Indice

Introduzione

Disporre di una buona misura di rischio, è di fondamentale importanza in finanza, in quanto essa è una dei principali strumenti per la valutazione delle attività finanziarie, dato che essa permette il monitoraggio dei titoli e fornisce un criterio per la costruzione dei portafogli. La misura che più di ogni altra è stata largamente utilizzata nel corso degli anni è la varianza.

Tra i vari metodi comunemente utilizzati per ricavare informazioni sulla varianza è possibile adottare il modello di mercato , il quale fornisce il parametro beta che indica la relazione esistente tra i titoli ed il rischio di mercato; questo parametro rappresenta quindi l'esposizione dei titoli al rischio e fornisce l'indicazione sulla quota di varianza nei titoli attribuibile ad esso. Inoltre tramite questo modello è possibile ricavare facilmente le covarianze tra i titoli. È tuttavia da considerare il fatto che il mercato potrebbe influenzare la distribuzione dei rendimenti non solo nel valore atteso, ma anche in molti altri aspetti, ad esempio aumentandone la dispersione o inducendo forme di asimmetria e curtosi. In questi casi oltre ad essere la varianza inadatta a rappresentare efficacemente il rischio, le quantità stimate dal modello di mercato non sono sufficienti per descrivere efficacemente il comportamento dei titoli al variare del rischio di mercato. In questa tesi si è voluto, tramite l'analisi della regressione quantile, sfruttare una versione modificata del modello di mercato, in modo che, oltre a descrivere la tendenza centrale dei rendimenti, sia possibile catturare l'effetto che il fattore di rischio comporta sull'intera distribuzione di quest'ultimi. In particolare, si è prestata attenzione all'effetto indotto sulla coda inferiore, poichè questa rappresenta la possibilità di ottenere perdite ben peggiori di quelle attese in condizioni di mercato negative. Ne è conseguita la possibilità di considerare i coefficienti ottenuti tramite regressione quantile come ulteriori indicazioni del rischio associato ai titoli. La stima delle distribuzioni dei rendimenti consente, inoltre, di disporre di input più accurati utili ad analizzare la variazione del rischio del portafoglio al variare dei pesi associati ai titoli. In particolare tramite tramite l'analisi del comportamento dei coefficienti di regressione quantile, è possibile individuare dei portafogli ottimi, sia condizionatamente alle diverse situazioni di mercato che, in alcuni casi migliori del portafoglio di minima varianza a prescindere dal valore del fattore di rischio. La tesi è stata suddivisa in quattro capitoli con le seguenti caratteristiche.

Nel primo capitolo vengono descritte le principali problematiche che derivano dalla considerazione della varianza come unica misura di rischio nel caso in cui i rendimenti non siano distribuiti normalmente, e di come il VaR possa risolvere questa situazione. Viene inoltre descritto in cosa consiste questa misura di rischio, dandone una definizione matematica ed illustrando quali sono i principali approcci utilizzati evidenziandone pregi e difetti.

Nel secondo capitolo viene discussa la quantile regression illustrando come fornisca una panoramica più ampia degli effetti delle covariate sulla variabile risposta. Dopo una breve rassegna della quantile regression in finanza, viene spiegato il principio su cui si basa e come da questo è possibile derivare la funzione di stima. Ne vengono inoltre illustrate le proprietà e i vari risultati asintotici, i vari metodi di stima ed il procedimento con cui sono ottenuti gli intervalli di confidenza.

Nel terzo capitolo è descritta l'intuizione su cui si basa il modello di mercato, e cosa comportano le varie assunzioni statistiche. Perchè il modello dia dei risultati validi tramite la regressione quantile, dev'essere modificato aggiungendo come regressore il segno del fattore di rischio; si vedrà come il fatto di considerare il segno ha comunque delle motivazioni teoriche. Viene inoltre esposto come il modello di mercato classico permetta di individuare il contributo che ogni titolo porta ad un eventuale portafoglio in termini di rischio beta ed in termini di varianza; ne seguirà la dimostrazione di come la varianza complessiva sia scomponibile in una parte dovuta esclusivamente al fattore di rischio e in una parte dovuta esclusivamente alle caratteristiche dei singoli titoli, parte eliminabile tramite la diversificazione. Si vedrà quindi, come sotto le assunzioni di normalità ed identica distribuzione sia possibile tramite una semplice riparametrizzazione passare dalla varianza al VaR, espresso tramite coefficienti di regressione quantile. Si evidenzia così come gli effetti della diversificazione agiscono in pari modo anche sul VaR. Se vengono a mancare le assunzioni sulla normalità e sull'identica distribuzione degli errori tuttavia il modello precedente non considera un'ulteriore fonte di rischio dovuta agli effetti del fattore di rischio sulle code della distribuzione, che viene invece colta utilizzando la regressione quantile nel modello con segno. Si chiarirà, quindi, come le componenti che determinano il VaR siano ancora scomponibili in rischio sistematico e diversificabile, solo che in quest'ultimo comparirà anche la differenza tra il beta lineare e il beta dei quantili.

Nel quarto ed ultimo capitolo vengono descritti i dati che si sono utilizzati e le principali procedure che si sono seguite nell'analisi di questi. Successivamente, verranno fatte alcune considerazioni sui coefficienti ottenuti dalla regressione quantile e su come essi indichino un comportamento dei rendimenti molto più complesso di quello ipotizzato dal modello di mercato classico, ponendo l'attenzione su come questi possano essere utilizzati analogamente al beta di regressione lineare per descrivere in maniera più accurata il rischio dei titoli. Partendo da tutte queste informazioni ci si è dedicati all'analisi dei portafogli, stimando da principio i coefficienti beta e alpha quantile al variare dei pesi assegnati ai titoli, e verificando che anche con due soli titoli si realizza un effetto di diversificazione sul coefficiente beta. Tramite i coefficienti stimati sono state ricostruite le curve dei quantili al variare dei pesi del portafoglio, in differenti situazioni di mercato. Ciò ha dato la facoltà di osservare come le assunzioni classiche portino sia a sottostimare il rischio, sia a non valutarne correttamente la variazione in base alla composizione del portafoglio. Si è inoltre descritto come in alcuni casi sia possibile ottenere dei portafogli caratterizzati sia da coefficienti alpha quantile superiori, che da coefficienti beta quantile inferiori ai rispettivi coefficienti nel portafoglio di minima varianza, ottenendo quindi dei portafogli con rette di regressione quantile sempre superiori alle rispettive rette nel portafoglio a minima varianza. Per finire è stata applicato quanto visto in precedenza nel caso di dieci titoli.

Capitolo 1

Varianza e VaR

Nel 1952 Markowitz gettò le basi di quella che oggi è conosciuta come " modern portfolio theory ". Fino a quel momento chi si occupava di investimenti aveva ben chiaro che la diversificazione di un portafoglio creava dei vantaggi, ma questo limitatamente al fatto di possedere più titoli considerati a se stanti, mentre Markowitz nel suo articolo considerò anche la dipendenza esistente tra di essi. l contributo di Markovitz consistette nel dimostrare matematicamente il vantaggio di un portafoglio diversificato in termini di rischio e valore atteso. L'idea di partenza è quella di trovare la giusta allocazione per i titoli in modo da ottenere a parità di rischio il valore atteso più elevato oppure minimizzare il rischio a parità di valore atteso. Per realizzare ciò è necessario ricondurre il concetto di rischio ad una quantità misurabile, che generalmente è indicata come la varianza. Massimizzando quindi il valore atteso dei rendimenti del portafogli per ogni livello di varianza, è possibile ricostruire una curva chiamata frontiera efficiente, che determina il valore atteso massimo ottenibile con i titoli disponibili per la costruzione del portafoglio relativamente ad ogni livello di rischio. Sulla frontiera efficiente esiste un punto particolare chiamato portafoglio a minima varianza, la cui caratteristica è quella di individuare il portafoglio con il più basso valore di varianza possibile indipendentemente dal valore atteso. Perchè ciò sia possibile è necessario conoscere la matrice di varianza e covarianza dei titoli del portafoglio, la quale indica la rischiosità in termini di varianza di ciascun titolo e i comovimenti che esistono tra i diversi asset. È dimostrabile che, a meno che le correlazioni tra i titoli siano tutte pari ad uno, aumentando il numero titoli, la varianza complessiva del portafoglio si riduce. Il principio portante di questa operazione quindi è quello di ottimizzare (cioè ridurre) il rischio rappresentato dalla varianza del portafoglio. Una delle maggiori critiche che si può muovere a quanto appena esposto è che ricondurre il rischio esclusivamente alla misura della varianza risulta ottimale solo nel caso in cui la distribuzione dei rendimenti sia normale. La distribuzione normale gode infatti di alcune proprietà che rendono la varianza una misura sufficiente per rappresentare il rischio, in particolare quella di essere completamente determinabile tramite i primi due momenti. È quindi sufficiente conoscerne la media e la varianza per determinare qualsiasi altro punto della distribuzione; anche assumendo altre misure di rischio come la semivarianza o il VaR (che verrà descritto nella prossima paragrafo), queste in caso di normalità sono ricavabili direttamente come multipli della varianza.

L'altra caratteristica fondamentale della distribuzione normale è che una combinazione lineare di variabili normali è ancora una variabile normale, di conseguenza se la distribuzione dei rendimenti dei titoli è gaussiana, anche la distribuzione dei rendimenti di un portafoglio composto da essi è ancora gaussiana. Per determinare la media e la varianza di un portafoglio è sufficiente conoscere la media e la varianza dei singoli titoli e delle covarianze esistenti tra di essi.

Per questi motivi la normalità è una caratteristica molto apprezzata, poichè permette una soluzione in termini matematici molto semplice. Tuttavia è noto come nella realtà l'assunzione di normalità dei rendimenti spesso non sia verificata e questo annulla la capacità della varianza sia di essere rappresentativa di altre misure di rischio, sia di essere una misura adeguata a descrivere l'effettiva rischiosità degli strumenti coinvolti. In particolare essa risulta del tutto inadatta quando invece della normalità si riscontrano distribuzioni asimmetriche o leptocurtiche.

Un esempio esplicherà la portata di tale problematica: assumendo due titoli, i cui rendimenti sono distribuiti normalmente con valore atteso nullo ma con il primo che ha varianza maggiore del secondo, se si volesse valutare la rischiosità del titolo in base ad un quantile della coda sinistra, poichè la varianza del primo è maggiore di quella del secondo tutti i quantili della coda negativa del primo titolo sono inferiori ai rispettivi quantili del secondo titolo. Perciò sia in termini di varianza, che in termini di quantili, il secondo titolo è preferibile; inoltre, dato che i quantili sono dei multipli della varianza, questa contiene esattamente la

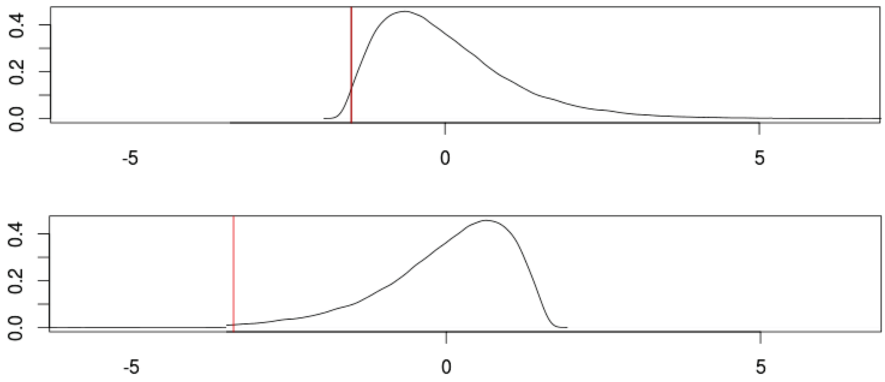


Figura 1.1: curve di densità e relativo VaR (linea verticale)

stessa informazione dei quantili.

Se invece della normale si assumono due distribuzioni asimmetriche le conclusioni possono cambiare sensibilmente in base alla misura di rischio adottata, ad esempio supponendo che il primo titolo abbia valore atteso nullo ed una coda molto lunga a sinistra, mentre il secondo sia ottenuto moltiplicando i valori del primo per meno uno. Così facendo, entrambi i titoli hanno la stessa media e la stessa varianza, mentre il valore del τ-esimo quantile del primo titolo corrisponde al valore dell'$(1-\tau)$-eismo quantile del secondo titolo moltiplicato per meno uno. Da ciò se ne ricava che, mentre nel primo titolo sono probabili perdite molto elevate, nel secondo titolo sono i guadagni che possono assumere valori molto elevati. La varianza in questo caso indicherebbe che la rischiosità dei titoli è la medesima, quando invece valutando le possibilità di perdita si può concludere (anche solo guardando la forma delle distribuzioni) che il primo titolo è maggiormente rischioso rispetto al secondo. La rischiosità viceversa verrebbe valutata correttamente se si utilizzasse al posto della varianza una misura di rischio come il VaR che, indicando un quantile della coda sinistra, evidenzierebbe immediatamente le differenze tra i due titoli.

Un esempio analogo si può fare nel caso di due titoli con distribuzioni simmetriche che abbiano uguale valore atteso ed uguale varianza, dove nel primo titolo si riscontrino delle code più grasse rispetto al secondo. È qui possibile notare come il valore dei quantili nella coda sinista della distribuzione del primo titolo siano inferiori ai corrispettivi quantili del secondo, perciò nel primo titolo si ha una maggior probabilità di realizzare perdite particolarmente elevate rispetto al secondo; Valutando i quantili il primo titolo sarà individuato come il più rischioso tra i due. In questi casi quindi è più indicato utilizzare una misura di rischio che, invece degli scostamenti dalla media, valuti le potenziali perdite in cui è possibile incorrere. Una misura adatta a tale scopo è certamente il VaR.

Nonostante possa cambiare la misura di rischio di riferimento L'obbiettivo finale di Markowitz resta comunque quello di ottimizzare in maniera adeguata il rischio del portafoglio. Il portafoglio a minima varianza verrà utilizzato comunque come confronto.

1.1 Il VaR

Come affermato in precedenza considerare la varianza come unica misura di rischio nel caso di non normalità è limitativo.

Una misura di rischio che viene largamente utilizzata da oltre due decenni è il VaR, acronimo di "Value at Risk".

La nascita del VaR è da ricollegarsi al bisogno crescente delle istituzioni finanziarie di gestire il rischio e quindi di poterlo misurare, a causa della sempre più complessa struttura dei mercati finanziari. In realtà questa misura non è stata introdotta per arginare i limiti della varianza come misura di rischio dato che come si vedrà un approccio per calcolare il valore del VaR parte appunto dalle assunzioni di normalità, ma per rendere più facile la comprensione del rischio racchiudendo in un unico numero il rischio complessivo di un titolo o di un portafoglio di attività finanziarie ed adottando un'unica metrica per tipi di rischio diversi.

Nel contesto finanziario il VaR è una stima, dato un intervallo di confidenza, di quanto elevate possano essere le perdite di un titolo o di un portafoglio, in un dato orizzonte temporale. Il VaR si concentra quindi sulla coda sinistra della distribuzione dei rendimenti, dove sono collocati eventi a basse probabilità di realizzo. Il fatto di indicare le perdite e non la dispersione dei rendimenti attorno al proprio valore atteso la rende una misura più vicina all'idea comune di rischio rispetto alla varianza.

Dal punto di vista matematico è possibile definire il VaR nel seguente modo: Definita la funzione di ripartizione della variabile casuale dei rendimenti per un intervallo t come

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(R)dr$$

dove $p(R)$ rappresenta la funzione di densità della variabile dei rendimenti R, la probabilità di ottenere un valore inferiore a x è data da $P(R \leq x) = F(x)$. Dalle considerazioni fatte in precedenza, è possibile definire il VaR come la soluzione dell'equazione:

$$P(R \leq VaR_\tau) = F(VaR_\tau) = \tau$$

Che corrisponde a

$$\int_{-\infty}^{VaR} p(R)dR = \tau$$

La soluzione è data dall'inversa della funzione di ripartizione, corrispondente alla funzione quantile. $VaR_\tau = F^{-1}(\tau)$. Nel caso di distribuzione normale standard verrà utilizzata la notazione $F^{-1}(\tau) = \Phi(\tau)$, dove i valori sono tabulati nelle apposite tavole. È quindi possibile associare il VaR al quantile τ della distribuzione dei rendimenti.

1.2 Il calcolo del VaR

Data la definizione precedente risulta inevitabile concludere che per il calcolo del VaR è necessario disporre della distribuzione dei profitti e delle perdite. I metodi per il calcolo del VaR si differenziano per la modalità con cui questa distribuzione viene ottenuta e per come viene ricavato il quantile. In base a queste differenze, è possibile distinguere i metodi di calcolo in metodi parametrici e non parametrici, che comprendo il metodo basato su media e varianza, su simulazione storica e su simulazione montecarlo. È possibile tuttavia individuare delle fasi comuni a tutti e tre i metodi, che consistono in:

- assumere o ricavare la funzione di ripartizione dei rendimenti per i singoli titoli
- determinare le relazioni tra i titoli
- determinare la funzione di probabilità dei rendimenti del portafoglio, tenendo in considerazione i due punti precedenti
- determinare il VaR

1.2.1 Metodo media varianza e delta covarianza

L'assunzione che sta alla base di questo metodo ne è anche il limite fondamentale, cioè che i rendimenti siano distribuiti in modo gaussiano; il fatto di assumere una distribuzione lo rende un metodo parametrico. La forma distributiva dei rendimenti viene quindi scelta a priori, ed è sufficiente, data la normalità, conoscere i due parametri che la caratterizzano (media e varianza) per poterne ricavare i quantili; se i parametri non sono noti, andranno opportunamente stimati. Il metodo può essere utilizzato indistintamente sia per un solo titolo che per un portafoglio di n asset. Nel caso del portafoglio sarà sufficiente che i rendimenti dei singoli titoli siano normali per garantire la normalità anche dei portafogli risultanti. Dato che la distribuzione gaussiana può essere determinata interamente dai parametri media e varianza, è possibile ricavare il VaR semplicemente come multiplo della radice della varianza traslato per il valore della media.

$$VaR_\tau(X) = E[X] - \Phi(\tau)\sigma_X \tag{1.1}$$

Quando invece di un solo asset si ha un portafoglio, è necessario conoscere anche le covarianze tra i titoli in modo da poter determinare la varianza del portafoglio. In questo caso il VaR del portafoglio è dato da

$$VaR_\tau(P) = E[P] - \Phi(\tau)\sigma_P = E[\sum_i \omega_i x_i] + \Phi(\tau)\sqrt{\sum_i \sum_j \omega_i \omega_j \sigma_{i,j}} \tag{1.2}$$

In caso di normalità quindi secondo questo approccio la complessità è data dal fatto che, se il portafoglio è composto da molti titoli, sarà necessario conoscere o eventualmente stimare un gran numero di parametri dovuti alle covarianze. Una possibile soluzione a questo problema è quella di sfruttare un modello fattoriale che permetta di ricostruire le covarianze tramite la relazione esistente tra titoli e fattori comuni.

Questo metodo è caratterizzato da una maggior facilità di applicazione rispetto agli altri due, ciononostante, sono rilevabili alcuni problemi. Il primo è che la distribuzione normale costituisce un'aprossimazione della vera distribuzione di densità dei titoli; nella realtà è facile riscontrare distribuzioni leptocurtiche per i rendimenti, ed essendo tali distribuzioni caratterizzate da code più grasse della distribuzione normale, utilizzare la normale porta a sottostimare il rischio di coda. Esiste inoltre un problema di input, infatti se la stima della matrice di varianza non è corretta il VaR calcolato sarà esso stesso errato. Un altro problema può essere dovuto alla non stabilità dei parametri nel tempo, essendo possibile che le relazioni tra gli asset cambino nel tempo a causa di particolari shock delle variabili macroecomiche.

1.2.2 Metodo del VaR storico

Un modo per ovviare all'assunzione di una forma distributiva che generalmente viene utilizzato è quello di servirsi di dati storici; la mancanza di assunzioni sulle distribuzioni lo rende un approccio non parametrico. Tramite le osservazioni passate viene ricostruita la funzione di ripartizione empirica dalla quale si ricava il VaR. Viene meno in questo modo il problema delle relazioni tra gli asset, infatti le dipendenze, lineari e non, sono già contenuti nei dati osservati. Tuttavia per avere dei risultati sufficientemente precisi, approcciarsi mediante simulazione storica presuppone che le serie storiche siano molto lunghe, con conseguenti possibili errori dovuti alla non stabilità della serie storica. Non da ultimo, questo metodo pone sul medesimo piano osservazioni effettuate in periodi temporali lontani ed osservazioni più recenti.

Esiste inoltre il problema dovuto alla sensibilità dalla finestra temporale scelta; lo spostamento della finestra temporale può far entrare o uscire dal campione dei valori estremi che creano dei salti nella stima del VaR. Questo può risultare particolarmente rilevante, soprattutto nel caso in cui si dovesse assistere ad un periodo di crisi economica, come quello del 2008, dove i dati osservati precrisi risulterebbero del tutto inappropriati per ricavare un VaR utilizzabile in un secondo momento.

L'assunto su cui si basa questo metodo è che quello che è stato già osservato in passato si ripeterà, tuttavia, se pur di semplice comprensione, questa proposizione non è di semplice assimilazione, soprattutto se si guarda a periodi storici particolari come quello riguardante la crisi petrolifera o quello seguente gli attacchi dell'undici settembre.

1.2.3 Metodo Montecarlo

Il terzo metodo si basa su simulazione Montecarlo, che richiede uno sforzo computazionale maggiore rispetto ai casi precedentemente analizzati. Questo metodo, come quello della serie storica, ha l'obbiettivo di ricostruire la distribuzione dei dati, con la differenza sostanziale che mentre nella serie storica vengono utilizzati dei dati realmente osservati, nel metodo Montecarlo i dati vengono simulati. Qui i valori vengono prodotti in maniera stocastica, vincolandosi ad una distribuzione di probabilità scelta a priori. Una possibilità è quella di assumere una distribuzione per i rendimenti dove alcuni alcuni parametri come ad esempio il valore atteso sono determinati secondo un modello fattoriale. Il primo passo consisterà nell'individuazione dei fattori comuni che influenzano i rendimenti e successivamente, dopo aver scelto una distribuzione parametrica per i rendimenti, questi ultimi vengono simulati condizionatamente al valore dei fattori comuni. Sarà così possibile sia avere a disposizione valori che non sono stati già osservati, sia considerare situazioni di mercato che non si sono ancora verificate. Perchè ciò sia attuabile, sarà necessario modellizzare la relazione tra i rendimenti e le varie situazioni di mercato, e successivamente dai dati ottenuti sarà abbastanza immediato il calcolo del VaR. Nonostante uno degli scopi della simulazione Montecarlo sia proprio quello di poter considerare distribuzioni diverse dalla normale, la difficoltà nella scelta e nella gestione di tali distribuzioni ne ha pesantemente scoraggiato l'uso operativo.

1.3 Il VaR condizionato

Il metodo della serie storica è quello che permette di svincolarsi maggiormente dalle assunzioni distributive, ed è quello che secondo le ricerche, è maggiormente utilizzato dalle banche e dagli istituti finanziari.

Il grosso limite rimane quello di essere sensibile alla finestra utilizzata, e quindi di non poter includere situazioni che non sono presenti nei dati osservati.

Il limite degli altri due metodi invece è quello di dipendere da delle ipotesi distributive fatte a priori.

Un passo fatto per ridurre il problema è stato quello di utilizzare altre forme distributive al posto della gaussiana; distribuzioni come la t di Student permettono infatti di considerare eventuali leptocurtosi, oppure utilizzare una mistura di normali permettendo di estendersi anche a forme asimmetriche. Un'ulteriore implementazione è quella di considerare le distribuzioni condizionate dei rendimenti inserendo una varianza eteroschedastica tramite l'utilizzo di modelli GARCH sia univariati che multivariati in modo da modellare direttamente le dipendenze tra i titoli.

In questa tesi verrà utilizzato un approccio diverso dai metodi illustrati precedentemente con la doppia finalità di svincolarsi da una forma parametrica preimpostata e di non dipendere esclusivamente dai dati osservati. L'idea è quella di assumere che, sia per il comportamento dei singoli titoli, che per le relazioni tra di essi, esista un legame con un altra variabile chiamata "rischio di mercato" che si considera come l'unica variabile necessaria per spiegare il comportamento e le dipendenze dei titoli. Questa operazione è realizzabile in due differenti modalità: o imponendo una forma parametrica (come ad esempio la normale) e stimarne i parametri che determinano le distribuzioni condizionate, oppure non assumendo alcuna forma parametrica e ricavare direttamente la relazione lineare esistente tra i quantili dei rendimenti e il fattore di rischio. Nel primo caso è possibile utilizzare la regressione lineare in modo che tramite il valore atteso condizionato e la varianza dei residui si ricavino i quantili della distribuzione dei rendimenti per diversi valori del fattore di rischio. Questo approccio rimane soggetto ai problemi descritti in precedenza. Il secondo metodo è possibile se, invece che utilizzare la regressione lineare, si sfrutta la regressione del quantile. Nel capitolo successivo verrà spiegato in cosa consiste questo strumento e quali sono i vantaggi che si ottengono rispetto alla regressione lineare se si estende l'analisi dei rendimenti utilizzando questo nuovo metodo.

1.4 I limite del VaR

Nonostante il VaR come misura di rischio sia stato e sia tutt'oggi largamente utilizzato, nel corso degli anni è stato più volte soggetto a critiche. Uno dei problemi evidenti nell'utilizzo del VaR è che rappresentando esclusivamente un punto della coda, non si tiene in considerazione il restante comportamento della coda della distribuzione inferiore al VaR stesso, e di conseguenza verrebbero considerati ugualmente rischiosi due titoli con stesso VaR ma aventi comportamenti della coda completamente diversi. Nonostante questi valori siano poco probabili, con particolari distribuzioni è possibile raggiungere valori molto negativi. Questo può causare risultati discordanti per VaR considerati a diversi livelli di confidenza, dato che maggiore è il τ, maggiore è il numero dei restanti quantili della coda che non vengono presi in considerazione. Inoltre il VaR come misura di rischio non possiede tutti i requisiti delle misure coerenti di rischio poichè non soddisfa l'assioma di subaddittività, il quale richiede che una misura di rischio Γ soddisfi la seguente disuguaglianza:

$$\Gamma(A+B) \leq \Gamma(A) + \Gamma(B)$$

Non soddisfare questa caratteristica determina che la misura di rischio si scontri con il principio della diversificazione, e quindi il VaR di un portafoglio diversificato potrebbe indicare un rischio maggiore di quello presente nei singoli titoli.

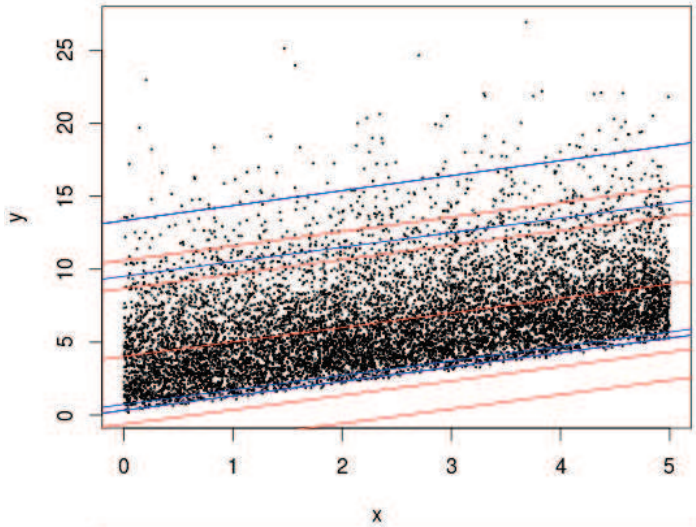
Per questo la recente ricerca incoraggia l'utilizzo di un'altra misura di rischio chiamata CVaR, che rispetta tutti gli assunti delle misure coerenti di rischio. Per quanto concerne invece la scelta dei livelli di confidenza l'analisi di questa tesi è stata fatta prendendo tre diversi livelli di τ, e si è osservato come le conclusioni possono essere diverse in base all'intervallo scelto.

Capitolo 2

REGRESSIONE QUANTILE

Il modello di regressione lineare ha l'obbiettivo di modellare la tendenza centrale di un fenomeno in funzione di un set di variabili che possono influenzarlo. Il massiccio utilizzo del modello è dovuto alla facilità di applicazione e di interpretazione dei parametri restituiti, tuttavia in molte occasioni considerare esclusivamente la tendenza centrale risulta limitativo. Secondo questo approccio la media condizionale descrive completamente la relazione tra la variabile risposta Y e le covariate X, implicando che esista un valore deterministico attorno al quale si distribuiscono le fluttuazioni provenienti da una componente erratica. Quest'ultima deve avere sempre la stessa distribuzione, indipendentemente dal valore delle covariate. È quindi possibile considerare questo modello come "pure location shift model" dove si assume che l'unico effetto dei regressori sulla variabile risposta sia puramente di locazione. L'assunzione fatta sulla distribuzione dell'errore è generalmente quella di Gaussianità, ma questo avviene più per assicurare il raggiungimento delle proprietà di ottimilità dello stimatore piuttosto che per una reale distribuzione normale degli errori. Se è vero che lo stimatore OLS è il migliore (in quanto ad efficienza tra i non distorti), è possibile utilizzare un altro modello in grado di cogliere altri aspetti che vanno oltre alla tendenza centrale. Le covariate infatti potrebbero influenzare la distribuzione condizionata in una moltitudine di altri modi, ad esempio espandendo la dispersione dei dati attorno al valore centrale oppure accorciando o allungando una coda piuttosto che un'altra.

La regressione del quantile riesce a fornire un'analisi delle relazioni tra variabili molto più ampia di quella ottenibile con il modello OLS. Negli anni è stata



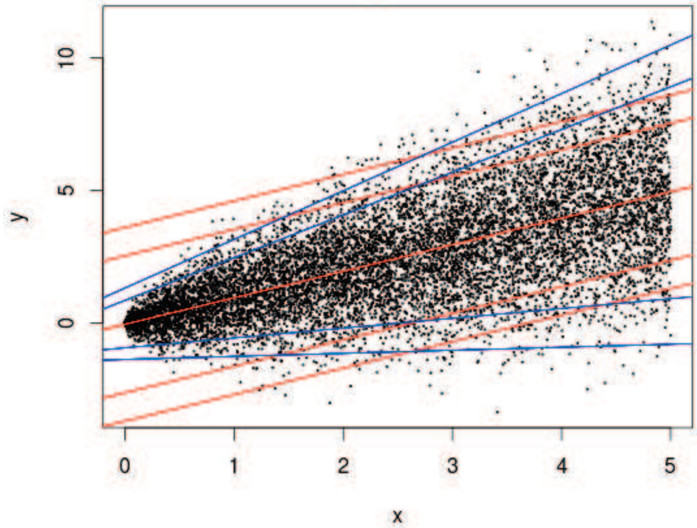


Figura 2.1: Esempi di come la regressione quantile riesce a ottenere delle informazioni aggiunte. Nel primo grafico la distribuzione degli errori è fortemente asimmetrica mentre nel secondo caso il fattore di rischio aumenta la dispersione. È possibile notare come le rette rosse ottenute sotto le assunzioni della regressione lineare che indicano rispettivamente i quantili 99 95 5 e 1 non siano in grado di rappresentarli adeguatamente. Le rette blu invece ottenute tramite regressione quantile svolgono in maniera ottimale il compito di rappresentare i vari quantili

utilizzata come estensione del modello di regressione lineare e permette di fare sui quantili l'anologo di ciò che fa la regressione lineare per la media. Sfruttando i parametri stimati è possibile stimare il valore dei quantili della variabile risposta condizionatamente ad un set di regressori. Questo consente di considerare il comportamento della variabile risposta non solo in media, ma anche nella sua intera distribuzione, dato che variando il quantile della regressione tra zero e uno è possibile ricavare l'intera distribuzione condizionata. Questa particolare caratteristica torna molto utile nello studio della gestione del rischio dato che la regressione lineare è poco efficace per descrivere adeguatamente il comportamento dei valori che si scostano dalla media condizionata, come ad esempio i valori presenti nelle code, comportamento che tuttavia risulta non trascurabile per quanto riguarda il processo decisionale di investitori e risk menagers. Non da ultimo nei dati finanziari la presenza di asimmetrie, curtosi ed eteroschedasticità risulta frequente e rilevante, ed in tutti questi casi lo stimatore di regressione quantile si dimostra vantaggioso perchè robusto a queste caratteristiche. Il fatto di poter stimare il quantile della variabile risposta condizionato ad una variabile indipendente permette di calcolare il VaR condizionato dei rendimenti al fattore di rischio.

2.1 L'utilizzo della regressione del quantile in finanza

L'utilizzo della regressione quantile in ambito finanziario è avvenuto in ritardo rispetto all'applicazione di tale metodologia in altri campi.

Un primo esempio di utilizzo nel campo della finanza lo si trova nella letteratura del VaR. Engle e Manganelli proposero un modello condizionato autoregressivo del VaR, chiamato CAViaR. I loro risultati mostrano come le code seguano un comportamento diverso rispetto al centro della distribuzione contraddicendo le assunzioni del modello GARCH, il quale sostiene invece che il comportamento nelle code e nel centro della distribuzione sia il medesimo.

Successivamente Chen e Chen condussero uno studio empirico sull'indice Nikkei, confrontando il VaR calcolato tramite regressione quantile con quello costruito con la varianza covarianza e mostrando come il primo metodo sovraperformi il secondo metodo risultando particolarmente vantaggioso nel lungo periodo.

Altre applicazioni della regressione quantile in finanza si trovano nello studio dei mercati finanziari, Barnes e Hughes testano il CAPM tramite la regressione del quantile in altri punti della distribuzione e non solo nella media. Basset e Chen notarono come i forti impatti che possono subire le code possono rendere molto meno significativi i risultati ottenuti in media.

2.2 Il principio di base

Come già introdotto, la regressione quantilica permette di trovare la relazione lineare esistente tra i quantili della variabile risposta e i regressori. È necessario a questo punto definire il concetto di quantile e funzione quantile. Data una variabile casuale Y per ogni $\tau \in (0,1)$ è possibile definire il τ esimo quantile $q_\tau \in R$ di Y come la soluzione della disequazione:

$$Pr(Y < q_\tau) \leq \tau \leq Pr(Y \leq q_\tau)$$

Se la variabile Y è continua le probabilità della disequazione coincidono e quindi la soluzione è unica, mentre se la variabile Y è discreta la soluzione appartiene ad un intervallo chiuso e non è unica. Per imporre l'unicità si stabilisce per convenzione che il quantile è il più piccolo elemento dell'insieme delle soluzioni. Se F_Y è la funzione di ripartizione di Y tale che $F_Y(y) = Pr(Y \leq y)$ la funzione quantile $Q_Y(\tau)$ è la funzione inversa della funzione di ripartizione cioè:

$$Q_Y(\tau) = F_Y^{-1} = inf\{Y|F_Y(y) \geq \tau\}$$

Questa formulazione permette di scegliere il valore più piccolo tra quelli possibili. Una delle più importati proprietà di questa funzione è che:

$$Pr(Y \leq Q_Y(\tau)) = Pr(h(Y) \leq h(Q_Y(\tau))) = \tau$$

A livello campionario invece è possibile definire la funzione quantile empirica partendo dalla funzione di ripartizione empirica data da

$$\hat{F}_Y(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{(-\infty,x](x_i)}, x \in R$$

La distribuzione di $\hat{F}_Y(y)$ è una variabile binomiale dato che la funzione sommatoria delle funzioni identificatrici è modellizzabile come sommatoria di variabili Bernoulliane indipendenti. Lo stimatore ha numerose proprietà tra le quali la non distorsione e la consistenza, inoltre converge in distribuzione ad una distribuzione gaussiana. Di conseguenza la funzione quantile empirica è semplicemente l'inversa della funzione di ripartizione campionaria. Tuttavia, nonostante le definizioni precedenti permettano una comprensione immediata del concetto di quantile e ne rivelino le fondamentali proprietà, queste sono di difficile utilizzo in ambito di regressione. Per poter comprendere il principio di base su cui si basa la regressione quantilica è utile ricordare quello su cui si basa la regressione lineare. La stime del modello di regressione lineare effettuate con i minimi quadrati vengono ottenute minimizzando una funzione di perdita, ovvero la somma dei residui al quadrato. È noto infatti dalla teoria che la media è quel valore in grado di minimizzare questa sommatoria. Se si riscrive la media come modello lineare si ottiene quindi lo stimatore OLS

$$\hat{\beta} = minarg \sum (y_i - \beta x_i)^2$$

La cui soluzione nota è $\frac{cov(x,y)}{var(x)}$. Il principio di base della regressione quantilica è molto simile, bisogna considerare il quantile come la quantità in grado di minimizzare una data funzione di perdita. È noto che la mediana è la quantità in grado di minimizza i residui assoluti, ed essendo la mediana nient'altro che il quantile centrale, è possibile estendere questo concetto a tutti gli altri quantili. Riscrivendo la mediana come funzione pesata si ha:

$$\sum_{y_i} |y_i - m| = 0.5 \sum_{y_i < m} |y_i - m| + (1 - 0.5) \sum_{y_i > m} |y_i - m|$$

È possibile generalizzare la precedente agli altri quantili sostituendo a 0.5 il generico τ ottenendo:

$$\tau \sum_{y_i < Q_\tau} |y_i - Q_\tau| + (1 - \tau) \sum_{y_i > Q_\tau} |y_i - Q_\tau|$$

Dove a Q_τ si sostituisce il modello di regressione.

$$Q_\tau(Y|X) = x\beta(\tau) + \epsilon_\tau$$

Analogamente, come il modello di regressione lineare richiede $E(\epsilon|X) = 0$ il modello di regressione quantile richiede $Q_\tau(\epsilon_\tau|X) = 0$. Generalmente è possibile trovare in letteratura la funzione di perdita riscritta utilizzando le funzioni identificatrici così da avere una forma più compatta e quindi passando dalla forma

$$\tau \sum_{y_i < Q_\tau} |y_i - \beta(\tau)X| + (1 - \tau) \sum_{y_i > Q_\tau} |y_i - \beta(\tau)X| \tag{2.1}$$

alla forma

$$(\tau I_{\epsilon > 0} + (1 - \tau) I_{\epsilon < 0})|\epsilon|$$

dove ϵ è il residuo $\epsilon = y - \beta(\tau)X$.

2.3 Proprietà della regressione quantile

La regressione quantile gode di molte proprietà di seguito riassunte:

- equivarianza di scala
  - $\beta(\tau)(\lambda y, x) = \lambda\beta(\tau)(y, x)$ per $\lambda \in (0, \infty)$
  - $\beta(\tau)(-\lambda y, x) = \lambda\beta(1-\tau)(y, x)$ per $\lambda \in (0, \infty)$
- equivarianza di locazione
  - $\beta(\tau)(y + \eta x, x) = \beta(\tau)(y, x)$
- equivarianza di riparametrizzazione
  - $\beta(\tau)(y, xA) = A^{-1}\beta(\tau)(y, x)$ per A non singolare
- proprietà di invarianza per trasformazioni monotone non decrecenti
  - $\hat{(Q)}_\tau(h(y)|x) = h(\hat{Q}_\tau(y|x))$

L'ultima proprietà in particolare non è presente nella regressione lineare, infatti per la disuguaglianza di Jensen il valore atteso di una funzione non lineare non è pari alla funzione del valore atteso. Nel caso dei quantili invece la proprietà vale perchè essi esprimono un ordine, che non può cambiare quando si applica una funzione non decrescente monotona (come ad esempio la funzione logaritmica o la funzione esponenziale). Questo permette di ricavare facilmente anche il parametro $\beta(\tau)$ in caso di una trasformazione monotona. Un'altra importante caratteristica della regressione del quantile è che è robusta agli outliers. Mentre per la media è il valore delle osservazioni ad essere determinante per il calcolo di questa, per determinare il quantile è sufficiente individuare il numero di osservazioni minori ed il numero di osservazioni maggiori, quindi una volta stimata la retta di regressione (o l'iperpiano nel caso multivariato) ogni osservazione sopra il piano può essere arbitrariamente grande, ed ogni osservazione sottostante può essere arbitrariamente piccola senza influire in alcun modo sulla determinazione della retta. L'interpretazione dei parametri è simile a quella del modello di regressione lineare. Mentre nel modello di regressione lineare il beta indica la derivata parziale del valore atteso condizionato rispetto alla variabile esplicativa, il β quantile indica la derivata parziale del quantile condizionato rispetto alla variabile esplicativa.

$$\beta_\tau = \frac{\partial Q(Y|x)}{\partial x} \tag{2.2}$$

Per le proprietà descritte in precedenza, è immediato quindi ricavare il beta di una trasformazione monotona di Y. Ad esempio se si applica una trasfomazione esponenziale, si ha che l'effetto marginale della variabile x è pari a:

$$\beta_\tau^* = \frac{\partial Q(e^Y|x)}{\partial x} = \beta_\tau e^{\beta_\tau x}$$

È utile inoltre fare alcune considerazioni sull'efficienza dello stimatore. Se la distribuzione della variabile fosse normale, la mediana campionaria sarebbe uno stimatore in termini di efficienza peggiore rispetto alla media campionaria, infatti asintoticamente la varianza dello stimatore mediana è all'incirca il 50$\%$ maggiore rispetto alla varianza della media campionaria. Per distribuzioni che si allontanano dalla normale questo non è più vero, e la relazione può risultare invertita permettendo alla mediana campionaria di raggiungere risultati molto migliori in termini di efficienza rispetto alla media campionaria. Per questa ragione Koenker e Besset affermano che lo stimatore di regressione quantilica è migliore dello stimatore OLS tutte quelle volte che la mediana risulta uno stimatore migliore della media.

Risulta quindi più prudente pagare un piccolo costo di efficienza nel caso di gaussianità piuttosto che permettere un eccessivo impoverimento nel caso di non gaussianità. Per quanto riguarda invece la distribuzione asintotica, essa verrà affrontata in maniera più specifica nella prossima sezione.

2.4 Risultati asintotici

Nei risultati asintotici della regressione quantile compare la funzione "sparsity function ", definita matematicamente come:

$$s_Y(\tau) = \frac{\partial Q_Y(\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial F_Y^{-1}(\tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{f_Y(Q_y(\tau))}$$

Questa funzione indica la densità delle osservazioni vicino al quantile di interesse. Nel caso univariato la distribuzione della stima del quantile empirico non condizionato è pari a:

$$\sqrt{n}(\hat{Q}_Y(\tau) - Q_Y(\tau)) \sim N(0, \tau(1-\tau)s_Y^2(\tau))$$

Si può notare come la sparsità definisce la precisione dello stimatore determinandone la varianza. In particolare risulta che la varianza dipende dal quantile che si sta stimando e che questa è più ridotta per i quantili centrali rispetto a quelli di coda. Le stime per i quantili delle code avranno intervalli di confidenza più grandi, perchè maggiore è la dispersione minore è la precisione dello stimatore. Si può quindi comprendere con facilità come questa funzione giochi un ruolo fondamentale nel definire la matrice di varianza e covarianza asintotica degli stimatori di regressione, ed è possibile dimostare che sotto condizioni abbastanza deboli la distribuzione asintotica dello simatore di regressione quantilica prende la forma a sandwich di Huber:

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_\tau - \beta_\tau) \sim N(0, \tau(1-\tau)H_\tau^{-1}JH_\tau^{-1})$$

dove

$$J = \frac{1}{n}\sum_n x_t x_t^T$$

mentre

$$H_\tau = \lim_{n\infty} \frac{1}{n}\sum_n x_t x_t^T f_n(Q_\tau(y_n|x_n))$$

Sotto l'assunzione di indipendenza e di identica distribuzione degli errori è possibile semplificare la forma sandwich e ottenere la seguente distribuzione:

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_\tau - \beta_\tau) \sim N(0, \frac{\tau(1-\tau)}{f^2(F^{-1}(\tau))}J^{-1})$$

Come detto in precedenza questa è un'assunzione che raramente si verifica nei dati reali, ma che tuttavia può essere utile come distribuzione di riferimento durante la verifica di ipotesi. Se infatti gli errori sono i.i.d. allora le rette di regressione quantilica sono tutte parallele, di conseguenza è possibile utilizzare questa matrice di varianza nel caso si volesse verificare che gli effetti su differenti quantili siano gli stessi. È evidente quindi come diventi necessario stimare in maniera consistente la sparsity function.

2.5 Metodi di stima

Uno dei problemi evidenti della regressione quantile è che non è possibile risolvere analiticamente l'equazione di stima (2.1), infatti essa non è derivabile nello zero. Di conseguenza è necessario ricorrere ad opportune procedure numeriche, e questo ha dato luogo in letteratura ad un ampio filone di algoritmi che permettono di risolvere il problema. Questi algoritmi sono basati sulla riscrittura dell'equazione di stima in modo che le stime siano ottenibili tramite un approccio di programmazione lineare e ricercando il punto di ottimo tramite il metodo del simplesso.

Il metodo è computazionalmente oneroso, ma è stato via via migliorato creando diverse versioni sempre basate sull'ottimizzazione di una funzione obbiettivo lineare e differenziabile. Fondamentalmente il metodo va scelto in base alla numerosità dei dati e dal numero delle esplicative. Il software R permette di utilizzare l'algoritmo di Barrodale e Robert modificato utilizzato da Koenker e 'Orey. Tale algoritmo utilizza il metodo del simplesso utilizzato per la regressione mediana, modificato per essere generalizzato a tutti i quantili. Questo algoritmo risulta ottimale quando si hanno molti regressori e numerosità campionarie molto grandi. Il secondo algoritmo disponibile è ottenuto adattando l'algoritmo di Frish e Newton, che sfrutta il metodo dei punti interni.

Per quanto riguarda gli intervalli di confidenza è possibile scegliere tra diversi metodi divisi in due approcci che consistono nello stimare gli standard error asintotici degli stimatori oppure ricorrere alla forma bootstrap. La stima asintotica può talvolta rivelarsi complicata, tuttavia esistono in letteratura degli stimatori che possono essere dei validi candidati a risolvere il problema. I metodi vanno scelti in base alle assunzioni sugli errori: sotto l'ipotesi di errori indipendenti e identicamente distribuiti si ha che le f_τ sono tutte uguali e quindi come visto in precedenza la matrice di varianza di $\sqrt{n}((\hat{\beta})_\tau - \beta_\tau)$ è :

$$\frac{\tau(1-\tau)}{f^2(F^{-1}(\tau)}J_\tau^{-1} = \tau(1-\tau)s_Y^2(\tau)J_\tau^{-1}$$

In questo caso la sparsity function dipende dalla funzione di ripartizione F che va stimata. Il metodo principale è quello di Siddiqui che stima la sparsity function come:

$$\hat{s}_Y(\tau) = \frac{\hat{F}^{-1}(\tau + h_N) - \hat{F}^{-1}(\tau - h_T)}{2h_N}$$

dove il parametro h_T è un parametro di bandwidth che può essere scelto in tre modi diversi:

1. h_N di Hall e Sheater è data da $h_N = N^{-1/3} z_\alpha^{2/3} (\frac{1.5(f(F^{-1}(\tau)))^2}{2F^{-1}(\tau))^2+1})^{1/3}$ con $z_\alpha = F^{-1}(1-\alpha/2)$ in modo che tramite α si può controllare l'ampiezza dell'intervallo di confidenza

2. h_N di Bofinger con $h_N = N^{-1/5} (\frac{4.5(f(F^{-1}(\tau)))^4}{2F^{-1}(\tau))^2+1})^{1/5}$

3. h_N di Chamberlain con $h_N = z_\alpha \sqrt{\frac{\tau(1-\tau)}{N}}$ con z_α che assume lo stesso significato del primo caso

Per stimare invece F^{-1} vengono utilizzati i residui della regressione quantilica. Nel caso di errori i.i.d. è possibile utilizzare anche l'inverso dello stimatore kernel per la stima della sparsity function come proposto da Powell. Si ottiene quindi

$$\hat{s}_Y(\tau) = \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} c_N^{-1} K(\hat{u}_{n,\tau}/c_N) \right)$$

Dove $\hat{u}_{n,\tau}$ sono i residui della regressione quantilica data da $\hat{u}_{n,\tau} = y_n - \hat{Q}_\tau(y_t|x)$, ,mentre C_N è una bandwidth data da $C_N = \rho(F^{-1}(\tau + h_N) - F-1(\tau - h_N))$, con $\rho = min(s, IQR/1.34)^6$, mentre h_N è la bandwidth di Hall e Sheater. K invece è uno stimatore kernel uniforme dato da

$$K(a) = \begin{cases} 1/2 & \text{se } |a| \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Nel caso invece gli errori non siano i.i.d lo la varianza ha la forma sandwitch di Huber e quindi bisogna stimare le quantità J e H, gli stimatori utilizzati sono delle forme modificate di quelli visti in precedenza. In particolare nel metodo kernel per la stima di H è possibile utilizzare:

$$\hat{H}_\tau = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} c_N^{-1} K(\hat{u}n, \tau/c_N)) x x^T$$

I metodi utilizzati finora, chiamati metodi diretti, richiedono la stima dei parametri di interesse della sparsity function. È possibile evitare di stimare direttamente i parametri sfruttando la procedura bootstrap, che tramite ricampionamento permette di ottenere una stima della varianza dei parametri. Tra i vari metodi bootstrap che permettono di ottenere questo risultato si ritrovano:

1. bootstrap dei residui, che ricampiona i residui della regressione quantilica e del regressore x, permettendo di ottenere M volte lo stimatore bootstrap che avrà matrice di varianza e covarianza asintotica pari a
$$\frac{m}{N}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{M}(\hat{\beta}^*_{j,\tau}-\bar{\beta}_\tau)(\hat{\beta}^*_{j,\tau}-\bar{\beta}_\tau)^T)$$
con $\bar{\beta}_\tau$ pari alla media delle M replicazioni bootstrap. Problematica particolare di questo tipo di bootstrap è la necessità di fare attenzione ai ricampionamenti separati: infatti può essere applicato quando i residui sono indipendenti dalla variabile X.

2. bootstrap delle coppie, in questo caso si ricampiona dalla distribuzione congiunta di y ed x e per ogni sottocampioni si ricavano le stime dei coefficienti; anche in questo caso ricampionando M volte si può ottenere la matrice di covarianza asintotica descritta nel punto precedente. Questa procedura può essere usata anche nel caso gli errori non siano identicamente distribuiti.

Esistono altri metodi bootstrap che tornano utili nel caso di dipendenze particolare degli errori, come ad esempio l'autocorrelazione, che tuttavia non sono fruttuosi per il lavoro che si sta svolgendo.

- Il test ad inversione dei ranghi descritto da Koenker ad esempio funziona bene nel caso di non identica distribuzione e permette di costruire gli intervalli di confidenza in questo contesto.

- Stimatore a sandwich di Hubert.

- Stimatore a sandwich di Powell.

- Bootstrap : Efron propose già dal 1987 la metodologia bootstrap come valida soluzione per la costruzione degli intervalli di confidenza per la regressione mediana. Il bootstrap nella regressione quantile trova differenti applicazioni.

- Stima non parametrica della matrice di varianza e covarianza tramite metodo del kernel.

Il metodo ad inversione dei ranghi permette l'asimmetria degli intervalli di confidenza.

Capitolo 3

MODELLO E DECOMPOSIZIONE DEL RISCHIO

In questo capitolo si illustrerà il modello fattoriale adottato per ricostruire i rendimenti tramite la loro dipendenza con un particolare fattore di rischio, ovvero il rischio di mercato. Partendo dal modello noto come "market model" utilizzato per prevedere la media condizionata, si modificherà la struttura di base in modo da renderlo idoneo ad essere utilizzato anche per un approccio di regressione quantile. Infine verrà mostrato come, partendo da questi modelli sia possibile decomporre il rischio nel caso venga rappresentato dalla varianza,oppure nel caso in cui venga rappresentato dal VaR. Si potrà così esplicare quali siano i risvolti portati ai portafogli.

3.1 Single index model

Fin da quando Markowitz propose la sua teoria,apparve evidente come l'efficacia del suo metodo dipendesse dalla qualità dei dati a disposizione. Per questo la ricerca accademica in ambito finanziario successiva al suo articolo si concentrò sopratutto sui due problemi cruciali per rendere applicabile la teoria, ovvero su come ottenere gli input necessari per la costruzione del portafoglio e sui metodi computazionali necessari a calcolare il portafoglio ottimo. Uno delle aree principali dell'analisi dei titoli è quella che si occupa di come poter prevedere i valori futuri dei rendimenti, questione che generalmente si riduce a prevederne il valore atteso ed a dare un'indicazione della dispersione attorno ad esso.

Per la costruzione del portafoglio inoltre è necessario determinare le relazioni di dipendenza esistenti tra i titoli, in particolare, richiedendosi la matrice di varianza, è necessario ricavare una stima delle covarianze tra i vari titoli. La matrice, in presenza di molti titoli, ha un numero considerevole di parametri da stimare e molte volte le stime ottenute non soddisfano il requisito di positività della matrice, di conseguenza la matrice ottenuta è inconsistente.

Tramite un opportuno modello lineare, è possibile risolvere entrambi gli obiettivi precedenti, ovvero ottenere una matrice certamente positiva e diminuire lo sforzo computazionale. Si può supporre infatti che le covarianze tra i titoli siano generalmente positive, dato che esistono dei fattori comuni che influenzano i titoli nella stessa maniera, questi possono essere ad esempio, il ciclo economico, i tassi d'interesse od il costo delle materie prime. Dato che tutti questi fattori influenzano la maggioranza dei titoli, shock improvvisi di questi fattori causano shock sui titoli e quindi sull'intero mercato.

Dall'osservazione dei prezzi dei titoli si può notare come molti di essi tendano a salire quando l'indice di mercato sale, ed a scendere quando l'indice di mercato decresce. La logica suggerisce l'esistenza di una relazione tra i movimenti dei prezzi dei titoli e i movimenti del mercato e che sia quindi possibile affermare che il valore del mercato racchiuda in sè tutti gli effetti degli altri fattori macroeconomici. Oltre ai fattori di rischio comuni esistono inoltre delle altre caratteristiche specifiche per ogni titolo, che ne influenzano i rendimenti senza interagire con il resto del mercato.

Il modello a indice singolo di Sharpe, anche conosciuto come "modello di mercato" o "modello a singolo fattore" nasce dall'esigenza di stimare la matrice di varianza e covarianza tra i titoli, affichè si possa applicare la procedura di Markowitz, esso consiste in un modello statistico utilizzato per spiegare il comportamento dei rendimenti dei titoli.

Si può riassumere quanto detto con la seguente scrittura:

$$r_i = E[r_i] + m_i + \epsilon_i$$

Dove m rappresenta l'apporto che da il mercato al singolo titolo. Dato che ogni titolo presenta una propria sensibilità alle variazioni del mercato è possibile rappresentare quest'idea decomponendo m_i come sensibilità del singolo titolo al mercato β_i e valore effettivo del mercato M. Poichè conoscere in maniera esaustiva il mercato risulta impossibile, solitamente per il fattore mercato si assume come proxy un indice di mercato che racchiuda al suo interno un gran numero di titolo come l'indice S&P 500. L'idea sottostante in questo modello a singolo fattore è che l'indice di mercato catturi tutti i fattori macroeconomici o comuni che influenzino i rendimenti dei titoli.

Il modello ha la forma di una semplice regressione lineare:

$$R_{i,t} = \alpha_i + \beta_i R_M + \epsilon_{i,t} \tag{3.1}$$

Dove $R_{i,t}$ è il rendimento dell'asset al tempo t e rappresenta la variabile risposta, mentre R_M è il rendimento composto dell'indice di mercato e rappresenta il regressore. Il coefficiente β_i indica il contributo dell'asset i alla varianza σ_M^2 dell'indice di mercato. Questo tipo di rischio è chiamato rischio di covarianza, rischio sistematico o rischio di mercato, ed ha come caratteristica quello di non poter essere eliminato tramite diversificazione. Il termine $\epsilon_{i,t}$ invece rappresenta la variabilità non legata al mercato ma alle cause proprie del titolo, per questo viene denominatato rischio non sistematico o rischio idiosincratico che, come si dimostrerà successivamente, è completamente eliminabile tramite diversificazione. È utile a questo punto riassumere le principali caratteristiche del modello per comprendere cosa esso comporta ed i vincoli che impone.

- Per costruzione si ha che $E[\epsilon_{it}] = 0$, se infatti il valore atteso non fosse nullo sarebbe comunque catturato dal parametro α_i

- Per assunzione si ha $cov(R_{M,t}, \epsilon_{i,t}) = 0$, che significa che la deviazione ottenuta tra valore previsto e valore reale è causata dai fattori specifici del titolo, che sono incorrelati ai valori ottenuti sul mercato.

- Per assunzione si ha anche che $cov(\epsilon_{i,t}, \epsilon_{j,s}) = 0$, quindi i comovimenti tra titoli sono dovuti esclusivamente alla loro correlazione con il fattore di rischio, e la componente idiosincratica di ogni titolo non ha relazioni lineari con quella degli altri titoli.

- $var(\epsilon_{i,t}) = \sigma_{\epsilon_i}^2$ indica l'assunzione di omoschedasticità, questa comporta che la variazione attorno al valore previsto dal rischio di mercato rimane costante al variare del valore di mercato.

- $\epsilon_{i,t}$ è distribuito normalmente
- $R_{M,t}$ e $R_{i,t}$ sono distribuiti secondo una normale congiunta

Tutte le assunzioni precedenti, se verificate garantiscono le seguenti caratteristiche:

- $E[R_{i,t}] = \alpha_i + \beta_i E[R_{M,t}] = \alpha_i + \beta_i \mu_M = \mu_i$, dove μ_i e μ_M, sono il valore atteso del titolo i, e il valore atteso della variabile mercato.
- $var(R_{i,t}) = \sigma_i^2 = \beta_i^2 var(R_M) + var(\epsilon_{i,t}) = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\epsilon_i}^2$
- $cov(R_{i,t}, R_{j,t}) = \beta_i \beta_j \sigma_M^2$, di conseguenza le dipendenze lineari tra i titoli sono completamente spiegate dalla relazione dei singoli titoli con la variabile mercato.
- $R_M \sim N(\mu_M, \sigma_M^2)$, il fattore di rischio di mercato è distribuito normalmente
- $R_{i,t} \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, i rendimenti sono distribuiti normalmente
- $beta_i = \frac{cov(R_i, R_M)}{var(R_M)}$

Condizionando ad un valore del fattore di rischio si ha:

- $R_{i,t}|R_{M,t}$ si distribuisce normalmente
- $E[R_{i,t}|R_{M,t}] = \alpha + \beta_i r_{M,t}$
- $var(R_{i,t}|R_{M,t}) = \sigma_{\epsilon_i}^2$, la varianza dei rendimenti condizionati è pari alla varianza della componente idiosincratica
- $cov(R_{i,t}, R_{j,t}|R_{M,t}) = 0$, I rendimenti dei titoli condizionati al rischio di mercato sono incorrelati.

Si ipotizza implicitamente che la componente idiosincratica non abbia alcun ruolo nel determinare il valore atteso dei titoli, ma giochi soltanto il ruolo di disperdere i rendimenti reali attorno al valore atteso secondo una legge di probabilità. Di conseguenza la distribuzione della componente idiosincratica determina la distribuzione condizionata attorno al valore atteso condizionato.

È possibile utilizzare una versione modificata del modello che tramite regressione quantile individui la relazione lineare esistente tra il fattore di rischio e i quantili dei rendimenti in modo da non limitarsi esclusivamente al legame con la media condizionata dei rendimenti. Oltre a ottenere questa relazione è possibile anche eliminare l'assunzione di normalità dato che se si effettuano le stime per tutti i percentili è possibile ricavare la stima della distribuzione condizionata dei rendimenti. Questo apre degli scenari che il classico modello di regressione non riesce a cogliere.

3.2 Il modello con segno

Il modello di regressione lineare appena esaminato è discusso e testato da oltre quarant'anni. Tuttavia se applicato per analizzare i quantili si osserva come come i coefficienti beta quantile stimati non siano statisticamente diversi dal beta di regressione lineare. Utilizzando questo modello quindi si potrebbe dedurre che il fattore di rischio induce sui quantili lo stesso effetto riscontrabile nella media. Si nota però come le rette ricavate si adattino bene ai dati solo quando i quantili considerati sono quelli prossimi alla mediana, mentre le rette perdono la loro efficacia di adattarsi ai dati per i quantili caratterizzanti le code della distribuzione. Nello specifico le rette risultano troppo ampie quando si considerano i dati situati attorno allo zero del fattore di rischio, mentre lasciano fuori troppe osservazioni quando si va verso valori del fattore di rischio più estremi.

Un modello così formulato non considera il fatto che il fattore di rischio possa avere un effetto diverso sulle distribuzioni condizionate dei rendimenti a seconda che il fattore di rischio assuma valori positivi o valori negativi. Questo aspetto invece non è nuovo per la ricerca accademica, infatti è stato più volte evidenziato come notizie negative (associabili a valori di mercato negativi) creino degli effetti di incertezza che influenzano la distribuzione dei rendimenti in modo diverso rispetto a notizie più favorevoli.

Perchè il modello consideri questi aspetti è necessario introdurre nel modello, come variabile esplicativa, il segno del fattore di rischio, in modo che il modello possa considerare degli effetti che non sono esclusivamente crescenti o decrescenti all'aumentare del fattore di rischio, ma che considerino anche situazioni con valori di mercato prossimi allo zero o distanti da esso. Inserendo il segno si elimina il vincolo che impone che la relazione lineare sia la stessa sia quando M

è positivo sia quando M è negativo. Questo comporta un avvicinamento a zero degli alpha quantile (e quindi le rette in prossimità dello zero sono più vicine alla retta di regressione lineare), mentre i beta ora indicano come le distribuzioni condizionate si allarghino man mano che il fattore di rischio assume valori distanti dallo zero. Il fatto di considerare separatamente il fattore in base al segno che assume, risulterà utile quando si andrà a minimizzare il rischio del portafoglio, dato che il ruolo dei coefficienti beta quantile risulta invertito nella determinazione del rischio a seconda che si condizioni a fattori positivi o negativi del mercato. Come si vedrà successivamente, in un modello così formulato si riscontra come i parametri stimati, sopratutto quando i quantili sono quelli relativi alle code, siano significativamente diversi dal beta di regressione lineare.

3.3 Il modello a singolo fattore e il portafoglio

La costruzione del portafoglio è vincolata agli input che si hanno a disposizione. Il modello lineare fornisce gli input necessari per la costruzione di un portafoglio secondo il principio media varianza poichè, tramite i coefficienti e le assunzioni fatte in precedenza, è possibile ricavare direttamente sia le stime per valori attesi, sia, soprattutto, la stima della matrice di varianza e covarianza dei titoli. Infatti essa è direttamente ricavabile dalla seguente espressione:

$$\Sigma = B^T var(R_M)B + I\sigma_\epsilon^2$$

Dove B è il vettore dei coefficienti beta stimati per i vari titoli, mentre $I\sigma_\epsilon^2$ è la matrice diagonale dei valori delle varianze dei residui per i vari titoli. Per ricavare il portafoglio a minima varianza è sufficiente minimizzare in w la quantità $w^T\Sigma w$.

Inoltre, per qualsiasi portafoglio, si può notare come i coefficienti del modello lineare possono essere ricavati analiticamente partendo da quelli stimati per i singoli titoli. Supponendo di avere due titoli, si possono ottenere i portafogli tramite combinazioni lineari di questi con il vincolo che i pesi siano maggiori o uguali a zero e che la somma di questi dia uno. In questo caso si ha:

$$\begin{aligned} R_P &= \sum_{i=1}^{n} w_i R_i = \sum_{i=1}^{n} w_i(\alpha_i + \beta_i R_M + \epsilon_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(w_i\alpha_i) + \sum_{i=1}^{n}(w_i\beta_i R_M) + \sum_{i=1}^{n} w_i\epsilon_i \\ &= \alpha_p + \beta_p R_M + \epsilon_p \end{aligned} \tag{3.2}$$

Il valore atteso del portafoglio è calcolabile come

$$\begin{aligned} E[P] = E[\sum_{i=1}^{n} w_i r_i] &= \sum_{i=1}^{n} w_i E[r_i] = \sum_{i=1}^{n} w_i E[r_i] \\ = \sum_{i=1}^{n} w_i(\alpha_i + \beta_i E[X]) &= \sum_{i=1}^{n} w_i\alpha_i + E[X]\sum_{i=1}^{n} w_i\beta_i \end{aligned} \tag{3.3}$$

È possibile notare in particolare come il β del portafoglio corrisponda alla combinazione lineare dei β dei singoli titoli.

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{n} w_i\beta_i \tag{3.4}$$

Analogamente α_p si ottiene dalla combinazione lineare degli alpha dei singoli titoli. Questo è possibile grazie alla proprietà dei valori attesi per cui il valore atteso di una combinazione lineare di variabili è pari alla combinazione lineare dei valori attesi.

La varianza viceversa è calcolabile attraverso la formula

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i^2\beta_i^2\sigma_M^2 + \sum_{i=1}^{n} w_i^2\sigma_{\epsilon_i}^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_j w_j \beta_i\beta_j\sigma_M^2$$

Il valore atteso del portafoglio è quindi determinato dai parametri α_p è β_p, mentre la varianza dipende dalla sensibità dei titoli al mercato β_p, dalla varianza del fattore di rischio, e dalla varianza della componente idiosincratica.

La procedura appena vista su come ottenere il beta di regressione lineare del portafoglio partendo dai beta di regressione lineare dei singoli titoli non è più valida per i vari beta quantile del portafoglio, dato che essi non sono più relativi al valore atteso e quindi non godono della proprietà relative ad esso. Mentre per determinare il valore atteso del portafoglio è sufficiente conoscere i valori attesi dei vari titoli, per determinare i quantili è invece necessario conoscere l'intera distribuzione. In questo caso anche verificata la normalità per i titoli, caso in cui la distribuzione è determinata esclusivamente da media e varianza, la varianza del portafoglio non è pari alla semplice combinazione lineare delle varianze. Da ciò ne discende l'illogicità di combinare linearmente i coefficienti beta quantile.

Preso atto che non è possibile ricavare i parametri del portafoglio partendo da quelli dei singoli titoli, a meno che non si specifichi una distribuzione a priori, (ed anche specificandola sarebbe un'operazione, a livello matematico, molto complessa), si vuole comunque di seguito illustrare come ogni titolo possa apportare il proprio contributo nei quantili condizionati del portafoglio.

3.4 Decomposizione del rischio

Il modelli che si sono utilizzati sin qui, oltre a rivelarsi utili per ricavare gli input necessari alla costruzione del portafoglio, ben si prestano a dimostrare come il rischio di quest'ultimo risulti minore rispetto a quello dei singoli titoli. Partendo dalla formulazione della decomposizione della varianza, è possibile estendere tali concetti anche al VaR sia che gli errori siano identicamente distribuiti, sia che non lo siano.

L'assunzione di incorrelazione tra il fattore di rischio e l'errore idiosincratico permette di decomporre la varianza del titolo in maniera dicotomica, cioè in due parti ben distinte e con caratteristiche diverse.

$$var(R_{i,t}) = \sigma_i^2 = \beta_i^2 var(R_M) + var(\epsilon_{i,t}) = \beta_i^2\sigma_M^2 + \sigma_{\epsilon_i}^2$$

Il fatto che il rischio idiosincratico sia diversificabile significa che può essere totalmente eliminato tramite diversificazione.

Nel caso di n asset è facile dimostrare come la varianza del termine d'errore del portafoglio tenda a ridursi. Questo permette di osservare l'effetto della diversificazione sul portafoglio, cioè come l'errore idiosincratico del portafoglio tenda a diminuire all'aumentare del numero di titoli incluso. Se si assume un portafoglio equally weighted si ottiene

$$R_P = \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i R_M}{n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{n} = R_M \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{n}$$

Come visto in precedenza la sommatoria dei β_i fratto n determina il beta del portafoglio. Dato che i termini di errore dei vari titoli sono incorrelati tra loro, la varianza diventa

$$\sigma_P^2 = \beta_P^2 \sigma_P^2 + \frac{\sigma_e^2}{n}$$

Di conseguenza, quando n è sufficientemente elevato il secondo addendo tende a valori molto piccoli fino ad annullarsi per n che tende ad infinito, e la varianza è dovuta solo al primo addendo dove compare il fattore di rischio. Questo termine non dipende dalla numerosità dei titoli inseriti nel portafoglio ma solamente dalle sensibilità β al rischio di mercato. Per questo motivo $\beta_P^2 \sigma_P^2$ rappresenta il rischio non diversificabile.

Per il VaR è possibile seguire un procedimento analogo a quello fatto per la decomposizione della varianza. Utilizzando la regressione quantile si può sfruttare il modello per ricavare il quantile condizionato al fattore di rischio che rappresenta quindi il VaR condizionato. Affinchè ciò che verrà proposto in seguito sia di più semplice comprensione, sarà utile assumere come distribuzione dei rendimenti condizionati la forma gaussiana e partire dalla determinazione del VaR tramite un approccio di regressione lineare.

Riprendendo quanto già analizzato in precedenza in merito ai metodi di calcolo del VaR, si è affermato come sotto l'assunzione di normalità il VaR sia ricavabile tramite la formula (1.1)

$$VaR_\tau(Y) = E[Y] + \Phi(\tau)\sqrt{var(Y)}$$

Di conseguenza condizionando Y al fattore di rischio, si avrà che Il VaR condizionato nel caso di normalità diventa:

$$VaR_\tau(Y|X) = E[Y|X] + \Phi(\tau)\sqrt{var(Y|X)}$$

Dove X rappresenta il rischio di mercato. La varianza $var(Y|X)$ come precedentemente illustrato nelle proprietà del modello di mercato è data esclusivamente dalla varianza di ϵ_Y. Assumendo per semplicità che l'alpha del modello di regressione lineare per il titolo Y sia nullo cioè $E[Y|0] = 0$, si ha

$$VaR_\tau(Y|X) = \beta_Y X + \Phi(\tau)\sqrt{var(\epsilon_Y)}$$

È possibile riscrivere la medesima quantità come modello lineare relativo al quantile utilizzando i parametri della regressione qantile

$$VaR_\tau(Y|X) = \alpha_\tau + \beta_\tau X$$

Nel caso di normalità ed identica distribuzione è possibile ottenere l'alpha della regressione quantile tramite la seguente riparametrizzazione della varianza dei residui

$$\alpha_\tau = \Phi(\tau)\sqrt{var(\epsilon_Y)}$$

mentre $\beta_\tau = \beta_Y$ per ogni τ.

Il β_τ può essere riscritto sottraendo e sommando la stessa quantità β_Y in modo da ottenere la forma

$$\beta_\tau = \beta_Y + (\beta_\tau - \beta_Y) \tag{3.5}$$

Così facendo si torna ad avere nella formulazione il parametro β_Y presente nella decomposizione della varianza vista in precedenza. Se l'assunto di identica distribuzione degli errori è rispettato, cioè se la variabile X ha lo stesso effetto sia sulla media della distribuzione che sui quantili (ad esempio quando gli errori sono normali omoschedastici), la differenza presente come terzo addendo è nulla ed il rischio è determinato solo dalle quantità α_τ e β_p. Questo fornisce un'ulteriore prova che in questo caso la varianza è sufficiente a descrivere completamente il rischio dato che con una semplice riparametrizzazione delle quantità ottenute tramite regressione lineare è possibile passare da varianza a VaR e viceversa. Il passaggio da varianza del portafoglio a VaR condizionato del portafoglio è immediata, infatti utilizzando un portafoglio equally weighted si ha che $\beta_p = \frac{\sum \beta_Y}{n}$ mentre

$$\alpha_\tau = \Phi(\tau)\sqrt{(}\epsilon_p) = \Phi(\tau)\sqrt{\frac{\sigma_e^2}{n}} \tag{3.6}$$

Di conseguenza si osserva come l'effetto di diversificazione agisca in modo analogo alla varianza anche sul VaR dato che la quantità α_τ del portafoglio tende a ridursi all'aumentare di n.

Qualora il fattore di rischio avesse un effetto diverso sui quantili rispetto a quello sulla media, la differenza tra i beta non sarebbe più zero ed esisterebbe un ulteriore fonte di rischio dovuta appunto alla non nullità del termine $(\beta_\tau - \beta_Y)$. Tuttavia, è possibile dimostrare come la diversificazione tenda ad azzerare anche questo termine. Analizzando separatamente le parti, è possibile capire dove la diversificazione abbia effetto e dove invece no. Tramite la scomposizione del beta tau (3.5) è possibile riscrivere il VaR condizionato come:

$$VaR_\tau[Y|X] = \alpha_\tau + \beta_Y X + (\beta_\tau - \beta_Y)X$$

Si nota come è possibile suddividere il rischio in tre parti separate. Il β_p è calcolabile come detto in precedenza (3.4) tramite combinazione lineare dei beta di regressione lineare dei singoli titoli, e quindi l'unico modo di ridurne l'effetto è quello di dare un peso elevato a titoli con β di regressione lineare basso. Questo parametro indica quindi il rischio non diversificabile sia che il rischio sia inteso come varianza, sia che sia inteso come VaR.

La quantità α_τ in condizioni di normalità degli errori, indica un multiplo della varianza degli errori (3.6), e dato che questa tende a ridursi per effetto della diversificazione, ne consegue che anche l'α_τ si riduce.

La differenza tra i beta è l'unica componente che non è direttamente riconducibile a quanto visto in precedenza, ma è possibile dimostrare come anche questa tenda ad annullarsi per effetto della diversificazione.

Conoscendo la struttura della distribuzione condizionata, è possibile ricavare il β per ogni quantile tramite la variazione dei quantili nelle distribuzioni condizionate a due diversi valori del fattore di rischio. Come già esaminato in proposito alla regressione quantile, il beta indica infatti la variazione lineare che si ha per ogni quantile della distribuzione condizionata al variare della covariata, e quindi se si conoscono le distribuzioni condizionate, (quindi i quantili), è possibile ricavare il beta quantile come differenziale.

Si ponga di avere due titoli le cui distribuzioni condizionate si distribuiscono normalmente e la cui deviazione standard dipende linearmente da X moltiplicata per una costante relativa al titolo σ_i, per le proprietà della normale si ha $\beta_{0.5,i} = \beta_{LM}$ per ogni titolo.

$$Y_1|X \sim N(\beta X, \sigma_1 X)$$

Il β_τ data la formulazione (2.2) è dato da

$$\frac{Q(Y|x_2) - Q(Y|x_1)}{x_2 - x_1}$$

dove $Q(Y|X_i) = \beta x_i + \Phi(\tau)\sqrt{\sigma_1^2 x_i^2}$, mentre x_1 e x_2 indicano due valori per la variabile X tali che $x1 < x2$. Si ha quindi

$$\begin{aligned}
\beta_{(1,\tau)} &= \frac{\beta x_2 + \Phi(\tau)\sqrt{\sigma_1^2 x_2^2} - \beta x_1 - \Phi(\tau)\sqrt{\sigma_1^2 x_1^2}}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{(x_2 - x_1)(\beta + \Phi(\tau)\sqrt{\sigma_1^2})}{(x_2 - x_1)} = \beta + \Phi(\tau)\sqrt{\sigma_1^2}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

La differenza tra il beta di regressione quantile per il primo titolo e il beta di regressione lineare è pari a

$$\beta_{(1,\tau)} - \beta = \Phi(\tau)\sqrt{\sigma_1^2} \tag{3.8}$$

Supponendo di avere un altro titolo che per semplicità di calcolo abbia lo stesso beta lineare del precedente e sia così distribuito

$$Y_2|X \sim N(\beta X, \sigma_2 X)$$

si ha di conseguenza per la (3.8) che la differenza $\beta_{2,\tau} - \beta$ è pari a $\Phi(\tau)\sqrt{\sigma_2^2}$. È possibile inoltre ricavare il β_τ per ogni quantile di un qualsiasi portafoglio ottenuto dalla combinazione lineare dei due titoli. Tramite l'assunzione che la correlazione tra i due titoli sia dovuta esclusivamente al rischio di mercato, condizionatamente ad esso i due titoli risultano incorrelati e quindi la varianza condizionata del portafoglio è data dalla somma pesata delle varianze dove i pesi corrispondono ai pesi assegnati ai singoli titoli elevati al quadrato.. Per la variabile $P = w_1Y_1 + (1 - w_1)Y_2$ che rappresenta un generico portafoglio di due titoli è possibile quindi calcolare analiticamente il beta quantile nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
&\beta_{P,\tau} = \\
&= \frac{\beta x_2 + \Phi(\tau)\sqrt{w_1^2\sigma_1^2x_2 + (1-w_1)^2\sigma_2^2x_2} - \beta x_1 - \Phi(\tau)\sqrt{w_1^2\sigma_1^2x_1 + (1-w_1)^2\sigma_2^2x_1}}{X_2 - x_1} \\
&= \frac{\beta(x_2 - x_1) + \Phi(\tau)(\sqrt{x_2^2(p_1^2\sigma_1^2 + (1-p_1)^2\sigma_2^2)} - \sqrt{x_1^2(w_1^2\sigma_1^2 + (1-w_1)^2\sigma_2^2)})}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{\beta(x_2 - x_1) + (x_2 - x_1)\Phi(\tau)(\sqrt{(w_1^2\sigma_1^2 + (1-w_1)^2\sigma_2^2)}}{x_1 - x_2} \\
&= \frac{(x_2 - x_1)(\beta + \Phi(\tau)(\sqrt{(w_1^2\sigma_1^2 + (1-w_1)^2\sigma_2^2)})}{x_1 - x_2} \\
&= (\beta + \Phi(\tau)(\sqrt{(w_1^2\sigma_1^2 + (1-w_1)^2\sigma_2^2)})
\end{aligned} \tag{3.9}$$

La differenza che si ottiene nel portafoglio tra il beta lineare e i beta quantili è pari a:

$$\Phi(\tau)(\sqrt{(w_1^2\sigma_1^2 + (1-w_1)^2\sigma_2^2)}$$

Esprimendo la costante moltiplicativa della varianza nel secondo titolo come $\sigma_2 = c_2\sigma_1$, la variazione del beta ottenuta aggiungendo il secondo titolo è pari a :

$$\Phi(\tau)\sigma_1(\sqrt{w_1^2 + (1 - w_1^2)c_2^2} - 1)$$

È sufficiente quindi la condizione $\sqrt{w_1^2 + (1 - w_1^2)c_2^2} < 1$ per far si che aggiungendo il secondo titolo si riduca il beta quantile del portafoglio.

Se si considera un portafoglio equally weighted dove le varianze dei titoli hanno la stessa struttura, la differenza tra il beta quantile e il beta lineare diventa:

$$\beta_{\tau,P} - \beta = \frac{\Phi(\tau)\sigma}{n}$$

Per n che tende all'infinito questa converge a zero.

La formula ricavata indica come la variazione dipenda dal quantile preso in considerazione, infatti per i quantili più distanti dalla mediana di ottengono variazioni maggiori, dipendendo queste da $\Phi(\tau)$. In caso di normalità per il quantile mediana si ha subito che la differenza è sempre pari a zero e quindi tutta l'informazione è contenuta nel beta di regressione lineare. La variazione delle differenze inoltre dipende linearmente da sigma, e maggiore sarà questa quantità, maggiori risulteranno i beta quantili relativi ai singoli titoli, nondimeno risulterà maggiormente elevevata la riduzione di differenza tra il beta lineare e il beta quantile del portafoglio.

I risultati appena illustrati sono stati verificati simulando i dati da due variabili con la stessa struttura di modello lineare caratterizzato da $\beta = 1$ e errori normali con media zero e deviazione standard degli errori condizionati pari al valore del regressore X. In questo caso per ogni singolo titolo si ottengono tramite il risultato (3.8) i seguenti coefficienti beta quantili teorici:

beta 10	beta 5	beta 1
-0.29	-0.64	-1.35

Stimando con R i coefficienti di un portafoglio equally weighted partendo dai due titoli si può osservare nella seguente tabella come le stime ottenute siano molto simili ai coefficienti teorici ottenuti tramite la formula descritta in precedenza.

Tabella 3.1: beta per un portafoglio equally weighted teorici e stimati

	delta beta 10	delta beta 5	delta beta 1
teorici	0.375	0.481	0.68
stimati	0.389	0.489	0.703

3.4.1 Con distribuzione non normale

Nella sezione precedente si è dimostrato come la diversificazione agisca sui beta quantile sotto le assunzioni di distribuzioni normali eteroschedastiche, nei capitoli precedenti tuttavia è stato più volte affermato come non sempre la normalità dei rendimenti è verificata. È opportuno a tal punto verificare se quanto dimostrato in precedenza è valido anche in presenza di non normalità, in particolare se si osservano distribuzioni leptocurtiche, asimmetriche o con entrambe le caratteristiche. In tutti questi casi esistono delle differenze sostanziali rispetto a quanto detto in precedenza. I quantili non sono più direttamente ricavabili come multipli delle sola varianza poichè le distribuzioni non sono più completamente caratterizzate da media e varianza.

Di conseguenza il fatto che i quantili non siano più facilmente calcolabili limita anche le possibilità di ricavare analiticamente sia gli alpha che i beta. Il problema maggiore che viene riscontrato è che anche ammesso di conoscere i quantili dei singoli titoli, mentre una combinazione di distribuzioni normali risulta ancora normale, combinando due distribuzioni non normali la distribuzione risultante non appartiene più alla famiglia di distribuzioni di partenza.

Data l'impossibilità di dimostrare analiticamente le proprietà viste in precedenza si è ricorso ad un approccio simulativo per verificare se quanto detto sia valido anche per distribuzioni non normali. Sono stati calcolati quindi gli alpha e i beta di regressione quantile per τ pari a 0.1, 0.05 e 0.01 per un portafoglio con pesi $1/n$. Questo è stato fatto simulando rendimenti condizionati al fattore di rischio con beta lineare pari a 1 e valutando tre diverse situazioni: errori con distribuzione a code pesanti, errori con distribuzione con code asimmetriche e infine errori con distribuzioni degli errori ottenute sommando con pesi casuali una chiquadrato, una t di student e una normale, tutte e tre determinate da parametri estratti casualmente. Per ogni rendimento le distribuzioni condizionate sono state moltiplicate per una costante moltiplicativa casuale e per il valore del regressore in modo da avere dei beta diversi dal beta di regressione lineare. Il regressore si è considerato esclusivamente per valori negativi o pari a zero per poter avere coefficienti beta quantile sempre positivi. Le tabelle 3.2, 3.3 e 3.4 mostrano come variano gli alpha e i beta all'aumentare del numero di titoli in portafoglio equally weighted. Si può notare come seppur con velocità di convergenza diverse gli alpha tendono a zero mentre i beta a uno. Esiste tuttavia una differenza sostanziale rispetto al caso di normalità , infatti con distribuzioni gaussiane anche in presenza di eteroschedasticità i pesi agiscono in maniera proporzionale sugli alpha quantile e sui beta quantile, quindi il vettore che massimizza un quantile di coda massimizza pure tutti gli altri quantili di coda. Questo non è più vero se non si assume la normalità dei titoli.

Tabella 3.2: Con distribuzione a code pesanti

n	Alpha 0.1	Beta 0.1	Alpha 0.05	Beta 0.05	Alpha 0.01	Beta 0.01
1	-0.442	1.154	-0.637	1.210	-1.178	1.362
2	-0.354	1.112	-0.479	1.148	-0.746	1.277
10	-0.167	1.053	-0.223	1.069	-0.320	1.105
50	-0.078	1.024	-0.099	1.032	-0.138	1.049
100	-0.055	1.018	-0.069	1.023	-0.102	1.032

Tabella 3.3: Con distribuzione asimmetriche

n	Alpha 0.1	Beta 0.1	Alpha 0.05	Beta 0.05	Alpha 0.01	Beta 0.01
1	-0.659	1.524	-0.710	1.765	-0.916	2.224
2	-0.465	1.373	-0.607	1.494	-0.715	1.806
10	-0.220	1.164	-0.268	1.217	-0.386	1.312
50	-0.102	1.072	-0.133	1.094	-0.195	1.133
100	-0.071	1.051	-0.083	1.068	-0.106	1.099

Tabella 3.4: Con distribuzioni miste

n	Alpha 0.1	Beta 0.1	Alpha 0.05	Beta 0.05	Alpha 0.01	Beta 0.01
1	-1.146	2.332	-1.546	2.714	-2.416	3.385
2	-0.704	1.649	-1.008	1.824	-1.535	2.149
10	-0.307	1.224	-0.419	1.278	-0.622	1.385
50	-0.153	1.119	-0.187	1.154	-0.260	1.224
100	-0.108	1.083	-0.145	1.106	-0.189	1.156

3.5 Le caratteristiche del VaR condizionato

Tramite la regressione quantile è possibile utilizzare i coefficienti stimati per ricavare le caratteristiche del VaR condizionato. Preso atto che il VaR condizionato è una funzione della variabile fattore di rischio , il VaR condizionato è a sua volta una variabile, di conseguenza è possibile calcolarne il valore atteso e la varianza. Si ha perciò che

$$E[VaR_\tau(Y)] = E[\alpha_\tau + \beta_\tau X] = \alpha_\tau + \beta_\tau E[X]$$

mentre la sua varianza è data da:

$$var(VaR_\tau(Y)) = var[\alpha_\tau + \beta_\tau X] = \beta_\tau^2 var[X]$$

Come si può notare, ciò che influenza la varianza del VaR è esclusivamente β_τ che indica la sensibilità alle variazioni di mercato; maggiore è questa quantità maggiore è il range possibile dei valori assunti dal VaR condizionato. Tuttavia non bisogna trascurare gli alpha quantile dato che il valore atteso del fattore di rischio è molto prossimo a zero, perciò il parametro alpha quantile risulta essere la componente con maggior rilevanza per la determinazione del valore atteso del VaR.

3.6 Alpha e Beta come misura del rischio di portafoglio

È stato discusso in precedenza come la varianza si possa decomporre in rischio sistematico e rischio idiosincratico, caratterizzati dal parametro di regressione lineare beta, e dalla varianza dei residui. Si è inoltre analizzato come, nel caso di normalità ed identica distribuzione, si possano ricavare dai beta e dalla varianza dei residui i coefficienti di regressione quantile, e viceversa. In questo caso quindi la varianza idiosincratica è completamente ricavabile dal coefficiente alpha. Il rischio beta come già si ha avuto modo di appurare non è eliminabile, ed è possibile soltanto controllarlo inserendo opportunamente i titoli. Questo tipo di rischio è dovuto alla relazione esistente tra la media condizionata del portafoglio e l'indice di mercato, e maggiore sarà il peso dato a titoli con beta elevato, maggiore diventa il rischio del portafoglio. Se si inserisse soltanto il titolo con il beta minore non si controllerebbe tuttavia adeguatamente la varianza idiosincratica del portafoglio caratterizzato dall'alpha quantile che converge verso lo zero aumentando la diversificazione del portafoglio. In particolare, il portafoglio di minima varianza è quel portafoglio che minimizza la somma tra varianza sistematica e varianza idiosincratica.

È possibile quindi associare ai due parametri alpha e beta dei significati ben precisi. Se entrambi fossero nulli la varianza del portafoglio sarebbe pari a zero ed i rendimenti sarebbero costanti, cioè indipendenti dal mercato. Se fosse presente solo il rischio alpha i rendimenti avrebbero come unica fonte di variabilità quella dovuta al rischio idiosincratico, ma continuerebbero ad essere indipendenti dal comportamento del mercato. Nel caso in cui invece alpha sia nullo, ma non lo sia beta, i rendimenti potrebbero essere perfettamente prevedibili conoscendo i valori del mercato, e la loro varianza sarebbe dovuta esclusivamente dalla sensibilità alla varianza del fattore di rischio indicata da β^2. Se fosse quindi possibile scegliere l'alpha quantile e il beta del portafoglio, si potrebbe scegliere esattamente in che modo esporsi ai due tipi di rischio. Il VaR in questo caso è pari semplicemente alla media condizionata traslata per il parametro alpha, e quindi le considerazioni fatte in precedenza per la varianza sono valide anche per il VaR.

Se invece le assunzioni non venissero verificate non sarebbe più possibile passare, unicamente con le informazioni ottenute dai modelli, da una misura all'altra, sia perchè il parametro alpha non è direttamente ottenibile dalla varianza dei residui sia perchè compare nella formulazione del VaR condizionato anche la differenza tra il beta di regressione lineare ed il β_τ. Inoltre, nonostante il beta di regressione lineare mantenga il significato assunto in precedenza, ora il parametro alpha quantile non rappresenta più la varianza idiosincratica, ma solamente il quantile della distribuzione dei rendimenti quando il fattore di rischio è pari a zero. Il beta quantile, invece, indica quanto il quantile della distribuzione del portafoglio possa variare a causa delle variazioni del fattore di rischio. È possibile esemplificare una situazione limite per comprendere l'enorme rischio che può comportare questo parametro: se si suppone che sia il beta lineare che la differenza tra il valore atteso e tutti gli alpha quantili di un portafoglio siano pari a zero, mentre il valore atteso sia prossimo a zero ma comunque positivo. Non considerando il beta quantile, si potrebbe considerare questo portafoglio come non rischioso ed in grado di generare costantemente piccoli rendimenti positivi, infatti anche al variare del fattore di rischio i rendimenti attesi rimarrebbero costanti. Tuttavia se i beta quantili sono particolarmente elevati, al verificarsi di forti shock di mercato, le perdite potenziali potrebbero essere elevatissime, richiedendo un periodo molto lungo per essere recuperate. Ovviamente, in questo caso, il modello di regressione lineare classico ingloberebbe il rischio beta quantile nella varianza dei residui, senza essere però in grado di spiegare il reale comportamento dei rendimenti. Il beta quantile fornisce quindi un indicazione che permette di discriminare ulteriormente il rischio delle attività finanziarie, infatti a parità di beta lineare e alpha quantile, risulta meno rischiosa l'attività con beta quantile meno elevato. Inoltre se la scelta di gestione del portafoglio utilizza un ribilanciamento periodico basato sul VaR, un beta quantile molto elevato comporta che questa quantità sia estremamente sensibile alle fluttuazioni di mercato e crea di conseguenza il problema di dover riallocare maggiormente il portafogli rispetto ad un portafoglio con beta quantile minore. Modificare consistentemente il portafoglio può portare molti svantaggi, non da ultimo l'aumento della spesa in costi di transazione.

Capitolo 4

VALUTAZIONE DEL RISCHIO E COSTRUZIONE DI PORTAFOGLIO CON DATI SIMULATI

I dati utilizzati si riferiscono alle componenti dell'indice Dow Jones in un intervallo temporale che parte dal primo gennaio 2008 e termina il 31 dicembre 2011. Tale periodo comprende la crisi finanziaria del 2008, elemento grazie al quale si hanno a disposizione sia per il fattore di rischio che per i rendimenti numerosi valori estremi difficilmente riscontrabili in altri periodi. I titoli che compongono l'indice sono i cosiddetti blue chips, i quali appartengono a settori industriali anche molto diversi tra loro. Il seguente capitolo è diviso in due parti, la prima mostrerà come il limitarsi ad un analisi basata sulla sola regressione lineare possa nascondere delle informazioni rilevanti sull'effettiva rischiosità dei titoli (informazioni invece ricavabili invece estendendo l'analisi alla regressione quantile). La seconda parte dimostrerà che, utilizzando le informazioni ricavate in precedenza e sfruttando nuovamente la regressione quantile, oltre ad ottenere un analisi più completa del rischio di portafoglio, è possibile individuare dei vettori di pesi che permettano di ottenere dei portafogli ottimizzati.

In particolare si osserverà come l'effetto di diversificazione che agisce sui beta quantile possa portare ad ottenere dei pesi molto diversi rispetto a quelli di minima varianza per l'ottimizzazione del rischio.

L'obiettivo finale sarà quello di verificare se il portafoglio di minima varianza sia in grado di ottimizzare il rischio delle code o se invece esistano dei portafogli che permettono di ottenere dei risultati migliori.

Il capitolo è così organizzato: la prima sezione descriverà la parte inerente ai dati ed ai problemi di natura computazionale e di analisi dei singoli titoli e delle procedure di ottimizzazione e di analisi del portafoglio. Tramite i coefficienti resistituiti dalla regressione quantile si mostrerà come il comportamento dei rendimenti possa essere estremamente diverso condizionatamente al fattore di rischio. Successivamente verrà mostrato come per i singoli titoli i risultati ricavati da un semplice modello di regressione lineare sarebbero limitati e fuorvianti per valutare efficacemente il rischio. Per quanto riguarda la costruzione del portafoglio, infine, verranno presi due esempi a modello, necessari l'uno a considerare le differenze ottenibili assumendo normalità e non, e sulle quantità da massimizzare ed i valori a cui condizionare, e l'altro a dimostrare cosa può comportare la diversificazione dei beta quantile. Si procederà infine nel cercare di ottimizzare un portafoglio costituito da dieci titoli.

4.1 Raccolta dati, modello utilizzato e problemi di natura computazionale

I dati di partenza per l'analisi consistono nelle serie storiche dei prezzi dei titoli dell'indice Dow Jones, dei rendimenti del risk free e del fattore di rischio di mercato. Le serie storiche dei prezzi sono state raccolte da "Yahoo finance" e, successivamente, su queste sono stati calcolati i log rendimenti

$$r_{i,t} = log(P_{i,t}) - log(P_{i,t-1})$$

poi moltiplicati per cento, in modo da avere lo stesso ordine di grandezza del risk free e del fattore di rischio. Per i dati inerenti ai valori del rischio di mercato e del titolo privo di rischio sono stati utilizzati i dati disponibili sul sito di Fama e French.

Per la stima dei coefficienti di regressione quantile è stato utilizzato il software R ed il pacchetto quantreg scritto da Koenker. Il pacchetto quantreg permette in particolare di utilizzare un metodo di stima che consente di vincolare dei parametri. In tal modo sarà possibile stimare un modello dove l'intercetta rimanga la stessa sia quando il fattore di rischio è positivo, sia quando è negativo.

Così facendo il segno del fattore di rischio influisce esclusivamente sul coefficiente angolare e non sull'intercetta come specificato dal seguente modello:

$$Q_\tau(r_i|M) = \alpha_\tau + (beta_{\tau,1} + I(M < 0)beta_{\tau,2})M$$

In tale modello i coefficienti beta negativi saranno ricavati come somma tra il beta positivo e la differenza tra beta negativo e beta positivo.

Variando il τ tra 0.01 e 0.99 è possibile calcolare i coefficienti di regressione per ogni percentile e successivamente simulare la distribuzione condizionata, approssimando la probabilità di osservare valori intermedi tra un percentile e l'altro tramite una distribuzione uniforme. Nonostante questa approssimazione è possibile ricavare delle distribuzioni condizionate che ben si adattano ai dati. Tramite questo metodo non è purtroppo possibile ricavare i valori precedenti al primo percentile e successivi al novantanovesimo.

Il software permette poi altro tipo di stima: immettendo come input meno uno come parametro τ si ricavano le stime dei coefficienti per tutti i τ possibili date le osservazioni. In questo modo è possibile avere a disposizione molti più valori stimati che tengono conto anche dei possibili valori inferiori al primo percentile. L'ideale sarebbe ottenere una situazione in cui l'ordine delle stime per i quantili sia esatto in qualsiasi livello del fattore di rischio, e perchè ciò sia possibile è necessario che il valore dei beta negativi di regressione quantile sia decrescente rispetto ai quantili , mentre deve essere crescente per i beta quantile positivi.

Per quanto riguarda il calcolo del vettore dei pesi del portafoglio di minima varianza è stato utilizzato il pacchetto quadprog che permette di ricavare delle ottimizzazioni quadratiche inserendo dei vincoli lineari come la positività dei pesi.

Nella sezione inerente il portafoglio costituito da due soli titoli sono stati stimati tutti i coefficienti alpha beta quantile per il primo, quinto e decimo quantile. Tramite queste stime sono state ricostruite le curve dei quantili al variare dei pesi del portafoglio. Con più di due titoli questo non è più possibile dato che la numerosità delle quantità da stimare aumenta esponenzialmente. È stato quindi utilizzato un algoritmo di ottimizzazione per la ricerca dei massimi quantili empirici ottenibili combinando le distribuzioni condizionate stimate per i titoli di partenza. Una volta ottenuti i pesi che massimizzano i quantili empirici sono stati generati con questi i portafogli non condizionati su cui sono stati calcolati i coefficienti delle rette di regressione quantile. I pesi ottimi ricavati con i due metodi sono equivalenti con la sola eccezione che dato che il secondo metodo non stima più la regressione quantile sul portafoglio ma solo sui titoli iniziali, non si avranno più a disposizione le stime dei coefficienti per tutti i pesi possibili, ma solo quelli relativi ai portafogli ottimi condizionatamente ai valori del fattore di rischio.

4.2 Analisi dei singoli titoli

Il periodo temporale preso in esame si riferisce a periodi ad elevata volatilità compreso quello relativo alla crisi finanziaria del 2008, momento in cui molti titoli hanno subito delle perdite considerevoli. I dati del rischio di mercato presentano in questo lasso temporale molti valori estremi, sia positivi che negativi, che sarebbero impossibili da osservare in periodi di stabilità del mercato. La particolarità di questo set di dati è che permette di evidenziare come le rette di regressione quantile abbiano pendenza diversa dalle rette di regressione lineare.

Nei titoli dell'indice Dow Jones si possono riscontrare caratteristiche molto diverse sia in termini di coefficienti beta lineare (il range dei coefficienti stimati va da 0.5 a oltre 2) che in termine di varianza dei residui. È possibile osservare come all'aumentare dell'esposizione al rischio aumenti anche la dispersione dei residui. Estendendo l'analisi alla regressione quantile è possibile individuare ulteriori caratteristiche che comportano comportamenti differenti nelle varie situazioni di mercato.

Generalmente, è possibile riscontrare come i titoli che hanno esposizioni al rischio beta elevato presentino differenze tra beta quantili e beta lineare maggiori, mentre gli alpha quantile, seppur crescendo, non sono troppo diversi dagli alpha quantile dei titoli con esposizioni al rischio meno elevate. Da ciò se ne ricava che, condizionatamente a situazioni di stabilità di mercato, le differenze di rischio tra i vari titoli sono meno accentuate di quanto l'analisi di regressione lineare faccia supporre, perchè nel modello di regressione lineare la varianza dei residui ingloba sia il rischio alpha che il rischio beta quantile, e quindi non riesce a diversificare il rischio idiosincratico in base alle varie situazioni di mercato.

Analizzando i grafici dei coefficienti di regressione quantile al variare del quantile, sorgono naturali alcune considerazioni. Per tutti i titoli, la differenza tra il beta positivo e il beta negativo per il quantile mediana non è mai significativamente diversa da zero e quindi ne consegue che la retta mediana è derivabile sullo zero, fatto che generalmente non accade per le rette inerenti i quantili di coda.

Il modello con segno stimato è in accordo quindi con il modello a singolo fattore che non considera separatamente fattore di rischio positivo e fattore di rischio negativo.

Nel periodo considerato si osserva per tutti i titoli un andamento crescente all'aumentare del quantile per il coefficiente beta positivo, ed un andamento decrescente all'aumentare del tau per il beta negativo. Inoltre nonostante gli alpha quantile indichino per alcuni titoli una distribuzione molto prossima alla normale in condizioni di mercato stabili, il fattore di rischio causa come indicato dai beta quantile un allontanamento da questa forma distributiva.

Per alcuni titoli la sensibilità al fattore di rischio indicata dai beta quantile aumenta drasticamente solo per i quantili di coda, mentre per i quantili centrali rimane molto simile a quella indicata dal beta di regressione lineare. Le differenze tra i beta inerenti la coda inferiori e quelli della coda superiore indicano come il fattore di rischio allontanandosi dallo zero possa indurre delle asimmetrie nella distribuzione condizionata dei rendimenti, caratteristica che non si presenta in condizioni di stabilità di mercato. Inoltre, le differenze tra i beta quantili negativi ed il beta di regressione lineare sono maggiormente accentuate rispetto ai beta quantili positivi e il beta di regressione lineare. Questo particolare evidenzia come il fattore di rischio abbia un effetto maggiore quando assume valori negativi e, mentre per i beta negativi le differenze con il beta di regressione lineare sono più accentuate quando i quantili considerati sono relativi alla coda sinistra, per i beta positivi si osserva una situazione invertita mostrando differenze maggiori per la coda destra, anche se in questo caso le differenze con il beta di regressione lineare risultano minori. Ne consegue che per valori di mercato negativi le deviazioni estremamente negative rispetto alla media condizionata sono maggiori alle deviazioni estremamente positive, mentre per valori positivi del fattore di rischio accade l'opposto.

Nonostante tutte le parti successive siano basate sui primi quantili della di-

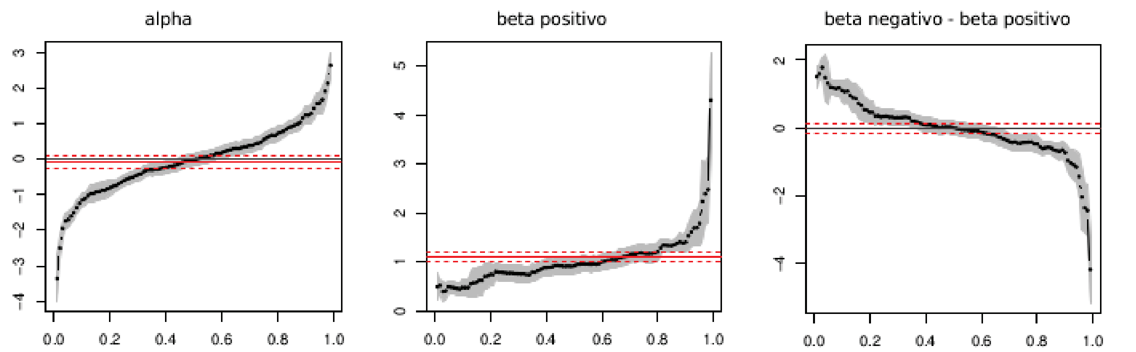


Figura 4.1: I grafici mostrano le stime dei coefficienti alpha beta positivo e del beta positivo meno il beta negativo al variare del quantile. In grigio sono rappresentati gli intervalli di confidenza

stribuzione, si nota come per alcuni titoli una differenza significativa tra i beta quantile e il beta lineare si manifesti già per valori vicini alla mediana, mentre per altri titoli ciò diventi significativo solo per i quantili più estremi. Si riscontra poi in alcuni titoli un problema di significatività dei coefficienti stimati relati ai quantili più estremi, problema probabilmente dovuto alla ridotta numerosità campionaria utile alla stima per questi quantili.

Tuttavia, dato che l'ordine dei quantili stimati dev'essere corretto per ogni valore del fattore di rischio, il beta positivo deve essere sempre crescente, mentre il beta negativo deve essere sempre decrescente al crescere del tau. Appurato che nei quantili intermedi la differenza rispetto al beta di regressione lineare è significativa è possibile assumere che i quantili di coda siano almeno pari al valore dei quantili più centrali e quindi anche essi risultano diversi dal beta di regressione lineare.

4.2.1 Analisi del rischio di due titoli

In questa sezione si illustrerà come sia possibile valutare la rischiosità di due titoli attraverso le informazioni ricavate dalla regressione quantile. Per comprendere al meglio l'utilità della regressione quantile nell'analisi del rischio e nella costruzione del portafoglio verranno presi in analisi i rendimenti del titolo Boeing (BA) e del titolo The Travelers Company (TRV). I due titoli dell'indice Dow Jones appartengono a settori molto diversi: infatti la prima azienda si occupa del settore aerospaziale mentre la seconda appartiene al settore assicurativo. Valutando il comportamento tramite regressione lineare i due titoli hanno caratteristiche molto simili; si osserva come entrambi i titoli hanno coefficiente beta molto prossimo ad uno e una varianza dei residui simili, mentre gli alpha del modello di regressione lineare non sono significativi in entrambi i casi.

Tabella 4.1: beta e varianza dei residui

titolo	beta lineare	varianza residui
BA	0.98	1.57
TRV	1.05	1.78

Di conseguenza, il rischio valutato tramite queste informazioni risulta molto simile, dato che se si assume l'identica distribuzione e la normalità dei residui i quantili delle distribuzioni condizionate nei due titoli sono sempre simili.

La particolarità di avere il beta e la varianza dei residui così simili, permette di comprendere appieno l'utilità valutare il rischio basandosi sulla regressione quantile invece che limitarsi esclusivamente alla regressione lineare.

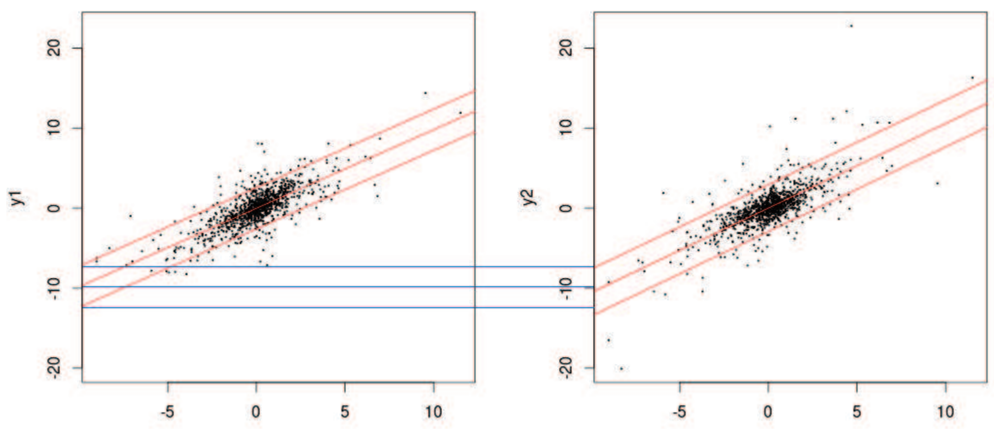


Figura 4.2: Le rette rosse rappresentano le rette della regressione lineare e le rette del quinto e novantacinquesimo quantile, assumendo errori identicamente distribuiti e normali. Le rette blu mostrano come le rette di regressione ottenute siano molto vicine tra di loro e praticamente sovrapponibili.

Estendendo l'analisi alla regressione quantile invece che disporre esclusivamente del beta lineare e della varianza dei residui, si ottengono gli alpha quantile i beta quantile negativi, e i beta quantile positivi, che consentono una serie di considerazioni aggiuntive. Ad esempio utilizzando i coefficienti ottenuti per il quinto quantile è possibile ricavare i grafici di figura 4.3, dove è possibile osservare come, relativamente al quinto quantile, il secondo titolo in condizioni di mercato estreme risulti nettamente più rishioso rispetto al primo.

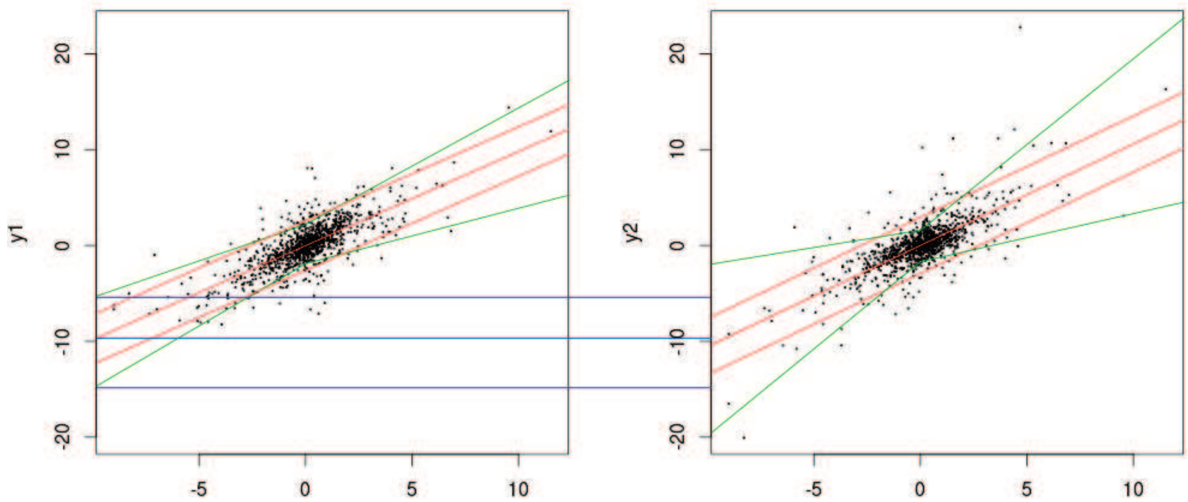


Figura 4.3: Le rette rosse sono calcolate con il modello di regressione lineare assumendo l'identica distribuzione degli errori, mentre le rette verdi sono calcolate tramite i coefficienti regressione quantile per il quinto e novantacinquesimo quantile. Le rette blu rappresentano la proiezione delle rette di regressione quantile del primo titolo sul secondo titolo.

Tabella 4.2: Tabella dei coefficienti alpha e beta relativi al quinto quantile

titolo	alpha	beta $M < 0$	beta $M > 0$	delta beta $M < 0$	delta beta $M > 0$
BA	-1.87	1.3	0.57	0.3	0.43
TRV	-1.53	1.7	0.35	0.7	0.65

Analizzando nello specifico i coefficienti riportati in tabella 4.2 si osserva come l'alpha quantile del primo titolo sia inferiore rispetto al secondo, ciò comporta che se il valore di mercato risulta nullo, mentre per il primo titolo il cinque per cento dei valori verificabili sono inferiori alla soglia di -1.87, per il secondo titolo tale soglia sale a -1.53. Se quindi si assume il quinto quantile come indice di rischio è possibile affermare come condizionatamente a zero il primo titolo sia più rischioso rispetto al secondo. In questo caso, il modello di regressione lineare restituiva un'informazione opposta dato che la varianza dei residui del primo titolo risultava maggiore della varianza dei residui del secondo titolo. Di contro il secondo titolo diventa maggiormente rischioso per valori di mercato negativi, dato che il beta quantile negativo più elevato porta a far decrescere la stima del quinto quantile più rapidamente di quanto avvenga per il primo titolo.

Di conseguenza la decisione su quale dei due titoli sia più rischioso non è più scontata come poteva apparire all'inizio, ma va valutata relativamente ai valori di mercato.

Posto che i quantili stimati per i due titoli giacciono su due rette incidenti, è possibile individuare un valore del rischio di mercato per cui i due titoli hanno la stessa stima del quantile, mentre per valori inferiori a tale punto è maggiormente rischioso il secondo titolo, viceversa per valori maggiori risulta maggiormente rischioso il primo titolo.

Per quanto riguarda i valori positivi di mercato si possono fare le stesse osservazioni: il titolo con beta positivo minore è quello a cui per valori elevati del fattore di rischio sono associati i quantili minori. La stessa analisi è possibile effettuarla anche per gli altri quantili di coda: le conclusioni per il primo e decimo quantile sono simili a quelle ottenute per il quinto, cioè per valori di mercato prossimi a zero il secondo titolo risulta tra i due il meno rischioso, mentre per valori estremi di mercato risulta maggiormente rischioso il secondo titolo. É possibile notare (Figura 4.4) come il punto di intersezione tra le rette sia diverso a seconda del quantile scelto, in particolare per il primo quantile l'intervallo in cui il secondo titolo risulta meno rischioso del primo è decisamente più ampio dell'intervallo ottenuto considerando gli altri due titoli. Questo evidenzia come, a causa della non normalità e identica distribuzione degli errori, le conclusioni su quale titolo sia più rischioso, oltre che dal valore di mercato dipendano dal quantile analizzato.

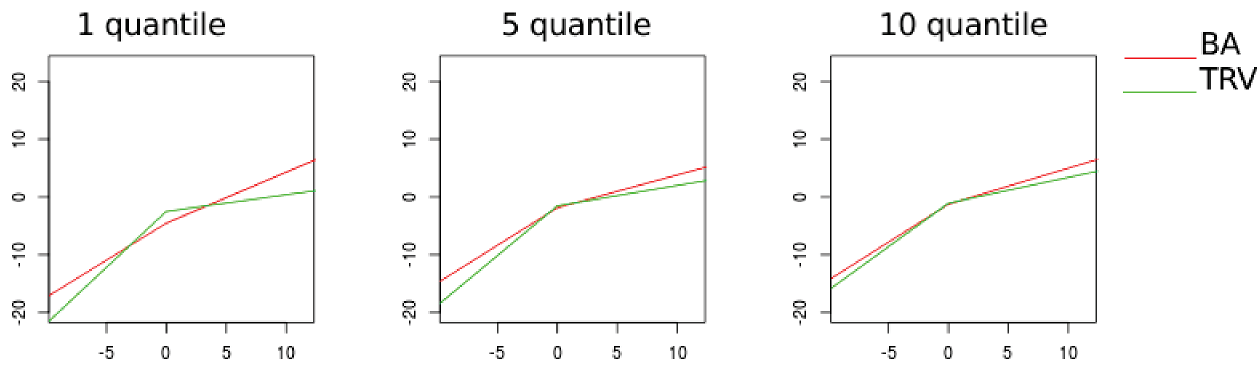


Figura 4.4: Dai grafici si può concludere che il primo titolo (rette rosse) è maggiormente rischioso del secondo (rette verdi) per valori di mercato molto vicini allo zero, mentre il secondo tende a diventare più rischioso quando ci si allonana da questo valore.

È possibile generalizzare le osservazioni fatte in precedenza, infatti supponendo di avere due titoli e che tra i due il secondo titolo abbia una varianza dei residui maggiore del primo, facendo riferimento esclusivamente alla parte negativa del fattore di rischio, tramite i coefficienti di regrssione quantile si possono individuare le seguenti situazioni.

- Il secondo titolo ha sia alpha quantile che beta quantile minori rispetto a quelli del primo titolo. In questo caso il secondo titolo risulta più rischioso del primo per valori di mercato vicini allo zero, ma le differenze si riducono gradualmente quando il fattore di rischio assume valori sempre più negativi. Esiste un punto oltre il quale il secondo titolo diventa meno rischioso del primo.

- Il secondo titolo ha sia alpha quantile che beta quantile maggiori rispetto a quelli del primo titolo; in questo caso il secondo titolo risulta meno rischioso del primo per valori di mercato vicini allo zero, ma la differenze si riducono man mano che il fattore di rischio assume valori sempre più negativi. Esiste un punto oltre il quale il secondo titolo diventa più rischioso del primo.

- Il secondo titolo ha alpha quantile minore e beta quantile maggiore rispetto al secondo titolo. In questo caso la retta di regressione quantile del secondo titolo è sempre al di sotto della corrispondente retta di regressione quantile del primo titolo, e man mano che il fattore assume valori sempre più negativi la differenza di rischio tra i due titoli aumenta.

Va posta attenzione al fatto che nei primi due casi il punto d'intersezione delle due rette potrebbe essere un valore fortemente negativo, e quindi impossibile da osservare nella realtà; se così fosse varrebbero le conclusioni del terzo caso.

Per la parte positiva del fattore di rischio si possono fare delle analoghe considerazioni, tenendo però presente che l'interpretazione dei valori beta quantile risulta invertita. Dato che i coefficienti beta positivi non dipendenti dai coefficienti beta negativi, è possibile combinare i casi per la parte positiva e i casi per la parte negativa, ottenendo quindi (considerando che il coefficiente alpha quantile se è maggiore per la parte positiva lo è anche in quella negativa), 7 situazioni diverse che permettono una panoramica più completa del comportamento dei rendimenti dei titoli nelle diverse situazioni di mercato. I sette casi sono i seguenti:

- il primo titolo è più rischioso del secondo solo per valori fortemente negativi, ma per un certo valore negativo del fattore di rischio diventa meno rischioso, e rimane tale anche per tutta la parte positiva.
- il primo titolo è meno rischioso del secondo solo per valori fortemente negativi, ma per un certo valore negativo del fattore di rischio diventa più rischioso, e rimane tale anche per tutta la parte positiva.
- il primo titolo è più rischioso del secondo solo per valori fortemente negativi, ma per un certo valore negativo del fattore di rischio diventa meno rischioso, oltre un certo valore positivo del fattore di rischio torna ad essere più rischioso del secondo
- il primo titolo è meno rischioso del secondo solo per valori fortemente negativi, ma per un certo valore negativo del fattore di rischio diventa più rischioso, oltre un certo valore positivo del fattore di rischio torna ad essere meno rischioso del secondo
- il primo titolo è meno rischioso del secondo per tutti i livelli del fattore di rischio negativo e per valori del fattore di rischio posivi vicini a zero, oltre ad un certo valore positivo diventa più rischioso.
- il primo titolo è più rischioso del secondo per tutti i livelli del fattore di rischio negativo e per valori del fattore di rischio posivi vicini a zero, oltre ad un certo valore positivo diventa meno rischioso.
- il primo titolo è sempre meno rischioso del secondo

È possibile inoltre estendere la regressione quantile a tutti i percentili in modo da poter ricostruire l'intera distribuzione condizionata. Questo permette di avere la completa distribuzione condizionata dei rendimenti al variare del rischio di mercato.

Riferendosi ai due titoli analizzati in precedenza, dai grafici si può osservare come quando il mercato assume valori fortemente negativi la coda inferiore del

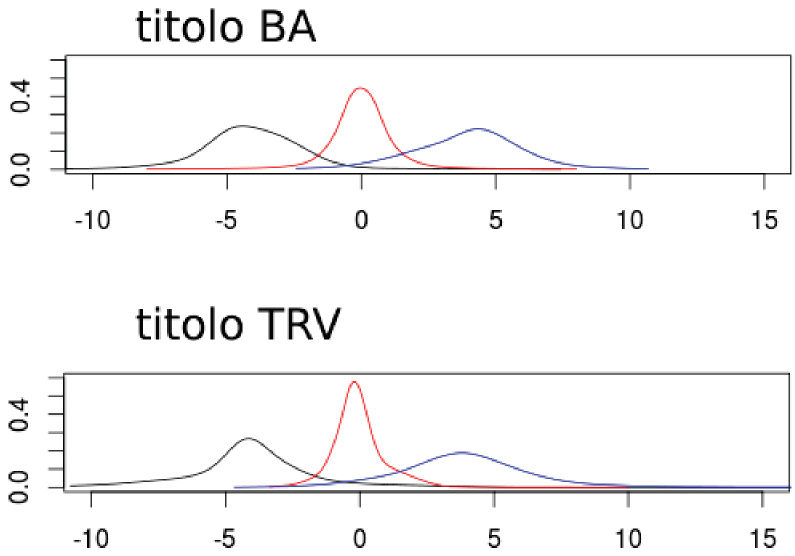


Figura 4.5: Curve di densità condizionate al rischio di mercato: in vero per M=-4, in rosso per M=0, e in blu per M=4.

secondo titolo è più grassa e lunga di quella del primo titolo il che rende il secondo titolo più rischioso. Ricostruendo così l'intera distribuzione condizionata dei rendimenti è possibile ricavare un'altra misura di rischio che gode di proprietà teoriche migliori del VaR, essendo essa subaddittiva. Quest'ultima consiste nel valore atteso dei rendimenti al di sotto di un certo quantile, ed è denominata CVaR. Il vantaggio nell'utilizzare questa misura è che considera la coda nella sua interezza e non solo alcuni punti indicati dai quantili. Le situazioni possibili per discriminare la rischiosità dei titoli permangono le medesime descritte in precedenza.

Le distribuzioni condizionate nei vari livelli del fattore di rischio, sono inoltre necessarie per affrontare la parte successiva. Se infatti per i singoli titoli è sufficiente ottenere le stime dei coefficienti alpha e beta quantile relativamente ai quantili interessati, per poter stimare queste quantità nei portafogli è necessario disporre dell'intera distribuzione dei titoli di partenza.

4.3 Portafogli e regressione quantile

L'analisi appena compiuta può essere utilizzata anche per il confronto dei portafogli. Oltre all'analisi del rischio dei portafogli ottenuti è possibile utilizzare le informazioni della regressione quantile nel procedimento di ottimizzazione del portafoglio. In questa tesi si è proceduto cercando i portafogli che permettano di massimizzare i quantili condizionati e al successivo confronto di tali portafogli con il portafoglio di minima varianza. Il portafoglio di minima varianza è quel portafoglio che garantisce il rischio minimo ottenibile in termini di varianza indipendentemente dal valore atteso. È indispensabile sottolineare che la metodologia che verrà adottata inizialmente non tenta di massimizzare i quantili della distribuzione di tutti i rendimenti possibili del portafoglio, ma esclusivamente dei rendimenti condizionati ad un dato valore del fattore di rischio. Il portafoglio a minima varianza invece minimizza la varianza complessiva del portafoglio considerando il fattore di rischio come un'ulteriore variabile e non come una costante data.

Procedendo con l'analisi verrà mostrato come sia possibile, in alcune situazioni, ricavare dei portafogli che risultano per i quantili condizionati migliori del portafoglio a minima varianza indipendentemente dal valore del fattore di rischio.

Nella prima parte ci si è concentrati esclusivamente per l'insieme negativo del rischio di mercato perchè questo può essere tranquillamente trattata singolarmente anche con titoli che hanno beta di regressione lineare diversi tra di loro, mentre come si vedrà successivamente, massimizzare i quantili condizionando esclusivamente ad un livello positivo del fattore di rischio può portare ad esporsi eccessivamente al rischio di mercato. Dato che nei primi due titoli analizzati in precedenza non si riscontra questo problema, perchè i beta lineari dei due titoli sono molto simili, essi risultano ideali per fare un primo esempio.

L'uguaglianza dei beta di regressione lineare comporta che il portafoglio di minima varianza, nel caso di normalità ed identica distribuzione degli errori, è determinabile minimizzando esclusivamente la varianza idiosincratica, e quindi pure i pesi ottimi che massimizzando i quantili risultano identici indipendentemente dal fattore di mercato. Adottando la regressione quantile la precedente affermazione viene smentita.

Nel secondo esempio nonostante si presenti una differenza significativa tra i beta di regressione lineare, si presenta un effetto di diversificazione sui beta quantile, che permette di osservare come sia possibile che il portafoglio di minima varianza non appartenga all'insieme di portafogli che ottimizzano i quantili.

Durante l'analisi si è proceduto parallelamente simulando i rendimenti sia sotto le assunzioni di normalità e identica distribuzione, sia simulando dalle distribuzioni condizionate stimate tramite regressione quantile. Questo permette di evidenziare come i risultati e le conclusioni nei due casi possano risultare anche molto differenti.

Nonostante i risultati sotto le assunzioni di normalità e d'identica distribuzione siano ottenibili analiticamente, anche per questa modalità è stata utilizzata la stessa metodologia adottata per i rendimenti simulati tramite regressione quantile; le stime ottenute risultano comunque in linea con i valori ricava analiticamente.

Infatti, nel caso di normalità, le stime ottenute per i beta quantili non sono mai significativamente diverse dal beta di regressione lineare, mentre gli alpha quantile coincidono con quelli calcolati tramite la varianza dei residui.

Per ottenere i coefficienti dei portafogli nel caso di dati simulati dalle distribuzioni stimate si è proceduto come di seguito esposto. Per ogni titolo sono stati stimati i coefficienti di regressione quantile per tutti i percentili tra 0.01 e 0.99, inoltre sono stati ricampionati con ripetizione cinquantamila valori del fattore di rischio osservato nel periodo, e successivamente per ogni valore ottenuto è stato estratto casualmente un valore dalla distribuzione condizionata ricostruita utilizzando i quantili condizionati precedentemente stimati. Combinando i dati simulati per i due titoli sono poi costruiti 101 portafogli, facendo variare il peso del primo titolo da 0 a 1 con un passo di 0.01, mentre il peso del secondo titolo è ottenuto per differenza tra 1 ed il peso del primo titolo. Per ciascun portafoglio infine sono stati calcolati il beta di regressione lineare, la varianza dei residui, i parametri alpha, beta positivo e beta negativo per i quantili uno cinque e dieci.

Così operando è possibile ottenere i grafici dei coefficienti al variare dei pesi del portafoglio, i quali permettono di verificare come esista un effetto dovuto alla diversificazione non solo sul rischio alpha, ma anche sul rischio beta.

Grazie ai coefficienti ottenuti sono state poi costruite le curve dei quantili stimati per i portafogli condizionatamente a dei valori del fattore di rischio al variare della composizione del portafoglio. Come si vedrà in seguito sono inoltre stati ricavati i pesi dei portafogli che permettessero la massimizzazione delle seguenti quantità:

- la somma dei tre quantili di coda
- la somma dei tre quantili di coda con pesi non uguali
- la media dei rendimenti condizionati al di sotto del decimo quantile

Per poter calcolare l'ultima quantità è stato utilizzato un approccio diverso rispetto a quello descritto in precedenza, invece di ricostruire l'intera popolazione, sono stati simulati i rendimenti condizionati a singoli valori del fattore di rischio ed in seguito è stata fatta la media delle osservazioni sottostanti al decimo quantile empirico.

Dopo aver ottimizzato i quantili condizionati a dei singoli livelli del fattore di rischio, si sono cercate le combinazioni di pesi che massimizzassero le somme, e le somme pesate delle stesse quantità precedenti ottenute per più valori negativi del fattore di rischio. Infine è stata aggiunta anche la parte positiva in modo da poter confrontare i pesi ottenuti con i pesi del portafoglio a minima varianza classico.

4.4 Portafogli con due titoli

I due titoli confrontati in precedenza risultano utili per una prima osservazione sulle differenze nelle conclusioni che si trarrebbero utilizzando un approccio basato sulla regressione lineare con assunzioni di normalità e identica distribuzione, rispetto a quelle che è invece possibile ottenere con la regressione quantile. Questo perchè dato che i beta di regressione lineare nei due titoli non sono significativamente diversi tra di loro, minimizzare la varianza consiste unicamente nel minimizzare il rischio idiosincratico, restando il rischio sistematico pressochè costante al variare della composizione del portafoglio.

In questo caso, inoltre, dato che è la minimima varianza non dipende dal beta, il portafoglio ottenuto è quello che minimizza la varianza idiosincratica e di conseguenza ogni quantile delle distribuzioni condizionate per ogni valore del fattore di rischio.

Bisogna ricordare che generalmente è ben diverso minimizzare la varianza della distribuzione condizionata ad uno specifico valore, o costruire il portafoglio di minima varianza. Se l'assunzione di identica distribuzione degli errori è vera, minimizzare la varianza ad un dato livello significa minimizzarla condizionatamente a qualsiasi livello, ma questa non è necessariamente la soluzione ottimale se si considera tutto l'insieme dei valori del rischio di mercato, poichè se il beta fosse diverso nei due titoli va considerata anche la diversa sensibilità al fattore di rischio che andrà quindi opportunamente ottimizzata.

Utilizzando invece i dati ottenuti tramite simulazione effettuata partendo dai coefficienti di regressione quantile, la distribuzione dei dati non risulta più soltanto traslata al variare del fattore di rischio, ma i beta quantile ne vanno a modificare vari aspetti, come varianza, asimmetria e curtosi. Ciò può comportare anche grosse differenze a livello di pesi relativi ai portafogli ottimi ricavati per valori diversi del rischio di mercato, questo nonostante il beta di regressione lineare rimanga sempre costante.

La prima evidente differenza tra i due casi si ha quindi sui coefficienti di regressione quantile stimati, sia per quanto riguarda i valori ottenuti per questi, sia per come essi varino cambiando la composizione del portafoglio.

Il grafico (a) di figura 4.6 è relativo ai beta di regressione quantile stimati sui dati ottenuti utilizzando errori normali e identicamente distribuiti e mostra come i valori ottenuti non siano significativamente diversi dalle stime del beta di regressione lineare. I beta stimati per ogni quantile variano linearmente tra il beta lineare del primo titolo ed il beta lineare del secondo titolo che comunque hanno valori molto simili. E' riscontrabile, quindi, quanto precedentemente affermato, cioè che nel caso gli errori siano identicamente distribuiti, stimare il beta dei quantili non aggiunge informazioni dato che essa è già completamente inclusa nel beta di regressione lineare.

Analizzando i beta stimati sui dati ottenuti tramite regressione quantile è possibile osservare come quest'ultima affermazione non risulti più veritiera. Nel grafico (b) di figura 4.6 sono rappresentati i beta negativi per diversi quantili, i quali hanno dei valori decisamente diversi dal beta di regressione lineare, tale differenza risulta più o meno accentuata sia in base al quantile interessato, sia in base ai pesi del portafoglio.

Quanto appena affermato, non è dovuto esclusivamente al fatto che i beta quantili dei due titoli siano diversi, infatti l'andamento dei beta quantile da un estremo all'altro non è più lineare come in precedenza, ed esistono dei vettori di pesi che permettono di ottenere dei beta quantili addirittura inferiori a quelli dei singoli titoli,(caratteristica che risulta maggiormente evidente per i beta dei quantili più estremi, com'era stato dimostrato per il caso normale con varianza eteroschedastica).

La differenza sostanziale dal caso dimostrato in condizioni di normalità ed eteroschedasticità, è che il punto di minimo per i vari beta non si riscontra in corrispondenza dello stesso vettore dei pesi. Il grafico (c) di figura 4.6 mostra come il fenomeno si presenti anche se con minore intensità anche sui beta quantile positivi, dove però la diversificazione agisce in senso opposto, infatti si ottengono dei vettori di pesi che hanno beta positivo maggiore rispetto ai beta positivi dei singoli titoli. Come dimostrato in precedenza non è infatti il valore dei beta quantili a diminuire, ma il valore assoluto della differenza tra i beta quantili e il beta lineare, indipendentemente dal fatto i beta quantili siano riferiti ai valori positivi o ai valori negativi del fattore di rischio. Dato un quantile inoltre il beta quantile positivo non si massimizza in corrispondenza del punto di minimo del beta quantile negativo, questo perchè gli effetti sui rendimenti sono diversi in base al segno del fattore di rischio.

Oltre ai grafici dei coefficienti beta, sono riportati i grafici dei coefficienti alpha (Figura 4.7), relativi al caso normale (grafico a) e al caso di dati simulati con regressione quantile (grafico b). Nel caso di normalità gli alpha corrispondo a quelli teorici ottenuti moltiplicando la radice della varianza dei residui dei vari portafogli per i quantili della normale standard. Mentre nel caso di normalità gli alpha si massimizzano tutti per lo stesso vettore dei pesi (corrispondente in questo caso al portafoglio di minima varianza), nel caso di non identica distribuzione questo non è più vero.

Le curve degli alpha quantile inoltre non decrescono più in modo simmetrico rispetto al loro punto di massimo perchè influenzate dalle possibili asimmetrie nelle distribuzioni dei singoli titoli.

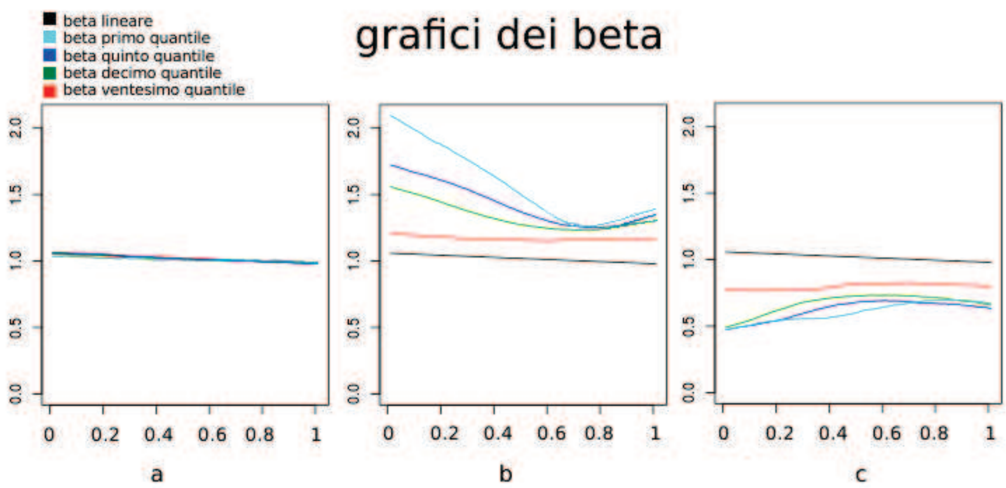


Figura 4.6: Il grafico (a) mostra le i coeffcienti beta di regressione quantile stimati per i vari quantili nel caso di dati simulati con errori normali e identicamente distribuiti al variare del portafogli, il grafico (b) mostra i coefficienti beta negativi con distribuzioni non normali, mentre il grafico (c) mostra i coefficienti beta positivi

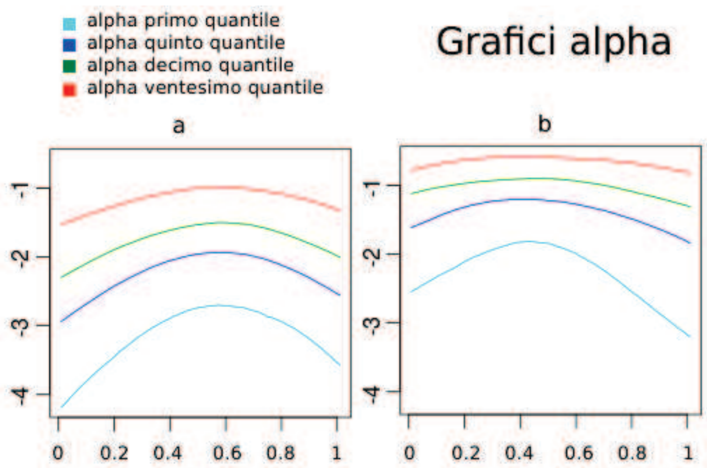


Figura 4.7: Nel grafico (a) sono rappresentati gli alpha al variare dei pesi dei portafogli per i vari quantili nel caso di errori normali, mentre nel grafico (b) sono rappresentate le stesse quantità ma nel caso di errori non normali

È possibile osservare come, sopratutto in corrispondenza dei punti di massimo, gli alpha nel caso di non normalità siano maggiori rispetto a quelli di normalità, e quindi il rischio alpha è meno elevato di quanto farebbe invece supporre la varianza dei residui della regressione lineare. Di conseguenza in condizioni di normalità di mercato, un approccio basato sulla regressione lineare porta a sovrastimare il rischio; tale caratteristica si riscontrava anche per i singoli titoli. Causa ne sono le differenze tra i beta quantili ed il beta lineare, e l'erronea assunzione della normalità, che viene inglobata negli alpha quantile (quindi tendono ad essere sovrastimati).

Nella tabelle 4.3 sono riportati i valori dei coefficienti beta per i due titoli, e il beta minimo ottenibile combinando i titoli con i pesi assiciati a questo portafoglio, mentre Nella tabelle 4.4 sono riportati i valori dei coefficienti alpha per i due titoli, e l'alpha massimo ottenibile con i relativi pesi

Tabella 4.3: tabella per i beta quantile

quantile	peso 0	peso 1	beta minimo	pesi beta minimo
Beta lm	0.99	1.03	0.99	1
Beta 01	1.34	2.09	1.27	0.95
Beta 05	1.32	1.72	1.25	0.77
Beta 10	1.30	1.55	1.23	0.71

Tabella 4.4: tabella per gli alpha quantile

quantile	primo titolo	secondo titolo	alpha massimo	pesi alpha massimo
Alpha 01	-3.2	-2.55	-1.81	0.45
Alpha 05	-1.83	-1.62	-1.2	0.41
Alpha 10	-1.31	-1.12	-0.9	0.45

Con i coefficienti appena analizzati, è possibile stimare i quantili condizionati per vari valori del fattore di rischio al variare della composizione del portafoglio. Nel caso normale, è verificata la situazione prevista in teoria, ovvero che il punto di massimo per tutti i quantili si trova in corrispondenza del portafoglio a minima varianza indipendentemente dal fattore di rischio.

Le curve si possono ricavare analiticamente, calcolando i quantili come multipli della radice della varianza dei residui traslati per la media condizionata; nei grafici, infatti i quantili condizionati stimati sono identici a quelli teorici. Se ai quantili condizionati si sottrae la media condizionata della distribuzione, le curve dei quantili condizionati sono sovrapponibili, poichè esse sono semplicemente traslate per il valore del rischio di mercato.

Nel caso di non normalità i risultati cambiano drasticamente; poichè i beta di regressione quantile dei portafogli variano sensibilmente in base alla composizione del portafoglio, è determinante per la scelta dei pesi il valore del fattore di rischio. Per valori prossimi allo zero del fattore di rischio, l'alpha assume un ruolo predominane rispetto al beta, e quindi i quantili sono massimizzati dando al primo titolo un peso leggermente minore, via via che ci si sposta verso valori sempre più negativi del fattore i beta assumono un ruolo maggiore, portando a dare sempre maggior peso al primo titolo dato che i beta di questo sono minori rispetto a quelli del secondo.

La differenza sostanziale come si avrà modo di appurare, consiste nel fatto che a causa dell'effetto della diversificazione sui beta non si arriverà mai a escludere completamente il secondo titolo perchè come visto possono esistere delle combinazioni di pesi che garantiscono dei beta inferiori a quelli di entrambi i titoli.

Le curve indicano il rischio del portafoglio nelle diverse situazioni di mercato. Il fatto che i beta possano essere anche molto elevati per certe combinazioni di titoli rende le curve dei quantili molto più ripide di quanto ci si possa aspettare sotto le assunzioni di normalità, dato che in questo caso le differenze dei punti nelle curve dipendono esclusivamente dalla variazione degli alpha quantile. I quantili stimati in caso di normalità nei vari portafogli sono rappresentati dai punti delle curve più spesse in figura 4.8, mentre quelle più fine sono relative ai quantili stimati sui dati simulati tramite le distribuzioni condizionate. Dato che nel caso normale le curve possono essere perfettamente ricavate analiticamente, ci si riferirà a queste come le curve dei quantili teorici, mentre le altre verranno indicate come curve dei quantili stimati. È possibile osservare come, tranne per valori molto prossimi allo zero esse indichino come i quantili teorici siano nettamente superiori a quelli stimati. Cambia così radicalmente l'informazione sul rischio relativo alla composizione dei portafogli. In questa tesi non è stata sviluppata una frontiera efficiente alla Markowitz con rischio quantile e valore atteso ma è ugualmente possibile capire come il rischio se si assume la normalità possa essere enormemente sottostimato, oltre che a individuare come ottimi portafogli che in realtà non lo sono. Inoltre per le curve dei quantili stimati, spostandosi dal punto di massimo, la ripidità delle curve è molto più accentuata che per i quantili teorici, e ciò espande il range dei valori possibili al variare della composizione del portafoglio. Infatti dai grafici delle curve è possibile osservare come ad esempio condizionando ad un rischio di mercato pari a meno 8, il range di variazione del primo quantile stimato (curva rossa più fina) va da meno 20 a meno 12, mentre quello teorico varia tra meno 12 e meno 11 (curva rossa più grossa).

Un'altra caratteristica importante delle curve dei quantili stimati è che, poichè

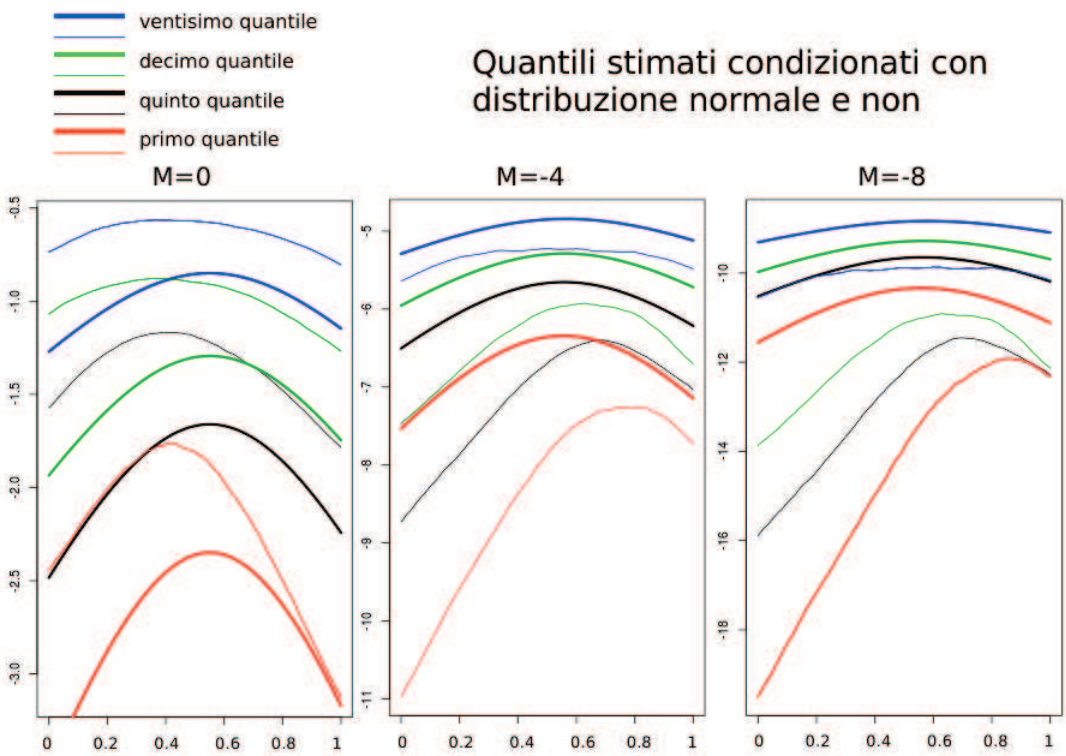


Figura 4.8: Nel grafico le curve più fine rappresentano i quantili condizionati stimati al variare del portafoglio sotto le assunzioni di normalità mentre le curve più grosse rappresentano i quantili condizionati stimati al variare del portafoglio per i dati simulati tramite coefficienti di regressione quantile

gli alpha e i beta quantili hanno dei punti di massimo per i primi, e di minimo per i secondi, in corrispondenza di vettori di pesi diversi, allora anche le curve non sono massimizzate tutte dallo stesso vettore di pesi. Questo differenza si riscontra indipendentemente dal valore del fattore di rischio a cui si condiziona.

Si può concludere quindi che, contrariamente a quanto ottenuto utilizzando la sola regressione lineare, nonostante il beta lineare dei due titoli non sia significativamente diverso, la differenza tra i beta quantili rende determinante il valore a cui si condiziona.

Nella tabelle 4.5 4.6 e 4.7 sono riassunte le principali caratteristiche delle curve di figura 4.8, in particolare del loro valore nel caso di peso pari a zero per il primo titolo, di peso pari a uno per il primo titolo, del valore nel punto di massimo con relativo peso e del valore in corrispondenza del portafoglio a minima varianza.

Dopo aver analizzato le curve, considerando che esse rappresentano un rischio, è immediato far corrispondere al vettore di pesi che le massimizza il vettore di pesi che riesce a minimizzare il rischio (dato il livello del fattore), e che

Tabella 4.5: Quantili per vari portafogli condizionatamente a M=0

quantile	peso 0	peso 1	massimo e peso	nella minima varianza
ventesimo quantile stimato	-0.78	-0.82	-0.58/(0.40,0.60)	-0.6
ventesimo quantile teorico	-1.28	-1.16	-0.86/(0.56,0.44)	-0.86
decimo quantile stimato	-1.12	-1.31	-0.9/(0.45,0.55)	-0.92
decimo quantile teorico	-1.96	-1.76	-1.31/(0.56,0.44)	-1.31
quinto quantile stimato	1.61	-1.83	-1.2/(0.41,0.59)	-1.24
quinto quantile teorico	-2.51	-2.26	-1.68/(0.56,0.44)	-1.68
primo quantile stimato	-2.52	-3.2	-1.82/(0.42,0.58)	-1.93
primo quantile teorico	-3.55	-3.2	-2.38/(0.42,0.58)	-2.38

Tabella 4.6: Quantili per vari portafogli condizionatamente a M=-4

quantile	peso 0	peso 1	massimo e peso	nella minima varianza
ventesimo quantile stimato	-5.60	-5.5	-5.21/(0.53,0.47)	-5.22
ventesimo quantile teorico	-5.32	-5.19	-4.9/(0.56,0.44)	-4.9
decimo quantile stimato	-7.35	-6.69	-5.91/(0.62,0.38)	-5.95
decimo quantile teorico	-5.99	-5.8	-5.35/(0.56,0.44)	-5.35
quinto quantile stimato	-8.5	-7.04	-6.4/(0.69,0.31)	-6.56
quinto quantile teorico	-6.55	-6.3	-5.72/(0.56,0.44)	-5.72
primo quantile stimato	-10.92	-7.74	-7.25/(0.74,0.26)	-7.62
primo quantile teorico	-7.59	-7.24	-6.42/(0.42,0.58)	-6.42

Tabella 4.7: Quantili per vari portafogli condizionatamente a M=-8

quantile	peso 0	peso 1	massimo e peso	nella minima varianza
ventesimo quantile stimato	-10.44	-10.19	-9.83/(0.59,0.41)	-9.84
ventesimo quantile teorico	-9.36	-9.23	-8.93/(0.56,0.44)	-8.93
decimo quantile stimato	-13.59	-12.08	-10.86/(0.63,0.37)	-10.97
decimo quantile teorico	-10.37	-9.83	-9.38/(0.56,0.44)	-9.38
quinto quantile stimato	-8.5	-7.04	-11.45/(0.76,0.24)	-11.87
quinto quantile teorico	-10.59	-10.33	-9.76/(0.56,0.44)	-9.76
primo quantile stimato	-19.29	-12.29	-11.9/(0.87,0.13)	-13.32
primo quantile teorico	-11.63	-11.27	-10.54/(0.42,0.58)	-10.45

quindi genererà un portafoglio ottimo. Di conseguenza, date le osservazioni fatte in precedenza, esisteranno diversi portafogli ottimi, in base al quantile scelto ed in base al valore del fattore di rischio.

Nei grafici in figura 4.9, è possibile notare come a causa della variazione del fattore di rischio il peso che garantisce il punto di massimo (in rosso) per ogni quantile si sposti dando peso maggiore o minore al primo titolo a seconda della situazione di mercato.

I grafici nella prima riga mostrano la superficie dei quantili condizionati al variare del peso del primo titolo e al variare del fattore di rischio; poichè il beta lineare è positivo, queste tendono ad essere crescenti all'aumentare del fattore di rischio. I grafici nella seconda riga esplicano invece i quantili condizionati per

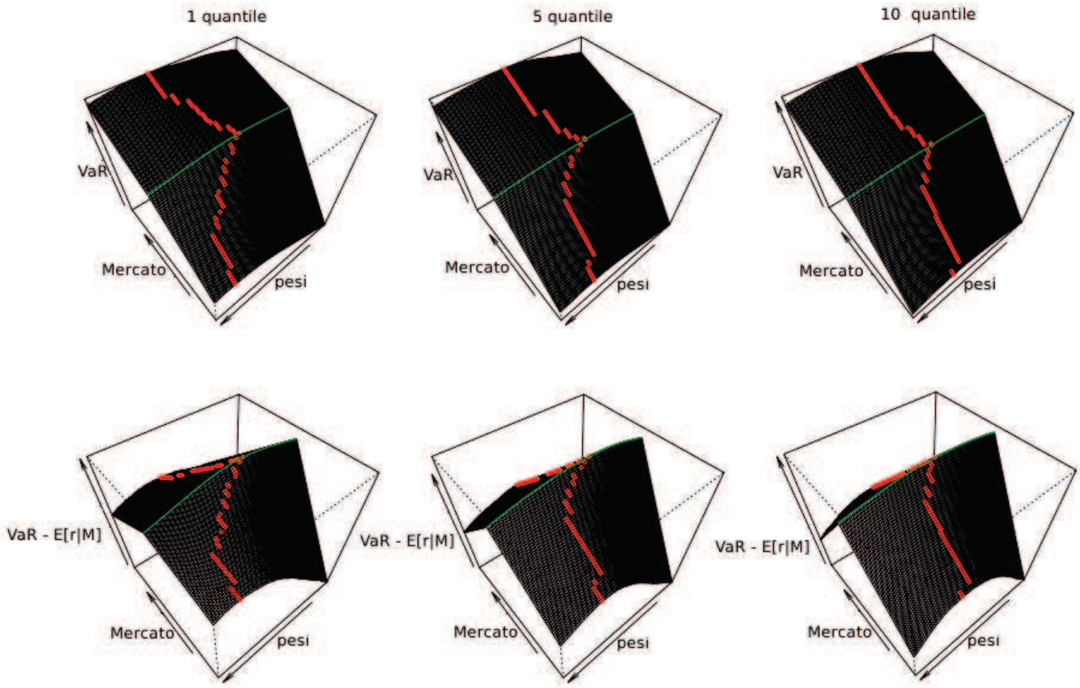


Figura 4.9: La prima riga di grafici mostra come cambia il VaR condizionato al variare del fattore di rischio e al peso del primo titolo; nella seconda riga, invece, sono rappresentati gli stessi grafici, in cui però al VaR è stata sottratta la media condizionata al fine di rendere evidente le possibili perdite rispetto al valore atteso. I punti rossi indicano il portafoglio ottimo condizionato ad ogni valore, mentre la linea verde invece indica il fattore di rischio pari a zero. È possibile osservare come in prossimità dello zero le perdite rispetto al valore atteso siano più contenute rispetto alla situazione in cui il fattore di rischio assume valori in modulo elevati

ogni portafoglio a cui è stata sottratta la propria media condizionata. Questo mostra come all'allontanarsi dallo zero (curva verde) del fattore di rischio indipendentemente dal segno di questo, i quantili si allontanano dal valore atteso condizionato del proprio portafoglio. È evidenziato come per il primo quantile la situazione possa drasticamente peggiorare, data la ripidità con cui decresce la superficie se si da troppo peso al secondo titolo. Questo quindi indica come considerare esclusivamente il VaR condizionato come indicazione di rischio può essere limitativo.

I portafogli ottimi ottenuti in precedenza raggiungono l'obbiettivo di massimizzare condizionatamente ad un valore di mercato un determinato quantile.

La stima del quantile di per se è già una misura del rischio dato che corrisponde al VaR dei rendimenti del portafoglio condizionatamente ad una situazione di mercato, questa però è un'ottima indicazione solo quando la situazione di mercato si verifica, mentre non dà alcuna indicazione (a meno di non calcolare per ogni portafoglio le stime dei quantili condizionando ad ogni valore fattore di rischio), sulla rischiosità del portafoglio al variare del fattore di rischio.

Una possibile indicazione sul rischio non condizionato è data (come già visto per i singoli titoli) dagli alpha e dai beta quantile associati ai portafogli, i quali permettono di capire il comportamento del quantile del portafoglio al variare delle condizioni di mercato. Appare chiaro come il problema dell'ottimizzazione sia tutt'altro che risolto.

Altra difficoltà è che, poichè il vettore per il massimo di un quantile non corrisponde ai vettori per i massimi degli altri quantili, è necessario valutare opportunamente cosa comporta il raggiungimento del massimo per un quantile sugli altri quantili, questione che nel caso normale non si pone mai, dato che massimizzare un quantile significa massimizzare anche tutti gli altri.

Per i due titoli finora analizzati si ottengono i risultati riportati nelle tabelle 4.8, 4.9, 4.10 e 4.11, che riportano i pesi, i coefficienti e i quantili stimati condizionando ad un valore particolarmente estremo (-9), e al fattore di rischio pari a zero.

Tabella 4.8: Pesi ottimi e quantili stimati con rischio di mercato pari a -9

	BA	TRV	varianza	I quantile	V quantile	X quantile
min varianza	0.55	0.45	4.47	-14.8	-13.2	-12.2
max I quantile	0.86	0.14	4.87	-13	-13	-12.5
max V quantile	0.75	0.25	4.63	-13.4	-12.7	-12.1
max X quantile	0.69	0.31	4.55	-13.6	-12.7	-12.1

Tabella 4.9: Coefficienti alpha e beta negativo relativi ai portafogli della tabella 4.6

	min var	I quant	V quant	X quant
alpha 01	-1.95	-2.82	-2.44	-2.26
beta 01	1.42	1.13	1.21	1.25
alpha 05	-1.24	-1.59	-1.43	-1.37
beta 05	1.32	1.27	1.25	1.26
alpha 10	-0.93	-1.18	-1.06	-1
beta 10	1.25	1.26	1.23	1.23

Condizionando a zero si ottengono, invece, le seguenti tabelle:

Tabella 4.10: Pesi ottimi e quantili stimati con rischio di mercato pari a 0

	BA	TRV	varianza	I quantile	V quantile	X quantile
min varianza	0.55	0.45	4.47	-1.94	-1.24	-0.93
max I quantile	0.41	0.59	4.55	-1.86	-1.20	-0.91
max V quantile	0.40	0.60	4.57	-1.85	-1.20	-0.91
max X quantile	0.44	0.56	4.52	-1.85	-1.20	-0.91

Tabella 4.11: Coefficienti alpha e beta negativo relativi ai portafogli della tabella 4.8

	min var	I quant	V quant	X quant
alpha 01	-1.95	-1.85	-1.85	-1.85
beta 01	1.42	1.62	1.62	1.57
alpha 05	-1.24	-1.2	-1.2	-1.2
beta 05	1.32	1.43	1.44	1.24
alpha 10	-0.93	-0.91	-0.91	-0.91
beta 10	1.25	1.3	1.31	1.28

Dalle tabelle risulta evidente come i portafogli che massimizzano i quantili nello zero causino un'elevata esposizione ai rischi beta quantile, mentre riducono fino al limite possibile il rischio alpha; viceversa i portafogli che massimizzano i quantili a meno nove riducono considerevolmente i beta penalizzando però il rischio alpha.

Relativamente all'effetto che massimizzare un quantile comporta negli altri quantili, in questo caso si osserva, a meno che non si condizioni a valori particolarmente negativi, come la perdità rispetto ai punti di ottimo non sia particolarmente elevata. Per risolvere questo problema sono state comunque provate alcune soluzioni che permettano di ottenere un portafoglio che massimizzi una combinazione lineare dei quantili, in modo quindi da non dover più scegliere esclusivamente un quantile.

Se l'obbiettivo fosse semplicemente minimizzare il VaR, dato uno specifico livello alpha non ci sarebbe alcun problema nel decidere quale quantile massimizzare, dal momento che il VaR è riferito ad un quantile ben preciso. Purtroppo come visto nel primo capitolo, anche il VaR in alcuni casi può risultare limitativo, dato che non considera il resto della distribuzione precedente la soglia indicata.

Una soluzione abbastanza sbrigativa può essere quella di massimizzare la media dei tre quantili condizionati, in modo da cercare comunque un compromesso tra le tre quantità, ma questa via non è correttamente percorribile, poiché è necessario considerare che valori inferiori al primo quantile si dovrebbero pre-

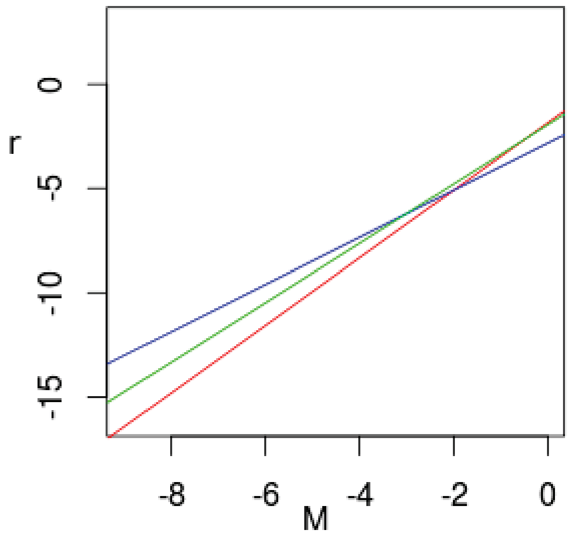


Figura 4.10: La retta rossa è la retta di regressione del primo quantile per il portafoglio che massimizza il primo quantile nello zero, la retta verde è la retta di regressione del primo quantile per il portafoglio a minima varinza, la retta blu è la retta di regressione del primo quantile per il portafoglio che massimizza il primo quantile in meno nove

sentare con una frequenza di una volta ogni cento osservazioni, mentre valori inferiori al decimo quantile sono dieci volte più frequenti; per ovviare al problema,è possibile considerare di massimizzare una somma pesata dei tre quantili condizionati.

Se si portasse all'estremo quest'ultimo concetto, e quindi invece di utilizzare solo tre quantili si usassero tutti i valori inferiori ad una certa soglia, si otterrebbe il CVaR che gode di proprietà teoriche migliori rispetto al VaR e che lo rendono una misura coerente di rischio. Questa quantità è ricavabile individuando il quantile empirico della distribuzione condizionata corrispondente al quantile interessato e facendo la media di tutte le osservazioni inferiori.

Resta da scegliere per quale valore del fattore di rischio massimizzare dato che i pesi che ottimizzano le quantità descritte in precedenza possono essere molto diversi a seconda della condizione.

Rappresentando su un grafico (figura 4.10) le rette che massimizzano il primo quantile per il fattore di rischio uguale a zero, e la retta che massimizza il primo quantile per il fattore di rischio uguale a meno nove, il problema appare lampante.

Se quindi è abbastanza immediato scegliere un vettore di pesi che raggiunga l'obbiettivo desiderato per un dato valore del rischio di mercato, è invece più complesso scegliere un portafoglio che abbia dei quantili ottimizzati in varie situazioni di mercato. Anche per questo problematica si sono cercate varie soluzioni. Una è quella di massimizzare una funzione dei quantili ottenuti per diversi fattori di rischio, operazione che si può compiere con modalità differenti. La somma semplice risulta troppo riduttiva considerando che i valori di mercato hanno diverse probabilità di verificarsi. Il fatto di poter stimare i quantili in diverse situazioni di mercato permette di assegnare dei pesi a queste condizioni in modo da attribuire più o meno importanza a determinati eventi e quindi ottenere portafogli che riducano il rischio quando il mercato va male, senza però penalizzare troppo il rischio in situazioni normali, e viceversa. È possibile anche fare una somma pesata dei quantili in base alle probabilità di verificarsi della condizione di mercato.

Dall'analisi delle curve dei coefficienti stimati è possibile ricavare una soluzione differente, realizzabile grazie all'effetto della diversificazione sui coefficienti beta. Per spiegare questo concetto, risulta utile partire dal caso del portafoglio a minima varianza. Si suppone di essere nel caso di normalità ed identica distribuzione degli errori e di avere a disposizione due titoli generici. Il primo titolo è quello con beta di regressione lineare maggiore, quindi il beta lineare del portafoglio è linearmente crescente all'aumentare del peso assegnato al primo titolo. La curva di un qualsiasi alpha quantile invece si ottiene moltiplicando la radice della varianza dei residui dei portafogli ottenuti, per un fattore di scala negativo corrispondente al quantile della normale standard.

Tutti i punti intermedi nell'intervallo tra il beta lineare minimo (situato nello zero) ed il punto che massimizza la curva alpha sono quindi portafogli ottimi nel senso che massimizzano i quantili per specifici livelli del fattore di rischio.

Se invece il beta dei due titoli è uguale il portafoglio ottimo per tutto l'insieme del fattore di rischio corrisponde al portafoglio che minimizza la varianza dei residui. Quando i beta dei due titoli sono diversi il portafoglio (0,1) è sempre ottimo quando il fattore di rischio tende a meno infinito (comuque può esserlo anche per valori sufficientemente negativi), mentre il vettore di pesi che massimizza gli alpha genera il portafoglio ottimo quando il fattore di rischio è pari a zero. Tra questi due portafogli limite sono presenti dei vettori di pesi per i titoli che massimizzano i quantili nelle situazioni di mercato intermedie.

Il portafoglio a minima varianza si trova sempre in questo intervallo ed è definito come il particolare portafoglio che minimizza

$$\beta^2 var(M) + \left(\frac{\alpha_\tau}{\Phi(\tau)} \right)^2$$

Poichè la curva degli alpha è strettamente crescente fino al punto di massimo, così come è crescente la retta beta tra zero e uno, qualsiasi portafoglio interno all'intervallo tra zero e alpha massimo ha la caratteristica di non avere altri portafogli che possiedano contemporaneamente sia alpha maggiore sia beta minore. Da ciò si deduce che, in questo intervallo, non esistono portafogli che abbiano rette di regressione quantile con punti sempre maggiori alle rette di regressione quantile di un altro portafoglio interno all'intervallo stesso, compreso quindi il portafoglio di minima varianza. Dal punto di vista geometrico, invece, presi due portafogli interni all'intervallo, le rette di regressione quantile di questi portafogli ottimi hanno sempre un punto di intersezione a sinistra dello zero.

Si possono avere risultati diversi nel caso in cui non siano verificate le assunzioni normalità e d'identica distribuzione. Il portafoglio di minima varianza è ricavato in maniera analoga e si trova nell'intervallo tra il portafoglio che minimizza la varianza dei residui ed il portafoglio che include esclusivamente il titolo a beta lineare minore.

Può cambiare invece l'intervallo dei portafogli ottimi per i quantili, poiche non solo i beta quantili non assumono gli stessi valori del beta lineare ma inoltre a causa dell'effetto di diversificazione la curva non ha più obbligatoriamente il suo punto di minimo nel peso 0. Anche gli alpha quantile non sono necessariamente massimizzati dal portafoglio che minimizza la varianza dei residui, ed in particolare se a causa dell'effetto della diversificazione il beta quantile minimo si trova oltre il punto che minimizza la varianza dei residui rispetto al beta lineare minimo, gli intervalli non hanno tutti i punti in comune; mentre se anche il vettore che genera l'alpha quantile massimo si trova oltre il portafoglio che minimizza la varianza dei residui, i due intervalli non hanno più nessun punto in comune.

Se è vero che all'interno degli intervalli ottimi esistono soltanto portafogli che non hanno sia alpha maggiore sia beta minore rispetto agli altri portafogli interni all'intervallo, ciò non è altrettanto vero per portafogli esterni ad esso. Se quindi esistono dei portafogli nell'intervallo dei portafogli ottimi per i quantili, che pos-

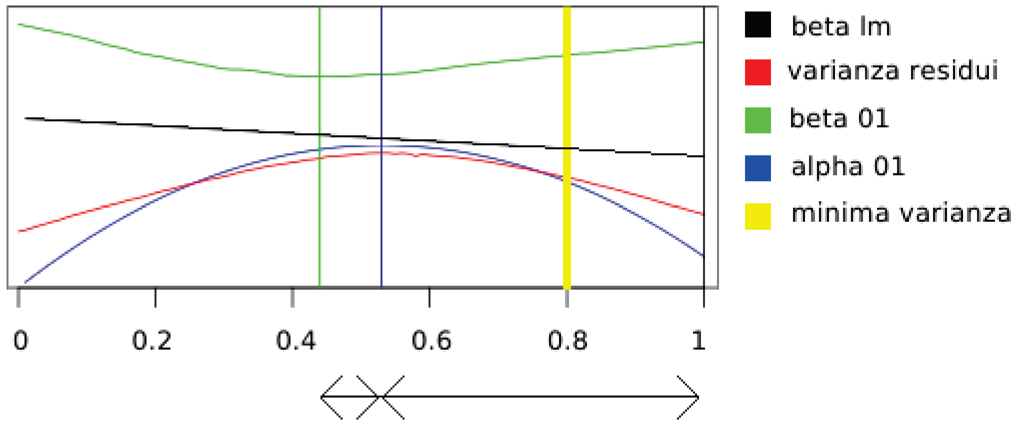


Figura 4.11: grafico dei beta beta e degli alpha per il primo quantile

siedono sia un alpha maggiore sia un beta negativo minore rispetto al portafoglio di minima varianza allora questi portafogli possiedono delle rette di regressione quantile sempre superiori alle rispettive rette del portafoglio di minima varianza. I portafogli che soddisfano queste caratteristiche possono essere più d'uno, e si differenziano tra di loro per il rischio beta lineare e per gli alpha e beta quantile. A questo punto è sufficiente scegliere da quale tipo di rischio proteggersi maggiormente, se si preferisce avere quantili più elevati per valori di mercato vicini allo zero, si preferiranno dei portafogli con alpha maggiore, se si preferisce avere portafogli migliori in situazioni di mercato estreme, e quindi preferire beta quantile minore. In ogni caso, se un portafoglio possiede alpha quantile maggiore e beta quantile minore, rispetto all'alpha e beta quantile del portafoglio a minima varianza, allora la retta di regressione quantile sarà sempre sopra a quella del portafoglio a minima varianza.

Un esempio di quanto appena detto si può osservare in maniera evidente considerando i titoli "XOM" e "DIS". Il grafico 4.11 mostra le curve e le linee necessarie per determinare gli intervalli dei portafogli ottimi. La linea nera rappresenta il beta al variare dei pesi del portafoglio, la curva rossa rappresenta la radice della varianza dei residui di regressione riscalata in modo che indichi l'alpha del primo quantile sotto l'assunzione di normalità; la La curva verde rappresenta il beta quantile al variare dei pesi assegnati al primo titolo, mentre la curva blu mostra gli alpha stimati. Le linee verticali rappresentano corrispondentemente ai colori per le curve i punti di minimo dei beta e i punti di massimo degli alpha. Infine, la linea gialla verticale più spessa indica il peso del portafoglio a minima varianza.

Come si può notare in questo caso i portafogli nell'intervallo dei portafogli ottimi per i quantili non sono compresi nell'intervallo dei portafogli ottimi individuabili nel caso normale, ed inoltre, tutto l'intervallo in questo caso possiede dei beta quantili minori e degli alpha quantile maggiori del beta e dell'alpha quantile del portafoglio a minima varianza. Di conseguenza, qualsiasi portafoglio considerato in questo intervallo genererà una retta di regressione, che sarà per il primo quantile, sempre superiore alla retta di regressione del primo quantile del portafoglio di minima varianza. Il fatto che tutti i punti dell'intervallo abbiano questa caratteristica significa che, indipendentemente dal valore del fattore di rischio a cui si condiziona per la massimizzazione dei quantili, i punti della retta di regressione quantile del portafoglio trovato, risulteranno sempre superiori alla retta di regressione quantile del portafoglio di minima varianza. Generalmente non si ha questa caratteristica, ma, se il portafoglio a minima varianza, è esterno all'intervallo, esisterà sempre almeno un portafoglio che possiede la retta quantile superiore alla retta quantile del portafoglio di minima varianza.

Riprendendo le considerazioni fatte in precedenza sui beta e sugli alpha, risulta evidente che gli intervalli dei portafogli ottimi variano in base al quantile preso in considerazione; infatti, se invece del primo quantile viene considerato il quinto, la situazione si prospetta diversa, perchè, mentre per il primo quantile l'alpha massimo si otteneva in corrispondenza del portafoglio che minimizzava la varianza dei residui, ora l'alpha massimo del quinto quantile si trova oltre questo punto, e ciò allarga considerevolmente l'intervallo dei portafogli ottimi per i quantili, andando a sovrapporsi per alcuni valori all'intervallo in cui è compreso il portafoglio a minima varianza. Se il portafoglio a minima varianza è comunque esterno all'intervallo dei portafogli ottimi per i quantili significa che esiste almeno un portafoglio nell'intervallo con alpha maggiore e beta minore di esso.

Confrontando gli intervalli ottimi del primo e del quinto quantile è possibile notare come questi intervalli abbiano dei punti in comune. Se il portafoglio a minima varianza è esterno agli intervalli ottimi allora può esistere un sottoinsieme di questi due intervalli che garantisca delle rette di regressione quantile con punti tutti superiori alle rette di regressione quantile del portafoglio a minima varianza sia per il primo che per il quinto quantile. Nella seguente tabella sono riportati gli intervalli dei portafogli ottimi per i tre quantili:

quantile	da	a
primo	0.43;0.57	0.57;0.43
quinto	0.3;0.7	0.6;0.4
decimo	0.55;0.45	0.68;0.32

Si riescono quindi, dati determinati quantili, ad ottenere dei portafogli dominanti rispetto a quello di minima varianza.

Se questo avviene per tutti i quantili inferiori ad un certo τ, allora in questi portafogli la funzione di ripartizione a sinistra di tale τ sarà sempre inferiore alla funzione di ripartizione del portafoglio di minima varianza indipendentemente dal valore del fattore di rischio. Questa è una condizione sufficiente perchè il $CVaR_\tau$ indipendentemente dal valore del mercato sia sempre superiore al $CVaR_\tau$ del portafoglio a minima varianza. Questa caratteristica si verifica principalmente quando vengono considerati particolari titoli che si caratterizzano per allontanarsi dalla situazione di normalità.

Finora sono stati illustrati i modi per ottenere un ottimizzazione dei quantili o comunque della coda quando il fattore di rischio è negativo; il portafoglio a minima varianza però ottimizza il rischio anche quando il fattore di rischio è positivo. Di conseguenza, per poter veramente confrontare il portafoglio ottimo ottenuto con quello di minima varianza, è necessario analizzarne il comportamento anche nella parte positiva. Un piccolo guadagno nella parte negativa infatti potrebbe comportare un netto peggioramento nella parte positiva.

Quando si massimizzano i quantili per la parte positiva è fondamentale prestare particolare attenzione: se nel caso di fattore di rischio negativo, quando si massimizzano i quantili o si riduce la varianza, l'ottimizzazione agisce nei due casi allo stesso modo sulle varie quantità, (e comunque il portafoglio a minima varianza può essere contenuto nell'intervallo dei portafoglio ottimi), quando si agisce nella parte positiva l'ottimizzazione dei quantili agisce inversamente sui beta rispetto al caso della varianza. Mentre nella parte negativa i portafogli ottimi nel caso normale i.i.d. sono compresi tra l'alpha maggiore e il beta minore, nella parte positiva i portafogli ottimi sono compresi tra il beta maggiore e l'alpha maggiore, e questo può portare a sovraesporsi al rischio beta lineare.

Ad esempio, se si suppone di avere due titoli con errori normali i.i.d. con varianza identica, ma con diverso beta lineare, nello specifico, il primo titolo ha beta pari a 1 mentre il secondo ha beta pari a 2. Se si massimizzano i quantili per la parte negativa, facendo variare la condizione da zero a meno infinito, si hanno portafogli che vanno da quello che minimizza la varianza nello zero cioè che massimizza gli alpha, ed è dato da (0.5,0.5), a quello che ha minor coefficiente beta, includendo cioè esclusivamente il primo titolo. Il portafoglio a minima varianza è nell'intervallo tra questi due portafogli. Se invece si massimizza la parte positiva si ottiene l'effetto contrario, l'intervallo è compreso tra (0.5,0.5) e 1 per il secondo titolo. In quest'ultimo caso l'intervallo non comprende mai il portafoglio a minima varianza, anzi va nella direzione opposta dato che si va a preferire aumentando gradualmente il fattore di rischio un portafoglio che massimizzi il beta, comportando però un enorme aumento di rischio dato che il beta si ripercuote anche sui valori negativi.

È per questo motivo che, tranne nel caso in cui i titoli abbiano tutti il beta lineare uguale tra di loro, e quindi i beta non entrano in gioco nell'ottimizzazione, la parte positiva va ottimizzata, cercando di non compromettere negativamente il rischio quando il mercato assume valori negativi, cioè tenendo sempre in considerazione quel che accade al rischio indicato dal beta lineare. È inoltre opportuno considerare che, generalmente, si è disposti a guadagnare un po' meno quando il mercato va bene, e perdere meno quando il mercato va male (come accade nel portafoglio a minima varianza), piuttosto che il contrario. Questo fa si che nella ricerca dei portafogli venga data maggiore attenzione a non penalizzare eccessivamente il rischio quando il fattore di rischio è negativo invece che avere dei quantili elevati nella parte positiva. Anche in questo caso è pur sempre possibile ottenere dei portafogli che riescano ad avere delle rette di regressione quantili superiori alle rette del portafoglio di minima varianza sia quando il fattore di rischio è positivo sia quando il fattore di rischio è negativo.

Perchè ciò accada è sufficiente che gli intervalli dei portafogli ottimi siano sovrapposti e che non includano il portafoglio di minima varianza. Nel grafico 4.12 sono stati utilizzati gli stessi due titoli esemplificativi precedenti ma al beta negativo viene sostituito il beta positivo. Come era già stato notato durante l'analisi dei coefficienti, l'effetto diversificativo agisce inversamente sui beta positivi, permettendo l'esistenza di beta maggiori rispetto a quello dei due titoli di partenza, dato che, in realtà, non è il beta quantile a doversi ridurre, ma la differenza assoluta tra il beta quantile e il beta di regressione lineare. L'intervallo dei portafogli ottimi per il primo quantile nella parte positiva ha dei punti in comune con quella negativa, e si può quindi affermare che esistono dei portafogli con rette per la regressione quantile con punti sempre superiori alle rette di regressione del primo quantile del portafogli di minima varianza.

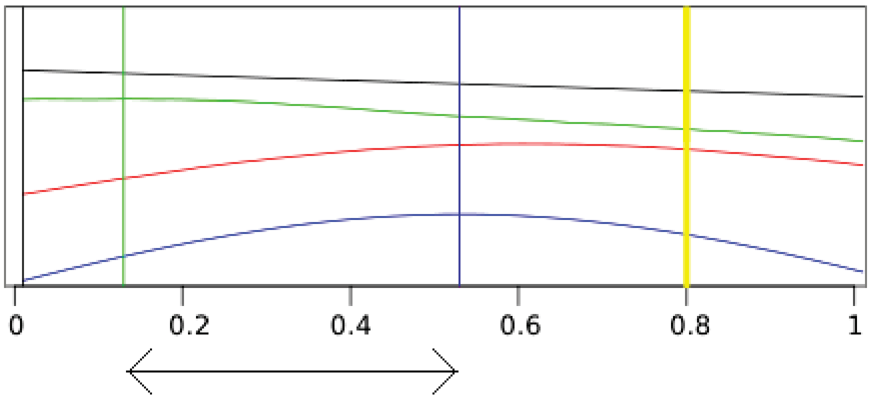


Figura 4.12: grafico dei beta beta e degli alpha per il primo quantile per parte positiva, sotto l'intervallo dei portafogli ottimi

Questo accade anche per gli altri quantili positivi; si ha quindi una serie di portafogli che permettono dei quantili delle distribuzioni condizionate sempre maggiori di quelle del portafoglio a minima varianza.

È possibile confrontare graficamente il portafoglio a minima varianza con un portafoglio scelto tra quelli individuati in precedenza, e vedere come in quest'ultimo l'obbiettivo di avere delle rette di regressione quantile sempre maggiori alle rette di regressione quantile del portafoglio di minima varianza, sia stato raggiunto. I grafici in figura 4.13 mostrano quanto appena detto. I punti neri sono relativi ai dati simulati per il portafoglio a minima varianza mentre quelli blu rappresentano i dati simulati di un portafoglio appartenente all'intervallo ottimo. In rosso sono indicate le rette di regressione quantile del portafoglio a minima varianza, invece in verde le rette di regressione quantile del portafoglio nell'intervallo ottimo. In questo caso si nota come per il decimo quantile, relativamente alla parte negativa del fattore di rischio, le rette di regressione quantile del portafoglio ottimo e del portafoglio a minima varianza sono sovrapposte , mentre per gli altri due quantili le rette verdi (portafoglio ottimo) stanno sempre sopra a quelle rosse (portafoglio a minima varianza). Nella parte positiva il miglioramento per i quantili è ancora più evidente, e ciò accade perchè il portafoglio ottimo ha un beta di regressione lineare maggiore al rispetto al portafoglio

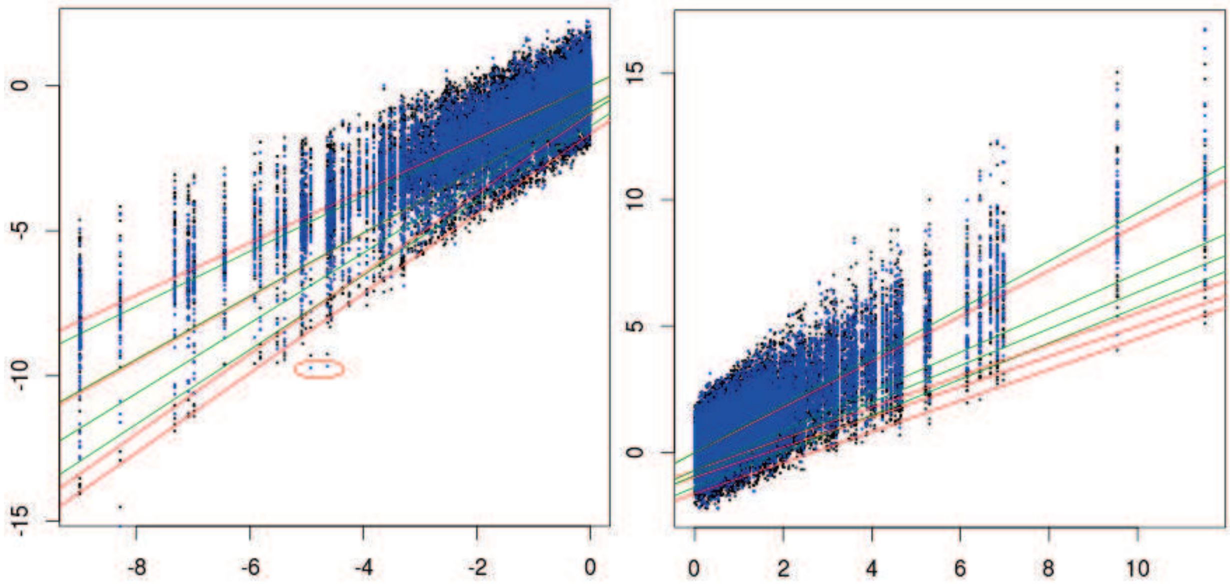


Figura 4.13: Valori simulati del portafoglio a minima varianza (nero), e di un portafoglio interno all'intervallo ottimo (blu). Le rette rappresentano la retta di regressione lineare e di regressione quantile per il decimo quinto e primo quantile, per il portafoglio a minima varianza (rosso), e per il portafoglio nell'intervallo ottimo (verde).

di minima varianza. Tuttavia essersi concentrati esclusivamente sulla coda causa anche qualche svantaggio. I puntini aiutano a capire in cosa può peggiorare il portafoglio ottenuto rispetto al portafoglio di minima varianza. (anche se sono aspetti che non rientravano nell'obbiettivo di ottimizzazione). Come già notato si assiste ad un incremento del beta lineare, il porta a prevedere, quando il mercato è negativo, dei rendimenti attesi inferiori rispetto quelli attesi per il portafoglio di minima varianza. Inoltre, si può notare come oltre alla coda inferiore sia diminuita anche la coda superiore; questo implica che, in questo caso, contenere gli scostamenti negativi estremi rispetto alla media condizionata, provoca un accorciamento anche della coda superiore delle distribuzioni condizionate. Nonostante si sia cercato di controllare i quantili della coda, ciò non garantisce (come si può notare nel cerchietto rosso), che il portafoglio ottimo generi dei valori estremi superiori al portafoglio di minima varianza. Infine anche se sono stati ottimizzati i tre quantili di coda, data la non normalità delle distribuzioni, non si ha alcun riscontro per quanto riguarda i quantili più centrali; è molto probabile, infatti, che come sia peggiorata (se si considera la parte negativa), la media condizionata, siano peggiorati anche i quantili più prossimi alla mediana.

4.5 portafogli con più titoli

Un portafoglio costituito da due soli titoli permette di comprendere facilmente i risultati ottenibili e le implicazioni che il fattore di rischio comporta sui quantili. Tuttavia un portafoglio di due soli titoli non può certo considerarsi diversificato. In questa sezione vengono simulati i dati dei dieci titoli a varianza maggiore dell'indice Dow Jones per il periodo che va dal primo gennaio 2008 al 31 dicembre 2011. I titoli considerati sono caratterizzati da coefficienti beta negativo quantile particolarmente elevati, inoltre nella tabella 4.12 si può osservare come i valori possono essere anche molto diversi a seconda del quantile considerato.

Tabella 4.12: tabella dei coefficienti beta quantile dei singoli titoli

	Beta 01	Beta 05	Beta 10
Titolo 1	1.33	1.32	1.31
Titolo 2	1.19	1.17	1.10
Titolo 3	1.62	1.45	1.37
Titolo 4	1.94	1.72	1.51
Titolo 5	1.43	1.42	1.39
Titolo 6	1.71	1.68	1.54
Titolo 7	2.34	2.31	2.15
Titolo 8	2.76	2.28	2.21
Titolo 9	3.17	2.44	2.43
Titolo 10	4.72	4.52	2.91

Utilizzando più di due titoli non è più possibile adottare la metodologia usata in precedenza. I pesi dei portafogli ottimi non si trovano più in un intervallo lineare ma in uno spazio di nove dimensioni, dato che il peso del decimo titolo è ottenuto per differenza tra uno e la somma dei primi nove. Non è quindi più possibile rappresentare graficamente le curve dei quantili al variare dei pesi , ne è più possibile, data l'elevata numerosità, calcolare i coefficienti di tutti i portafogli possibili.

Di conseguenza invece che calcolare gli alpha e i beta e poi stimare i quantili condizionati tramite i coefficienti ricavati si è proceduto in maniera inversa individuando solo i portafogli ottimi nelle varie situazioni di mercato.

Nella sezione precedente si è visto come è possibile individuare un intervallo di pesi all'interno del quale si trovano i portafogli che massimizzano i quantili al variare del fattore di rischio.

Gli estremi di questo intervallo sono individuati dai pesi dei portafogli che massimizzano i quantili per un valore di mercato nullo (e quindi i portafogli che massimizzano gli alpha), e dai pesi dei portafogli che massimizzano i quantili in una situazione di mercato estremamente negativa (e quindi minimizzano i beta negativi).

I portafogli che massimizzano i quantili per i valori di mercato compresi in questo intervallo generano le coppie di alpha e beta quantile intermedie. Con i pesi ricavati sono stati costruiti i portafogli non condizionati e su questi infine sono stati ricavati i coefficienti di regressione quantile. La caratteristica di questi portafogli è che non esistono altri portafogli possibili che possiedono sia beta negativo quantile inferiore, che alpha quantile superiore. Ottenute le coppie di coefficienti è possibile confrontarle con i coefficienti del portafoglio di minima varianza.

I portafogli sono stati calcolati sia a partire dai dati simulati con errori normali e identicamente distribuiti, sia tramite le informazioni ottenute dalla regressione quantile. Mentre nel caso di normalità è ininfluente la scelta del quantile dato che massimizzare un quantile equivale a massimizzare tutti i quantili inferiori alla mediana, nel caso di errori non normali si è proceduto alla ricerca dei portafogli ottimi per i tre quantili di coda utilizzati finora. I seguenti grafici mostrano come variano i pesi ottenuti al variare del fattore di rischio tra 0 e -9 con un decremento di 0.5.

È possibile notare come condizionando a zero i pesi ottenuti non sono nulli per nessun titolo, in questo caso quindi, anche il titolo che ha varianza più elevata può comunque contribuire a massimizzare gli alpha quantile. Il grafico mostra come i pesi associati al decimo e al nono titolo risultino maggiori quando l'obiettivo è massimizzare il primo quantile rispetto a quanto i quantili da massimizzare sono gli altri due o a quando si assume la normalità degli errori.

Il primo grafico rappresenta le variazioni dei pesi nel caso si assuma che i beta di regressione quantile siano tutti identici al beta di regressione lineare. In questo caso, via via che il valore del fattore di rischio diventa maggiormente negativo, i pesi relativi ai titoli con beta di regressione lineare elevato diminuiscono fino ad annullarsi. Questo accade anche anche nel caso i beta di regressione quantile siano diversi, tuttavia si può osservare come i pesi finali siano ripartiti in ma-

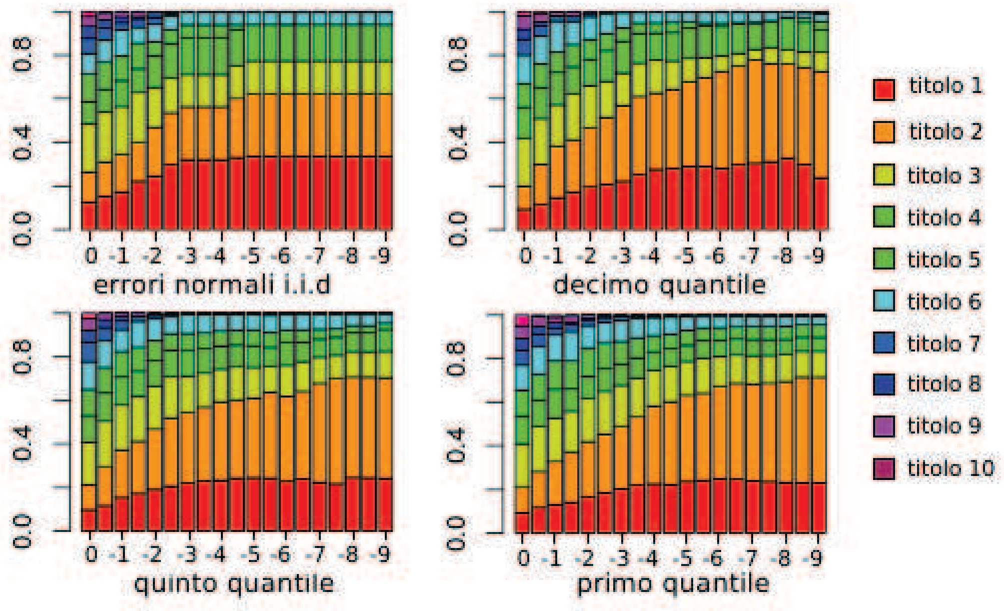


Figura 4.14: Pesi per i portafogli ottimi al variare del fattore di rischio nel caso di distribuzioni normali e nel caso di distribuzioni dei titoli stimate tramite regressione quantile

niera differente rispetto al caso di normalità e identica distribuzione. Ora oltre ai beta di regressione lineare diventa determinante per la massimizzazione dei quantili l'intera distribuzione dei singoli titoli, determinata tramite gli alpha e i beta quantile dei singoli titoli.

La differenza più evidente è la ripartizione dei pesi tra il primo e il secondo titolo. Le stime di regressione lineare individuano come il primo titolo abbia un beta minore rispetto al secondo titolo, di conseguenza, man mano che il fattore di rischio assume valori negativi si tenderà ad assegnare più peso al primo titolo rispetto al secondo.

Estendendo l'analisi alla regressione quantile si può osservare come il primo titolo abbia dei coefficienti beta quantile che sono superiori al secondo, e ciò porta a un assegnazione di pesi invertita rispetto al caso di normalità. Questo effetto, anche se in maniera meno evidente, si presenta anche per gli altri titoli, e titoli che per determinati livelli del fattore di rischio sarebbero esclusi dalla formazione del portafoglio sotto le assunzioni di normalità e identica distribuzione, continuano anche se con pesi molto piccoli a essere considerati per ottimizzare il portafoglio. In particolare questo accade per il titolo cinque. Si può notare come, se i rendimenti fossero distribuiti normalmente, per valori del fattore di rischio inferiori a meno 4 il titolo 5 verrebbe completamente escluso dal portafoglio, mentre con i dati simulati tramite regressione quantile questo non si verifica, e il peso associato al titolo cresce via via che il quantile da massimizzare considerato diventa più piccolo.

Una volta individuato che i pesi risultano differenti in base al quantile considerato, è opportuno confrontare gli alpha e i beta dei portafogli ottenuti con gli alpha e beta calcolati per il portafoglio di minima varianza. In tal modo è possibile individuare l'eventuale esistenza di portafogli con rette di regressione quantile sempre superiori alle rispettive del portafoglio a minima varianza.

Nella tabella 4.13 vengono riportati gli alpha e i beta quantile dei vari portafogli, in particolare è possibile osservare come gli alpha e i beta risultino crescenti rispetto al fattore di rischio e come non esistano tra i portafogli ottimi ottenuti, portafogli che abbiano contemporaneamente sia alpha quantile maggiore che beta quantili minore agli altri. Esistono invece dei portafogli che possiedono sia beta quantile minore che alpha quantile maggiore rispetto a quelli relativi al portafoglio di minima varianza.

Tabella 4.13: tabella dei coefficienti dei portafogli ottimi ottenuti al variare del fattore di rischio

fattori di rischio	Alpha 01	Beta 01	Alpha 05	Beta 05	Alpha 10	Beta 10
0.0	-0.84	1.47	-0.61	1.37	-0.47	1.32
-0.5	-0.87	1.36	-0.62	1.28	-0.49	1.25
-1.0	-0.89	1.32	-0.65	1.24	-0.51	1.20
-1.5	-0.95	1.29	-0.69	1.22	-0.55	1.17
-2.0	-0.99	1.26	-0.72	1.19	-0.55	1.17
-2.5	-1.03	1.25	-0.74	1.17	-0.57	1.16
-3.0	-1.07	1.24	-0.76	1.17	-0.59	1.15
-3.5	-1.12	1.22	-0.78	1.16	-0.61	1.14
-4.0	-1.21	1.20	-0.80	1.16	-0.64	1.14
-4.5	-1.24	1.20	-0.81	1.16	-0.68	1.13
-5.0	-1.29	1.19	-0.82	1.16	-0.69	1.13
-5.5	-1.30	1.19	-0.83	1.16	-0.70	1.13
-6.0	-1.36	1.18	-0.83	1.15	-0.71	1.12
-6.5	-1.40	1.18	-0.85	1.15	-0.74	1.12
-7.0	-1.40	1.18	-0.89	1.15	-0.74	1.12
-7.5	-1.41	1.18	-0.89	1.15	-0.74	1.12
-8.0	-1.44	1.18	-0.92	1.14	-0.74	1.11
-8.5	-1.49	1.17	-0.92	1.14	-0.75	1.11
-9.0	-1.49	1.16	-0.92	1.14	-0.76	1.11
minima varianza	-1.26	1.22	-0.86	1.17	-0.66	1.14

I pesi dei portafogli evidenziati nella tabella 4.13 sono riportati nella tabella 4.14 (dal titolo 7 in poi il peso associato è zero e di conseguenza non sono stati riportati), e corrisponono per colore. Nonostante il guadagno in termini di alpha e

Tabella 4.14: tabella dei pesi dei portafogli con alpha quantile maggiore e beta quantile minore rispetto al portafoglio di minima varianza

	Titolo 1	Titolo 2	Titolo 3	Titolo 4	Titolo 5	Titolo 6
MV	0.34	0.28	0.15	0.17	0	0.06
1Q	0.22	0.31	0.19	0.1	0.09	0.09
	0.23	0.36	0.17	0.09	0.07	0.08
	0.23	0.38	0.16	0.08	0.07	0.08
5Q	0.20	0.31	0.19	0.13	0.08	0.09
	0.22	0.32	0.17	0.12	0.08	0.09
	0.23	0.34	0.16	0.11	0.07	0.09
	0.23	0.36	0.15	0.11	0.07	0.08
	0.24	0.36	0.15	0.1	0.07	0.08
	0.25	0.36	0.14	0.1	0.07	0.08
	0.24	0.39	0.12	0.1	0.07	0.08
	0.23	0.39	0.14	0.1	0.06	0.08
	0.23	0.41	0.13	0.09	0.06	0.08
10Q	0.25	0.36	0.15	0.14	0.05	0.05
	0.28	0.35	0.15	0.12	0.05	0.05

beta, questo non risulta particolarmente elevato rispetto al portafoglio di minima varianza. Si riscontra comunque per tutti i portafogli ottenuti un netto miglioramento in termini di beta quantile, rispetto ai titoli di partenza. Nonostante i coefficienti dei portafogli risultino molto simili al portafoglio di minima varianza i pesi sono significativamente diversi, differenza che si riscontra nella varianza.

Capitolo 5

CONCLUSIONI

In questa tesi è stata analizzata la relazione esistente tra il rischio di mercato e la distribuzione dei rendimenti e le implicazioni che tale relazione comporta a livello di valutazione del rischio dei rendimenti e dei portafogli. Tramite la regressione quantile si è verificato come il fattore di rischio, oltre ad determinare il valore atteso dei rendimenti dei titoli, agisce su di essi modificandone anche la forma distributiva. In particolare si è osservato come a valori estremi del rischio di mercato siano associate distribuzioni dei rendimenti che presentano forme di asimmetria e curtosi non riscontrabili in situazioni di stabilità del mercato.

Tramite il modello adottato è stato individuato un effetto significativamente diverso a seconda che il fattore di rischio assuma valori positivi o negativi, in particolare quando il mercato assume valori estremamente negativi la coda inferiore risulta essere più spessa e lunga di quella superiore.

In questi casi il modello di mercato, nonostante continui a fornire una valida indicazione sul valore atteso, non è più in grado di descrivere il reale comportamento dei rendimenti, mentre la varianza risulta inadatta come misura di rischio. È stato visto come sfruttando la stessa regressione quantile, sia possibile ottenere, oltre alle informazioni necessarie per modellizzare in modo più accurato il comportamento dei rendimenti, anche un indicazione aggiuntiva sul comportamento delle code al variare del rischio di mercato riassunta dai parametri beta quantile. I coefficienti restituiti permetto di distinguere il comportamento dei titoli nelle varie situazioni di mercato, inoltre tramite i beta e gli alpha dei quantili di coda è possibile una stima del VaR svincolandosi da forme parametriche preimpostate. Si è potuto osservare quindi come il VaR stimato tramite la regressione dei quantili, indichi delle perdite possibili nettamente superiori a quello ipotizzabili dal VaR calcolato sotto le assunzioni di normalità, sopratutto quando il mercato assume valori estremi.

Questa caratteristica diventa maggiormente rilevante nell'analisi dei portafogli, dato che le variazioni del rischio al variare della composizione del portafoglio sono molto più elevate di quanto ipotizzabile sotto le assunzioni di normalità. Inoltre è stato dimostrato come attraverso la diversificazione sia possibile ridurre i beta quantili, caratteristica che è stata verificata anche in un portafoglio di due titoli. Grazie all'effetto di diversificazione in alcuni casi è possibile individuare dei portafogli che possiedono delle rette di regressione quantile sempre superiori a quelle del portafoglio di minima varianza, in questo caso quindi i portafogli individuati risultano migliori a livello di VaR condizionato sia quando il mercato è in una situazione di stabilità, sia quando si verificano particolari valori estremi. Data la non normalità dei rendimenti, il portafoglio di minima varianza risulta inefficiente nell'ottimizzare il rischio di perdite elevate, in particolare quando il vettore di pesi non è compreso nell'insieme dei portafogli ottimi individuati per i quantili. Nonostante non sia stato trattato in questa tesi, il fatto che il portafoglio di minima varianza sia escluso dall'insieme dei portafogli ottimi porta a ipotizzare che l'intera frontiera efficiente, basata sul rischio VaR, possa essere caratterizzata da pesi differenti rispetto a quella ricavata tramite l'approccio media varianza. Un altro possibile sviluppo è quello di valutare se oltre al rischio di mercato i rendimenti siano influenzati da altri fattori di rischio, come quelli proposti da Fama e Franch, infatti nonostante questi possano essere non significativi in un analisi di regressione lineare, potrebbero diventare rilevanti nel determinare altri aspetti della distribuzione.

Bibliografia

[1] Allen, David E., Kumar-Singh, Abhay and Powell, Robert J. (2009), *Asset Pricing, the Fama-French Factor Model and the Implications of Quantile Regression Analysis*

[2] Barnes, Michelle L. and Hughes, Anthony (Tony) W. (November 1, 2002), *A Quantile Regression Analysis of the Cross Section of Stock Market Returns* . URL: http://ssrn.com/abstract=458522 or http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.458522

[3] Black, Fischer, (1993) *Beta and Return,* Journal of Portfolio Management 20 pp: 8-18.

[4] Bodie, Kane, Marcus, (2007) *Investments* Mcgraw hill

[5] Broccoli, S. Cavrini, G. Zoli, M. (2005), *Il modello di regressione quantile nell'analisi delle determinanti della qualità della vita in una popolazione anziana.* Statistica, anno LXV, n.4,2005.

[6] Cade, B. Noon, B. (2003), *A Gentle Introduction to Quantile Regression for Ecologists*, Frontiers in Ecology and the Environment, 1, 412-420

[7] Cappuccio, N. Orsi, R. (2005), *Econometria* Il Mulino, Bologna.

[8] Engle Robert F. &Manganelli Simone , 2004. *CAViaR: Conditional Autoregressive Value at Risk by Regression Quantiles* Journal of Business & Economic Statistics, American Statistical Association, vol. 22, pages 367-381, October.

[9] Gaglianone, W. Lima, L. Linton, O. Smith, D. (2009), *Evaluating Value-at- Risk models via Quantile Regression.* Working Paper 09-46, Economic Series(25). URL: http://www.eco.uc3m.es/temp/09-46-25.pdf

[10] Holton, Glyn (2003) *Value-at-Risk: Theory and Practice.* Academic Press

[11] Keming Yu, Zudi Lu and Julian Stander (2003) *Quantile Regression: Applications and Current Research Areas* Journal of the Royal Statistical Society. Series D (The Statistician) Vol. 52, No. 3 (2003), pp. 331-350

[12] Koenker, R. (2005), *Quantile Regression*. Econometric Society Monograph Series, Cambridge.

[13] Koenker,R (2010), *Quantile regression in R: A Vignette.* URL: http://www.econ.uiuc.edu/ roger/research/rq/vig.pdf

[14] Koenker, R. Bassett, W. (1978), *Regression Quantiles* . Econometrica, Econometric Society, Vol. 46, No. 1. (Jan., 1978), pp. 33-50.

[15] Kuan, C.M. (2007), *An introduction to quantile regression*. Institute of Economics Academia Sinica, June 4, 2007.

[16] Ma, Lingjie and Pohlman, Larry, (2005) *Return Forecasts and Optimal Portfolio Construction: A Quantile Regression Approach* URL: http://ssrn.com/abstract=880478 or http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.880478

[17] Markowitz H. (1952) *Portfolio Selection*, Journal of Finance 7, no. 1, pp. 77–91, 1952.

[18] Markowitz H. (1959), *Portfolio selection: efficient diversification of investments*, John Wiley & Sons

Pace, L. e Salvan, A. (2001), *Introduzione alla Statistica II Inferenza, verosomiglianza, modelli.* Cedam, Padova.

[19] Sheldon M. Ross (2004)*Calcolo delle probabilità*, Apogeo Editore

[20] Sharpe, William F. (1964), *"Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk*, Journal of Finance, 19 (3), 425-442.