

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia

Corso di Laurea in Fisica

**DINAMICHE DI ORDER BOOK:
IL MODELLO DI STIGLER**

Relatore: Prof. Amos Maritan

Correlatore: Dott. Marco Formentin

Matricola: 1075568

Laureando: Valeria Secchini

Anno Accademico 2017/2018

Indice

Introduzione	6
1 Order book: statistiche regolari dallo studio di dati empirici	7
1.0.1 Le caratteristiche e i contenuti dell'Order Book	7
1.0.2 I risultati ottenuti dallo studio dei dati empirici	8
2 Il modello di Stigler	13
2.0.1 Il modello di Stigler	13
2.0.2 Formulazione matematica del modello	16
2.0.3 Simulazioni	18
2.0.4 Aggiunta di giocatori strategici	21
Conclusioni	29
Appendice A	31
2.0.5 Parte 1	31
2.0.6 Parte 2	32
2.0.7 Parte 3	34
2.0.8 Parte 4	35
Appendice B	37
2.0.9 Parte 1	37
2.0.10 Parte 2	39
2.0.11 Parte 3	40
Bibliografia	42

Introduzione

Fino alla prima metà del secolo scorso, in economia e finanza si sono sempre utilizzate teorie economiche classiche con lo scopo di “massimizzare” il profitto, cercando di prevedere gli andamenti del mercato. Su esse si è basata, fino a quel momento, la strategia degli azionisti che giocavano in borsa.

Tuttavia, degli esperimenti condotti tra gli anni '60 e gli '80 [5], misero in discussione l'idea di poter giocare davvero con una strategia nel mercato. Si misero a confronto il comportamento di esseri umani e quello di alcuni computer che posizionavano ordini all'interno della borsa. Questi ultimi avevano l'unico limite di non giocare più di quanto avessero, in poche parole di “non contrarre debito”. Per il resto, avrebbero posizionato i loro ordini in maniera completamente random. Il risultato fu che esseri umani e computer ottennero mediamente lo stesso risultato. Fu così che si cominciò a ipotizzare che l'immissione di ordini nel mercato da parte degli azionisti possa essere considerato random, piuttosto che condotto attraverso una specifica strategia. Questo è quello che venne chiamato il fenomeno della *zero-intelligence*.

I modelli per descrivere la borsa che ne seguirono si basarono, quindi, sull'idea di immissioni di ordini indipendenti le una dalle altre. Tali modelli dovevano poi trovare riscontro nei risultati dello studio dell'*Order Book*. Quest'ultimo è un dispositivo elettronico nel quale vengono immagazzinati tutti gli ordini che sono mandati nel mercato, registrati assieme alle loro proprietà: il tipo di ordine (ovvero se si tratta di uno di acquisto o uno di vendita), il prezzo, la quantità, il momento in cui è stato registrato, quello in cui è stato eliminato dall'order book (perché eseguito, ovvero venduto/acquistato, oppure perché cancellato dall'azionista stesso) e vari altri. Grazie allo studio di tutti questi dati empirici immagazzinati, si può ricavare l'andamento della borsa, permettendo un confronto tra questi ultimi e gli andamenti dei dati ricavati dalle simulazioni dei modelli.

Nel lavoro di tesi qui presentato ci baseremo proprio sul fenomeno della zero-intelligence, guardando nello specifico le caratteristiche e i risultati del modello di Stigler, che si basa proprio su tale principio e successivamente ci concentreremo su una variazione apportata a tale modello.

Nel Capitolo 1 vedremo più nel dettaglio le caratteristiche dell'Order book e i risultati più importanti ed utili di quella che è l'analisi degli andamenti di prezzo o tempo degli ordini, ricavati dai dati dei vari mercati [1]. Nel Capitolo 2 analizzeremo nel dettaglio quello che è il Modello di Stigler [6], tra i primi ad aver cercato di riprodurre gli andamenti della borsa attraverso il principio della zero-intelligence. Vedremo che, utilizzando un'immissione random degli ordini, si verrà a creare un'intervallo (detto *finestra competitiva*) di prezzo all'interno del quale gli ordini vengono regolarmente eseguiti a prezzi sempre differenti, mentre all'esterno di esso si accumulano. Lo faremo sia attraverso una formulazione puramente matematica [2], dalla quale ricaveremo anche dei risultati numerici, sia attraverso simulazioni che riprodurranno il modello e che confermeranno i risultati ottenuti nella parte immediatamente precedente. Confronteremo, inoltre, l'andamento del tempo di permanenza degli ordini nel mercato ottenuto dalle simulazioni, con quello che si ricava dallo studio dei dati empirici. Nell'ultima parte del Capitolo 2, invece, introdurremo un aspetto nuovo, che si distacca (in parte) dalla completa zero-intelligence fino a quel momento utilizzata: considereremo che una percentuale degli azionisti (detti *Market Makers* [3]) agisca con una strategia (che non necessariamente massimizza il profitto), ovvero quella di piazzare il proprio ordine nel miglior prezzo di vendita o di acquisto (in analogia con l'ordine che deve inserire). Vedremo che la finestra competitiva si chiuderà, facendo stabilizzare il prezzo. Analizzeremo, di nuovo, l'andamento dei tempi di attesa a percentuali di giocatori strategici crescenti. Nelle Appendici A e B riporteremo, rispettivamente, i dettagli dei passaggi matematici del Capitolo 2 e i programmi utilizzati per le simulazioni.

Capitolo 1

Order book: statistiche regolari dallo studio di dati empirici

In questo capitolo vedremo che tipo di ordini possono essere immessi nell'order book, con quali caratteristiche devono essere registrati e, grazie a queste ultime, quali sono i risultati che si possono ricavare per studiare gli andamenti della borsa, di cui vedremo le caratteristiche principali: la distribuzione dei prezzi, l'andamento dei tempi di attesa e quello delle differenze dei logaritmi dei prezzi, da cui deriva il fenomeno della volatility clustering.

1.0.1 Le caratteristiche e i contenuti dell'Order Book

Se fino agli anni 60/70 del '900 l'acquisto o la vendita di azioni all'interno dei mercati si basava su una rete di intermediari, che permettevano le transazioni dei vari ordini, nella seconda metà del secolo scorso tale compito è stato affidato ad un calcolatore elettronico che viene chiamato order book. Un mercato che basa le transazioni su di esso viene detto "Order-driven market". Come introdotto in precedenza, l'order book raccoglie tutte le informazioni riguardo ogni ordine, tra cui le più importanti sono:

- Segno: tipo di ordine, ovvero se di acquisto o di vendita;
- Prezzo : massimo/minimo a cui si è disposti a comprare/vendere;
- Quantità: "peso" dell'ordine;
- Momento di immissione: momento in cui l'ordine viene registrato nell'order book;
- Momento di esecuzione/cancellazione: momento in cui l'ordine viene eliminato dall'order book perchè acquistato/venduto o cancellato.

1. ORDER BOOK: STATISTICHE REGOLARI DALLO STUDIO DI DATI EMPIRICI

Esso, quindi, contiene ad ogni tempo e in ogni mercato la lista di tutte le transazioni che si potrebbero eseguire. L'evoluzione nel tempo dell'order book fornisce le informazioni utili per permettere di studiare le fluttuazioni del mercato, ovvero l'andamento delle caratteristiche degli ordini precedentemente elencati.

Il miglior prezzo di vendita è il minore tra tutti quelli del suo stesso tipo, il migliore d'acquisto, invece, è quello maggiore. La differenza tra il miglior prezzo di vendita e quello di acquisto viene definito *spread*.

All'interno dell' order book possono essere immessi sostanzialmente tre diversi tipi di ordini:

- **Limit order:** è un ordine con un prezzo specifico che viene piazzato all'interno dell'order book con specificata la quantità e il momento in cui è stato piazzato e vi rimane finché non viene eseguito (perché acquistato o venduto) oppure cancellato;
- **Market order:** è un'ordine che compra/vende al miglior prezzo di vendita/acquisto, ovvero un ordine che viene eseguito immediatamente (se la quantità di ordine immesso non viene del tutto soddisfatta può trasformarsi in limit order);
- **Cancellation order:** è un ordine che ne cancella uno precedentemente immesso.

Gli azionisti che immettono limit orders vengono detti *liquidity providers*, mentre quelli che immettono market orders *liquidity takers*. Tuttavia, con la progressiva deregolamentazione dei mercati, tale distinzione è venuta sempre più a mancare. Anche per i primi due tipi di ordini la divisione non è così netta come precedentemente elencato, nonostante ciò tale schematizzazione risulta comunque utile nello studio degli order book. Chiaramente, ogni mercato ha alcune caratteristiche uniche, tuttavia qui non considereremo casi particolari e ci concentreremo solo su quelle comuni, per non perdere di generalità.

Quando un ordine viene eseguito, il prezzo in cui esso si trova viene stabilito come il *prezzo corrente*. La permanenza dell'ordine all'interno dell'order book è stabilita dall'intervallo di tempo tra il momento di immissione e quello di esecuzione/cancellazione dell'ordine.

1.0.2 I risultati ottenuti dallo studio dei dati empirici

Gli andamenti delle varie caratteristiche degli ordini precedentemente elencate sono ricavati da order book di diversi mercati reali e analizzate [1]. Ne presentiamo le

più importanti, anche se noi ci serviremo solo della distribuzione dei tempi di attesa. Anche se gli andamenti sono spesso simili, a volte si possono riscontrare differenze non trascurabili da una borsa all'altra.

Per esempio, definendo Z_i il prezzo corrente al tempo T_i e $\Delta Z = Z_{i+1} - Z_i$ la differenza di prezzo tra due istanti successivi, dall'analisi dei dati empirici risulta che la distribuzione si può fittare con la distribuzione così espressa:

$$P(\Delta Z) \propto |\Delta Z|^{-1-\alpha}$$

che dipende solo dal parametro α . Tale parametro può variare molto sia da mercato a mercato, sia all'interno della distribuzione. Per ΔZ piccoli, infatti, risulta essere compreso tra $\simeq 0.5$ e $\simeq 2$ (il valore, comunque, risulta abbastanza controverso). Un esempio è riportato nella seguente figura dove l'inteporlazione è stata fatta con $\alpha = 0.5$

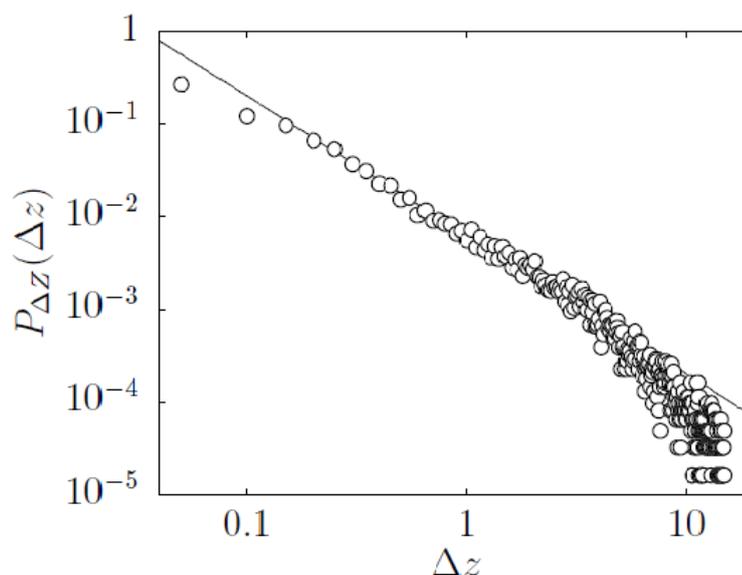


Figura 1.1: Andamento delle differenze di prezzo ΔZ della Borsa di Parigi riguardo le azioni di Telecom nel 2001 [1]. I dati (in figura i pallini) sono fittati con la funzione esponenziale $P(\Delta Z) \propto |\Delta Z|^{-1-\alpha}$ dove $\alpha = 0.5$. Il fit è logaritmico

Per quanto riguarda le code di tale distribuzione (ovvero per cambiamento di prezzo elevati), invece, l'andamento si assottiglia e il valore di α si aggira più tra i valore $\simeq 2.5 - 3.5$, fenomeno che si nota leggermente anche nella figura precedente in cui a ΔZ più elevati la distribuzione decresce più velocemente.

Per quanto riguarda, invece, l'andamento dei tempi di attesa, essa risulta essere più regolare rispetto alla precedente. La distribuzione ha la forma

$$P_{\Delta T}(\Delta t) \propto (\Delta t)^{-1-\eta}$$

Con $\eta \simeq 1.1$ per gli ordini rimossi, mentre $\eta \simeq 0.5$ per quelli eseguiti. In figura riportiamo l'interpolazione dei tempi di attesa dell'esempio esposto precedentemente.

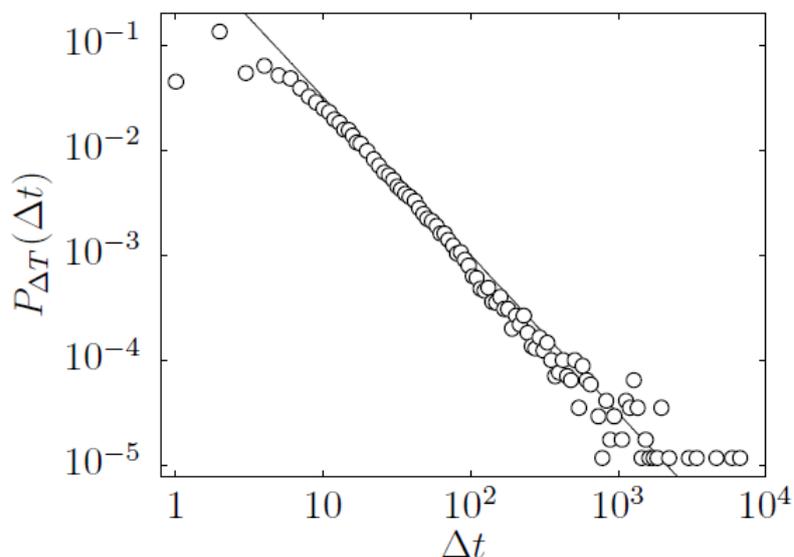


Figura 1.2: Andamento dei tempi di attesa Δt della Borsa di Parigi riguardo la azioni di Telecom nel 2001 [1]. I dati (in figura i pallini) sono fittati con la funzione esponenziale $P_{\Delta T}(\Delta t) \propto (\Delta t)^{-1-\eta}$ con fit logaritmico e $\eta = 0.5$

In questo caso l'interpolazione è stata fatta con $\eta = 0.5$.

Un'altra distribuzione da considerare è quella delle differenze dei guadagni, ovvero $X_t = Y_t - Y_{t-\delta t}$ con $Y_t = \ln Z_t$ al tempo t . Riscalata in funzione di due variabili x e t essa ha la forma

$$P_X(\delta t; x) = (\delta t)^{-H} g(x(\delta t)^{-H})$$

dove H è il parametro di Hurst e anche in questo caso varia sensibilmente da mercato a mercato, anche se, in generale, risulta essere $H \geq \frac{1}{2}$. Si deve presentare,

in ogni caso, un andamento esponenziale

Un'importante quantità legata ai ritorni è la volatilità quadratica

$$\sigma_x^2(\delta t) = \langle (X_t - \langle X_t \rangle)^2 \rangle$$

Anch'essa segue una distribuzione esponenziale, ovvero $\sigma_x(\delta t) \sim (\delta t)^H$ dove H è, nuovamente, l'esponente di Hurst. Per vedere come le fluttuazioni aumentano o diminuiscono nel tempo, utilizziamo la sequenza di volatilità calcolata sull'intervallo di tempo fissato $\Delta t = n\delta t$

$$S_t = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |X_{t-j\delta t}|$$

Osservandone l'andamento, vediamo che non risulta affatto stazionaria, anzi, a periodi di alta/bassa volatilità ne seguono altri con simile variazione. Questo fenomeno, chiamato *volatility clustering*, è ben visibile nella figura successiva

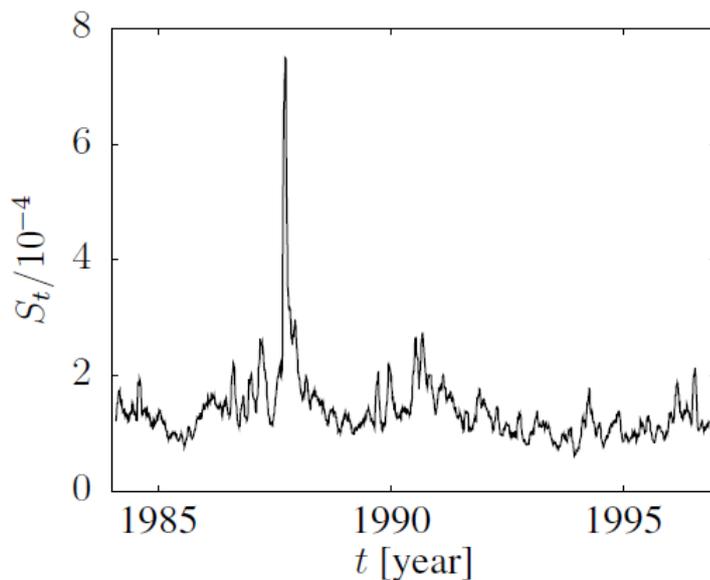


Figura 1.3: Sequenza temporale della volatilità $S_t = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |X_{t-j\delta t}|$ delle azioni di S&P 500 index [1] calcolato per $\Delta T = 8190min(\sim 1mese)$. Si nota come alle variazioni di volatilità, ne seguano altre della stessa entità, fenomeno chiamato della *volatility clustering*. Il picco elevato è relativo al crash dell'Ottobre del 1987

Ma dallo studio della sequenza di volatilità otteniamo anche un'altra interessante informazione. Scaliamo la funzione di volatilità dividendo ogni singolo valore

per la media della volatilità all'interno della giornata. La sequenza della volatilità riscalata sarà \overline{S}_t . Definiamo il tempo \overline{T}_i quello in cui questa raggiunge la soglia fissata \overline{s}_f , ottenendo i tempi di attesa $\overline{\Delta T}_t = \overline{T}_i - \overline{T}_{i-1}$ con $t = T_i$. Se le volatilità fossero random e indipendenti avremmo una distribuzione dei tempi esponenziale, ovvero $P_{\overline{\Delta T}}(\overline{\Delta t}) = e^{-a(\Delta t)}$. Quel che risulta dai dati empirici, invece, è una distribuzione di questo genere $P_{\overline{\Delta T}}(\overline{\Delta t}) = e^{-a(\Delta t)^\gamma}$, dove $\gamma \simeq 0.3$. Questo significa che le sequenze della volatilità presentano una correlazione anche per lunghi periodi di tempo.

Capitolo 2

Il modello di Stigler

In questo capitolo mostreremo le caratteristiche principali del modello di Stigler, ovvero la costruzione del modello e il fenomeno della finestra competitiva di cui cercheremo di ricavare matematicamente e attraverso le simulazioni i valori degli estremi. Analizzeremo, inoltre, l'andamento dei tempi di attesa degli ordini e quello della variazione dei prezzi di vendita, mostrando come ci sia riscontro coi dati ottenuti dalla borsa.

Aggiungeremo, infine, gli azionisti con strategia, mostrando come la finestra competitiva si chiuda e il prezzo si stabilizzi (in maniera differente a seconda della percentuale di Market Makers). Studieremo l'andamento dei tempi di attesa del modello modificato e quello dei prezzi.

2.0.1 Il modello di Stigler

Come già accennato, gli esperimenti condotti tra gli anni 60 e 80 del secolo scorso misero in luce che nella borsa il comportamento degli azionisti fosse assimilabile ad uno random, più che ad uno con una precisa strategia, fenomeno chiamato della *zero-intelligence*. Questo portò a costruire modelli che si basavano proprio su tale principio per riprodurre gli andamenti del mercato.

Tra i primi, vi fu quello di Stigler, elaborato dall'economista nel 1964 in *Public Regulation of the Securities Markets* [6]. Le caratteristiche di quest'ultimo sono

- Gli ordini arrivano nel tempo seguendo una distribuzione Poissoniana e vengono piazzati all'interno di uno specifico intervallo di prezzi (che noi considereremo $[0,1]$) con una densità di probabilità uniforme per tutti gli ordini;

2. IL MODELLO DI STIGLER

- Ogni azionista immette un ordine che può essere di domanda (quindi di vendita ed indicheremo con α ogni ordine di questo tipo) oppure di offerta (quindi di acquisto e lo indicheremo con β);
- Quelli che sono la miglior domanda e la miglior offerta verranno indicati rispettivamente con α_1 e β_1 ;
- Tutti gli ordini vengono considerati avere la stessa quantità (peso pari a 1);
- Non c'è cancellazione, gli ordini possono essere solo eseguiti per essere eliminati dall'order book;
- Abbiamo sostanzialmente solo limit order, anche se l'esecuzione di un ordine può essere visto sia come un limit order di vendita/acquisto che viene piazzato rispettivamente più in basso/alto di β_1 / α_1 , sia come l'arrivo di un market order;
- Il prezzo corrente a cui avviene l'esecuzione dell'ordine è quello di β_1 / α_1 .

Nelle figure riportiamo una stilizzazione del modello

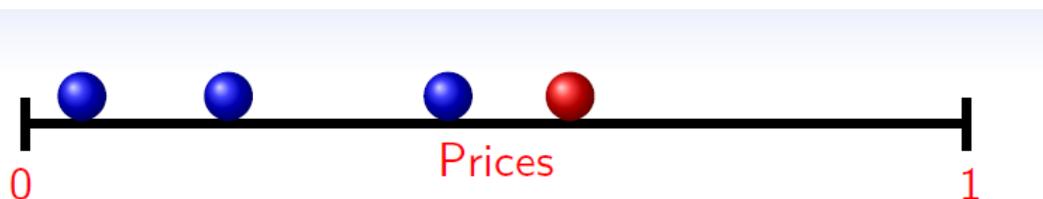


Figura 2.1: L'intervallo $[0,1]$, che rappresenta l'asse dei prezzi, dopo l'arrivo di tre β (in blu) e un α (in rosso)

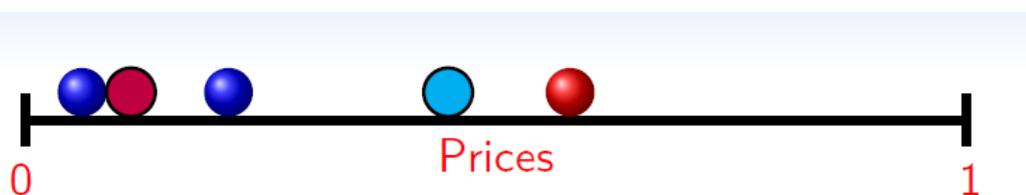


Figura 2.2: L'arrivo di un α più in basso del β_1 fa eseguire l'ordine, per cui entrambi vengono eliminati dall'order book

La condizione per cui il limit order che viene eseguito è sempre la miglior domanda/offerta, anche se il potenziale limit order viene piazzato molto più in

basso/alto, implica che gli ordini di acquisto vicini allo zero e quelli di vendita vicini all'uno vengano difficilmente eseguiti, tanto più quanto ci si avvicini agli estremi. In particolare, per tempi molto elevati ($t \rightarrow \infty$), ovvero quando il sistema si è stabilizzato, si possono individuare due prezzi "limite", che chiamiamo x_{min} e x_{max} . Tutti gli ordini che vengono piazzati prima di x_{min} e dopo x_{max} non vengono eseguiti e si accumulano. Si forma, quindi, l'intervallo $[x_{min}, x_{max}]$ che viene detto *finestra competitiva*, proprio perché al suo interno gli ordini vengono regolarmente eseguiti, mentre all'esterno rimangono nell'order book.

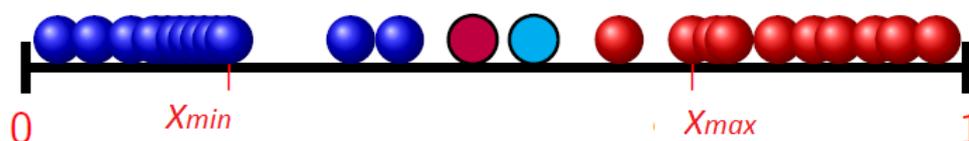


Figura 2.3: Accumulo degli ordini prima di x_{min} e dopo x_{max} ed esecuzione all'interno della finestra competitiva

A differenza delle teorie economiche classiche dove il prezzo corrente (detto di *Walras*) si stabilizzava una volta che il mercato era arrivato all'equilibrio, in tale modello esso continua ad oscillare tra x_{min} e x_{max} . Cerchiamo, quindi, di ricavare i valori di tali estremi.

Il modello di Stigler nella teoria della *Self-Organized Criticality*

Il modello di Stigler ha le caratteristiche della *Self-Organised Criticality (SOC)* che di seguito spiegheremo brevemente. Nella vicinanza della transizione di fase, ovvero al punto critico, i sistemi termodinamici mostrano un andamento a power law per le quantità di interesse, come per esempio il decadimento delle correlazioni. In analogia con la Fisica, un sistema complesso è detto essere in uno stato critico se le quantità di interesse presentano un decadimento a power law. In Fisica, lo stato del sistema è regolato da uno o più parametri (per esempio la temperatura) che devono assumere un determinato valore perché il sistema sia nel suo stato critico. Per i sistemi e modelli che possono essere descritti dalla *Self-Organised Criticality*, è la dinamica stessa che muove autonomamente il sistema verso uno stato critico. Dunque la transizione verso uno stato critico avviene grazie alla dinamica del sistema stesso, il quale da solo si organizza per raggiungere il punto critico senza una regolazione esterna (da qui il termine "Self- Organized"). Tale teoria nacque nel 1987 da Bak, Tang e Wiesenfeld con l'articolo *Self-organized criticality: an explanation of $1/f$ noise* [5]. Vedremo nelle prossime sezioni che anche quello di

Stigler è un modello di SOC. Infatti, indipendentemente dai parametri e dalle condizioni iniziali, esso presenta un andamento dei tempi a power law.

2.0.2 Formulazione matematica del modello

Consideriamo la probabilità che un ordine di domanda (e quella che un ordine di offerta) venga depositato all'interno dell'intervallo dei prezzi $[0, 1]$ e quello di tempo Δt . Le definiamo:

$$P[\alpha \in ([0, x], \Delta t)] = \lambda_A(x)\Delta t + o(\Delta t)^2 \quad P[\beta \in ([x, 1], \Delta t)] = \lambda_B(x)\Delta t + o(\Delta t)^2 \quad (2.1)$$

dove $\lambda_A(x)$ sia $\lambda_B(x)$ rappresentano la media del numero di ordini immessi per unità di tempo che sono eseguibili a uno specificato prezzo x . Nel nostro caso, sia $\lambda_A(x)$ sia $\lambda_B(x)$ sono funzioni di distribuzioni cumulative di PDF uniformi nell'intervallo $[0, 1]$. Questo implica che ordini di tipo α e ordini di tipo β abbiano la stessa probabilità di essere piazzati sull'asse dei prezzi nello stesso intervallo di tempo e che le CDF hanno la forma $\lambda_A(x) = x$ e $\lambda_B(x) = (1 - x)$.

Per trovare x_{min} e x_{max} , dobbiamo definire e utilizzare la funzione di distribuzione cumulativa della migliore domanda α_1 e quella della migliore offerta β_1 , ovvero:

$$A(x) = P[\alpha_1 \leq x] \quad B(x) = P[\beta_1 \geq x] \quad (2.2)$$

Considerando che nessun ordine di domanda viene eseguito oltre x_{max} o prima di x_{min} (sicuramente vi troveremo almeno un α e, rispettivamente, un β), avremo che $A(x) = 1$ per $x \in]x_{max}, 1]$ e $B(x) = 1$ per $x \in [0, x_{min}[$. Possiamo definire, quindi, i valori degli estremi della finestra competitiva come

$$x_{min} \equiv \inf\{x \in [0, 1] : B(x) < 1\} \quad x_{max} \equiv \sup\{x \in [0, 1] : A(x) < 1\} \quad (2.3)$$

Essendo A continua a destra e B continua a sinistra avremo:

$$B(x_{min}) = 1 \quad A(x_{max}) = 1 \quad (2.4)$$

e considerando che $A + B \leq 1$ ovunque, avremo, inoltre

$$A(x_{min}) = 0 \quad B(x_{max}) = 0 \quad (2.5)$$

e

$$x_{min} < x_{max}$$

essendo A una funzione non decrescente.

Trovando, quindi, le espressioni delle funzioni $A(x)$ e $B(x)$ e imponendo le condizioni precedentemente discusse, possiamo ricavare i valori da noi cercati.

Definiamo $M(x, t)$ ($N(x, t)$) il numero di ordini di vendita (acquisto) eseguibili al prezzo x (ovvero il numero di $\alpha < x$ (di $\beta > x$)) al tempo t e consideriamo la quantità $\frac{\partial E[M(x_2, t) - M(x_1, t)]}{\partial t}$, che rappresenta la variazione della media del numero di ordini di vendita (mediati sul tempo) nell'intervallo $[x_1, x_2]$. Rimandando all' *Appendice A, Parte 1* per i passaggi matematici, vediamo che tale quantità risulta essere

$$\frac{\partial E[M(x_2, t) - M(x_1, t)]}{\partial t} = \int_{x_1}^{x_2} (1 - B)d\lambda_A - \lambda_B dA \quad (2.6)$$

Analogamente per $N(x, t)$

$$\frac{\partial E[N(x_1, t) - N(x_2, t)]}{\partial t} = \int_{x_1}^{x_2} \lambda_A dB - (1 - A)d\lambda_B \quad (2.7)$$

Riflettiamo ora sui possibili valori di $\frac{\partial E[M(x_2, t) - M(x_1, t)]}{\partial t}$, se fosse negativo, ciò significherebbe che tra $]x_1, x_2[$, in tempi molto lunghi, gli ordini diventano negativi, il che è impossibile. Supponiamo, piuttosto, che nella finestra competitiva la media degli ordini presenti sia costante. Avremo, quindi, $\frac{\partial E[M(x_2, t) - M(x_1, t)]}{\partial t} = 0$ e $\frac{\partial E[N(x_1, t) - N(x_2, t)]}{\partial t} = 0$, che implicano

$$\int_{x_1}^{x_2} (1 - B)d\lambda_A - \lambda_B dA = 0 \quad \text{per } [x_1, x_2] \subset (0, x_{max}) \quad (2.8)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \lambda_A dB - (1 - A)d\lambda_B = 0 \quad \text{per } [x_1, x_2] \subset (x_{min}, \infty) \quad (2.9)$$

Ponendo a sistema le due equazioni precedenti, otteniamo le espressioni $A(x)$ e $B(x)$ in funzione della quantità costante $k = [1 - B(x)]\lambda_A(x) + [1 - A(x)]\lambda_B(x)$ e di $\lambda_A(x) = x$ e $\lambda_B(x) = 1 - x$ (dettagli matematici nell' *Appendice A, Parte 2*):

$$A(x) = 1 + \frac{x(A(x_0) - 1)}{x_0} + kx \int_{x_0}^x \frac{1}{x^2(1 - x)} dx \quad (2.10)$$

$$B(x) = 1 - \frac{(1 - x)(1 - B(x_0))}{1 - x_0} - k(1 - x) \int_{x_0}^x \frac{1}{x(1 - x)^2} dx \quad (2.11)$$

2. IL MODELLO DI STIGLER

Per trovare il valore della costante k prendiamo l'equazione (2.9) nella forma $\lambda_A dB = (1 - A)d\lambda_B$ e vi sostituiamo le espressioni appena trovate di $A(x)$ (dove poniamo $x_0 = x_{min}$) e quella di $B(x)$ (dove $x_0 = x_{max}$). Risolvendo (passaggi nell'Appendice A, Parte 3) troviamo che

$$k = \frac{1}{1 - x_m \ln \left(\frac{x_m}{1 - x_m} \right)} \quad (2.12)$$

Per ottenere, infine, i valori degli estremi della finestra competitiva prendiamo $A(x_M)$, sostituendo il valore di k appena trovato con $x_0 = x_m$. Risolvendo (Appendice A, Parte 4) abbiamo

$$\frac{1}{x_M} = \ln \left(\frac{x_M}{1 - x_M} \right) \quad (2.13)$$

Sostituendo $\frac{1}{x_M} = z$, otteniamo $e^{-z} = z - 1$ che risolviamo con metodo grafico, ottenendo $z = 1,27846$. I valori che cerchiamo sono, quindi

$$x_{min} = 0.2178089 \quad x_{max} = 0.78219107 \quad (2.14)$$

2.0.3 Simulazioni

Ottenuti i risultati teorici di x_{min} e x_{max} , vediamo se attraverso la simulazione del processo i valori combacceranno.

Nella simulazione abbiamo posto che la probabilità con cui un ordine (sia di vendita sia di acquisto) viene piazzato nell'intervallo $[0,1]$ sia $\lambda\Delta T$ dove $\lambda = 1$ sia per le α che per le β (ovvero stessa probabilità). ΔT , invece, rappresenta l'intervallo di tempo minimo nel quale avviene un'operazione, il bin minimo che discretizza il tempo, ed è posto $\Delta T = 0.001$.

Ad ogni nuova iterazione j viene creato un nuovo ordine di vendita con la probabilità precedentemente definita. Se l'insieme delle β non contiene elementi, l'ordine viene aggiunto all'insieme delle α . In caso contrario si considera il β di valore più alto (ovvero β_1) e se il nuovo ordine è ad un prezzo minore, β_1 viene cancellato e viene registrato il tempo di permanenza dell'ordine (il tempo di attesa) come il numero di iterazione j moltiplicato per ΔT a cui viene sottratto il tempo in cui β_1 è stato immesso (il numero dell'iterazione in cui è stato immesso, moltiplicato per ΔT). Se è maggiore, invece, l'ordine viene piazzato nell'insieme delle α e viene

registrato il tempo di immissione $j * \Delta T$. Inoltre, ogni ordine di vendita che viene eseguito, viene registrato come prezzo corrente (per ottenere, successivamente, le variazioni dei prezzi correnti di vendita)

Dopo aver compiuto la metà delle iterazioni previste, il valore di β_1 viene registrato e da quella iterazione in poi il suo valore viene sostituito con il nuovo β_1 , solo se quest'ultimo ha un valore minore di quello precedente. Non è altro che l'operazione per trovare il minimo prezzo a cui un β può essere eseguito, ovvero x_{min} .

Il tutto viene ripetuto analogamente alla creazione di un ordine di acquisto, registrando tempi di immissione, di attesa e il valore massimo a cui un α può essere eseguito, ovvero x_{max} .

Per il codice, si rimanda all'*Appendice B, Parte 1* per gli estremi della finestra competitiva e la costruzione dell'istogramma, all'*Appendice B, Parte 3* per il plot della distribuzione dei tempi di attesa.

Gli estremi della finestra competitiva

Attraverso le simulazioni abbiamo ottenuto l'istogramma che riporta il numero di ordini ad ogni posizione, dopo 10^7 iterazioni (bin istogramma 0.001)

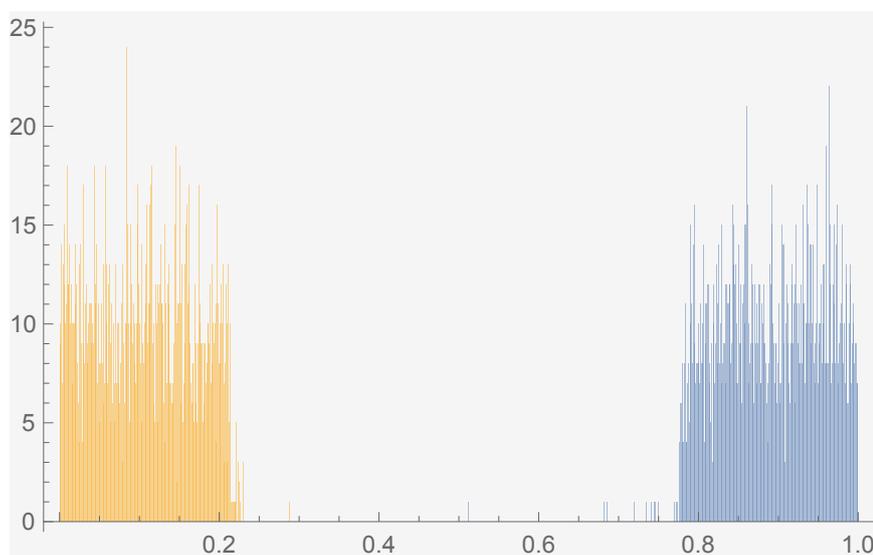


Figura 2.4: Simulazione del modello di Stigler con 10^7 iterazioni. Si nota con chiarezza la presenza della finestra competitiva con a sinistra accumulo di ordini di acquisto e a destra quelli di vendita

Come previsto dalla teoria, si vede chiaramente la presenza di un intervallo interno che risulta quasi vuoto, ovvero la finestra competitiva, e l'accumulo degli

ordini oltre gli estremi.

Dalla media empirica di x_{min} e x_{max} su $N = 30$ simulazioni, si ricava

$$\bar{x}_{min} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = 0.218718 \quad \bar{x}_{max} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j = 0.781907 \quad (2.15)$$

Successivamente è stato ricavato l'errore sul valor medio di entrambi i valori $\sigma_{\bar{x}_{min}} = 0.00178$ e $\sigma_{\bar{x}_{max}} = 0.00149$ attraverso le formule

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad \text{con} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}} \quad (2.16)$$

Quel che risulta dalle simulazioni è, quindi

$$\bar{x}_{min} = 0.219 + 0.002 \quad \bar{x}_{max} = 0.782 + 0.001 \quad (2.17)$$

Che sono perfettamente confrontabili all'interno del loro errore con i risultati teorici $x_{min} = 0.218$, $x_{max} = 0.782$

Andamento dei tempi di attesa

Per quanto riguarda, invece, i tempi di attesa calcolati come precedentemente spiegato, ne abbiamo analizzato l'andamento, plottandoli in funzione della loro probabilità, ovvero la frequenza (normalizzata) dei tempi di attesa degli ordini nell'order book. Riportiamo il grafico con andamento logaritmico sia sulle ordinate sia sulle ascisse

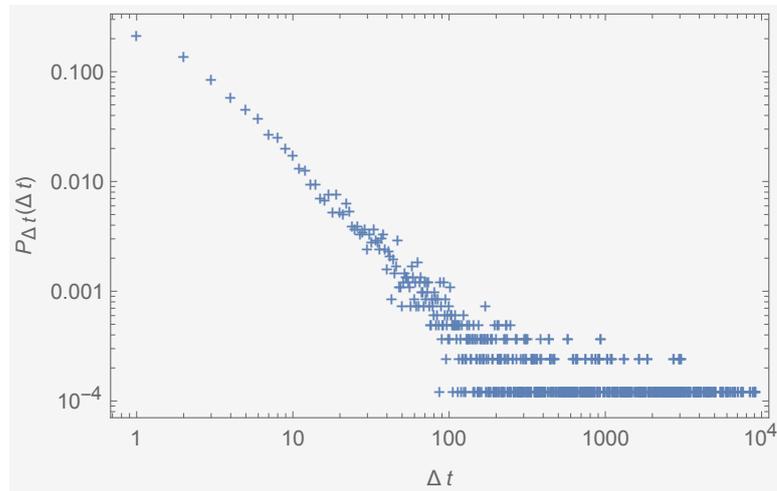


Figura 2.5: Andamento dei tempi della simulazione. Sull'asse delle ordinate abbiamo la probabilità di esecuzione in funzione dei tempi di permanenza dell'ordine nell'order book. Essendo un plot logaritmico, si intuisce un andamento esponenziale.

Come si può notare, vi sono molti ordini che vengono eseguiti con tempi di attesa brevi, mentre più rari sono i tempi di attesa più lunghi. In generale si nota un andamento lineare nel grafico (quindi esponenziale, considerando il plot logaritmico)

Confrontiamo, quindi, tale andamento ottenuto dai dati simulati con quelli ottenuti dall'analisi dei mercati, della cui distribuzione abbiamo parlato nel primo capitolo, ovvero $P_{\Delta T}(\Delta t)\alpha(\Delta t)^{-1-\eta}$ dove $\eta \simeq 0.5$. Li plottiamo insieme

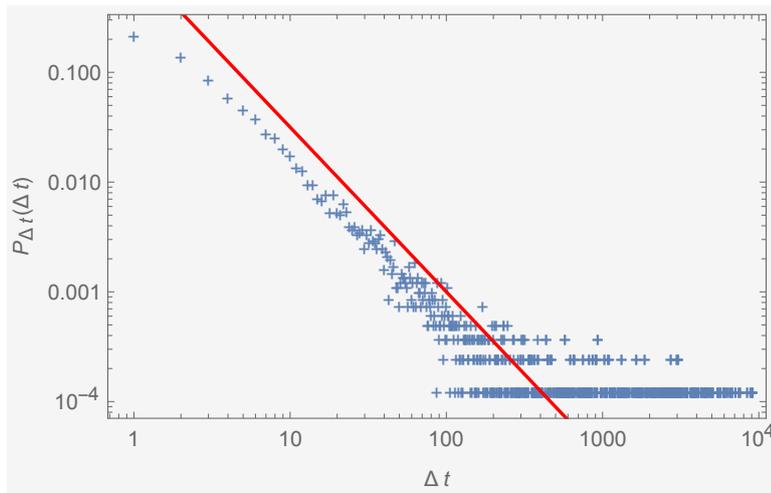


Figura 2.6: Confronto tra i dati della simulazione del modello di Stigler e l'andamento ricavato dallo studio dei dati empirici. Il plot è logaritmico e la retta rappresenta la funzione $P_{\Delta T}(\Delta t)\alpha(\Delta t)^{-1-\eta}$ con $\eta = 0.5$

Si può notare come il plot ottenuto dalla simulazione segua molto bene quello teorico, con lo stesso esponente $\eta = 0.5$, il che significa che il modello riesce a riprodurre in maniera piuttosto fedele l'andamento dei tempi di attesa degli ordini di mercato.

2.0.4 Aggiunta di giocatori strategici

Nella sezione precedente abbiamo riprodotto il modello di Stigler basato sulla zero-intelligence, quindi un'assenza di strategia da parte degli azionisti.

In questa sezione, invece, consideriamo che solo una parte degli azionisti agiscano senza una strategia (azionisti "inesperti") mentre il resto farà parte di quelli che chiamiamo *Market Makers* [3], coloro, cioè, che piazzano i loro ordini (sia d'acquisto che di vendita) sui valori dei migliori prezzi di acquisto e di vendita. Per i dettagli del codice rimandiamo all' *Appendice B, Parte 2*, per gli estremi della finestra competitiva e la costruzione dell'istogramma, all' *Appendice B, Parte 3* per

2. IL MODELLO DI STIGLER

il plot della distribuzione dei tempi di attesa.

La simulazione, quindi, è stata fatta per la prima parte, ovvero quella in cui i giocatori inesperti immettono ordini, esattamente come quella del modello di Stigler (dove $\lambda = 1$). Nella seconda parte, invece, quella in cui gli ordini sono immessi dai giocatori con strategia, è stato aggiunto un altro processo basato sull'immissione di due ordini, un α e un β sui migliori prezzi di vendita e di acquisto, con una probabilità $\rho * \Delta T$ dove ρ rappresenta la percentuale di Market Makers presenti nel mercato (considerando che le λ rimangono sempre di valore 1). Anche in questo caso sono stati registrati i tempi di attesa degli ordini.

La chiusura della finestra competitiva e la stabilizzazione del prezzo

Partiamo da un valore di $\rho = 0.2$. Dall'istogramma vediamo che la finestra competitiva comincia a chiudersi e il fenomeno diventa ancora più visibile aumentando ρ a 0.4.

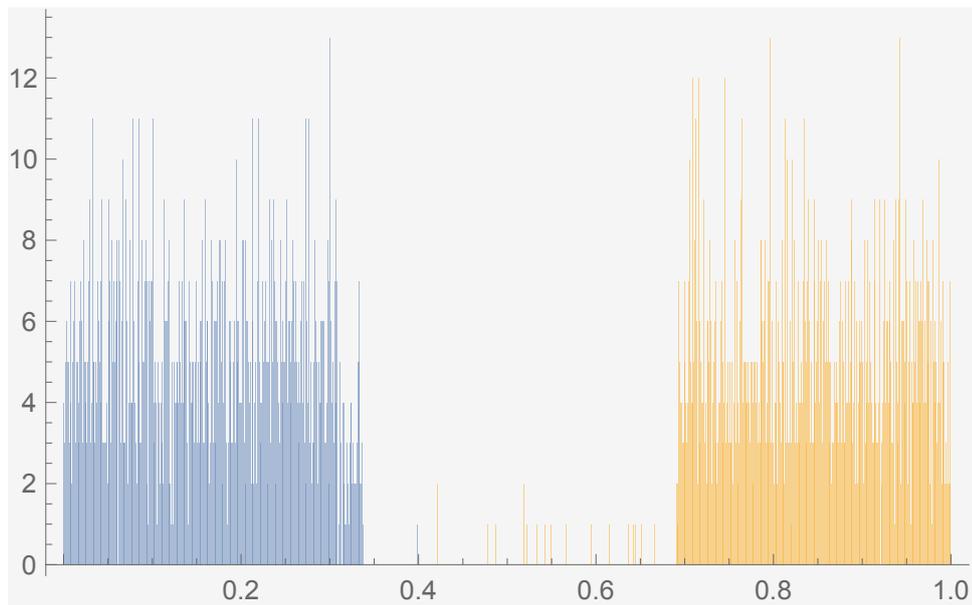


Figura 2.7: Simulazione del modello con l'aggiunta di Market Makers dopo $5 * 10^6$ iterazioni, con $\rho = 0.2$ e $\lambda = 1$. La finestra competitiva si restringe

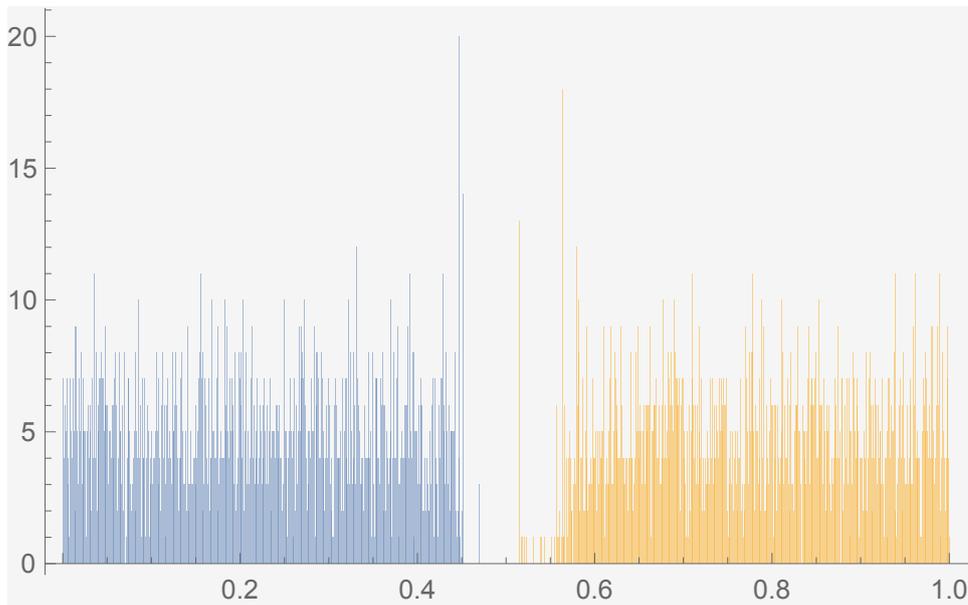


Figura 2.8: Simulazione con aggiunta di Market Makers dopo $5 * 10^6$ iterazioni, con $\rho = 0.4$ e $\lambda = 1$. La finestra competitiva si restringe ulteriormente

Aumentando ancora il valore di ρ vediamo che con $\rho = 0.5$ la finestra competitiva si chiude completamente e il prezzo si stabilizza a metà dell'intervallo.

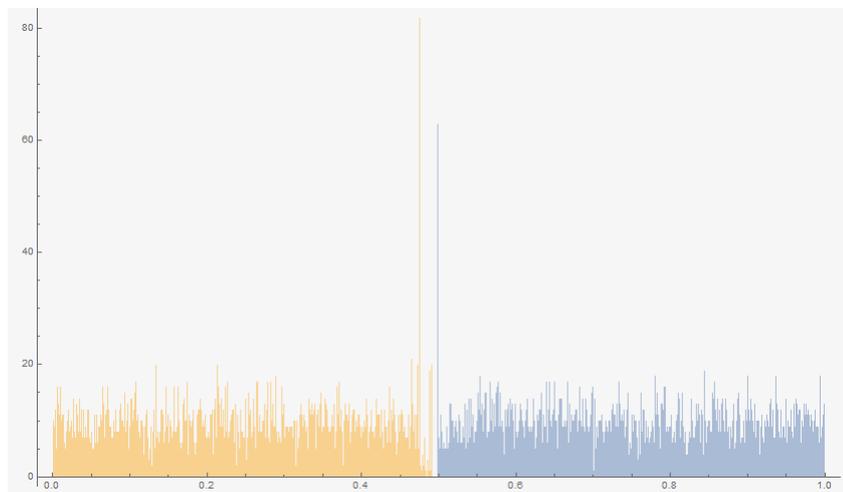


Figura 2.9: Simulazione del modello con aggiunta di Market Makers con 10^7 iterazioni. La finestra competitiva con $\rho = 0.5$ e $\lambda = 1$ si chiude e il prezzo si stabilizza a metà

Come si può notare, la finestra competitiva si chiude e domanda ed offerta trovano il loro “punto d’incontro” a circa metà dell’intervallo, ovvero il prezzo si

2. IL MODELLO DI STIGLER

stabilizza. Dopo $N = 10$ campionamenti, infatti, otteniamo come media per x_{min} e x_{max} , utilizzando le formule in (2.15) e (2.16)

$$\overline{x_{min}} = 0.496 + 0.004$$

$$\overline{x_{max}} = 0.510 + 0.004$$

Questo significa che a metà simulazione (in quanto abbiamo continuato a registrare i due valori come precedentemente, ovvero una volta che la situazione del mercato è ben definita) il prezzo corrente si stabilizza in un intervallo compreso all'incirca tra i due valori precedentemente elencati e non vi sono ordini che vengano eseguiti all'infuori di esso.

Se aumentiamo ulteriormente il numero di market makers ponendo $\rho > 0.5$, la finestra competitiva continua ad essere completamente chiusa, ma il prezzo non si stabilisce più a metà dell'intervallo, ma varia da simulazione a simulazione. Un esempio in figura

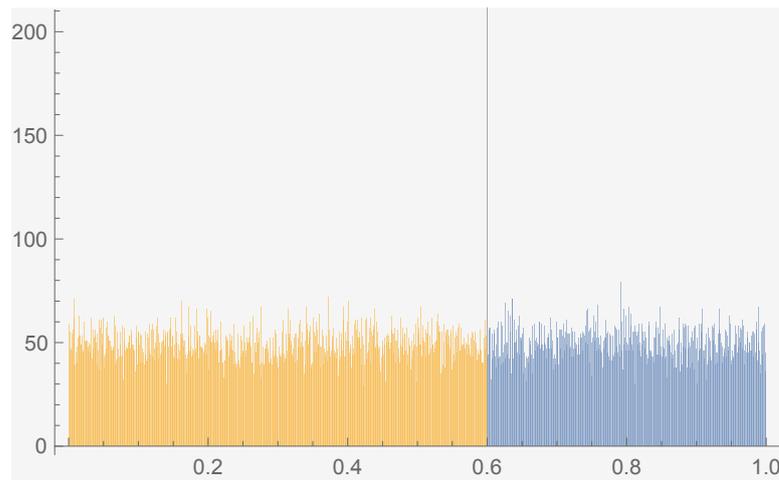


Figura 2.10: Simulazione del modello con l'aggiunta di Market Makers con $\rho = 0.8$ e $\lambda = 1$, $5 * 10^6$ iterazioni. La finestra competitiva è chiusa e il prezzo non si stabilizza più a metà dell'intervallo

Il prezzo si stabilizza lontano dal centro dell'intervallo.

Riportiamo in figura il grafico delle distribuzioni del prezzo corrente (calcolato come il valore a metà tra l'ultimo β e l'ultimo α corrente, che si accostano sempre attorno al valore in cui si chiude la finestra). Il grafico è fatto sulla base di $\simeq 500$ valori di prezzi corrente, ricavati dalle simulazioni.

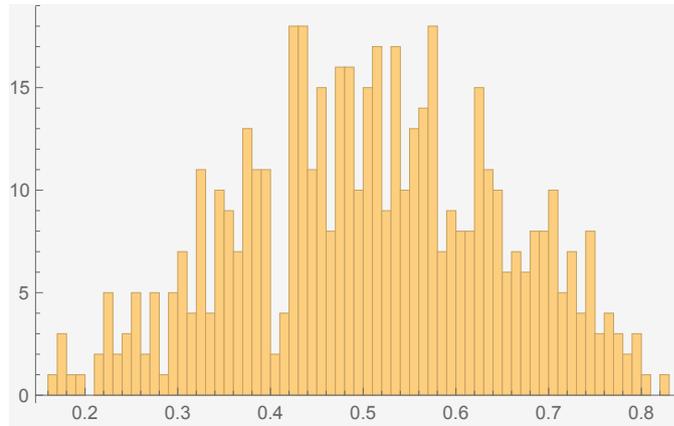


Figura 2.11: Istogramma di $\simeq 500$ prezzi correnti, simulazione con Market Makers con $\rho = 0.8$

Si può notare che, anche se il prezzo non si stabilizza più in uno specifico valore, abbiamo comunque che la media dei valori dei prezzi correnti si attesta attorno alla metà dell'intervallo.

L'andamento dei tempi di attesa

Analizzando l'andamento dei tempi, osserviamo che esso cambia radicalmente rispetto a quanto visto in precedenza senza giocatori strategici. Riportiamo il plot logaritmico dei tempi di attesa simulati (dove per ordinata vi è sempre la probabilità di esecuzione). Li riportiamo in ordine di ρ crescente

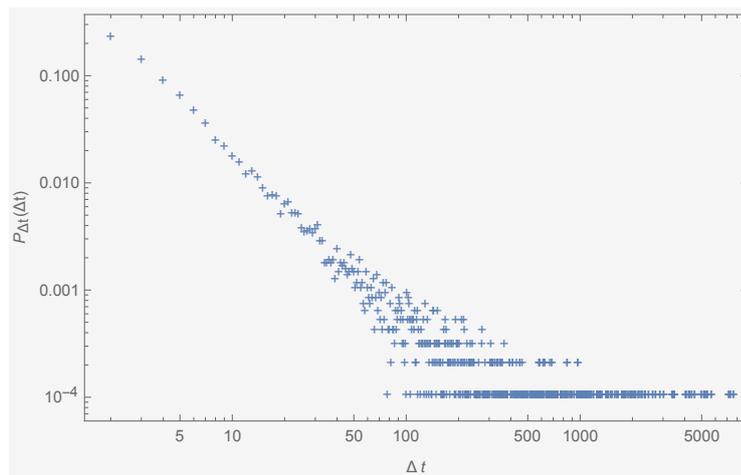


Figura 2.12: Andamento dei tempi di attesa nella simulazione con i Market Makers con $\rho = 0.2$ e $\lambda = 1$. $5 * 10^7$ iterazioni. Andamento simile a quello del modello di Stigler

2. IL MODELLO DI STIGLER

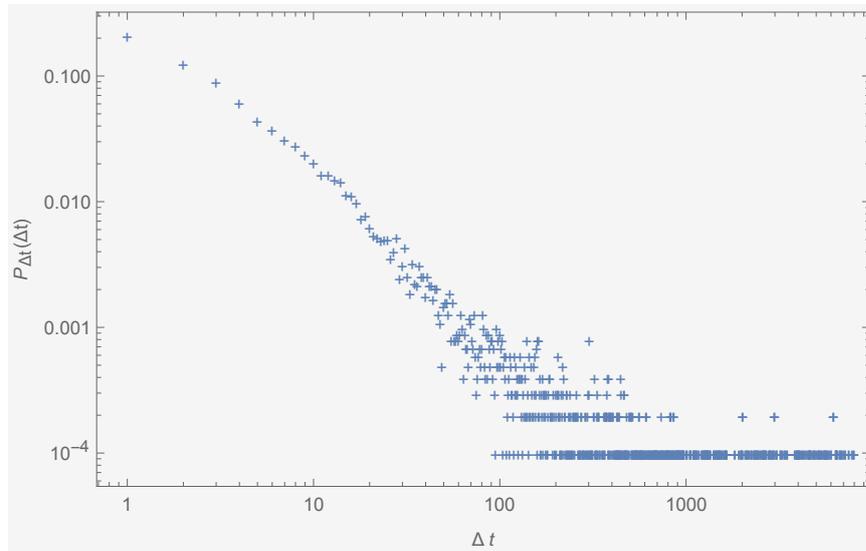


Figura 2.13: Andamento dei tempi di attesa nella simulazione con i Market Makers con $\rho = 0.4$ e $\lambda = 1$. $5 \cdot 10^7$ iterazioni. L'andamento risulta ancora essere simile a quello del modello di Stigler, seppur si cominciano a vedere delle deviazioni.

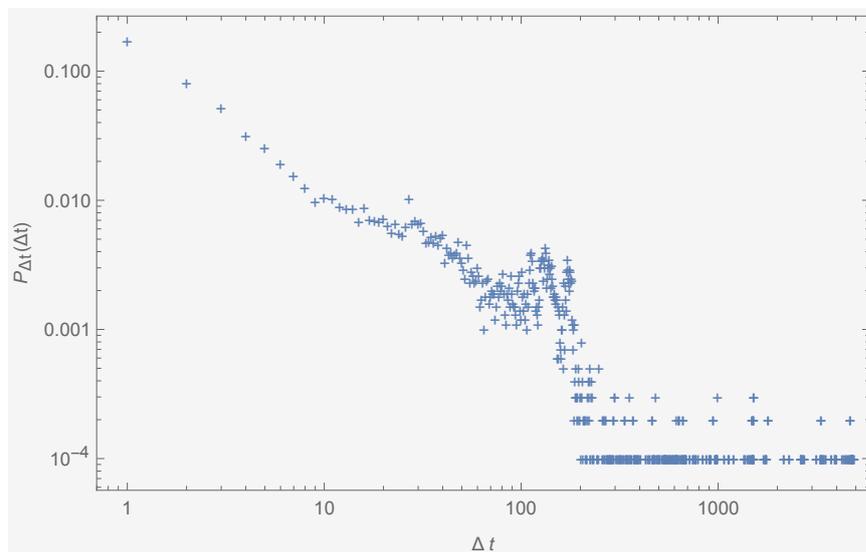


Figura 2.14: Andamento dei tempi di attesa nella simulazione con i Market Makers con $\rho = 0.5$ e $\lambda = 1$. $5 \cdot 10^7$ iterazioni. L'andamento muta in maniera significativa rispetto a quello ottenuto dal modello di Stigler

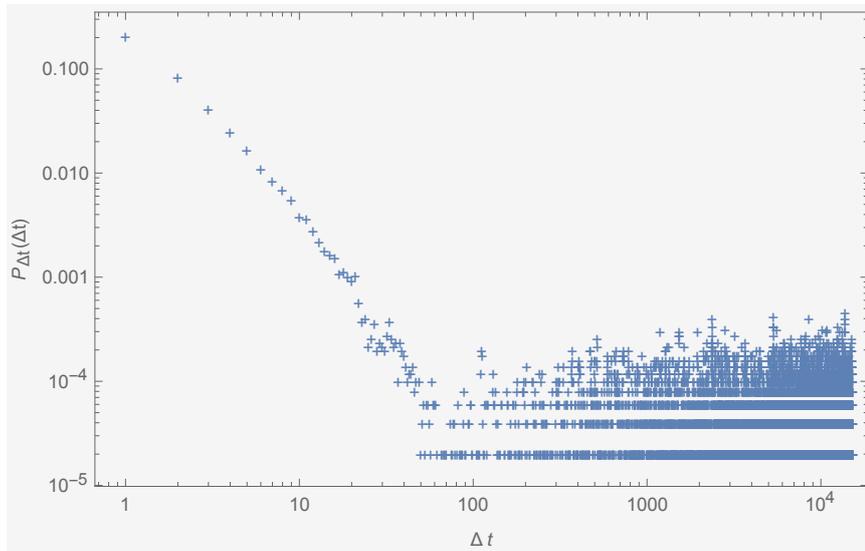


Figura 2.15: Andamento dei tempi di attesa nella simulazione con i Market Makers con $\rho = 0.8$ e $\lambda = 1$. $5 * 10^7$ iterazioni. L'andamento risulta ulteriormente modificato rispetto a quello nel modello di Stigler

Si può notare come l'andamento dei prezzi vari rispetto al modello di Stigler. All'aumentare della percentuale di Market Makers, infatti, gli ordini eseguiti dopo lungo tempo aumentano e si perde progressivamente l'andamento esponenziale. Se per $\rho = 0.2$ abbiamo ancora un grafico simile a quello senza giocatori strategici, per $\rho = 0.8$ l'andamento cambia considerevolmente. Questo è dovuto alla chiusura della finestra competitiva che fa accumulare più ordini (che, quindi, rimangono più tempo nell'order book) tanto più quanto più velocemente essa si chiude. Restringendo di molto l'intervallo in cui gli ordini vengono eseguiti, la priorità dell'esecuzione del miglior prezzo ha poco impatto sul creare gli andamenti esponenziali che avevamo, al contrario, precedentemente.

Conclusioni

Nel lavoro di tesi qui presentato, nel Capitolo 1 abbiamo mostrato le principali caratteristiche dell'Order book, il funzionamento dei *limit* e *market* order (che possono essere sia di vendita che di acquisto) e la sua utilità nello studio dell'andamento dei mercati grazie alle informazioni che vi vengono immagazzinate. Tra queste abbiamo mostrato l'andamento delle più importanti, ovvero le differenze di prezzo corrente, i tempi di attesa e i guadagni. In particolare abbiamo utilizzato la distribuzione (a power law) dei tempi di attesa e quella delle variazioni di prezzo per trovare dei riscontri nei modelli presentati successivamente.

Abbiamo poi introdotto, nel Capitolo 2, il modello di Stigler. Abbiamo parlato del processo di immissione degli ordini, il quale è completamente random ed avviene con eguale probabilità per ordini di vendita e di acquisto all'interno dell'intervallo $[0,1]$ dei prezzi in cui questi vengono piazzati. L'utilizzo della randomicità si basa sull'idea della zero-intelligence introdotta col modello. Ci siamo quindi concentrati sull'esecuzione degli ordini e sulla priorità su cui essa si basa: se viene immesso nel mercato un ordine di vendita o di acquisto eseguibile (ovvero con un prezzo rispettivamente maggiore o minore rispetto ad almeno un ordine di acquisto o di vendita) allora viene eseguito l'ordine di vendita o acquisto al miglior prezzo, altrimenti il novo ordine viene piazzato all'interno dell'order book. Tale priorità fa sì che gli ordini che si trovano al di sotto o al di sopra di due soglie, da noi dette x_{min} e x_{max} , non vengano eseguiti e che continuino ad accumularsi. Si forma, quindi, la cosiddetta "finestra competitiva" i cui estremi sono i valori prima citati e all'interno della quale gli ordini vengono regolarmente eseguiti, per cui il prezzo corrente continua ad oscillare all'interno di essa senza mai stabilizzarsi. Attraverso tali caratteristiche e l'anticipazione che l'andamento dei tempi di attesa segua un andamento a power law, abbiamo potuto inquadrare il modello all'interno della *Self-Organized Criticality*.

Abbiamo, quindi, cercato le soglie x_{min} e x_{max} prima attraverso una formulazione matematica e successivamente attraverso le simulazioni. I valori trovati con l'uno e con l'altro metodo combaciano e sono $x_{min} = 0.218$, $x_{max} = 0.782$, espressi entro il loro errore ottenuto dalle simulazioni. Dall'istogramma delle simulazioni è ben visibile la presenza della finestra competitiva. L'andamento dei tempi, inoltre, ri-

2. IL MODELLO DI STIGLER

sulta essere in perfetto accordo con quello dei dati empirici.

La parte finale, invece, pur basandosi sul modello di Stigler, presenta una modifica nell'immissione degli ordini: gli azionisti non agiscono tutti in maniera random, ma abbiamo inserito una parte di giocatori strategici detti "Market Makers" i quali piazzano gli ordini sui migliori prezzi di vendita e di acquisto. Questo muta l'aspetto della distribuzione degli ordini. Aumentando la percentuale di giocatori strategici la finestra competitiva comincia a chiudersi progressivamente, finchè, nel momento in cui questi rappresentano $\frac{1}{2}$ dei giocatori, essa non si chiude totalmente e il prezzo si stabilizza a metà dell'intervallo $[0,1]$. Aumentando ancora tale percentuale, la finestra competitiva rimane chiusa ma il prezzo varia da simulazione a simulazione. Ne abbiamo visto la distribuzione. Abbiamo analizzato anche qui la distribuzione dei tempi di attesa e abbiamo visto che col progressivo chiudersi della finestra competitiva essa perde l'andamento a power law.

Appendice A

2.0.5 Parte 1

La variazione di $M(x)$ e di $N(x)$ all'arrivo di un α é

$$\Delta M_\alpha(x) = I(x \geq \alpha)I(\alpha > \beta_1) \quad \Delta N_\alpha(x) = -I(x \leq \beta_1)I(\alpha \leq \beta_1)$$

e all'arrivo di un β

$$\Delta M_\beta(x) = -I(x \geq \alpha_1)I(\beta \geq \alpha_1) \quad \Delta N_\beta(x) = I(x \leq \beta)I(\beta < \alpha_1)$$

Con

$$I = \begin{cases} 1 & \text{se vero} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.18)$$

Concentrandoci su $M(x)$ la variazione totale su x sar  $\Delta M_{tot} = \Delta M_\alpha + \Delta M_\beta$, per cui la media su tale variazione  

$$\begin{aligned} E[\Delta M(x)] &= \{I(x > \beta_1)(P[\alpha \in ([0, 1], \Delta t)] - P[\alpha \in ([0, \beta_1], \Delta t)]) \\ &\quad - I(x \geq \alpha)P[\beta \in ([\alpha_1, 1], \Delta t)]\} \\ &= \{I(x > \beta_1)[\lambda_A(x) - \lambda_A(\beta_1)] - I(x \geq \alpha_1)\lambda_B(\alpha_1)\}\Delta t \end{aligned} \quad (2.19)$$

Vediamo, ora, la variazione della media sul tempo e sullo spazio di $\Delta M(x, t)$ con $x \in [x_1, x_2]$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E[M(x_2, t) - M(x_1, t)]}{\partial t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E[\Delta M(x_2)] - E[\Delta M(x_1)]}{\Delta t} = \lambda_A(x_2)E[I(x_2 > \beta_1)] + \\
&\quad - \lambda_A(x_1)E[I(x_1 > \beta_1)] - E[I(x_1 < \beta_1 < x_2)\lambda_A(\beta_1)] \\
&\quad - E[I(x_1 \leq \alpha_1 \leq x_2)\lambda_B(\alpha_1)] \\
&= \lambda_A(x_2)[1 - B(x_2)] - \lambda_A(x_1)[1 - B(x_1)] - \int_{x_1}^{x_2} \lambda_A(\beta)dB(\beta) \\
&\quad - \int_{x_1}^{x_2} \lambda_B(\alpha)dA(\alpha) \\
&= \lambda_A(x_2)[1 - B(x_2)] - \lambda_A(x_1)[1 - B(x_1)] - [\lambda_A(\beta)B(\beta)]_{x_1}^{x_2} \\
&\quad + \int_{x_1}^{x_2} B(\beta)d\lambda_A(\beta) - \int_{x_1}^{x_2} \lambda_B(\alpha)dA(\alpha) \\
&= \int_{x_1}^{x_2} (1 - B)d\lambda_A - \lambda_B dA
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Dove nel quarto passaggio abbiamo utilizzato l'integrale per parti. Il risultato é, quindi

$$\frac{\partial E[M(x_2, t) - M(x_1, t)]}{\partial t} = \int_{x_1}^{x_2} (1 - B)d\lambda_A - \lambda_B dA \tag{2.21}$$

Facendo un discorso analogo con $N(x, t)$ otteniamo

$$\frac{\partial E[N(x_1, t) - N(x_2, t)]}{\partial t} = \int_{x_1}^{x_2} \lambda_A dB - (1 - A)d\lambda_B \tag{2.22}$$

2.0.6 Parte 2

Consideriamo, quindi, l'espressione $\int_{x_{min}}^x \lambda_B dA - \lambda_A dB$. Per (2.8) avremo:

$$\begin{aligned}
\int_{x_{min}}^x \lambda_B dA - \lambda_A dB &= \int_{x_{min}}^x (1 - B)d\lambda_A - \lambda_A d(1 - B) = [(1 - B)\lambda_A]_{x_{min}}^x \\
&= [1 - B(x)]\lambda_A(x)
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Dove nel penultimo passaggio è stato utilizzato un integrale per parti del secondo termine della somma e nell'ultimo passaggio la condizione tale per cui $B(x_{min}) = 1$

Consideriamo, poi, $\int_x^{x_{max}} \lambda_B dA - \lambda_A dB$ ed utilizzando (2.9) avremo

$$\begin{aligned} \int_x^{x_{max}} \lambda_B dA - \lambda_A dB &= \int_x^{x_{max}} (1 - A) d\lambda_B + \lambda_B d(1 - A) = [(1 - A)\lambda_B]_x^{x_{max}} \\ &= [1 - A(x)]\lambda_B(x) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Sommando le due equazioni avremo

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} \lambda_B dA - \lambda_A dB = [1 - B(x)]\lambda_A(x) + [1 - A(x)]\lambda_B(x) \quad (2.25)$$

Il primo membro dell'equazione, essendo un integrale definito, può essere espresso attraverso una costante k o anche λ_T , dove quest'ultima è la frequenza di transazione complessiva nel mercato.

Per trovare le espressioni di $A(x)$ e quella di $B(x)$ consideriamo le espressioni delle λ ponendoci nel caso di nostro interesse, ovvero $\lambda_A(x) = x$ e $\lambda_B(x) = (1 - x)$ e poniamo a sistema le espressioni (2.8) e (2.9). Avremo

$$\begin{cases} \int_{x_0}^x x dB + (1 - A)dx = 0 \\ \int_x^{x_0} (1 - B)dx - (1 - x)dA = 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

Integrando per parti

$$\begin{cases} [xB]_{x_0}^x - \int_{x_0}^x x dB + x - x_0 - \int_{x_0}^x (1 - A)dx = 0 \\ x - x_0 + \int_x^{x_0} B dx - A(x_0) + A(x) - \int_x^{x_0} x dA = 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

e sostituendo

$$\begin{cases} \int_{x_0}^x x dB + \int_{x_0}^x (1 - A)dx = [xB]_{x_0}^x + x - x_0 \\ x - x_0 - A(x_0) + A(x) + xB(x) - x_0B(x_0) + x - x_0 - A(x)x + A(x_0)x_0 = 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

raccogliendo e sfruttando la definizione di k , otteniamo

$$\begin{cases} \int_{x_0}^x x dB + \int_{x_0}^x (1 - A)dx = [xB]_{x_0}^x + x - x_0 \\ A(x_0)[x_0 - 1] + (x_0 + 1) + x_0(1 - B(x_0)) + A(x)(1 - x) + xB(x) - 1 = 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

$$\begin{cases} \int_{x_0}^x x dB + \int_{x_0}^x (1 - A)dx = [xB]_{x_0}^x + x - x_0 \\ k + A(x)(1 - x) + xB(x) - 1 = 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

L'espressione di $A(x)$ in funzione di $B(x)$, x e k è quindi:

$$A(x) = \frac{-xB(x) - k + 1}{1 - x} \quad (2.31)$$

Prendendo tale espressione e sostituendola a (2.8), avremo

$$xdB + \left(\frac{-xB(x) - k + 1}{1 - x}\right)dx = 0 \quad (2.32)$$

Da cui otteniamo l'equazione differenziale

$$\frac{dB}{dx} + \frac{B(x)}{1 - x} = -\frac{k}{x(1 - x)} + \frac{1}{1 - x} \quad (2.33)$$

Risolvendola troviamo l'espressione di $B(x)$, ovvero

$$B(x) = 1 - \frac{(1 - x)(1 - B(x_0))}{1 - x_0} - k(1 - x) \int_{x_0}^x \frac{1}{x(1 - x)^2} dx \quad (2.34)$$

Per ottenere $A(x)$, analogamente, troviamo $B(x)$ in funzione di $A(x)$, x e k e lo sostituiamo ad (2.9) ottenendo l'equazione differenziale

$$\frac{dA}{dx} - \frac{A(x)}{x} = \frac{k}{x(1 - x)} - \frac{1}{x} \quad (2.35)$$

che risolvendo ci dà l'espressione di $A(x)$

$$A(x) = 1 + \frac{x(A(x_0) - 1)}{x_0} + kx \int_{x_0}^x \frac{1}{x^2(1 - x)} dx \quad (2.36)$$

2.0.7 Parte 3

Riscriviamo entrambe le equazioni in funzione di λ_A e di λ_B

$$\begin{aligned} B(x) &= 1 - \frac{\lambda_B(x)(1 - B(x_0))}{\lambda_B(x_0)} - k\lambda_B(x) \int_{x_0}^x \frac{1}{\lambda_A} d\left(\frac{1}{\lambda_B}\right) \\ A(x) &= 1 + \frac{\lambda_A(x)(A(x_0) - 1)}{\lambda_A(x_0)} + k\lambda_A(x) \int_{x_0}^x \frac{1}{\lambda_B} d\left(\frac{1}{\lambda_A}\right) \end{aligned} \quad (2.37)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} &\lambda_A(x) \left(\frac{d(\lambda_B(x))}{\lambda_B(x_m a x)} + kd(\lambda_B(x)) \int_x^{x_{max}} \frac{1}{\lambda_A} d\left(\frac{1}{\lambda_B}\right) + k\lambda_B(x) \frac{1}{(\lambda_B(x))^2 \lambda_A(x)} d(\lambda_B(x)) \right) \\ &= \left(\frac{\lambda_A(x)}{\lambda_A(x_m in)} + k\lambda_A(x) \int_{x_m in}^x \frac{1}{\lambda_B} d\left(\frac{1}{\lambda_A}\right) d(\lambda_B(x)) \right) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Semplificando $d\lambda_B(x)$ e $\lambda_A(x)$ che troviamo in entrambi i membri, otteniamo

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{1}{\lambda_B(x_{max})} + \frac{1}{\lambda_A(x_{min})} \right] + k \left[\frac{1}{\lambda_A \lambda_B} \right]_x^{x_{max}} - k \int_x^{x_{max}} \frac{1}{\lambda_A} d\left(\frac{1}{\lambda_B}\right) + k \frac{1}{\lambda_A(x) \lambda_B(x)} \\ & = k \int_{x_{min}}^x \frac{1}{\lambda_B} d\left(\frac{1}{\lambda_A}\right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Sommando i due integrali, cambiando segno e dividendo tutto per k , otteniamo

$$\frac{1}{k} \left[\frac{1}{\lambda_B(x_{max})} + \frac{1}{\lambda_A(x_{min})} \right] - \left[\frac{1}{\lambda_A(x_{max}) \lambda_B(x_{max})} \right] + \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{1}{\lambda_B} d\left(\frac{1}{\lambda_A}\right) = 0 \quad (2.40)$$

Sostituiamo di nuovo le λ esattamente come erano state sostituite per trovare $A(x)$ e $B(x)$ e risolviamo l'integrale, ottenendo

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k} \left[\frac{1}{1 - x_{max}} + \frac{1}{x_{min}} \right] - \left[\frac{1}{x_{max}(1 - x_{max})} \right] + \left[\frac{1}{x_{max}} - \frac{1}{x_{min}} + \right. \\ & \left. + \ln \left[\left(\frac{1 - x_{max}}{1 - x_{min}} \right) \left(\frac{x_{min}}{x_{max}} \right) \right] \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

Considerando la simmetria del sistema, vale la relazione $x_{max} = 1 - x_{min}$, sostituiamo quindi x_{max} e per semplicità di notazione, d'ora in poi scriveremo x_m per x_{min} e x_M per x_{max} . La nostra relazione, quindi, può essere riscritta come

$$\frac{1}{k} \left[\frac{2}{x_m} \right] + \frac{-1 + x_m - 1 + x_m}{x_m(1 - x_m)} + 2 \ln \left(\frac{x_m}{1 - x_m} \right) = 0 \quad (2.42)$$

che diventa

$$\frac{1}{k} \left[\frac{1}{x_m} \right] + \frac{1}{x_m} + \ln \left(\frac{x_m}{1 - x_m} \right) = 0 \quad (2.43)$$

da cui ricaviamo, infine, k

$$k = \frac{1}{1 - x_m \ln \left(\frac{x_m}{1 - x_m} \right)} \quad (2.44)$$

2.0.8 Parte 4

Prendiamo $A(x_M)$ con $x_0 = x_m$. Avremo

$$A(x_M) = 1 = 1 - \frac{x_M}{x_m} - k x_M \left[\frac{1}{x_M} - \frac{1}{x_{min}} + \ln \left[\left(\frac{1 - x_M}{1 - x_{min}} \right) \left(\frac{x_{min}}{x_M} \right) \right] \right] \quad (2.45)$$

2. IL MODELLO DI STIGLER

riutilizzando la relazione di simmetria $x_m = 1 - x_M$

$$0 = -\frac{(1-x_m)}{x_m} \frac{1}{k} - (1-x_m) \left[\frac{2x_m-1}{x_m(1-x_m)} + 2 \ln \left(\frac{x_m}{1-x_m} \right) \right] \quad (2.46)$$

semplificando l'equazione, arriviamo alla relazione che ci permette di trovare x_m

$$\frac{1}{1-x_m} = \ln \left(\frac{1-x_m}{x_m} \right) \quad (2.47)$$

e attraverso la relazione di simmetria ricaviamo l'espressione per x_M

$$\frac{1}{x_M} = \ln \left(\frac{x_M}{1-x_M} \right) \quad (2.48)$$

Appendice B

Per i programmi è stato utilizzato il linguaggio di Mathematica

2.0.9 Parte 1

Code 2.1: CODE CAPTION.

```
1
2 Lambda1=1.;
3 Lambda2=1.;
4 Niter=10000000;
5 dT=0.001;
6 S=Table[RandomReal[],{ix,1,100}];
7 B=Table[RandomReal[],{ix,1,100}];
8 TempiS=Table[0,{ix,1,100}];
9 TempiB=Table[0,{ix,1,100}];
10 TempiAttesa=Table[-1,{ix,1,Niter}];
11 m=Table[0.9,{ix,1,Niter}];
12 M=Table[0.1,{ix,1,Niter}];
13 Miin=0.9;
14 Maax=0.1;
15 For[j=1,j<= Niter,j++,
16     Z1=RandomReal[{0,1}];
17 If[Z1<Lambda1*dT,
18     Snew=RandomReal[{0,1}];
19     LB=Length[B];
20     If[LB>0,
21         PosizioneMaxB=Ordering[B,-1];
22         Bmax=B[[PosizioneMaxB]].{1};
23         If[j>5000000,
24             m[[j]]=Bmax;
25             If[m[[j]]<Miin,
26                 Miin=m[[j]];];]
27     If[Bmax>Snew,
```

2. IL MODELLO DI STIGLER

```
28         TempiAttesa[[j]]=j*dT-TempiB
29             [[PosizioneMaxB]];
30         B>Delete [B,PosizioneMaxB];
31         TempiB>Delete [TempiB,PosizioneMaxB];,
32         S=Append [S,Snew];
33         TempiS=Append [TempiS ,j*dT];
34     ];,
35     S=Append [S,Snew];
36     TempiS=Append [TempiS ,j*dT];
37 ];
38 ];
39     Z2=RandomReal [{0,1}];
40 If [Z2<Lambda2*dT,
41     Bnew=RandomReal [{0,1}];
42     LS=Length [S];
43     If [LS>0,
44         PosizioneMinS=Ordering [S,1];
45         Smin=S [[PosizioneMinS]].{1};
46         If [j>5000000,
47             M[[j]]=Smin;
48             If [M[[j]]>Maax,
49                 Maax=M[[j]];];]
50         If [Bnew>Smin,
51             TempiAttesa[[j]]=j*dT-TempiS
52                 [[PosizioneMinS]];
53             S>Delete [S,PosizioneMinS];
54             TempiS>Delete [TempiS,PosizioneMinS];,
55             B=Append [B,Bnew];
56             TempiB=Append [TempiB ,j*dT];
57         ];,
58         B=Append [B,Bnew];
59         TempiB=Append [TempiB ,j*dT];
60     ];
61 ];
62 ];
63 Histogram [{B,S},{0.001}]
64 Print [Miin];
65 Print [Maax];
```

2.0.10 Parte 2

Code 2.2: CODE CAPTION.

```
1 Lambda1=1;
2 Lambda2=1;
3 rho=0.5;
4 Niter=10000000;
5 dT=0.001;
6 S=Table[RandomReal[],{ix,1,1}];
7 B=Table[RandomReal[],{ix,1,1}];
8 TempiS=Table[0,{ix,1,100}];
9 TempiB=Table[0,{ix,1,100}];
10 TempiAttesa=Table[-1,{ix,1,Niter}];
11 m=Table[0.9,{ix,1,Niter-10}];
12 M=Table[0.1,{ix,1,Niter-10}];
13 Miin=0.9;
14 Maax=0.1;
15 For[j=1,j<= Niter,j++,
16     Z1=RandomReal[{0,1}];
17 If[Z1<Lambda1*dT,
18     Snew=RandomReal[{0,1}];
19     LB=Length[B];
20     If[LB>0,
21         PosizioneMaxB=Ordering[B,-1];
22         Bmax=B[[PosizioneMaxB]].{1};
23         If[j>5000000,
24             m[[j]]=Bmax;
25             If[m[[j]]<Miin,
26                 Miin=m[[j]];];]
27         If[Bmax>Snew,
28             TempiAttesa[[j]]=j*dT-TempiB
29                 [[PosizioneMaxB]];
30             B>Delete[B,PosizioneMaxB];
31             TempiB>Delete[TempiB,PosizioneMaxB];,
32             S=Append[S,Snew];
33             TempiS=Append[TempiS,j*dT];
34         ],,
35     S=Append[S,Snew];
36     TempiS=Append[TempiS,j*dT];
37 ];
38 ];
39     Z2=RandomReal[{0,1}];
40 If[Z2<Lambda2*dT,
```

2. IL MODELLO DI STIGLER

```
41     Bnew=RandomReal[{0,1}];
42     LS=Length[S];
43     If[LS>0,
44         PosizioneMinS=Ordering[S,1];
45         Smin=S[[PosizioneMinS]].{1};
46         If[j>5000000,
47             M[[j]]=Smin;
48             If[M[[j]]>Maax,
49                 Maax=M[[j]];];]
50         If[Bnew>Smin,
51             TempiAttesa[[j]]=j*dT-TempiS
52                 [[PosizioneMinS]];
53             S=Delete[S,PosizioneMinS];
54             TempiS=Delete[TempiS,PosizioneMinS];,
55             B=Append[B,Bnew];
56             TempiB=Append[TempiB,j*dT];
57         ];,
58         B=Append[B,Bnew];
59         TempiB=Append[TempiB,j*dT];
60     ];
61 ];
62 Z3=RandomReal[{0,1}];
63 If[Z3<rho*dT,
64     LB=Length[B];
65     LS=Length[S];
66     If[LS*LB>0,
67         PosizioneMinS=Ordering[S,1];
68         Smin=S[[PosizioneMinS]].{1};
69         PosizioneMaxB=Ordering[B,-1];
70         Bmax=B[[PosizioneMaxB]].{1};
71         S=Append[S,Snew];
72         TempiS=Append[TempiS,j*dT];
73         B=Append[B,Bnew];
74         TempiB=Append[TempiB,j*dT];
75     ];
76 ];
77 ];
78 Histogram[{B,S},{0.001}]
79 Print[Miin, " ", Maax];
```

2.0.11 Parte 3

Code 2.3: CODE CAPTION.

```
1
2 TempiAttesa = Select[Flatten[TempiAttesa], # > -1 &];
3
4 Length[TempiAttesa]
5
6 StatisticaTempiDeiTempiAttesa = N[BinCounts[TempiAttesa, 1]
7                               /Length[TempiAttesa]];
8
9 A = ListLogLogPlot[StatisticaTempiDeiTempiAttesa, PlotRange
10                  -> All, Frame -> True, PlotMarkers -> "+",
11                  FrameLabel ->{Delta t,P_{Delta t}[Delta t]}]
12
13 B = LogLogPlot[x^(-3/2), {x, 1, 40000}, Frame -> True,
14                PlotStyle -> {Red}]
15
16 Figura = Show[A, B]
```


Bibliografia

- [1] F. Slanina, *Essential of Econophysics Modelling*, Oxford University Press, New York, 2014.
- [2] H. Luckock, *A steady-state model of the continuous double auction*, Quantitative Finance, 3 voll., Insitute of Physics Publishing, Sydney, 2003.
- [3] V. Peržina, J. M. Swart, *How many market makers does a market need?*, arXiv:1612.00981, 2016.
- [4] F. Abergel, M. Anane, A. Chakraborti, A. Jedidi, I. M. Toke, *Limit Order Books*, Cambridge University Press, Delhi ,2016.
- [5] D. K. Gode, S. Sunder, *Allocative Efficiency of Markets with Zero-Intelligence Traders: Market as a Partial Substitute for Individual Rationality*, 101 voll., Journal of Political Economy,1993.
- [6] G. J. Stigler, *Public Regulation of the Securities Markets*, The Journal of Business, 37 voll., The University of Chicago Press, 1964.
- [7] P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld, *Self-Organized Criticality: An Explanation of $1/f$ Noise*, 59 voll., American Physical Society, New York, 1987.

Ringraziamenti

Ringrazio il mio relatore e il mio correlatore per avermi dato l'opportunità di intraprendere questo lavoro, per la disponibilità, la pazienza e per aver reso questa esperienza più positiva di quanto non lo potesse già essere anche solo per l'argomento affrontato.

Ringrazio i miei genitori, mio fratello e mio nonno che mi hanno sempre sostenuta (economicamente e moralmente) riponendo fiducia in me e incoraggiandomi, con il loro bene, nei momenti difficili.

Ringrazio Cinzia, Franco, Elena e Francesca per esserci stati e avermi sempre supportata come una famiglia.

Ringrazio Dario per essermi quotidianamente di sostegno con la sua presenza, il suo amore e tutto ciò che viviamo insieme.

Ringrazio la mia amica di sempre Camilla, i miei cari amici Paolo, Alessandro e Francesca che ci son stati (quasi) fin dall'inizio di questo percorso e spero continueranno ad esserci, le mie coinquiline con cui ho condiviso la casa e molto molto altro e gli amici delle serate al bar dei China.

È anche grazie a tutti voi se sono riuscita a raggiungere i miei obiettivi.