

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA 'TULLIO LEVI-CIVITA'
Corso di Laurea in Matematica

TESI DI LAUREA

**Dinamica del consenso
in un Voter Model con disordine**

Candidato:
Gianluca Olivo
Matricola 1146362

Relatore:
**Chiar.mo Prof.
Marco Formentin**

Anno Accademico 2022-2023

Indice

Introduzione	iii
1 Catene di Markov e processi di Poisson	1
1.1 Catene di Markov a tempo continuo	1
1.2 Processi di Poisson omogenei	5
1.3 Dal generatore alla catena di Markov	10
2 Il Voter Model classico	13
2.1 Definizione del Voter Model classico	13
2.2 Limite macroscopico di un sistema di particelle a campo medio .	16
2.2.1 Limite macroscopico	16
2.2.2 Limite di campo medio del Voter Model classico	20
3 Il Voter Model con disordine	25
3.1 Introduzione del disordine	25
3.2 Parametri d'ordine del Voter Model con disordine	27
3.3 Limite macroscopico	29
3.3.1 Dinamica macroscopica	31
3.4 Tempo di assorbimento	33
Conclusioni	37
A Codici Python	39
A.1 Simulazione Voter Model standard	39
A.2 Simulazione Voter Model con disordine	40
Bibliografia	45

Introduzione

Parte importante della ricerca nel campo dei sistemi complessi si occupa dello studio dei modelli matematici che descrivono l'evoluzione di sistemi costituiti da una molteplicità di elementi interagenti tra loro. Un esempio paradigmatico di tali sistemi è rappresentato dal Voter Model, un modello ampiamente utilizzato per comprendere i processi di diffusione delle opinioni e l'evoluzione dei sistemi sociali.

Il Voter Model nella sua versione più semplice, che noi chiameremo Voter Model classico, è costituito da un grafo in cui ogni vertice corrisponde ad un individuo, il quale possiede un'opinione. Ad ogni sito è associato un processo di Poisson. Con intensità 1, un individuo i diventa insicuro su quale opinione adottare, dunque chiede consiglio ad uno dei suoi vicini j , scelto con probabilità uniforme, e copia la sua opinione.

Tra le possibili modifiche del Voter Model, recentemente si è manifestato un crescente interesse nello studio del comportamento asintotico del modello in presenza di disordine detto *congelato*. Per inserire disordine nel sistema viene utilizzato un campo sito dipendente h_1, \dots, h_N , in questo modo in ogni sito è presente una preferenza intrinseca per un dato stato. Nel Voter Model con disordine ad ogni sito è associato un processo di Poisson. Con intensità 1, un individuo i diventa insicuro su quale opinione adottare, dunque chiede consiglio ad uno dei suoi vicini j scelto con probabilità uniforme. Se l'opinione del vicino j è uguale a h_i allora i copia l'opinione di j . Se l'opinione del vicino j è diversa da h_i allora l'individuo i è restio ad accettare l'influenza di j . L'agente i copia l'opinione di j con probabilità ρ , mentre mantiene la sua opinione con probabilità $1 - \rho$, dove $\rho \in [0, 1]$ è un parametro fissato inizialmente.

Nella presente tesi ci proponiamo di analizzare in dettaglio i due modelli. Deriveremo l'equazione macroscopica per entrambi i modelli e approfondiremo diversi concetti, tra cui uno di particolare rilievo sarà il tempo di assorbimento al variare della dimensione della popolazione.

Nel Capitolo 1 introduciamo i concetti fondamentali riguardo i processi stocastici in modo da fornire il contesto matematico adatto. Presenteremo la teoria delle catene di Markov e la teoria dei processi di Poisson, apprese dal libro [2], che saranno essenziali per la modellizzazione del Voter Model.

Il Capitolo 2 è tratto dall'articolo [4], qui definiamo in modo rigoroso il Voter Model concentrandoci sullo studio del limite di campo medio. Mostriamo che sotto certe condizioni, per N abbastanza grande, il processo di Markov approssima la soluzione di un'equazione differenziale. Concluderemo il capitolo proponendo una simulazione che permetterà di dedurre l'andamento lineare della media dei tempi di assorbimento.

Nel Capitolo 3 apporteremo una modifica al Voter Model standard, inserendo disordine. Indagheremo quali differenze apporta il disordine e grazie ad un teorema quantificheremo e analizzeremo la dinamica deterministica a livello macroscopico. Accenneremo ad un teorema, presente nell'articolo [1], che ci garantirà l'andamento esponenziale della media dei tempi di assorbimento in caso di disordine e avvaloreremo il risultato con una simulazione. Infine confronteremo i due modelli osservando che nel Voter Model classico l'equazione macroscopica limite ha solo equilibri neutri e la media dei tempi di assorbimento ha un andamento lineare in N , mentre nel Voter Model con disordine l'equazione macroscopica limite ha un equilibrio stabile e questo porta ad avere un andamento esponenziale della media dei tempi di assorbimento. Generalizzeremo questo risultato in un metateorema dichiarando che se l'equazione macroscopica limite relativa ad un Voter Model, a cui è stata apportata una modifica, presenta un equilibrio stabile allora il tempo di assorbimento del sistema è esponenziale.

Capitolo 1

Catene di Markov e processi di Poisson

1.1 Catene di Markov a tempo continuo

Useremo fin da subito nozioni probabilistiche, pertanto è utile precisare l'ambiente di lavoro. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità, dove Ω è lo spazio campionario, \mathcal{F} è la σ -algebra e \mathbb{P} è una misura di probabilità.

Definizione 1.1.1 (Processo Stocastico). Un processo stocastico è una famiglia di variabili aleatorie $\{X_t : t \in T \subseteq \mathbb{R}_+\}$, $X_t : \Omega \rightarrow E$, dove E è lo spazio degli stati.

Definizione 1.1.2 (Catena di Markov). Un processo stocastico $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ con spazio degli stati E , è una catena di Markov se $\forall i, j, i_1, \dots, i_k \in E, \forall t, s > 0$ e $\forall 0 \leq s_1, \dots, s_k \leq s$:

$$\mathbb{P}(X_{t+s} = j \mid X_s = i, X_{s_1} = i_1, \dots, X_{s_k} = i_k) = \mathbb{P}(X_{t+s} = j \mid X_s = i)$$

Inoltre, una catena di Markov si dice *omogenea* se $\mathbb{P}(X_{t+s} = j \mid X_s = i)$ è indipendente da s . In questo caso, per semplificare la notazione usiamo:

$$p_{ij}(t) = \mathbb{P}(X_{t+s} = j \mid X_s = i)$$

e adoperiamo l'acronimo HMC (Homogeneous Markov Chains) per fare riferimento a $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$. La probabilità $p_{ij}(t)$ viene detta *probabilità di transizione* e permette di definire il *semigruppato di transizione*.

Definizione 1.1.3 (Semigruppato di transizione). Sia $(X_t)_{t \geq 0}$ una HMC, allora il semigruppato di transizione associato è la famiglia:

$$P(t) = (p_{ij}(t))_{i,j \in E}$$

che è ben definito poichè $(X_t)_{t \geq 0}$ è omogenea.

Definizione 1.1.4 (Stato assorbente). Data $(X_t)_{t \geq 0}$ una HMC, sia $i \in E$, allora se $p_{ii} = 1$ lo stato si dice *assorbente*.

Notiamo che una volta raggiunto uno stato assorbente i , il processo non sarà più in grado di assumere valori diversi da i .

La prossima proposizione ci permetterà di chiarire quali sono gli elementi che caratterizzano un processo di Markov omogeneo.

Proposizione 1.1.1. Sia $(X_t)_{t \geq 0}$ una HMC a tempo continuo con vettore distribuzione $\mu(t)$, $\mu(t) = \{\mu_i(t)\}_{i \in E}$ dove $\mu_i(t) = \mathbb{P}(X_t = i)$. Allora:

$$\mu(t)^T = \mu(0)^T P(t)$$

Inoltre $\forall 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$ e $\forall i_1, \dots, i_k \in E$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^k X_{t_j} = i_j\right) = \mathbb{P}(X_0 = i_0) \prod_{j=1}^k p_{i_{j-1}i_j}(t_j - t_{j-1})$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \mu_j(t) &= \sum_{i \in E} \mathbb{P}(X_t = j, X_0 = i) \\ &= \sum_{i \in E} \mathbb{P}(X_0 = i) \mathbb{P}(X_t = j \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{i \in E} \mu_i(0) p_{ij}(t) \end{aligned}$$

Mentre per il secondo risultato, $\forall 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$ e $\forall i_1, \dots, i_k \in E$ vale:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^k X_{t_j} = i_j\right) = \sum_{i_0 \in E} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^k X_{t_j} = i_j\right)$$

Ora applichiamo la regola della catena e poi sfruttiamo l'ipotesi di Markov per

concludere

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^k X_{t_j} = i_j\right) &= \sum_{i_0 \in E} \mathbb{P}(X_0 = i_0) \prod_{j=1}^k \mathbb{P}(X_{t_j} = i_j \mid X_0 = i_0, \dots, X_{t_{j-1}} = i_{j-1}) \\ &= \sum_{i_0 \in E} \mathbb{P}(X_0 = i_0) \prod_{j=1}^k p_{i_{j-1}i_j}(t_j - t_{j-1}) \quad \square \end{aligned}$$

Dalla proposizione si deduce che la distribuzione di probabilità di una HMC a tempo continuo è completamente determinata dalla probabilità iniziale $\mu(0)$ e dal semigruppato di transizione $P(t)$. Quest'ultimo gode di alcune proprietà, supponiamo sia continuo in 0, allora $\forall t, s \geq 0$:

- $P(t)$ è matrice stocastica
- $P(0) = I$
- $P(t + s) = P(t)P(s)$
- $P(t)$ è continuo $\forall t \geq 0$

La matrice è stocastica poichè $\sum_{j \in E} p_{ij}(t) = 1$, e $P(0) = I$ da $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$. L'equazione nel terzo punto viene detta *equazione di Chapman-Kolmogorov* e si deriva facilmente sfruttando la definizione di semigruppato di transizione e il concetto di probabilità condizionata

$$\begin{aligned} p_{ij}(t + s) &= \mathbb{P}(X_{t+s} = j \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in E} \mathbb{P}(X_{t+s} = j, X_t = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in E} \mathbb{P}(X_{t+s} = j \mid X_t = k, X_0 = i) \mathbb{P}(X_t = k \mid X_0 = i) \end{aligned}$$

E si conclude grazie all'ipotesi di Markov

$$\begin{aligned} &= \sum_{k \in E} \mathbb{P}(X_{t+s} = j \mid X_t = k) \mathbb{P}(X_t = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in E} p_{kj}(s) p_{ik}(t) \end{aligned}$$

La continuità di $P(t)$ è una facile conseguenza dell'equazione di Chapman-Kolmogorov e della continuità in 0:

$$\lim_{h \rightarrow 0} P(t + h) = \lim_{h \rightarrow 0} P(t)P(h) = P(t) \lim_{h \rightarrow 0} P(h) = P(t)$$

A differenza del caso discreto, nel caso continuo nasce il concetto di generatore infinitesimale.

Definizione 1.1.5 (Generatore Infinitesimale). Sia $(X_t)_{t \geq 0}$ una HMC a tempo continuo con semigruppato di transizione $P(t)$, allora il generatore infinitesimale è la matrice $Q = (q_{ij})_{i,j \in E}$ tale che:

$$q_{ii} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{ii}(h) - 1}{h}, \quad q_{ij} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(h)}{h}$$

In notazione compatta:

$$Q = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(h) - I}{h}$$

In base alle caratteristiche di q_{ij} si può dire di più sulla catena:

- Se $\forall i \in E, q_{ii} > -\infty$ allora $P(t)$ è detto *stabile*
- Se $\sum_{j \in E} q_{ij} = 0$ allora $P(t)$ è detto *conservativo*

Se la catena è stabile e conservativa dalla Definizione 1.1.5 seguono:

$$p_{ii}(h) = 1 + q_{ii} \cdot h + o(h) \quad (1.1)$$

$$p_{ij}(h) = q_{ij} \cdot h + o(h) \quad (1.2)$$

Nel nostro caso la catena avrà spazio degli stati E finito, $|E| < \infty$, per tanto lo scambio di somma e limite è permesso e la catena è conservativa. Da cui segue la stabilità poichè q_{ij} è finito per ogni paio di $i, j \in E$ con $i \neq j$.

L'introduzione del generatore infinitesimale permette di descrivere le HMCs tramite il sistema differenziale di Kolmogorov.

Teorema 1.1.1 (Equazioni di Kolmogorov). Sia $(X_t)_{t \geq 0}$ una HMC a tempo continuo con spazio degli stati E , $|E| < \infty$, semigruppato di transizione $P(t)$ e generatore infinitesimo Q , allora:

$$\frac{d}{dt} P(t) = P(t)Q \quad (1.3)$$

$$\frac{d}{dt} P(t) = QP(t) \quad (1.4)$$

Dimostrazione. Dalle proprietà di $P(t)$, $\forall t \geq 0$ e $h \geq 0$ vale:

$$\frac{P(t+h) - P(t)}{h} = \frac{P(t)P(h) - P(t)}{h} = P(t) \frac{P(h) - I}{h} = \frac{P(h) - I}{h} P(t)$$

$|E| < \infty$, allora il passaggio al limite è concesso e otteniamo le Equazioni (1.3) e (1.4). \square

Se aggiungiamo la condizione iniziale $P(0) = I$ allora il semigruppato di transizione si scrive:

$$P(t) = e^{tQ}$$

Nella prossima sezione trattiamo i processi di Poisson e il teorema di competizione che ci permetteranno di rappresentare le catene di Markov.

1.2 Processi di Poisson omogenei

Prima di poter definire i processi di Poisson omogenei sono necessarie le definizioni di *processo puntuale* e *processo di conteggio*.

Definizione 1.2.1 (Processo puntuale). Un processo puntuale è una famiglia di variabili aleatorie non negative $\{T_n\}_{n \geq 0}$ tale che:

- $T_0 \equiv 0$
- $T_j > T_i$ se $j > i$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = +\infty$

Dato un processo puntuale $\{T_n\}_{n \geq 0}$ definiamo la *sequenza di intereventi* $\{S_n\}_{n \geq 1}$ associata:

$$S_n = T_n - T_{n-1}$$

Definizione 1.2.2 (Processo di conteggio). Sia $\{T_n\}_{n \geq 0}$ un processo puntuale, il processo stocastico $N = \{N(t)\}_{t \geq 0}$ è detto processo di conteggio di $\{T_n\}_{n \geq 0}$ se $\forall (a, b] \subset \mathbb{R}_+$

$$N((a, b]) = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{(a, b]}(T_n)$$

Come richiamato dal nome, questo processo conta gli eventi che si verificano in un lasso di tempo, in particolare per $t \geq 0$:

$$N(t) = N((0, t])$$

Possiamo ora definire un processo di Poisson omogeneo, il cui nome abbrevieremo con HPP (Homogeneous Poisson Process).

Definizione 1.2.3 (Processo di Poisson omogeneo). Il processo puntuale $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ è un processo di Poisson omogeneo con intensità $\lambda > 0$, se:

- $\forall 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$, le variabili aleatorie $N(t_i, t_{i+1}]$, $i \in [1, k - 1]$, sono indipendenti
- $\forall (a, b] \subset \mathbb{R}_+$, $N(a, b]$ è una variabile di Poisson con media $\lambda(b - a)$, ovvero

$$\mathbb{P}(N(a, b] = k) = e^{-\lambda(b-a)} \frac{(\lambda(b-a))^k}{k!}$$

I processi di Poisson simulano il manifestarsi di eventi che sono indipendenti l'uno dall'altro e che continuano ad accadere nel tempo. Per questa ragione gli HPPs vengono detti *memoryless*.

Nel prossimo teorema mostriamo che il tempo che trascorre tra un evento e l'altro è distribuito esponenzialmente.

Teorema 1.2.1 (HPPs i.i.d. esponenziali). *La sequenza di intereventi $\{S_n\}_{n \geq 1}$ di un HPP $(N(t))_{t \geq 0}$ con intensità $\lambda > 0$, è una famiglia di variabili aleatorie i.i.d con distribuzione esponenziale di parametro λ*

$$\mathbb{P}(S_n \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} \qquad \mathbb{E}[S_n] = \frac{1}{\lambda}$$

Dimostrazione. Sia $T = (T_1, \dots, T_n)$ con $n \geq 1$ fissato e $(T_k)_{k \geq 0}$ il processo puntuale relativo a N . Sia $t = (t_1, \dots, t_n) \in C$ dove $C = \{(t_1, \dots, t_n) \mid 0 < t_1 < \dots < t_n\}$, allora:

$$\begin{aligned} f_T(t) &= f_{T_1}(t_1) \cdots f_{T_n}(t_n) \\ &= \frac{d}{dt_1} F_{T_1}(t_1) \cdots \frac{d}{dt_n} F_{T_n}(t_n) \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{F_{T_i}(t_i + h_i) - F_{T_i}(t_i)}{h_i} \right) \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(t_i < T_i \leq t_i + h_i)}{h_i} \right) \end{aligned}$$

Sfruttando le proprietà di indipendenza otteniamo il limite per h_1, \dots, h_n che tendono a 0 della quantità:

$$\frac{\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{T_i \in (t_i, t_i + h_i]\}\right)}{h_1 \cdots h_n}$$

Riscriviamo $\bigcap_{i=1}^n \{T_i \in (t_1, t_i + h_i]\}$ in termini del processo N e per h_1, \dots, h_n sufficientemente piccoli

$$\begin{aligned} & \bigcap_{i=1}^n \{T_i \in (t_1, t_i + h_i]\} \\ &= \{N(0, t_1] = 0\} \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} \{N(t_i, t_i + h_i] = 1, N(t_i + h_i, t_{i+1}] = 0\} \right) \\ & \quad \cap \{N(t_n, t_n + h_n] = 1\} \end{aligned}$$

Calcoliamone la probabilità sfruttando la proprietà di indipendenza di N :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{T_i \in (t_1, t_i + h_i]\}\right) \\ &= \mathbb{P}(N(0, t_1] = 0) \left(\prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(N(t_i, t_i + h_i] = 1, N(t_i + h_i, t_{i+1}] = 0) \right) \\ & \quad \cdot \mathbb{P}(N(t_n, t_n + h_n] = 1) \end{aligned}$$

Dalla definizione 1.2.3, $N(a, b] \sim \text{Pois}(\lambda(b - a))$

$$\begin{aligned} &= e^{-\lambda t_1} \prod_{i=1}^{n-1} (e^{-\lambda h_i} (\lambda h_i) \cdot e^{-\lambda(t_{i+1} - t_i - h_i)}) (e^{\lambda h_n} \lambda h_n) \\ &= \lambda^n h_1 \cdots h_n e^{-\lambda t_n - \lambda h_n} \end{aligned}$$

Sostituendo e svolgendo il limite otteniamo $f_T(t) = \lambda^n e^{-\lambda t_n} \mathbf{1}_C(t_1, \dots, t_n)$. Sia $S = (S_1, \dots, S_n)$, allora $f_S(s_1, \dots, s_n) = f_T(s_1, s_1 + s_2, \dots, s_1 + \dots + s_n) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda s_i} \mathbf{1}_{\{s_i > 0\}}$, e quindi $\mathbb{P}(S_n \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ \square

Una caratteristica rilevante è il comportamento della somma di HPPs indipendenti.

Teorema 1.2.2 (Somma HPPs indipendenti). *Sia $\{N_i\}_{i \geq 1}$ una famiglia di HPPs indipendenti con rispettive intensità $\{\lambda_i\}_{i \geq 1}$. Allora:*

- N_i e N_j non hanno punti in comune se $i \neq j$
- se $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < \infty$, allora $N(t) = \sum_{i=1}^{\infty} N_i(t)$ è un HPP

Dimostrazione. Osserviamo che $\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[N_i(t)] = (\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i) t < \infty$, in particolare $N(a, b]$ è finito q.c. $\forall (a, b] \subset \mathbb{R}_+$.

Il primo punto della Definizione 1.2.3 è soddisfatto poichè $\{N_i\}_{i \geq 1}$ è una famiglia di HPPs indipendenti. Per il secondo punto:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(N(a, b] = k) &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{\infty} N_i(a, b] = k\right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n N_i(a, b] = k\right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{-(b-a) \sum_{i=1}^n \lambda_i} \cdot \frac{\left((b-a) \sum_{i=1}^n \lambda_i\right)^k}{k!} \right) \\
 &= e^{-\lambda(b-a)} \frac{\left((b-a)\lambda\right)^k}{k!}
 \end{aligned}$$

$N \sim \text{Pois}(\lambda(b-a))$, quindi vale il secondo punto della Definizione 1.2.3 e N è HPP.

Se N è HPP, per la Definizione 1.2.1, N_i e N_j con $i \neq j$ non hanno punti in comune. □

Il prossimo risultato è centrale nella teoria dei processi di Poisson. Viene chiamato teorema di competizione perchè permette di determinare, tra più processi in concorrenza, con che probabilità si ottiene il primo evento dal processo i -esimo, dopo un intervallo di tempo di ampiezza a . Inoltre il seguente teorema sarà utile per noi poichè renderà l'implementazione delle simulazioni più semplice.

Teorema 1.2.3 (Teorema di competizione). *Sia $\{N_i\}_{i \geq 1}$ una famiglia di HPPs indipendenti con rispettive intensità $\{\lambda_i\}_{i \geq 1}$ e chiamiamo $\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$, $N = \sum_{i=1}^{\infty} N_i$. Denotiamo con Z il primo evento di N e J l'indice del HPP responsabile, allora*

$$\mathbb{P}(J = i, Z \geq a) = \mathbb{P}(J = i) \mathbb{P}(Z \geq a) = \frac{\lambda_i}{\lambda} e^{-\lambda a} \quad (1.5)$$

Dimostrazione. Prima dimostriamo il risultato per una somma finita N_1, \dots, N_k . Sia T^i il point process relativo a N_i , $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, $Z_k = \inf(T_1^1, \dots, T_1^k)$ e J_k l'indice tale che $T_1^{J_k} = Z_k$. Definiamo $U = \inf(T_1^1, \dots, \hat{T}_1^i, \dots, T_1^k)$, allora:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(U > x) &= \mathbb{P}(T_1^1 > x, \dots, T_1^{i-1} > x, T_1^{i+1} > x, \dots, T_1^k > x) \\
 &= \prod_{\substack{j \in \{1, \dots, k\} \\ j \neq i}} \mathbb{P}(T_1^j > x)
 \end{aligned}$$

$$= \prod_{\substack{j \in \{1, \dots, k\} \\ j \neq i}} e^{-\lambda_j x}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(J_k = i, Z_k \geq a) &= \mathbb{P}(a \leq T_1^i \leq U) \\ &= \int_a^\infty \mathbb{P}(U > x) \lambda_i e^{-\lambda_i x} dx \\ &= \int_a^\infty \lambda_i e^{-x(\lambda_1 + \dots + \lambda_k)} dx \\ &= \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k} e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_k)a} \end{aligned}$$

Lasciando tendere $a \rightarrow 0$ troviamo $\mathbb{P}(J_k = 1, \Omega) = \mathbb{P}(J_k = 1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k}$, inoltre vale $\mathbb{P}(Z_k \geq a) = \prod_{j=1}^k \mathbb{P}(T_j > x) = e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_k)a}$ pertanto $\{J_k = i\}$ e $\{Z_k \geq a\}$ sono indipendenti. Concludiamo la dimostrazione studiando il caso $k \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(J = i, Z \geq a) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(J_k = i, Z_k \geq a) \\ &= \frac{\lambda_i}{\lambda} e^{-\lambda a} \quad \square \end{aligned}$$

Questo risultato riveste un'importanza cruciale ai fini dei nostri intenti. Nell'introduzione al Voter Model, il teorema darà la possibilità di definire la probabilità del sistema di transitare, in un intervallo di tempo sufficientemente piccolo, da uno stato all'altro. A questo proposito, saremo più interessati al valore di $\mathbb{P}(J = i, Z \in dh)$, pertanto avvalendoci del teorema di competizione vale:

$$\mathbb{P}(Z \leq a) = 1 - e^{-\lambda a} \sim \lambda a$$

quindi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(J = i, Z \in dh) &= \mathbb{P}(J = i) \mathbb{P}(Z \in dh) \\ &= \frac{\lambda_i}{\lambda} \cdot dh \lambda + o(dh) \\ &= \lambda_i \cdot dh + o(dh) \end{aligned}$$

1.3 Dal generatore alla catena di Markov

Consideriamo ora il problema della rappresentazione di una catena di Markov a partire dal generatore. Sia E lo spazio degli stati con $|E| < \infty$, e sia $Q = \{q_{ij}\}_{i,j \in E}$ matrice di numeri reali indicizzata da E tale che, $\forall i, j \in E$ con $i \neq j$:

$$q_{ii} \in (-\infty, 0] \quad q_{ij} \in [0, \infty) \quad \sum_{\substack{j \in E \\ j \neq i}} q_{ij} = -q_{ii}$$

caratteristiche che permettono di chiamare Q generatore. Costruiremo una HMC a tempo continuo $\{X_t\}_{t \geq 0}$ in modo che Q sia il generatore infinitesimale. Supponiamo che al tempo t la catena prenda valore $X_t = i$, poi per ogni stato $j \neq i$ definiamo un processo di Poisson omogeneo $\{N_{ij}(t)\}_{t \geq 0}$ con intensità q_{ij} , creando una famiglia di HPPs indipendenti $\{N_{ij}\}_{j \in E}$. Poniamo i processi in competizione in modo da sfruttare il Teorema di competizione 1.2.3, allora il processo è costruito come segue:

$$X_t = X_n \quad \forall t \in [\tau_n, \tau_{n+1})$$

ed è da questa definizione che prende il nome di *processo di salto*. Supponiamo che $X_t = X_n = i \in E$ con $\tau_n < \infty$, allora:

- se $\tau_{n+1} - \tau_n = \infty$ allora $\sum_{\substack{j \in E \\ j \neq i}} q_{ij} = 0$, ovvero non esistono eventi. La costruzione termina ponendo $X_{n+m} = \ell$ e $\tau_{n+m} = \infty \forall m \geq 1$, dove $\ell \notin E$.
- se $\tau_{n+1} - \tau_n < \infty$ allora $X_{n+1} = j \neq i$ con j l'indice del primo processo a produrre un evento tra quelli in competizione.

Osserviamo che:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = j, \tau_{n+1} - \tau_n > a \mid X_0, \dots, X_n, \tau_1, \dots, \tau_n) \\ = \mathbb{P}(X_{n+1} = j, \tau_{n+1} - \tau_n > a \mid X_n) = e^{-q_i a} \frac{q_{ij}}{q_i} \end{aligned}$$

prima grazie all'ipotesi di Markov e poi al Teorema 1.2.3, dove $q_i = \sum_{\substack{j \in E \\ j \neq i}} q_{ij}$. Verifichiamo che $\{X_t\}_{t \geq 0}$ ammette Q come generatore infinitesimale, mostrando che vale $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{P}_i(X_t = j) = q_{ij}$, con $\mathbb{P}_i(A) = \mathbb{P}(A \mid X_0 = i)$ e $i \neq j$. Notiamo che se $X_t \neq X_0$ necessariamente $t > \tau_1$ e possiamo scrivere:

$$\mathbb{P}_i(X_t = j) = \mathbb{P}_i(\tau_2 \leq t, X_t = j) + \mathbb{P}_i(\tau_2 > t, X_t = j)$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbb{P}_i(\tau_2 \leq t, X_t = j) + \mathbb{P}_i(\tau_2 > t, X_1 = j, \tau_1 < t) \\
 &= \mathbb{P}_i(\tau_2 \leq t, X_t = j) + \mathbb{P}_i(X_1 = j, \tau_1 < t) \\
 &\quad - \mathbb{P}_i(\tau_2 \leq t, X_1 = j, \tau_1 \leq t)
 \end{aligned}$$

Sia $\mathbb{P}_i(\tau_2 \leq t, X_t = j)$ che $\mathbb{P}_i(\tau_2 \leq t, X_1 = j, \tau_1 \leq t)$ sono maggiorati da $\mathbb{P}_i(\tau_2 \leq t)$ che stimiamo come segue:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_i(\tau_2 \leq t) &\leq \mathbb{P}_i(\tau_1 \leq t, \tau_2 - \tau_1 \leq t) \\
 &= \sum_{\substack{k \in E \\ k \neq i}} \mathbb{P}_i(\tau_1 \leq t, X_1 = k, \tau_2 - \tau_1 \leq t) \\
 &= \sum_{\substack{k \in E \\ k \neq i}} (1 - e^{-q_i t}) p_{ik} (1 - e^{-q_k t}) \\
 &= (1 - e^{-q_i t}) \sum_{\substack{k \in E \\ k \neq i}} p_{ik} (1 - e^{-q_k t})
 \end{aligned}$$

Osserviamo che $(1 - e^{-q_i t})$ è $O(t)$ in 0, e il limite per $t \rightarrow 0$ dell'ultima sommatoria è 0, allora:

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}_i(X_t = j)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}_i(X_t = j, \tau_1 \leq t)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - e^{-q_i t})}{t} \frac{q_{ij}}{q_i} = q_{ij}
 \end{aligned}$$

Capitolo 2

Il Voter Model classico

2.1 Definizione del Voter Model classico

Il Voter Model è un modello matematico che, tra le varie applicazioni, viene utilizzato anche nell'ambito sociale per descrivere il processo di diffusione delle opinioni all'interno di una popolazione. Il modello è costituito da un sistema di particelle che interagiscono tra di loro ed evolvono nel tempo. La dinamica varia a seconda della modalità con cui un agente si lascia influenzare.

Per costruire un sistema di particelle interagenti è necessario introdurre alcuni elementi. Definiamo S lo *spazio degli stati locale*, un insieme finito che rappresenta le possibili opinioni che un agente nel modello può assumere, nel nostro caso sarà $S = \{0, 1\}$. Indichiamo con Λ il *reticolo*, un insieme numerabile con la struttura di grafo, che stabilisce una configurazione per la disposizione degli agenti. Denotiamo con S^Λ il classico prodotto cartesiano che chiamiamo *spazio degli stati*, un elemento $x \in S^\Lambda$ è della forma:

$$x = \{x(i)\}_{i \in \Lambda} \quad \text{con} \quad x(i) \in S \quad \forall i \in \Lambda$$

Indichiamo con E l'insieme di archi del grafo e con \mathcal{E} l'insieme di coppie ordinate che corrispondono ad un arco:

$$\mathcal{E} = \{(i, j) \mid \{i, j\} \in E\}$$

In questo modo, per ogni sito i è possibile definire l'insieme dei vicini:

$$\mathcal{N}_i = \{j \in \Lambda \mid (i, j) \in \mathcal{E}\}.$$

Matematicamente, un sistema di particelle interagenti è una HMC a tempo continuo X_t , con spazio degli stati S^Λ . La catena fotografa lo stato del sistema ad ogni tempo t

$$X_t = \{X_t(i)\}_{i \in \Lambda} \quad \text{con} \quad X_t(i) \in S \quad \forall i \in \Lambda$$

Tratteremo il Voter Model con N agenti e spazio degli stati locale $S = \{0, 1\}$, allora la configurazione del Voter Model al tempo t è

$$X_t^N = (X_t^N(1), \dots, X_t^N(N))$$

L'evoluzione temporale di una catena di Markov a tempo continuo è completamente determinata dal suo generatore. Pertanto, di seguito mostriamo quali sono le componenti del generatore G_N , relativo alla catena X_t^N , a cui faremo riferimento con l'appellativo *rates*.

La dinamica del modello è tale che, nell'intervallo infinitesimo $(t, t + h)$, la catena passa da uno stato x ad uno stato x' dove al massimo solo un sito ha cambiato il suo stato locale. Supponiamo $x, x' \in S^\Lambda$ tali che $x' \neq x$ per il solo sito i , ovvero $x'(i) = 1 - x(i)$. Allora la probabilità di transizione della catena $X_t = X_t^N$ è

$$p_{xx'} = \mathbb{P}(X_{t+h} = x' \mid X_t = x) = \mathbb{P}(X_{t+h}(i) = 1 - x(i) \mid X_t(i) = x(i))$$

e a seconda dello stato locale $x(i)$, cambia il valore di $p_{xx'}$ poichè cambia la rate:

$$\begin{aligned} p_{01}^i(h) &= \mathbb{P}(X_{t+h}(i) = 1 \mid X_t(i) = 0) = \left(\frac{1}{|\mathcal{N}_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} X_t(j) \right) h + o(h) \\ p_{10}^i(h) &= \mathbb{P}(X_{t+h}(i) = 0 \mid X_t(i) = 1) = \left(1 - \frac{1}{|\mathcal{N}_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} X_t(j) \right) h + o(h) \end{aligned}$$

Per riallacciarsi alla notazione usata nelle Equazioni (1.1) e (1.2) chiamiamo:

$$q_{01}^i = \frac{1}{|\mathcal{N}_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} X_t(j) \quad q_{10}^i = 1 - \left(\frac{1}{|\mathcal{N}_i|} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} X_t(j) \right) \quad (2.1)$$

Osserviamo che le rates cambiano nel tempo poichè cambia il numero di siti con stato locale 1. In particolare q_{01}^i cresce se più vicini hanno stato locale 1, mentre q_{10}^i decresce.

Come abbiamo già visto nella Definizione 1.1.4, la catena smette di evolvere quando viene raggiunto uno stato assorbente. In questo caso X_t^N ha due stati assorbenti: $z_1 = (0, \dots, 0)$ e $z_2 = (1, \dots, 1)$. A conferma di quanto detto, supponiamo che la catena raggiunga lo stato z_1 , allora vale $q_{01}^i = 0$ per ogni sito i . Pertanto, la probabilità che la catena X_t^N si discosti dallo stato z_1 è uguale a 0 e questo porta alla fine della dinamica. Allo stesso modo, se X_t^N raggiunge lo stato z_2 , avremo $q_{10}^i = 0$ per ogni sito i .

Un'interpretazione del Voter Model, a cui il modello deve il suo nome, è quella in cui ogni sito rappresenta una persona e il relativo stato locale la sua opinione politica. Supponiamo che ad un tempo t lo stato del sistema sia $x \in S^\Lambda$, allora il modello è costruito ed evolve in questo modo:

- Ad ogni sito è associato un processo di Poisson di intensità 1 che entra in competizione con i restanti, supponiamo che a vincere la competizione sia l' i -esimo.
- Tra i vicini di i viene scelto con probabilità uniforme un sito j che influenza l'agente i , ovvero i copia l'opinione di j .

Rimanendo in ambito sociale diciamo che, con intensità 1, un individuo diventa insicuro su quale partito politico votare, dunque chiede consiglio ad uno dei suoi vicini scelto casualmente e copia la sua opinione. Nel caso in cui il grafo sia completo, la scelta di j avviene con probabilità uniforme tra tutti gli agenti del sistema. L'evoluzione termina quando viene raggiunto il consenso, ovvero tutti gli individui votano per lo stesso partito.

Dalla Equazione (1.1) ricordiamo anche che:

$$\begin{aligned} p_{00}^i(h) &= 1 + q_{00}^i h + o(h) & \text{con} & \quad q_{00}^i = -q_{01}^i \\ p_{11}^i(h) &= 1 + q_{11}^i h + o(h) & \text{con} & \quad q_{11}^i = -q_{10}^i \end{aligned}$$

Un sistema di N particelle interagenti, con N finito, può essere complesso da studiare, per questo motivo risulta vantaggioso mettere mano a modelli più semplici che colgano ugualmente le caratteristiche essenziali del sistema. Una strategia efficace, che tratteremo nella prossima sezione, consiste nello studio del limite di campo medio del sistema.

2.2 Limite macroscopico di un sistema di particelle a campo medio

Applicare la teoria di campo medio alla dinamica, consiste nel sostituire il grafo di partenza con un grafo completo a N vertici e analizzare il comportamento a $N \rightarrow \infty$.

In questa sezione ci occupiamo del seguente problema. Supponiamo di essere interessati ad una certa funzione $f(X_t^N)$, funzione del processo di Markov iniziale. Ci chiediamo quando il nuovo processo $f(X_t^N)$ è ancora markoviano e se può essere approssimato da un'equazione differenziale per $N \rightarrow +\infty$. Se la risposta è affermativa, l'equazione differenziale che approssima il processo $f(X_t^N)$ si chiama *limite macroscopico* (o *limite termodinamico*).

2.2.1 Limite macroscopico

Sia $X = (X_t)_{t \geq 0}$ processo di Markov omogeneo con spazio degli stati finito S , generatore infinitesimale G , e semigruppoo $(P(t))_{t \geq 0}$. Sia T un altro insieme finito e sia $f: S \rightarrow T$ una funzione. Per ogni $x \in S$ e $y' \in T$ tale che $f(x) \neq y'$ sia:

$$\mathcal{H}(x, y') = \sum_{x' \in S: f(x')=y'} G(x, x') \quad (2.2)$$

la probabilità con cui il processo $f(X_t)$ salta a y' con stato iniziale $X_t = x$. La prossima proposizione ci permetterà di affermare che se $\mathcal{H}(x, y')$ è funzione solo di $f(x)$ allora il processo $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ con $Y_t = f(X_t)$ è anch'esso catena di Markov. Per essere più chiari nella dimostrazione useremo la notazione $(G(x, y))_{x, y \in S}$ e $(P_t(x, y))_{x, y \in S}$ per indicare elementi di G e P .

Proposizione 2.2.1. *Sia H il generatore di un processo in T , se vale*

$$\mathcal{H}(x, y') = H(f(x), y') \quad x \in S, y' \in T, e f(x) \neq y' \quad (2.3)$$

allora il processo $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ con $Y_t = f(X_t)$ è catena di Markov con generatore infinitesimale H . Viceversa, se per ogni processo X_t, Y è una catena di Markov con generatore infinitesimale H , allora vale (2.3).

Dimostrazione. Supponiamo che $\mathcal{H}(x, y')$ sia definita anche per $f(x) = y'$. Osserviamo che se l'Equazione (2.3) vale $\forall x \in S, y' \in T$ e $f(x) \neq y'$ allora vale

anche per $f(x) = y'$

$$\begin{aligned}
 H(f(x), f(x)) &= - \sum_{y': y' \neq f(x)} H(f(x), y') \\
 &= - \sum_{y': y' \neq f(x)} \mathcal{H}(x, y') \\
 &= - \sum_{y': y' \neq f(x)} \left(\sum_{x': f(x')=y'} G(x, x') \right) \\
 &= - \sum_{x': f(x') \neq f(x)} G(x, x') \\
 &= \sum_{x': f(x')=f(x)} G(x, x') \\
 &= \mathcal{H}(x, f(x))
 \end{aligned}$$

dove abbiamo usato $\sum_{y' \in T} H(f(x), y') = 0$ e $\sum_{x' \in S} G(x, x') = 0$, poichè H e G generatori. Abbiamo così mostrato che l'Equazione (2.3) è equivalente a

$$H(f(x), y') = \sum_{x': f(x')=y'} G(x, x') \quad x \in S, y' \in T \quad (2.4)$$

Ora dimostriamo che l'Equazione (2.4) è equivalente a

$$Q_t(f(x), y') = \sum_{x': f(x')=y'} P_t(x, x') \quad t \geq 0, x \in S, y' \in T \quad (2.5)$$

con Q_t il semigruppato relativo a H e P_t il semigruppato relativo a G . Prima di tutto osserviamo che per ogni funzione $g: T \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 G(g \circ f)(x) &= \sum_{x'} G(x, x') g(f(x)) \\
 &= \sum_{y'} \left(\sum_{x': f(x')=y'} G(x, x') g(y') \right) \\
 &= \sum_{y'} g(y') \left(\sum_{x': f(x')=y'} G(x, x') \right) \\
 &= \sum_{y'} H(f(x), y') g(y') \\
 &= (Hg) \circ f(x)
 \end{aligned}$$

dove ci siamo serviti della Equazione (2.4), ne consegue che l'Equazione (2.4)

è equivalente a

$$G(g \circ f)(x) = (Hg) \circ f(x) \quad g: T \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.6)$$

Usando lo stesso argomento, e sostituendo P_t e Q_t rispettivamente al posto di G e H , possiamo dedurre che l'Equazione (2.5) è equivalente a

$$P_t(g \circ f) = (Q_t g) \circ f \quad t \geq 0, g: T \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.7)$$

Dal Teorema 1.1.1 possiamo scrivere

$$P_t = e^{tG} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tG)^n}{n!} \quad e \quad Q_t = e^{tH} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tH)^n}{n!}$$

Osserviamo che l'Equazione (2.6) implica

$$G^2(g \circ f) = G((Hg) \circ f) = (H^2g) \circ f$$

e similmente per induzione $G^n(g \circ f) = (H^n g) \circ f \quad \forall n \geq 0$. Quindi

$$\begin{aligned} P_t(g \circ f) &= \sum_{x'} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tG)^n}{n!} \right) (x, x') g(f(x')) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(\sum_{x'} G^n(x, x') g(f(x')) \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(\sum_{x'} H^n(f(x), x') g(x') \right) \\ &= (Q_t g) \circ f \end{aligned}$$

Viceversa se vale l'Equazione (2.7) $\forall t \geq 0$ vale anche per $t \rightarrow 0$ e tramite lo sviluppo al primo ordine deduciamo l'Equazione (2.6). Questo completa la dimostrazione che le Equazioni (2.4) e (2.5) sono equivalenti.

Ora supponiamo valga l'Equazione (2.5) allora grazie alla Proposizione 1.1.1

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(Y_0 = y_0, \dots, Y_{t_n} = y_n) \\ &= \sum_{x_0: f(x_0)=y_0} \cdots \sum_{x_{n-1}: f(x_{n-1})=y_n} \mathbb{P}(X_0 = x_0) P_{t_1-t_0}(x_0, x_1) \cdots P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1}, x_n) \\ &= \mathbb{P}(Y_0 = y_0) Q_{t_1-t_0}(y_0, y_1) \cdots Q_{t_n-t_{n-1}}(y_{n-1}, y_n) \end{aligned} \quad (2.8)$$

con $t_n > \dots > t_0 = 0$. Allora Y è una catena di Markov con generatore infinitesimale H . Viceversa se Y è processo di Markov con generatore infinitesimale H per ogni stato iniziale di X , allora $\forall x_0 \in S$, vale l'Equazione (2.8) quando $X_0 = x_0$ e per $n = 1$, da cui vale (2.5) e quindi (2.3). \square

Il nostro prossimo obiettivo è rendere rigorosa l'idea che sotto certe condizioni il processo di Markov $f(X_t)$ approssima la soluzione di un'equazione differenziale per $N \rightarrow \infty$.

Per ogni $N \geq 1$, sia $X^N = (X_t^N)_{t \geq 0}$ una catena di Markov, con spazio degli stati S_N , generatore G_N , e semigruppoo $(P_t^N)_{t \geq 0}$, e siano $f_N: S_N \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni. Definiamo due funzioni α_N e β_N che descrivono rispettivamente la *variazione quadratica* e *drift* (o deriva in italiano) del processo $f(X_t)$:

$$\begin{aligned}\alpha_N &= \alpha = \sum_{x' \in S} G_N(x, x') (f_N(x') - f_N(x))^2 \\ \beta_N &= \beta = \sum_{x' \in S} G_N(x, x') (f_N(x') - f_N(x))\end{aligned}$$

Assumiamo che le funzioni f_N prendano valori in un intervallo chiuso $I \subset \mathbb{R}$, con $I_- = \inf I$ e $I_+ = \sup I$, dove I_- e I_+ possono essere finiti o infiniti. Supponiamo che esista una funzione di Lipshitz $b: I \rightarrow \mathbb{R}$ tale che β_N sia uniformemente approssimata da $b \circ f_N$:

$$\sup_{x \in S_N} |\beta_N(x) - b(f_N(x))| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

Supponiamo inoltre che:

$$I_- > -\infty \Rightarrow b(I_-) \geq 0 \quad \text{e} \quad I_+ < \infty \Rightarrow b(I_+) \leq 0$$

Alla luce di questi presupposti, l'equazione differenziale

$$\frac{\partial}{\partial t} y_t = b(y_t) \quad t \geq 0$$

ha un'unica soluzione y_t a valori in I per ogni valore iniziale $y_0 \in I$. A questo punto possiamo proseguire con il seguente teorema.

Teorema 2.2.1 (Equazione differenziale limite). *In aggiunta alle ipotesi fatte sopra, supponiamo che $f_N(X_0^N)$ converga in probabilità a y_0 e che*

$$\sup_{x \in S_N} \alpha_N(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

Allora, per ogni $T < \infty$ e $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|f_N(X_t^N) - y_t| \leq \varepsilon \forall t \in [0, T]) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1$$

La dimostrazione del teorema è abbastanza lunga e non la vedremo, per un approfondimento consultare [4].

Nella prossima sottosezione applichiamo i concetti e la teoria appena visti al Voter Model. Applicheremo il teorema considerando $f_N(X_t^N)$ il processo che ad ogni tempo t determina la frazione di siti con stato locale 1.

2.2.2 Limite di campo medio del Voter Model classico

Sia $(X_t^N)_{t \geq 0}$ un processo di Markov che descrive il Voter Model, con $\Lambda = \Lambda_N$ grafo completo composto da N vertici, S^Λ lo spazio degli stati e G_N il generatore infinitesimale. Definiamo

$$\bar{X}_t = \bar{X}_t^N = \frac{1}{N} \sum_{i \in \Lambda} X_t^N(i)$$

il processo che determina ad ogni t la frazione di siti con stato locale 1, e sia $f: S^\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che $f(x) = \frac{1}{N} \sum_{i \in \Lambda} x(i)$.

La struttura di grafo completo permette ad ogni sito di essere il vicino di qualsiasi altro agente del modello, $i \in \mathcal{N}_j \forall i, j \in \Lambda$ e $i \neq j$, per questo motivo vanno aggiornate le Equazioni (2.1), che diventano:

$$q_{01} = \frac{1}{N} \sum_{i \in \Lambda} X_t^N(i) = f(X_t^N) \quad q_{10} = 1 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i \in \Lambda} X_t^N(i) \right) = 1 - f(X_t^N)$$

mentre $q_{00} = -q_{01}$ e $q_{11} = -q_{10}$.

Sia x una configurazione all'istante di tempo t , $x = X_t^N$ con $x \in S^\Lambda$, e sia $y = f(x) + \frac{1}{N}$, calcoliamo le rates del processo $f(X_t^N)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, y) &= \sum_{x' \in S^\Lambda: f(x')=y} G_N(x, x') \\ &= \sum_{x' \in S^\Lambda: f(x')=y} f(x) \\ &= N(1 - f(x))f(x) \end{aligned}$$

Osserviamo che $N(1 - f(x))f(x)$ dipende solo da $f(x)$, possiamo scrivere $\mathcal{H}(x, y) = H_N(f(x), y)$, quindi $f(X_t^N)$ è processo di Markov grazie alla Propo-

sizione 2.2.1.

Sia ora $y = f(x) - \frac{1}{N}$, con un ragionamento identico troviamo

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(x, y) &= \sum_{x' \in S^\Lambda: f(x')=y} G_N(x, x') \\ &= \sum_{x' \in S^\Lambda: f(x')=y} 1 - f(x) \\ &= N(1 - f(x))f(x)\end{aligned}$$

Osserviamo che il processo $f(X_t^N)$ cresce e decresce di $\frac{1}{N}$ con la stessa probabilità. Intuitivamente, all'aumentare del numero di siti con stato locale 1, cresce $f(x)$ ma decresce il numero di siti con opinione differente. Allo stesso modo, se cresce il numero di siti con stato locale 0, cresce $1 - f(x)$ ma decresce il numero di siti con opinione 1.

Definiamo $\bar{S} = \bar{S}^\Lambda$ lo spazio degli stati di \bar{X}_t , ora disponiamo del necessario per determinare α_N e β_N

$$\begin{aligned}\alpha_N(y) &= \sum_{y' \in \bar{S}} H_N(y, y')(y' - y)^2 \\ &= \sum_{y' \in \bar{S}: y'=y+\frac{1}{N}} H_N(y, y')(y' - y)^2 + \sum_{y' \in \bar{S}: y'=y-\frac{1}{N}} H_N(y, y')(y' - y)^2 \\ &= N(1 - y)y\left(\frac{1}{N}\right)^2 + N(1 - y)y\left(-\frac{1}{N}\right)^2 \\ &= \frac{2(1 - y)y}{N}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_N(y) &= \sum_{y' \in \bar{S}} H_N(y, y')(y' - y) \\ &= \sum_{y' \in \bar{S}: y'=y+\frac{1}{N}} H_N(y, y')(y' - y) + \sum_{y' \in \bar{S}: y'=y-\frac{1}{N}} H_N(y, y')(y' - y) \\ &= N(1 - y)y\left(\frac{1}{N}\right) + N(1 - y)y\left(-\frac{1}{N}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

Osserviamo che valgono tutte le ipotesi del Teorema 2.2.1

- $\beta_N(y) \equiv 0$ allora $b \circ f_N$ approssima uniformemente β_N se $b \equiv 0$
- $\sup_{y \in \bar{S}^\Lambda} \frac{2(1-y)y}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$

Inoltre l'equazione differenziale

$$\frac{\partial}{\partial t} y_t = b(y_t) = 0 \quad t \geq 0 \quad (2.9)$$

ha un'unica soluzione per ogni condizione iniziale y_0 . Allora, per ogni $T < \infty$ e $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_t - y_t| \leq \varepsilon, \forall t \in [0, T]) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1$$

Il teorema ci suggerisce che, per $N \gg 1$ grande finito e un intervallo di tempo finito $[0, T]$, il sistema venga ben approssimato dalla Equazione differenziale (2.9). Pertanto deduciamo che, nel caso del Voter Model classico, il numero di siti con stato locale 1 e il numero di siti con stato locale 0 rimangono costanti nel tempo purchè N sia abbastanza grande e T finito. Nel caso di un intervallo di tempo arbitrariamente grande quanto appena detto non è più valido poichè inevitabilmente il sistema viene assorbito in uno dei suoi stati assorbenti. Dunque acquista interesse studiare il tempo di assorbimento del sistema, ovvero quanto tempo occorre al sistema per raggiungere uno dei due stati assorbenti.

Chiamiamo T_N il tempo di assorbimento relativo al modello con N vertici. Mediante simulazioni si può rilevare l'esistenza di una relazione lineare tra N e T_N , in particolare $\langle T_N \rangle \sim N \ln 2$, come illustrato nella Figura 2.1. Dove con $\langle \cdot \rangle$ facciamo riferimento alla media empirica.

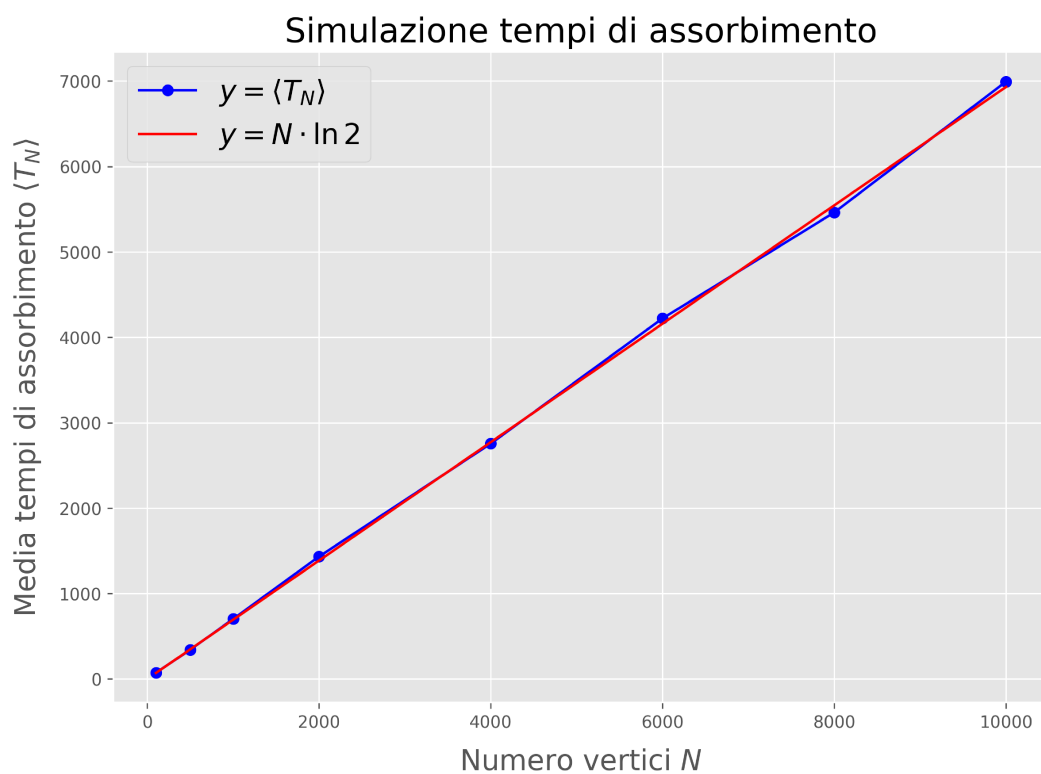


Figura 2.1: In blu la media dei tempi di assorbimento. L'andamento può essere sovrapposto alla funzione $y = N \ln 2$, in rosso.

2.2. LIMITE MACROSCOPICO DI UN SISTEMA DI PARTICELLE A CAMPO MEDIO

Capitolo 3

Il Voter Model con disordine

Basta apportare una minima modifica al Voter Model classico per migliorare il realismo del modello e complicarne l'analisi. L'eterogeneità nelle ideologie di un gruppo di persone e la combattività che un individuo esercita nel preservare una propria opinione giocano un ruolo importante nel plasmare le dinamiche globali di un sistema complesso. Per esempio, la diffusione di una nuova prospettiva ideologica in un diverso gruppo di persone può essere altamente condizionata dal contesto socio-politico presente, pertanto opinioni diverse possono propagarsi in modo differente.

Matematicamente, questo può essere emulato mediante un Voter Model con disordine casuale esterno congelato.

3.1 Introduzione del disordine

In questa sezione introduciamo una versione del Voter Model con disordine sito dipendente, sottolineando le differenze con quello studiato in precedenza. Sia $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_N)$ il vettore che denota lo stato del sistema e sia:

$$X_t^N = (X_t^N(1), \dots, X_t^N(N))$$

la catena di Markov a tempo continuo che ne descrive l'evoluzione. Poichè ci dedicheremo ad un modello a campo medio, il reticolo Λ sarà un insieme numerabile con la struttura di grafo completo e per semplicità indicheremo lo spazio degli stati $S^\Lambda = \{0, 1\}^N$. Per inserire disordine nel sistema definiamo un ambiente aleatorio, siano N variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite h_1, \dots, h_N , con $h_i \sim \text{Be}(q) \forall i \in \{1 \dots, N\}$, dove $q \in [0, 1]$.

Senza perdita di generalità supponiamo d'ora in poi $q \geq \frac{1}{2}$. Fissato l'ambiente aleatorio, la catena di Markov X_t^N evolve con generatore L_N . Sebbene grazie alla Definizione 1.1.5, abbiamo già compreso il suo ruolo, sarà utile considerare L_N da un punto di vista differente. Il generatore può essere descritto come un operatore che agisce su funzioni $f: S^\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$. Nel caso del Voter Model con disordine, L_N agisce su $f: \{0, 1\}^N \rightarrow \mathbb{R}$ mediante:

$$L_N f(\eta) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{h_i=\eta_j} (f(\eta^{j \rightarrow i}) - f(\eta)) + \rho \mathbf{1}_{h_i \neq \eta_j} (f(\eta^{j \rightarrow i}) - f(\eta)) \right)$$

Dove con $\eta^{j \rightarrow i}$ facciamo riferimento allo stato η in cui η_j ha rimpiazzato η_i . La dinamica del modello è tale che, nell'intervallo infinitesimo $(t, t+h)$, la catena passa da uno stato η ad uno stato η' dove al massimo solo un sito ha cambiato il suo stato locale. Sia $\eta' \neq \eta$ per il solo sito i , ovvero $\eta'_i = 1 - \eta_i$, allora la probabilità di transizione della catena $X_t = X_t^N$ è

$$p_{\eta\eta'} = \mathbb{P}(X_{t+h} = \eta' \mid X_t = \eta) = \mathbb{P}(X_{t+h}(i) = 1 - \eta_i \mid X_t(i) = \eta_i)$$

e dipende dai valori h_i e η_i . Sia $f(\eta) = \sum_{i=1}^N \eta_i$, allora

- se $h_i = \eta_i$

$$\begin{aligned} p_{01}^i(h) &= \mathbb{P}(X_{t+h}(i) = 1 \mid X_t(i) = 0) = \rho f(\eta)h + o(h) \\ p_{10}^i(h) &= \mathbb{P}(X_{t+h}(i) = 0 \mid X_t(i) = 1) = \rho(1 - f(\eta))h + o(h) \end{aligned}$$

- se $h_i \neq \eta_i$

$$\begin{aligned} p_{01}^i(h) &= \mathbb{P}(X_{t+h}(i) = 1 \mid X_t(i) = 0) = f(\eta)h + o(h) \\ p_{10}^i(h) &= \mathbb{P}(X_{t+h}(i) = 0 \mid X_t(i) = 1) = (1 - f(\eta))h + o(h) \end{aligned}$$

Anche in questo caso le rates del processo cambiano nel tempo poichè cambia il numero di siti con stato locale 1. Inoltre, se $h_i \neq \eta_i$ le rates sono le stesse del Voter Model classico a campo medio, mentre se $h_i = \eta_i$ le rates sono ridimensionate di un fattore ρ . Anche in questo caso la catena ha due stati assorbenti: $\eta = (0, \dots, 0)$ e $\eta = (1, \dots, 1)$.

Per comprendere in modo più chiaro lo sviluppo del modello è utile dare uno sguardo alla sua interpretazione in ambito sociale. Supponiamo che ogni sito rappresenti una persona e il relativo stato locale la sua opinione politica. Come

nel Voter Model classico, anche qui ad ogni sito è associato un processo di Poisson. Con intensità 1, un individuo i diventa insicuro su quale partito politico votare, dunque chiede consiglio ad uno dei suoi vicini, scelto con probabilità uniforme. A questo punto entra in gioco il disordine generato dall'ambiente aleatorio h_1, \dots, h_N :

- Se $\eta_j = h_i$ allora il sito i aggiorna il suo stato da η_i a η_j
- Se $\eta_j \neq h_i$ allora i aggiorna il suo stato da η_i a η_j con probabilità ρ , mentre mantiene η_i con probabilità $1 - \rho$.

In questo modo, un sito i si dimostrerà restio ad accettare l'influenza da parte di siti j che hanno stato locale diverso da h_i . Rimanendo in ambito sociale, potremmo dire che il contesto socio-politico in cui vive l'individuo i lo porta a preferire una certa opinione.

Nella prossima sezione ci dedichiamo allo studio del modello analizzando da quali parametri è caratterizzato.

3.2 Parametri d'ordine del Voter Model con disordine

Osserviamo che se $\rho = 1$ otteniamo il Voter Model standard, in questo caso l'ambiente aleatorio non influisce sul sistema e l'unico parametro rilevante è $f(\eta)$ che evolve come una passeggiata aleatoria in $\{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, 1\}$.

Consideriamo ora il caso generale in cui $\rho \leq 1$. Qui il sistema è descritto in termini di due parametri d'ordine a valori interi $\sum_{i=1}^N h_i \eta_i$ e $\sum_{i=1}^N (1 - h_i) \eta_i$ che scaliamo e ridefiniamo come segue:

$$m_+^N = m_+^N(\eta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i \eta_i$$

$$m_-^N = m_-^N(\eta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (1 - h_i) \eta_i$$

Poniamo l'attenzione sugli oggetti appena definiti attraverso alcune osservazioni. Notiamo che, poichè $m_+^N + m_-^N = \sum_{i=1}^N \eta_i$, allora $(m_+^N, m_-^N) \in \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x + y \leq 1\}$. Tuttavia se consideriamo il limite per $N \rightarrow +\infty$, vale:

$$m_+^N \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i \xrightarrow{N \rightarrow \infty} q \tag{3.1}$$

$$m_-^N \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (1 - h_i) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1 - q \quad (3.2)$$

dove nell'ultimo passaggio ci siamo serviti della legge dei grandi numeri. Questo ci permette di dire che $\lim_{N \rightarrow +\infty} (m_+^N, m_-^N) \in [0, q] \times [0, 1 - q]$.

Siamo interessati all'evoluzione di questi due parametri che rappresentano il sistema, indicheremo con $m_{\pm}^N(t) = (m_+^N(t), m_-^N(t))$ il valore al tempo t di m_{\pm}^N . Ridefiniamo $f: [0, 1]^N \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$f(\eta) = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i \eta_i, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (1 - h_i) \eta_i \right) \quad (3.3)$$

con h_1, \dots, h_N l'ambiente aleatorio dato inizialmente. Allora

$$m_{\pm}^N(t) = f(X_t^N) = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i X_t^N(i), \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (1 - h_i) X_t^N(i) \right)$$

Sia $\eta \in [0, 1]^N$ una configurazione iniziale tale che $f(\eta) = (x, y)$ e siano $z_{1,2} = (x \pm \frac{1}{N}, y)$ e $z_{3,4} = (x, y \pm \frac{1}{N})$ allora possiamo determinare le rates di $f(X_t^N)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\eta, z_1) &= \sum_{\eta' \in [0,1]^N: f(\eta')=z_1} L_N(\eta, \eta') \\ &= \sum_{\eta' \in [0,1]^N: f(\eta')=z_1} x + y = N(q - x)(x + y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\eta, z_2) &= \sum_{\eta' \in [0,1]^N: f(\eta')=z_2} L_N(\eta, \eta') \\ &= \sum_{\eta' \in [0,1]^N: f(\eta')=z_2} \rho(1 - x - y) = Nx\rho(1 - x - y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\eta, z_3) &= \sum_{\eta' \in [0,1]^N: f(\eta')=z_3} L_N(\eta, \eta') \\ &= \sum_{\eta' \in [0,1]^N: f(\eta')=z_3} \rho(x + y) = N(1 - q - y)\rho(x + y) \end{aligned}$$

$$\mathcal{H}(\eta, z_4) = \sum_{\eta' \in [0,1]^N: f(\eta')=z_4} L_N(\eta, \eta')$$

$$= \sum_{\eta' \in [0,1]^N: f(\eta')=z_4} (1-x-y) = Ny(1-x-y)$$

Notiamo che $\mathcal{H}(\eta, z_i)$ sono indipendenti da η e dipendono solo da $f(\eta)$, allora grazie alla Proposizione 2.2.1 deduciamo che $m_{\pm}^N(t)$ è processo di Markov e possiamo scrivere $\mathcal{H}(\eta, z_i) = M_N(f(\eta), z_i)$, con M_N il generatore di $m_{\pm}^N(t)$. Disponiamo delle nozioni necessarie per formalizzare un teorema utile per il sistema a grandezza infinita.

3.3 Limite macroscopico

In questa sezione, per lo studio del limite macroscopico, usiamo un approccio diverso noto con il nome di *convergenza dei generatori*.

Sia μ_N la distribuzione di $\eta(0)$, configurazione iniziale del modello.

Teorema 3.3.1 (Limite macroscopico). *Supponiamo esista una coppia non aleatoria $(\bar{m}_+, \bar{m}_-) \in [0, q] \times [0, 1 - q]$ tale che $\forall \varepsilon > 0$*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N(|m_{\pm}^N(0) - \bar{m}_{\pm}| > \varepsilon) = 0$$

allora il processo stocastico $(m_+(t), m_-(t))_{t \geq 0}$ converge in distribuzione all'unica soluzione del seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} m_+ = -\rho m_+(1 - m_- - m_+) + (q - m_+)(m_+ + m_-) \\ \frac{d}{dt} m_- = -m_-(1 - m_- - m_+) + \rho(1 - q - m_-)(m_+ + m_-) \\ m_{\pm}(0) = \bar{m}_{\pm} \end{cases} \quad (3.4)$$

Dimostrazione. Mostriamo una traccia della dimostrazione che è presente nell'articolo [1].

Indichiamo con M il generatore del semigruppato associato all'evoluzione deterministica di m_{\pm} stabilita dal Sistema di equazioni (3.4). Allora M agisce su una funzione $g: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mediante:

$$Mg(m_+, m_-) = V_+(m_+, m_-) \frac{\partial g}{\partial m_+} + V_-(m_+, m_-) \frac{\partial g}{\partial m_-}$$

con

$$V_+(m_+, m_-) = -\rho m_+(1 - m_- - m_+) + (q - m_+)(m_+ + m_-)$$

$$V_-(m_+, m_-) = -m_-(1 - m_- - m_+) + \rho(1 - q - m_-)(m_+ + m_-)$$

Ricordando che $f: [0, 1]^N \rightarrow \mathbb{R}^2$ è la funzione definita nella Equazione (3.3), per semplicità chiamiamo $h = g \circ f$, $x = m_+$ e $y = m_-$ allora vale:

$$\begin{aligned} L_N h(\eta) &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{h_i=\eta_j} (h(\eta^{j \rightarrow i}) - h(\eta)) + \rho \mathbf{1}_{h_i \neq \eta_j} (h(\eta^{j \rightarrow i}) - h(\eta)) \right) \\ &= \sum_{\substack{i:\eta_i=0 \\ h_i=1}} (x+y) \left(g\left(x + \frac{1}{N}, y\right) - g(x, y) \right) \\ &\quad + \sum_{\substack{i:\eta_i=1 \\ h_i=1}} \rho(1-x-y) \left(g\left(x - \frac{1}{N}, y\right) - g(x, y) \right) \\ &\quad + \sum_{\substack{i:\eta_i=0 \\ h_i=0}} \rho(x+y) \left(g\left(x, y + \frac{1}{N}\right) - g(x, y) \right) \\ &\quad + \sum_{\substack{i:\eta_i=0 \\ h_i=0}} (1-x-y) \left(g\left(x, y - \frac{1}{N}\right) - g(x, y) \right) \\ &= N(q-x)(x+y) \left(g\left(x + \frac{1}{N}, y\right) - g(x, y) \right) \\ &\quad + Nx\rho(1-x-y) \left(g\left(x - \frac{1}{N}, y\right) - g(x, y) \right) \\ &\quad + N(1-q-y)\rho(x+y) \left(g\left(x, y + \frac{1}{N}\right) - g(x, y) \right) \\ &\quad + Ny(1-x-y) \left(g\left(x, y - \frac{1}{N}\right) - g(x, y) \right) \\ &= M_N g(f(\eta)) = M_N g(m_+, m_-) \end{aligned}$$

Inoltre se g è derivabile con derivate limitate allora:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_{(m_+, m_-) \in [0, 1]^2} |M_N g(m_+, m_-) - M g(m_+, m_-)| = 0$$

La conclusione segue grazie ad un risultato sulla convergenza dei processi di Markov, che si può consultare in [3]. \square

Il teorema quantifica l'evoluzione deterministica di m_+ e m_- portando al limite la dinamica descritta dal generatore L_N .

3.3.1 Dinamica macroscopica

Analizziamo il Sistema di Equazioni differenziali (3.4) presentato nel Teorema 3.3.1, ricaveremo gli equilibri studiandone la stabilità in modo da approfondire la dinamica globale del modello a dimensione infinita. Prima di tutto osserviamo che se $\rho = 1$ otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x = \frac{y-x}{2} \\ \frac{d}{dt}y = -\frac{y-x}{2} \end{cases} \quad (3.5)$$

dove $q = \frac{1}{2}$ è fissato poichè ininfluente.

In tal caso il disordine non incide sulla dinamica e l'unica variabile rilevante è $m = m_+ + m_-$. Coerentemente con quanto detto nel capitolo precedente, notiamo che m soddisfa l'equazione $\frac{d}{dt}m = 0$ che descrive l'evoluzione a livello macroscopico del Voter Model standard.

Sia $W = (x - y)^2$, allora il teorema differenziale di Lyapunov ci garantisce che ogni punto della retta $y = x$ è un punto di equilibrio stabile. In particolare W è definita positiva in ogni intorno U di (x, x) tale che $x \geq 0$ e la derivata di Lie è $\nabla W \cdot F(x, y) \leq 0$, dove $F(x, y)$ è il campo vettoriale del Sistema di Equazioni (3.5). Di conseguenza, qualsiasi sia il valore iniziale $(m_+(0), m_-(0))$ il sistema tenderà a raggiungere un punto di equilibrio seguendo le linee del campo vettoriale F .

Sia ora più in generale $\rho < 1$, allora il sistema ha tre punti di equilibrio:

1. $(m_+, m_-) = (0, 0)$, caso in cui $\eta_i = 0 \forall i \in \{1, \dots, N\}$
2. $(m_+, m_-) = (q, 1 - q)$ caso in cui $\eta_i = 1 \forall i \in \{1, \dots, N\}$
3. $(m_+, m_-) = \left(\frac{q(1+\rho)-\rho}{1-\rho^2}, \rho \frac{q(1+\rho)-\rho}{1-\rho^2}\right)$

Prima di proseguire con l'analisi determiniamo per quali valori di ρ esiste il terzo equilibrio. Dalle Disuguaglianze (3.1) e (3.2) deve valere $\left(\frac{q(1+\rho)-\rho}{1-\rho^2}, \rho \frac{q(1+\rho)-\rho}{1-\rho^2}\right) \in [0, q] \times [0, 1 - q]$ che si verifica se:

$$\rho < \frac{1 - q}{q}$$

Per lo studio della stabilità dei tre equilibri ci affideremo al metodo spettrale (o primo metodo di Lyapunov) esaminando le caratteristiche della matrice del sistema linearizzato. Sia F il campo vettoriale del Sistema (3.4), sia $\bar{z} = \bar{m}_\pm$

e sia $z^* = (x^*, y^*)$ un equilibrio, allora il sistema linearizzato è:

$$\begin{cases} \dot{z} = F'(z^*)(z - z^*) \\ z(0) = \bar{z} \end{cases}$$

con

$$F'(z) = \begin{pmatrix} 2x(\rho - 1) + y(\rho - 1) + q - \rho & x(\rho - 1) + q \\ y(1 - \rho) + \rho(1 - q) & 2y(1 - \rho) + x(1 - \rho) + \rho - \rho q - 1 \end{pmatrix}$$

la matrice Jacobiana di $F(x, y)$. Nel caso specifico $z^* = (0, 0)$:

$$F'(z^*) = \begin{pmatrix} q - \rho & q \\ \rho(1 - q) & \rho - \rho q - 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{tr}(F'(z^*)) = q(1 - \rho) - 1 < 0$$

$$\det(F'(z^*)) = \rho^2(q - 1) + \rho - q < 0 \quad \text{se } \rho < 1$$

per tanto $F'(0, 0)$ ha due autovalori discordi $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$, allora grazie al metodo spettrale $(0, 0)$ è instabile $\forall \rho < 1$.

Sia ora $z^* = (q, 1 - q)$:

$$F'(z^*) = \begin{pmatrix} q\rho - 1 & \rho q \\ 1 - q & 1 - \rho - q \end{pmatrix}$$

$$\text{tr}(F'(z^*)) = q(\rho - 1) - \rho < 0$$

$$\det(F'(z^*)) = -q\rho^2 + \rho + q - 1$$

quindi:

$$\det(F'(z^*)) > 0 \quad \text{se } \frac{1 - q}{q} < \rho < 1$$

$$\det(F'(z^*)) < 0 \quad \text{se } \rho < \frac{1 - q}{q}$$

Se $\frac{1 - q}{q} < \rho < 1$ la matrice $F'(z^*)$ ha due autovalori concordi $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$, allora il metodo spettrale ci garantisce la stabilità di $(q, 1 - q)$. Mentre se $\rho < \frac{1 - q}{q}$ la matrice $F'(z^*)$ ha due autovalori discordi $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$ e

l'equilibrio $(q, 1 - q)$ è instabile.

Infine analizziamo l'ultimo equilibrio, sia $z^* = (\frac{q(1+\rho)-\rho}{1-\rho^2}, \rho \frac{q(1+\rho)-\rho}{1-\rho^2})$

$$F'(z^*) = \frac{1}{1+\rho} \begin{pmatrix} -\rho^2 q + \rho(1-2q) - q & \rho \\ \rho & \rho^2(q-1) + 2\rho q - \rho + q - 1 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che la matrice è simmetrica, pertanto controllare se gli autovalori sono negativi coincide con esaminare la definitezza della matrice. Il primo minore di testa $-\rho^2 q + \rho(1-2q) - q$ è minore di zero per ogni $\rho < 1$, mentre il determinante della matrice ha valore:

$$\det(F'(z^*)) = -(\rho q + q - 1)(\rho q - \rho + q) > 0 \quad \text{se} \quad \rho < \frac{1-q}{q}$$

Allora se il terzo equilibrio esiste, il metodo spettrale ci permette di affermare che è anche stabile.

Per fare chiarezza riassumiamo l'analisi svolta nei seguenti casi:

- se $0 < \rho < \frac{1-q}{q}$ entrambi $(0, 0)$ e $(q, 1 - q)$ sono instabili ed in queste condizioni compare un terzo equilibrio $(\frac{q(1+\rho)-\rho}{1-\rho^2}, \rho \frac{q(1+\rho)-\rho}{1-\rho^2})$ a cui il sistema tende qualsiasi sia la condizione iniziale \bar{m}_\pm eccetto i due equilibri instabili. Per tanto se ρ prende valori abbastanza piccoli gli effetti del disordine aumentano e danno origine ad un nuovo equilibrio.
- se $\frac{1-q}{q} < \rho < 1$ esistono solo gli equilibri $(0, 0)$ e $(q, 1 - q)$. In questo caso il disordine stabilizza l'equilibrio $(q, 1 - q)$, mentre $(0, 0)$ rimane instabile.

3.4 Tempo di assorbimento

La definizione dell'ambiente aleatorio h_1, \dots, h_n ha permesso di dare origine ad un modello in cui in ogni sito è presente una preferenza intrinseca per un dato stato. Matematicamente, questo è possibile grazie alle rates del processo, in quanto sono più piccole per siti i in cui $h_i = \eta_i$. Una delle conseguenze di questo disordine intrinseco, detto anche congelato (o *quenched* in inglese), è la tendenza del sistema alla formazione di stati misti. Ovvero una situazione nella quale gli agenti continuano a influenzarsi reciprocamente senza convergere verso un'unica opinione predominante, di conseguenza diversi agenti con opinioni diverse coesistono all'interno del sistema.

Un argomento interessante, di cui abbiamo già discusso nel caso del Voter Mo-

del classico, è la ricerca di una relazione tra il numero di vertici del sistema N e la media dei tempi di assorbimento $\langle T_N \rangle$. Nel caso del Voter Model classico, tramite una simulazione, abbiamo mostrato che la relazione tra N e $\langle T_N \rangle$ esiste ed è lineare, più in particolare $\langle T_N \rangle \sim N \ln 2$. Il proposito di questa sezione è riscontrare se esiste una relazione nel caso del Voter Model con disordine e in tal caso mostrare il tipo di andamento.

La teoria necessaria per affrontare in modo rigoroso la questione non è banale e non la affronteremo nel presente lavoro. Qui introduciamo un teorema che ci permetterà di dire che l'andamento della media dei tempi di assorbimento nel caso del Voter Model con disordine è esponenziale. Successivamente avvaloremo il risultato tramite una simulazione. Per un approfondimento consultare l'articolo [1].

La tendenza del sistema alla formazione di stati misti induce a ipotizzare che il tempo di assorbimento cresca più velocemente in N , rispetto ad un andamento lineare. Mediante simulazioni si può mostrare che, come afferma il Teorema 3.4.1, se valgono le condizioni di esistenza del terzo equilibrio (3), allora il tempo di assorbimento per il sistema microscopico descritto da m_{\pm}^N cresce esponenzialmente in N . Accenniamo al teorema che ci garantisce questo risultato.

Per semplicità assumiamo $q = \frac{1}{2}$, così il terzo equilibrio esiste $\forall \rho < 1$. Con $\mathbf{x} = (x, y) \in [0, \frac{1}{2}]$ sia:

$$\begin{aligned} l_1(\mathbf{x}) &= \rho x(1 - x - y) \\ r_1(\mathbf{x}) &= \left(\frac{1}{2} - x\right)(x + y) \\ l_2(\mathbf{x}) &= y(1 - x - y) \\ r_2(\mathbf{x}) &= \rho\left(\frac{1}{2} - y\right)(x + y) \end{aligned}$$

Inoltre definiamo il campo vettoriale $b(\mathbf{x}) = (b_1(\mathbf{x}), b_2(\mathbf{x}))$ dove $b_i(\mathbf{x}) = r_i(\mathbf{x}) - l_i(\mathbf{x})$. Sia:

$$V(\mathbf{x}) = \inf\{S_T(\varphi) : T > 0, \varphi(0) = \mathbf{z}, \varphi(T) = \mathbf{x}\}$$

dove $S_T(\varphi)$ è il funzionale azione, \mathbf{z} il terzo equilibrio con $q = \frac{1}{2}$ e $x \in [0, \frac{1}{2}]^2$. Sia $D \subseteq [0, \frac{1}{2}]^2$ un insieme aperto e connesso contenente \mathbf{z} , con bordo ∂D liscio tale che $\partial D \subseteq (0, \frac{1}{2})^2$ e tale che il campo vettoriale $b(\mathbf{x})$ è diretto all'interno di D . Sia τ_N l'istante di tempo nel quale il processo (m_+^N, m_-^N) raggiunge il complementare di D .

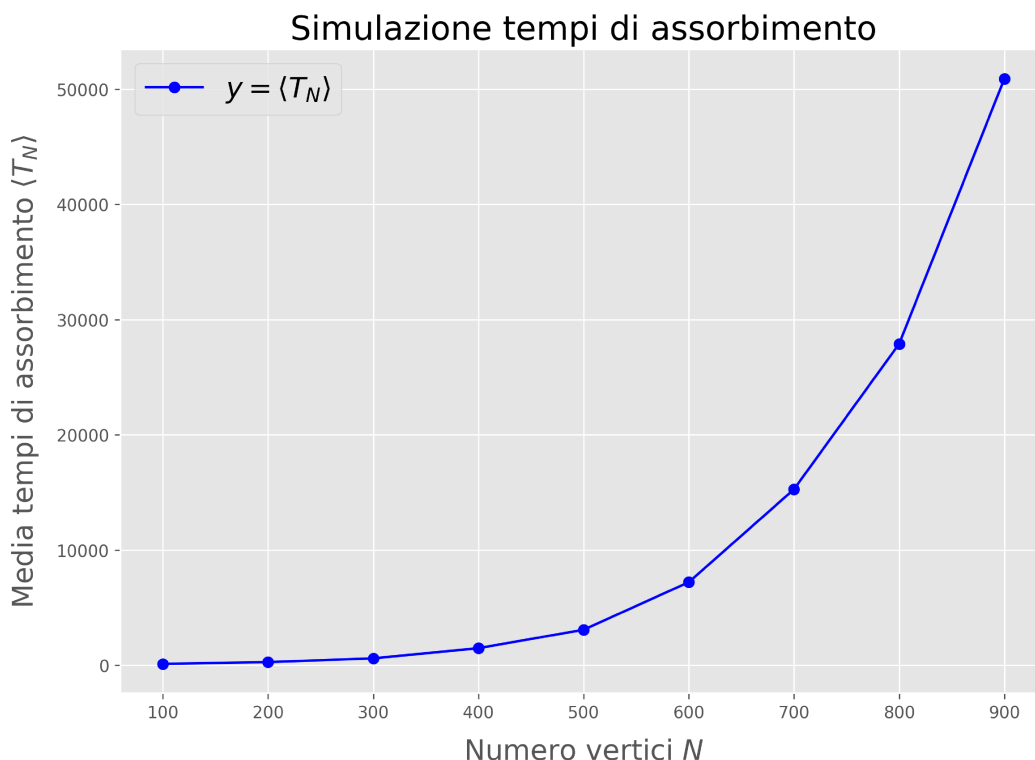


Figura 3.1: L'andamento in un plot semplice è esponenziale.

Assumiamo che, per quasi ogni realizzazione dell'ambiente aleatorio $h = h_1, \dots, h_N$, $(m_+^N(0), m_-^N(0))$ è deterministico e che $(m_+^N(0), m_-^N(0)) \rightarrow \mathbf{x}_h$ con $N \rightarrow +\infty$ per qualche $\mathbf{x}_h \in D$. Allora vale il teorema:

Teorema 3.4.1. *Per ogni $\mathbf{x} \neq \mathbf{z}$ vale $V(\mathbf{x}) > 0$. Inoltre per quasi ogni realizzazione dell'ambiente aleatorio h , $\varepsilon > 0$,*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_h(e^{N(V_{\partial D} - \varepsilon)} \leq \tau_N \leq e^{N(V_{\partial D} + \varepsilon)}) = 1$$

dove,

$$V_{\partial D} = \min\{V(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \partial D\} > 0$$

Concludiamo avvalorando il teorema con una simulazione numerica. Dalla Figura 3.1 è chiaro che l'andamento di $\langle T_N \rangle$ è esponenziale. Un ulteriore conferma giunge dalla Figura 3.2 in cui rappresentiamo gli stessi dati in un grafico semilogaritmico. Notiamo che nella Figura 3.2, coerentemente con quanto detto precedentemente, l'andamento è lineare.

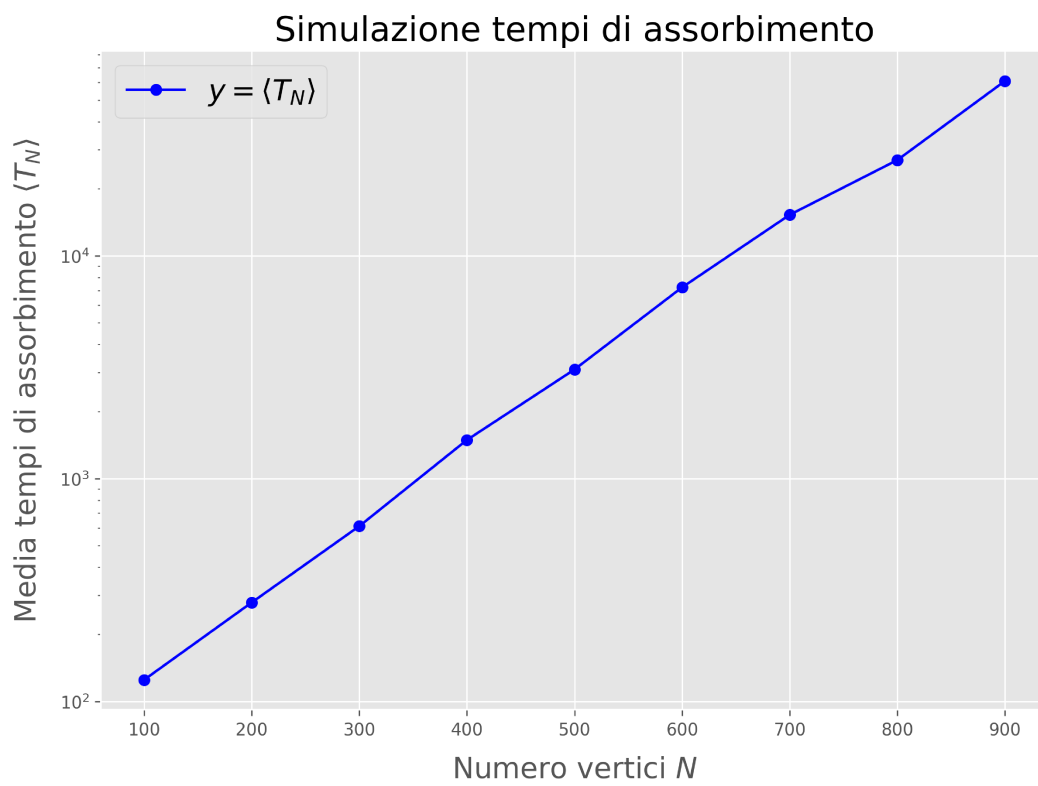


Figura 3.2: L'andamento in un plot semilogaritmico è lineare.

Conclusioni

Nel Capitolo 2 abbiamo analizzato il Voter Model classico e con l'aiuto della teoria di campo medio e il Teorema 2.2.1 abbiamo mostrato che il sistema è ben approssimato dalla Equazione differenziale (2.9), che presenta esclusivamente equilibri neutri. Successivamente mediante una simulazione abbiamo calcolato la media dei tempi di assorbimento $\langle T_N \rangle$ e abbiamo mostrato che l'andamento è lineare in N .

Nel Capitolo 3 abbiamo confrontato il Voter Model classico con il Voter Model con disordine. Inserendo disordine sito dipendente abbiamo ottenuto esiti differenti. Tramite lo studio del Sistema differenziale (3.4) abbiamo compreso che se $0 < \rho < \frac{1-q}{q}$ allora la dinamica ha un equilibrio stabile. In questo caso la media dei tempi di assorbimento $\langle T_N \rangle$ non ha più un andamento lineare in N bensì esponenziale. Questo è dovuto alla tendenza del sistema alla formazione di stati misti, stati in cui agenti con opinioni diverse coesistono all'interno del sistema.

I risultati ottenuti non si limitano a questo caso isolato ma possono essere generalizzati in un metateorema. Se l'equazione macroscopica limite di un Voter Model a cui è stata apportata una modifica, presenta un equilibrio stabile, allora il tempo di assorbimento del sistema è esponenziale.

Appendice A

Codici Python

A.1 Simulazione Voter Model standard

```
import random
import math
N_simu=50    #numero simulazioni
N=[500, 1000, 2000,
4000, 6000, 8000, 10000]    #vettore numero vertici
dt=0.00001    #ampiezza intervallino

def simula_VM(N_simu, N, dt):
    T_N=[[[] for i in range(len(N))]]
    ET_N=[]    #vettore media dei tempi di assorbimento
    for n in N:
        ind=N.index(n)
        #configurazione iniziale
        X_0=tuple([random.randint(0,1) for i in range(n)])
        supp_0=sum(X_0)
        fX_0=supp_0/n
        r0=n*((n-sum(X_0))/n)*((sum(X_0))/n)    #rate iniziale
        for j in range(N_simu):
            supp=supp_0
            r=r0
            k=0
            while supp not in [0,n]:
                z1=random.random()
```

```

        if z1<=r*dt:
            supp=supp+1
            z2=random.random()
            if z2<=r*dt:
                supp=supp-1
            r=n*((n-supp)/n)*(supp/n)
            k=k+1
        #end-while
        T_N[ind].append(round(k*dt,5))
    #end-for
    ET_N.append((1/N_simu)*sum(T_N[ind]))
return (N, ET_N)

```

```
S=simula_VM(N_simu, N, dt)
```

```

import matplotlib.pyplot as plt    #creazione plot
x=S[0]
y=S[1]
plt.figure(figsize=(10,7))
plt.style.use('ggplot')
plt.plot(x,y, marker='o',
         color= 'blue',label=r'$y=\langle T_{N} \rangle$')
Y=[i*math.log(2) for i in x]
plt.plot(x,Y, color= 'red',
         label=r'$y=N \cdot \ln 2$')
ax = plt.gca()
ax.set_xlabel(r'Numero vertici $N$', fontsize=17, labelpad=10)
ax.set_ylabel(r'Media tempi di assorbimento
              $\langle T_{N} \rangle$', fontsize=17, labelpad=10)
ax.set_title('Simulazione tempi di assorbimento', fontsize=20)
plt.legend(fontsize=17)

```

A.2 Simulazione Voter Model con disordine

```

import math
import random

```

```
N_simu=30      #numero simulazioni
N=[100*i for i in range(1,10)]      #vettore numero vertici
q=0.6
rho=0.5
dt=0.0001

def simula_disorderedVM(N_simu, N, q, rho, dt):
    T_N=[[[] for i in range(len(N))]
    ET_N=[]
    for n in N:
        ind=N.index(n)
        #configurazione iniziale
        mu_0=[random.randint(0,1) for i in range(n)]
        H=[]
        for i in range(n):
            z=random.random()
            if z<=q:
                H.append(1)
            else:
                H.append(0)
        for i in range(N_simu):
            sy1=sum([H[i]*mu_0[i] for i in range(n)])      #Nm+
            sy2=sum([(1-H[i])*mu_0[i] for i in range(n)])      #Nm-
            y1=sy1/n      #m+
            y2=sy2/n      #m-
            r1=n*(q-y1)*(y1+y2)
            r2=n*y1*rho*(1-y1-y2)
            r3=n*rho*(1-q-y2)*(y1+y2)
            r4=n*y2*(1-y1-y2)
            r=[r1,r2,r3,r4]
            k=0
            supp=sy1+sy2
            while supp not in [0,n]:
                k+=1
                z1=random.random()
                if z1<=r[0]*dt:
                    sy1+=1
```

```

z2=random.random()
if z2<=r[1]*dt:
    sy1-=1
z3=random.random()
if z3<=r[2]*dt:
    sy2+=1
z4=random.random()
if z4<=r[3]*dt:
    sy2-=1
supp=sy1+sy2
y1=sy1/n    #m+
y2=sy2/n    #m-
r1=n*(q-y1)*(y1+y2)
r2=n*y1*rho*(1-y1-y2)
r3=n*rho*(1-q-y2)*(y1+y2)
r4=n*y2*(1-y1-y2)
r=[r1,r2,r3,r4]
#end-while
T_N[ind].append(round(k*dt,4))
#end-for
ET_N.append((1/N_simu)*sum(T_N[ind]))
return (N, ET_N)

```

```
S=simula_disorderedVM(N_simu, N, q, rho, dt)
```

```

import matplotlib.pyplot as plt    #creazione plot
x=S[0]
y=S[1]
plt.figure(figsize=(10,7))
plt.style.use('ggplot')
plt.plot(x,y, marker='o', color= 'blue',
        label=r'$y=\langle T_{N} \rangle$')
ax = plt.gca()
ax.set_xlabel(r'Numero vertici $N$', fontsize=17, labelpad=10)
ax.set_ylabel(r'Media tempi di assorbimento
        $\langle T_{N} \rangle$', fontsize=17, labelpad=10)
ax.set_title('Simulazione tempi di assorbimento', fontsize=20)

```



```
plt.legend(fontsize=17)

import matplotlib.pyplot as plt    #creazione plot semilogy
x=S[0]
y=S[1]
plt.figure(figsize=(10,7))
plt.style.use('ggplot')
plt.plot(x,y, marker='o', color= 'blue',
         label=r'$y=\langle T_{N} \rangle$')
plt.semilogy()
ax = plt.gca()
ax.set_xlabel(r'Numero vertici $N$', fontsize=17, labelpad=10)
ax.set_ylabel(r'Media tempi di assorbimento
              $\langle T_{N} \rangle$', fontsize=17, labelpad=10)
ax.set_title('Simulazione tempi di assorbimento', fontsize=20)
plt.legend(fontsize=17)
```


Bibliografia

- [1] Claudio Borile et al. «Time to absorption for a heterogeneous neutral competition model». In: *Journal of Statistical Physics* 156 (2014), pp. 119–130.
- [2] Pierre Brémaud. *Markov chains: Gibbs fields, Monte Carlo simulation, and queues*. Vol. 31. Springer Science & Business Media, 2001.
- [3] Stewart N Ethier e Thomas G Kurtz. *Markov processes: characterization and convergence*. John Wiley & Sons, 2009.
- [4] Jan M Swart. «A course in interacting particle systems». In: *arXiv preprint arXiv:1703.10007* (2017).