]

- d lo spessore della parete [m]
- S l'area della superficie di muro attraverso cui avviene la trasmissione [m^2]
- $\Delta\theta$ la differenza di temperatura tra le stanze [K].

Per ridurre il numero di parametri si riassume poi $\frac{k \cdot S}{d}$ nei coefficienti c e c_{ext} relativi rispettivamente alla superficie di muro tra i due vani e a quella con l'esterno.

All'interno di ciascun ambiente è presente un calorifero in grado di erogare calore e un termometro, unico mezzo a disposizione per la rilevazione della temperatura. Il flusso di calore generato dal calorifero dipende da una variabile $u(t)$ di ingresso tramite un coefficiente adimensionale b secondo

$$F(t) = b \cdot u(t)$$

mentre la temperatura fornita dal termometro può essere così modellata:

$$\dot{T}(t) = -a \cdot T(t) + d \cdot \theta(t)$$

con a e d parametri espressi in [s^{-1}] che evidenziano la differenza tra la temperatura effettiva della stanza e quella disponibile alla lettura del termometro.

Si assuma inoltre che gli ambienti non possano essere raffreddati tramite un impianto di raffreddamento, traducibile nella specifica che i caloriferi possano erogare solo calore positivo. La diminuzione della temperatura di una stanza può quindi avvenire esclusivamente in conseguenza alla cessione di calore verso l'esterno o verso la stanza contigua.

Per semplicità si suppone inoltre che la temperatura effettiva sia la medesima in tutta la stanza indipendentemente dalle dimensioni, il che è equivalente a trascurare il tempo di propagazione del calore nella stanza stessa.

Infine per esprimere il legame tra il calore presente e la temperatura effettiva si utilizza la nota formula della calorimetria:

$$Q(t) = c_T \cdot \theta(t)$$

dove c_T identifica la capacità termica del corpo di cui si vuole conoscere il calore, ed essa a sua volta rappresenta il calore necessario per far variare di 1K la temperatura del corpo.

Il modello semplificato appena esposto regola interamente il processo preso in esame e permette dunque di ricavare un sistema di equazioni su cui fondare l'analisi:

Per la prima stanza :

$$\begin{cases} \dot{Q}_1(t) = F_1(t) - c(\theta_1(t) - \theta_2(t)) - c_{ext_1}(\theta_1(t) - \theta_{ext}(t)) \\ \dot{T}_1(t) = -a \cdot T_1(t) + d \cdot \theta_1(t) \\ Q_1(t) = c_{T_1} \cdot \theta_1(t) \\ F_1(t) = b_1 \cdot u_1(t) \end{cases}$$

ed analogamente per la seconda:

$$\begin{cases} \dot{Q}_2(t) = F_2(t) + c(\theta_1(t) - \theta_2(t)) - c_{ext_2}(\theta_2(t) - \theta_{ext}(t)) \\ \dot{T}_2(t) = -a \cdot T_2(t) + d \cdot \theta_1(t) \\ Q_2(t) = c_{T_2} \cdot \theta_2(t) \\ F_2(t) = b_2 \cdot u_2(t) \end{cases}$$

2.1 Definizione e valore dei parametri

Per lo studio che segue è necessario assumere dei valori tipici per i parametri delle diverse equazioni secondo quanto segue.

Ipotizziamo che le dimensioni della stanza 1 e della stanza 2 siano rispettivamente $5 \cdot 4 \cdot 3$ e $3 \cdot 4 \cdot 3$, la parete in comune avrà quindi una superficie pari a $S = 3 \cdot 4 = 12 \text{ m}^2$. Per quanto riguarda tale parete consideriamo che il materiale costituente il muro siano i mattoni di argilla la cui conducibilità termica vale $k_{mattoni} = 1,1 \frac{W}{mK}$ e il suo spessore d sia circa $0,15 \text{ m}$. Il valore delle costanti c_1 e c_2 , come già assunto in precedenza, è pertanto il medesimo $c = c_1 = c_2 = \frac{k \cdot S}{d} = 88 \frac{W}{K}$.

Analogamente per calcolare i coefficienti che mettono in relazione le temperature all'interno dei locali con la temperatura esterna immaginiamo che le superfici parietali a contatto con θ_{ext} valgano rispettivamente $S_1 = 42 \text{ m}^2$ e $S_2 = 30 \text{ m}^2$ con spessore d di $0,20 \text{ m}$ e che siano costituite di generici laterizi con conducibilità termica $k_{laterizi} = 0,63 \frac{W}{mK}$, inferiore ai mattoni, tale da isolare maggiormente le stanze.

Risultano quindi

$$c_{ext_1} = \frac{k_{laterizi} \cdot S_1}{d} = 132,3 \frac{W}{K} \quad \text{e} \quad c_{ext_2} = \frac{k_{laterizi} \cdot S_2}{d} = 94,5 \frac{W}{K}$$

I parametri di trasduzione b_1 e b_2 sono invece differenti tra loro e regolano il flusso in uscita dai caloriferi proporzionalmente alla variabile di ingresso $u(t)$, per valori tipici di stufe adatte al riscaldamento di ambienti con dimensioni ridotte esse varranno approssimativamente $b_1 = 360$ e $b_2 = 300$.

La capacità termica è definita come prodotto tra la massa del corpo e il calore specifico di esso. Poiché all'interno dei vani si trova l'aria il suo calore specifico sarà circa $c_{sARIA} = 1004,6 \frac{J}{Kg \cdot K}$ e la massa contenuta dipenderà dalle dimensioni dell'ambiente: $m_1 = \rho \cdot V_1$ e $m_2 = \rho \cdot V_2$ con $V_1 = 60 \text{ m}^3$ e $V_2 = 36 \text{ m}^3$ e, approssimandolo al valore nominale, $\rho = 1,229 \frac{Kg}{m^3}$. Pertanto

$$c_{T_1} = m_1 \cdot c_{sARIA} = \rho \cdot V_1 \cdot c_{sARIA} = 7,41 \cdot 10^4 \frac{J}{K}$$

$$c_{T_2} = m_2 \cdot c_{sARIA} = \rho \cdot V_2 \cdot c_{sARIA} = 4,44 \cdot 10^4 \frac{J}{K}$$

Infine per quanto riguarda i coefficienti dell'equazione relative ai termometri, identici per entrambi i vani, si pone $a = d = 14,3 \text{ s}^{-1}$ in modo che il

tempo di risposta sia approssimativamente di circa 1 minuto e che essi tendano asintoticamente al valore effettivo della temperatura nella stanza θ .

Tabella 2.1: Tabella riassuntiva

Nome del parametro	Valore
c	$88 \frac{W}{K}$
c_{ext1}	$132,3 \frac{W}{K}$
c_{ext2}	$94,5 \frac{W}{K}$
c_{T1}	$7,41 \cdot 10^4 \frac{J}{K}$
c_{T2}	$4,44 \cdot 10^4 \frac{J}{K}$
$a = d$	$14,3 s^{-1}$
b_1	360
b_2	300

2.2 Modello di stato e punti di equilibrio

Il sistema può essere inoltre espresso in spazio di stato a partire dalle equazioni trovate, introducendo delle variabili ausiliarie. In particolare indicando con $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [\theta_1 \ \theta_2 \ T_1 \ T_2]^T$ le variabili di stato del sistema e con $u = [u_1 \ u_2 \ \theta_{ext}]^T$ l'ingresso si ottiene:

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{(c+c_{ext1})}{c_{T1}} & \frac{c}{c_{T1}} & 0 & 0 \\ \frac{c}{c_{T2}} & -\frac{(c+c_{ext2})}{c_{T2}} & 0 & 0 \\ a & 0 & -a & 0 \\ 0 & a & 0 & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{b_1}{c_{T1}} & 0 & \frac{c_{ext1}}{c_{T1}} \\ 0 & \frac{b_2}{c_{T2}} & \frac{c_{ext2}}{c_{T2}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \theta_{ext} \end{pmatrix}$$

Ossia

$$\dot{x} = F x + G u$$

Per quanto riguarda invece le variabili di uscita, esse corrispondono alle grandezze misurabili del sistema, ossia le temperature rilevate dai termometri: $y = (T_1 \ T_2)^T$

$$y = H x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}$$

In presenza di ingressi costanti $u_0 = [u_{01} \ u_{02} \ \theta_{ext0}]^T$ si possono determinare i punti di equilibrio del sistema imponendo: $F x + G u_0 = 0$.

Definendo $c_1 = c + c_{ext1}$ e $c_2 = c + c_{ext2}$ si ottengono infiniti punti di equilibrio

per ogni combinazione di ingressi. Questo in quanto θ_{ext_0} , ossia la temperatura esterna, è una variabile libera che non dipende dal sistema studiato e dai parametri scelti.

$$\begin{pmatrix} \theta_{1_{eq}} \\ \theta_{2_{eq}} \\ T_{1_{eq}} \\ T_{2_{eq}} \end{pmatrix} = \frac{1}{(c_1 \cdot c_2 - c^2)} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \cdot c_2 & b_2 \cdot c & (c_{ext_1} \cdot c_2 + c_{ext_2} \cdot c) \\ b_1 \cdot c & b_2 \cdot c_1 & (c_{ext_2} \cdot c_1 + c_{ext_1} \cdot c) \\ b_1 \cdot c_2 & b_2 \cdot c & (c_{ext_1} \cdot c_2 + c_{ext_2} \cdot c) \\ b_1 \cdot c & b_2 \cdot c_1 & (c_{ext_2} \cdot c_1 + c_{ext_1} \cdot c) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{1_0} \\ u_{2_0} \\ \theta_{ext_0} \end{pmatrix}$$

Sostituendo i valori numerici dei parametri si ottengono approssimativamente

$$\theta_1 = T_1 = (2.02u_{0_1} + 0.81u_{0_2} + \theta_{ext_0})$$

$$\theta_2 = T_2 = (0.98u_{0_1} + 2.04u_{0_2} + \theta_{ext_0})$$

Tali risultati sono pienamente in accordo con le ipotesi fatte relativamente alla dipendenza di ciascun locale dalle altre componenti del sistema. Innanzitutto all'equilibrio la temperatura effettiva della stanza e la temperatura misurata dal termometro coincideranno; inoltre lo stato termico di ciascun ambiente sarà influenzato maggiormente dal flusso di calore erogato dal calorifero posto in esso, e poi, nell'ordine, dalla temperatura esterna e da quella della stanza contigua poichè il calore scambiato superficialmente con essa è minore.

Capitolo 3

Analisi del sistema

3.1 Funzioni di trasferimento del sistema

Le considerazioni fatte fino ad ora sono relative al dominio del tempo, tuttavia lo studio relativo ai Controlli Automatici si sviluppa principalmente nel dominio della frequenza per cui è conveniente analizzare i sistemi in tale modo. La corrispondenza, possibile grazie alla trasformata di Laplace, porta a risolvere un sistema di equazioni equivalente a quello ricavato. Si prenda in esame la sola risposta forzata del sistema poichè successivamente interesserà studiare solamente i parametri della risposta al gradino (essendo sottointeso che il sistema controllato dovrà risultare stabile). Dopo qualche passaggio, esplicitando le due uscite T_1 e T_2 , si ottiene:

$$T_1(s) = \left[\frac{\frac{d \cdot b_1}{a \cdot (c + c_{ext1})}}{\left(1 + s \frac{cT_1}{(c + c_{ext1})}\right) \left(1 + \frac{s}{a}\right)} \right] U_1(s) + \left[\frac{\frac{c}{(c + c_{ext1})}}{\left(1 + s \frac{cT_1}{(c + c_{ext1})}\right)} \right] T_2(s) +$$
$$+ \left[\frac{\frac{d \cdot c_{ext1}}{a \cdot (c + c_{ext1})}}{\left(1 + s \frac{cT_1}{(c + c_{ext1})}\right) \left(1 + \frac{s}{a}\right)} \right] \theta_{ext}(s)$$
$$T_2(s) = \left[\frac{\frac{d \cdot b_2}{a \cdot (c + c_{ext2})}}{\left(1 + s \frac{cT_2}{(c + c_{ext2})}\right) \left(1 + \frac{s}{a}\right)} \right] U_2(s) + \left[\frac{\frac{c}{(c + c_{ext2})}}{\left(1 + s \frac{cT_2}{(c + c_{ext2})}\right)} \right] T_1(s) +$$
$$+ \left[\frac{\frac{d \cdot c_{ext2}}{a \cdot (c + c_{ext2})}}{\left(1 + s \frac{cT_2}{(c + c_{ext2})}\right) \left(1 + \frac{s}{a}\right)} \right] \theta_{ext}(s)$$

Per rendere più semplice la rappresentazione a blocchi del sistema è opportuno raccogliere i termini in comune come segue:

$$T_1(s) = \frac{\frac{c}{(c+c_{ext1})}}{\left(1 + s \frac{c_{T1}}{(c+c_{ext1})}\right)} \cdot \left[\frac{\frac{d \cdot b_1}{a \cdot c}}{\left(1 + \frac{s}{a}\right)} U_1(s) + T_2(s) + \frac{\frac{d \cdot c_{ext1}}{a \cdot c}}{\left(1 + \frac{s}{a}\right)} \theta_{ext}(s) \right]$$

$$T_2(s) = \frac{\frac{c}{(c+c_{ext2})}}{\left(1 + s \frac{c_{T2}}{(c+c_{ext2})}\right)} \cdot \left[\frac{\frac{d \cdot b_2}{a \cdot c}}{\left(1 + \frac{s}{a}\right)} U_2(s) + T_1(s) + \frac{\frac{d \cdot c_{ext2}}{a \cdot c}}{\left(1 + \frac{s}{a}\right)} \theta_{ext}(s) \right]$$

Pertanto vengono definite

$$T_1(s) = G_1(s) [G_2(s)U_1(s) + T_2(s) + G_3(s)\theta_{ext}(s)]$$

$$T_2(s) = H_1(s) [H_2(s)U_2(s) + T_1(s) + H_3(s)\theta_{ext}(s)]$$

In tale modo le funzioni di trasferimento che legano gli ingressi dei locali U_1 e U_2 con le relative uscite T_1 e T_2 si definiscono $T_1(s) = G(s) \cdot U_1(s)$ e $T_2(s) = H(s) \cdot U_2(s)$ con

$$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) = \left[\frac{\frac{d \cdot b_1}{a \cdot (c+c_{ext1})}}{\left(1 + s \frac{c_{T1}}{(c+c_{ext1})}\right) \left(1 + \frac{s}{a}\right)} \right] \simeq \frac{1.63}{(1 + s \cdot 336.36)(1 + s \cdot 0.07)}$$

$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) = \left[\frac{\frac{d \cdot b_2}{a \cdot (c+c_{ext2})}}{\left(1 + s \frac{c_{T2}}{(c+c_{ext2})}\right) \left(1 + \frac{s}{a}\right)} \right] \simeq \frac{1.36}{(1 + s \cdot 243.29)(1 + s \cdot 0.07)}$$

Infine gli ingressi sono in relazione con la temperatura della stanza adiacente e con quella esterna secondo:

$$T_1(s) = G_1(s) \cdot T_2(s) \longrightarrow G_1(s) = \frac{c}{(c + c_{ext1})} \cdot \frac{1}{\left(1 + s \frac{c_{T1}}{(c+c_{ext1})}\right)} \simeq \frac{0.4}{(1 + s \cdot 336.36)}$$

$$T_1(s) = G_1(s)G_3(s) \cdot \theta_{ext}(s)$$

$$\longrightarrow G_1(s)G_3(s) = \frac{\frac{c}{(c+c_{ext1})}}{\left(1 + s \frac{c_{T1}}{(c+c_{ext1})}\right)} \cdot \frac{\frac{d \cdot c_{ext1}}{a \cdot c}}{\left(1 + \frac{s}{a}\right)} \simeq \frac{0.6}{(1 + s \cdot 336.36)(1 + s \cdot 0.07)}$$

$$T_2(s) = H_1(s) \cdot T_1(s) \longrightarrow H_1(s) = \frac{c}{(c + c_{ext2})} \cdot \frac{1}{\left(1 + s \frac{c_{T2}}{(c+c_{ext2})}\right)} \simeq \frac{0.48}{(1 + s \cdot 243.29)}$$

$$T_2(s) = H_1(s)H_3(s) \cdot \theta_{ext}(s)$$

$$\rightarrow H_1(s)H_3(s) = \frac{\frac{c}{(c+c_{ext2})}}{\left(1 + s \frac{cT_2}{(c+c_{ext2})}\right)} \cdot \frac{\frac{d \cdot c_{ext2}}{a \cdot c}}{\left(1 + \frac{s}{a}\right)} \simeq \frac{0.51}{(1 + s \cdot 243.29)(1 + s \cdot 0.07)}$$

L'intero sistema così definito può quindi essere rappresentato mediante uno schema a blocchi che ne semplifica l'indagine e l'implementazione tramite Simulink.

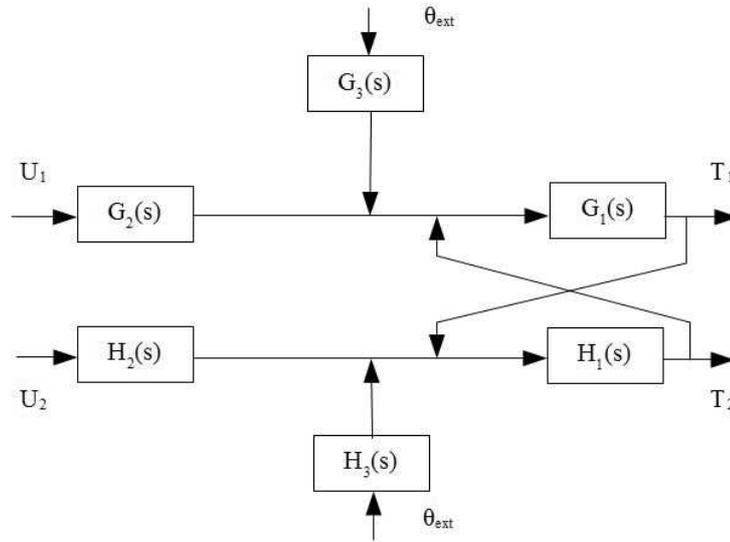


Figura 3.1: Schema a blocchi del sistema

3.2 Studio di $G(s)$ e $H(s)$

In una prima fase di studio si decida di analizzare $G(s)$ e $H(s)$, ossia le funzioni di trasferimento, descritte precedentemente, che legano gli ingressi regolabili di ciascun locale e le temperature percepite dai termometri. La temperatura dell'ambiente esterno e quella del locale contiguo agiscono infatti come disturbi nella regolazione di ciascuna stanza: essa sarebbe auspicabile con il solo ausilio di calorifero e termometro.

Si esamini quindi la risposta al gradino di tali funzioni di trasferimento: la risposta ad altre tipologie di segnale non interessa questa indagine poichè vengono valutate solamente variazioni di temperature che rientrano perfettamente in comportamenti descritti da tale famiglia. Lo studio della risposta al gradino ha

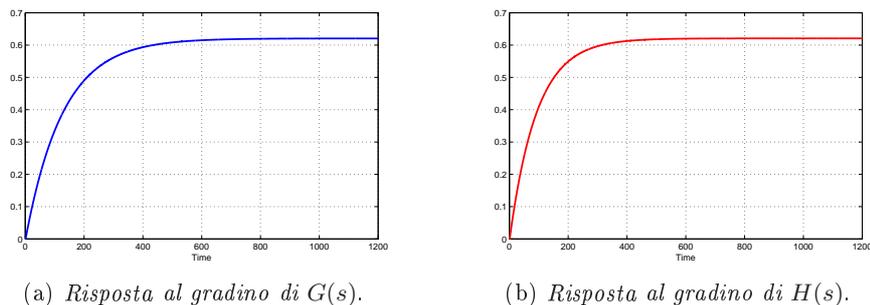


Figura 3.2: Risposte al gradino in catena chiusa

ovviamente senso poichè $G(s)$ e $H(s)$ sono entrambe strettamente proprie con grado relativo 2, $G(0) \neq 0$ e $H(0) \neq 0$ e infine soddisfano il requisito di BIBO stabilità avendo due coppie di poli reali negativi.

Come ci si poteva aspettare la risposta di entrambi i sistemi è monotona crescente con sovraelongazione nulla e quindi tempo di salita coincidente col tempo di assestamento pari per $G(s)$ a $t_r \simeq 294s$ (circa 5 minuti) e per $H(s)$ a $t_r \simeq 167s$ (circa 3 minuti). Ovviamente il secondo parametro è leggermente inferiore a causa delle dimensioni più ridotte della seconda stanza.

3.3 Progetto di due compensatori per $G(s)$ e $H(s)$

A seguito dell'analisi del comportamento del sistema privo di disturbi esterni è intuitivo domandarsi come il sistema complessivo reagisca ad un segnale di tipo gradino in ingresso. Implementando quindi attraverso Simulink il modello tramite funzioni di trasferimento si giunge ad una rappresentazione di questo tipo

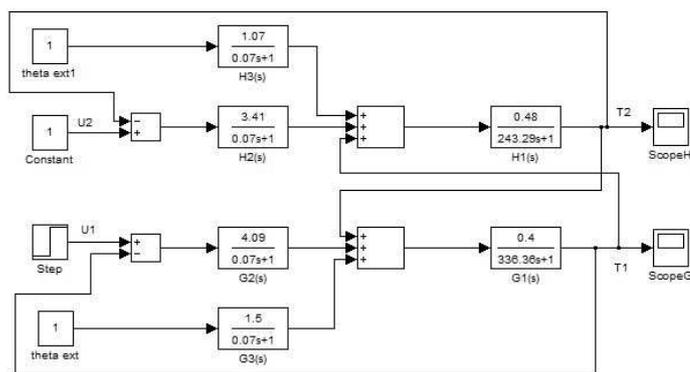
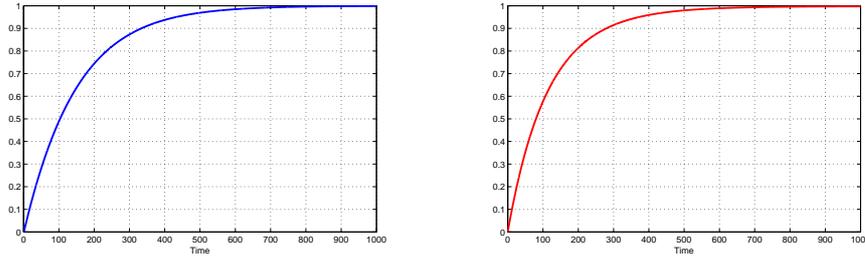


Figura 3.3: Implementazione del sistema complessivo



(a) Risposta del primo locale ad una variazione della propria temperatura. (b) Risposta del secondo locale ad una variazione della temperatura del primo.

Figura 3.4: Risposte al gradino del sistema complessivo in catena chiusa

E' stato semplicemente riproposto lo schema a blocchi precedentemente descritto, con il disturbo generato dalla temperatura esterna e con l'influenza reciproca delle temperature interne delle stanze. Le risposte del sistema sono sopra illustrate. Si osserva che esse sono ancora una volta monotone crescenti ma con tempi di salita peggiori dei precedenti, dovuti all'introduzione dei fattori di disturbo, si aggirano sui $334s$ (circa 5.6 minuti) per la prima stanza e $280s$ per la seconda (4.7 minuti).

Affinchè il sistema possa portarsi a regime in modo più rapido e sia meno dipendente dai disturbi esterni definiamo le specifiche desiderate per il sistema, in base ai quali si progetteranno dei compensatori in grado di realizzarle.

Parametri di progetto per $G(s)$ e $H(s)$:

- sistema di tipo 1 per eliminare i disturbi costanti
- $t_{r_{DES}} = 30s$ quindi $\omega_{a_{DES}} \simeq B_p(3dB) \simeq \frac{\ln 10}{t_{r_{DES}}} \rightarrow \omega_{a_{DES}} = 10^{-1}$ rad
- $m_\varphi \simeq 90^\circ$ per l'accettabilità della risposta e per avere oscillazioni assenti o molto limitate
- $e_{rp} = 0.01$ errore di regime permanente alla rampa

Procedendo attraverso la progettazione per tentativi si determinino inizialmente $C_1(s)$ e $D_1(s)$ che soddisfino i requisiti relativi al tipo (un polo nell'origine assicura che il sistema complessivo sia di tipo 1) e all'errore a regime permanente:

$$C_1(s) = \frac{61.35}{s} \rightarrow e_{rp} = \frac{1}{k_{B_G} k_{B_C}} = \frac{1}{1.63 \cdot 61.35} = 0.01$$

$$D_1(s) = \frac{73.53}{s} \rightarrow e_{rp} = \frac{1}{k_{B_H} k_{B_D}} = \frac{1}{1.36 \cdot 73.53} = 0.01$$

Dal diagramma di Bode di $C_1(s)G(s) = \frac{100}{s(1+s336.36)(1+s0.07)}$ e $D_1(s)H(s) = \frac{100}{s(1+s243.29)(1+s0.07)}$ si osserva che alla pulsazione di attraversamento desiderata i

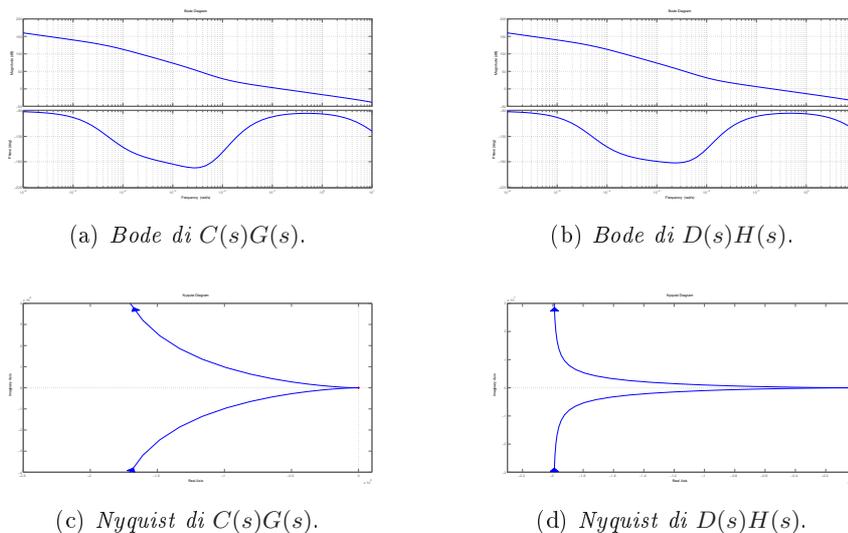


Figura 3.5: Rispetto delle specifiche di progetto.

moduli di entrambe le funzioni si trovano 30dB sopra lo zero ma i margini di fase sono circa nulli. Ora poichè l'utilizzo di una sola rete ritardatrice collocherebbe i moduli a 0dB alla ω_{aDES} ma lascerebbe invariati i margini di fase è necessario collocare preventivamente uno zero una decade prima di ω_{aDES} . Pertanto si ottiene $C_2(s) = D_2(s) = (1 + s10^2)$, dove tali compensatori hanno senso poichè $C(s)$ e $D(s)$ complessivi saranno propri.

Analizzando infine i diagrammi di Bode di $C_1(s)C_2(s)G(s)$ e $D_1(s)D_2(s)H(s)$ si può constatare che il modulo è stato alzato di 20dB ed ora vale quindi circa 50dB alla pulsazione desiderata e il margine di fase risulta di circa 90° . E' possibile quindi ora applicare una rete ritardatrice ponendo una coppia polo-zero distanti tra loro 2 decadi e mezzo prima della ω_{aDES} , precisamente $C_3(s) = D_3(s) = \frac{(1+s10^2)}{(1+s10^{4.3})}$. I compensatori progettati risultano quindi:

$$C(s) = C_1(s)C_2(s)C_3(s) = \frac{61.35 \cdot (1 + s10^2)^2}{s(1 + s10^{4.3})}$$

$$D(s) = D_1(s)D_2(s)D_3(s) = \frac{73.53 \cdot (1 + s10^2)^2}{s(1 + s10^{4.3})}$$

Essi sono funzioni proprie anche se non strettamente e sono quindi compensatori fisicamente realizzabili. I diagrammi di Bode e Nyquist riportati sopra dimostrano rispettivamente come siano state soddisfatte le specifiche e confermano la BIBO stabilità dei sistemi.

A questo punto risulta importante conoscere l'effetto di tali compensatori sul sistema complessivo studiato, per questo viene simulata ancora una volta la risposta al gradino:

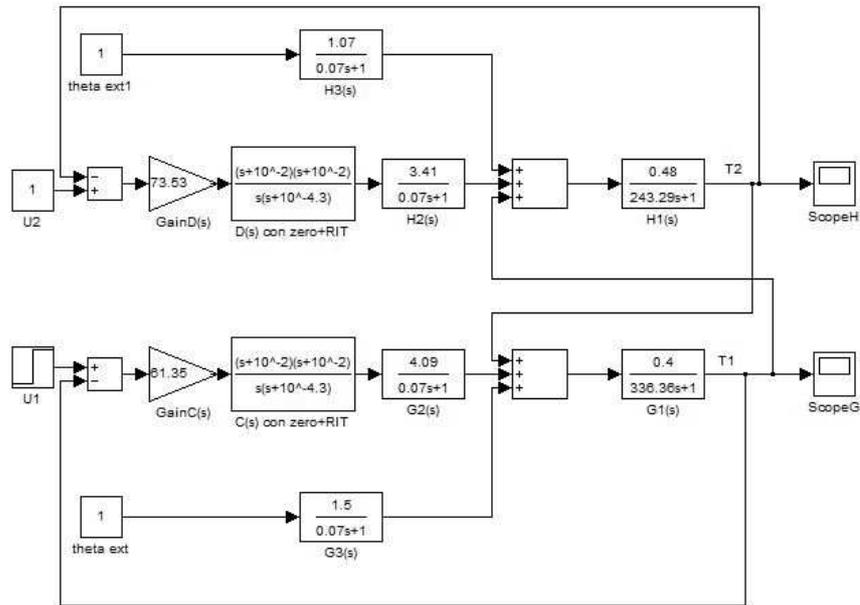


Figura 3.6: Implementazione del sistema complessivo dopo l'introduzione dei compensatori

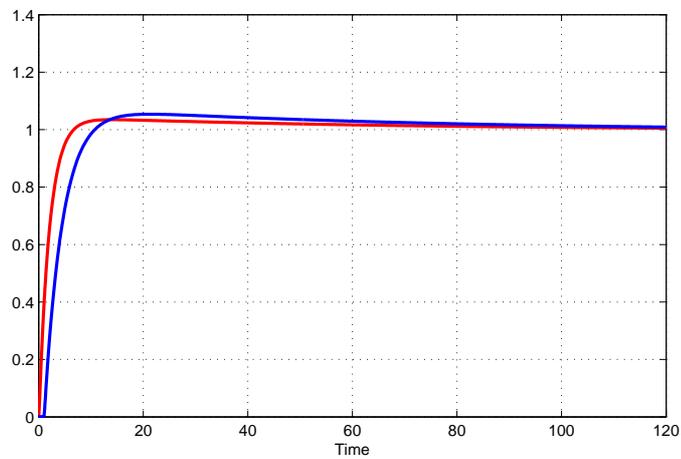


Figura 3.7: In blu la risposta della prima stanza, in rosso quella della seconda.

Come si evince subito dal grafico i tempi di salita ottenuti sono di pochi secondi, quasi istantanei essendo $8s$ per il primo ambiente e addirittura $4s$ per il secondo, a fronte di lievi sovraelongazioni ($\simeq 5.5\%$ per il grafico blu e \simeq

3.5% per il grafico rosso). E' possibile verificare ora il miglioramento apportato dai compensatori confrontando nello stesso grafico le risposte delle due stanze separatamente.

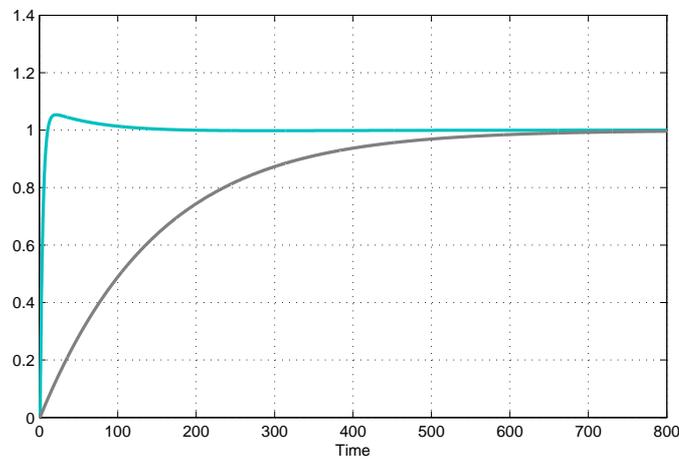


Figura 3.8: Prima stanza: in grigio la risposta senza compensatori, in azzurro dopo la loro applicazione.

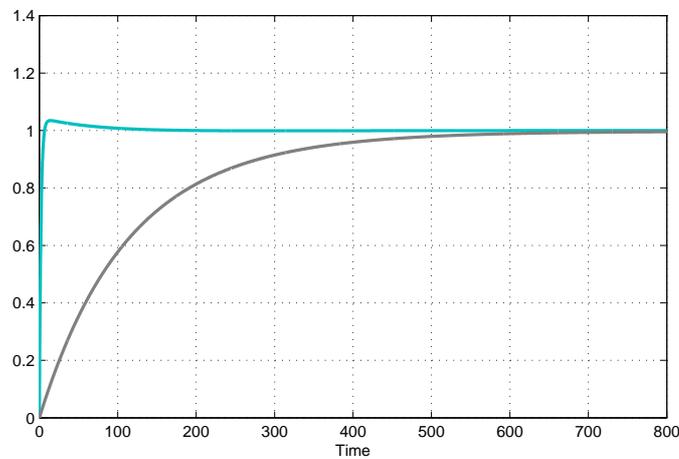


Figura 3.9: Seconda stanza: in grigio la risposta senza compensatori, in azzurro dopo la loro applicazione.

La spiegazione di tempi di salita così ridotti, e di conseguenza della bontà complessiva del sistema, si può ricercare nella semplicità del modello considerato; per questo motivo nel seguito si cercherà di modificarlo per renderlo più accurato.

Capitolo 4

Analisi del sistema con ritardo

4.1 Introduzione di un ritardo

L'analisi che segue si pone l'obiettivo di rendere il sistema studiato più fedele alla realtà di quanto fatto fino ad ora affinando il modello fisico di partenza. Ciò è possibile supponendo che una variazione della temperatura effettiva θ di una stanza non venga risentita nello stesso istante all'interno di questa, ma necessiti invece di un certo intervallo di tempo per propagarsi. Questo intervallo di tempo che sarà chiamato tempo di ritardo T_R verrà stimato dell'ordine del minuto poichè gli ambienti presi in esame possiedono dimensioni ridotte.

L'introduzione di questo fattore di ritardo, oltre a peggiorare i tempi di risposta del sistema, potrebbe causare effetti indesiderati sulla stabilità in catena chiusa poichè genera una rotazione del diagramma di Nyquist e di conseguenza un abbassamento del margine di fase. Le equazioni del sistema originario dovranno essere modificate per far fronte al nuovo parametro di progetto come segue:

$$\begin{cases} \dot{Q}_1(t) = F_1(t) - c(\theta_1(t - \tau) - \theta_2(t - \tau)) - c_{ext1}(\theta_1(t - \tau) - \theta_{ext}(t)) \\ \dot{T}_1(t) = -a \cdot T_1(t) + d \cdot \theta_1(t - \tau) \\ Q_1(t) = c_{T_1} \cdot \theta_1(t) \\ F_1(t) = b_1 \cdot u_1(t - \tau) \end{cases}$$

e analogamente per la seconda stanza.

Si noti che il termine $\theta(t - \tau)$ viene introdotto solamente con riferimento alle temperature θ_1 e θ_2 , e non a θ_{ext} poichè l'ambiente esterno è considerato di ampiezza e capacità termica infinita.

Per comprendere meglio la natura della modifica appena introdotta si applichi la trasformata di Laplace al fattore $\theta(t - \tau)$: $\mathcal{L}[\theta(t - \tau)] = \theta(s) \cdot e^{-s\tau}$, nel caso specifico quindi sarà presente il termine moltiplicativo e^{-sT_R} in tutti i fattori di θ . Analizzando la risposta armonica di questa funzione $e^{-j\omega T_R}$ ci si rende facilmente conto che il suo modulo è unitario su tutte le frequenze $|e^{-j\omega T_R}| = 1$ e l'argomento è pari a $\varphi = \arg(e^{-j\omega T_R}) = -T_R\omega$. Si spiega così l'affermazione

secondo cui il maggiore problema indotto dal ritardo sia proprio l'abbassamento del margine di fase, direttamente proporzionale a T_R e alla pulsazione. Questa considerazione sarà essenziale per il progetto di compensatori adatti ad agire in presenza di fenomeni di ritardo.

Infine si osservi che le funzioni di trasferimento del sistema rimangono invariate anche con l'applicazione del termine esponenziale e per tale motivo non verranno qui riproposte.

Per implementare il nuovo schema da analizzare viene utilizzata la funzionalità *Transport Delay* disponibile nella libreria *Continuous* di Simulink.

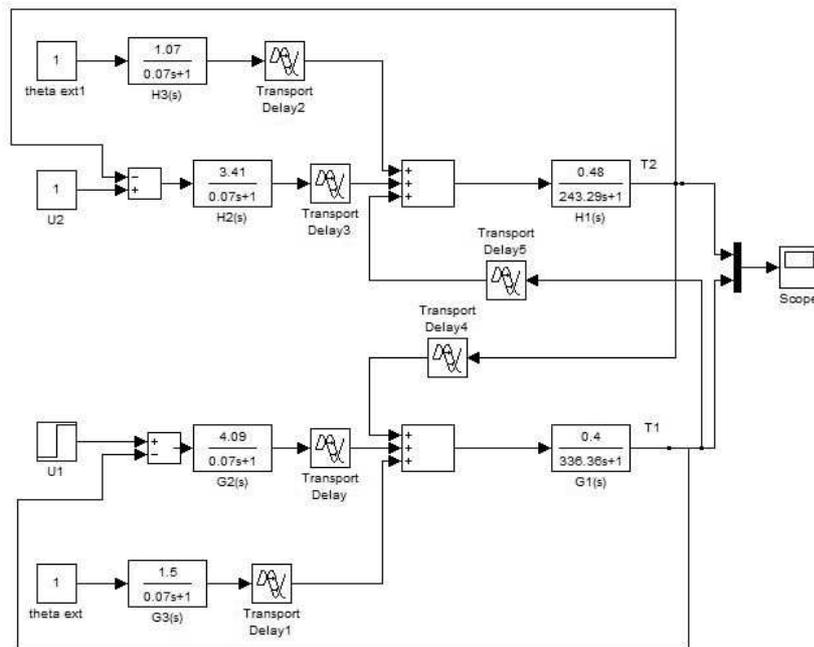


Figura 4.1: Sistema ad anello chiuso con ritardo

La risposta graficata nella figura sottostante è ottenuta con un tempo di ritardo pari a $T_R = 120s$ ed è in accordo con le considerazioni appena fatte: presenta tempi di salita nettamente maggiori e introduce una sovraelongazione che peggiora mano a mano che il ritardo aumenta. In particolare per quanto riguarda il primo locale, il maggiore (in blu):

$$t_r = 304s (\simeq 5\text{minuti}) \quad t_s = t_r \quad s = 7.2\%$$

mentre per il secondo (in rosso):

$$t_r = 253s (\simeq 4.2\text{minuti}) \quad t_s = 387s \quad s = 10.9\%$$

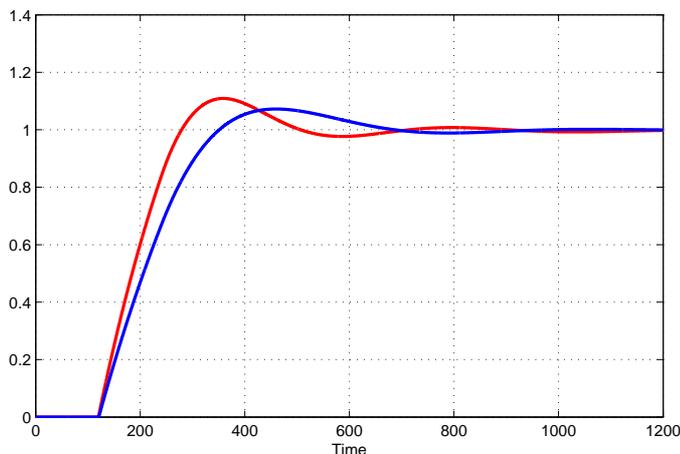


Figura 4.2: In blu la risposta della prima stanza, in rosso quella della seconda, $T_R = 120s$.

4.2 Progetto di nuovi compensatori per il sistema con ritardo

Di seguito si propone la realizzazione di due compensatori atti al controllo della temperatura degli ambienti di cui si è appena variato il modello. Il ritardo di propagazione all'interno dei vani infatti non permette che il sistema venga controllato correttamente dai compensatori progettati sul modello precedente. La risposta al gradino del sistema infatti in tali condizioni diverge rendendo i compensatori assolutamente inutilizzabili.

Lo scopo principale che ci si pone è quindi quello di modificare i compensatori in modo da ridurre la velocità di azione poichè risulta inutile disporre di un compensatore veloce se il sistema non è in grado di evolvere almeno alla stessa velocità. Il parametro fondamentale da tenere in considerazione è il margine di fase che, come detto in precedenza, può essere sensibilmente ridotto a causa del ritardo e compromettere la stabilità dell'intero sistema, indispensabile perchè abbia senso il controllo. Per tener conto di entrambe queste osservazioni si vorrebbe abbassare la pulsazione di attraversamento del sistema ω_{aDES} : il sistema sarà complessivamente più lento, verranno però ridotte le oscillazioni e il margine di fase peggiorerà proporzionalmente a T_R e ω . Ovviamente quindi ci si aspetteranno tempi di salita maggiori rispetto a quelli del sistema senza ritardo, compromesso voluto e necessario al fine di poter analizzare un sistema che tenda il più possibile a rappresentare la realtà.

I restanti parametri di progetto per questi nuovi compensatori rimangono invariati:

- sistema di tipo 1 per eliminare i disturbi costanti
- $m_\varphi \simeq 90^\circ$ per l'accettabilità della risposta e per avere oscillazioni ridotte
- $e_{rp} = 0.01$ errore di regime permanente alla rampa

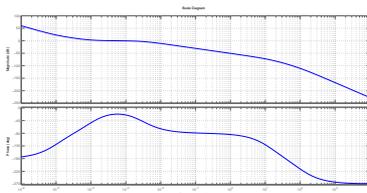
$\omega_{aDES} \simeq 10^{-4}$ rad rappresenta un compromesso tra velocità di risposta e riduzione delle oscillazioni.

Operando ora il progetto per tentativi come per i precedenti compensatori si mantengono $C_1(s) = \frac{61.35}{s}$ e $D_1(s) = \frac{73.53}{s}$ già determinati, dal diagramma di Bode di $C_1(s)G(s) = \frac{100}{s(1+s336.36)(1+s0.07)}$ e $D_1(s)H(s) = \frac{100}{s(1+s243.29)(1+s0.07)}$; si scelga come pulsazione di attraversamento $\omega_{aDES} \simeq 10^{-4}$ rad. A tale pulsazione desiderata i moduli di entrambe le funzioni si trovano $120dB$ sopra gli $0dB$ e i margini di fase corrispondenti sono circa 90° . Tuttavia se la ω_{aDES} fosse maggiore il margine di fase peggiorerebbe di circa 90° ogni 2 decadi oltre alla già discussa diminuzione generata dal ritardo finito. L'obiettivo finale quindi non è solo quello di alzare il modulo in corrispondenza della ω_{aDES} ma anche di garantire un margine di fase sensibilmente più elevato a pulsazioni maggiori. Il progetto quindi prevede l'utilizzo per entrambi i sistemi di una rete ritardatrice del tipo $C_2(s) = D_2(s) = \frac{(1+s10^5)}{(1+s10^{11})}$ per correggere il modulo (coppia polo-zero distanti 6 decadi) e, a seguire, di una anticipatrice come $C_3(s) = D_3(s) = \frac{(1+s10^4)}{(1+s10^{-2})}$ per garantire m_φ elevato e assicurare che alla pulsazione desiderata il modulo non aumenti nuovamente.

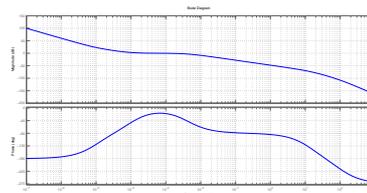
Complessivamente i compensatori progettati risultano quindi:

$$C(s) = C_1(s)C_2(s)C_3(s) = \frac{61.35 \cdot (1 + s10^4)(1 + s10^5)}{s(1 + s10^{11})(1 + s10^{-2})}$$

$$D(s) = D_1(s)D_2(s)D_3(s) = \frac{73.53 \cdot (1 + s10^4)(1 + s10^5)}{s(1 + s10^{11})(1 + s10^{-2})}$$



(a) Bode di $C(s)G(s)$.



(b) Bode di $D(s)H(s)$.

Figura 4.3: Rispetto delle specifiche di progetto (Diagrammi di Bode).

Vengono riportati sopra i diagrammi di Bode e di seguito quelli di Nyquist che dimostrano rispettivamente come siano state soddisfatte le specifiche e confermano la BIBO stabilità dei sistemi.

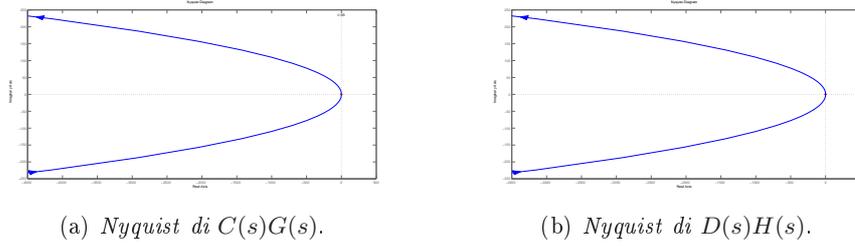


Figura 4.4: Rispetto delle specifiche di progetto (Diagrammi di Nyquist).

Per comprendere ora la bontà di tali compensatori è necessario implementare ancora una volta la risposta al gradino dell'intero sistema studiato secondo lo schema di Simulink sotto proposto:

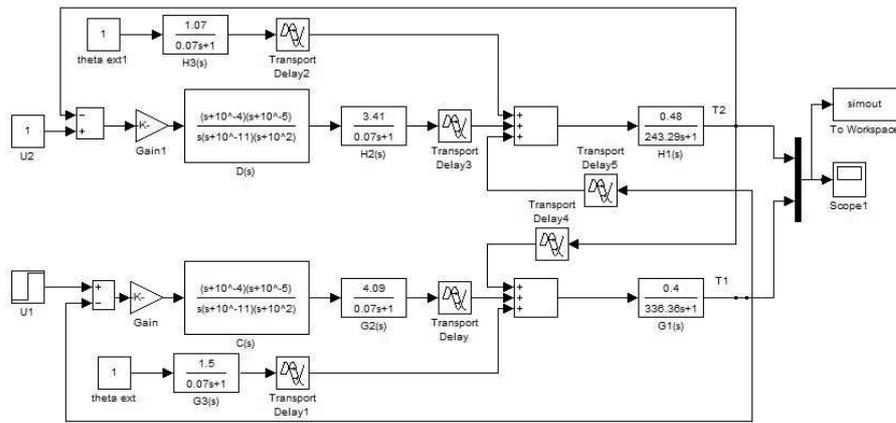


Figura 4.5: Implementazione del sistema complessivo con ritardo dopo l'introduzione dei compensatori

Dai grafici ottenuti si evince come i compensatori introdotti abbiano sensibilmente migliorato gli effetti prodotti dal ritardo in quanto, a discapito di un rallentamento della risposta, sono state ridotte di molto le oscillazioni. Nel primo locale, con dimensioni maggiori (in azzurro in Figura 4.6), si misura $t_r = 434s (\simeq 7.2\text{minuti})$, a differenza del precedente tempo di salita pari a $304s$ (in grigio) e la risposta al gradino ottenuta è monotona crescente, per cui risulta nulla la sovraelongazione. Analogamente per il secondo ambiente (in azzurro in Figura 4.7) si ha la stessa tipologia di risposta: $t_r = 317s (\simeq 5.3\text{minuti})$, circa un minuto più lento dell'implementazione senza compensatori (in grigio) e non è più presente sovraelongazione.

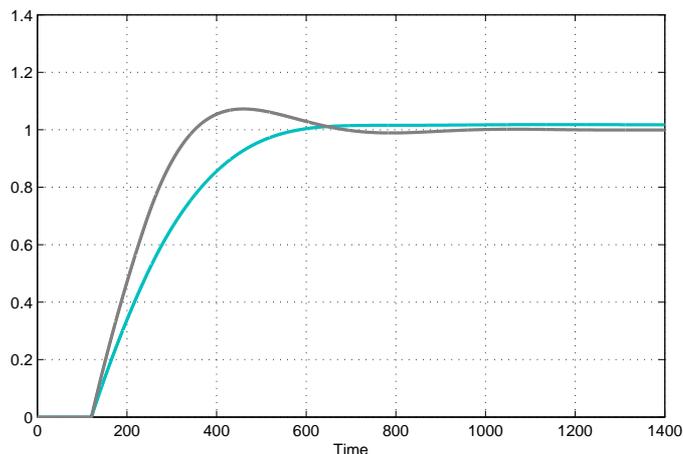


Figura 4.6: La risposta della prima stanza prima dell'introduzione dei compensatori in grigio, dopo in azzurro. ($T_R = 120s$)

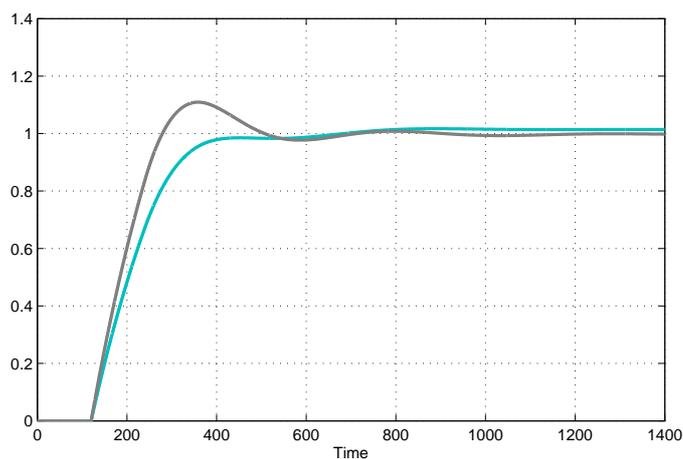


Figura 4.7: La risposta della seconda stanza prima dell'introduzione dei compensatori in grigio, dopo in azzurro. ($T_R = 120s$)

Di particolare interesse è la verifica della bontà dei compensatori progettati per tempi di ritardo superiori: se infatti il tempo di propagazione all'interno dei locali fosse stato stimato malamente e richiedesse invece un intervallo temporale maggiore sarebbe opportuno che i compensatori correggessero correttamente ancora una volta il comportamento del sistema. Per questo motivo si è implementato lo stesso schema di figura 4.4 con un ritardo T_R pari a $240s$ (il doppio

di quello stimato) e il risultato di tale simulazione è sotto riportato.

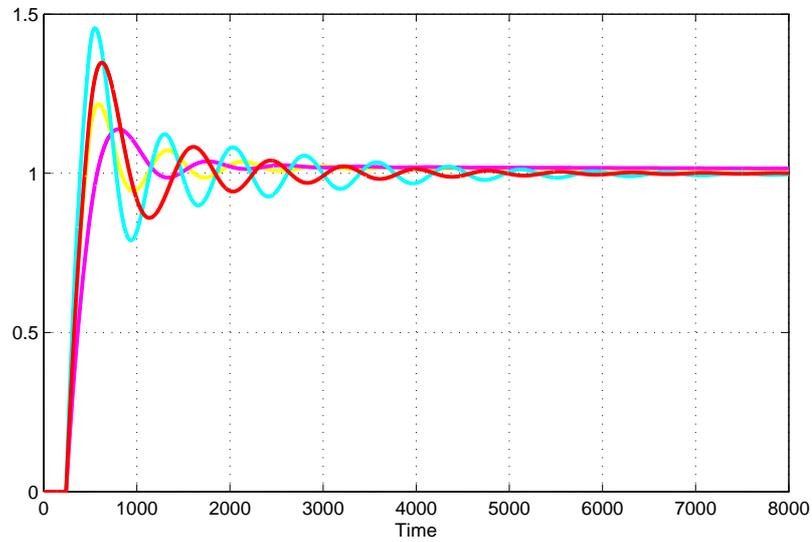


Figura 4.8: La risposta della prima stanza prima dell'introduzione dei compensatori in rosso, dopo in viola. La risposta della seconda stanza prima dell'introduzione dei compensatori in azzurro, dopo in giallo. ($T_R = 240s$)

Capitolo 5

Analisi del sistema con saturazione

A questo punto della trattazione risulta conveniente specificare in modo più accurato il comportamento dei caloriferi all'interno dei locali. Il loro funzionamento è stato fino ad ora modellato secondo l'equazione $F(t) = b \cdot u(t)$ dove, ricordiamo, $F(t)$ rappresenta il flusso di calore erogato, $u(t)$ la variabile di ingresso e b il parametro trasduttore. Poichè le stanze possono essere raffreddate solamente attraverso l'esterno i caloriferi non sono in grado di erogare calore negativo e, da ora, considereremo anche che abbiano un vincolo sul calore massimo erogabile, condizione sempre presente nei dispositivi reali. Per questo motivo introduciamo quindi la componente non lineare di tipo *Saturazione*, in grado di soddisfare a questa duplice richiesta. Il flusso di calore uscente dai caloriferi sarà così modellato:

$$F(u(t)) = \begin{cases} 0, & \text{se } u(t) < 0 \\ b u(t), & \text{se } 0 \leq u(t) \leq u_{max} \\ b u_{max} & \text{se } u(t) > u_{max} \end{cases}$$

Il sistema diventerà quindi non lineare e non sarà più possibile rappresentarlo in forma matriciale; le equazioni che lo descrivono saranno così modificate:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1(t) = -\frac{(c+c_{ext1})}{cT_1} \cdot \theta_1 + \frac{c}{cT_1} \cdot \theta_2 + F_1(u_1(t)) + \frac{c_{ext1}}{cT_1} \cdot \theta_{ext} \\ \dot{\theta}_2(t) = -\frac{(c+c_{ext2})}{cT_2} \cdot \theta_2 + \frac{c}{cT_2} \cdot \theta_1 + F_2(u_2(t)) + \frac{c_{ext2}}{cT_2} \cdot \theta_{ext} \\ \dot{T}_1(t) = -a \cdot T_1(t) + d \cdot \theta_1(t) \\ \dot{T}_2(t) = -a \cdot T_2(t) + d \cdot \theta_1(t) \end{cases}$$

Anche le funzioni di trasferimento ricavate precedentemente non saranno più valide e ovviamente dipenderanno dal valore assunto dall'ingresso. Riportiamo quelle relative alla prima stanza ma per la seconda risultano analoghe.

$$\begin{cases} T_1(s) = G_1(s)[T_2(s) + G_3(s) \cdot \theta_{ext}(s)] & \text{per } u(t) < 0 \\ T_1(s) = G_1(s)[G_2(s) \cdot U_1(s) + T_2(s) + G_3(s) \cdot \theta_{ext}(s)] & \text{per } 0 \leq u(t) \leq u_{max} \\ T_1(s) = G_1(s)[G_2(s) \cdot u_{max} + T_2(s) + G_3(s) \cdot \theta_{ext}(s)] & \text{per } u(t) > u_{max} \end{cases}$$

Per simulare il funzionamento del processo dopo l'introduzione della componente non lineare utilizziamo la funzionalità *Saturation* di Simulink che verrà applicata all'ingresso di $G_1(s)$ e $H_1(s)$ in accordo con il sistema sopra riportato. La saturazione sarà quindi compresa tra il valore minimo 0 che garantisce di non poter raffreddare i locali e il valore massimo $u_{max} = 10$, scelto sulla base di una possibile escursione (in volt) di un calorifero, controllato in tensione.

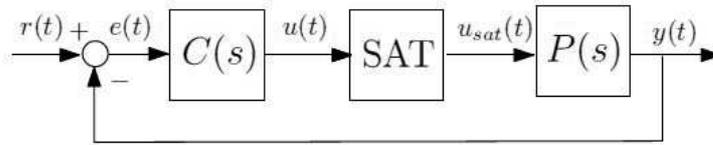


Figura 5.1: Generico schema applicativo della componente saturazione ad un processo $P(s)$ controllato da $C(s)$.

Possiamo aspettarci che il sistema non lineare subisca delle modifiche: intuitivamente un cambiamento sarà sicuramente di carattere temporale, raffreddamento e riscaldamento oltre il valore massimo registreranno dei rallentamenti a causa della dilatazione temporale per rispettare i nuovi vincoli, pertanto aumenteranno sovranelongazione e ancor di più tempo di assestamento.

Per verificare tali affermazioni ci si affidi ancora una volta all'apporto del simulatore: l'applicazione di tali componenti al sistema di partenza, prima dell'introduzione del ritardo e del progetto dei compensatori, non fornisce tuttavia variazioni alle risposte al gradino unitario in nessuno dei due locali. L'origine di tale fenomeno può essere ricercata in due aspetti differenti: il primo risiede nella componente proporzionale (che è proporzionale all'errore) che risulta molto piccola rispetto al valore in ingresso, la seconda invece nell'assenza di una componente integrativa nel modello originario. Tali considerazioni derivano dal fatto che per valori diversi di u_{max} , in particolare inferiori alla metà del guadagno del processo, la risposta del sistema con saturazione invece inizia a modificarsi, non dal punto di vista del tipo di risposta che rimane di tipo monotono crescente, ma aumentando sensibilmente il tempo di salita.

Se invece l'elemento di saturazione viene applicato al sistema complessivo dei compensatori progettati nel capitolo 3.3, si possono constatare le previsioni supposte: il transitorio iniziale rimane praticamente inalterato mentre peggiorano la sovranelongazione e, ancor di più, il tempo di assestamento. Per la prima stanza si osserva che il tempo di salita $t_r = 19s$ è sufficientemente rapido,

a discapito di una sovraelongazione $s \simeq 19.1\%$ e di un tempo di assestamento di $347s$. Similmente per il secondo ambiente si valuta $t_r = 13s$, $s = 14.2\%$ e $t_s = 225s$.

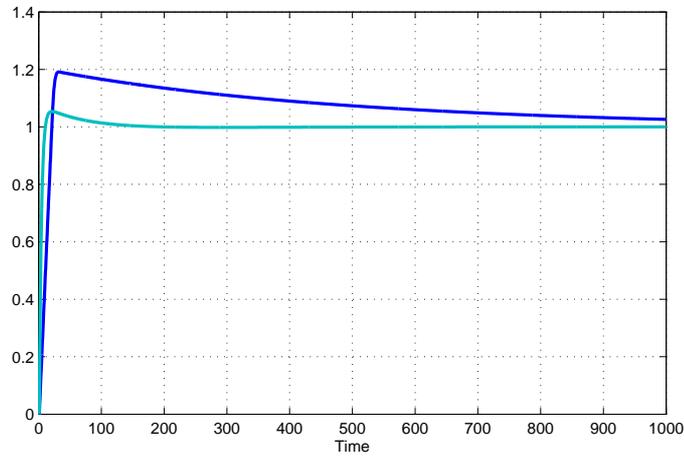


Figura 5.2: In blu la risposta della prima stanza compresa di elemento di saturazione, in azzurro senza.

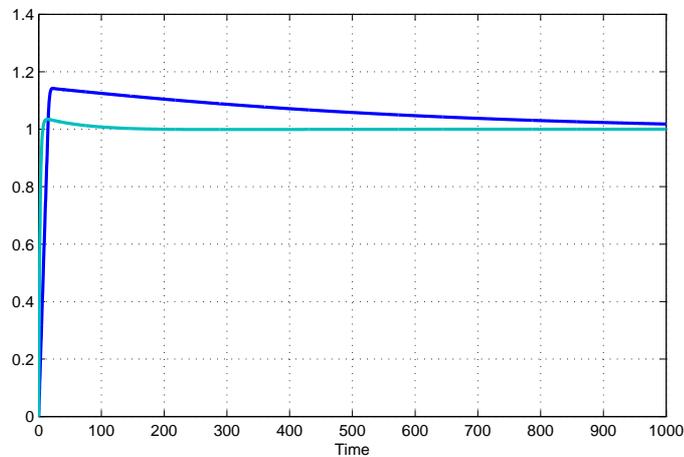


Figura 5.3: In blu la risposta della prima stanza compresa di elemento di saturazione, in azzurro senza.

Con riferimento alla figura 5.1 si deduce che, in questo secondo caso, la variabile $u(t)$, uscente dal compensatore, sarà diversa da $u_{sat}(t)$, variabile di controllo del processo, in presenza di saturazione, ossia quando $u(t) < 0$ o $u(t) \geq u_{max}$.

Il tempo necessario affinché le due variabili tornino ad assumere lo stesso valore, e quindi affinché il sistema torni a comportarsi in modo lineare, è il tempo che occorre all'errore per portarsi a zero. A causa di questo maggior intervallo nell'annullamento dell'errore, e in particolare quando l'errore assume valori negativi, le azioni proporzionale ed integrale agiscono per più tempo rispetto al caso senza limitazioni e quando finalmente l'errore andrà ad annullarsi il segnale di controllo resterà alto causando l'aumento della sovraelongazione e del tempo di assestamento. Il fatto che il segnale di controllo saturi e che il processo evolva quindi con ingresso costante provoca tuttavia l'apertura dell'anello di retroazione, condizione assolutamente indesiderata per il controllo. Il grafico riportato sotto mostra, ad esempio, l'andamento del segnale in uscita e dell'errore relativo al primo locale.

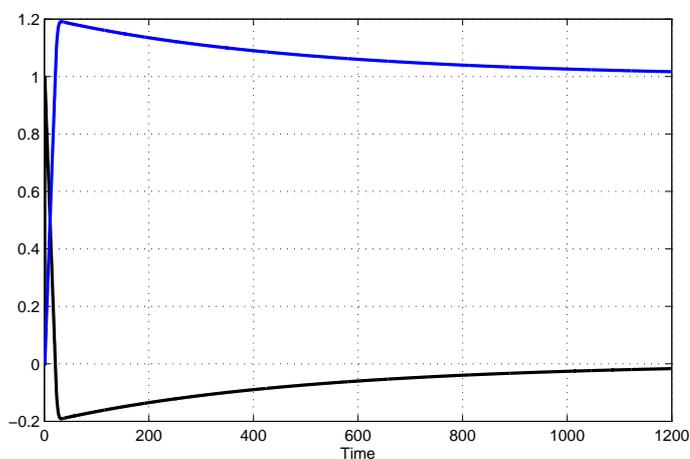


Figura 5.4: In blu la risposta della prima stanza compresa di elemento di saturazione e compensatori, in nero l'errore relativo.

Si osservi che nel grafico della risposta delle stanze con saturazione se aumentiamo il tempo visualizzabile compaiono altri due picchi: essi rappresentano saturazioni successive con sovraelongazione ridotta e con durata inferiore. La causa di tale fenomeno può essere però spiegata con il comportamento imprevedibile che presenta la saturazione; in ogni caso però esso risulta limitato nel tempo, per cui tali effetti scompaiono nel lungo periodo.

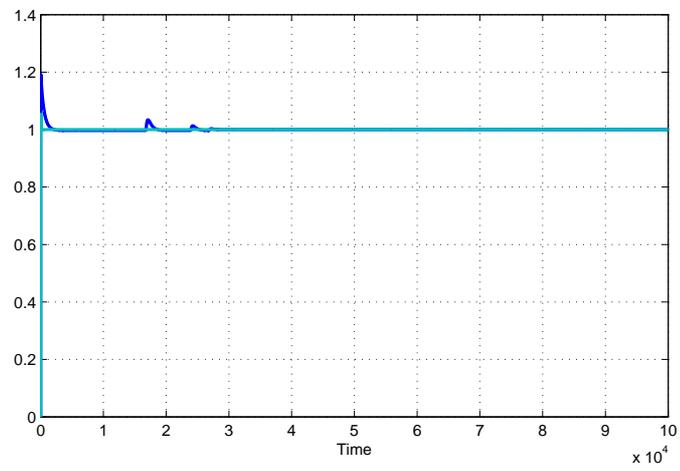


Figura 5.5: In blu la risposta della prima stanza compresa di elemento di saturazione e compensatori, in azzurro senza.

Bibliografia

1. Mauro Bisiacco e Maria Elena Valcher, *Controlli Automatici*, Libreria Progetto Padova, 2008
2. Mauro Bisiacco e Simonetta Braghetto, *Teoria dei sistemi dinamici*, Progetto Leonardo Esculapio Bologna, 2011
3. C.Bonacina A.Cavallini e L.Mattarolo, *Trasmissione del calore*, Cleup editore, 1975

Ringraziamenti

Al termine di questo mio primo ciclo di studi desidero ringraziare tutti coloro che mi hanno accompagnato durante questi anni e hanno permesso il raggiungimento di questo traguardo.

Ringrazio il mio relatore, il professor Mauro Bisiacco, che ha suscitato il mio interesse verso le discipline a cui si dedica attraverso la chiarezza espositiva e la passione trasmessa durante le sue lezioni, e inoltre per l'attenta e precisa guida alla compilazione di questo elaborato.

Ringrazio poi la mia famiglia per l'affetto, la pazienza e la costante vicinanza dai momenti più difficili a quelli ricchi di soddisfazione.

Un doveroso grazie anche a Mattia che non ha mai smesso di credere in me e alla sua famiglia che mi ha sempre incoraggiato e sostenuto con entusiasmo.

Desidero ringraziare inoltre per l'amicizia Sara, con cui ho condiviso le più importanti tappe di questo mio percorso.