

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA "GALILEO GALILEI"

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN FISICA

Tesi di Laurea

Simmetrie e rappresentazioni proiettive in meccanica  
quantistica

Relatore

Prof. Roberto Volpato

Laureando

Luca Lombardi

Anno Accademico 2022/2023



# Abstract

È ben noto che in meccanica quantistica gli operatori unitari o anti-unitari che corrispondono alle simmetrie di un sistema fisico realizzano talvolta una rappresentazione genuinamente proiettiva del gruppo di simmetria. In questa tesi, attraverso lo studio di alcuni esempi particolarmente significativi, vengono analizzate alcune conseguenze della presenza di rappresentazioni genuinamente proiettive per lo spettro dell'Hamiltoniana e per le sue degenerazioni.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>1 Simmetrie in un sistema quantistico</b>	<b>4</b>
1.1 Elementi di meccanica quantistica . . . . .	4
1.2 Il concetto di simmetria tramite la teoria dei gruppi . . . . .	5
1.3 Trasformazioni di simmetria quantistiche e rappresentazioni . . . . .	8
1.3.1 Rappresentazioni genuinamente proiettive . . . . .	10
1.3.2 Rappresentazioni proiettive di un gruppo di Lie . . . . .	12
1.4 Simmetrie dinamiche . . . . .	14
<b>2 Simmetrie di una particella su un cerchio</b>	<b>16</b>
2.1 Simmetrie in presenza di un potenziale . . . . .	21
<b>Conclusione</b>	<b>25</b>

# Introduzione

La nozione di *simmetria* è presente all'interno del processo evolutivo dell'uomo sin dai suoi albori. Essa è infatti ben evidente già nella natura che lo circonda: possiamo notare per esempio che molti esseri animati, tra cui gli esseri umani stessi, presentano una simmetria per riflessioni rispetto ad un piano, determinato in questo caso dall'esistenza di due direzioni privilegiate: una verticale dovuta all'attrazione gravitazionale ed una orizzontale identificata con la direzione del moto. Tale simmetria è detta simmetria bilaterale.

Inoltre possiamo oggi affermare che già a partire dall'Homo Ergaster l'essere umano ha cominciato a perseguire principi di simmetria nella fattura dei suoi utensili, guidato spesso da fini estetici oltre che da motivazioni di carattere funzionale.

Infatti ritroviamo in maniera preponderante costruzioni simmetriche in gran parte della produzione artistica passata oltre che contemporanea e argomenti basati sulla simmetria erano molto frequenti all'interno della filosofia antica, in cui spesso veniva ricercato il *bello* nelle leggi, anche se metafisiche, che erano ritenute governare il mondo. L'uomo dunque implementò le sue considerazioni di carattere simmetrico nei suoi tentativi di *spiegazione della realtà*, che poi nel corso dei secoli divennero appannaggio delle scienze naturali, lentamente distaccatesi dalla filosofia.

La fisica classica in particolare è largamente basata sull'assunzione dell'isotropia dello spazio ed omogeneità sia dello spazio che del tempo per un sistema isolato, e dunque dell'invarianza di questo per roto-traslazioni, nozione poi ampliata con la relatività speciale postulando l'invarianza dello spazio-tempo di Minkowski sotto trasformazioni di Poincaré (e la validità del principio di relatività). Nel corso del ventesimo secolo la simmetria ha assunto un ruolo sempre più importante in fisica, diventando uno dei principi guida che ha attraversato prima l'iniziale teoria dei quanti e poi la sua evoluzione nella teoria quantistica dei campi. Tutt'oggi la ricerca che si concentra sulla costruzione di nuove teorie, o sulla comprensione più profonda di quelle già esistenti, non può prescindere da uno studio attento delle simmetrie che le riguardano e molto ancora c'è da apprendere e scoprire. Spesso risulta utile studiare modelli semplici per ottenere risultati applicabili a sistemi più complessi ma che presentano le stesse simmetrie e di frequente campi della fisica apparentemente lontani tra loro interagiscono poiché quanto ottenuto in uno grazie ad argomenti di simmetria è trasferibile all'altro.

In questa tesi affronteremo, dopo aver definito gli strumenti di base per descrivere un sistema quantistico non-relativistico nella sezione 1.1, alcuni dei modi in cui i principi di simmetria vengono implementati all'interno della meccanica quantistica, con grande attenzione all'uso della teoria dei gruppi e delle loro rappresentazioni (cfr. sezione 1.2), e in particolare come questi portino alla comprensione di fenomeni ed elementi del sistema non banali. È il caso delle rappresentazioni proiettive e genuinamente proiettive, approfondite tramite la teoria delle estensioni centrali e la teoria di Lie e applicate al caso delle simmetrie dinamiche in 1.4, che costituiscono il fulcro teorico dell'elaborazione seguente.

Successivamente nel capitolo 2 verrà studiato nel dettaglio il sistema fisico costituito da una particella carica vincolata su un cerchio che gira attorno ad un solenoide. Verrà trattata la sua quantizzazione e cosa questa comporti per il gruppo di simmetria dell'Hamiltoniana  $H$  al

variare del parametro  $\theta$ , classicamente associato al flusso magnetico, e in particolare gli effetti delle simmetrie sullo spettro di  $H$  in virtù di quanto ricavato nella sezione 1.4.

Infine in 2.1 analizzeremo le conseguenze dell'aggiunta di un potenziale  $V(nx)$  ad  $H$  sulle simmetrie presenti nel caso libero, concentrandoci particolarmente sul caso  $n = 2$ . Nonostante l'aggiunta di  $V(nx)$  renda il sistema non esattamente risolvibile sarà possibile, a partire dai soli risultati ottenuti nel primo capitolo, porre dei vincoli sulla sua dinamica, poi confermati tramite la teoria delle perturbazioni.

# Capitolo 1

## Simmetrie in un sistema quantistico

### 1.1 Elementi di meccanica quantistica

Prima di approfondire l'argomento di questo capitolo è utile richiamare alcune nozioni di base<sup>1</sup> nell'ambito della meccanica quantistica non-relativistica.

Nella descrizione matematica di un sistema fisico è necessario caratterizzare gli enti fondamentali del sistema, ovvero gli *stati* e le *osservabili*, e l'insieme di criteri che li regolano e li mettono in relazione tra loro.

Gli stati puri, quindi di informazione massimale, di un sistema quantistico sono classi di equivalenza di uno spazio vettoriale  $\mathcal{H}$  a valori complessi dotato di una forma hermitiana, detta prodotto interno o prodotto scalare, tale che

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle^* \quad \forall \psi, \varphi \in \mathcal{H}. \quad (1.1)$$

Il prodotto interno induce una norma tramite  $\|\psi\| = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}$  e quindi una topologia su  $\mathcal{H}$  rispetto alla quale viene richiesto che lo spazio  $\mathcal{H}$  sia completo, ovvero che ogni successione di Cauchy definita su di esso converga.  $\mathcal{H}$  è quindi uno *spazio di Hilbert*. È inoltre richiesto che  $\mathcal{H}$  sia separabile in modo che sia possibile determinare su di esso una base ortonormale numerabile e, per il teorema di Riesz-Fischer, scrivere in modo univoco ogni vettore di  $\mathcal{H}$  come combinazione lineare di elementi della base.

Conseguentemente è possibile considerare un unico spazio di Hilbert *astratto*, a meno di isomorfismi, per ogni cardinalità della sua base. È dunque sensata l'introduzione della notazione di Dirac che permette di riscrivere il prodotto scalare 1.1 come l'applicazione del funzionale lineare corrispondente a  $\varphi$ , la cui esistenza è garantita dal lemma di Riesz,  $\langle \varphi | \in \mathcal{H}^* \cong \mathcal{H}$  a  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ , dove  $\mathcal{H}$  è da intendersi astratto.

Le osservabili  $\mathcal{O}$ , che classicamente sono descritte da funzioni reali sullo spazio delle fasi, sono invece descritte quantisticamente da *operatori*  $A$  lineari, con dominio denso in  $\mathcal{H}$  e autoaggiunti. Il loro spettro matematico  $\sigma(A)$  corrisponde all'insieme di valori fisicamente ottenibili da una misura di  $\mathcal{O}$  e i loro autovettori identificano lo stato in cui il sistema viene *proiettato* dopo la misura.

Ne segue che, in dimensione finita<sup>2</sup>, ogni operatore  $A$  può essere scritto attraverso la decomposizione spettrale come la somma dei proiettori  $P_n$  relativi all'autostato  $\psi_n$  moltiplicati per il rispettivo autovalore  $\lambda_n$ :

$$A = \sum_{\lambda_n \in \sigma(A)} \lambda_n P_n = \sum_{\lambda_n \in \sigma(A)} \lambda_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n|. \quad (1.2)$$

<sup>1</sup>Il riferimento principale nella stesura di questa sezione è [1].

<sup>2</sup>Nel caso  $\infty$ -dimensionale ciò può essere generalizzato tramite l'introduzione delle famiglie spettrali.

Il confronto con i risultati sperimentali avviene tramite il *valore medio*, definito come

$$\langle A \rangle_\psi := \frac{\langle \psi | A | \psi \rangle}{\|\psi\|^2} \quad (1.3)$$

che costituisce la stima teorica del valor medio sperimentale, ovvero la media di  $N$  misure di  $\mathcal{O}$ , nel limite  $N \rightarrow \infty$ , effettuate sullo stato identificato da  $\psi \in \mathcal{H}^3$ .

Bisogna però considerare che, come detto inizialmente, i vettori che appartengono ad  $\mathcal{H}$  non sono in corrispondenza uno-a-uno con gli stati (puri) quantistici, ma lo sono a meno di una fase. Il reale spazio degli stati infatti non è  $\mathcal{H}$  ma lo *spazio proiettivo* dei sottospazi unidimensionali dello spazio di Hilbert  $\mathbf{P}\mathcal{H} := (\mathcal{H} \setminus \{0\}) / \sim$  con la relazione di equivalenza

$$\psi \sim \varphi \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \varphi = \lambda \psi \quad (1.4)$$

le cui classi di equivalenza vengono anche denominate *raggi vettori*.

Ciò appare naturalmente giustificato considerando che il valor medio, come definito in 1.3, di un'osservabile  $\mathcal{O}$  rappresentata da un operatore  $A$  risulta essere lo stesso se calcolato su vettori che rispettano la relazione 1.4. C'è dunque una ridondanza nell'informazione fisica contenuta negli elementi di  $\mathcal{H}$ .

Infine la dinamica di un sistema quantistico è descrivibile tramite un processo di evoluzione temporale che per un'osservabile  $\mathcal{O}$  di un sistema isolato rispetta  $\mathcal{O}_{t=0} = \mathcal{O}$  e  $(\mathcal{O}_{t_1})_{t_2} = \mathcal{O}_{t_1+t_2}$ . Inoltre poiché la verifica sperimentale avviene sui valori medi di  $\mathcal{O}$  e non sull'osservabile stessa deve valere

$$\langle \mathcal{O}_t \rangle_S = \langle \mathcal{O} \rangle_{S_t} \quad (1.5)$$

con  $S$  uno stato del sistema e  $S_t$  il suo evoluto temporale al tempo  $t$ .

Per un sistema conservativo questo processo è descritto dall'operatore  $U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H t}$ , con  $H$  l'Hamiltoniana del sistema, ed è possibile ed equivalente considerare il caso in cui ad evolvere sono solo gli stati (visuale di Schrödinger) o solo le osservabili (visuale di Heisenberg).

## 1.2 Il concetto di simmetria tramite la teoria dei gruppi

Una *trasformazione di simmetria* è una trasformazione che agisce sugli stati e sulle osservabili in modo da risultare in «un cambio nel nostro punto di vista che non modifica i risultati degli esperimenti possibili»[2].

Più formalmente, detto  $S$  uno stato del sistema  $V$  e  $\mathcal{O} \in \mathcal{A}(V)$  un'osservabile con  $\mathcal{A}(V)$  l'insieme delle osservabili definite su  $V$  con le loro relazioni algebriche, una trasformazione  $T$  che mappa stati in stati ed osservabili in osservabili

$$T: S \mapsto S' \quad T: \mathcal{O} \mapsto \mathcal{O}' \quad (1.6)$$

è detta di simmetria se è invertibile e  $\forall S, S' \in V$  e  $\forall \mathcal{O}, \mathcal{O}' \in \mathcal{A}(V)$  preserva l'algebra delle osservabili e i valori medi

$$\langle \mathcal{O} \rangle_S = \langle \mathcal{O}' \rangle_{S'} . \quad (1.7)$$

Possiamo notare che se  $T'$  è un'altra trasformazione di simmetria, allora anche la composizione  $T' \circ T$ , corrispondente a trasformare stati e osservabili prima con  $T$  e poi con  $T'$ , è essa stessa una trasformazione di simmetria.

Inoltre anche la trasformazione inversa  $T^{-1}: S' \mapsto S$  soddisfa automaticamente i requisiti appena richiesti ed è dunque classificabile come tale e lo stesso vale indubbiamente per la trasformazione banale  $id_V: S \mapsto S$ , che per definizione lascia tutto invariato.

---

<sup>3</sup>Più specificatamente affinché l'operazione sia ben definita  $\psi$  deve appartenere al dominio di  $A$   $D(A) \subset \mathcal{H}$ .



Questo ragionamento può essere esteso, qualora il sistema lo permetta, ad una famiglia di trasformazioni di simmetria diverse prendendo in considerazione i modi in cui possono comporsi tra loro.

L'oggetto matematico, nello specifico algebrico, che ci permette di formalizzare il concetto di simmetria è quello di *gruppo*.

**Definizione 1.** Un gruppo  $(G, \circ)$  è un insieme  $G$  dotato di un'operazione di gruppo

$$\begin{aligned} \circ: G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto g \circ h \end{aligned}$$

che soddisfa le proprietà:

- i) chiusura:  $a \circ b \in G \quad \forall a, b \in G$
- ii) associatività:  $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c \quad \forall a, b, c \in G$
- iii) esistenza dell'elemento neutro:  $\exists e \in G : e \circ a = a \circ e = a \quad \forall a \in G$
- iv) esistenza dell'inverso:  $\forall a \in G \quad \exists a^{-1} : a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e.$

Un modo per mettere in relazione gruppi diversi e considerarne le analogie e le differenze è analizzare le proprietà della mappa che li collega.

**Definizione 2.** Una mappa  $f: G_1 \longrightarrow G_2$  è detta omomorfismo di gruppi se l'operazione di gruppo di  $G_1$  ( $\circ_{G_1}$ ) è mappata in quella di  $G_2$  ( $\circ_{G_2}$ ):

$$f(g \circ_{G_1} h) = f(g) \circ_{G_2} f(h) \quad \forall g, h \in G_1. \quad (1.8)$$

Da questa proprietà discende direttamente anche che gli elementi neutri dei due gruppi vengono mappati l'uno nell'altro –  $f(e_1) = e_2$  – e ugualmente succede per gli elementi inversi –  $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1} \quad \forall a \in G_1$ .

Ciò però non implica che l'intera struttura del primo gruppo sia conservata dal secondo, ad esempio un omomorfismo può mappare un gruppo non-abeliano in uno abeliano<sup>4</sup>.

Per far sì che questo accada è necessario che la mappa tra  $G_1$  e  $G_2$  sia anche biettiva, in modo che ci sia una corrispondenza univoca tra gli elementi, che a questo punto possono essere considerati uguali a meno di una ridenominazione, dei due gruppi<sup>5</sup>.

**Definizione 3.** Un omomorfismo (di gruppi)  $f: G_1 \longrightarrow G_2$  è detto isomorfismo (di gruppi) se è biettivo.

Abbiamo quindi riconosciuto che le relazioni che devono essere rispettate da un insieme di trasformazioni perché rappresentino una simmetria del sistema sono codificate nella nozione astratta di gruppo.

Per applicarla praticamente all'ambito della fisica bisogna definire una relazione tra gruppi *astratti* e gruppi di oggetti matematici che sappiamo maneggiare e che risultano comodi nella descrizione dei fenomeni fisici presi in esame, come gli operatori – così come definiti precedentemente – nel caso della meccanica quantistica.

<sup>4</sup>Un gruppo  $G$  è detto abeliano se l'operazione grupale è commutativa:  $a \circ b = b \circ a \quad \forall a, b \in G$ .

<sup>5</sup>Simbolicamente  $G_1 \cong G_2$ .

**Definizione 4.** Una rappresentazione ordinaria (o lineare) di un gruppo  $G$  su uno spazio vettoriale  $V$  è un omomorfismo di gruppi

$$\mathcal{D}: G \longrightarrow \text{Aut}(V)$$

con  $\text{Aut}(V)$  il gruppo degli automorfismi<sup>6</sup> su  $V$ .

Ugualmente si può considerarla come l'insieme di mappe  $\text{Aut}(V) \ni \mathcal{D}(g): V \longrightarrow V$ , con  $g \in G$ , per cui vale:

$$\mathcal{D}(g_1 \circ g_2) = \mathcal{D}(g_1) \circ \mathcal{D}(g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G. \quad (1.9)$$

Se  $\mathcal{D}$  è un isomorfismo la rappresentazione è detta fedele.

Infine risulterà utile dotare i gruppi astratti di ulteriori strutture, che permetteranno di raggiungere risultati più raffinati riguardo alla grande maggioranza dei casi di interesse fisico.

**Definizione 5.** Un insieme  $G$  è detto gruppo topologico se è contemporaneamente un gruppo e uno spazio topologico.

In particolare è richiesto che l'operazione di gruppo  $G \times G \mapsto G$  t.c.  $(g, h) \rightarrow g \circ h$  e l'inversione  $G \mapsto G$  t.c.  $g \rightarrow g^{-1}$  siano continue nella topologia scelta.

Dalla presenza di una topologia su  $G$  discende direttamente una nozione di continuità, necessaria per esempio nella definizione di un gruppo (topologico) discreto, in cui per ogni elemento  $g$  esiste almeno un intorno in cui è contenuto solamente  $g$ , o equivalentemente in cui l'elemento neutro  $e$  è isolato. In questo caso la topologia definita su  $G$  è detta topologia discreta<sup>7</sup>: gli aperti che la formano sono tutti e soli i sottoinsiemi di  $G$ .

Tra le tipologie di gruppi topologici assumono particolare rilievo i gruppi di Lie, così nominati in omaggio al matematico norvegese Sophus Lie a cui è in gran parte dovuta la creazione della teoria delle simmetrie continue.

**Definizione 6.** Un gruppo topologico è detto gruppo di Lie se su di esso è definita una struttura di varietà differenziabile e l'operazione di gruppo e l'inversione sono infinitamente differenziabili.

La caratteristica principale delle varietà differenziabili è di essere localmente omeomorfe<sup>8</sup>, quindi approssimabili, ad  $\mathbb{R}^n$ . Questo implica che è possibile utilizzare gli strumenti dell'analisi e definire delle coordinate sul gruppo che saranno i parametri continui con cui descrivere le trasformazioni rappresentate dal gruppo.

Tra gli esempi di gruppi di Lie di fondamentale importanza per la fisica c'è il gruppo ortogonale  $O(n)$ , le cui trasformazioni associate sono le isometrie su  $\mathbb{R}^n$ , il gruppo speciale ortogonale  $SO(n)$ , che per  $n = 3$  corrisponde al gruppo delle rotazioni tridimensionali, come anche il gruppo di Poincaré, le cui rappresentazioni sono le isometrie dello spazio-tempo di Minkowski, o il gruppo unitario speciale  $SU(n)$ , protagonista all'interno delle teorie di gauge.

Anche il gruppo delle fasi  $U(1)$  è un gruppo di Lie. Come varietà differenziabile esso può essere visto come il cerchio unitario nel piano complesso

$$S^1 = \{e^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi) \subset \mathbb{R}\}$$

con composizione  $e^{i\theta} \circ e^{i\phi} = e^{i\theta+\phi}$  e inversione  $(e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta}$ , che sono chiaramente mappe differenziabili.

---

<sup>6</sup>Gli automorfismi sono isomorfismi di un oggetto matematico in se stesso i quali formano un gruppo con operazione data dalla composizione di mappe. Nel caso in cui  $V$  abbia dimensione finita  $n$  corrisponde al gruppo di matrici invertibili  $n \times n$  sul campo  $F$   $GL(V, F)$ .

<sup>7</sup>È sempre possibile equipaggiare un gruppo della topologia discreta rendendolo quindi discreto ma per alcuni è l'unica scelta non banale possibile.

<sup>8</sup>Un omeomorfismo è un isomorfismo, quindi un'applicazione biunivoca, tra spazi topologici.

Inoltre essendo  $G$  anche una varietà differenziabile è possibile definire uno spazio tangente  $T_g G$  per ogni elemento  $g \in G$  e in particolare in corrispondenza dell'elemento neutro  $T_e G$ , sul quale è possibile riconoscere delle proprietà caratteristiche che discendono dalle proprietà del gruppo sottostante [3] e rendono  $T_e G$  un'algebra di Lie.

**Definizione 7.** Preso  $G$  di Lie, l'algebra di Lie ad esso associata  $\mathfrak{g}$  è lo spazio tangente  $T_e G$  dotato di una mappa bilineare anti-simmetrica  $[\cdot, \cdot] : T_e G \times T_e G \rightarrow T_e G$  che rispetta l'identità di Jacobi

$$[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0 \quad \forall a, b, c \in T_e G. \quad (1.10)$$

Se  $G$  è un gruppo di matrici  $[\cdot, \cdot]$  corrisponde al commutatore di matrici.

Inoltre, scelta una base di  $T_e G$   $\{X_1, \dots, X_n\}$  è possibile scrivere le relazioni di commutazione come

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n f_{ijk} X_k \quad (1.11)$$

con  $f_{ijk}$  denominate costanti di struttura.

Euristicamente grazie all'algebra di Lie è possibile studiare il comportamento locale del gruppo e rappresentarne gli elementi nelle prossimità dell'identità, quelli che corrispondono quindi a trasformazioni infinitesime, tramite una serie di potenze.

### 1.3 Trasformazioni di simmetria quantistiche e rappresentazioni

Sulla base di quanto stabilito nella scorsa sezione è possibile ora calarsi nel contesto quantistico, a partire da una definizione formale di trasformazione di simmetria quantistica.

**Definizione 8.** A livello quantistico una trasformazione di simmetria è una coppia di mappe biettive

$$\begin{aligned} U: \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H} & U: \mathcal{A}(\mathcal{H}) &\rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{H}) \\ \psi &\mapsto \psi' & A &\mapsto A' \end{aligned} \quad (1.12)$$

tali che siano preservate le relazioni algebriche di  $\mathcal{A}(\mathcal{H})$  e i valori medi

$$\frac{\langle \psi | A | \psi \rangle}{\|\psi\|^2} = \frac{\langle \psi' | A | \psi' \rangle}{\|\psi'\|^2} \quad (1.13)$$

$\forall \psi, \psi' \in \mathcal{H}$  e  $\forall A, A' \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$ .

A partire da 1.13 è possibile ricavare l'azione di  $U$  sulle osservabili. Infatti, per  $\|\psi\| = \|\psi'\|$ , si ha

$$\langle \psi | A | \psi \rangle = \langle U\psi | A' | U\psi \rangle \Leftrightarrow A' = UAU^\dagger. \quad (1.14)$$

Però come detto nella sezione 1.1 i vettori di  $\mathcal{H}$  non sono in corrispondenza biunivoca con gli stati del sistema. È dunque necessario definire in modo più preciso l'azione di una trasformazione di simmetria sugli stati, che sarà dunque più propriamente una trasformazione di  $\mathbf{P}\mathcal{H}$ .

Data la proiezione canonica  $\pi : \mathcal{H} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{P}\mathcal{H}$  la probabilità di transizione da uno stato  $\Psi = \pi(\psi)$  ad uno stato  $\Phi = \pi(\phi)$  è definita come

$$P(\Psi, \Phi) := \frac{|\langle \psi | \phi \rangle|^2}{\|\psi\|^2 \|\phi\|^2}. \quad (1.15)$$

Possiamo notare che l'eq. 1.15 può essere riscritta, supponendo per semplicità  $\psi$  e  $\phi$  normalizzati, come

$$\begin{aligned} |\langle \psi | \phi \rangle|^2 &= \langle \psi | \phi \rangle \langle \phi | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | P_\phi | \psi \rangle \\ &= \langle P_\phi \rangle_\psi \end{aligned} \quad (1.16)$$

con  $P_\phi$  il proiettore associato a  $\phi$ .

In continuità con la Def.8 appare dunque naturale avanzare la seguente richiesta:

**Definizione 9.** Una trasformazione di simmetria – nel senso di Wigner<sup>9</sup> – agisce sugli stati del sistema come una mappa biettiva<sup>10</sup>  $\text{Aut}(\mathbf{P}\mathcal{H}) \ni T : \mathbf{P}\mathcal{H} \rightarrow \mathbf{P}\mathcal{H}$  che preserva le probabilità di transizione:

$$P(T\Psi, T\Phi) = P(\Psi, \Phi) \quad \text{con } \Psi, \Phi \in \mathbf{P}\mathcal{H}. \quad (1.17)$$

Un risultato chiave per proseguire la discussione è dato dal seguente teorema formulato da E.Wigner [5]:

**Teorema 1.** Ogni trasformazione di simmetria  $T : \mathbf{P}\mathcal{H} \rightarrow \mathbf{P}\mathcal{H}$  come definita in 1.17 è indotta, tramite la proiezione canonica  $\pi$ , da un operatore  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  unitario (e quindi lineare)

$$\langle U\psi, U\phi \rangle = \langle \psi, \phi \rangle \quad U(a\psi + b\phi) = aU\psi + bU\phi \quad (1.18)$$

o anti-unitario (e quindi anti-lineare)

$$\langle U\psi, U\phi \rangle = \langle \psi, \phi \rangle^* \quad U(a\psi + b\phi) = a^*U\psi + b^*U\phi \quad (1.19)$$

tale che  $T = \pi(U)$ .

Poiché per un operatore lineare  $L$  la condizione di aggiuntezza è  $\langle \phi, L^\dagger\psi \rangle = \langle L\phi, \psi \rangle$  e per un operatore anti-lineare  $A$  è  $\langle \phi, A^\dagger\psi \rangle = \langle A\phi, \psi \rangle^* = \langle \psi, A\phi \rangle$  la condizione che devono rispettare gli operatori  $U$  definiti nel teorema 1 può essere riassunta in  $U^\dagger = U^{-1}$ .

Considerando che la trasformazione banale è rappresentata dall'operatore identità  $U(e) = \mathbf{1}$ , che è unitario e lineare, ogni simmetria che può essere deformata in quella banale tramite una variazione continua di determinati parametri – il cui gruppo è quindi di Lie e connesso – dev'essere anch'essa rappresentata da un operatore unitario e lineare. Inoltre ogni trasformazione rappresentata da un operatore anti-unitario coinvolge necessariamente un'inversione temporale [2].

Gli operatori anti-unitari occupano di conseguenza un ruolo più marginale e verranno d'ora in avanti trascurati nella discussione poiché non rientrano nell'obiettivo della tesi. Possiamo quindi restringere l'analisi nel considerare gli operatori  $U(g) \in \mathbf{U}(\mathcal{H})$  e  $T(g) \in \mathbf{PU}(\mathcal{H}) \subset \text{Aut}(\mathbf{P}\mathcal{H})$ .

A causa della natura proiettiva dello spazio degli stati però la composizione di operatori  $U(g)$ , che ricordiamo non agiscono su di esso bensì su  $\mathcal{H}$ , generalmente non rispetta in maniera esatta l'operazione di gruppo  $T(g)T(h) = T(gh)$  ma lo fa solo a meno di un fattore di fase

$$U(g)U(h) = \omega(g, h)U(gh) \quad (1.20)$$

con  $\omega(g, h) \in \mathbb{C}$ , detto anche moltiplicatore, di modulo unitario e che dipende dalla scelta che si fa degli operatori  $U(g)$ .

Evidentemente questo insieme di operatori non rispetta la condizione 1.9 e quindi non costituisce una rappresentazione ordinaria (anche detta unitaria nel caso specifico in cui lo spazio vettoriale  $V$  è uno spazio di Hilbert) del gruppo di simmetria.

Allo stesso tempo non possiamo considerare una rappresentazione ordinaria neanche l'insieme dei  $T(g)$  (o equivalentemente l'omomorfismo  $T$ ) poiché essi appartengono a  $\mathbf{PU}(\mathcal{H})$  che non è un sottoinsieme di  $\text{Aut}(\mathcal{H})$  come invece sarebbe richiesto dalla Def.4<sup>11</sup>.

<sup>9</sup>Esistono infatti altre definizioni di trasformazione di simmetria in meccanica quantistica, di cui è però possibile dimostrare l'equivalenza [4].

<sup>10</sup>La nozione di continuità su  $\mathbf{P}\mathcal{H}$  discende dalla topologia indotta tramite la mappa quoziente.

<sup>11</sup>Lo spazio vettoriale  $V$  della definizione coincide necessariamente con  $\mathcal{H}$  visto che  $\mathbf{P}\mathcal{H}$  non è uno spazio vettoriale.

Questi, e più impropriamente anche l'insieme di operatori  $U(g)$ , danno quindi luogo ad una *rappresentazione proiettiva*.

Se per ogni classe di equivalenza  $T(g)$  è possibile scegliere un rappresentante  $U(g)$  in modo che  $\omega = 1$  si dice che la rappresentazione è stata *sollevata* ad una rappresentazione ordinaria. Ovvero esiste un omomorfismo  $U$  tale che  $\pi \circ U = T$ :

$$\begin{array}{ccc}
 & & G \\
 & \swarrow U & \downarrow T \\
 \mathbf{U}(\mathcal{H}) & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{PU}(\mathcal{H})
 \end{array} \tag{1.21}$$

Ciò però non è sempre possibile e in tal caso la rappresentazione è detta *genuinamente* proiettiva. Quest'ultimo caso è di particolare importanza per il fine della tesi e sarà approfondito di seguito.

### 1.3.1 Rappresentazioni genuinamente proiettive

Il fattore  $\omega(g, h)$  presente in 1.20 ha dei vincoli da rispettare. In particolare per gli operatori  $U(g)$  è valida la condizione di associatività

$$U(g) (U(h)U(k)) = (U(g)U(h)) U(k) \tag{1.22}$$

che di conseguenza impone la condizione sugli  $\omega$

$$\omega(g, hk) \omega(h, k) = \omega(g, h) \omega(gh, k) \tag{1.23}$$

o equivalentemente, considerando  $\omega(g, h) = e^{i\phi(g, h)}$ ,

$$\phi(g, hk) + \phi(h, k) = \phi(g, h) + \phi(gh, k) . \tag{1.24}$$

Se l'esponente  $\phi$  è del tipo

$$\phi(g, h) = \xi(gh) - \xi(g) - \xi(h) \tag{1.25}$$

è possibile ridefinire  $U(g)$  come  $\tilde{U}(g) = U(g)e^{i\xi(g)}$ , che è fisicamente equivalente ad  $U(g)$  essendo un rappresentante della stessa classe di equivalenza all'interno di  $\mathbf{PU}(\mathcal{H})$ , facendo sì che la rappresentazione proiettiva venga sostituita con una ordinaria. Infatti sostituendo  $U(g) = \tilde{U}(g)e^{-i\xi(g)}$  nella 1.20 si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \tilde{U}(g)e^{-i\xi(g)}\tilde{U}(h)e^{-i\xi(h)} &= e^{i\xi(gh)-\xi(g)-\xi(h)}\tilde{U}(g, h) \\
 \Rightarrow \tilde{U}(g)\tilde{U}(h) &= \tilde{U}(gh) .
 \end{aligned}$$

Viceversa, un gruppo che ammette fasi che non possono essere riscritte nella forma 1.25 dà necessariamente luogo a rappresentazioni genuinamente proiettive.

Si possono però studiare le rappresentazioni proiettive di un gruppo considerandole come restrizioni di rappresentazioni ordinarie di un gruppo più grande, una sua *estensione centrale*.

**Definizione 10.** *Un'estensione di un gruppo  $G$  da parte di un gruppo  $A$  è data da una successione esatta di omomorfismi di gruppi*

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} \hat{G} \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1 \tag{1.26}$$

dove  $1$  è il gruppo banale contenente solo l'elemento neutro e la successione è detta esatta poiché è richiesto che il kernel di ogni mappa della successione sia equivalente all'immagine della mappa precedente.

Questo implica che  $\iota$  deve essere iniettiva,  $\pi$  suriettiva e

$$\text{im}(\iota) \cong \ker(\pi) \Rightarrow G \cong \hat{G}/\text{im}(\iota) \cong \hat{G}/A.$$

Se  $A$  è abeliano e la sua immagine  $\text{im}(\iota)$  si trova nel centro di  $\hat{G}$ , ovvero se

$$\iota(a) \circ b = b \circ \iota(a) \quad \forall a \in A, b \in \hat{G},$$

l'estensione è detta centrale.

Se  $\hat{G} \cong G \times A$  l'estensione è detta banale e ciò equivale all'esistenza di un omomorfismo  $\sigma: G \rightarrow \hat{G}$  tale che  $\pi \circ \sigma = \text{id}_G$ .

Si può notare a questo punto come il gruppo degli operatori unitari sullo spazio di Hilbert sia proprio un'estensione centrale del gruppo degli automorfismi di  $\mathbf{PH}$  da essi indotti [6]:

$$1 \longrightarrow \mathbf{U}(1) \xrightarrow{\iota} \mathbf{U}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\pi} \mathbf{PU}(\mathcal{H}) \longrightarrow 1. \quad (1.27)$$

Questo ci permette di riguardare al problema iniziale in modo diverso: anche nel caso in cui non esista un sollevamento  $U$  come descritto nel diagramma 1.21 è comunque sempre possibile ottenere una rappresentazione ordinaria di un'estensione centrale di  $G$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathbf{U}(1) & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\Pi} & G & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow S & & \downarrow T & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathbf{U}(1) & \longrightarrow & \mathbf{U}(\mathcal{H}) & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{PU}(\mathcal{H}) & \longrightarrow & 1 \end{array} \quad (1.28)$$

in modo che il diagramma commuti, ovvero che  $\pi \circ S = T \circ \Pi$  [6].

A questo stadio ciò è comunque ancora insoddisfacente poiché in generale non conosciamo il gruppo  $E$  e quindi neanche le sue rappresentazioni. Si può però fare un tentativo per costruirlo [7] in modo che rispetti quanto appena richiesto.

Data una mappa  $\omega: G \times G \rightarrow \mathbf{U}(1)$  che rispetti la condizione 1.23 definiamo  $\hat{G}_\omega$  come l'insieme delle coppie  $(\alpha, g)$  con  $\alpha \in \mathbf{U}(1)$  e  $g \in G$  dotato dell'operazione di gruppo<sup>12</sup>

$$(\alpha, g) \circ (\alpha', h) = (\alpha \alpha' \omega(g, h), g \circ h). \quad (1.29)$$

Prendendo  $\iota: \mathbf{U}(1) \rightarrow \hat{G}_\omega$  tale che  $\iota(\alpha) = (\alpha, e)$  e  $\Pi: \hat{G}_\omega \rightarrow G$  tale che  $\Pi(\alpha, g) = g$  è immediato vedere che queste due mappe sono rispettivamente iniettiva e suriettiva e che  $\text{im}(\iota) \cong \ker(\Pi)$ . Segue naturalmente che  $\hat{G}_\omega$  è a tutti gli effetti un'estensione centrale di  $G$  come ci aspettavamo. Rimane infine da verificare quanto affermato sulle sue rappresentazioni. Presa una rappresentazione proiettiva  $U(g) \in \mathbf{U}(\mathcal{H})$  con fattore moltiplicativo  $\omega$  (cfr. 1.20) l'operatore unitario  $S(\alpha, g) := \alpha U(g)$  è una rappresentazione ordinaria di  $\hat{G}_\omega$  su  $\mathcal{H}$ :

$$\begin{aligned} S(\alpha, g) \circ S(\alpha', h) &= \alpha U(g) \alpha' U(h) \\ &= \alpha \alpha' \omega(g, h) U(g \circ h) \\ &= S((\alpha, g) \circ (\alpha', h)). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Inoltre si può verificare che  $\pi(S(\alpha, g)) = \pi(\alpha U(g)) = T(g) = T(\Pi(\alpha, g))$  come visto precedentemente.

È dunque corretto affermare che tutte le rappresentazioni proiettive di  $G$  discendono da opportune rappresentazioni ordinarie di un'estensione centrale  $\hat{G}_\omega$  ristrette ad  $\alpha = 1$  e quindi tramite la conoscenza di queste ultime è possibile conoscere e classificare le prime, che in ultima istanza sono ciò a cui siamo interessati.

---

<sup>12</sup> $\hat{G}_\omega$  è quindi il prodotto semi-diretto  $\mathbf{U}(1) \rtimes_\omega G$ .

Possiamo notare che dall'esistenza di operatori unitari equivalenti  $U(g) \sim U'(g)$ , che inducono lo stesso  $T(g)$  o – in altri termini – che appartengono allo stesso raggio vettore, possiamo inferire l'esistenza di fattori moltiplicativi equivalenti dove  $\omega \sim \omega'$  se l'eq. 1.20 che vale per  $\omega$  e  $U(g)$  rimane valida per  $\omega'$  e  $U'(g)$ .

Ovvero  $\omega(g, h) \sim \omega'(g, h) \Leftrightarrow \exists \lambda: G \rightarrow \mathbf{U}(1)$  tale che

$$\omega(g, h) = \frac{\lambda(gh)}{\lambda(g)\lambda(h)}\omega'(g, h). \quad (1.31)$$

È quindi sufficiente conoscere le estensioni centrali di  $G$  con moltiplicatori non equivalenti per conoscere le classi di equivalenza delle rappresentazioni proiettive di  $G$ .

Osservando l'eq. 1.31 e provando a riscriverla per  $\omega(g, h) = e^{i\phi(g,h)}$  e  $\lambda(g) = e^{i\xi(g)}$  ci si può accorgere che essa corrisponde proprio all'eq. 1.25 nel caso in cui  $\phi' = 0$  (e dunque  $\omega' = 1$ ).

L'estensione centrale corrispondente sarà quindi quella banale e anche con i nuovi elementi introdotti possiamo vedere che questo è l'unico caso in cui una rappresentazione proiettiva di  $G$ , indotta da una ordinaria di  $\hat{G}_{\omega=1}$ , può essere sollevata ad una ordinaria di  $G$  stesso. Nella Def.10 avevamo infatti visto che per un'estensione banale esiste  $\sigma: G \rightarrow \hat{G}_1$  tale che  $\pi \circ \sigma = id_G$ ;  $U = S \circ \sigma$  è quindi un omomorfismo:

$$\begin{array}{ccc} \hat{G}_1 & \xleftarrow{\sigma} & G \\ \downarrow S & \swarrow U & \downarrow T \\ \mathbf{U}(\mathcal{H}) & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{PU}(\mathcal{H}) \end{array} \quad (1.32)$$

Esiste in realtà un modo più elegante ed efficace di riformulare questo problema tramite la teoria della *coomologia*, la cui trattazione nel dettaglio esula dallo scopo di questa tesi.

Basti sapere che le funzioni  $\phi: G \times G \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  (o equivalentemente  $\omega: G \times G \rightarrow \mathbf{U}(1)$ ) che rispettano la condizione 1.24 (1.23) formano un gruppo additivo (moltiplicativo) detto gruppo dei 2-cocicli<sup>13</sup>  $Z^2(G, \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ ; ugualmente le funzioni  $\phi$  della forma 1.25 costituiscono il gruppo dei 2-cobordi  $B^2(G, \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ , che si verifica essere un sottogruppo di  $Z^2(G, \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ .

Si definisce il secondo gruppo di coomologia come il quoziente tra i due

$$H^2(G, \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) := \frac{Z^2(G, \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})}{B^2(G, \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})} \quad (1.33)$$

che è dunque formato da tutte le fasi, emerse da rappresentazioni proiettive di  $G$ , tra loro inequivalenti.

La comodità di questa formulazione consiste nel poter sapere a partire dal solo calcolo dei suoi gruppi di coomologia, spesso già effettuato dai ricercatori del settore, se un gruppo ammette o meno solo fasi equivalenti a quella banale ( $H^2(G, \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) = 0$ ) e quindi se può dare luogo a rappresentazioni genuinamente proiettive.

### 1.3.2 Rappresentazioni proiettive di un gruppo di Lie

Come già detto nella sezione 1.2 gran parte dei gruppi fisicamente interessanti sono anche gruppi di Lie. L'aggiunta di ulteriori strutture matematiche ha il duplice effetto di fornire nuovi strumenti per studiare le rappresentazioni proiettive ma anche di implementare nuove ostruzioni al loro sollevamento a rappresentazioni ordinarie.

Infatti è possibile determinare due possibili cause alla base di queste ostruzioni. La prima, di natura principalmente topologica, si presenta nel caso in cui  $G$  non sia *semplicemente connesso*:

---

<sup>13</sup>Il 2 è dovuto al numero di elementi di  $G$  che ha in input la funzione  $\phi$ .

immaginando di poter connettere con dei cammini gli elementi  $e$  e  $g$  e successivamente  $g$  e  $h$  in questo caso il cammino formato dalla loro unione potrebbe non essere deformabile in un altro cammino che connette  $e$  e  $g$  o  $h$ , e ciò si riflette anche al livello delle rappresentazioni di  $G$ .

La seconda causa, di natura algebrica, deriva invece dall'impossibilità di ridefinire opportunamente i generatori di  $T_e G = \mathfrak{g}$ , in modo da eliminare la presenza di eventuali altri elementi che commutano con i generatori.

Proviamo ora a sviluppare in maniera più formale queste idee.

Si può dimostrare che ogni rappresentazione proiettiva  $T$  di un gruppo topologico  $G$  viene indotta da una rappresentazione proiettiva  $V$  del suo gruppo di *ricoprimento universale*  $\tilde{G}$ .  $\tilde{G}$  è detto ricoprimento universale di  $G$  se è semplicemente connesso ed esiste una mappa  $P: \tilde{G} \rightarrow G$  che faccia corrispondere ad ogni aperto  $U \subset G$  un'unione disgiunta di aperti  $P^{-1}(U) = \sqcup_{j \in J} A_j \subset \tilde{G}$  in cui ogni  $A_j$  è omeomorfo ad  $U$ .

Poiché la mappa di ricoprimento  $P$  è un omomorfismo [8] anche  $V := T \circ P: \tilde{G} \rightarrow \text{Aut}(\mathbf{P}\mathcal{H})$  lo è, costituendo quindi una rappresentazione proiettiva.

Inoltre, come visto prima per un gruppo  $G$  generico, anche per  $G$  di Lie e connesso è possibile definire un'estensione centrale  $\hat{G}_\omega$  – anch'essa di Lie e connessa – dalle cui rappresentazioni ordinarie si possono ottenere quelle proiettive di  $G$ . In particolare in un intorno dell'elemento neutro  $(1, e)$  la struttura differenziabile di  $\hat{G}_\omega$  è equivalente a quella di  $U(1) \times A$  [7], con  $A \subset G$  un intorno di  $e$ .

Ciò ci consente di poter scrivere l'algebra di Lie di  $\hat{G}_\omega$  come  $\hat{\mathfrak{g}} = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{g}$  e quindi le sue relazioni di commutazione

$$[a \oplus X, a' \oplus X'] = \Theta(X, X') \oplus [X, X'] \quad a \in \mathbb{R}, X \in \mathfrak{g} \quad (1.34)$$

con  $\Theta$  una mappa bilineare e anti-simmetrica.

Scelta una base  $\{X_1, \dots, X_n\}$  di  $\mathfrak{g}$  si può quindi riscrivere 1.34 come

$$[X_i, X_j] = \Theta(X_i, X_j)\mathbb{1} + \sum_{k=1}^n f_{ijk} X_k \quad (1.35)$$

con  $X_i \equiv 0 \oplus X_i$  e  $\Theta(X_i, X_j) \equiv \Theta_{ij}$  dette *cariche centrali*, poiché appunto essendo multiple dell'identità si trovano nel centro di  $\mathfrak{g}$  e commutano con tutti gli  $X_i$ .

È possibile però ridefinire i generatori cambiando base in modo da avere  $X'_i = \beta_i \mathbb{1} + X_i$  e quindi

$$\begin{aligned} [X'_i, X'_j] &= \Theta_{ij}\mathbb{1} + \sum_{k=1}^n f_{ijk}(X'_k - \beta_k \mathbb{1}) \\ &= \left( \Theta_{ij} - \sum_{k=1}^n f_{ijk} \beta_k \right) \mathbb{1} + \sum_{k=1}^n f_{ijk} X'_k. \end{aligned} \quad (1.36)$$

In questo modo si può provare a riassorbire le cariche centrali, ammesso che esistano delle costanti  $\beta_k$  tali che

$$\Theta_{ij} = \sum_{k=1}^n f_{ijk} \beta_k \quad (1.37)$$

riottenendo quindi le relazioni di commutazione di  $G$  stesso

$$[X'_i, X'_j] = \sum_{k=1}^n f_{ijk} X'_k. \quad (1.38)$$

Quanto abbiamo appena visto viene riassunto in modo rigoroso tramite il Teorema di Bargmann [9], che costituisce probabilmente lo strumento più utile all'interno della teoria delle rappresentazioni proiettive dei gruppi di Lie. In particolare tramite di esso è possibile spiegare le ragioni matematiche dell'esistenza dello spin.



**Teorema 2.** *Sia  $G$  un gruppo di Lie connesso e semplicemente connesso con algebra di Lie  $\mathfrak{g}$ ; per ogni mappa  $\Theta: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$  bilineare, anti-simmetrica e che rispetta l'identità di Jacobi vale la relazione di equivalenza*

$$\Theta(X, Y) \sim \Theta'(X, Y) \Leftrightarrow \Theta(X, Y) = \Theta'(X, Y) + \beta([X, Y]) \quad (1.39)$$

con  $\beta: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$  lineare e  $X, Y \in \mathfrak{g}$ .

Se per ogni  $\Theta: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$  così definita esiste  $\beta: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$\Theta(X, Y) = \beta([X, Y]) \quad (1.40)$$

tutte le rappresentazioni proiettive di  $G$  su  $\mathcal{H}$  sono indotte da rappresentazioni ordinarie di  $G$  stesso su  $\mathcal{H}$ .

Anche se  $G$  non è semplicemente connesso fintanto che esso rispetti quanto richiesto dalle ipotesi del teorema – e anche questa volta ciò è facilmente verificabile tramite la coomologia ( $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = 0$ ) [10] – in virtù di quanto detto precedentemente è comunque possibile lavorare con delle rappresentazioni ordinarie, al prezzo di passare al suo ricoprimento universale  $\tilde{G}$ . È proprio questo il caso di  $\text{SO}(3)$  il cui ricoprimento universale è isomorfo a  $\text{SU}(2)$ , dalle cui rappresentazioni emerge lo spin.

Nel caso in cui, invece, la condizione 1.40 – che è immediatamente verificabile essere equivalente alla 1.37 – non sia rispettata, come nel caso del gruppo  $\mathbb{R}^{2n}$  delle traslazioni nello spazio delle posizioni e dei momenti, bisogna necessariamente accontentarsi delle rappresentazioni della sua estensione centrale, il gruppo di Heisenberg  $H_n$ .

## 1.4 Simmetrie dinamiche

È possibile infine introdurre un'ulteriore nozione di simmetria, decisamente più forte di quella definita in precedenza.

**Definizione 11.** *Una trasformazione di simmetria (cfr. 8, 1)  $V: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  è detta simmetria dinamica se lascia invariata l'Hamiltoniana  $H$  del sistema, ovvero se*

$$H = H' = VHV^\dagger \Leftrightarrow [V, H] = 0. \quad (1.41)$$

Una simmetria dinamica quindi oltre a preservare probabilità di transizione e valori medi delle osservabili conserva le soluzioni delle equazioni del moto. Risulta quindi naturale pensare che, come avviene classicamente nel caso di trasformazioni  $f(q, p)$  per cui le parentesi di Poisson  $\{f, H\}$  sono nulle o nella formulazione lagrangiana quando sono valide le ipotesi del teorema di Noether, ad una simmetria dinamica corrisponda una grandezza conservata.

In particolare un gruppo  $G$  di Lie connesso è rappresentato su  $\mathcal{H}$ , come già visto, da operatori unitari  $V(\lambda_i)$  che dipendono dai parametri  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  e che per  $\forall i$  formano un gruppo di operatori unitari continui, secondo la topologia forte, ad un parametro. È dunque possibile utilizzare i risultati del seguente teorema (di Stone) [11] [12]:

**Teorema 3.** *Sia  $U(\lambda)$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}$ , un gruppo di operatori unitari fortemente continui ad un parametro su uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ .*

*Esiste quindi un operatore autoaggiunto  $A$  con dominio  $D(A)$  denso in  $\mathcal{H}$  tale che*

$$U(\lambda) = e^{i\lambda A} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (1.42)$$

e inoltre

$$A\psi = -i \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(U(\lambda) - \mathbb{1})}{\lambda} \psi \Rightarrow A \equiv -i \frac{d}{d\lambda} (U(\lambda)) \Big|_{\lambda=0}. \quad (1.43)$$

$A$  è denominato generatore infinitesimo di  $U(\lambda)$  ed è unico.

Da 1.41 segue che  $H = H'$  non dipende da  $\lambda_i$  e quindi

$$0 = \frac{d}{d\lambda} (V(\lambda_i) H V^\dagger(\lambda_i)) \Big|_{\lambda=0} = -i[H, A_i]. \quad (1.44)$$

Scrivendo  $A_i$  in visuale di Heisenberg come  $A_i^H(t) = U^\dagger(t) A_i U(t)$ , con  $U(t)$  l'operatore di evoluzione temporale, e poiché  $[H, U(t)] = 0$  si ottiene:

$$\frac{dA_i^H(t)}{dt} = \frac{[A_i^H(t), H]}{i\hbar} = \frac{U^\dagger(t)[A_i, H]U(t)}{i\hbar} = 0. \quad (1.45)$$

$A_i$  è quindi invariante rispetto al tempo, come ci aspettavamo, ed è detta *costante del moto*.

Infine di particolare interesse ai fini della tesi è il caso in cui il gruppo di simmetria dinamica  $G$  ammetta rappresentazioni genuinamente proiettive su  $\mathcal{H}$ .

**Teorema 4.** *Sia  $G$  un gruppo di simmetria dinamica rappresentato da operatori unitari  $V(g)$ , con  $g \in G$ , tali che  $[V(g), H] = 0$ . Se la rappresentazione fornita dagli operatori  $V(g)$  è genuinamente proiettiva allora ogni autovalore  $\mathcal{E}$  di  $H$  è degenere.*

*Dimostrazione.* Ricordiamo che se i  $V(g)$  sono rappresentazioni genuinamente proiettive l'operazione di gruppo è rispettata a meno di un fattore di fase

$$V(g)V(h) = \omega(g, h)V(gh) \quad e \quad \exists g, h \in G \text{ t.c. } \omega(g, h) \neq 1.$$

Inoltre valgono le condizioni 1.41, in particolare  $V$  e  $H$  commutano, quindi per ogni autovalore  $\mathcal{E}$  di  $H$  corrispondente all'autostato  $|\mathcal{E}\rangle$  anche  $V(g)|\mathcal{E}\rangle$  è un autostato di  $H$  con uguale autovalore:

$$HV(g)|\mathcal{E}\rangle = V(g)H|\mathcal{E}\rangle = \mathcal{E}V(g)|\mathcal{E}\rangle. \quad (1.46)$$

Assumiamo per assurdo che l'autovalore  $\mathcal{E}$  non sia degenere, ottenendo necessariamente che l'azione di  $V(g)$  su  $|\mathcal{E}\rangle$  sia quella di moltiplicare per una fase

$$V(g)|\mathcal{E}\rangle = \lambda(g)|\mathcal{E}\rangle. \quad (1.47)$$

Di conseguenza si ha anche che

$$V(g)V(h)|\mathcal{E}\rangle = \lambda(g)\lambda(h)|\mathcal{E}\rangle \quad (1.48)$$

e ricordando che  $V$  è una rappresentazione genuinamente proiettiva

$$V(g)V(h)|\mathcal{E}\rangle = \omega(g, h)V(gh)|\mathcal{E}\rangle = \omega(g, h)\lambda(gh)|\mathcal{E}\rangle \Rightarrow \omega(g, h)\lambda(gh) = \lambda(g)\lambda(h). \quad (1.49)$$

L'eq. 1.49 corrisponde esattamente alla relazione di equivalenza definita in 1.31 con  $\omega'(g, h) = 1$ , contraddicendo l'ipotesi iniziale e conseguentemente dimostrando il teorema.

Si può dunque concludere che una Hamiltoniana con simmetria dinamica il cui gruppo associato è rappresentato in maniera genuinamente proiettiva su  $\mathcal{H}$  ha spettro  $\sigma(H)$  interamente degenere.  $\square$

## Capitolo 2

# Simmetrie di una particella su un cerchio

Consideriamo ora il caso di una particella libera di carica  $e$  e di massa  $m$  vincolata a muoversi su un cerchio unitario  $S^1$  attorno ad un solenoide di flusso  $\Phi^1$ , con lo scopo di applicare quanto mostrato nello scorso capitolo riguardo le rappresentazioni genuinamente proiettive, in particolare di gruppi di simmetria dinamica<sup>2</sup>.

Partiamo dall'analizzare il comportamento classico del sistema e i suoi gruppi di simmetria per poi studiare in seguito le conseguenze della sua quantizzazione.

La Lagrangiana che descrive la dinamica del sistema è dunque

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + eA\dot{x} \quad x \in \mathbb{R}, x \cong x + 2\pi \quad (2.1)$$

con  $A$  il potenziale vettore associato al flusso tramite  $A = \Phi/2\pi$ .  $\mathcal{L}$  può quindi essere riscritta, definendo  $\theta = e\Phi$ , come

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{\theta}{2\pi} \dot{x}. \quad (2.2)$$

Il secondo termine, lineare in  $\dot{x}$  e detto  $\theta$ -term, è dato da una derivata totale e dunque classicamente può essere riassorbito tramite un'opportuna ridefinizione della Lagrangiana in una ad essa equivalente, senza modificare le equazioni del moto risultanti. In virtù di ciò possiamo individuare una simmetria rispetto alle riflessioni  $x \rightarrow -x$  rappresentata dall'azione del gruppo ciclico  $\mathbb{Z}_2$ .

Il  $\theta$ -term verrà comunque mantenuto nella quantizzazione del sistema poiché quanto appena affermato su di esso non sarà più vero a livello quantistico dove anzi assumerà un ruolo cruciale nella trattazione del sistema.

Si può inoltre notare la presenza evidente di una simmetria sotto traslazioni  $x \rightarrow x + \alpha$ , dovuta alla presenza di  $x$  in  $\mathcal{L}$  solo tramite la sua derivata prima e a cui è naturalmente associata la conservazione del momento canonico  $p$ .

Il gruppo associato a quest'ultima è dunque  $\text{SO}(2) \cong \text{U}(1)$  che si combina con  $\mathbb{Z}_2$  dando luogo al gruppo generalizzato di simmetria del cerchio  $\text{O}(2) \cong \mathbb{Z}_2 \times \text{SO}(2)$ <sup>3</sup>.

---

<sup>1</sup>Il sistema appena descritto corrisponde a quello considerato nello studio dell'effetto Aharonov-Bohm.

<sup>2</sup>I principali riferimenti nella scrittura di questo capitolo sono stati [13, 14, 15, 16, 17].

<sup>3</sup>È scritto come prodotto semidiretto poiché la composizione di una riflessione e di una traslazione dà un risultato diverso dalla composizione delle due trasformazioni ad ordine invertito.

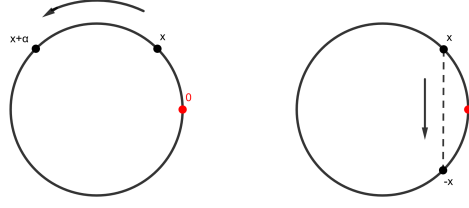


Figura 2.1: Rappresentazione grafica delle simmetrie del sistema

Per studiare il sistema a livello quantistico è prima necessario passare dalla formulazione lagrangiana a quella hamiltoniana, tramite una trasformazione di Legendre. Il momento coniugato alla coordinata  $x$  è

$$p := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + \frac{\theta}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{1}{m} \left( p - \frac{\theta}{2\pi} \right).$$

È dunque possibile definire l'Hamiltoniana del sistema come

$$\begin{aligned} H(x, p, t) &= p\dot{x}(x, p, t) - \mathcal{L}(x, p, t) \\ &= \frac{1}{2m} \left( p - \frac{\theta}{2\pi} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

che può essere quantizzata canonicamente usando le relazioni di commutazione  $[\hat{x}, \hat{p}] = i$  – in unità naturali ( $\hbar = 1$ ) – e l'operatore momento  $\hat{p}^4 = -i \frac{\partial}{\partial x}$  risultando in

$$H = \frac{1}{2m} \left( -i \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\theta}{2\pi} \right)^2 \quad (2.4)$$

dove il dominio di  $\hat{p}$  è determinato dalla condizione di periodicità  $\psi(0) = \psi(2\pi)$ . Inoltre lo spazio di Hilbert del sistema è  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, dx) \cong L^2(S^1, d\varphi)$ .

A questo punto è possibile affrontare l'equazione agli autovalori per  $H$   $H\psi_{\mathcal{E}}(x) = \mathcal{E}\psi_{\mathcal{E}}(x)$  risolvendo l'equazione differenziale risultante ottenendo

$$\psi_{\mathcal{E}}(x) = A e^{i\left(\frac{\theta}{2\pi} + \sqrt{2m\mathcal{E}}\right)x}, \quad A \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Imponendo la condizione di periodicità e richiedendo che l'autofunzione sia normalizzata si giunge infine a

$$\psi_n(x) = \langle x|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \quad (2.6)$$

$$n = \frac{\theta}{2\pi} + \sqrt{2m\mathcal{E}_n} \in \mathbb{Z} \quad (2.7)$$

dove si è scelto di re-indicizzare le autofunzioni con  $n$  per sottolineare la quantizzazione delle energie.

Infatti invertendo l'eq. 2.7 si ottiene direttamente lo spettro dell'Hamiltoniana

$$\sigma(H) = \left\{ \mathcal{E}_n = \frac{1}{2m} \left( n - \frac{\theta}{2\pi} \right)^2 : n \in \mathbb{Z} \right\} \quad (2.8)$$

e alla luce di esso appare naturale rinominare l'operatore momento  $\hat{p} \equiv \hat{n}$ .

Si può notare come  $\theta \rightarrow \theta + 2k\pi$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ , sia equivalente per  $H$  ad una traslazione nello spazio dei momenti  $\hat{n} \rightarrow \hat{n} - k\mathbb{1}$ , rappresentata dall'operatore unitario  $e^{ik\hat{x}}$ . Dunque  $H_{\theta}$  e  $H_{\theta+2k\pi}$  sono collegate dalla trasformazione unitaria

$$H_{\theta+2k\pi} = e^{ikx} H_{\theta} e^{-ikx}. \quad (2.9)$$

<sup>4</sup>Verrà usato il simbolo  $\hat{\phantom{x}}$  nei casi in cui non è ovvia la natura operatoriale.

e di conseguenza sono isospettrali[1].

È infatti facile verificare che lo spettro sia invariante per  $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$  ma è importante sottolineare che ciò risulta in una traslazione non banale dell'indice  $n \rightarrow n-1$  e dunque degli autostati relativi. Questo è un esempio di *flusso spettrale*[15] e level crossing.

Per ogni valore di  $\theta$  è presente anche in questo caso una simmetria per traslazioni lungo il cerchio  $x \rightarrow x + \alpha$  che agisce quantisticamente tramite un operatore  $T_\alpha$  tale che

$$T_\alpha \hat{x} T_{-\alpha} = \hat{x} + \alpha \mathbf{1} \quad (2.10)$$

$$T_\alpha \psi_n(x) = \langle x | T_\alpha | n \rangle = \langle x + \alpha | n \rangle \quad \Rightarrow \quad T_\alpha | n \rangle = e^{i\alpha n} | n \rangle \quad (2.11)$$

L'altra simmetria presente nel sistema classico era sotto trasformazioni di parità (è possibile anche considerarle come coniugazioni di carica  $\mathcal{C}$  o di conseguenza come inversioni temporali  $\mathcal{T}$  poiché il prodotto  $\mathcal{CT}$  è sempre una simmetria manifesta [13]) e quantisticamente queste sono rappresentate dall'operatore autoaggiunto  $U_P$  la cui azione sugli stati e sulle osservabili è:

$$U_P \psi_n(x) = \langle x | U_P | n \rangle = \langle -x | n \rangle \quad \Rightarrow \quad U_P | n \rangle = | -n \rangle \quad (2.12)$$

$$U_P \hat{x} U_P = -\hat{x} \quad , \quad U_P \hat{n} U_P = -\hat{n} \quad (2.13)$$

$$\Rightarrow U_P H_\theta U_P = \frac{1}{2m} \left( -\hat{n} - \frac{\theta}{2\pi} \right)^2 = H_{-\theta} \neq H_\theta . \quad (2.14)$$

È immediato vedere che in generale  $U_P$  non commuta con  $H_\theta$  e dunque non è una simmetria dinamica per ogni  $\theta$ .

Esistono però due valori di  $\theta$  particolari per cui la simmetria è conservata:  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ .

A  $\theta = 0$  corrisponde la situazione con flusso nullo. In questo caso inoltre lo spettro si riduce a

$$\sigma(H) = \left\{ \mathcal{E}_n = \frac{1}{2m} n^2 : n \in \mathbb{Z} \right\} \quad (2.15)$$

con stato fondamentale unico  $|0\rangle$  di energia  $\mathcal{E}_0 = 0$  e livelli di energia superiori duplicemente degeneri a causa dell'invarianza di  $H$  sotto l'azione di  $U_P$  2.12.

Come nel caso classico  $U_P$  e  $T_\alpha$  non commutano e anzi è facile verificare che

$$U_P T_\alpha U_P = T_{-\alpha} . \quad (2.16)$$

In particolare è possibile constatare che la composizione di operatori<sup>5</sup> 2.16 rispetta fedelmente la composizione degli elementi di  $O(2)$  che rappresentano. Considerando  $S^1$  come un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$ , e dunque la traslazione lungo il cerchio di un arco  $\alpha$  come una matrice di rotazione  $R(\alpha) \in SO(2) \cong U(1)$  e la trasformazione di parità come la matrice di riflessione rispetto all'asse  $x$ , si ottiene infatti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = R(-\alpha) \quad (2.17)$$

Si può concludere dunque che in questo caso il gruppo di simmetria dinamica sia anche a livello quantistico  $\mathbb{Z}_2 \times U(1) \cong O(2)$  e, come era già intuibile dall'assenza di degenerazione nello stato fondamentale (cfr. Teorema 4), sia rappresentato linearmente su  $\mathcal{H}$ .

---

<sup>5</sup>E ugualmente è possibile fare per le altre combinazioni.

Viceversa nel caso  $\theta = \pi$  la simmetria non si realizza altrettanto banalmente. Sfruttando l'equivalenza  $\theta \cong \theta - 2\pi$  l'Hamiltoniana trasformata  $H'_\pi = U_P H_\pi U_P$  è infatti

$$\begin{aligned} H'_\pi &= \frac{1}{2m} \left( -\hat{n} - \frac{\pi}{2\pi} \right)^2 \cong \frac{1}{2m} \left( -\hat{n} - \frac{\pi - 2\pi}{2\pi} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2m} \left( -\hat{n} + 1 - \frac{1}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2m} \left( -\hat{n} + \frac{1}{2} \right)^2 \\ &= H_\pi . \end{aligned} \tag{2.18}$$

$U_P$  trasforma quindi  $H_\pi$  in un'Hamiltoniana ad essa unitariamente equivalente ma non può essere considerata una sua simmetria. A partire da 2.9 è però possibile definire un nuovo operatore

$$V_P = e^{i\hat{x}} U_P \tag{2.19}$$

il quale però rappresenta effettivamente una simmetria di  $H_\pi$ .

$V_P$  è naturalmente unitario oltre ad essere un'involuzione ed autoaggiunto

$$\begin{aligned} U_P e^{i\hat{x}} U_P &= e^{-i\hat{x}} \\ \Rightarrow V_P^\dagger &= U_P e^{-i\hat{x}} = (U_P)^2 e^{i\hat{x}} U_P = e^{i\hat{x}} U_P = V_P \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\Rightarrow (V_P)^2 = V_P V_P^\dagger = \mathbb{1} \tag{2.21}$$

e agisce sull'osservabile posizione in modo equivalente ad  $U_P$ : possiamo dunque considerarlo l'operatore di parità del sistema  $\theta = \pi$ .

Lo spettro dell'Hamiltoniana è ora  $\left\{ \mathcal{E}_n = \frac{1}{2m} \left( n - \frac{1}{2} \right)^2 \right\}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Ciò però implica che, a differenza del caso precedente, non c'è un unico stato fondamentale ma poiché  $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_1 = \frac{1}{8m}$  ce ne sono due,  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , sui quali però l'azione di  $T_\alpha$  è differente

$$T_\alpha |0\rangle = |0\rangle \quad T_\alpha |1\rangle = e^{i\alpha} |1\rangle . \tag{2.22}$$

Inoltre, notando che nella trasformazione 2.18 di  $H$   $\hat{n}$  viene mandato in  $-\hat{n} + 1$  segue che

$$V_P |n\rangle = | -n + 1 \rangle . \tag{2.23}$$

Proviamo ora a verificare come si comportano gli operatori del gruppo di simmetria dinamica rispetto alla loro composizione:

$$T_\alpha V_P |n\rangle = e^{i\alpha(-n+1)} | -n + 1 \rangle \quad V_P T_\alpha |n\rangle = e^{i\alpha n} | -n + 1 \rangle \tag{2.24}$$

$$V_P T_\alpha V_P |n\rangle = e^{i\alpha(-n+1)} |n\rangle = e^{i\alpha} T_{-\alpha} |n\rangle . \tag{2.25}$$

Come si può ben vedere da 2.25 l'operazione gruppale viene rispettata solo a meno di una fase  $e^{i\alpha}$  che non è possibile assorbire tramite una ridefinizione adeguata degli operatori: per  $\theta = \pi$   $O(2)$  è realizzato proiettivamente su  $\mathcal{H}$ .

L'eq. 2.25 può essere riscritta moltiplicando a sinistra entrambi i membri per  $V_P$ , ottenendo

$$T_\alpha V_P = V_P e^{i\alpha(-\hat{n}+1)} \tag{2.26}$$

$$\Rightarrow e^{i\alpha\hat{n}} V_P = V_P e^{i\alpha(-\hat{n}+1)} \tag{2.27}$$

$$\Rightarrow e^{i\alpha(\hat{n}-\frac{1}{2})} V_P = V_P e^{-i\alpha(\hat{n}-\frac{1}{2})} . \tag{2.28}$$

Quindi definendo un nuovo operatore  $\mathcal{V}_\alpha = e^{i\alpha(\hat{n}-\frac{1}{2})} \equiv e^{-i\frac{\alpha}{2}} T_\alpha$  ritroviamo la legge di composizione nella forma 2.16

$$V_P \mathcal{V}_\alpha V_P = \mathcal{V}_{-\alpha} . \quad (2.29)$$

Tuttavia, possiamo notare che per riottenere l'identità  $\mathcal{V}_\alpha = \mathbb{1}$  non basta porre  $\alpha = 2\pi$ , che invece restituisce  $-\mathbb{1}$ , ma bisogna arrivare ad  $\alpha = 4\pi$ . Ciò ci fa pensare che il gruppo di simmetria le cui rappresentazioni su  $\mathcal{H}$  sono ordinarie sia un ricoprimento doppio di  $O(2)$ .

$\mathcal{V}_{2\pi} = -1$  è un elemento centrale, in quanto commuta sia con  $T_\alpha$  che con  $V_P$ , quindi il ricoprimento doppio in questione è un'estensione centrale di  $O(2)$  da parte di  $\mathbb{Z}_2 \cong \{1, \mathcal{V}_{2\pi}\}$ . Esistono due candidati a questo ruolo  $-Pin^+(2)$  e  $Pin^-(2)$  – che differiscono per il fatto che, scelta una riflessione  $P \in O(2)$ , l'elemento corrispondente a  $P$  quando viene elevato al quadrato dà  $+1$  nel primo caso e  $-1$  nel secondo.

Poiché l'operatore che agisce come riflessione nel nostro caso è  $V_P$  tale che  $V_P^2 = \mathbb{1}$  l'estensione centrale adeguata è  $Pin^+(2)$  [18].

$Pin^+(2)$  ammette una rappresentazione 4-dimensionale

$$E(a) = \cos a e_1 + \sin a e_2 \quad (2.30)$$

$$F(a) = \cos a + \sin a e_1 e_2 \quad (2.31)$$

costruita utilizzando l'Algebra di Clifford generata dagli operatori  $\{1, e_1, e_2, e_1 e_2\}$  [19] tali che

$$e_1^2 = 1 = e_2^2 \quad , \quad e_1 e_2 = -e_2 e_1 . \quad (2.32)$$

Sfruttando le identità trigonometriche e le relazioni 2.32 è possibile ricavare la tabella moltiplicativa

$$\begin{aligned} E(a)E(b) &= F(b-a) \\ F(a)F(b) &= F(a+b) \\ E(a)F(b) &= E(a+b) \\ F(b)E(a) &= E(a-b) \end{aligned} \quad (2.33)$$

con  $a, b \in [0, 2\pi)$  e le addizioni e sottrazioni considerate modulo  $2\pi$ .

Da queste è possibile ottenere ulteriori proprietà del gruppo

$$\begin{aligned} E(a)^2 &= F(a-a) = 1 \\ F(a)^{-1} &= F(-a) \\ E(a)^{-1} &= E(a) \end{aligned} \quad (2.34)$$

che possono essere usate per ricavare le rappresentazioni lineari esplicite del gruppo su  $\mathcal{H}$

$$U_{F(a)} = e^{-2ia(\hat{n}-\frac{1}{2})} \equiv \mathcal{V}_{\alpha=2a} \quad (2.35)$$

$$U_{E(0)} = V_P \quad (2.36)$$

$$U_{E(a)} = (U_{E(0)})^{-1} U_{F(a)} = V_P \mathcal{V}_\alpha \quad (2.37)$$

dalle quali è facile vedere come discendano le rappresentazioni proiettive di  $O(2)$ .

In conclusione, abbiamo mostrato che il gruppo di simmetria quantistico dell'Hamiltoniana è differente a seconda del variare di  $\theta$  e così anche la degenerazione del suo spettro.

- Per  $\theta = 0$  il gruppo di simmetria quantistico è  $O(2)$ , uguale a quello classico. Lo stato fondamentale è unico mentre tutti gli stati con energia superiore hanno degenerazione duplice.

- Per  $\theta = \pi$  il gruppo di simmetria quantistico è centralmente esteso a  $Pin^+(2)$  e di conseguenza tutti gli autovalori di  $H$  sono duplicemente degeneri.
- Per  $\theta \neq 0, \pi$  il gruppo di simmetria quantistico si riduce a  $U(1)$ . Lo spettro di  $H$  è sempre non degenere e in particolare lo stato fondamentale è unico:  $|0\rangle$  per  $0 < \theta < \pi$  e  $|1\rangle$  per  $\pi < \theta < 2\pi$ .

## 2.1 Simmetrie in presenza di un potenziale

Studiamo ora il caso in cui l'Hamiltoniana del sistema sia data da

$$H' = H + V(x) \quad (2.38)$$

con  $H$  l'Hamiltoniana scritta precedentemente per il caso libero e  $V(x)$  un potenziale periodico e pari tale che  $V(x) = V(x + 2\pi)$  e  $V(x) = V(-x)$ , che dunque ammette rappresentazione in serie di Fourier

$$V(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cos(kx). \quad (2.39)$$

L'aggiunta del potenziale rompe evidentemente la simmetria  $U(1)$  sotto traslazioni lungo il cerchio, ma se richiediamo che per un qualche  $n \in \mathbb{N}$  valga

$$\lambda_k \neq 0 \Leftrightarrow k = ln \quad t.c. \quad l \in \mathbb{N}, \quad (2.40)$$

possiamo notare che essa viene ridotta ad una simmetria discreta  $\mathbb{Z}_n$   $x \rightarrow x + \frac{2\pi}{n}$ , rappresentata da un operatore unitario  $T_{2\pi/n}$  tale che  $(T_{2\pi/n})^n = \mathbb{1}$ , mentre la simmetria  $\mathbb{Z}_2$  sotto trasformazioni di parità è conservata nei casi in cui era già presente ( $\theta = 0, \pi$ ).

Consideriamo inizialmente il caso in cui  $n = 2$ , che equivale a considerare un potenziale della forma

$$V(x) \equiv V(2x) = \sum_k \lambda_k \cos(2kx). \quad (2.41)$$

Per  $\theta = 0$  le due trasformazioni di simmetria sono rappresentate da

$$U_P |n\rangle = |-n\rangle \quad T_\pi |n\rangle = (-1)^n |n\rangle \quad (2.42)$$

per cui vale la seguente legge di composizione

$$T_\pi U_P = U_P T_\pi \quad (2.43)$$

che rispetta l'algebra di  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

Il gruppo di simmetria dinamica dunque passa da  $O(2)$  al suo sottogruppo  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ , con elementi  $\{1, U_P, T_\pi, U_P T_\pi\}$ , rappresentato linearmente.

Trattando  $V(x)$  come una perturbazione è possibile inoltre verificare che non solo lo stato fondamentale è unico, come già ci aspetteremmo, ma l'aggiunta del potenziale rimuove la degenerazione presente per  $n \geq 1$ , dove  $n$  indica l'autovalore  $n$ -esimo dell'Hamiltoniana libera  $H$  e non l'ordine del gruppo ciclico generato da  $T_{2\pi/n}$ .

Poiché, come visto in precedenza, gli autoket  $|n\rangle$  e  $|-n\rangle$  di  $H$  sono degeneri, e dunque generano un autospazio  $D$  di dimensione 2, per trovare le correzioni al primo ordine perturbativo  $\Delta \mathcal{E}_{\pm n}^{(1)}$  è necessario diagonalizzare il potenziale  $V(x)$  all'interno di  $D$ . A quel punto le correzioni corrisponderanno proprio agli autovalori di  $V(x)$ .

$V(x)$  può infatti essere espresso in forma matriciale come

$$V = \begin{pmatrix} \langle n | V(x) | n \rangle & \langle n | V(x) | -n \rangle \\ \langle -n | V(x) | n \rangle & \langle -n | V(x) | -n \rangle \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$



Per calcolare gli elementi di matrice bisogna usare la scrittura in rappresentazione x 2.6 di  $|\pm n\rangle$ . In particolare si ottiene che

$$\begin{aligned}
 \langle n|V(x)|n\rangle &= \sum_k \int_0^{2\pi} \psi_n^*(x) \lambda_k \cos(2kx) \psi_n(x) dx \\
 &= \sum_k \frac{1}{2\pi} \lambda_k \int_0^{2\pi} e^{-inx} \cos(2kx) e^{inx} dx \\
 &= \sum_k \frac{\lambda_k}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2kx) dx \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

e ugualmente vale per  $\langle -n|V(x)|-n\rangle$ .

Per quanto riguarda gli elementi fuori dalla diagonale, anch'essi uguali, si giunge a risultati meno banali:

$$\begin{aligned}
 \langle n|V(x)|-n\rangle &= \sum_k \frac{1}{2\pi} \lambda_k \int_0^{2\pi} e^{-inx} \cos(2kx) e^{-inx} dx \\
 &= \sum_k \frac{1}{2\pi} \lambda_k \int_0^{2\pi} e^{-2inx} \cdot \frac{1}{2} (e^{2ikx} + e^{-2ikx}) dx \\
 &= \sum_k \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda_k}{2} \left( \int_0^{2\pi} e^{2i(k-n)x} dx + \int_0^{2\pi} e^{-2i(k+n)x} dx \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda_n}{2} \int_0^{2\pi} dx \\
 &= \frac{\lambda_n}{2}
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

dove si è usato che

$$\int_0^{2\pi} e^{imx} dx = 0 \quad \forall m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \tag{2.47}$$

per eliminare il secondo integrale e ridurre la sommatoria al solo termine  $k = n$ .

A questo punto abbiamo che

$$V = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda_n}{2} \\ \frac{\lambda_n}{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.48}$$

dalla cui equazione caratteristica  $\det(V - c\mathbb{1}) = 0$  si ottengono gli autovalori

$$c_{\pm} \equiv \Delta \mathcal{E}_{\pm n}^{(1)} = \frac{\pm \lambda_n}{2} \tag{2.49}$$

a conferma di quanto detto sopra, ovvero che la degenerazione viene rimossa anche per  $n \geq 1$ .

Nel caso in cui  $\theta = \pi$  invece gli operatori che rappresentano le trasformazioni sono quelli definiti nella sezione precedente

$$V_P |n\rangle = |-n+1\rangle \quad T_\pi |n\rangle = (-1)^n |n\rangle \tag{2.50}$$

per cui vale l'eq.2.25 che nel caso specifico  $\alpha = \pi$  diventa

$$V_P T_\pi V_P = -T_\pi \quad \Rightarrow \quad V_P T_\pi = -V_P T_\pi. \tag{2.51}$$

L'operazione grupale di  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  quindi è rispettata solo a meno di una fase, come succedeva per  $O(2)$  per la particella libera, ad indicare che  $V_P$  e  $T_\pi$  sono sue rappresentazioni genuinamente proiettive.

Possiamo definire a questo punto  $U(a) = T_\pi V_P$  e  $U(b) = V_P$  e verificare che

$$\begin{aligned}
 (U(a))^2 |n\rangle &= (-1)^{\hat{n}} V_P (-1)^{\hat{n}} |-n+1\rangle \\
 &= (-1)^{-n+1} (-1)^{\hat{n}} V_P |-n+1\rangle \\
 &= (-1)^{-n+1} (-1)^{\hat{n}} |n\rangle \\
 &= (-1)^{-n+1+n} |n\rangle \\
 &= -|n\rangle
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

$$(U(b))^2 = (V_P)^2 = \mathbb{1} \tag{2.53}$$

$$\begin{aligned}
 U(b)U(a)U(b) &= V_P T_\pi V_P V_P \\
 &= V_P T_\pi \\
 &= (T_\pi V_P)^{-1} \\
 &= U(b^{-1}).
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

Di conseguenza  $U(a)$  e  $U(b)$  rispettano lo stesso insieme di relazioni dei generatori del gruppo diedrale  $\mathbb{D}_4$ , il gruppo delle simmetrie di un quadrato, una cui presentazione<sup>6</sup> è  $\langle a, b | a^4 = b^2 = 1, bab = b^{-1} \rangle$  [15].

Una rappresentazione lineare fedele di  $\mathbb{D}_4$  [16] è data da

$$a \rightarrow i\sigma^y \quad b \rightarrow \sigma^x \tag{2.55}$$

con  $\sigma^x$  e  $\sigma^y$  matrici di Pauli.

Possiamo riscrivere le azioni di  $U(a)$  e  $U(b)$  sugli autostati di  $H$   $|n\rangle$  e  $|-n+1\rangle$

$$U(a)|n\rangle = (-1)^{n+1} |-n+1\rangle \quad U(a)|-n+1\rangle = (-1)^n |n\rangle \tag{2.56}$$

$$U(b)|n\rangle = |-n+1\rangle \quad U(b)|-n+1\rangle = |n\rangle \tag{2.57}$$

definendo  $|n\rangle \equiv (1, 0)$  e  $|-n+1\rangle \equiv (0, 1)$ :

$$U(a)|n\rangle = (-1)^n i\sigma^y |n\rangle = (-1)^n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1)^{n+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.58}$$

$$U(a)|-n+1\rangle = (-1)^n i\sigma^y |-n+1\rangle = (-1)^n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.59}$$

e ugualmente per  $U(b)$  l'azione sul doppietto  $\{|n\rangle, |-n+1\rangle\}$  è quella di  $\sigma^x$ .

Possiamo dunque concludere che il gruppo di simmetria dell'Hamiltoniana nel caso  $\theta = \pi$  con l'aggiunta del potenziale  $V(x)$  passi da  $Pin^+(2)$  a  $\mathbb{D}_4$ , anch'esso un'estensione centrale ma di  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  da parte di  $\mathbb{Z}_2$ .

Come abbiamo già dimostrato la presenza di rappresentazioni genuinamente proiettive del gruppo di simmetrie di  $H$ , e dunque di rappresentazioni ordinarie di una sua estensione centrale, implica la degenerazione dell'intero spettro di  $H$ , in particolare anche del suo stato fondamentale, a prescindere dai valori di  $\lambda_k$  scelti in 2.41.

Ciò viene confermato anche dalla teoria perturbativa – al primo ordine, ma resta vero per tutti gli ordini successivi: il potenziale in forma matriciale nell'autospazio generato da  $|n\rangle$  e  $|-n+1\rangle$  è infatti

$$V = \begin{pmatrix} \langle n | V(x) | n \rangle & \langle n | V(x) | -n+1 \rangle \\ \langle -n+1 | V(x) | n \rangle & \langle -n+1 | V(x) | -n+1 \rangle \end{pmatrix} \tag{2.60}$$

---

<sup>6</sup>Una presentazione  $\langle S | R \rangle$  di un gruppo finito è data da un insieme di suoi generatori  $S$  e dall'insieme  $R$  di relazioni che devono rispettare.

con gli elementi sulla diagonale nulli, ripercorrendo gli stessi calcoli fatti per  $\theta = 0$ , e con gli altri due elementi pari a

$$\begin{aligned} \langle n | V(x) | -n + 1 \rangle &= \sum_k \frac{1}{2\pi} \lambda_k \int_0^{2\pi} e^{-i(1-2)n x} \cdot \frac{1}{2} \left( e^{2ikx} + e^{-2ikx} \right) dx \\ &= \sum_k \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda_k}{2} \left( \int_0^{2\pi} e^{i(1-2n+2k)x} dx + \int_0^{2\pi} e^{-i(1-2n-2k)x} dx \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.61)$$

poiché non esiste nessun  $k \in \mathbb{N}$  tale che  $k = \frac{\pm(2n-1)}{2}$ .

Di conseguenza la correzione al primo ordine degli autovalori di  $H$  è anch'essa nulla e la degenerazione è preservata.

L'unico modo affinché non ci fosse degenerazione infatti richiederebbe che  $V_P$  e  $T_\pi$  agissero come delle fasi – azione che però entrerebbe in contraddizione con le relazioni algebriche 2.51.

Questo risultato è estremamente importante poiché ci permette di porre dei *vincoli alla dinamica del sistema* a partire da sole considerazioni che riguardano le sue simmetrie e ancor prima che il sistema venga risolto, e ciò è ancora più utile nei casi in cui la risoluzione numerica può rivelarsi particolarmente ostica.

Inoltre quanto detto fin'ora per un potenziale  $V(2x)$  è in realtà in parte estendibile ad un potenziale  $V(Nx)$  con  $N \in \mathbb{N}$  pari. Per  $N \neq 2$  il gruppo di simmetria non è più abeliano, poiché come mostrato in 2.17 una trasformazione di parità ed una traslazione non commutano se non per  $\alpha = \pi$ , ed è dunque  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_N$ , al cui interno è naturalmente presente il sottogruppo  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  visto che una traslazione di  $\pi$  è ovviamente riottenibile con  $N/2$  traslazioni di  $2\pi/N$ .

Anche in questo caso per  $\theta = 0$  abbiamo una rappresentazione lineare di  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_N$  poiché i suoi generatori, ovvero gli operatori

$$U_P |n\rangle = |-n\rangle \quad T_{2\pi/N} |n\rangle = e^{i\frac{2\pi}{N}n} |n\rangle \quad (2.62)$$

rispettano l'algebra del gruppo. Di conseguenza lo stato fondamentale di  $H$  è unico.

Per  $\theta = \pi$  invece, come il suo sottogruppo  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ , il gruppo di simmetria è necessariamente realizzato proiettivamente. Riprendendo l'eq.2.25, che in questo caso diventa

$$V_P T_{2\pi/N} V_P = e^{i\frac{2\pi}{N}} T_{-2\pi/N} , \quad (2.63)$$

si può verificare che è impossibile ridefinire il rappresentante delle traslazioni di  $2\pi/N$   $T'_{2\pi/N}$  in modo congruo da riassorbire la fase e contemporaneamente rispettare le relazioni di  $\mathbb{Z}_N$   $\left( (T'_{2\pi/N})^N = \mathbb{1} \right)$ .

Al contrario per  $N$  dispari si può ridefinire l'operatore rappresentante delle traslazioni discrete seguendo quanto fatto nella scorsa sezione

$$T'_{2\pi/N} \equiv -\mathcal{V}_{\alpha=2\pi/N} = -e^{i\frac{2\pi}{N}(\hat{n}-\frac{1}{2})} . \quad (2.64)$$

La legge di composizione di  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_N$  è questa volta rispettata, come mostrato in 2.29 per  $\alpha$  generico, e in aggiunta proprio in virtù della disparità di  $N$  vale

$$\begin{aligned} (-\mathcal{V}_{2\pi/N})^N &= (-1)^N e^{i2\pi(\hat{n}-\frac{1}{2})} \\ &= (-1)^N \mathcal{V}_{2\pi} \\ &= (-1)^N (-\mathbb{1}) \\ &= \mathbb{1} . \end{aligned} \quad (2.65)$$

Possiamo dunque concludere che  $-\mathcal{V}_{2\pi/N}$  e  $V_P$  sono sue rappresentazioni lineari e di conseguenza che la degenerazione dello stato fondamentale viene rimossa.

# Conclusione

In questo lavoro abbiamo mostrato come uno studio dettagliato delle simmetrie di un sistema quantistico, tramite l'analisi della struttura dei gruppi ad esse associate e delle rispettive rappresentazioni possibili, possa fornire a priori informazioni interessanti sulla dinamica del sistema stesso, anche qualora questo non sia risolvibile esattamente.

Nel capitolo 1 abbiamo provato a presentare una panoramica il più esaustiva possibile, dato lo spazio a disposizione, per comprendere la natura delle rappresentazioni genuinamente proiettive, esaminando le cause che le generano ed elencando, a seconda delle strutture ulteriori presenti sui gruppi, le strategie possibili per ricondurle a rappresentazioni ordinarie di altri gruppi. Sono stati inoltre presentati degli spunti di approfondimento dell'argomento attraverso la teoria della coomologia o uno studio più meticoloso delle algebre di Lie.

In 1.4 abbiamo trattato il caso specifico in cui il gruppo di simmetria dell'Hamiltoniana  $H$  del sistema viene realizzato proiettivamente sullo spazio di Hilbert ricavando che la conseguenza principale di ciò è la degenerazione di tutto lo spettro di  $H$ , anche del suo stato fondamentale.

Questo risultato è centrale nello studio del sistema preso in esame nel capitolo 2, di cui è stato analizzato prima il caso libero e successivamente quello con l'aggiunta di un potenziale. In particolare in quest'ultima parte siamo riusciti a limitare la dinamica del sistema, nei casi in cui il gruppo simmetria di  $H$  fosse rappresentato proiettivamente, ancor prima di risolverlo.

Infine vale la pena evidenziare le applicazioni del sistema trattato nello studio delle anomalie di 't Hooft nell'ambito delle teorie di gauge [15][13][14] e nel Quantum Computing per la comprensione della fisica dei *qubit*  $0-\pi$  [16] [20].

# Bibliografia

- [1] Pieralberto Marchetti. *Trascrizione degli appunti delle lezioni di Istituzioni di Fisica teorica*. A cura di Francesco Manzali. 2019. URL: <https://github.com/Einlar/FisicaTeorica>.
- [2] Steven Weinberg. *The Quantum Theory of Fields: Volume 1: Foundations*. Vol. 1. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. ISBN: 978-0-521-67053-1. DOI: 10.1017/CB09781139644167. URL: <https://www.cambridge.org/core/books/quantum-theory-of-fields/22986119910BF6A2EFE42684801A3BDF>.
- [3] Gregory W. Moore. «Lie Algebras from Lie Groups». In: *Applied Group Theory - Lecture notes*. 2018. URL: <http://www.physics.rutgers.edu/~gmoore/618Spring2018/GTLect8-LieGroupTheory-2018.pdf>.
- [4] Valter Moretti. «Quantum Symmetries». In: *Fundamental Mathematical Structures of Quantum Theory: Spectral Theory, Foundational Issues, Symmetries, Algebraic Formulation*. Cham: Springer International Publishing, 2019, pp. 253–297. DOI: 10.1007/978-3-030-18346-2\_7.
- [5] Eugen Wigner. *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atompektren*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 1931. ISBN: 978-3-663-00642-8. DOI: 10.1007/978-3-663-02555-9. URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-663-02555-9>.
- [6] M. Schottenloher. «Central Extensions of Groups». In: *A Mathematical Introduction to Conformal Field Theory*. A cura di M. Schottenloher. Lecture Notes in Physics. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008, pp. 39–62. ISBN: 978-3-540-68628-6. DOI: 10.1007/978-3-540-68628-6\_3. URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-540-68628-6\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-540-68628-6_3).
- [7] Valter Moretti. «Introduction to Quantum Symmetries». In: *Spectral Theory and Quantum Mechanics: Mathematical Foundations of Quantum Theories, Symmetries and Introduction to the Algebraic Formulation*. A cura di Valter Moretti. UNITEXT. Cham: Springer International Publishing, 2017, pp. 665–792. ISBN: 978-3-319-70706-8. DOI: 10.1007/978-3-319-70706-8\_12. URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-70706-8\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-319-70706-8_12).
- [8] M.A. Naimark e A.I. Stern. *Theory of Group Representations*. Springer, 1982. URL: <https://link.springer.com/book/9781461381440>.
- [9] V. Bargmann. «On Unitary Ray Representations of Continuous Groups». In: *Annals of Mathematics* 59.1 (1954). Publisher: Annals of Mathematics, pp. 1–46. ISSN: 0003-486X. DOI: 10.2307/1969831. URL: <https://www.jstor.org/stable/1969831>.
- [10] M. Schottenloher. «Central Extensions of Lie Algebras and Bargmann’s Theorem». In: *A Mathematical Introduction to Conformal Field Theory*. A cura di M. Schottenloher. Lecture Notes in Physics. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008, pp. 63–73. ISBN: 978-3-540-68628-6. DOI: 10.1007/978-3-540-68628-6\_4. URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-540-68628-6\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-540-68628-6_4).
- [11] M. H. Stone. «Linear Transformations in Hilbert Space». In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 16.2 (feb. 1930), pp. 172–175. DOI: 10.1073/pnas.16.2.172.

- 
- [12] M. H. Stone. «On One-Parameter Unitary Groups in Hilbert Space». In: *Annals of Mathematics* 33.3 (1932), pp. 643–648. ISSN: 0003-486X. DOI: 10.2307/1968538.
- [13] Davide Gaiotto et al. «Theta, Time Reversal, and Temperature». In: *Journal of High Energy Physics* 2017.5 (mag. 2017), p. 91. ISSN: 1029-8479. DOI: 10.1007/JHEP05(2017)091.
- [14] Yuta Kikuchi e Yuya Tanizaki. «Global inconsistency, 't Hooft anomaly, and level crossing in quantum mechanics». In: *Progress of Theoretical and Experimental Physics* 2017.11 (1 nov. 2017), 113B05. ISSN: 2050-3911. DOI: 10.1093/ptep/ptx148.
- [15] David Tong. «Anomalies». In: *Lectures on Gauge theory*. 2018, pp. 121–199. URL: <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/gaugetheory.html>.
- [16] I. L. Egusquiza et al. «Role of anomalous symmetry in  $0 - \pi$  qubits». In: *Physical Review B* 105.20 (4 mag. 2022). Publisher: American Physical Society, p. L201104. DOI: 10.1103/PhysRevB.105.L201104.
- [17] Kantaro Ohmori - University of Tokyo. *Quantum Anomalies as Projective Phases*. URL: [https://kantohm11.github.io/symmetry\\_review/](https://kantohm11.github.io/symmetry_review/).
- [18] Yakov Landau. *The Free Fermion Anomaly and Representations of the Pin Groups*. Set. 2018. DOI: 10.48550/arXiv.1809.05078. eprint: 1809.05078[hep-th].
- [19] Gregory W. Moore. «Quantum symmetries and compatible hamiltonians». In: *Topics in Physical mathematics - Lecture notes*. 2013. URL: <http://www.physics.rutgers.edu/~gmoore/695Fall12013/CHAPTER1-QUANTUMSYMMETRY-OCT5.pdf>.
- [20] Alexei Kitaev. *Protected qubit based on a superconducting current mirror*. 19 Set. 2006. DOI: 10.48550/arXiv.cond-mat/0609441.