

# Indice

Indice	1
1 Breve storia del controllo automatico	4
1.1 Gli inizi del controllo	4
1.2 Il periodo pre-classico	6
1.3 Il periodo classico	8
1.4 Controllo moderno	10
2 Introduzione al controllo digitale	14
2.1 Premessa	14
2.1.1 Vantaggi e problemi dei controllori digitali	18
2.2 Il campionamento tramite un treno d'impulsi	19
2.3 Spettro del segnale campionato	21
2.4 Il teorema del campionamento	22
2.5 Aliasing	24
2.6 Il ricostruttore d'ordine zero	26
2.7 Ricostruzione del segnale e ritardo	28
3 Progetto per discretizzazione	31
3.1 Premessa	31
3.2 Considerazioni generali sulla discretizzazione	31
3.3 Metodi di discretizzazione	33
3.4 Metodo dell'invarianza della risposta	35
3.4.1 Metodo dell'invarianza all'impulso	35

3.4.2	Metodo dell'invarianza al gradino	38
3.5	Metodo d'integrazione numerica	40
3.5.1	Metodo delle differenze «all'indietro»	40
3.5.2	Metodo delle differenze «in avanti»	43
3.5.3	Trasformata bilineare (o di Tustin)	45
3.5.4	Metodo di Tustin con precompensazione frequenziale	50
3.6	Metodo della corrispondenza poli zeri(Matched poles and zeros )	52
3.7	Considerazioni conclusive	55
4	<b>Regolatori a struttura fissa (PID)</b>	<b>56</b>
4.1	Definizione e strutture del controllore PID analogico	57
4.1.1	Definizione del controllore PID analogico	57
4.1.2	Struttura del controllore PID analogico	61
4.2	Controllori PID digitali	64
4.2.1	Algoritmi PID assoluti	64
4.2.2	Algoritmi PID incrementali	68
4.3	Sintesi dei controllori PID	69
4.4	Metodi analitici	70
4.4.1	Criteri di tipo integrale	71
4.4.2	Allocazione dei poli	73
4.4.3	Sintesi in frequenza	74
4.5	Sintonizzazione sperimentale	78
4.5.1	Metodo a catena aperta	78
4.5.2	Metodo a catena chiusa	81
4.6	Sintonizzazione manuale	82
4.7	Sintonizzazione nei controllori PID digitali	79
4.7.1	Auto-sintonizzazione	79
4.8	Gestione dei ritardi	81
5	<b>Funzionalità aggiuntive dei controllori PID discreti</b>	<b>89</b>
5.1	Dispositivi di desaturazione (Anti-reset wind-up)	89
5.1.1	Desaturazione dei controllori PID digitali	95

5.2	Funzionamento manuale/automatico	95
5.3	Varianti dei controllori PID	98
<b>6</b>	<b>Progetto nel piano <math>\omega</math></b>	<b>100</b>
6.1	Definizione del piano $\omega$	100
6.1.1	Definizione del piano $\omega$ : sintesi mediante trasformata bilineare	100
6.1.2	Uso dei diagrammi di Bode nel piano $\omega$	102
6.2	Progetto di rete ritardatrice (attenuatrice)	104
6.3	Progetto di rete anticipatrice (o lead-lag)	108
6.4	Progetto di rete a ritardo/anticipo (o a sella)	111
<b>7</b>	<b>Progetto mediante il luogo delle radici</b>	<b>115</b>
7.1	Premessa	115
7.2	Le regole del tracciamento	116
7.3	Esempio di tracciamento di luogo delle radici	118
7.4	Calcolo nell'intervallo di stabilità del parametro	120
7.5	Il progetto del controllore con il luogo delle radici	123
<b>8</b>	<b>Progetto con metodi analitici</b>	<b>130</b>
8.1	Progetto per assegnamento poli-zeri	130
8.2	Vincoli sulle specifiche	132
8.3	Calcolo della soluzione dell'equazione diofantea	134
8.4	Controllo deadbeat	139
8.5	Progetto deadbeat semplificato	145
8.6	Progetto semplificato secondo Dahlin	145
8.7	Progetto con specifica diretta sul controllo	148
8.8	Progetto con variazioni di carico	150
	<b>Bibliografia</b>	<b>154</b>
	<b>Ringraziamenti</b>	<b>155</b>

# Capitolo 1

## Breve storia del controllo automatico

Prima di trattare l'argomento principale della tesi, vale a dire le tecniche progettuali di controllori digitali, si è preferito inserire una breve introduzione sulla storia della nascita del controllo automatico, per dare un'idea di quanto tempo sia stato necessario per arrivare ai risultati odierni in quest'ambito.

La seguente introduzione si prefigge quindi di dare una puntuale ricostruzione dei principali periodi della storia del controllo automatico, la quale può essere suddivisa in:

- inizi del controllo (fino al 1900);
- il periodo pre-classico (1900 – 1940);
- il periodo classico (1935 – 1960);
- il controllo moderno (dopo il 1955);

### 1.1 Gli inizi del controllo

La nascita del controllo risale a tempi remoti, tanto che i primi sistemi retroazionati di controllo automatico sono riconducibili a più di duemila anni fa.

Alcuni dei primi esempi furono dispositivi per controllare il livello del liquido in un recipiente di vino, gli orologi ad acqua descritti da Vitruvio ed attribuiti a Ctesibio (circa 270 a.C.) e, circa trecento anni dopo, degli automi costituiti da differenti meccanismi retroazionati, descritti da Erone di Alessandria.

È importante specificare che la parola feedback o retroazione, di particolare interesse in questa tesi poiché vengono trattati sistemi di controllo retroazionati, fu introdotta nel XX secolo da ingegneri delle telecomunicazioni per descrivere il ritorno parassita all'ingresso di un circuito amplificatore del segnale d'uscita, ed è quindi di molto successiva alla nascita dei dispositivi stessi.

Un'invenzione più recente è il sistema, progettato da Cornelis Drebbler nel 1620, per controllare automaticamente la temperatura di un forno usato per riscaldare un'incubatrice.

Lo sviluppo più significativo nel controllo durante il XVIII secolo fu però dato dal regolatore della macchina a vapore, il quale era caratterizzato da un meccanismo lift-tenter utilizzato sia nei mulini ad acqua che in quelli a vento per controllare la distanza fra le pietre di macina.

Matthew Boulton (1728 – 1809) descrisse l'originale meccanismo in una lettera (datata 28 maggio 1788) al suo compagno James Watt (1736 – 1819), il quale intuì come si potesse adattare questo regolatore per controllare la velocità di rotazione della macchina a vapore.

Il funzionamento di tale regolatore si basava su principi meccanici: due sfere meccaniche poste all'estremità di bracci mobili collegati all'asse, formavano un angolo con la verticale che dipendeva dalla velocità angolare di rotazione.

Se la velocità angolare diminuiva, le sfere si accostavano all'asse e il manicotto sull'asse s'abbassava aprendo la valvola di flusso del vapore.

Ciò provocava un aumento della potenza del motore, che a sua volta incrementava la velocità di rotazione.

Il primo progetto fu realizzato nel novembre del 1788 ed il primo regolatore venne utilizzato l'anno successivo.

Il regolatore originale di Watt evidenziò alcuni limiti e fu per questo che nei primi settanta anni del XIX secolo si ebbero migliaia di brevetti di tale dispositivo in tutto il mondo nel tentativo di migliorare d'idea iniziale (tra questi abbiamo quello di Siemens e quello di Porter).

Nel 1868 James Clerk Maxwell (1831 – 1879) pubblicò l'articolo dal titolo "On Governors" sui Proceedings della Royal Society, nel quale poneva le basi per la teoria dei controlli analizzando il Regolatore Centrifugo di James Watt.

Egli cominciò ad interessarsi a tale problema quando venne chiamato a far parte di una commissione incaricata di stabilire gli standard di misura di certe grandezze elettriche.

Gli esperimenti che condusse a questo scopo, richiesero l'utilizzo di una macchina elettrica dotata di un regolatore di velocità di tipo molto preciso (Regolatore centrifugo di Watt) per ottenere delle misure altrettanto precise.

È importante dire che il regolatore non venne considerato immediatamente come uno strumento di controllo separato dalla macchina, ma acquisì una sua autonomia dal punto di vista strutturale quando Maxwell dimostrò le sue potenzialità considerandolo, come un sensore meccanico basato sulla retroazione.

Nel suo articolo, pubblicato nel 1868, il regolatore viene definito nella seguente maniera:

*“Un regolatore è una parte della macchina per mezzo della quale la velocità della macchina è mantenuta approssimativamente costante, nonostante le variazioni nella potenza del motore o nella resistenza del carico”.*

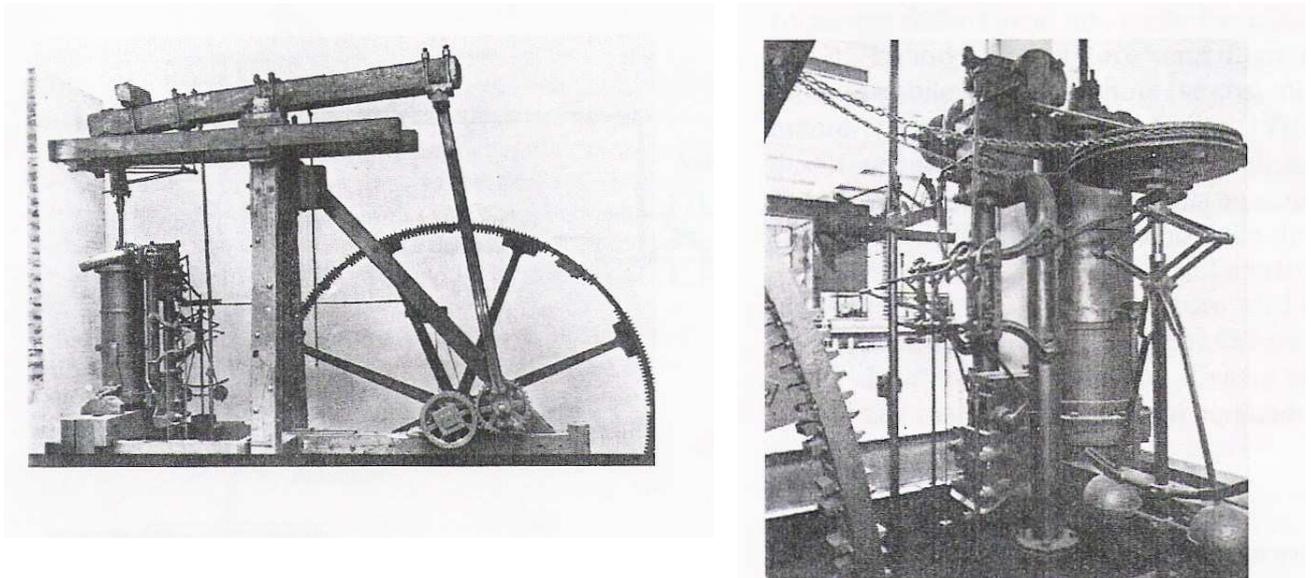


Figura 1.1 Il motore a vapore del laboratorio di James Watt ed il motore a vapore di Watt (1789-1800) con un regolatore centrifugo( British Crown Museum, Science Museum, Londra )

Inoltre, in questi anni vennero recensiti tentativi d'analizzare il meccanismo del regolatore per determinare le condizioni operative di stabilità, per la quale si era mostrata notevole interesse. A tale proposito già J.V. Poncelet nel 1826 e nel 1836 e G.B. Airy nel 1840 e nel 1851 avevano dimostrato che la dinamica del moto del regolatore poteva essere descritta da equazioni differenziali, evidenziando entrambi la difficoltà a determinare le condizioni per un comportamento stabile.

Airy nel 1851 era già riuscito a definire le condizioni per il "funzionamento stabile", ma la sua trattazione fu così coincisa che non fu possibile capire il procedimento con cui arrivò a definirle.

Fu necessario infatti l'intervento di Maxwell per dare delle soluzioni valide al problema, anche se non del tutto capite dall'ambiente scientifico del tempo.

Maxwell mostrò che per sistemi di secondo, terzo e quarto ordine l'analisi dei coefficienti dell'equazione differenziale permetteva di determinare la stabilità del sistema.

Egli, oltre ad essere in grado di determinare le condizioni necessarie e sufficienti delle equazioni fino al quarto grado, fornì anche due condizioni necessarie per i sistemi del quinto ordine.

L'articolo di Maxwell non venne accolto con la dovuta attenzione, contrariamente ad oggi, e solo agli inizi del XX secolo il lavoro fu assimilato, diventando parte fondante delle conoscenze ingegneristiche.

Il problema formulato da Maxwell fu ripreso da Edward John Routh (1831 - 1907), che nel 1877 pubblicò un trattato esteso "Stability of Motion", nel quale forniva una relazione tra il modello matematico di un sistema e le sue proprietà per mezzo di equazioni differenziali di grado arbitrario.

Determinare i criteri per la stabilità fu ciò che valse l'Adam Prize a Routh.

Il criterio, sviluppato nel suo trattato, rimane ancora d'interesse, tanto che gli ingegneri del controllo imparano, ancora oggi, come utilizzare la sua semplice tecnica.

L'analisi dell'equazione caratteristica rimase il fondamento della teoria del controllo fino all'invenzione dell'amplificatore elettronico a retroazione da parte di H.S.Black, nel 1927, ai Bell Telephone Laboratories.

Parallelamente Adolf Hurwitz nel 1895 arrivò anch'egli ad una soluzione equivalente.

Inoltre, subito dopo la pubblicazione del lavoro di Routh, il matematico russo A.M. Lyapunov (1893) iniziò a studiare la questione della stabilità del moto, andando a gettare le basi per quello che oggi è chiamato approccio con le variabili di stato.

## 1.2 Il periodo pre-classico

Nei primi anni del XX secolo vi fu una rapida ed ampia crescita delle applicazioni di controllori retroazionati per la regolazione di corrente, tensione e frequenza, per il controllo di caldaie per la produzione di vapore, per il controllo di velocità di motori elettrici, per la stabilizzazione dei sistemi di pilotaggio di navi ed aeroplani, per il controllo di temperatura, pressione e flusso nei processi industriali.

Gli strumenti progettati, costruiti e prodotti erano moltissimi, sebbene la maggior parte di essi fossero realizzati senza una chiara conoscenza della dinamica del sistema da controllare, delle apparecchiature di misura e degli attuatori del sistema di controllo; la maggior parte delle apparecchiature riguardavano semplicemente la regolazione, per cui la mancanza di conoscenza delle dinamiche non era un problema rilevante.

Furono sviluppati alcuni meccanismi contenenti complicate leggi di controllo, quale il sistema di guida navale automatica sviluppato da Sperry o un sistema per le società fornitrici d'elettricità, il cui obiettivo era realizzare il funzionamento economico dei generatori di vapore.

Non appena gli strumenti di controllo furono utilizzati in differenti aree dell'ingegneria i due principali problemi che emersero furono:

- la mancanza di conoscenza teorica e di un linguaggio comune per discutere i problemi;
- la mancanza di metodi semplici e facilmente applicabili per l'analisi e il progetto.

L'unico strumento d'analisi utilizzabile erano le equazioni differenziali, da cui derivava la prova del criterio di stabilità di Routh-Hurwitz, allora non ancora ben diffusa; questa prova implicava un processo laborioso, a causa della difficoltà di ottenere dei valori per i parametri,

e non era in grado di fornire il margine di stabilità oppure indicazioni per rendere il sistema stabile.

Al crescere del numero delle applicazioni il problema del controllo divenne ancora più complicato: alcuni controllori che funzionavano in modo soddisfacente per un problema o per un insieme di condizioni operative erano insoddisfacenti quando applicati ad altri sistemi o quando le condizioni risultavano modificate.

Questo provocava frequentemente instabilità nel sistema, che fino a quel momento era, o sembrava essere, un sistema stabile.

Nel 1922 Nicholas Minorsky (1885- 1970) presentò un'analisi chiara del controllo relativo ai sistemi di posizionamento, divenuta nota solo alla fine degli anni Trenta dopo alcuni dei suoi articoli su "The Engineer", e formulò la legge di controllo oggi conosciuta come controllo PID o a tre termini, sulla base delle osservazioni del modo di cambiare rotta di una nave utilizzato dai timonieri.

Già negli anni precedenti alcuni ingegneri cercarono di agevolare il lavoro dei timonieri attraverso l'introduzione di sistemi motorizzati di governo del timone, in quanto su navi di notevoli dimensioni la spinta idrodinamica sul timone era tale da rendere necessario un elevato rapporto di trasmissione con il conseguente incremento del tempo di movimentazione del timone.

Il primo servomotore, progettato da Sickels negli Stati Uniti (brevettato nel 1853) era un sistema ad anello aperto, mentre il primo ad anello chiuso (brevettato nel 1866) fu progettato da J. McFarlane Gray per la nave a vapore Great Eastern di Brunel.

In Francia, approssimativamente nello stesso periodo, Farcot progettò alcuni sistemi di controllo della posizione ad anello chiuso, tra i quali alcuni motori di governo del timone.

Egli propose di chiamare queste apparecchiature servo-moteur o moteur asservi da cui derivano i termini servomeccanismi e servomotori.

Tornando a Minorsky c'è da dire che, anche se i progettisti avessero conosciuto il suo lavoro avrebbero comunque riscontrato la mancanza di apparecchiature di amplificazione di segnali di misura a bassa potenza, provenienti dagli strumenti di misura, stabili e lineari in modo da ottenere un livello di potenza sufficiente a pilotare l'attuatore.

Inoltre ci fu un momento di stallo per quanto riguarda gli amplificatori nei sistemi elettronici e pneumatici.

Già dai primi anni Venti i limiti degli amplificatori determinavano un serio ostacolo nello sviluppo della telefonia su grandi distanze, impedendo la costruzione di linee transcontinentali negli Usa, sebbene gli sviluppi nella progettazione dei cavi e l'utilizzo di carichi induttivi avessero incrementato la massima lunghezza di una linea telefonica non amplificata.

I ripetitori telefonici basati sull'amplificazione elettronica dei segnali furono utilizzati negli anni Venti ma le distorsioni introdotte limitavano il numero di elementi in sequenza; inoltre l'incremento del traffico sulla rete richiese l'ampliamento della banda delle linee con conseguente aumento delle perdite di trasmissione.

A questa problematica si applicò in quel periodo Harold Stephen Black (1898 – 1983), giungendo alla conclusione che se si sacrificava una parte del segnale amplificato per la retroazione le componenti di distorsione e di drift potevano essere ridotte: il 2 agosto 1927 egli riuscì a progettare un circuito amplificatore a retroazione negativa.

Gli approfondimenti che seguirono, con le relative sperimentazioni su larga scala sviluppate nel 1930 e nel 1931, entrarono in uso presso l'AT&T, ma i dettagli progettuali non furono pubblicati che nel 1934.

Black fu assistito da Harry Nyquist (1889-1976) nello sviluppare le sperimentazioni dell'amplificatore e nell'analizzare il suo comportamento.

Quest'ultimo pose le basi della cosiddetta analisi di Nyquist con la pubblicazione di "Regeneration Theory" del 1932.

Questo lavoro descrisse l'amplificatore a retroazione negativa e portò ad una maggiore comprensione dei vantaggi della retroazione negativa nei sistemi; inoltre introdusse un metodo d'analisi e progetto dei sistemi di controllo che non richiedeva la derivazione e l'utilizzo di equazioni differenziali e per il quale i dati sperimentali, come la risposta in frequenza misurata, poteva essere confrontata con i dati calcolati.

Dal confronto delle risposte poteva essere stimato il grado di stabilità del sistema e poteva essere dedotto un quadro delle modifiche necessarie per migliorarne le prestazioni.

Contemporaneamente al lavoro di Black, alla Foxboro Company Clesson E. Mason sviluppò un amplificatore pneumatico a retroazione negativa.

Gli amplificatori elettronici a retroazione negativa ed i controllori pneumatici furono l'esito di studi per risolvere problemi industriali.

Nello stesso periodo Vannevar Bush diresse lo studio dei calcolatori analogici presso il Massachusetts Institute of Technology (MIT), il cui risultato fu l'analizzatore differenziale, uno strumento per simulare le caratteristiche dei sistemi dinamici e per ottenere soluzioni numeriche delle equazioni differenziali.

Inoltre la scoperta dell'analizzatore frequenziale permise a Harold Locke Hazen (1901 – 1980) e ai suoi studenti lo studio e il progetto di servomeccanismi ad elevate prestazioni nonché la definizione della prima completa analisi teorica dei principali servomeccanismi.

### 1.3 Il periodo classico

Durante questo periodo differenti gruppi di studiosi in diverse nazioni incrementarono indipendentemente le conoscenze sull'analisi e sul progetto dei sistemi di controllo.

Il lavoro più conosciuto ed influente venne da tre gruppi negli Stati Uniti, mentre in Europa e in Russia si seguì un percorso differente basato sul lavoro di Vyshnegradsky (in Russia) e su quello di Barkhausen (in Germania) e sugli sviluppi successivi di Cremer, Leonard, e Mikhailov.

La AT&T continuò i tentativi di estendere l'ampiezza di banda del suo sistema di comunicazione, ottenendo una buona caratteristica di risposta in frequenza.

L'obiettivo prefissato era un guadagno costante in un'ampia e ben delimitata banda e un minimo ritardo di fase.

Gli studiosi dei Bell Telephone Laboratories trovarono che era possibile raggiungere l'obiettivo per quel che riguardava il guadagno ma con un notevole ritardo di fase.

Esponente fondamentale del periodo classico è Hendrik Bode, il quale aveva studiato l'estensione del metodo di progetto al dominio della frequenza, e nel 1940 era riuscito a dimostrare che non esisteva una relazione generale tra le variazioni d'attenuazione e di fase per una struttura fisica ma che c'era una relazione tra una data caratteristica d'attenuazione e la minima variazione di fase che poteva essere associata ad essa.

Nello stesso articolo adottò il punto  $(-1,0)$  come punto critico diversamente da quello indicato da Nyquist  $(+1, 0)$  ed introdusse il concetto di margine di guadagno, di fase e di limitazione guadagno-banda.

Il lavoro dettagliato venne pubblicato nel 1945 nel libro "Network Analysis and Feedback Amplifier Design".

Alla teoria del controllo fu dato un enorme impulso durante la Seconda guerra mondiale e le esigenze belliche contribuirono alla realizzazione di nuovi sistemi di pilotaggio per navi, aerei, di puntamento per le armi da fuoco e nel campo della telecomunicazione.

Alla fine della guerra le tecniche di controllo classiche, con l'eccezione del metodo di progetto del diagramma delle radici ideato da Walter Evans (1948-1950), erano noti.

Egli sviluppò tecniche e leggi che permettevano di seguire graficamente il percorso delle radici dell'equazione caratteristica, man mano che un parametro veniva modificato.

Questo metodo è applicabile sia nella progettazione che nell'analisi di stabilità, e rimane ancora oggi una tecnica molto importante.

Le tecniche basate sulla risposta in frequenza e sull'utilizzo dei diagrammi di Bode, di Nichols, di Nyquist diretto e inverso, permisero delle buone prestazioni in termini d'ampiezza di banda, risonanza, margini di guadagno e di fase e fornirono un quadro grafico della caratteristica dei sistemi.

L'approccio alternativo basato sulla risoluzione delle equazioni differenziali usando tecniche della trasformata di Laplace portarono a dei buoni risultati in termini di tempo di salita, sovraelongazione percentuale, errore a regime e smorzamento.

Molti ingegneri preferivano questa seconda soluzione in quanto le prestazioni venivano espresse in termini "reali", cioè in termini di risposta nel tempo del sistema.

Lo svantaggio consisteva nel fatto che fino allo sviluppo del metodo del diagramma delle radici non c'era un modo semplice e facile con cui il progettista poteva correlare le variazioni dei parametri alle variazioni della caratteristica nel tempo, e ciò prolungò il tempo necessario per il consolidamento dei risultati ottenuti.

Infatti, i primi risultati furono pubblicati negli anni Quaranta e nei primi anni Cinquanta; il primo libro dedicato ai sistemi di controllo fu "Automatic Control Engineering" di Ed S. Smith, in cui venivano espressi i mutamenti d'approccio sviluppati nel periodo bellico e che si mostravano superati.

I libri successivi, quello di Bode (sopra menzionato) e "Fundamental Theory of Servomechanism" di Leroy e MacColl iniziarono a rendere pubblici i nuovi approcci.

L'Institution of Electronic Engineers (IEE) organizzò nel 1946 a Londra un congresso sui radar, mentre in una successiva conferenza sul controllo nel 1947 si evidenziò un vivo interesse per i servomeccanismi.

Il congresso sul "Controllo automatico" tenuto a Cranfield in Inghilterra nel 1951 e il "Frequency Response Symposium" tenuto a dicembre nel 1953 a New York segnarono l'inizio del periodo di transizione al periodo della moderna teoria del controllo.

Il primo di questi, organizzato dal Dipartimento della ricerca scientifica e industriale, con l'aiuto dell'IEE e dell' IMechE, fu la prima grande conferenza internazionale sul controllo automatico.

Arnold Tustin guidò il comitato organizzatore a cui furono sottoposti trentatré articoli di cui sedici riguardanti problemi di rumore, non linearità e campionamento nei sistemi.

Ci furono anche alcune sessioni riguardanti il calcolo analogico e l'analisi delle caratteristiche dei sistemi economici.

Dopo i summenzionati congressi molti libri divulgativi sull'argomento vennero pubblicati, tanto che il governo inglese promosse un dibattito sullo stesso.

Le esperienze del periodo di guerra dimostrarono la potenza dell'approccio della risposta in frequenza nel progetto di sistemi retroazionati, rivelando anche la fragilità di ogni metodo di progetto basato sull'ipotesi di caratteristiche deterministiche e lineari.

Inoltre i problemi di progetto cambiarono, considerando come obiettivo un controllore stabile o il controllore ottimo.

A tal proposito Ziegler e Nichols mostrarono come fosse possibile scegliere i parametri di un determinato tipo di controllore per ottenere prestazioni ottime di una data struttura di controllo (PID, PI).

Prima di riconoscere che ciò che era importante era la scelta di un appropriato indicatore di prestazioni furono portate sterili argomentazioni per indicare quale fosse il "migliore" indicatore.

Oltre al criterio di valutazione delle prestazioni basato sulla minimizzazione della funzione errore ci fu, per certe classi di sistemi, un interesse nel minimizzare il tempo di set-point.

Negli anni Cinquanta, all'articolo di Donald Mc Donald "Non-Linear Techniques for Improving Servo Performance" (1950), seguì il lavoro sul problema del tempo ottimo, nel caso monovariabile, con un controllo di saturazione svolto da Bushaw (1952) e da Bellman (1956).

In un articolo J. P. LaSalle (1952) generalizzò tutti i risultati precedenti, mostrando che se il controllo ottimo esisteva era unico e di tipo bang-bang (tutto o niente).

Tale tipologia di controllo si presenta quando esiste un dominio d'ammisibilità (quindi una limitazione), sulla possibile azione di controllo.

Gli sviluppi svolti in quest'area furono raccolti nel libro di Oldenburger "Optimal Control"(1966).

Il problema più difficile fu la scelta della struttura di controllo che fornisse le migliori prestazioni e come definire queste ultime.

Per quanto concerne, invece, il lavoro sull'idea della risposta in frequenza e dei metodi di progetto continuò durante tutti gli anni Cinquanta; furono sviluppati metodi di progetto per sistemi contenenti non linearità ed evidenziati i fondamenti teorici dei sistemi a segnali campionati.

Nacque inoltre l'insegnamento di servomeccanismi e della teoria del controllo, inizialmente attraverso corsi specifici per ingegneri già laureati e già operanti e successivamente attraverso corsi adeguati nei piani di studio di molti corsi d'ingegneria.

E' importante anche ricordare le parole di Gordon Brown e Duncan Campbell, che nel 1949 espressero chiaramente quelle che intendevano come future aree d'applicazione del controllo:

*"Il controllo automatico avanzato.... è il progetto coordinato d'impianti, strumenti ed apparecchiature di controllo.*

*Dobbiamo pensare ad una filosofia che ci consenta di migliorare la qualità del prodotto, di coordinare più efficacemente le operazioni nell'impianto, di considerare attentamente gli aspetti economici collegati al progetto e di operare in modo sicuro nella nostra complessa comunità socio-industriale.*

*Queste osservazioni generali sono deducibili dal fatto che molte industrie hanno migliorato sensibilmente la qualità nella produzione e la loro situazione economica incrementando il controllo automatico.*

*La conservazione della materia prima in un processo, così come la spesa energetica nella produzione, spesso ha implicato la riconsiderazione del controllo.*

*La protezione della salute della popolazione limitrofa ad una grande area industriale relativa all'inquinamento dell'aria e dell'acqua è un problema sufficientemente serio per tenerci allerta nei prossimi studi di tecniche di controllo automatico, non solo per l'aspetto umano ma anche per quello economico".*

Questo era il programma a lungo termine in quel tempo in cui molti problemi tecnici e sociali potevano richiedere "un decennio o più per essere risolti.

Da quando Brown e Campbell scrissero queste parole la penetrazione dei sistemi di controllo nella vita moderna è andata forse ancora più velocemente di quello che immaginavano.

## **1.4 Controllo moderno**

Sebbene le prospettive evidenziate nei lavori del dopoguerra furono influenzate dalle nuove conoscenze ottenute durante la guerra, la traiettoria dello sviluppo, come disse Alistar J.G. Mac Farlane (1979), fu ampiamente determinata da due fattori: innanzitutto il lancio, la

manovra, la guida e il controllo di missili e di veicoli spaziali nonché l'avvento dei computer digitali.

Il primo era essenzialmente un problema di controllo di oggetti balistici, per il quale occorreva costruire dettagliati modelli fisici con equazioni differenziali lineari e non disporre di strumenti di misura ed altre apparecchiature di grande precisione.

Tra il 1948 e il 1952 Richard Bellman, lavorando nel dipartimento di matematica della Rand Corporation, studiò come determinare l'allocazione dei missili ai bersagli per provocare il maggior danno.

Questo gli permise di formulare il principio di ottimo e la programmazione dinamica, la cui scelta del nome fu determinata nel 1984 da un espediente politico.

Negli ultimi anni Cinquanta Bellman cominciò a lavorare alla teoria del controllo ottimo utilizzando inizialmente il metodo delle differenze finite, a causa dei problemi relativi alle condizioni al contorno, e cercò di formulare dei problemi di ottimizzazione deterministica in modo che potessero essere risolti dalla programmazione dinamica.

Il suo scopo era quello di osservare come, applicando una particolare politica di controllo, il sistema raggiungesse una regione dello spazio degli stati e quanto tempo vi rimanesse; il problema formulato in questo modo poteva essere trattato come un processo decisionale multi-stadio.

Lavorando con Dreyfus, Bellman sviluppò dei programmi per produrre delle soluzioni numeriche di molti problemi, pubblicando i risultati nel 1962.

E' da evidenziare che la difficoltà principale nell'uso della programmazione dinamica era costituita dalle dimensioni del problema.

I requisiti di prestazione, oltre a coinvolgere l'accuratezza posizionale, riguardavano anche vincoli esprimibili come richieste d'ottimizzazione.

I problemi dinamici che implicavano la minimizzazione o la massimizzazione di alcuni indici di prestazione hanno un'ovvia e forte analogia con le formulazioni variazionali classiche della meccanica analitica elaborate da Lagrange e Hamilton.

L'estensione del metodo di Hamilton all'ottica geometrica svolta da Pontryagin, nella formulazione del principio del massimo, permise l'inizio della teoria del controllo ottimo.

Questo e gli studi di Bellman sull'utilità del concetto di stato per la formulazione e la soluzione di molti problemi di controllo e di decisione permisero uno studio esteso e profondo della matematica del controllo automatico.

Grazie all'applicazione e allo sviluppo di una matematica avanzata fu possibile raggiungere una soddisfacente comprensione di questioni teoriche fondamentali, quali la controllabilità e l'osservabilità dei sistemi lineari.

Il problema della sintesi di un controllore per un sistema lineare, ottimo rispetto agli indici di prestazione e costi d'attuazione quadratici, fu risolto brillantemente.

Molto importante per l'Automatica, in quanto permetteva di semplificare l'analisi e la sintesi di sistemi la cui dinamica era governata da equazioni differenziali, fu l'uso della Trasformata Zeta che venne per primo proposto da Hurewicz nel 1947.

Tale denominazione fu poi coniata da John R. Ragazzini e Zadeh nel 1952.

I risultati ottenuti in questi anni supportati dalla nascita e diffusione dell'informatica resero possibili nel Ventennio seguente molte applicazioni dei controlli automatici prima impensabili.

Inoltre, Michael Athans pose i fondamenti di quella che adesso viene chiamata la moderna teoria del controllo ottimo, quando nel settembre del 1956 venne organizzato dai comitati del controllo di VDI e VDE un congresso internazionale ad Heidelberg (Germania) sul controllo automatico.

Durante questo congresso un gruppo di delegati concordò di costituire un'organizzazione internazionale per promuovere lo sviluppo del settore del controllo automatico.

L'organizzazione IFAC (International Federation of Automatic Control) fu ufficialmente costituita durante il meeting di Parigi dell'11 e 12 settembre 1957, in cui venne nominato primo presidente Harold Chestnut.

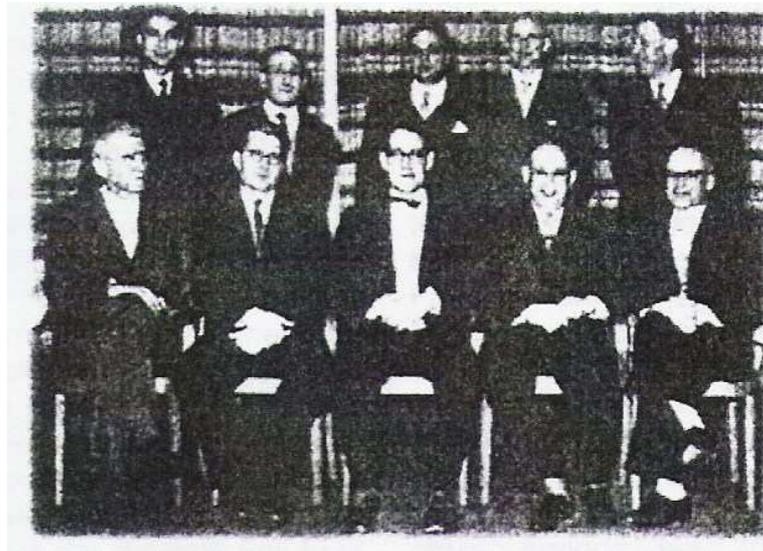


Figura 1.2 Il Comitato esecutivo dell'Ifac nel 1957

A quel meeting il delegato russo propose di realizzare il primo congresso a Mosca nel 1960. La conferenza di Mosca fu un importante simbolo del cambiamento di tendenza che avvenne a piccoli passi negli ultimi anni Cinquanta anche grazie all'articolo di Kalman "On the General Theory of Control System".

Kalman mostrò chiaramente l'esistenza di una profondità tra i problemi di controllo retroazionato a molte variabili e il filtraggio retroazionato a molte variabili, implicando quindi un nuovo inquadramento del problema del controllo ottimo.

Un passo importante fu il suo trattamento del controllo ottimo lineare multi variabile con un indice di prestazioni quadratico, e in particolare la definizione di procedura di sintesi.

Un ulteriore risultato importante fu quello di Wonham, che fornì la seguente condizione necessaria e sufficiente: affinché le frequenze caratteristiche in anello chiuso di un sistema possano essere variate arbitrariamente mediante retroazione occorre e basta che tutti gli stati del sistema siano raggiungibili.

Il trionfo finale dei metodi di risposta nel tempo apparve quando Kalman e Bucy studiarono il problema del filtraggio; il loro lavoro, oltre a produrre il filtro di Kalman-Bucy, dimostrò il ruolo primario della retroazione nella teoria del filtraggio e la dualità esistente tra il controllo multi variabile e il filtraggio in retroazione multi variabile.

Dopo il congresso di Mosca, questa impostazione dominò per almeno due decenni lasciando Isaac Horowitz, che continuò a lavorare sull'approccio basato sulla risposta in frequenza, praticamente isolato.

In poco tempo ci si rese conto che i potenti metodi di controllo ottimo non potevano essere utilizzati per tutti i problemi industriali a causa della mancanza di modelli accurati degli impianti, spesso addirittura non disponibili.

Come Karl Astrom e P.Eykoff evidenziarono nel 1971, il punto di forza dell'approccio classico della risposta in frequenza è "la sua tecnica efficace di identificazione dei sistemi, ad esempio l'analisi in frequenza" attraverso la quale le funzioni di trasferimento possono essere determinate ai fini dell'utilizzo di tecniche di sintesi.

Nel controllo moderno i modelli utilizzati sono parametrici in termini di equazioni di stato, e questo ha implicato l'interesse per la stima dei parametri e per le relative tecniche.

Inoltre nei primi anni Sessanta computer digitali furono usati nella raccolta dati on-line, per il controllo di supervisione e per l'ottimizzazione e anche, seppur limitatamente, per il controllo diretto digitale.

Solo negli anni Settanta si iniziò un ampio utilizzo del controllo on-line.

Un grande promotore dell'utilizzo dei computer nei processi industriali fu Eckman che nei primi anni Cinquanta convinse molte compagnie a supportare il suo programma di ricerca al Case Institute of Technology di Cleveland (Ohio).

Inizialmente denominato "automazione dei processi" il progetto fu poi chiamato "controllo dei sistemi complessi" in quanto Eckman desiderava distinguere ciò di cui si stava occupando dall'immagine popolare d'automazione, intesa come meccanizzazione della produzione e riduzione del lavoro.

Alla fine del decennio egli sosteneva che quello di cui l'industria necessitava erano "gli ingegneri dei sistemi, con un'ampia conoscenza di base fisica e matematica e con capacità analitica nell'approccio dei problemi, in modo da ottenere dal sistema fisico un adeguato modello matematico a cui applicare tutti i potenti strumenti di manipolazione, estrapolazione ed interpretazione".

## Capitolo 2

# Introduzione al controllo digitale

## 2.1 Premessa

In questo capitolo introduttivo si vuole dare una presentazione per sommi capi del contenuto della tesi, soffermandosi sulla tipologia di segnali presenti in un anello di controllo digitale, e sui vantaggi e gli svantaggi rispetto a quello analogico nell'ambito del controllo dei processi e delle macchine.

Innanzitutto è necessario definire il termine "controllo dei processi", che in ingegneria è generalmente riferito ad un ampio insieme di metodologie, tecniche e tecnologie orientate alla conduzione automatizzata di impianti industriali secondo criteri di ottimizzazione di prestazioni, costi, produzione, qualità.

In tale contesto, per processo s'intende in generale un insieme di operazioni o di trasformazioni che devono avvenire in sequenza opportuna in un impianto o in un sistema fisico, al fine d'ottenere la produzione di un oggetto o l'evoluzione di grandezze o parametri d'interesse.

L'automazione o controllo dei processi ha lo scopo di garantire che l'insieme di operazioni avvenga in modo corretto ed affidabile, con il minimo intervento dell'uomo, anche in presenza di variazioni dell'ambiente in cui il processo si svolge o di parametri interni al processo stesso.

In realtà, il contenuto di questa tesi, che si inquadra nella tematica del controllo dei processi, riguarda solo un aspetto specifico della più ampia materia, ossia il problema dell'analisi e della sintesi dei sistemi di controllo in retroazione in cui è presente un processo analogico ed un calcolatore digitale, ovvero un'elaborazione a tempo discreto della legge di controllo da applicare a tale processo.

Tale scelta è dettata dalla considerazione che il controllo digitale è ampiamente utilizzato, grazie allo sviluppo di microprocessori ( $\mu P$ ), microcontrollori ( $\mu C$ ), DSP (Digital Signal Processor), FPGA (Field Programmable Gate Array), etc, non solo nelle applicazioni high-tech, ma anche nelle applicazioni di piccola e media taglia di larga diffusione, e quindi di grande interesse tecnico.

Inoltre, la presenza di tale tipo d'elaborazione consente di programmare algoritmi complessi e quindi di mettere in atto strategie di controllo qualitativamente più sofisticate di quelle permesse in pratica dalla tecnologia tradizionale analogica.

E' per questo che attualmente, in campo industriale, la parola controllo sottintende ormai l'aggettivo digitale.

Un'altra differenza rispetto al caso analogico, consiste nel fatto che il sistema di controllo è un sistema ibrido in cui coesistono segnali a tempo continuo e a tempo discreto.

Tali tipologie di segnali possono essere definite, facendo riferimento alla figura 2.1, nella seguente maniera:

- segnali a tempo continuo: in tal caso la variabile tempo è definita su un intervallo dell'asse reale.

Se poi l'ampiezza assume valori con continuità su un intervallo di numeri reali si parla più propriamente di segnale analogico (caso (a)), oppure di segnale quantizzato a tempo continuo se l'ampiezza può assumere solo un insieme finito di valori (caso (b)).

· segnali a tempo discreto: in tal caso la variabile tempo è definita su un insieme di valori discreti, tipicamente equispaziati, ossia  $t = kT$  con  $k$  intero.

Se l'ampiezza può variare con continuità si parla di segnale a dati campionati (caso (c)), in quanto il segnale può essere pensato come generato dal campionamento (di tipo impulsivo) di un segnale analogico eseguito negli stessi istanti discreti nel tempo.

Si parla invece più specificatamente di segnale digitale (caso (d)), nel caso in cui l'ampiezza sia quantizzata, ossia rappresentabile con un codice a numero finito di cifre, tipicamente binario.

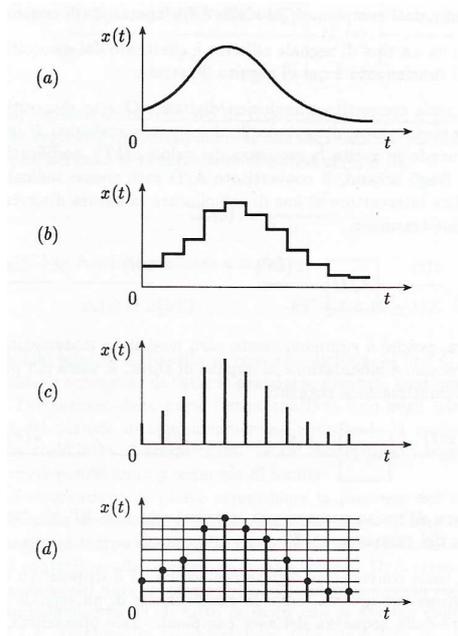


Figura 2.1 Segnali d'interesse: a) segnale analogico di tipo continuo; b) segnale tempo-continuo quantizzato; c) segnale a dati campionati; d) segnale digitale

Di solito, però, vengono utilizzate indifferentemente le dizioni “segnali a tempo continuo” ed “analogico”, così come quelle “segnali a tempo discreto”, “a dati campionati” e “digitali”.

Il sistema ibrido, citato prima relativamente al controllo digitale, viene utilizzato nella stragrande maggioranza dei casi pratici.

Esso include un processo da controllare, che è un sistema a tempo continuo, il quale sarà assunto lineare, e la cui uscita a tempo continuo  $y(t)$  è la variabile da controllare.

Si richiede che essa inseguia un segnale di riferimento  $u(t)$  dato, i cui campioni  $u(kT)$  negli istanti di tempo  $t = kT$ , con  $k = 0, 1, 2, \dots$  e  $T$  il periodo di campionamento, appaiono in ingresso del sistema di controllo.

Il compito di calcolare l'azione di controllo viene affidato ad un calcolatore digitale, che per sua natura fornisce la variabile di controllo  $m(kT)$  negli istanti di tempo discreti  $t = kT$  con  $k = 0, 1, 2, \dots$

Si noti in figura 2.2 la differenza tra il primo schema ed il secondo.

In quest'ultimo non viene convertito il segnale analogico errore, ma l'elaborazione discreta di controllo considera separatamente i due ingressi, ossia segnale di riferimento e variabile controllata.

Le interfacce tra i due diversi tipi di segnali presenti nel precedente sistema sono rispettivamente il convertitore analogico/digitale (indicato con A/D) e quello digitale/analogico (indicato con D/A), che devono essere opportunamente sincronizzati da un clock di periodo  $T$ .

Il convertitore A/D agisce su una variabile fisica (tipicamente un segnale elettrico) e la converte in una sequenza di numeri ad opportuni istanti di tempo.

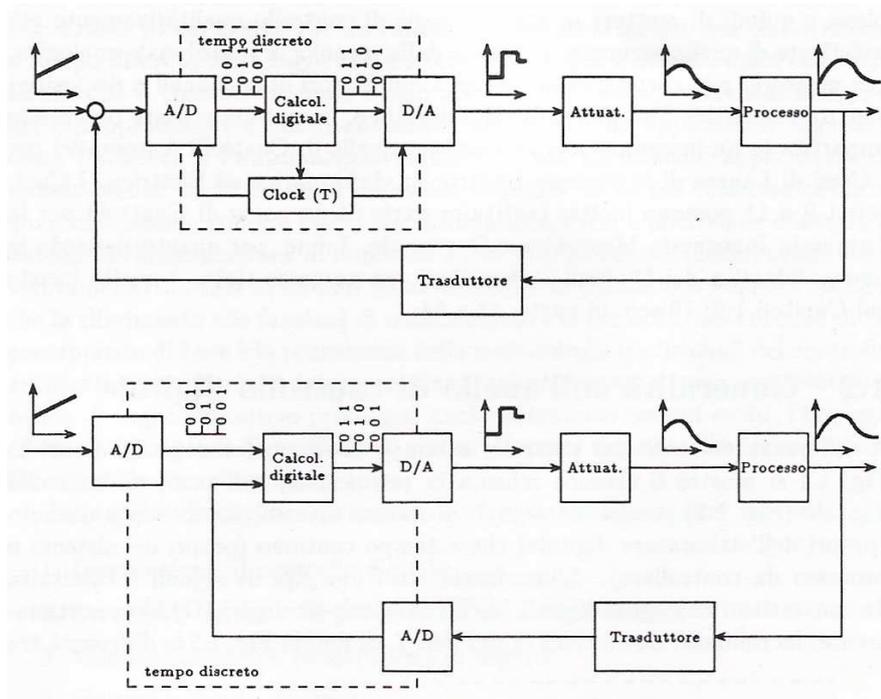


Figura 2.2 Schemi tipici di un sistema di controllo digitale in retroazione

Quindi oltre ad effettuare un'operazione di campionamento (cioè permettere la generazione di un segnale a tempo discreto partendo da uno a tempo continuo), la quale verrà analizzata in dettaglio nel paragrafo 2.2, effettua un'operazione di quantizzazione, nel senso che la memorizzazione dell'uscita del convertitore A/D in un dispositivo logico con un numero finito di cifre implica un certo troncamento.

È possibile anche avere una quantizzazione per arrotondamento, ma usualmente si preferisce la prima tipologia citata.

In figura 2.3 vengono riportate le caratteristiche di quantizzazione dei convertitori A/D nel caso a) troncamento complemento a 2, b) troncamento complemento a 1, c) arrotondamento.

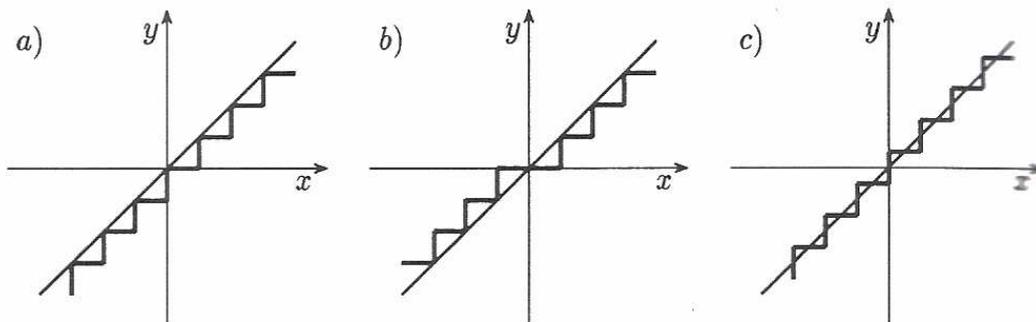


Figura 2.3 Caratteristiche di quantizzazione dei convertitori A/D nel caso a) troncamento complemento a 2, b) troncamento complemento a 1, c) arrotondamento

Si ottiene quindi un'accuratezza che dipende dall'ampiezza dell'intervallo di quantizzazione  $\Delta$ , nel senso che si avrà accuratezza tanto migliore quanto più l'intervallo si riduce.

Si noti che, poiché l'operazione di quantizzazione è non lineare, nel seguente testo verrà assunto il caso  $\Delta = 0$  in modo da poter utilizzare i risultati validi per i sistemi lineari.

Nelle rappresentazioni grafiche, il convertitore A/D viene indicato come un semplice interruttore, al fine di sottolineare la natura discreta dell'informazione trasmessa.



Figura 2.4 Convertitore analogico/digitale (A/D)

Talora, poiché il campionamento sarà modellato matematicamente con un processo a modulazione di impulsi di Dirac, si userà più precisamente la schematizzazione di figura 2.5, dove ora all'uscita compare un impulso, per  $t = kT$ , di "area" pari al valore del campione  $x(kT)$ .

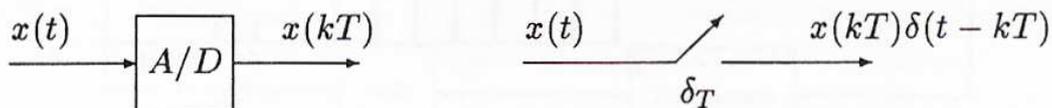


Figura 2.5 Convertitore analogico/digitale (A/D) nel caso in cui il campionamento sia modellato con un processo a modulazione di impulsi di Dirac

Il convertitore D/A realizza la conversione inversa, ossia la ricostruzione di un segnale analogico a partire dalla sequenza dei suoi campioni.

Tale operazione, come sarà spiegato in seguito, non è univocamente definita a meno che non siano soddisfatte le condizioni derivanti dal Teorema del campionamento, che verrà analizzato con maggior attenzione nel paragrafo 2.4.

Lo schema seguente:

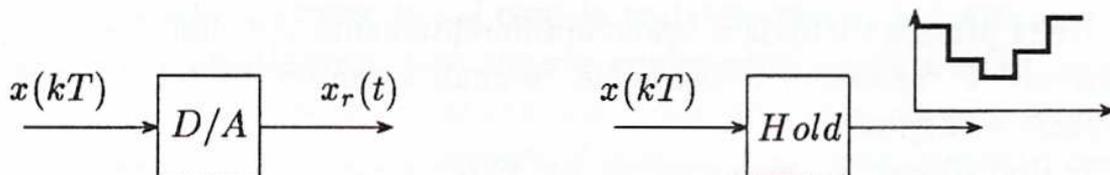


Figura 2.6 Convertitore digitale/analogico(D/A) ed Hold

si riferisce al ricostruttore d'ordine zero (Hold), che è quello di più largo impiego nei controlli.

Tale convertitore opera, mantenendo costante per un periodo  $T$  il valore del segnale che trova in ingresso, e produce in uscita un segnale costante a tratti.

Come si vedrà in seguito, il modello matematico del generico ricostruttore, congruente all'assunzione del campionamento è il seguente:

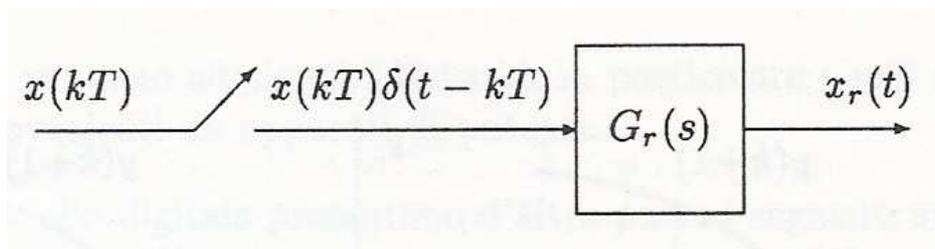


Figura 2.7 Successione campionatore-ricostruttore

dove all'ingresso della funzione di trasferimento  $G_r(s)$  è presente la sequenza degli impulsi corrispondente alla sequenza dei valori digitali.

## 2.1.1 Vantaggi e problemi dei controllori digitali

Nel seguente paragrafo verranno analizzati alcuni vantaggi e problemi relativi ai controllori digitali.

L'analisi terrà conto anche delle motivazioni della larga diffusione di tale tipo di controllori, a scapito di quelli analogici.

Uno dei motivi principali dello straordinario progresso di questi dispositivi (come ad es. l'introduzione dei  $\mu P$  negli anni Settanta, la quale ha segnato una svolta decisiva nel senso di una accelerazione delle tecniche di controllo digitale nelle applicazioni industriali) è dovuto al fatto che, ad un aumento delle prestazioni, viene fatta corrispondere una diminuzione del costo per una serie di motivi che nel seguito di tale paragrafo verranno esplicitati.

Inoltre il continuo aumento del tipo e del numero delle applicazioni, anche nel campo dei sistemi di controllo, ha incentivato la loro evoluzione verso sistemi sempre più potenti.

Quindi un'importante vantaggio dei controllori digitali è la flessibilità.

Oltre ciò, tra i principali motivi che hanno determinato la progressiva sostituzione dei controllori analogici con quelli digitali c'è anche la tendenza dei sistemi d'automazione ad una maggiore integrazione.

Da questo punto di vista diviene di primaria importanza la possibilità del singolo sistema di controllo di comunicare per via digitale con altri e con il sistema d'automazione di più alto livello.

Un altro importante motivo di sviluppo delle tecniche digitali di regolazione, proviene dalle ditte costruttrici di sistemi d'automazione, per le quali risulta vantaggiosa la possibilità di sviluppare un sistema hardware a  $\mu C$ , e di modificare, via software la funzione di regolazione, in base alle esigenze della particolare applicazione.

Ciò costituisce un vantaggio anche per l'utilizzatore finale del controllore che potrà riconfigurare via software le funzioni di regolazione per adattare alle mutate esigenze dell'impianto.

Inoltre l'impiego dello stesso hardware digitale per più anelli di regolazione permette d'avere un minor numero di componenti, la riduzione di ingombro, peso e consumo

Tale vantaggio ha costituito una delle motivazioni più importanti a favore della regolazione digitale nella prima fase della sua introduzione in applicazioni industriali (inizio anni '60).

Ciò era dovuto al fatto che il costo di un calcolatore di processo era allora molto elevato ed occorreva quindi impiegarlo per più d'un processo per giustificare la sua introduzione.

È necessario dire che però chiudere più anelli di controllo attraverso lo stesso hardware digitale non è spesso il criterio migliore poiché, in caso di malfunzionamento di quest'ultimo, si avrebbe la messa fuori servizio contemporanea di un certo numero di catene di controllo.

Inoltre, la presenza di un'elaborazione di tipo digitale permette di programmare algoritmi complessi e quindi di mettere in atto strategie di controllo qualitativamente più sofisticate di quelle permesse in pratica dalla tecnologia tradizionale analogica.

Infatti solo un sistema di controllo digitale permette l'implementazione di tecniche di controllo moderne che si basano sull'uso di stimatori, o che impiegano tecniche d'ottimizzazione, oppure consentono di realizzare sistemi di controllo adattativi, etc...

In realtà, anche dalle realizzazioni digitali di leggi di controllo analogiche, quali il controllo PID, che derivano da tecniche messe a punto nella prima metà del 1900, si ottengono degli interessanti vantaggi in quanto nel dispositivo possono essere integrate funzionalità diverse dalla semplice legge di controllo.

Ad esempio, possono essere facilmente realizzate logiche combinatorie e/o sequenziali, temporizzazioni, interfacce con l'operatore e con il sistema d'automazione di più alto livello, monitoraggio del processo che viene controllato, etc.

Sono soprattutto queste ultime funzionalità che hanno deciso l'affermazione del controllo digitale, oltre al vantaggio della flessibilità.

Nonostante i molti vantaggi, i controllori digitali presentano anche dei problemi che, se non sono risolti, comportano una degradazione consistente delle prestazioni e l'inutilizzabilità del controllore.

Se si considera un anello di controllo digitale possono presentarsi particolari problemi derivanti dalla precisione dell'elaborazione (moltiplicazione di parametri e valori di una variabile) e dalle limitazioni nella realizzazione dei convertitori A/D e D/A.

Inoltre, i parametri dell'algoritmo di controllo sono calcolati con un certo numero di cifre finite, e quindi possono differire dai valori ideali nominali.

Per quanto riguarda il convertitore A/D, esso effettua una quantizzazione (per troncamento o arrotondamento), che può essere descritta da un rumore bianco additivo uniformemente distribuito.

Può essere quindi definito un rumore di conversione, il quale dipende dalla funzione di trasferimento  $D(z)$  e non dalla sua realizzazione, e il cui effetto è amplificato per periodi di campionamento  $T$  piccoli.

Inoltre, poiché il segnale di conversione varia molto velocemente, è presente una certa difficoltà nel trattamento di segnali veloci.

È presente anche un errore di quantizzazione introdotto dall'aritmetica, la cui generazione e propagazione dipende dalla particolare struttura realizzativa di  $D(z)$ .

La soluzione migliore, per minimizzare tale errore, è quella di utilizzare realizzazioni parallele o in cascata.

Inoltre esiste una interdipendenza di queste caratteristiche con la scelta del periodo di campionamento.

Esaminando gli effetti del periodo di campionamento  $T$  sulle prestazioni si può concludere che:

- gli effetti di destabilizzazione crescono al crescere di  $T$ ;
- la perdita d'informazione sui segnali cresce al crescere di  $T$ ;
- l'accuratezza dell'algoritmo, ottenuto per discretizzazione, cresce al diminuire di  $T$ ;
- gli effetti della quantizzazione crescono al diminuire di  $T$ .

Dunque la scelta  $T = 2\pi/\omega_c$ , data dal Teorema del campionamento, è un buon compromesso tra prestazioni e costo.

Infine tra gli svantaggi relativi a tale tipo di controllori vengono anche ricordati l'utilizzo di linguaggi di programmazione, i protocolli di comunicazione, la necessità di una documentazione via software con il relativo costo e tempo per lo sviluppo di quest'ultimo, etc.

## 2.2 Il campionamento tramite un treno d'impulsi

Come accennato nella premessa, nella maggior parte dei casi pratici, il processo da controllare è un sistema continuo, lineare e stazionario per semplicità, mentre il compito di calcolare l'azione di controllo viene affidato ad un calcolatore digitale.

Il sistema ibrido, riportato in figura 2.2, viene detto a dati campionati, e la sua analisi è in generale più complessa di quella di sistemi intrinsecamente continui e/o discreti.

Infatti, la coesistenza di segnali di diversa natura, pone una serie di problemi riconducibili essenzialmente alle operazioni di campionamento e alla sua operazione inversa.

Il campionamento verrà considerato uniforme con periodo  $T$  positivo, e quindi sarà anche possibile definire un'unica frequenza di campionamento costante.

L'obiettivo di questo paragrafo e dei successivi è quello di descrivere ed analizzare il fenomeno del campionamento, cercando di definire una descrizione matematica del sistema basata sulla trasformata zeta.

Effettuando il campionamento di una variabile continua  $x(t)$ , l'uscita del campionatore è data da una successione di campioni  $x(kT)$  con  $k = 1, 2, \dots$ , d'ampiezza pari a quella di  $x(t)$  negli istanti  $t = kT$ .

Quindi segnali che presentano gli stessi valori negli istanti di campionamento generano la stessa sequenza di campioni.

Invece tra due istanti successivi il campionatore non trasmette informazione.

Per questo, come già accennato in precedenza, una possibile descrizione matematica di tale operazione consiste nel rappresentare l'uscita campionata  $x^*(t)$ , nel dominio del tempo continuo, come un treno d'impulsi di Dirac di ampiezza opportuna.

L'impulso di Dirac di area unitaria applicato all'istante  $t = kT$  viene espresso nella forma  $\delta(t - kT)$ .

L'uscita campionata  $x^*(t)$  viene definita:

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT)$$

Se indichiamo con  $\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$  il cosiddetto treno d'impulsi, il quale viene riportato in figura 2.8, l'uscita campionata può essere riscritta come il prodotto del segnale continuo  $x(t)$  per  $\delta_T(t)$ :

$$x^*(t) = x(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) = x(t) \delta_T(t)$$

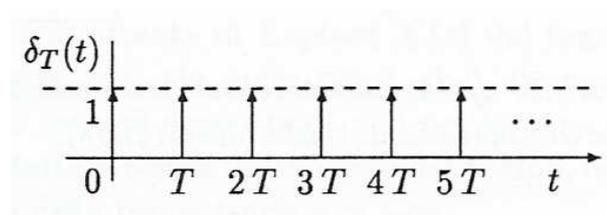


Figura 2.8 Treno d'impulsi di Dirac

Questo sta a significare che l'operazione di campionamento rappresenta una modulazione ad impulsi di portante  $\delta_T(t)$ , come rappresentato in figura 2.9.

Il campionatore impulsivo appena descritto è un modello ideale del campionatore reale (convertitore A/D) considerato adeguato alle esigenze d'analisi e progetto dei controllori digitali.

Se effettuiamo la trasformata di Laplace del segnale campionato  $x^*(t)$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} X^*(s) &= \mathcal{L}[x^*(t)] = x(0)\mathcal{L}[\delta(t)] + x(T)\mathcal{L}[\delta(t - T)] + \dots = x(0) + x(T)e^{-sT} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-skT} \\ &= X(z) \end{aligned}$$

Quindi ponendo  $z = e^{-sT}$ , la trasformata di Laplace di  $x^*(t)$  è proprio la trasformata zeta della sequenza  $x(0), x(T), \dots$  generata da  $x(t)$  agli istanti  $t = kT$ .

Dunque utilizzando la posizione  $z = e^{-sT}$ , il concetto del campionamento tramite il treno d'impulsi ci consente d'utilizzare la trasformata zeta per sistemi a tempo continuo che contengono un campionatore.

Si noti inoltre che rappresentando il campionamento come modulazione impulsiva si è già implicitamente assunto d'effettuare un campionamento ideale.

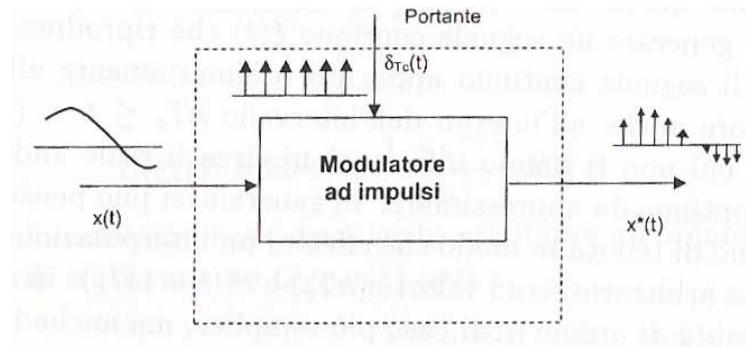


Figura 2.9 Il campionamento come modulazione impulsiva

## 2.3 Spettro del segnale campionato

La trasformata di Laplace del segnale campionato  $x^*(t)$ , rappresentato tramite una serie di Fourier, dà informazioni molto importanti circa gli effetti del campionamento.

Assumendo che il segnale di partenza  $x(t)$  sia nullo per  $t < 0$ , possiamo descrivere il segnale campionato nel dominio del tempo, estendendo la sommatoria:

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT)$$

Ancora una volta,  $x^*(t)$  è dato dal prodotto del segnale  $x(t)$  per un treno d'impulsi, in questo caso esteso da  $-\infty$  a  $+\infty$ .

Essendo il treno d'impulsi una funzione periodica, può essere rappresentata in serie di Fourier come:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j(2\pi n/T)t}$$

Nella precedente relazione i  $C_n$  rappresentano i coefficienti di Fourier e sono dati da:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \right] e^{-j(2\pi n/T)t} dt \quad \text{con } n = 0, \pm 1, \dots$$

Poiché l'unico elemento del treno d'impulsi situato all'interno dell'intervallo d'integrazione è quello centrato nell'origine, l'integrale precedente diviene:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t - kT) e^{-j(2\pi n/T)t} dt = \frac{1}{T}$$

e la rappresentazione in serie di Fourier del treno d'impulsi diventa:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j(2\pi n/T)t}$$

Utilizzando l'espressione appena ottenuta e la formula precedentemente trovata della  $X^*(s)$ , è possibile calcolare la trasformata di Laplace del segnale campionato, la quale vale:

$$X^*(s) = L[x^*(t)] = \int_0^{\infty} x(t) \left[ \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j(2\pi n/T)t} \right] e^{-st} dt$$

e, ricordando che il segnale di partenza  $x(t)$  è nullo per  $t < 0$ , si può scrivere:

$$X^*(s) = L[x^*(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[ \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j(2\pi n/T)t} \right] e^{-st} dt$$

Infine, scambiando l'ordine di sommatoria e d'integrale, che equivale ad integrare addendo per addendo, si ottiene:

$$X^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j(2\pi n/T)t} e^{-st} dt = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-(s - jn\omega_c)t} dt$$

dove si indica con  $\omega_c$  la pulsazione di campionamento, che è pari a  $2\pi/T$ .

Il secondo membro dell'equazione rappresenta semplicemente la trasformata di Laplace del segnale analogico  $x(t)$ , traslata in frequenza della quantità  $jn\omega_c$ .

Si può quindi scrivere:

$$X^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(s - jn\omega_c)$$

$$\text{e sostituendo } s = j\omega, \text{ si ottiene } X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[j(\omega - n\omega_c)]$$

La precedente relazione esprime il fatto che lo spettro del segnale campionato, tramite treno d'impulsi, è costituito da infinite repliche dello spettro del segnale originario, attenuato di un fattore  $1/T$ .

Tale spettro, come si può vedere nella figura 2.10, è periodico di periodo  $T$ , essendo le repliche centrate attorno a pulsazioni multiple della pulsazione di campionamento  $\omega_c$ .

## 2.4 Il teorema del campionamento

Per comprendere bene il processo di campionamento da un punto di vista frequenziale, prendiamo ora in considerazione un segnale  $x(t)$  avente uno spettro limitato in frequenza, o come spesso si dice "a banda limitata", come mostrato in figura 2.10 caso a).

Il segnale  $x(t)$  non contiene nessuna componente frequenziale al di sopra della pulsazione  $\omega_1$ . Tale ipotesi non è però verificata dai segnali reali, i quali per effetto del rumore di misura, sono caratterizzati da banda illimitata.

Quindi per applicare tale teorema sono utili, nella pratica, operazioni di pre-filtraggio del segnale misurato con un filtro passa basso (si veda paragrafo 2.7), allo scopo di renderlo a banda limitata, senza tuttavia perdere il contenuto informativo.

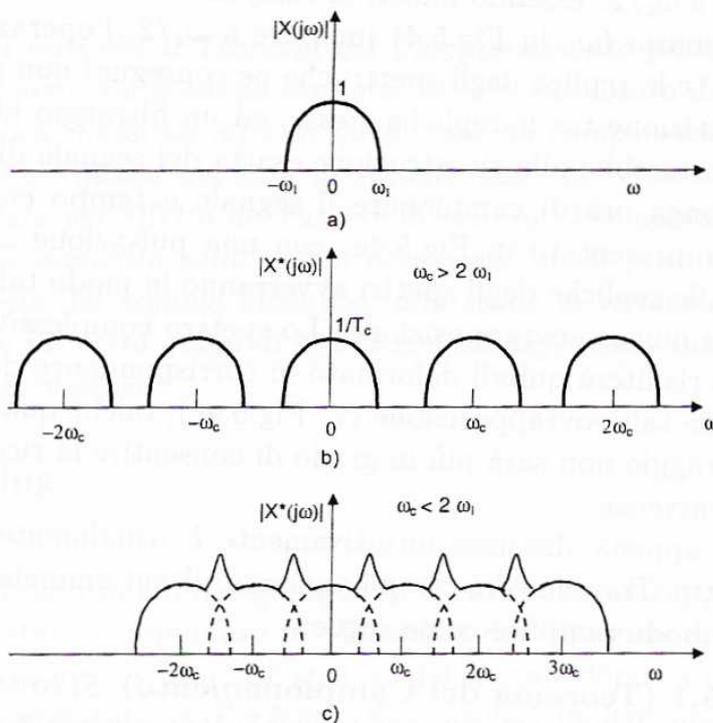


Figura 2.10 Spettro d'ampiezza  $|X(j\omega)|$  di un segnale (a), spettro del segnale stesso dopo il campionamento con  $\omega_c > 2\omega_1$  (b) e con  $\omega_c < 2\omega_1$  (c).

L'andamento spettrale del segnale campionato si ottiene dalla relazione precedentemente trovata sostituendo  $j\omega$  al posto della variabile complessa  $s$ ,

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[j(\omega - n\omega_c)]$$

dove  $\omega_c$  e' la pulsazione di campionamento.

In figura 2.10 b) è riportato l'andamento spettrale del segnale campionato  $x^*(t)$  nel caso in cui  $\omega_c > 2\omega_1$ .

Nello spettro frequenziale  $|X^*(j\omega)|$  la componente  $|X(j\omega)|/T$  è chiamata componente primaria, mentre tutte le altre componenti  $|X[j(\omega \pm n\omega_c)]|/T$  ( $n \neq 0$ ) sono chiamate componenti complementari o repliche.

Si noti che la condizione  $\omega_c > 2\omega_1$  mantiene distinta la componente primaria da quelle complementari per cui, mediante filtraggio, è possibile ricostruire esattamente il segnale a tempo continuo  $x(t)$  a partire da quello campionato, filtrando via tutte le componenti a frequenza maggiore di  $\omega_c/2$ .

Nel caso in cui la condizione  $\omega_c > 2\omega_1$  non sia rispettata il segnale campionato ha un andamento spettrale del tipo riportato in figura 2.10 c).

Il contributo delle singole componenti spettrali (primaria e complementari) è riportato in figura a tratto tratteggiato.

A tratto grosso è invece riportato l'andamento spettrale complessivo del segnale campionato  $x^*(t)$ .

La componente primaria è parzialmente sovrapposta alle repliche contigue per cui mediante il filtraggio non è più possibile ricavare il segnale originario a partire dal segnale campionato.

Quanto appena discusso intuitivamente è usualmente formalizzato nel cosiddetto Teorema del campionamento o Teorema di Shannon, che viene di seguito riportato.

### **Teorema del campionamento:**

*Si consideri un segnale a tempo continuo  $x(t)$  a banda limitata, di componente armonica più elevata pari a  $\omega_1$ .*

*Se si campiona tale segnale con una pulsazione  $\omega_c = 2\pi/T$  tale che:*

$$\omega_c > 2\omega_1$$

*allora il segnale  $x(t)$  può essere teoricamente ricostruito esattamente a partire dai suoi campioni  $x^*(t)$ .*

La pulsazione critica  $\omega_N = \omega_c/2 = \pi/T$  viene detta pulsazione di Nyquist.

La sua importanza sta nel fatto che, a causa della sovrapposizione degli spettri in seguito al campionamento, detto anche folding, tutti i segnali con pulsazioni superiori a  $\omega_N$  appariranno come segnali di pulsazioni comprese tra 0 e  $\omega_N$ .

In altre parole, se un segnale viene campionato non rispettando le condizioni imposte dal Teorema del campionamento, le componenti ad alta frequenza compariranno come componenti in bassa frequenza.

Quindi, se tutto il contenuto spettrale superiore a  $\omega_N$  viene filtrato prima del campionamento, il fenomeno detto aliasing, di cui si parlerà nel paragrafo successivo, è assente e lo spettro non viene distorto, anche se si ha una perdita del contenuto informativo per pulsazioni superiori a  $\omega_N$ .

## **2.5 Aliasing**

Con il termine aliasing si indica quel fenomeno per il quale, mediante campionamento, si generano nuove componenti spettrali (armoniche) alla stessa frequenza della componente spettrale di partenza.

Tali armoniche impediscono la corretta ricostruzione del segnale di partenza.

Si può avere aliasing solo nel caso in cui la condizione  $\omega_c > 2\omega_1$  del teorema di Shannon non sia verificata.

Si consideri ora una pulsazione arbitraria  $\omega_2$  all'interno della regione di sovrapposizione tra le repliche degli spettri.

Come si può vedere dalla figura 2.11, lo spettro complessivo, pulsazione per pulsazione, è dato dalla somma delle componenti spettrali appartenenti a ciascuno degli spettri sovrapponentisi.

In particolare, la componente spettrale in  $\omega = \omega_2$  dopo il campionamento è data dalla somma di due componenti,  $|X^*(j\omega_2)|$  e  $|X^*(j(\omega_c - \omega_2))|$ , la prima associata allo spettro principale, e la seconda alla replica centrata in  $\omega = \omega_2$ .

In generale, qualora lo spettro del segnale di partenza fosse a banda illimitata, la componente spettrale in  $\omega = \omega_2$  dopo il campionamento conterrebbe anche le componenti originarie relative alle pulsazioni  $\omega = n\omega_c \pm \omega_2$ , con  $n$  numero intero.

Di conseguenza filtrando tramite un filtro passa basso, alcune componenti ad alta frequenza saranno comunque presenti dopo il filtraggio, in quanto la componente  $|X^*(jn(\omega_c \pm \omega_2))|$  apparirà come parte della componente spettrale complessiva in  $\omega = \omega_2$ , e non sarà più possibile distinguere lo spettro in  $\omega = \omega_2$  da quelli in  $\omega = n\omega_c \pm \omega_2$ .

Possiamo quindi dire che, il fenomeno per il quale la componente dello spettro in  $\omega = n\omega_c \pm \omega_2$  si manifesta in  $\omega = \omega_2$  dopo campionamento è detto aliasing, e le pulsazioni  $\omega = n\omega_c \pm \omega_2$  sono dette alias di  $\omega_2$ .

Il fenomeno dell'aliasing è molto importante, perché fa sì che due sinusoidi di frequenza diversa a tempo continuo possono risultare indistinguibili dopo il campionamento.

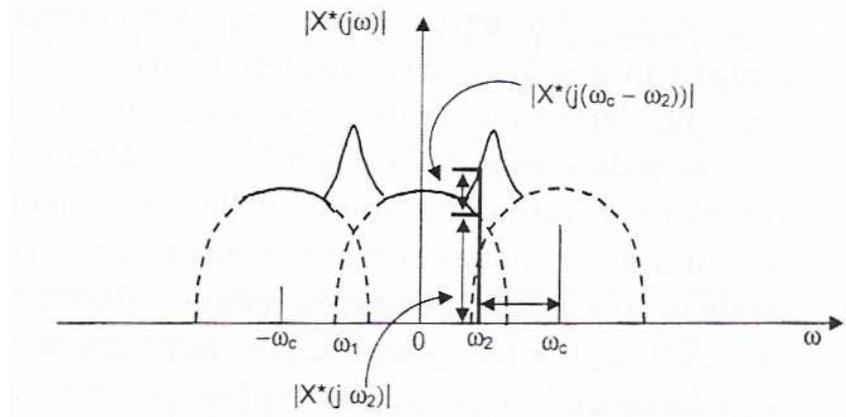


Figura 2.11 Spettro  $|X^*(j\omega)|$  di un segnale dopo il campionamento

Si considerino ad esempio i seguenti segnali:

$$x_1(t) = \sin(2\pi t(1/5)t)$$

$$x_2(t) = \sin(2\pi(4/5)t)$$

e si supponga di campionarli alla frequenza di 1 Hz.

Tale frequenza soddisfa il Teorema del campionamento per la prima sinusoida, ma non per la seconda, che imporrebbe una pulsazione di campionamento superiore almeno a  $2\pi(8/5)$ .

È quindi prevedibile la presenza di un alias in  $\omega = 2\pi(1/5)$ , ovvero proprio nella pulsazione in cui appare la componente spettrale di  $x_1(t)$ .

Come si può vedere dall'immagine 2.12, nel dominio del tempo quanto appena detto significa che i campioni ottenuti appartengono sia all'una che all'altra sinusoida, quindi dopo il campionamento sarà impossibile dire quale sia il segnale, generatore di tali campioni.

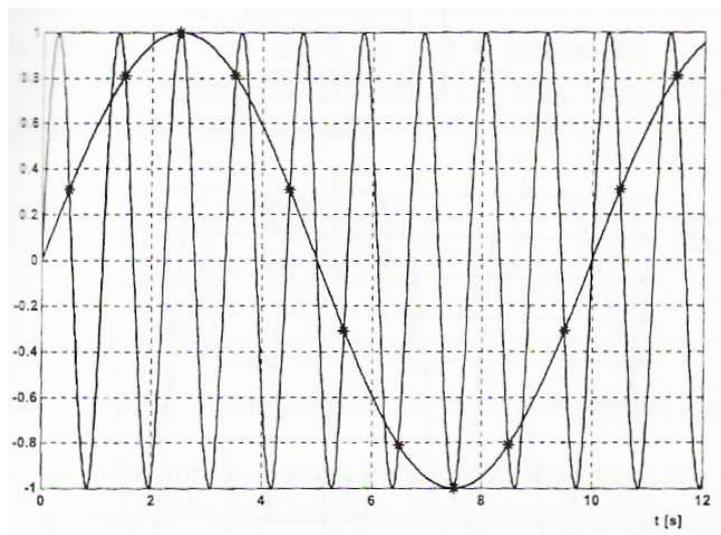


Figura 2.12 Esempio di aliasing nel dominio del tempo

Un fenomeno correlato al problema dell'aliasing è quello delle cosiddette oscillazioni nascoste.

In seguito a quanto discusso, infatti, possiamo dire che se il segnale  $x(t)$  contiene componenti spettrali in pulsazioni pari a  $n$  volte la pulsazione di campionamento  $\omega_c$ , allora tali componenti possono non comparire nel segnale campionato.

Ad esempio, campionando il segnale:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \sin(t) + \sin(3t)$$

con la pulsazione  $\omega_c = 3\text{rad/sec}$ , si nota che il segnale campionato non presenta proprio la componente con  $\omega_c = 3\text{rad/sec}$ , nonostante sia presente un'oscillazione di frequenza corrispondente, ovvero i campioni non mostrano affatto tale oscillazione interna al periodo di campionamento, come riportato nella figura sottostante.

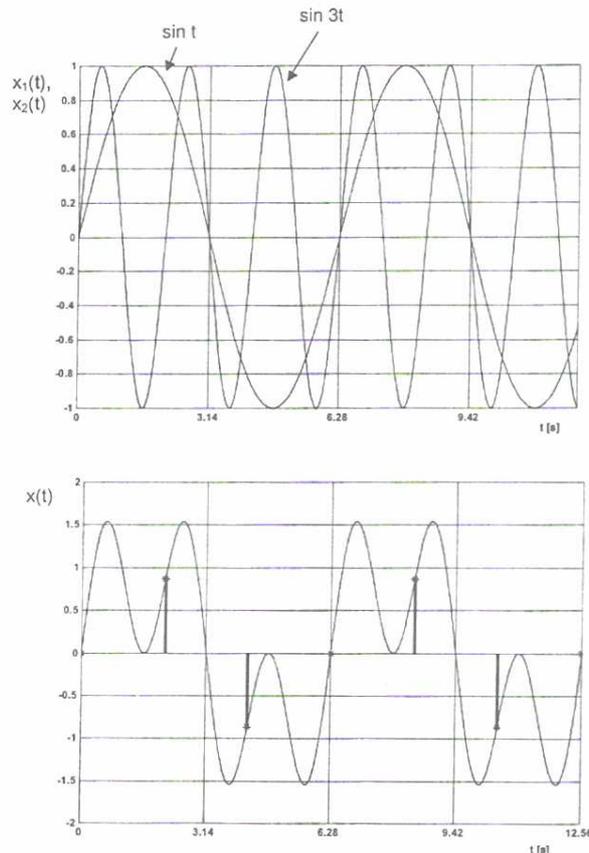


Figura 2.13 Oscillazioni nascoste associate al campionamento della  $x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \sin(t) + \sin(3t)$ . Gli asterischi indicano il segnale campionato con  $\omega_c = 3\text{rad sec}^{-1}$

## 2.6 Il ricostruttore d'ordine zero

Dopo aver parlato del campionamento, è necessario definire anche l'operazione complementare, che viene compiuta dai convertitori D/A, e che consiste nel convertire un segnale digitale in uscita dal controllore in uno continuo.

Tale operazione è detta "tenuta".

Qualora si consideri uno schema come quello di figura 2.14, si può dire che lo scopo dell'organo di tenuta (o ricostruttore) è appunto quello di generare un segnale continuo  $\xi(t)$  che riproduca approssimativamente il segnale continuo applicato all'ingresso del campionatore.

In generale si può pensare di progettare l'organo di tenuta in modo che effettui un'interpolazione polinomiale d'ordine  $n$  arbitrario tra  $x(kT)$  e  $x((k+1)T)$ .

Al crescere dell'ordine migliora la capacità di ricostruzione del dispositivo, ma aumentano anche la complessità realizzativa del dispositivo stesso e gli effetti negativi dovuti all'introduzione di ritardi più elevati nell'anello di controllo.

Inoltre essendo dispositivi d'interfaccia, essi possono essere rappresentati da una funzione di trasferimento continua  $H(s)$  solamente se la sequenza  $x(kT)$  di valori in ingresso viene interpretata come sequenza d'impulsi di Dirac avente "area" pari ai valori di  $x(kT)$ .

Il caso più semplice, ma anche il più usato in pratica, è quello in cui  $n = 0$ , che corrisponde all'organo di tenuta d'ordine zero.

Esso viene anche chiamato holder o ZOH (in inglese zero-order-hold).

Come già detto in precedenza, per esso vale la relazione:

$$\xi(kT + \tau) = x(kT) \quad 0 \leq \tau < T, k = 0, 1, 2, \dots$$

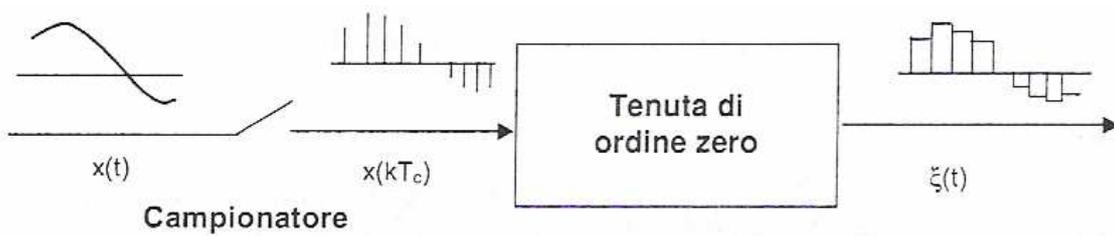


Figura 2.14 Campionatore ed organo di tenuta di ordine zero

Tale dispositivo produce un'uscita costante a tratti, tenendo costante, all'interno dell'intero intervallo di campionamento, il valore del campione relativo all'istante di campionamento immediatamente precedente.

Tenendo conto che il campionatore produce un treno d'impulsi e presenta guadagno  $1/T$ , nel caso ideale la cascata tra lo stesso campionatore e l'holder produce in uscita un segnale del tipo:

$$\begin{aligned} \xi(t) &= x(0)[\delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t - T)] + x(T)[\delta_{-1}(t - T) - \delta_{-1}(t - 2T)] + \dots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)[\delta_{-1}(t - T) - \delta_{-1}(t - (k + 1)T)] \end{aligned}$$

$$\text{dove } \delta_{-1}(k) = \begin{cases} 1 & \text{per } k \geq 0 \\ 0 & \text{per } k < 0 \end{cases}$$

La trasformata di Laplace di  $\xi(t)$  è:

$$L[\xi(t)] = \Xi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \frac{e^{-ksT} - e^{-(k+1)sT}}{s} = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-ksT}$$

che può essere anche scritta nella seguente maniera:

$$L[\xi(t)] = \Xi(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} X^*(s)$$

E' quindi lecito definire la funzione di trasferimento  $H_0(s)$ :

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

In altre parole, il sistema dato dalla cascata tra il campionario e il ricostruttore d'ordine zero può essere descritto matematicamente tramite un sistema equivalente a tempo continuo costituito da un campionario ad impulsi ed un elemento con funzione di trasferimento  $H_0(s)$ . Come si potrà immaginare, il risultato appena ottenuto, vale anche nel caso in cui si abbia un segnale intrinsecamente a tempo discreto  $x(k)$ .

## 2.7 Ricostruzione del segnale e ritardo

Come si è detto in precedenza, il Teorema del campionamento consente, sotto opportune condizioni, la ricostruzione esatta di un segnale continuo a partire dai suoi campioni.

Conoscendo lo spettro del segnale dopo il campionamento, sarebbe sufficiente filtrare tale spettro con un filtro passa basso e moltiplicare per il periodo  $T$ .

Lo spettro d'ampiezza di un filtro passa basso ideale  $G_{PB}(s)$ , riportato in figura 2.15, ha ampiezza unitaria alle pulsazioni  $-\omega_c/2 \leq \omega \leq \omega_c/2$  e nulla al di fuori di questo intervallo.

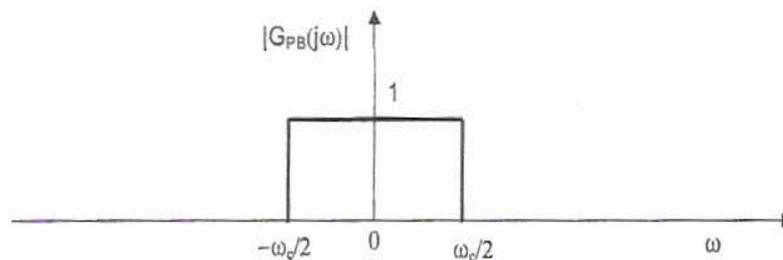


Figura 2.15 Spettro di ampiezza di un filtro passa basso ideale

Tale filtro, infatti, se applicato ad un segnale campionato, avrebbe la capacità di attenuare totalmente le repliche prodotte dal processo di campionamento e di lasciare inalterato lo spettro in banda principale, naturalmente se la pulsazione di campionamento è almeno doppia della più alta componente armonica del segnale a tempo continuo.

Di conseguenza, dopo il campionamento e il filtraggio, sarebbe teoricamente possibile ricostruire correttamente il segnale di partenza, poiché in uscita del filtro ideale si otterrebbe lo spettro del segnale originario amplificato per  $1/T$ , e quindi non vi sarebbero distorsioni ad alcuna frequenza.

Lo spettro di  $G_{PB}(j\omega)$ , è:

$$G_{PB}(j\omega) = \begin{cases} 1 & -\frac{\omega_c}{2} \leq \omega \leq \frac{\omega_c}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Allo scopo di dimostrare che il filtro  $G_{PB}(j\omega)$  non è fisicamente realizzabile, ossia  $G_{PB}(j\omega)$  non rappresenta un sistema causale, calcoliamo la risposta all'impulso  $g_{PB}(t)$  del filtro stesso. Avendo a disposizione l'andamento spettrale  $G_{PB}(j\omega)$ , per calcolare  $g_{PB}(t)$  utilizziamo la trasformata inversa di Fourier:

$$\begin{aligned} g_{PB}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{PB}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c/2}^{\omega_c/2} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi jt} (e^{j\omega_c t/2} - e^{-j\omega_c t/2}) = \frac{1}{\pi t} \sin(\omega_c t/2) = \\ &= \frac{1}{T} \frac{\sin(\omega_c t/2)}{\omega_c t/2} \end{aligned}$$

In figura 2.16 è riportato l'andamento nel tempo della risposta all'impulso  $g_{PB}(t)$ .

Si noti che essa è diversa da zero anche per  $t < 0$ .

Inoltre, ad un impulso di Dirac applicato all'istante  $t = 0$ , il filtro  $G_{PB}(j\omega)$  risponde con un segnale che non è nullo anche per  $t < 0$ .

Si può quindi concludere che il sistema  $G_{PB}(j\omega)$  non è causale e quindi non è fisicamente realizzabile.

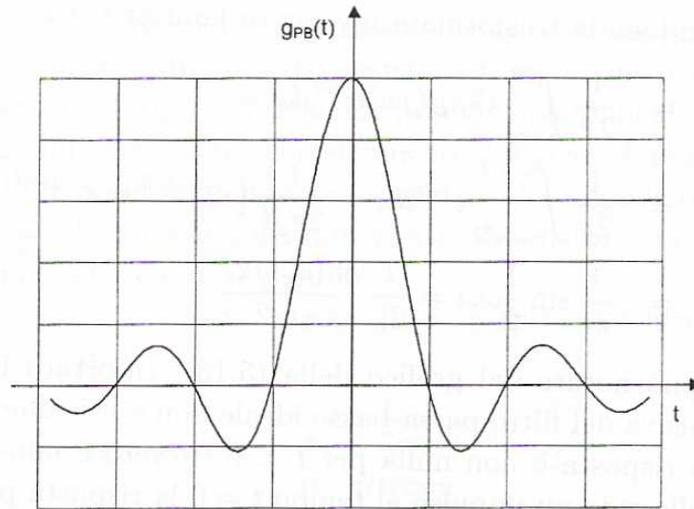


Figura 2.16 Risposta impulsiva di un filtro passa basso ideale

Una possibile soluzione, spesso utilizzata in problemi di telecomunicazioni, consiste nell'ovviare alla non-causalità aggiungendo un ritardo temporale al filtro.

Tale soluzione, tuttavia, è inaccettabile nel caso di sistemi di controllo in retroazione, poiché l'introduzione di ritardi temporali può compromettere anche gravemente la stabilità del sistema stesso.

Quindi nel campo dei controlli si prediligono usualmente altre soluzioni, quali l'utilizzo di ricostruttori, e in particolare dell'holder, il quale è stato descritto nel paragrafo 2.6.

La funzione di trasferimento dell'holder vale:

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

da cui, tramite la sostituzione  $s = j\omega$ , esplicitando il fattore  $e^{-j\omega T/2}$  e moltiplicando e dividendo per  $2j$ , si ottiene:

$$H_0(j\omega) = e^{-j\omega T/2} \left[ \frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{2j} \right] \frac{2j}{j\omega} = T e^{-j\omega T/2} \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}$$

Dalla relazione appena ottenuta si evince che l'organo di tenuta di ordine zero è anch'esso un filtro passa basso, il cui effetto è l'introduzione di un ritardo di fase di  $\omega T/2$ , ovvero un ritardo temporale di  $T/2$ , e un'amplificazione in modulo pari a  $\left| \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right|$ .

Quindi, il modulo di tale filtro decresce all'aumentare di  $\omega$ , e diventa nullo la prima volta per  $\omega T/2 = \pi$ , ovvero per un valore di pulsazione pari a  $2\pi/T$ .

La fase è invece  $\arg[H_0(j\omega)] = -\omega T/2$  più uno sfasamento di  $\pi$  ad ogni cambiamento di segno della funzione  $\sin(\omega T/2)$ .

Come si vedrà nel capitolo seguente, esistono diversi metodi di progetto, detti approssimati, in cui la sintesi viene svolta a tempo continuo ma il controllore viene implementato

calcolandone uno equivalente a tempo discreto.

In tale contesto l'organo di tenuta viene approssimato con un semplice ritardo di  $T/2$ , e la bontà delle prestazioni ottenibili è subordinata alla scelta di un periodo di campionamento sufficientemente piccolo.

## Capitolo 3

# Progetto per discretizzazione

### 3.1 Premessa

Con questo capitolo si inizia la trattazione del problema di progetto o sintesi della legge di controllo digitale, che proseguirà anche nei successivi capitoli 4, 5, 6, 7, 8.

Si prendono in esame tre classi di tecniche progettuali, basate sul:

- metodo indiretto;
- regolatore a struttura fissa (tipo PID);
- metodo diretto.

Nel primo caso si tratta di tecniche approssimate (o di emulazione) poiché si sviluppa il progetto preliminare del controllore nel dominio delle trasformate di Laplace con una delle tecniche già note nel continuo e, successivamente, se ne effettua la discretizzazione pervenendo in tal modo ad un controllore digitale.

La seconda classe che verrà qui presentata è quella dei regolatori a struttura fissa, e in particolare dei controllori di tipo PID a tempo discreto. Questa tecnica consiste nel tarare i parametri di tali dispositivi in funzione della dinamica del sistema da controllare e delle specifiche da soddisfare.

La terza classe comprende invece tecniche di progetto per le quali si lavora direttamente nel dominio discreto, ossia delle trasformate zeta (metodo diretto).

In questo ambito verranno illustrati in dettaglio i seguenti procedimenti:

- progetto nel piano  $\omega$ , con riferimento all'impiego dei diagrammi di Bode;
- progetto con il luogo delle radici nel piano  $z$ ;
- progetto con metodi analitici (assegnamento poli/zeri, controllo deadbeat, Dahlin).

Una differenza sostanziale tra le prime due classi e la terza è che per le prime si discretizza un regolatore progettato nel continuo, ossia considerando la dinamica del sistema da controllare come continua, mentre per la terza si adotta sin dall'inizio un modello discreto del processo da controllare.

Questo modo differente di procedere ha influenza non trascurabile sulla scelta del periodo di campionamento, come già accennato nel capitolo precedente.

### 3.2 Considerazioni generali sulla discretizzazione

Molto spesso il sistema da controllare è un sistema continuo, rappresentato da una funzione di trasferimento  $G(s)$ , per il quale è molto naturale esprimere le specifiche nel dominio continuo. Può capitare che per una data applicazione esista già un controllore analogico soddisfacente, e che si voglia semplicemente passare ad una sua realizzazione digitale. Inoltre, non bisogna trascurare il fatto che nel continuo sono state sviluppate da tempo tecniche di progetto ben

asestate, e molto spesso il progettista ha una grande familiarità con queste piuttosto che con quelle ideate espressamente per il dominio discreto.

Infine, per riuscire a trovare il metodo che più s'avvicina alle richieste del progettista spesso si utilizzano vari approcci al problema e dal confronto tra i risultati ottenuti, si sceglie quello che meglio approssima la situazione ideale.

Dunque, si supponga d'avere già definita una legge di controllo continua rappresentata da una funzione di trasferimento  $D(s)$ , come quella riportata in figura 3.1 (a).

Si pone allora il problema di come ottenere una legge  $D(z)$ , da inserire nell'anello di retroazione comprensivo del ricostruttore come in figura 3.1 (b), che permetta d'ottenere prestazioni il più possibile simili a quelle ottenute impiegando la  $D(s)$ .

In altre parole, il problema consiste nell'approssimare nel tempo e/o in frequenza i due segnali  $u_a(t)$  e  $u_b(t)$ , a fronte dello stesso segnale  $e(t)$ .

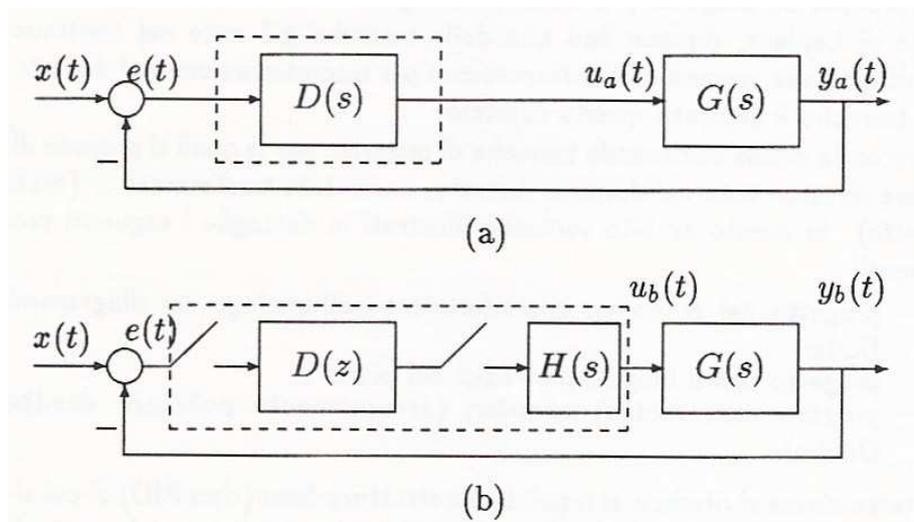


Figura 3.1 Regolatore analogico (a) e suo equivalente discreto (b)

È evidente che adoperare un controllore digitale ottenuto tramite discretizzazione di uno analogico porta ad introdurre delle variazioni delle prestazioni del sistema in retroazione, e precisamente un deterioramento di queste ultime.

Tali variazioni dipendono da diversi fattori, quali la scelta della frequenza di campionamento e la tecnica di discretizzazione utilizzata.

Comunque, è ovvio che effettuando l'operazione di discretizzazione si cerchi di far sì che le caratteristiche sia temporali che frequenziali del nuovo regolatore ottenuto si discostino poco da quelle dell'originale.

In generale, può essere d'interesse mantenere una o più delle seguenti caratteristiche: numero di poli e zeri, andamento della risposta ad impulso o gradino, guadagno statico, margini di fase e d'ampiezza, larghezza di banda, etc., anche se non tutte possono essere mantenute inalterate contemporaneamente dall'operazione di discretizzazione.

Infatti nella maggior parte dei casi risulta difficile, per esempio, mantenere le caratteristiche di risposta frequenziale, comparando nella versione discreta effetti non presenti nel controllore analogico come la distorsione frequenziale dovuta all'aliasing (vedi paragrafo 2.5), qualora non si effettui una scelta attenta del periodo di campionamento.

Un metodo empirico per ottenere prestazioni soddisfacenti è quello di scegliere frequenze di campionamento più alte possibili, che comportano però un aggravio delle prestazioni computazionali richieste.

Una volta che sia definito il controllore analogico  $D(s)$ , la tecnica di progetto si articola nei tre seguenti passi concettuali:

1. definizione del periodo di campionamento  $T$  e verifica del fatto che l'inserimento del campionatore-ricostruttore non destabilizzi il sistema.

Se necessario si deve provvedere ad una correzione della  $D(s)$  o a modificare  $T$ .

Se si considera il caso più semplice, cioè quello con un ricostruttore d'ordine zero, si ha:

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \approx \frac{T}{\frac{T}{2}s + 1} \quad \text{approssimazione di Padè}$$

oppure:

$$H_0(s) = e^{-sT/2}$$

Quindi, per l'analisi degli effetti dinamici si deve considerare, per esempio, il termine:

$$\frac{1}{\frac{T}{2}s + 1}$$

nell'anello continuo prima di procedere alla discretizzazione, come mostrato in figura 3.2.

Si noti che il guadagno  $T$  non viene considerato in quanto nello schema finale discreto tale fattore è compensato dal guadagno  $1/T$  del campionatore;

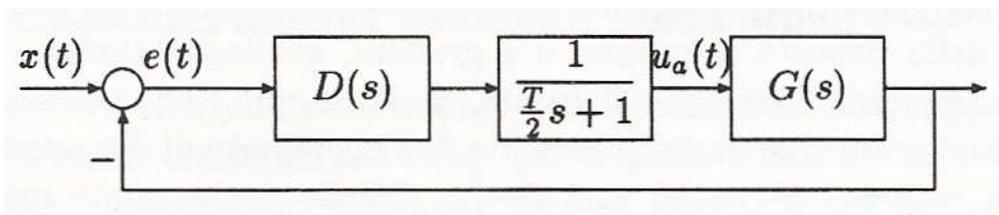


Figura 3.2 Modifica dell'anello di retroazione continuo per considerare la presenza del ricostruttore

2. Discretizzazione della  $D(s)$  con una delle tecniche illustrate in seguito;
3. Verifica a posteriori del comportamento dinamico del sistema con controllore discreto. Si deve discretizzare il sistema continuo  $G(s)$  con un ricostruttore, cioè ottenere la funzione discreta equivalente  $Z[H_0(s)G(s)] = HG(z)$  e verificare la risposta dell'intero sistema in retroazione utilizzando la  $D(z)$ . Qualora il controllore ottenuto non soddisfi le specifiche di controllo richieste, si deve procedere o ad una migliore modellizzazione dell'impianto o ad una modifica della sintesi del controllore.

### 3.3 Metodi di discretizzazione

Una volta che è stata completata la sintesi del controllore continuo, tenendo conto della presenza dell'holder e del filtro antialiasing, è necessario procedere alla sua discretizzazione. Come già accennato in precedenza, sono disponibili diversi metodi per la discretizzazione della funzione di trasferimento  $D(s)$ , ognuno dei quali, però, tende a comportarsi in modo sempre più simile a quello del sistema continuo di partenza, all'aumentare della frequenza di campionamento.

Questi metodi si distinguono in base al valore della frequenza di campionamento sotto il quale il comportamento dinamico del sistema a catena chiusa peggiora in modo non accettabile rispetto a quello continuo.

Da ciò discende che con una scelta opportuna del metodo di discretizzazione è possibile ridurre la frequenza di campionamento necessaria, almeno dal punto di vista della similarità con il sistema continuo.

I metodi di discretizzazione possono essere del tipo:

- a catena chiusa;
- a catena aperta.

Nel primo caso, il controllore discreto viene derivato da quello continuo in modo che il comportamento del sistema complessivo a catena chiusa sia prossimo a quello continuo a catena chiusa.

Il maggior vantaggio della discretizzazione a catena chiusa consiste nel garantire la stabilità del sistema con controllore discreto.

Tuttavia, non essendo d'agevole applicazione si preferisce utilizzare un metodo di discretizzazione a catena aperta.

Nella discretizzazione a catena aperta viene invece eseguita la discretizzazione del controllore continuo non tenendo conto del suo funzionamento in un sistema a catena chiusa.

Questi metodi di discretizzazione sono di diretta applicazione e non richiedono la conoscenza del sistema da controllare, per cui sono usati per la creazione di algoritmi di controllo derivati dai controllori standard analogici.

La discretizzazione a catena aperta è inoltre impiegata nella realizzazione dei filtri numerici a partire dalla sintesi nel continuo.

Nel caso di sistemi di controllo, il controllore è un particolare filtro che deve essere realizzato in modo digitale.

I metodi di discretizzazione a catena aperta non garantiscono a priori la stabilità del sistema digitale a catena chiusa e, in certi casi, neppure dello stesso controllore discreto.

Se però la frequenza di campionamento è sufficientemente elevata, il comportamento del controllore discreto non si discosta da quello continuo per cui la stabilità viene mantenuta.

Nel seguito verranno esaminati solo i principali metodi di discretizzazione a catena aperta, che possono essere suddivisi in metodi di:

- invarianza della risposta, che si differenziano in:

- metodo della Z-trasformata, detto anche dell'invarianza della risposta all'impulso;
- metodo della Z-trasformata con ricostruttore di ordine zero, detto anche invarianza della risposta al gradino;

- integrazione numerica, che si differenziano in:

- metodo delle differenze all'indietro;
- metodo delle differenze in avanti (non impiegato nei controlli);
- trasformazione bilineare;
- trasformazione bilineare con precompensazione frequenziale;

- corrispondenza zero/poli.

## 3.4 Metodo dell'invarianza della risposta

I vari metodi di discretizzazione basati sull'invarianza della risposta derivano dai differenti segnali canonici che si considerano in ingresso (impulso, gradino, rampa,..).

Il primo metodo analizzato è quello dell'invarianza all'impulso, detto anche metodo della Z-trasformata, ma, si vedrà in seguito che migliori discretizzazioni sono possibili considerando come ingresso il gradino o la rampa.

Relativamente all'ultimo segnale citato non si effettua una trattazione approfondita in questa tesi.

### 3.4.1 Metodo dell'invarianza all'impulso

Consideriamo come primo caso quello in cui il controllore da progettare sia un filtro numerico che, come detto in precedenza, è un tipico esempio d'applicazione con discretizzazione in catena aperta.

Per trasformare il progetto di filtro analogico in un progetto di filtro numerico possiamo scegliere la risposta all'impulso di quest'ultimo come una sequenza costituita da campioni ugualmente spaziatati della risposta all'impulso del filtro analogico, ovvero:

$$g(n) = g_c(nT)$$

dove  $T$  è il periodo di campionamento.

Si può dimostrare che la trasformata  $Z$  di  $g(n)$  è legata alla trasformata di Laplace di  $g_c(t)$  dall'equazione :

$$G(z)|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_c \left[ s + j \frac{2\pi}{T} k \right]$$

Dalla relazione  $z = e^{sT}$  si deduce che le strisce d'ampiezza  $2\pi/T$  nel piano  $s$  vengono mappate nell'intero piano  $z$ , come mostrato nella figura 3.3.

La metà sinistra di ogni striscia nel piano  $s$  viene a mapparsi nella parte interna alla circonferenza unitaria, la metà destra di ogni striscia nel piano  $s$  si mappa invece nella parte esterna alla circonferenza unitaria, e l'asse immaginario del piano  $s$  si mappa nella circonferenza unitaria in modo tale che ogni segmento di lunghezza  $2\pi/T$  si mappa una sola volta lungo la circonferenza.

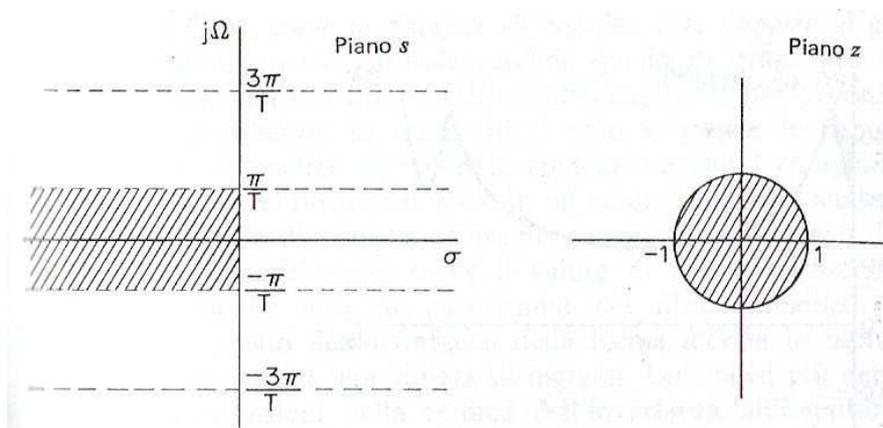


Figura 3.3 Rappresentazione degli effetti del campionamento periodico

Pertanto risulta chiaro che tutte le strisce del piano s vanno a sovrapporsi nel piano z per dar luogo, partendo dalla funzione di trasferimento analogica, alla funzione di trasferimento digitale.

Da ciò si deduce che il metodo dell'invarianza all'impulso non corrisponde ad una semplice corrispondenza algebrica del piano s nel piano z.

La risposta in frequenza del filtro numerico è legata alla risposta in frequenza del filtro analogico dalla relazione:

$$G(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_c \left[ j \frac{\omega}{T} + j \frac{2\pi}{T} k \right]$$

Risulta chiaro che, per il Teorema del campionamento (vedi paragrafo 2.4), se e solo se:

$$G_c(j\Omega) = 0, \quad |\Omega| \geq \pi/T$$

allora

$$G(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} G_c \left[ j \frac{\omega}{T} \right], \quad |\omega| \leq \pi$$

Sfortunatamente, qualsiasi filtro analogico che si usi in pratica non sarà limitato in banda, e di conseguenza si ha interferenza tra i vari termini della sommatoria.

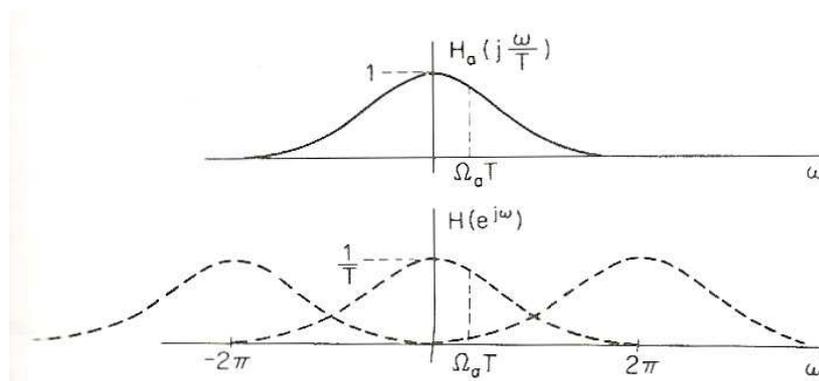


Figura 3.4 Rappresentazione grafica degli effetti di aliasing nella tecnica di progetto dell'invarianza all'impulso

A causa dell'aliasing cui dà luogo il processo di campionamento, la risposta in frequenza del filtro numerico risultante non sarà identica alla risposta in frequenza analogica da cui si è partiti.

E' importante osservare che, se le specifiche del filtro sono date in termini di specifiche sul filtro numerico da progettare, allora un cambiamento di T non ha effetto sulla quantità d'aliasing comportata dalla tecnica di progetto.

Per esempio, riferendoci alla figura 3.4, supponiamo che la frequenza di taglio del filtro numerico sia stata scelta pari a  $\Omega_c T$ .

Questo valore è pertanto vincolato ad essere la frequenza di taglio del filtro numerico passa basso, e, se T viene ridotto,  $\Omega_c$  deve essere corrispondentemente aumentata nel filtro analogico in modo tale che  $\Omega_c T$  rimanga costante ed uguale alla frequenza di taglio specificata per il filtro numerico stesso.

Dal discorso fatto si deduce che il filtro numerico da progettare è specificato in termini di frequenze sulla circonferenza unitaria e che il parametro T risulta irrilevante nell'ambito della tecnica di progetto dell'invarianza all'impulso, e quindi potrebbe essere posto pari a uno.

Poiché tuttavia nell'uso pratico di tale tecnica si include anche  $T$  nei parametri del progetto, è importante aver ben presente che tale parametro vi gioca un ruolo del tutto secondario. Per approfondire l'interpretazione di questa tecnica di progetto in termini di relazione tra i piani  $s$  e  $z$ , assumiamo che la funzione di trasferimento del filtro analogico  $G_c(s)$  sia espressa come sommatoria di fratti semplici, ovvero:

$$G_c(s) = \sum_{k=1}^N A_k / (s - s_k)$$

La corrispondente risposta all'impulso è:

$$g_c(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} \delta_{-1}(t)$$

dove  $\delta_{-1}(t)$  è la funzione gradino unitario a tempo continuo. La risposta all'impulso del filtro numerico è pertanto:

$$g(n) = g_c(nT) = \sum_{k=1}^N A_k (e^{s_k T})^n \delta_{-1}(nT)$$

dove  $\delta_{-1}(nT) = \begin{cases} 1 & \text{per } n \geq 0 \\ 0 & \text{per } n < 0 \end{cases}$

La corrispondente funzione di trasferimento  $G(z)$  è di conseguenza data da:

$$G(z) = \sum_{k=1}^N A_k / (1 - e^{s_k T} z^{-1})$$

Confrontando le espressioni di  $G_c(s)$  e  $G(z)$  osserviamo che un polo in  $s = s_k$  nel piano  $s$  dà luogo a un polo in  $e^{s_k T}$  nel piano  $z$ , e che i coefficienti nelle espansioni in fratti semplici di  $G_c(s)$  e  $G(z)$  sono uguali.

Se il filtro analogico è stabile, cioè la parte reale di  $s_k$  è negativa, allora il modulo di  $e^{s_k T}$  sarà minore di uno, così che il corrispondente polo del filtro numerico è all'interno del cerchio unitario, e di conseguenza anche il filtro numerico è stabile.

Benché i poli nel piano  $s$  si mappino in poli nel piano  $z$  secondo la relazione  $z_k = e^{s_k T}$ , è importante riconoscere che il progetto col metodo dell'invarianza all'impulso non corrisponde ad una mappatura dal piano  $s$  al piano  $z$  secondo quella stessa relazione, né in effetti, secondo alcun'altra relazione.

Inoltre gli zeri della funzione di trasferimento numerica sono una funzione dei poli e dei coefficienti  $A_k$  dell'espansione in fratti semplici e in generale non si mappano da un piano all'altro allo stesso modo dei poli.

Va sottolineato che se il filtro numerico è sufficientemente limitato in banda, il procedimento sopra illustrato porta ad ottenere un filtro la cui risposta in frequenza è:

$$G(e^{j\omega}) \approx \frac{1}{T} G_c \left[ j \frac{\omega}{T} \right]$$

Ne segue che, per elevate frequenze di campionamento ( $T$  piccolo), il filtro numerico può avere un guadagno estremamente alto.

Per questo motivo solitamente si utilizza la seguente formula:

$$G(z) = \sum_{k=1}^N \frac{TA_k}{1 - e^{-skT}z^{-1}}$$

Pertanto la risposta all'impulso diventa  $g(n) = Tg_c(nT)$ .

Il concetto base della tecnica dell'invarianza all'impulso è quello di scegliere per il filtro numerico una risposta all'impulso simile in qualche modo alla risposta all'impulso del filtro analogico.

Spesso l'uso di questo procedimento non è motivato tanto dal desiderio di mantenere la forma della risposta all'impulso, quanto dal fatto di sapere che, se il filtro analogico è limitato in banda, allora la risposta in frequenza del filtro numerico tenderà ad approssimare la risposta in frequenza analogica.

Tuttavia, in taluni problemi di progetti di filtri, l'obiettivo principale può essere proprio quello di controllare alcuni aspetti della risposta temporale del filtro, come la risposta all'impulso o la risposta al gradino di cui parleremo in seguito.

E' importante ricordare che, sebbene nel progetto basato sull'invarianza all'impulso si introduca, a causa dell'aliasing, una distorsione nella risposta in frequenza, la relazione tra la frequenza analogica e quella numerica è lineare e di conseguenza, aliasing a parte, la forma della risposta in frequenza si conserva.

Va notato in conclusione che la tecnica dell'invarianza all'impulso è chiaramente adatta soltanto nei casi di filtri essenzialmente limitati in banda.

Per esempio filtri del tipo passa alto o elimina banda richiederebbero ulteriori limitazioni di banda per evitare severe distorsioni dovute all'aliasing.

E' possibile ottenere migliori discretizzazioni con il metodo dell'invarianza della risposta considerando come ingressi gradini o rampe.

### 3.4.2 Metodo dell'invarianza al gradino

Per esplicitare il metodo dell'invarianza al gradino, si consideri ad esempio il filtro passa basso con funzione di trasferimento  $G_c(s) = a / (s + a)$ .

La risposta al gradino è:

$$g_c(t) = L^{-1} \left[ \frac{1}{s} G_c(s) \right] = L^{-1} \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + a} \right] = 1 - ae^{-at}.$$

In questo caso si sceglie la risposta del filtro numerico al gradino campionato coincidente con i campioni della risposta al gradino del filtro analogico.

In tal modo, se il filtro analogico ha buone caratteristiche di risposta al gradino, come piccolo tempo di salita e basso picco di oscillazione sopra il valore di regime (overshoot), queste caratteristiche verranno mantenute nel filtro numerico.

La risposta del filtro numerico vale:

$$g(k) = g_c(t) \Big|_{t=kT} = 1 - ae^{-akT}$$

Effettuando la trasformata zeta d'entrambi i membri della precedente uguaglianza, si ha:

$$G(z) \frac{z}{(z-1)} = Z [ 1 - e^{-akT} ]$$

da cui s'ottiene:

$$G(z) = \left[ \frac{z-1}{z} \right] Z[1 - e^{-akT}] = \frac{z-1}{z} \left[ \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-aT}} \right] = \frac{1 - e^{-aT}}{z - e^{-aT}}$$

Si noti che l'intera procedura può essere riassunta nell'espressione:

$$G(z) = (1 - z^{-1}) Z \left\{ L^{-1} [G_c(s) / s] \Big|_{t=kT} \right\}$$

o equivalentemente:

$$G(z) = Z \left\{ L^{-1} [(1 - e^{-sT}) G_c(s) / s] \Big|_{t=kT} \right\}$$

Il secondo membro della precedente equazione può essere interpretato come la trasformata zeta di  $G_c(s)$  preceduta da un campionario e da un organo di tenuta (o interpolatore d'ordine zero).

Per questo motivo, il metodo in questione è anche detto metodo della trasformata zeta con campionamento e tenuta, anche se è importante notare che, in questo caso, i blocchi del campionamento e tenuta sono fittizi.

Come nel caso precedente, anche il metodo appena discusso preserva la stabilità dopo discretizzazione, in quanto i poli del filtro analogico subiscono la trasformazione  $z = e^{sT}$ .

Pertanto poli stabili di  $G_c(s)$  vengono mappati in poli stabili di  $G(z)$  e corrispondentemente i poli instabili restano tali.

La risposta in frequenza  $G(z)$  risulta distorta rispetto a quella di  $G_c(s)$  e, per effetto del termine  $1/s$ , si ha una certa attenuazione alle alte frequenze.

Ancora in analogia con il metodo della risposta impulsiva, il metodo appena descritto presenta il fenomeno dell'aliasing e andrà pertanto usato solo con segnali a banda limitata.

Il tipico ambito d'uso del metodo suddetto è la situazione in cui si desiderano mantenere alcune caratteristiche particolari legate alla risposta al gradino, quali quelle riguardanti la risposta transitoria.

### Esempio 3.1

Come esempio del metodo di discretizzazione tramite invarianza della risposta al gradino, si consideri la funzione di trasferimento  $G_c(s)$  di un controllore PID analogico, il quale verrà analizzato in dettaglio nel prossimo capitolo.

$$G_c(s) = K_p \left[ 1 + \frac{1}{T_i} + \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d s}{N}} \right]$$

Come già detto, l'obiettivo di tale metodo consiste nel determinare una funzione di trasferimento  $G(z)$  tale che:

$$G(z) = (1 - z^{-1}) Z \left[ \left. \frac{L^{-1} G_c(s)}{s} \right|_{t=kT} \right]$$

o, equivalentemente,

$$G(z) = Z \left[ \left. \frac{L^{-1} \left[ \frac{1 - e^{-sT}}{s} G_c(s) \right]}{s} \right|_{t=kT} \right]$$

Applicando tale trasformazione, risulta:

$$\frac{G_c(s)}{s} = K_P \left[ \frac{1}{s} + \frac{1}{T_i s^2} + \frac{T_d}{1 + T_{der} s} \right] \quad \text{in cui } T_{der} = \frac{T_d}{N}$$

Antitrasformando secondo Laplace, ponendo  $t = kT$  e poi zeta-trasformando si ottiene:

$$Z \left[ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{G_c(s)}{s} \right] \Big|_{t=kT} \right] = K_P \left[ \frac{z}{z-1} + \frac{Tz}{T_i(z-1)^2} + \frac{T_d z}{T_{den}(z - e^{-T/T_{den}})} \right]$$

ovvero:

$$G(z) = K_P \left[ 1 + \frac{T}{T_i(z-1)} + \frac{T_d(z-1)}{T_{den}(z - e^{-T/T_{den}})} \right]$$

che si riscrive nella forma:

$$G(z) = \frac{q_0 z^2 + q_1 z + q_2}{z^2 + p_1 z + p_2}$$

dove i coefficienti  $q_i$ ,  $i=0,1,2$ , e  $p_i$ ,  $i=1,2$ , valgono:

$$q_0 = K_P \left[ 1 + \frac{T_d}{T_{den}} \right] \quad q_1 = -K_P \left[ 1 + e^{-T/T_{den}} + \frac{2T_d}{T_{den}} - \frac{T}{T_i} \right] \quad q_2 = K_P \left[ \frac{T_d}{T_{den}} + e^{-T/T_{den}} \left( \frac{T}{T_i} - 1 \right) \right]$$

$$p_1 = e^{-T/T_{den}} - 1 \quad p_2 = -e^{-T/T_{den}}$$

## 3.5 Metodo d'integrazione numerica

Come accennato precedentemente, esistono anche dei metodi di discretizzazione a catena aperta chiamati metodi d'integrazione numerica.

Tra i numerosi metodi disponibili, si considereranno nel seguito solo quelli più usati per la discretizzazione, cioè quelli di integrazione rettangolare (Eulero) «all'indietro» e «in avanti» e quelli d'integrazione trapezoidale, eventualmente con la precompensazione frequenziale.

### 3.5.1 Metodo delle differenze «all'indietro»

Il metodo di Eulero o d'integrazione rettangolare è il più semplice algoritmo per l'integrazione numerica.

Si consideri ad esempio la seguente equazione differenziale:

$$\frac{dy(t)}{dt} + a y(t) = a x(t)$$

dove il coefficiente della derivata prima è pari a uno, mentre i coefficienti di  $y(t)$  e  $x(t)$  sono pari ad una costante  $a$ .

Portando il termine in  $y$  al secondo membro ed integrando tra 0 e  $t$  ambo i membri, si ha:

$$\int_0^t \frac{dy(t)}{dt} dt = -a \int_0^t y(t) dt + a \int_0^t x(t) dt$$

Per  $t = kT$  e  $t = (k - 1)T$  con  $k$  costante, si hanno rispettivamente:

$$y(kT) - y(0) = \int_0^{kT} \frac{dy(t)}{dt} dt = -a \int_0^{kT} y(t) dt + a \int_0^{kT} x(t) dt$$

$$y((k - 1)T) - y(0) = \int_0^{(k-1)T} \frac{dy(t)}{dt} dt = -a \int_0^{(k-1)T} y(t) dt + a \int_0^{(k-1)T} x(t) dt$$

Come si può vedere dai passaggi precedenti, nel seguente metodo la derivata prima è approssimabile dalla differenza prima «all'indietro».

Sottraendo le due relazioni precedenti, si ottiene:

$$y(kT) - y((k - 1)T) = -a \int_{(k-1)T}^{kT} y(t) dt + a \int_{(k-1)T}^{kT} x(t) dt$$

Per calcolare numericamente gli integrali presenti in questa relazione si approssima l'area sottesa alle curve  $y(t)$  e  $x(t)$  con rettangoli (da qui il nome d'integrazione rettangolare).

In particolare, nel metodo delle differenze «all'indietro» si procede come illustrato in figura 3.5, cioè si considerano tra gli istanti  $(k - 1)T$  e  $kT$  i rettangoli d'altezza pari a  $y(kT)$  o  $x(kT)$  (valore finale del periodo considerato).

Si ha dunque che:

$$\int_{(k-1)T}^{kT} y(t) dt \approx Ty(kT) \quad \text{e} \quad \int_{(k-1)T}^{kT} x(t) dt \approx Tx(kT)$$

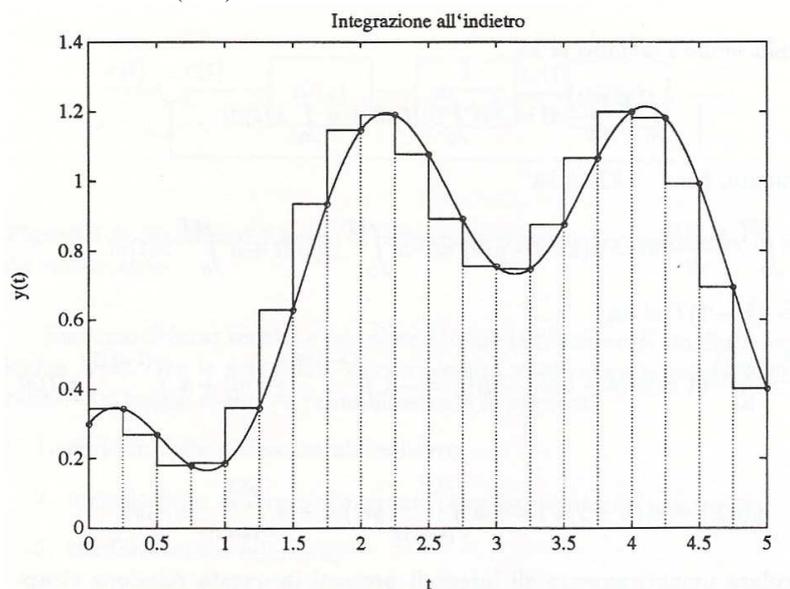


Figura 3.5 Approssimazione dell'integrale con il metodo delle differenze «all'indietro»

Sostituendo le espressioni appena pervenute nella:

$$y(kT) - y((k-1)T) = -a \int_{(k-1)T}^{kT} y(t) dt + a \int_{(k-1)T}^{kT} x(t) dt$$

si ottiene:

$$y(kT) = y((k-1)T) - aT[y(kT) - x(kT)]$$

che ha Z-trasformata:

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) - aT[Y(z) - X(z)].$$

Possiamo quindi definire la Z-trasformata della funzione di trasferimento equivalente nel discreto:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{aT}{1 - z^{-1} + aT} = \frac{a}{\frac{1 - z^{-1}}{T} + a}$$

Si noti che utilizzando la trasformata di Laplace per modellare l'equazione differenziale si sarebbe ottenuto:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{a}{s + a}$$

Osservando le ultime due equazioni ottenute, si vede che esse sono identiche se si pone:

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T} = \frac{z - 1}{Tz}$$

Questa relazione esprime la trasformazione da effettuare per discretizzare il filtro analogico col metodo delle differenze «all'indietro», ossia:

$$D(z) = D(s) \Big|_{s = \frac{1 - z^{-1}}{T}}$$

Alla stessa risultato si sarebbe arrivati tramite la sostituzione:

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{y(kT) - y((k-1)T)}{T}$$

che fa ricorso all'approssimazione della derivata tramite il rapporto incrementale.

Effettuando la trasformazione  $s = \frac{1 - z^{-1}}{T} = \frac{z - 1}{Tz}$  il piano s viene mappato nel piano z e

viceversa.

La regione di stabilità in s ( $\text{Re}(s) < 0$ ) viene trasformata nel piano z come segue:

$$\text{Re} \left[ \frac{1 - z^{-1}}{T} \right] = \text{Re} \left[ \frac{z - 1}{Tz} \right] < 0$$

da cui, poiché  $T > 0$  e  $z = \sigma + j\omega$ ,

$$\text{Re} \left[ \frac{\sigma + j\omega - 1}{\sigma + j\omega} \right] = \text{Re} \left[ \frac{(\sigma + j\omega - 1)(\sigma - j\omega)}{\sigma^2 + \omega^2} \right] = \frac{\sigma^2 + \omega^2 - \sigma}{\sigma^2 + \omega^2} < 0$$

ossia

$$(\sigma - 1/2)^2 + \omega^2 < (1/2)^2,$$

che è una circonferenza sul piano  $z$  di centro  $(1/2, 0)$  e raggio  $1/2$ .

Il legame indotto tra il piano  $s$  e il piano  $z$  viene rappresentato in figura 3.6.

Si verifica facilmente che il semipiano sinistro del piano  $s$  si mappa all'interno della circonferenza piccola e che il semipiano destro del piano  $s$  si mappa nell'esterno della stessa circonferenza.

Perciò sebbene questa trasformazione non soddisfi la proprietà che l'asse immaginario si mappi sulla circonferenza unitaria, essa soddisfa tuttavia la condizione di stabilità, dal momento che i poli del semipiano sinistro del piano  $s$  si mappano all'interno della circonferenza piccola in  $z$  (quella centrata in  $(1/2, 0)$  e con raggio  $1/2$ ), che è all'interno di quella unitaria (regione di stabilità).

La discussione svolta dimostra che ogni funzione di trasferimento stabile  $D(s)$  viene trasformata in una  $D(z)$  stabile.

Tuttavia, si viene a creare una notevole distorsione frequenziale, che può essere ridotta diminuendo il periodo di campionamento  $T$ .

Infine, è necessario dire che anche i poli instabili in  $s$  possono essere trasformati in poli stabili in  $z$ .

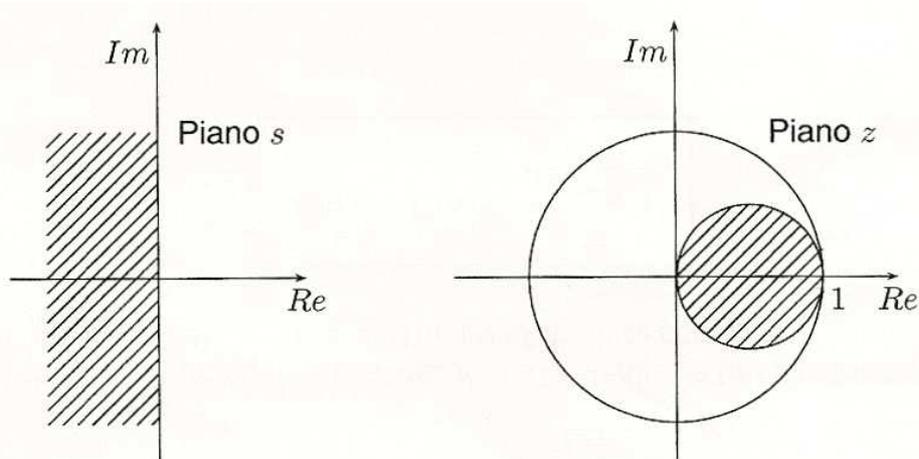


Figura 3.6 Trasformazione della regione di stabilità del piano  $s$  con il metodo delle differenze «all'indietro»

### 3.5.2 Metodo delle differenze «in avanti»

Anche il metodo delle differenze «in avanti» rappresenta un'approssimazione del calcolo integrale.

Viene spiegato nel seguente paragrafo per completezza d'informazione, non essendo utilizzato nel controllo poiché può portare ad instabilità del sistema, ma di questo si parlerà dopo aver definito il legame indotto dalla trasformazione tra il piano  $s$  e il piano  $z$ .

A differenza della tecnica precedente, si considera ora per il generico periodo  $[(k-1)T, kT]$  il valore iniziale  $y((k-1)T)$  anziché il valore finale  $y(kT)$ .

Utilizzando ancora l'equazione differenziale del metodo delle differenze «all'indietro», si ha che:

$$\int_{(k-1)T}^{kT} y(t) dt \approx Ty((k-1)T)$$

$$\int_{(k-1)T}^{kT} x(t) dt \approx Tx((k-1)T)$$

Questa integrazione numerica è detta anche metodo di Eulero «in avanti» o metodo delle differenze «in avanti» .

Viene riportato in figura 3.7 un esempio della seguente tecnica:

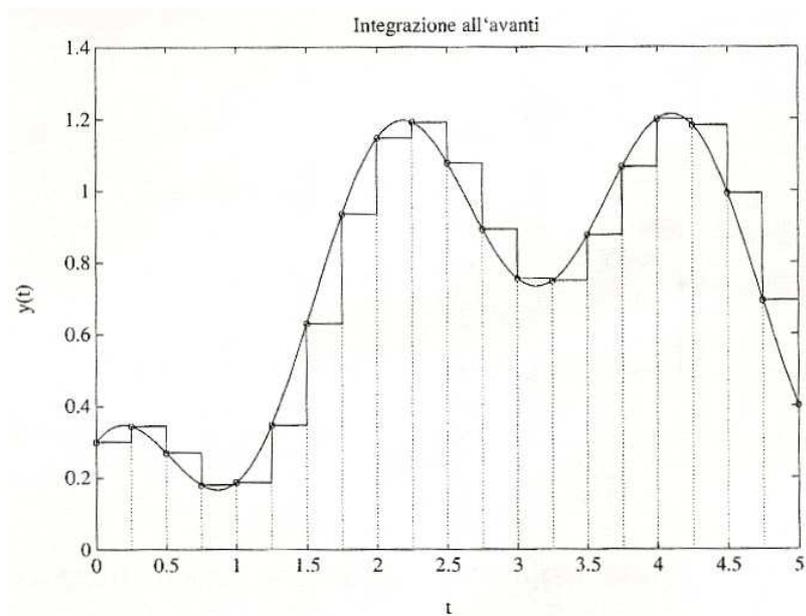


Figura 3.7 Approssimazione dell'integrale il metodo delle differenze «in avanti»

In questo caso si ottiene:

$$y(kT) = y((k-1)T) - aT[y((k-1)T) - x((k-1)T)]$$

che fornisce la Z-trasformata:

$$Y(z) = (1 - aT) z^{-1} Y(z) + aT z^{-1} X(z)$$

da cui si ricava la funzione di trasferimento:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{aTz^{-1}}{1 - (1 - aT)z^{-1}} = \frac{a}{\frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1}} + a}$$

In questo caso, la trasformazione da effettuare affinché  $G(s)$  coincida con  $G(z)$  è :

$$s = \frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1}} = \frac{z-1}{T}$$

da cui:

$$D(z) = D(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{T}}$$

Possiamo quindi definire il legame indotto dalla trasformazione trovata tra il piano  $s$  e il piano  $z$ .

Si ha che:

$$\operatorname{Re}(s) = \operatorname{Re} \left[ \frac{z-1}{T} \right] < 0$$

Ciò comporta, poiché il periodo di campionamento  $T$  è sempre positivo, che  $\operatorname{Re}(z) < 1$ , ossia il semipiano sinistro del piano  $s$  viene trasformato nel semipiano a sinistra della retta  $\sigma = 1$  del piano  $z$ .

La corrispondenza tra i piani  $s$  e  $z$ , prodotta dal metodo delle differenze «in avanti», viene riportata nell'immagine sottostante:

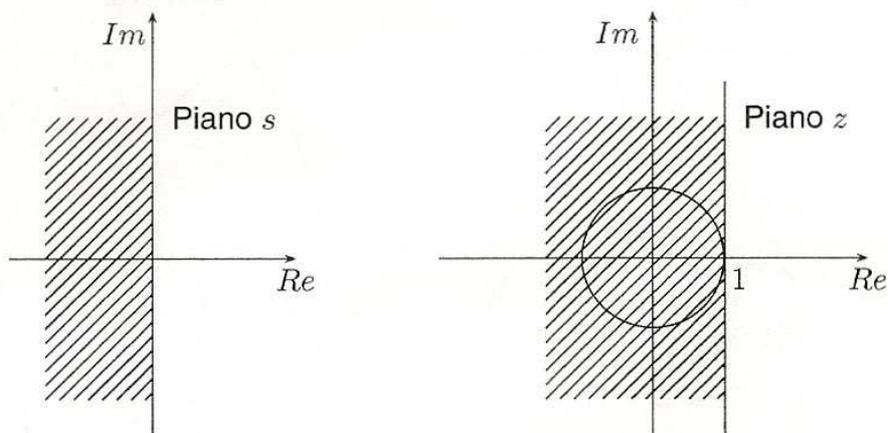


Figura 3.8 Trasformazione della regione di stabilità del piano  $s$  con il metodo delle differenze «in avanti»

Possiamo quindi concludere che funzioni di trasferimento analogiche stabili possono essere trasformate in funzioni di trasferimento discrete instabili (poli nella parte esterna della circonferenza unitaria).

Per tale motivo questa tecnica di trasformazione non viene utilizzata nella pratica.

### 3.5.3 Trasformata bilineare (o di Tustin)

Un procedimento alternativo è basato sull'integrazione dell'equazione differenziale e sull'uso di un'approssimazione numerica dell'integrale.

Ad esempio, si consideri l'equazione del primo ordine:

$$y'(t) + ay(t) = ax(t)$$

dove  $y'(t)$  è la derivata prima dell'uscita  $y(t)$ , il termine  $a$  il coefficiente dell'uscita  $y(t)$  e dell'ingresso  $x(t)$ .

La corrispondente funzione di trasferimento del sistema analogico è:

$$G(s) = \frac{a}{s + a}$$

Possiamo scrivere  $y(t)$  come l'integrale di  $y'(t)$ , nella forma:

$$y(t) = \int_{t_0}^t y'(\tau) d\tau + y(t_0)$$

In particolare, per  $t = kT$  e  $t_0 = (k-1)T$  con  $k$  costante e  $T > 0$ , risulta:

$$y(kT) = \int_{(k-1)T}^{kT} y'(\tau) d\tau + y((k-1)T)$$

Se l'integrale viene approssimato col metodo dei trapezi (da qui il nome di integrazione trapezoidale), possiamo scrivere:

$$y(kT) = y((k-1)T) + T/2[y'(kT) + y'((k-1)T)]$$

Poichè dall'equazione differenziale prima citata, portando il termine dell'uscita  $y$  a destra, si ha:

$$y'(kT) = -ay(kT) + ax(kT)$$

la  $y(kT) = y((k-1)T) + T/2[y'(kT) + y'((k-1)T)]$  si può riscrivere come:

$$[y(k) - y(k-1)] = T/2[-a(y(k) + y(k-1)) + a(x(k) + x(k-1))]$$

dove  $y(k) = y(kT)$  e  $x(k) = x(kT)$ .

Prendendo la trasformata zeta e ricavando  $G(z)$  si ha:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{aT}{2}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1}) + \frac{aT}{2}(1+z^{-1})} = \frac{a}{\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})} + a}$$

Risulta chiaro che  $G(z)$  è ottenuta da  $G(s)$  tramite la sostituzione:

$$s = \frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})} = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}$$

Questa relazione è detta trasformazione bilineare, integrazione trapezoidale o metodo di trasformazione di Tustin, e nella figura 3.9 ne è illustrato un esempio.

Si può quindi scrivere:

$$D(z) = D(s) \Big|_{s = \frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}}$$

È possibile, poiché la trasformazione  $s = \frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}$  è invertibile, ricavare la  $z$  in funzione

della  $s$ :

$$z = \frac{1 + (T/2)s}{1 - (T/2)s}$$

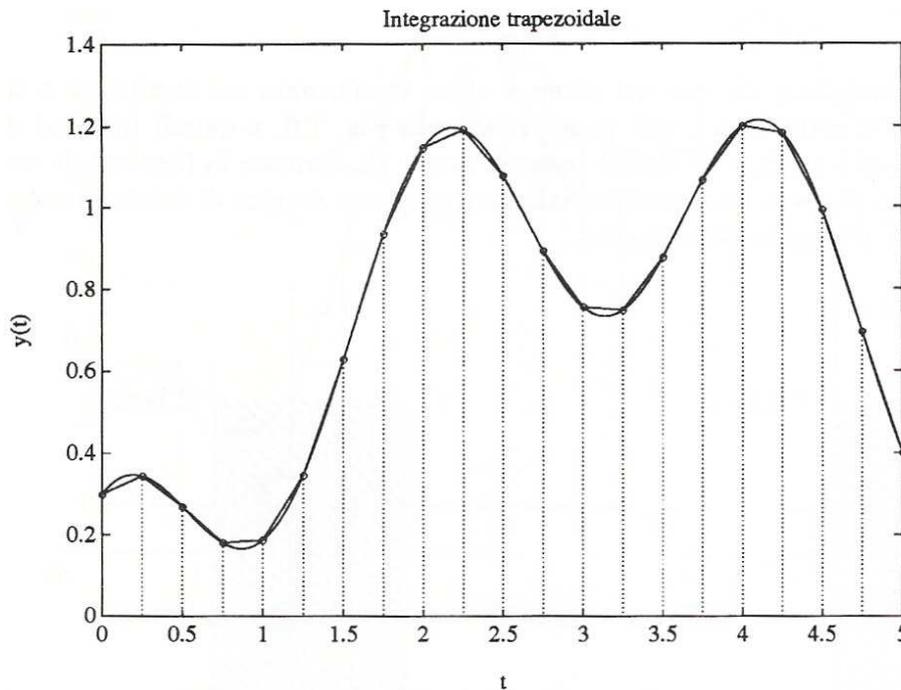


Figura 3.9 Approssimazione dell'integrale con la trasformazione bilineare

Per analizzare le caratteristiche della funzione di trasferimento digitale  $D(z)$  ottenibile tramite la trasformazione  $s = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}$  in termini di stabilità, si determinano i valori di  $z$  tali che:

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{2(z-1)}{T(z+1)} \right] < 0$$

da cui, poiché  $T > 0$ , si ha :

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{z-1}{z+1} \right] < 0$$

Ponendo  $z = \sigma + j\omega$  :

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{z-1}{z+1} \right] = \operatorname{Re} \left[ \frac{\sigma + j\omega - 1}{\sigma + j\omega + 1} \right] = \operatorname{Re} \left[ \frac{\sigma^2 + \omega^2 - 1 + 2j\omega}{(\sigma + 1)^2 + \omega^2} \right] < 0$$

cioè  $\sigma^2 + \omega^2 < 1$ , che definisce la regione interna al cerchio di raggio unitario centrato nell'origine.

La dimostrazione per il semipiano destro è analoga.

Dunque la trasformazione bilineare trasforma una  $D(s)$  analogica stabile in una  $D(z)$  discreta stabile e viceversa.

Si noti che la trasformazione mette in corrispondenza l'intero asse immaginario del piano  $s$  con la circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine del piano  $z$ .

Questa circonferenza viene percorsa una sola volta per  $\omega$  che varia tra  $-\infty$  e  $+\infty$  in  $s$ , evitando quindi il problema dell'aliasing incontrato nei metodi dell'invarianza della risposta.

Per verificare che il cerchio unitario è percorso una sola volta, si pone  $s = j\Omega$  nella:

$$z = \frac{1 + (T/2)s}{1 - (T/2)s}$$

che assume i seguenti valori:

$$z = +1 \quad (\text{per } \Omega = 0)$$

$$z = -1 \quad (\text{per } \Omega = \pm\infty)$$

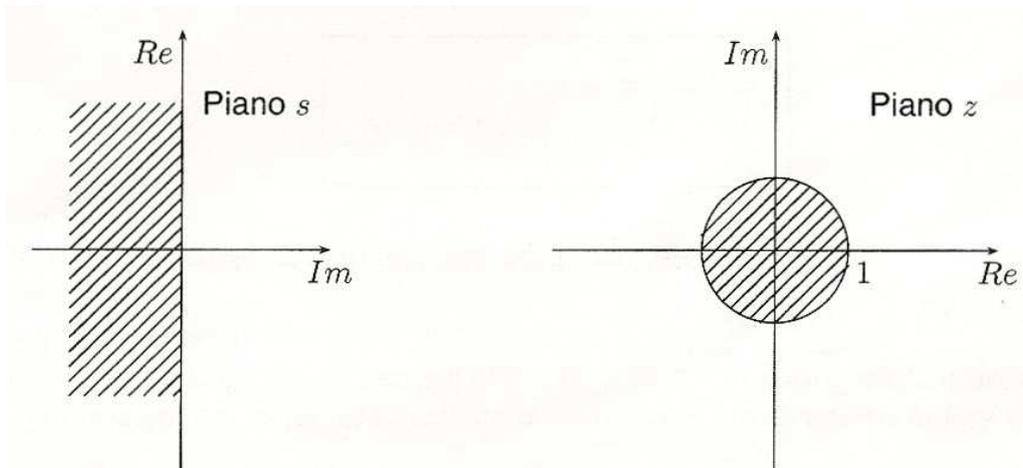


Figura 3.10 Trasformazione della regione di stabilità del piano  $s$  con la trasformazione bilineare

La corrispondenza tra i due piani è quindi simile a quella ottenuta ponendo  $z = e^{sT}$ , cioè mediante la Z-trasformata.

Con quest'ultima, però, il cerchio unitario viene percorso infinite volte per  $\Omega$  che appartiene all'intervallo  $[-\infty, +\infty]$ , e quindi, per l'analisi frequenziale si devono considerare solo le frequenze all'interno della striscia primaria  $[-\pi/T, +\pi/T]$ .

La relazione  $s = \frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})} = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}$  non genera sovrapposizione frequenziale, ma

introduce distorsioni.

Si ha infatti un fenomeno di "compressione" alle alte frequenze, che si può facilmente verificare mediante la seguente analisi.

Se si indica, per maggior chiarezza, con  $\omega$  la variabile complessa finora detta  $s$ , e si considerano le trasformazioni tra i piani  $\omega$ ,  $z$ ,  $s$ , riportate in figura 3.11 :

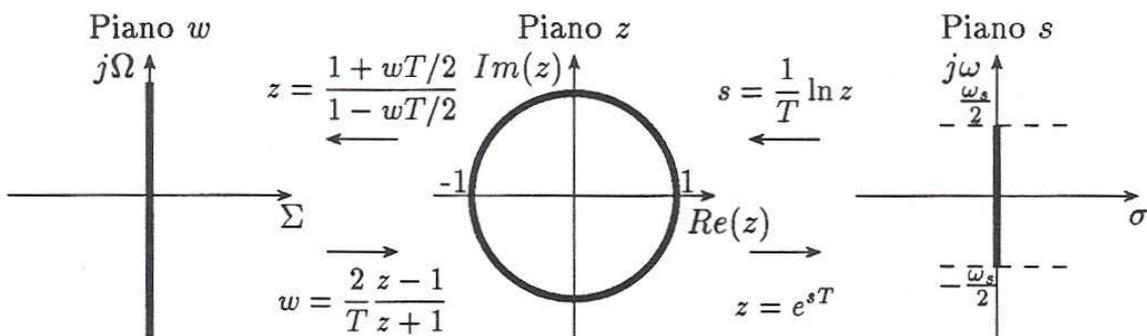


Figura 3.11 Relazione frequenziale tra il piano  $\omega$ , il piano  $z$  ed il piano  $s$

si ottiene che, per  $\omega = j\Omega$ ,  $0 \leq \Omega \leq \infty$  la variabile  $z = \frac{1 + (j\Omega T/2)}{1 - (j\Omega T/2)}$  percorre la

semicirconferenza di raggio unitario tra  $z = +1$  e  $z = -1$  e corrispondentemente la variabile  $s = 1/T \ln z$  percorre l'asse immaginario  $s = j\omega$ ,  $0 \leq \omega \leq \omega_c/2 = \pi/T$ .

Complessivamente, il legame tra  $\Omega$  e  $\omega$ , che rappresentano rispettivamente la pulsazione del filtro analogico e quella del filtro digitale da progettare, si ottiene, con i passaggi seguenti, dalla  $s = \frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})} = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}$  :

$$j\Omega = \frac{2(1-e^{-j\omega T})}{T(1+e^{-j\omega T})} = \frac{2j\sin(\omega T/2)}{T\cos(\omega T/2)} = \frac{2j\tan(\omega T/2)}{T}$$

È quindi possibile ricavare la relazione:

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2}$$

che permette di valutare le distorsioni frequenziali introdotte dalla trasformazione, come mostrato in figura 3.12.

Ovviamente, nel caso ideale di assenza di distorsione, si avrebbe  $\Omega = \omega$ .

Con un opportuna scelta del periodo di campionamento  $T$ , le frequenze d'interesse sono tali da verificare la relazione  $\omega \ll \pi/T$  e quindi  $\tan(\omega T/2) \approx \omega T/2$  e  $\Omega \approx \omega$ .

In figura 3.13 è mostrata la distorsione frequenziale che si introduce nel trasformare una funzione di trasferimento analogica nella corrispondente digitale mediante la trasformazione bilineare.

Tale distorsione consiste in una compressione alle alte frequenze, come si può dedurre dall'immagine.

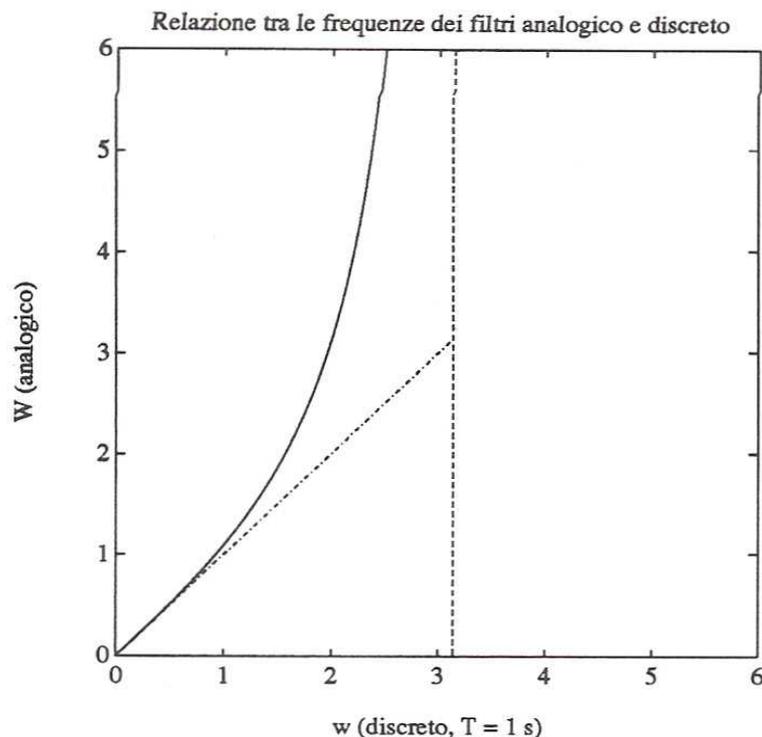


Figura 3.12 Relazione tra le pulsazioni del caso analogico e del caso discreto

Di conseguenza, il progetto di controllori digitali per mezzo della trasformazione bilineare è utile solamente quando queste distorsioni possono essere tollerate o parzialmente compensate, modificando la trasformazione bilineare tramite la cosiddetta pre-distorsione.

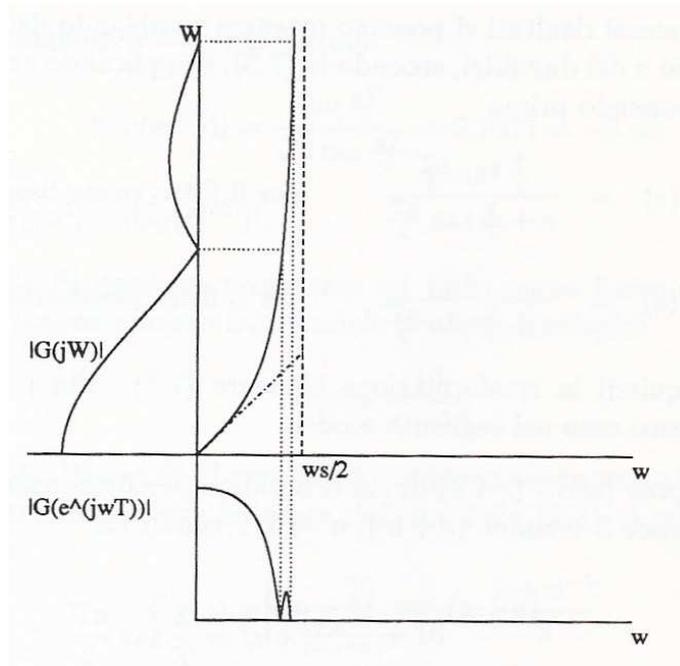


Figura 3.13 Distorsione della risposta armonica causata dalla trasformazione bilineare

### 3.5.4 Metodo di Tustin con precompensazione frequenziale

Come esplicitato nel paragrafo precedente, la trasformazione bilineare introduce distorsioni nel dominio frequenziale.

Per ovviare a questo inconveniente, può essere adottata una trasformazione bilineare modificata che compensa a priori, ad una pulsazione specifica di interesse  $\omega'$ , la distorsione della trasformazione (prewarping).

A tal scopo, invece d'utilizzare la relazione della semplice trasformazione bilineare:

$$s = \frac{2(1 - z^{-1})}{T(1 + z^{-1})} = \frac{2(z - 1)}{T(z + 1)}$$

si adopera la seguente sostituzione:

$$s = \frac{\omega'(1 - z^{-1})}{\tan(\omega'T/2)(1 + z^{-1})} = \frac{\omega'}{\tan(\omega'T/2)} \frac{z - 1}{1 + z}$$

Questo tipo di trasformazione è detto anche trasformazione bilineare (di Tustin) con precompensazione.

Se si vuole discretizzare un filtro analogico passa basso del tipo:

$$G(s) = \frac{a}{s + a}$$

mantenendo la frequenza di taglio, conviene procedere con la precompensazione alla frequenza  $\omega = a$ , e porre:

$$s = \frac{a(1 - z^{-1})}{\tan(aT/2)(1 + z^{-1})}$$

ottenendo quindi il filtro discreto:

$$G(z) = \frac{\tan \frac{aT}{2} (1 + z^{-1})}{\left[ \tan \frac{aT}{2} - 1 \right] z^{-1} + \left[ \tan \frac{aT}{2} + 1 \right]}$$

In modo simile, se si ha un filtro passa alto del tipo:

$$G(s) = \frac{s}{s + a}$$

il filtro discreto che si ottiene, compensando alla frequenza di taglio, è il seguente:

$$G(z) = \frac{(1 - z^{-1})}{\left[ \tan \frac{aT}{2} - 1 \right] z^{-1} + \left[ \tan \frac{aT}{2} + 1 \right]}$$

Si noti che gli stessi risultati si possono ottenere cambiando dapprima la pulsazione di taglio a dei due filtri, secondo la relazione  $\Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega T}{2}$ , e applicando successivamente la:

$$s = \frac{2(1 - z^{-1})}{T(1 + z^{-1})} = \frac{2(z - 1)}{T(z + 1)}, \text{ cioè ponendo prima :}$$

$$G(s) = \frac{2 \tan \frac{aT}{2}}{s + \frac{2}{T} \tan \frac{aT}{2}} \quad \text{per il filtro passa basso}$$

$$G(s) = \frac{s}{s + \frac{2}{T} \tan \frac{aT}{2}} \quad \text{per il filtro passa alto}$$

e applicando quindi la sostituzione caratteristica della trasformazione bilineare.

Più precisamente, si procede in questo caso nel seguente modo :

1. ad ogni polo o zero  $(s + a)$  di cui si desidera precompensare la frequenza si sostituisce il termine  $(s + a')$ ,  $a' = 2/T[\tan aT/2]$ .

$$(s + a') \Big|_{a' = \frac{2}{T} \tan \frac{aT}{2}} \rightarrow (s + a)$$

2. si trasforma la funzione  $D(s, a')$  così ottenuta nella corrispondente  $D(z, a')$  :

$$D(z, a') = D(s, a') \Big|_{s = \frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}}$$

3. si aggiusta il guadagno della  $D(z, a')$  per  $z = 1$  (guadagno statico) e per  $z = -1$  (guadagno alle alte frequenze) per avere gli stessi valori della  $D(s)$ .

E' immediato verificare che i moduli della funzione di risposta armonica dei filtri digitali così calcolati alla pulsazione di taglio  $a$  sono gli stessi dei filtri analogici.

Per esempio, considerando il filtro passa basso, si ha :

$$|G(ja)| = \frac{a}{\sqrt{a^2 + a^2}} = 0.7071 = -3 \text{ dB}$$

mentre :

$$G_d(e^{j\omega T}) = \frac{\frac{\tan \frac{aT}{2}}{2} (1 + e^{-j\omega T})}{\left[ \frac{\tan \frac{aT}{2} - 1}{2} \right] e^{-j\omega T} + \left[ \frac{\tan \frac{aT}{2} + 1}{2} \right]} = \frac{\frac{\tan \frac{aT}{2}}{2}}{j \tan \frac{\omega T}{2} + \frac{\tan \frac{aT}{2}}{2}}$$

che, alla pulsazione  $\omega = a$ , ha modulo:

$$|G_d(e^{jaT})| = \frac{\frac{\tan \frac{aT}{2}}{2}}{\sqrt{2} \tan(aT/2)} = 0.7010 = -3 \text{ dB}$$

e dunque  $|G(ja)| = |G_d(e^{jaT})|$ .

### 3.6 Metodo della corrispondenza poli-zeri (Matched poles and zeros)

Con questo metodo, ogni polo  $p_s$  e zero  $z_s$  in  $s$  della funzione analogica  $D(s)$  definita da:

$$D(s) = k \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

viene trasformato in un polo  $p_i$  oppure in uno zero  $z_i$  in  $z$  mediante la relazione  $z = e^{sT}$ . La  $D(z)$  che si ricava è la seguente:

$$D(z) = \frac{k \prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)}$$

La procedura per effettuare la trasformazione sopra definita è la seguente:

- fattorizzare il numeratore ed il denominatore di  $D(s)$ , al fine d'ottenere la relazione precedentemente esposta per la  $D(s)$ ;
- effettuare le trasformate dei singoli poli e zeri mediante la relazione  $z = e^{sT}$ .

Tali trasformazioni sono del tipo:

$$(s + a) \rightarrow (1 - e^{-aT} z^{-1})$$

$$(s + a \pm jb) \rightarrow (1 - 2e^{-aT} \cos bT z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2})$$

Si noti che anche con il metodo della Z-trasformata i poli della  $D(s)$  vengono trasformati in questo modo, ma non così gli zeri;

- si introducono nella  $D(z)$  tanti zeri in  $z = -1$  quanti sono i poli di  $D(s)$  in eccesso rispetto gli zeri (grado relativo).
- si compensa il guadagno statico  $K$  alle basse o alte frequenze.

Si desidera che funzioni di trasferimento del tipo passa basso abbiano lo stesso guadagno per  $s \rightarrow 0$  (nel continuo) e per  $z \rightarrow 1$  (nel discreto) e che funzioni di tipo passa alto abbiano lo stesso guadagno per  $s \rightarrow \infty$  (nel continuo) e per  $z \rightarrow -1$  (nel discreto).

Per illustrare il funzionamento del metodo della corrispondenza poli-zeri vengono svolti alcuni esempi.

### Esempio 3.2

Si consideri la funzione di trasferimento analogica di un filtro passa basso del tipo:

$$D(s) = \frac{a}{s + a}$$

Effettuando una semplice trasformazione poli/zeri, si otterrebbe:

$$D(z) = \frac{a}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$$

Si nota che è presente in  $D(s)$  uno zero all'infinito (ovvero un polo in eccesso rispetto al numero degli zeri) per cui  $D(s) \rightarrow 0$ , per  $s \rightarrow \infty$ .

Poiché si desidera che il comportamento frequenziale del filtro analogico  $D_c(j\Omega)$  per  $\Omega \rightarrow \infty$  sia simile a quello di  $D_d(e^{j\omega T})$  per  $\omega \rightarrow \pi/T$  (che è la frequenza massima ammissibile nel caso discreto per non avere aliasing), si aggiunge uno zero in  $z = -1$ :

$$D(z) = \frac{a(1 + z^{-1})}{1 - e^{-aT} z^{-1}},$$

in modo che anche  $D(z) \rightarrow 0$  quando  $z \rightarrow -1$ , ossia per  $\omega \rightarrow \pi/T$ .

Nell'esempio precedente, qualora si volesse trovare il guadagno statico  $k$ , definito come il valore del guadagno che la funzione di trasferimento  $D(s)$  assume ponendo  $s = 0$  e quindi, con riferimento alla  $D(z)$ , ponendo  $z = 1$ , si calcola il valore della relazione sottostante:

$$\lim_{z \rightarrow 1} D(z) = k \frac{2a}{1 - e^{-aT}} = \lim_{s \rightarrow 0} D(s) = 1$$

da cui

$$k = \frac{1 - e^{-aT}}{2a}.$$

L'equivalente discreto del filtro  $D(s)$  è quindi:

$$D(z) = \frac{(1 - e^{-aT})(1 + z^{-1})}{2(1 - e^{-aT}z^{-1})}$$

### Esempio 3.3

Consideriamo una funzione di trasferimento analogica del tipo:

$$D(s) = \frac{s + b}{s + a}$$

di cui interessa il solo comportamento per le basse frequenze.

Con la trasformazione  $z = e^{sT}$  applicata separatamente al numeratore e al denominatore si ottiene :

$$D(z) = k \frac{z - e^{-bT}}{z - e^{-aT}}$$

dove k viene calcolato imponendo l'uguaglianza fra i guadagni statici di D(s) e di D(z), ossia:

$$\lim_{z \rightarrow 1} D(z) = k \frac{z - e^{-bT}}{z - e^{-aT}} = \lim_{s \rightarrow 0} D(s) = \frac{b}{a}$$

e quindi

$$k = \frac{b}{a} \frac{1 - e^{-aT}}{1 - e^{-bT}}$$

### Esempio 3.4

Consideriamo ora il filtro passa alto che presenta una funzione di trasferimento analogica del tipo:

$$D(s) = \frac{s}{s + a}$$

Esso viene trasformato in:

$$D(z) = k \frac{z - 1}{z - e^{-aT}}, \text{ dove } k = \frac{1 + e^{-aT}}{2} .$$

### Esempio 3.5

In quest'ultimo esempio consideriamo una funzione di trasferimento del tipo :

$$D(s) = \frac{1}{(s+a)^2 + b^2} = \frac{1}{(s + a + jb)(s + a - jb)}$$

Essendo presenti due poli ( $s = -a + jb$  e  $s = -a - jb$ ) e nessuno zero, è necessario introdurre due zeri in  $z = -1$ .

Si ha dunque :

$$D(z) = k \frac{(z + 1)^2}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos bT + e^{-2aT}}$$

con  $k$  determinato in modo da avere lo stesso guadagno statico per i due filtri:

$$k = \frac{1 - 2e^{-aT} \cos bT + e^{-2aT}}{4(a^2 + b^2)}$$

### 3.7 Considerazioni conclusive

In conclusione, dopo aver esposto alcune delle tecniche di discretizzazione più utilizzate, possiamo ricordare che, in quanto tecniche d'approssimazione, esse forniscono funzioni discrete  $D(z)$  che cercano d'avvicinarsi il più possibile a quelle analogiche corrispondenti  $D(s)$ .

Infatti tutte le tecniche, anche se in quantità diversa, presentano distorsioni rilevanti nel dominio delle frequenze e, in particolar modo per pulsazioni prossime a  $\pi/T$ .

E' quindi necessario che la frequenza di campionamento venga scelta in modo tale da degradare il meno possibile le prestazioni del controllore.

La prima delle condizioni sulla frequenza di campionamento da imporre è che verifichi il teorema di Shannon (vedi paragrafo 2.4).

Per ridurre le distorsioni frequenziali, si cerca inoltre di fare in modo che le frequenze d'interesse di  $D(s)$  siano ben al di sotto di  $\omega_s/2$ , e di considerare l'effetto del ritardo introdotto dall'holder nel progetto della  $D(s)$ .

Vale la pena di ricordare che la bontà del metodo utilizzato si misura anche dalla possibilità per il progettista di essere guidato nell'aggiustamento dei parametri di  $D(z)$  in sede di simulazione o prove sperimentali, qualora non fossero soddisfatte le specifiche di controllo del sistema complessivo.

Solitamente si consiglia d'effettuare la discretizzazione della  $D(s)$  mediante diverse tecniche e per confronto adottare quella che fornisce risultati migliori.

Da questo punto di vista, le tecniche più usate sono la trasformazione bilineare con precompensazione e quella per corrispondenza poli-zeri.

## Capitolo 4

### Regolatori a struttura fissa (PID)

Il secondo esempio di tecnica progettuale analizzato in questa tesi è quello basato sui regolatori standard a struttura fissa.

In questo capitolo faremo riferimento ai controllori PID digitali.

Nel seguito verrà data una definizione ed una dettagliata spiegazione della struttura e delle funzionalità del controllore PID, sia nel caso analogico che in quello digitale, oltre a porre attenzione, nell'ambito della progettazione, alla fase di sintesi.

Infatti il controllore PID digitale viene ricavato dalla discretizzazione di uno continuo, e vista l'importanza che esso assume nel controllo dei processi si preferisce trattarlo separatamente.

Nella sua versione analogica (pneumatica o elettronica) questo tipo di controllore è stato, ed è tuttora, la soluzione preferita nella regolazione dei processi.

Ciò dipende principalmente dal fatto che il controllore PID è una struttura assolutamente versatile poiché non richiede un modello matematico del processo da controllare.

Questo vantaggio dipende dal fatto che esso presenta una struttura prefissata e tramite la modifica, entro opportuni limiti, di alcuni parametri, riesce ad adattarsi nel miglior modo al processo.

Per indicare l'operazione mediante la quale si fanno assumere valori convenienti ai parametri suscettibili di essere modificati, in inglese s'impiega il verbo "to tune" e perciò la seguente operazione viene chiamata tuning dei parametri o sintonizzazione.

La versione digitale dell'azione PID è stata invece il primo algoritmo di controllo digitale applicato al controllo dei processi industriali, sia perché gli operatori del settore erano già esperti nell'arte di mettere a punto il controllore sia perché l'algoritmo digitale permette di risolvere in maniera molto semplice alcuni problemi presenti nei controllori analogici.

Si potrebbe obiettare che, con la possibilità di avere a disposizione sistemi ad elevata capacità e velocità di calcolo ad un costo contenuto, in quanto il rapporto efficacia/costo è molto buono, non ci sia alcuna ragione per limitarsi ai semplici controllori a tre termini.

Si devono però tener presente i seguenti punti:

- 1) È preferibile per un grande impianto industriale usare un'unica struttura con dei parametri da sintonizzare caso per caso, piuttosto che modellare centinaia di sottoprocessi, ciascuno con un controllore progettato ad hoc.
- 2) Nonostante i controllori contengano molti parametri, per cui è difficile interpretare la relazione di causa-effetto che lega la variazione di un parametro all'azione di controllo che ne consegue, il comportamento del PID risulta essere vantaggioso poiché aggiustabile variando il peso relativo delle tre azioni.
- 3) L'algoritmo digitale PID può includere delle funzioni che non sono facilmente realizzabili con tecniche analogiche.

In particolare può essere implementata la funzione di auto-sintonizzazione (auto-tuning), della quale è presente un approfondimento nel paragrafo 4.7.1, la quale permette la messa a punto automatica dei parametri del controllore.

L'auto-sintonizzazione consente d'avere prestazioni migliori di quelle ottenibili con controllori a termini fissi, anche se, come già spiegato nel capitolo precedente, le prestazioni di un controllore PID digitale non potranno mai essere migliori di quelle del controllore analogico dal quale è stato ottenuto mediante discretizzazione.

Perciò, nonostante la sua semplicità strutturale, quello PID è un buon controllore, e, in base a tutte le motivazioni sopra citate, il suo utilizzo nell'ambito del controllo dei processi è fondamentale.

## 4.1 Definizione e strutture del controllore PID analogico

### 4.1.1 Definizione del controllore PID analogico

Il controllore PID rappresenta, e da qui deriva il suo nome, un dispositivo che esercita delle azioni di controllo di tipo proporzionale, integrale, derivativo.

Esso infatti, nella sua configurazione classica, è caratterizzato da tre azioni combinate:

- azione proporzionale all'errore **P**
- azione proporzionale all'integrale dell'errore **I**
- azione proporzionale alla derivata dell'errore **D**

che nel seguito verranno analizzate singolarmente.

I termini derivativo e/o integrale possono essere assenti, dando luogo a:

- controllori P
- controllori PI
- controllori PD

Considerando invece il controllore base PID (cioè quello che presenta tutti i 3 termini), esso riceve in ingresso l'errore  $e(t)$  e genera come uscita il segnale di comando  $u(t)$  che va applicato all'attuatore, secondo la formula:

$$u(t) = K_P \left[ e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \right]$$

dove  $K_P$  è una costante proporzionale e  $T_d$  e  $T_i$ , rispettivamente, le costanti di tempo della parte derivativa ed integrale.

Può essere definita quindi la funzione di trasferimento del controllore PID:

$$G(s) = U(s) / E(s) = K_P + K_i / s + K_d s = K_P [1 + T_d s + 1/s T_i] = K_P (T_d T_i s^2 + T_i s + 1) / (T_i s)$$

con  $T_i = K_P / K_i$  e  $T_d = K_d / K_P$ .

#### Azione proporzionale P:

Si consideri il sistema di controllo nel quale l'azione del controllore è esclusivamente proporzionale, e quindi è definita la relazione:

$$U(s) = K_P E(s)$$

Il controllore ottenuto, considerando solo l'azione proporzionale, viene chiamato controllore P (in esso il termine derivativo e quello integrale sono assenti, ovvero  $T_d = 0$  e  $T_i = \infty$ ) ed è

utilizzato principalmente per processi asintoticamente o semplicemente stabili quando le prestazioni statiche non richiedano l'inserimento di un polo nell'origine nel guadagno d'anello.

La figura 4.1 rappresenta il legame tra l'ingresso e l'uscita di un controllore puramente proporzionale, per due valori diversi di guadagno, dove l'ingresso e l'uscita sono espressi come percento del loro campo di variazione.

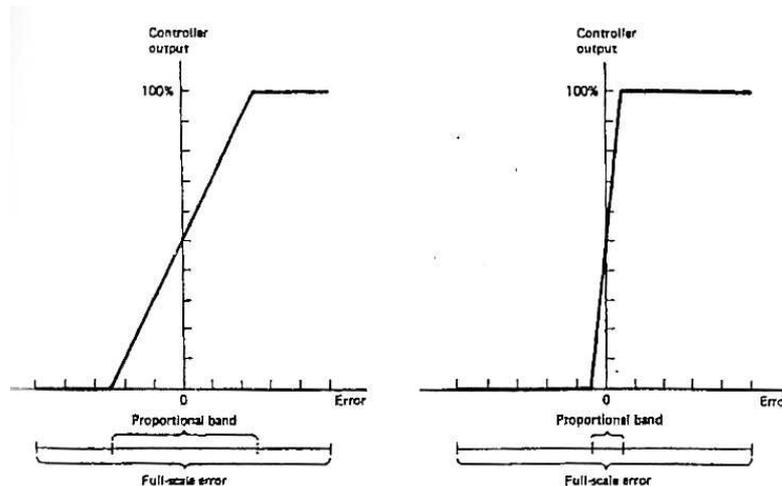


Figura 4.1 Legame ingresso-uscita di un controllore P per diversi valori di guadagno

Nell'asse delle ascisse dei seguenti grafici è presente una grandezza chiamata banda proporzionale BP (in inglese Proportional Band), la quale rappresenta la minima variazione dell'ingresso che comporta la variazione del 100% dell'uscita.

Se i segnali d'ingresso e d'uscita sono della stessa natura fisica e variano entro lo stesso campo di valori, risulta che il guadagno  $K_P$  è dato da :

$$K_P = \frac{100}{BP\%}$$

Nella prima figura,  $BP = 50\%$  da cui  $K_P = 2$ , mentre nella seconda risulta  $BP = 10\%$  e  $K_P = 10$ .

### Azione integratrice I:

Si consideri l'azione PI (somma del termine proporzionale P e di quello integrativo I) e la risposta dei due termini al gradino unitario, come riportato in figura 4.2.

$$Y(s) = K_P E(s) + \frac{K_i}{s} E(s) = K_P \left[ 1 + \frac{1}{T_i} \right] E(s)$$

Da tale figura si vede che, la costante di tempo della parte integrativa  $T_i$  (chiamata tempo di raddoppio, tempo di riporto o reset time) definisce l'intervallo di tempo necessario perché la risposta della parte integrale sia uguale a quella della parte proporzionale, e quindi il tempo necessario perché la risposta totale al gradino unitario raggiunga il valore doppio di quella della sola parte proporzionale.

Inoltre risulta che il tempo di raddoppio  $T_i$  è pari al rapporto  $K_P / K_i$  ed è usualmente misurato in secondi o minuti nei controllori commerciali per processi industriali.

Si può definire anche la frequenza di riporto come l'inverso del tempo di riporto:

$$1/T_i = K_i/K_P$$

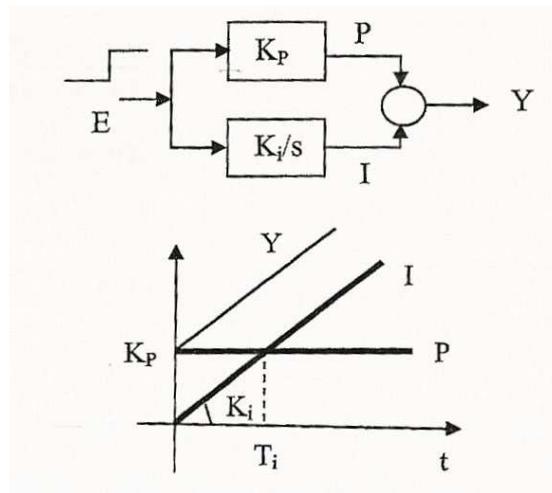


Figura 4.2 Azione PI e risposta al gradino unitario

Controllori caratterizzati da questo tipo d'azione vengono chiamati PI e presentano una funzione di trasferimento:

$$G(s) = K_P \frac{1 + T_i s}{T_i s}$$

in cui manca la costante  $T_d$  per l'assenza del termine derivativo.

I seguenti controllori sono molto diffusi a livello industriale in quanto permettono il soddisfacimento delle specifiche statiche (consentono d'inserire un polo nell'origine nella funzione di trasferimento ad anello) e sono di facile taratura per semplici processi.

Inoltre, grazie allo zero in  $s = -1/T_i$  è possibile agire sul tempo d'assestamento del sistema controllato.

### Azione derivativa D:

Si consideri, in questo caso, la risposta ad una rampa unitaria di un controllore PD (la cui azione è somma del termine proporzionale P e di quello derivativo D).

Essa è simile alla risposta al gradino di un controllore PI, dove però la rampa ha pendenza  $K_P$  ed il termine costante è pari a  $K_d$ .

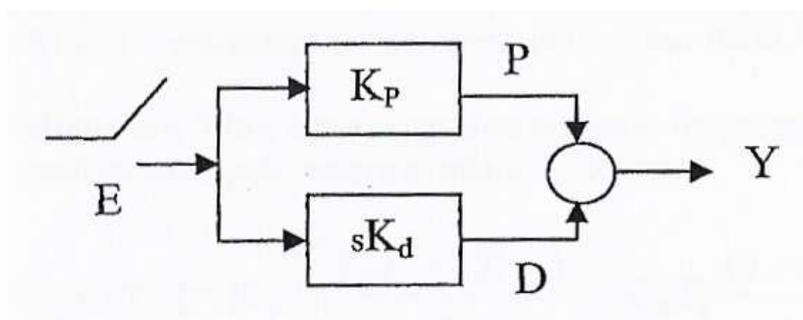


Figura 4.3 Azione PD

$$Y(s) = K_P[1 + sT_d] E(s)$$

Si definisce costante di tempo della parte derivativa (tempo d'anticipo o rate time) l'intervallo di tempo necessario perché l'azione proporzionale P produca lo stesso valore del termine derivativo D, e quindi l'uscita totale raggiunga il valore doppio di quello della parte derivativa.

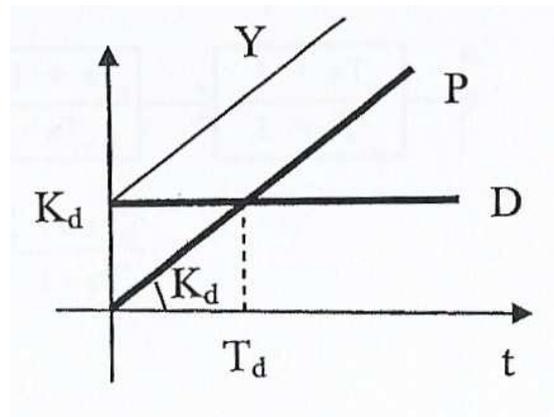


Figura 4.4 Risposta alla rampa unitaria

Dalla somma delle tre azioni sopra citate si ottiene il classico controllore PID, il quale abbiamo detto avere funzione di trasferimento:

$$G(s) = K_P \frac{(T_d T_i s^2 + T_i s + 1)}{T_i s}$$

Essa può anche essere scritta nella forma:

$$G(s) = K_P T_d \frac{(s - z_1)(s - z_2)}{s}$$

e presenta quindi due zeri a parte reale negativa (reali se  $T_i \geq 4T_d$  e coincidenti se  $T_i = 4T_d$ ) e un polo nell'origine.

Si osservi che la funzione di trasferimento del PID sopra presentato non è fisicamente realizzabile poiché impropria a causa dell'azione derivativa.

Tuttavia quest'ultima è realmente utile solo fino ad una certa frequenza, oltre la quale è conveniente che vi sia attenuazione per filtrare il rumore fuori della banda di controllo.

Per questo motivo si preferisce impiegare per la parte derivativa la funzione di trasferimento:

$$\frac{sT_d}{1 + sT_L} = \frac{sT_d}{1 + sT_d/N}$$

in cui il termine derivativo è filtrato con un filtro passa basso (PB) del primo ordine.

In genere viene scelto  $3 \leq N \leq 20$  in modo da posizionare il polo all'esterno della banda d'interesse.

Bisogna anche dire che la presenza del polo reale può modificare un po' la posizione degli zeri.

Per un filtraggio più deciso, il denominatore della funzione di trasferimento viene elevato al quadrato, oppure si ricorre ad un filtro PB di Butterworth del secondo ordine:

$$\frac{sT_d}{s^2/\omega_n^2 + 2s\xi/\omega_n + 1} \quad \text{con } \xi = 1/\sqrt{2} \text{ e } \omega_n = 1/T_d.$$

## 4.1.2 Struttura del controllore PID analogico

Come accennato prima, tali controllori possono essere di tipo P, PI, PD oppure PID, e sono disponibili in varie strutture e con diverse varianti.

Lo schema del controllore PID classico è il seguente:

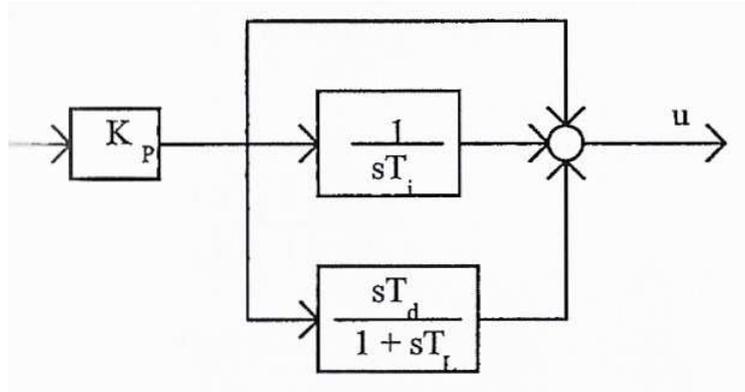


Figura 4.5 Schema classico controllore PID

Esso è caratterizzato dalla funzione di trasferimento  $G(s) = K_P \left[ 1 + \frac{1}{sT_i} + \frac{sT_d}{1+sT_L} \right]$  con

$T_L = T_d/N$ , e quindi il controllore PID è fisicamente realizzabile grazie alla presenza di un filtro del primo ordine che compensa l'azione derivativa.

La struttura considerata, che corrisponde ad una realizzazione parallelo, permette di far variare entro certi limiti i parametri  $K_P$ ,  $T_d$ ,  $T_i$ , e quindi le azioni di controllo a loro associate, in modo tra loro indipendente.

Per questo tale struttura viene anche denominata non interagente.

Trascurando l'effetto del filtro, ossia considerando solo frequenze inferiori a  $1/T_L$ , la funzione di trasferimento può essere scritta nella forma:

$$G(s) = \frac{K_P(T_d T_i s^2 + T_i s + 1)}{T_i s} = \frac{K_P T_d (s - z_1)(s - z_2)}{s}$$

Una struttura alternativa è quella interagente, che corrisponde a una realizzazione in serie (o in cascata) dell'azione PID, ed è caratterizzata da una funzione di trasferimento:

$$G(s) = K_P \frac{1 + sT_i}{sT_i} \frac{1 + sT_D}{1 + sT_L}$$

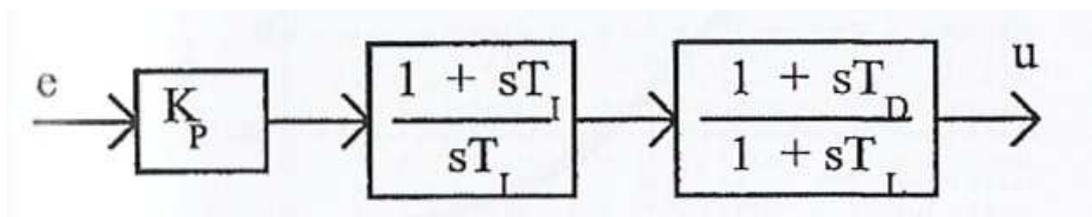


Figura 4.6 Struttura interagente

L'ultimo blocco, il quale corrisponde ad una azione anticipatrice  $T_L$  (lead, e da qui il pedice L), ha sempre la funzione di filtraggio, ma a differenza di prima viene applicata all'uscita invece che alla sola componente derivativa.

I parametri della struttura interagente possono essere facilmente posti in relazione con i parametri della realizzazione parallelo.  
 Infatti risulta immediatamente che:

$$-1 / T_I = z_1 , \quad -1 / T_D = z_2$$

dove  $z_1$  e  $z_2$  rappresentano gli zeri della funzione di trasferimento della struttura non interagente. Con la realizzazione serie al variare di  $T_I$  e/o  $T_D$  è possibile variare i parametri  $K_P$ ,  $T_D$  e  $T_I$  in modo indipendente e ciò permette di sagomare il diagramma di Bode dell'azione PID in modo diretto, come risulta dalla figura sottostante:

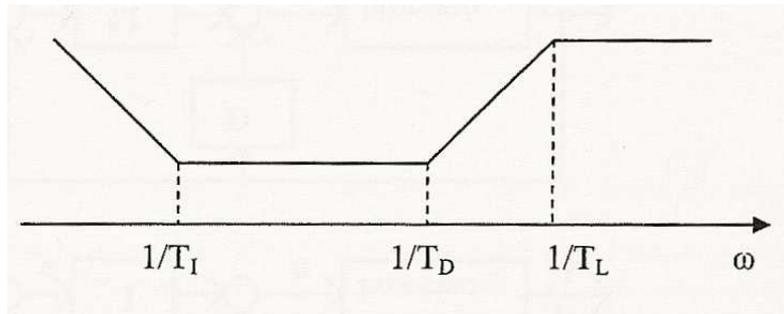


Figura 4.7 Diagramma di Bode dell'azione PID

Al variare di  $T_I$  e  $T_D$  vengono variati i pesi relativi delle tre azioni di controllo PID, però in modo complesso e comunque non indipendente.

Infatti  $T_I$  e  $T_D$  sono legati in modo semplice e biunivoco a  $z_1$  e  $z_2$  che a loro volta sono legati a  $T_d$  e  $T_i$  da una relazione complessa.

Ciò significa che se, ad esempio, viene variato il valore di  $T_I$  vengono variati contemporaneamente i pesi di tutte e tre le azioni e non della sola parte integrale.

Si può facilmente verificare che se  $T_D \ll T_I$  allora  $T_I \approx T_i$  e  $T_D \approx T_d$ .

Per quanto concerne l'inserimento del controllore PID nella catena di controllo, usualmente viene utilizzato il seguente schema:

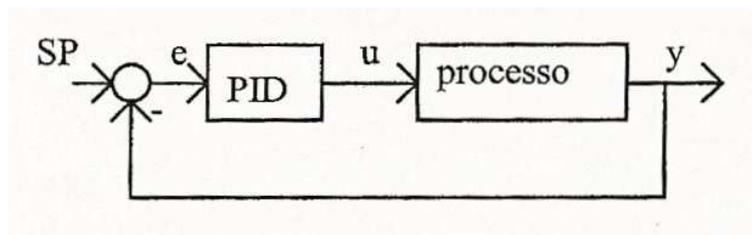


Figura 4.8 PID in configurazione standard

ma esistono anche delle configurazioni alternative:

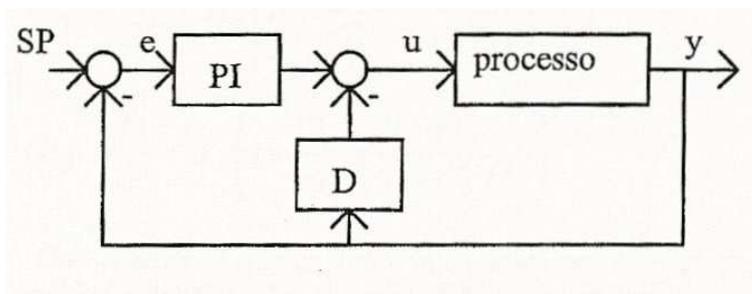


Figura 4.9 Configurazione PI-D

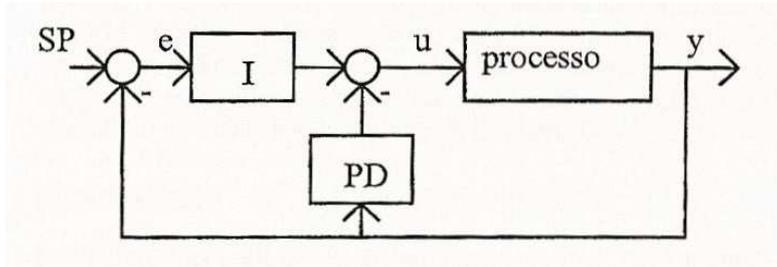


Figura 4.10 Configurazione I-PD

Qualora il segnale di riferimento (set-point o SP) sia costante, la derivata dell'errore  $de/dt$  risulta essere uguale nei vari casi e pari a  $-dy/dt$  (in virtù del fatto che la derivata di una costante è nulla).

Ciò ovviamente non vale nel caso in cui il riferimento sia variabile poiché non avrò più l'annullamento del termine di riferimento.

Nella semplice variante della configurazione standard in cui l'azione derivativa è realizzata con una rete d'anticipo (lead), ogni variazione del valore di riferimento viene sentita dal controllore, la cui parte D produce un impulso d'ampiezza elevata.

Ciò non è desiderabile nei sistemi di regolazione, dove il compito è di eliminare l'effetto dei disturbi e non inseguire le variazioni di SP.

Questo problema può essere risolto utilizzando un SP con variazioni molto lente, altrimenti è consigliabile l'impiego delle configurazioni alternative.

In esse, il blocco I viene applicato all'errore per eliminare quello a regime, mentre il blocco D viene applicato solo dopo.

La parte P può invece essere posta con I o con D.

In quest'ultimo caso è previsto anche lo spostamento dell'azione proporzionale sulla variabile controllata, e ciò è giustificato dal fatto che non si vogliono avere ampie discontinuità sull'uscita del regolatore a fronte del segnale di riferimento SP.

Tutte le configurazioni sopra esaminate possono essere ricondotte al seguente schema a blocchi generale:

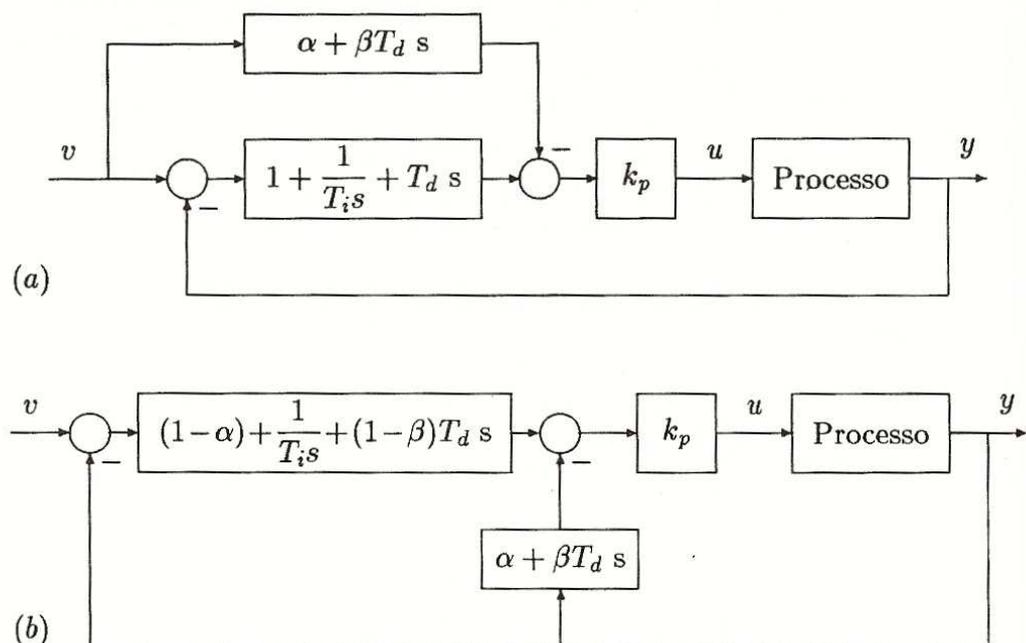


Figura 4.11 Regolatore PID con due gradi di libertà : a) con azione in avanti; b) schema in retroazione

dove viene raffigurato un regolatore PID continuo a due gradi di libertà, rappresentati dai parametri  $\alpha$  e  $\beta$ .

Si può facilmente verificare che:

per  $\alpha = 0, \beta = 0$  si ha la configurazione PID standard

per  $\alpha = 0, \beta = 1$  si ha la configurazione PI-D

per  $\alpha = 1, \beta = 1$  si ha la configurazione I-PD

E' importante anche dire che, nei controllori reali vengono implementate altre funzionalità, oltre quella della generazione del segnale di controllo.

In particolare è prevista una transizione dolce dal funzionamento manuale ad automatico (e viceversa) ed un fenomeno che compensi la saturazione dell'azione integrale.

Su questi aspetti dei controllori PID verranno date delle delucidazioni nei paragrafi 5.1 e 5.2.

## 4.2 Controllori PID digitali

Come già detto all'inizio del capitolo, l'algoritmo che realizza l'azione PID è ottenuto mediante la discretizzazione della funzione di trasferimento del controllore PID continuo.

I vari algoritmi che si ottengono differiscono tra di loro per il metodo di discretizzazione usato, anche se tendono tutti a comportarsi come quello analogico da cui derivano, all'aumentare della frequenza di campionamento rispetto alla banda di controllo, e trascurando i problemi dovuti alla quantizzazione.

In base a quanto detto è consigliabile scegliere un periodo di campionamento piccolo, in modo che l'equazione integro-differenziale che definisce l'uscita del controllore possa essere approssimata in maniera soddisfacente tramite un'equazione contenente somme e differenze.

Inoltre si preferisce discretizzare i singoli blocchi separatamente in modo che a ciascuno di essi corrisponda un modulo software specifico.

In questo modo la riconfigurazione via software della struttura finale del controllore verrà facilitata.

Dopo questa serie d'informazioni generali è possibile concentrarsi sulle due tipologie d'algoritmi di controllo dei PID :

- algoritmi PID assoluti (o di posizione)
- algoritmi PID incrementali (o di velocità)

La differenza principale tra i due algoritmi consiste nel fatto che nel primo caso viene calcolato il valore effettivo di  $u(k)$ , nell'altro il suo scostamento dal valore precedente  $u(k-1)$ .

Nel seguito verranno spiegati dettagliatamente entrambi gli algoritmi, considerando gli aspetti fondamentali di ciascuno di essi e le ulteriori diversità rilevate tra le due tipologie.

### 4.2.1 Algoritmi PID assoluti

Gli algoritmi PID assoluti (o di posizione) devono il loro nome al fatto che, ad ogni istante di campionamento  $kT$ , viene calcolato e fornito in uscita il nuovo valore del segnale di controllo  $u(k)$ , senza tener conto dello scostamento dal valore precedente  $u(k-1)$ .

Come già esplicitato quando si è trattato il PID continuo, l'uscita del controllore sarà data dalla somma delle tre azioni (proporzionale, integrale e derivativa) e varrà quindi:

$$u(t) = u_p(t) + u_i(t) + u_d(t)$$

Il nostro obiettivo è effettuare la discretizzazione operando sui singoli blocchi, come già spiegato prima, e costruire uno schema che rappresenti la relazione ottenuta.

Usualmente si considera la struttura parallelo del PID con il blocco derivativo modificato per la realizzabilità fisica.

Supponiamo ora di dover discretizzare il blocco derivativo la cui funzione di trasferimento sia:

$$\frac{U_d(s)}{E(s)} = K_P \frac{sT_d}{1 + sT_L}$$

Antitrasformando, la seguente relazione diventa nel tempo:

$$u_d(t) + T_L \frac{du_d(t)}{dt} = K_P T_d \frac{de(t)}{dt} \quad \text{dove } e(t) = SP - y(t).$$

Utilizzando come metodo di discretizzazione quello delle differenze «all'indietro», con T periodo di campionamento, si ottiene:

$$u_d(k) + T_L \left[ \frac{u_d(k) - u_d(k-1)}{T} \right] = K_P T_d \left[ \frac{e(k) - e(k-1)}{T} \right]$$

da cui si ricava l'uscita discreta del blocco derivativo:

$$u_d(k) = \frac{T_L}{T_L + T} u_d(k-1) + K_P T_d \left[ \frac{e(k) - e(k-1)}{T_L + T} \right]$$

A questo punto bisogna discretizzare il blocco integrale.

In questo caso viene utilizzato il metodo delle differenze «in avanti», ma, come già detto, è possibile impiegare un qualsiasi metodo di discretizzazione descritto nel capitolo 3.

Poiché l'integrale dell'ingresso e(t) viene approssimato con una sommatoria, l'uscita del blocco integratore u<sub>i</sub>(k) risulta data da:

$$u_i(k) = K_P \frac{T}{T_i} \sum_{n=0}^k e(n)$$

o in forma ricorsiva :

$$u_i(k) = u_i(k-1) + K_P \frac{T}{T_i} e(k)$$

In conclusione, un algoritmo PID del tipo parallelo può assumere la seguente forma:

$$u(k) = K_P e(k) + u_i(k) + u_d(k)$$

Le funzioni di trasferimento in z dei vari blocchi possono essere ricavate dalle equazioni alle differenze appena calcolate.

Esse sono riportate nello schema a blocchi di figura 4.12, dove il blocco indicato con H<sub>0</sub> rappresenta l'holder.

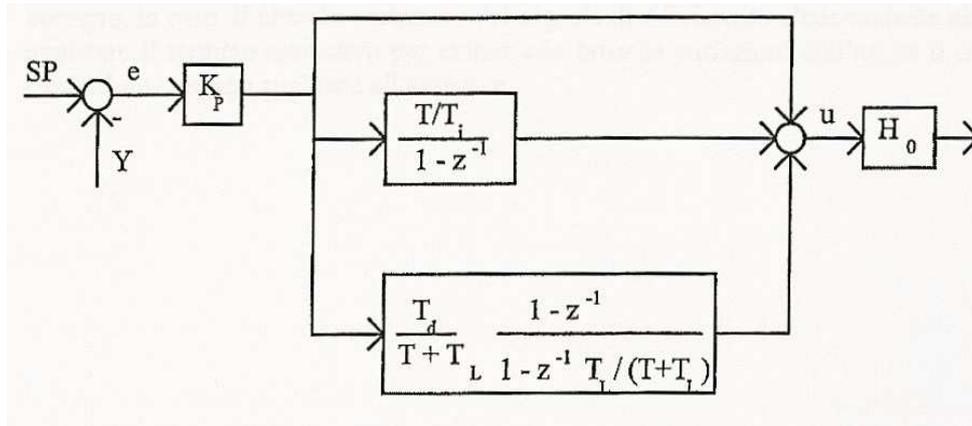


Figura 4.12 Funzioni di trasferimento in z dei vari blocchi del controllore PID

Consideriamo ora il caso in cui il PID presenti struttura in cascata.

Come nel caso precedente l'algoritmo finale deriva dalla successione degli algoritmi applicati ai singoli blocchi.

Se consideriamo il blocco I ed effettuiamo la discretizzazione con il metodo d'Eulero, l'uscita  $u_I(k)$  vale:

$$u_I(k) = u_I(k-1) + K_P \left[ 1 + \frac{T}{T_I} \right] e(k) - K_P e(k-1)$$

La trasformata zeta di tale equazione dà come risultato:

$$U_I(z) = K_P \frac{1 + T/T_I - z^{-1}}{1 - z^{-1}} E(z)$$

La discretizzazione del blocco D (anche detto anticipatore) definisce l'uscita  $u(k)$ , che vale:

$$u(k) = \frac{T_L}{T_L + T} u(k-1) + \frac{T_D + T}{T_L + T} u_I(k) - \frac{T_D}{T_L + T} u_I(k-1)$$

Effettuando la trasformata zeta della seguente equazione è possibile calcolare la funzione di trasferimento in z tra  $U(z)$  e  $U_I(z)$ :

$$\frac{U(z)}{U_I(z)} = \frac{T_D + T - T_D z^{-1}}{T_L + T - T_L z^{-1}}$$

Una forma alternativa dell'algoritmo precedente con la struttura in parallelo si può derivare utilizzando il metodo d'integrazione trapezoidale per il termine integrale, ovvero approssimando l'integrale nel seguente modo:

$$\int_0^t e(\tau) d\tau \approx \sum_{i=0}^h T [e(i) + e(i-1)] / 2$$

In questo caso l'uscita del controllore PID vale:

$$u(k) = K_P \left[ e(k) + T \sum_{i=0}^h \frac{T [e(i) + e(i-1)]}{2T_I} + T_D \left[ \frac{e(k) - e(k-1)}{T} \right] \right]$$

In base a quanto detto è possibile verificare che, sia per la struttura parallelo che per quella in serie, la funzione di trasferimento del controllore è del tipo:

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

dove i coefficienti sono funzioni di  $T$ ,  $T_L$ ,  $K_P$ ,  $T_i$  o  $T_I$ ,  $T_d$  o  $T_D$ , che possono essere calcolate in fase d'inizializzazione (cioè non durante l'esecuzione dell'algoritmo) per minimizzare il tempo d'esecuzione.

L'algoritmo PID può essere quindi implementato in una routine seguendo una realizzazione minima di  $D(z)$  con due variabili di stato.

Questa implementazione è conveniente quando non sono previste variazioni nella configurazione dell'algoritmo. In altri casi, è preferita l'implementazione dei singoli blocchi mediante routine distinte per permettere una maggiore flessibilità.

Per mantenere costante il tempo d'esecuzione dell'algoritmo è conveniente eseguire sempre le singole routine dei vari blocchi e combinarne l'uscita a seconda della configurazione che si pensa d'utilizzare.

Ad esempio, nel caso di brusche variazioni del segnale SP è conveniente non applicare il termine derivativo per evitare brusche variazioni dell'uscita.

Un altro problema riscontrabile nell'implementazione è quello d'evitare un brusco transitorio dell'uscita del controllore qualora vengano variati i parametri dell'algoritmo durante il funzionamento.

Come già esplicitato nel caso continuo, il blocco derivativo può presentare delle problematiche dovute all'elevata sensibilità al rumore sovrapposto al segnale d'interesse.

Nelle formule precedenti si era proceduto alla discretizzazione del blocco derivativo che comprendeva un filtraggio nel continuo.

Al medesimo risultato si può pervenire ricorrendo a formule d'interpolazione, che prendono in considerazione più campioni dell'ingresso.

Con riferimento alla figura sottostante, nel caso in cui ci siano 4 campioni, la derivata  $de/dt$  dell'errore  $e(t)$  nell'istante  $kT$ , viene calcolata come media delle differenze prime nei vari istanti  $k-3$ ,  $k-2$ ,  $k-1$ ,  $k$  rispetto al valore medio  $e^*$  dell'ingresso negli istanti considerati, e fittiziamente applicato a metà dell'intervallo  $[(k-3)T, kT]$ .

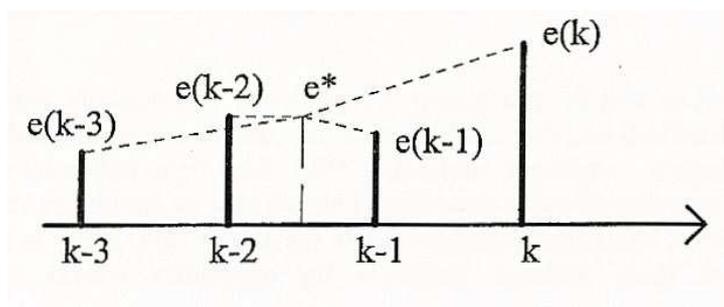


Figura 4.13 Interpolazione con 4 campioni d'ingresso

Risulta:

$$\frac{de}{dt} \approx \frac{1}{4} \left[ (e(k) - e^*)/1.5T + (e(k-1) - e^*)/0.5T - (e(k-2) - e^*)/0.5T - (e(k-3) - e^*)/1.5T \right]$$

$$\text{dove } e^* = \frac{1}{4} \left[ e(k) + e(k-1) + e(k-2) + e(k-3) \right]$$

da cui si ricava:

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{6T} [ e(k) + 3e(k-1) - 3e(k-2) - e(k-3) ]$$

Si procede in maniera del tutto analoga nel caso in cui il numero di campioni sia maggiore.

Si deve tener presente che, all'aumentare del numero di campioni che intervengono nel calcolo della derivata, si ha una risposta sempre meno pronta ad una improvvisa variazione dell'ingresso  $e(t)$ , causato, ad esempio da un disturbo rapido nel processo.

Una volta calcolato il valore  $u(k)$  di controllo, prima che esso venga scritto sul convertitore digitale/analogico d'uscita, ossia il nostro holder, viene limitato entro due valori limite che dipendono dalla lunghezza della parola del convertitore e dall'interfaccia con l'attuatore.

Ciò corrisponde ad inserire un blocco di saturazione tra  $u(k)$  ed il comando dell'attuatore.

Si osservi che questa funzione di limitazione del comando fa parte del problema d'interfaccia tra algoritmo di controllo ed attuatore che si presenta anche per algoritmi di controllo di tipo diverso da quelli di tipo PID.

## 4.2.2 Algoritmi PID incrementali

Gli algoritmi incrementali (o di velocità) devono il loro nome al fatto che viene calcolata la variazione  $\Delta u(k)$  del segnale di controllo rispetto al valore assunto nell'istante precedente, cioè:

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$$

dove  $u(k)$  e  $u(k-1)$  possono essere calcolati mediante un algoritmo assoluto.

Anche in questo caso, essendo l'algoritmo incrementale una forma ricorsiva dell'algoritmo di posizione, è possibile utilizzare diversi metodi di discretizzazione.

Consideriamo ad esempio il caso in cui l'algoritmo PID, privo del filtro PB nel blocco D, sia ottenuto mediante l'integrazione rettangolare.

Innanzitutto è necessario, utilizzando l'algoritmo PID di posizione, calcolare  $u(k)$  e  $u(k-1)$ .

Le due espressioni sono:

$$u(k) = K_P [ e(k) + T \sum_{i=0}^k e(i-1) / T_i + T_d (e(k) - e(k-1)) / T ]$$

$$u(k-1) = K_P [ e(k-1) + T \sum_{i=0}^{k-1} e(i-1) / T_i + T_d (e(k-1) - e(k-2)) / T ]$$

Sottraendo le due espressioni, risulta:

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1) = K_P [ e(k) - e(k-1) + T e(k-1) / T_i + T_d (e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)) / T ]$$

Esprimendo la relazione trovata in forma ricorsiva, e con degli opportuni accorgimenti sui coefficienti, si ottiene:

$$u(k) = u(k-1) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2)$$

dove:

$$q_0 = K_P [1 + T_d / T]$$

$$q_1 = - K_P [1 + 2T_d / T - T / T_i]$$

$$q_2 = K_P T_d / T$$

Una forma alternativa all'algoritmo PID incrementale si può derivare utilizzando il metodo d'integrazione trapezoidale per il termine integrale.

Mediante la precedente approssimazione s'ottiene sempre un'equazione ricorsiva in cui i coefficienti  $q_i$ ,  $i = 0,1,2$ , valgono:

$$q_0 = K_P [1 + T_d / T + T / 2T_i]$$

$$q_1 = - K_P [1 + 2T_d / T - T / 2T_i]$$

$$q_2 = K_P T_d / T$$

Il successo degli algoritmi incrementali dipende dal fatto che sono stati il primo tipo di routine realizzato per il controllo digitale diretto, in quanto, in caso di fuori servizio dell'hardware digitale, l'attuatore era in grado di mantenere congelata la sua uscita al valore raggiunto.

Inoltre, come si vedrà più avanti, gli algoritmi incrementali non presentano alcuni problemi che invece affliggono gli algoritmi assoluti, quali la saturazione dell'azione integrale, la commutazione automatico/manuale e la variazione dei parametri.

Per quanto riguarda questo ultimo punto, l'uscita dell'algoritmo incrementale è nulla tra un istante di campionamento e l'altro, in quanto l'attuatore, il quale presenta l'azione integratrice, è un componente esterno all'algoritmo, nonostante sia parte integrante del regolatore.

Di conseguenza, i parametri possono essere variati a piacere senza che l'uscita ne risenta.

## 4.3 Sintesi dei controllori PID

La sintesi dei controllori PID consiste nella scelta di :

- Configurazione più adatta all'applicazione (P,PI,PD,PI-D,I-PD,PID,etc.);
- Parametri del controllore  $K_p$ ,  $T_i$ ,  $T_d$  ;
- Periodo di campionamento per algoritmi digitali.

La scelta della configurazione, che rappresenta il primo accorgimento per la sintesi di un controllore PID, deve esser fatta sulla base delle specifiche di controllo e delle caratteristiche dinamiche del processo da controllare.

In particolare si ha che:

- Quando l'errore a regime ammesso è sufficientemente elevato, oppure se il processo contiene già un'azione integratrice, si può impiegare il semplice controllo P o PD. Si ricorda inoltre che l'azione integrale nel processo è in grado d'annullare l'errore a regime per un disturbo a gradino all'uscita del processo, ma non per un disturbo all'ingresso del processo. Un controllore con azione integrale, invece, annulla l'errore a regime in entrambi i casi.

- Bisogna evitare d'utilizzare l'azione derivativa nel caso di segnali di reazione rumorosi, ai quali è sovrapposto un disturbo aleatorio.
- L'azione derivatrice è indicata per compensare la dinamica associata al sensore, come ad esempio accade per i trasduttori di temperatura.

La predisposizione dei parametri del controllore viene denominata sintonizzazione (taratura o tuning dei parametri) e le considerazioni che guidano questa operazione sono del tutto indipendenti dalla realizzazione analogica o digitale del controllore, anche perché quella digitale è ottenuta tramite la discretizzazione dell'analogica.

Vi sono diversi tipi di metodi per la sintonizzazione del controllore PID che possono essere suddivisi in due classi:

- metodi analitici
- metodi sperimentali

Le due tipologie di metodi si differenziano perché la prima necessita della conoscenza di un modello, anche approssimato, del processo da controllare, mentre la seconda si basa esclusivamente su prove sperimentali.

Qualora poi si stia considerando un controllore PID digitale, è presente un parametro aggiuntivo, cioè il periodo di campionamento.

Per evitare possibili inconvenienti dovuti a una scorretta scelta di tale parametro, come l'aliasing, è necessario impiegare le medesime considerazioni svolte nel capitolo sulla discretizzazione.

Inoltre, tali controllori godono di una funzionalità aggiuntiva chiamata auto-sintonizzazione (in inglese auto-tuning).

Tecniche che presentano tale funzionalità sono molto impiegate poiché, per mezzo di esse, il sistema esegue una serie di prove sperimentali sull'impianto da controllare, calcolando i valori più adatti dei parametri del controllore che vengono quindi congelati in memoria ed utilizzati nell'operazione.

## 4.4 Metodi analitici

Come già spiegato nella paragrafo 4.3, i metodi analitici sono caratterizzati da fatto che, per potere utilizzarli è necessaria la conoscenza di un modello del processo, anche se approssimato.

Vista la vasta gamma, in questo paragrafo vengono riportati i principali, i quali sono:

- criteri di tipo integrale che utilizzano come indice di costo funzioni integrali della variabile errore  $e(t)$ .

Di particolare interesse sono i seguenti indici:

- $ISE = \int_0^{\infty} [e(t)]^2 dt$  (Integral Square Error)

- $IAE = \int_0^{\infty} |e(t)| dt$  (Integral Absolute Error)

- $ITAE = \int_0^{\infty} t|e(t)| dt$  (Integral Time Absolute Error)

- ITSE (Integral Time-weighted Squared Error)

- ISTE (Integral Squared Time-weighted Error)

· etc.

- allocazione dei poli
- sintesi in frequenza (Metodo di Haalman, Sintesi basata sul margine di fase)
- sintesi diretta

Tra i metodi analitici, vengono di seguito illustrati i metodi di sintesi di un controllore PID mediante criteri di tipo integrale, allocazione dei poli e sintesi in frequenza.

### 4.4.1 Criteri di tipo integrale

Il progetto di un controllore PID secondo i criteri integrali avviene nel seguente modo. Innanzitutto si determina un modello del primo ordine del sistema da controllare ricavandolo da una approssimazione della risposta del sistema ad un ingresso a gradino con una curva di tipo esponenziale, monotona e con ritardo, cioè:

$$G_p(s) = K \frac{e^{-\theta s}}{1 + \tau s}$$

dove  $K$ ,  $\theta$  e  $\tau$  sono, rispettivamente, il guadagno, il ritardo e la costante di tempo del modello. Si approssima la presenza del campionario e del ricostruttore d'ordine zero con un ritardo pari a  $T/2$ , e quindi si definisce  $\theta' = \theta + T/2$ .

Variazione di carico				
<i>Criterio</i>	<i>Controllore</i>	<i>Azione</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
<i>IAE</i>	<i>P</i>	<i>P</i>	0.902	-0.985
<i>ISE</i>	<i>P</i>	<i>P</i>	1.141	-0.917
<i>ITAE</i>	<i>P</i>	<i>P</i>	0.490	-1.084
<i>IAE</i>	<i>PI</i>	<i>P</i>	0.984	-0.986
		<i>I</i>	0.608	-0.707
<i>ISE</i>	<i>PI</i>	<i>P</i>	1.305	-0.959
		<i>I</i>	0.492	-0.739
<i>ITAE</i>	<i>PI</i>	<i>P</i>	0.859	-0.977
		<i>I</i>	0.674	-0.680
<i>IAE</i>	<i>PID</i>	<i>P</i>	1.435	-0.921
		<i>I</i>	0.878	-0.749
		<i>D</i>	0.482	+1.137
<i>ISE</i>	<i>PID</i>	<i>P</i>	1.495	-0.945
		<i>I</i>	1.101	-0.771
		<i>D</i>	0.560	+1.006
<i>ITAE</i>	<i>PID</i>	<i>P</i>	1.357	-0.947
		<i>I</i>	0.842	-0.738
		<i>D</i>	0.381	+0.995

Variazione di set point				
<i>IAE</i>	<i>PI</i>	<i>P</i>	0.758	-0.861
		<i>I*</i>	1.020	-0.323
<i>ITAE</i>	<i>PI</i>	<i>P</i>	0.586	-0.916
		<i>I*</i>	1.030	-0.165
<i>IAE</i>	<i>PID</i>	<i>P</i>	1.086	-0.869
		<i>I*</i>	0.740	-0.130
		<i>D</i>	0.348	+0.914
<i>ITAE</i>	<i>PID</i>	<i>P</i>	0.965	-0.855
		<i>I*</i>	0.796	-0.147
		<i>D</i>	0.308	+0.929

\*In questo caso si deve utilizzare  $Y = A + B(\theta/\tau)$

Tabella 4.1 Valori dei parametri di progetto secondo i criteri integrali

Perciò, dopo aver scelto il criterio (IAE, ISE, ITAE,...), il tipo di controllore (P, PI o PID) e l'azione di controllo (P, I, D), dalla tabella 4.1 si individuano due parametri A e B, che sostituiti nella relazione seguente:

$$Y = A(\theta/\tau)^B$$

forniscono un valore Y che deve essere interpretato come  $Y = KK_p$  nel caso di un azione proporzionale, come  $Y = \tau/T_i$  nel caso d'azione integrale, e come  $Y = T_d/\tau$  nel caso d'azione derivativa.

Si noti inoltre che la tabella sottostante è divisa in due parti : la parte superiore è relativa al progetto di un controllore PID per variazioni di carico, mentre la restante parte è relativa al caso in cui si abbia una variazione del valore di riferimento(set point).

Qualora sia presente una variazione di set point non si utilizza la relazione  $Y = A(\theta/\tau)^B$  ma  $Y = A + B(\theta/\tau)$ .

### Esempio 4.1

Supponiamo che il sistema da controllare abbia funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{(0.5s + 1)(s + 1)^2(2s + 1)}$$

a cui corrisponde il seguente modello del primo ordine (  $K = 1$ ,  $\theta = 1.46$  s,  $\tau = 3.34$  s):

$$G_p(s) = \frac{e^{-1.46s}}{1 + 3.34s}$$

Sia  $T = 0.3$  s il periodo di campionamento. Si desidera progettare un controllore PI per variazioni di set point, utilizzando il criterio integrale ITAE.

Dalla tabella 4.1 si ricava  $KK_p = 0.586(\theta'/\tau)^{-0.916} = 1.143$  (dove, per la presenza del ricostruttore d'ordine zero viene definito il parametro  $\theta' = \theta = T/2 = 1.61$  s) e

$\tau / T_i = 1.03 - 0.165(\theta'/\tau) = 0.95$  da cui si ottiene:

$$K_p = 1.143 \quad e \quad T_i = 3.514.$$

Dopo aver applicato una discretizzazione rettangolare al controllore PI appena definito, si ottengono i risultati simulativi di figura 4.14.

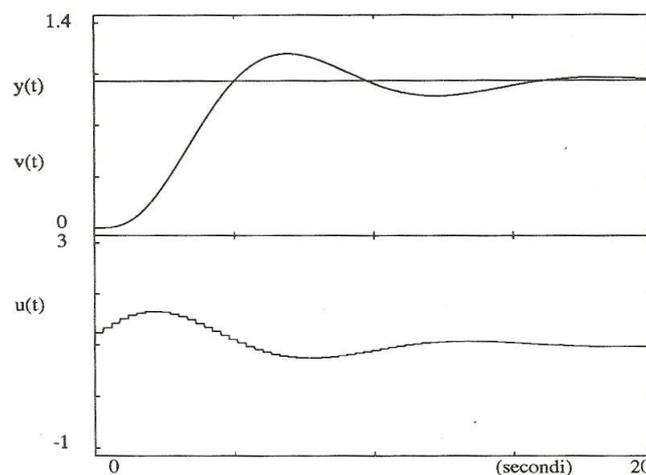


Figura 4.14 Risultati simulativi relativi a un controllore PI progettato tramite il criterio integrale ITAE

## 4.4.2 Allocazione dei poli

Si consideri il sistema di figura:

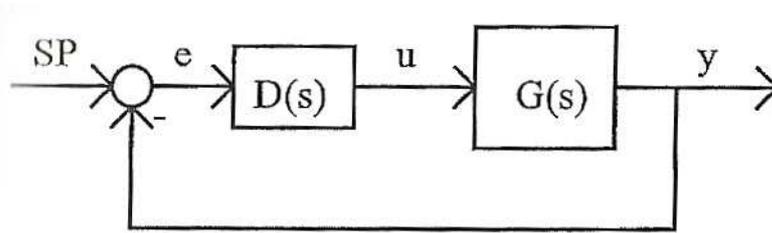


Figura 4.15 Sistema per il metodo dell'allocazione dei poli

Esso è caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{K}{1 + sT_1}$$

Sia  $D(s)$  un controllore di tipo PI e quindi caratterizzato dalla mancanza dell'azione derivativa:

$$D(s) = K_P \frac{1 + sT_i}{sT_i}$$

La funzione di trasferimento a catena chiusa, per il seguente sistema, risulta:

$$W(s) = \frac{KK_P}{T_i T_1} \frac{1 + sT_i}{s^2 + s \frac{1 + KK_P}{T_1} + \frac{KK_P}{T_i T_1}}$$

Ipotizzando che il denominatore della  $W(s)$  sia del tipo  $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$  con smorzamento  $\xi$  e pulsazione naturale  $\omega_n$  non smorzata prefissati, si ricava che, per i seguenti valori dei parametri  $K_P$  e  $T_i$  del controllore PI :

$$K_P = \frac{2\xi\omega_n T_1 - 1}{K}$$

$$T_i = \frac{2\xi\omega_n T_1 - 1}{T_1 \omega_n^2}$$

perché  $T_i$  e  $K_P > 0$  è necessario che il prodotto  $\xi\omega_n > \frac{0.5}{T_1}$ .

Se invece la funzione di trasferimento  $G(s)$  è del tipo:

$$G(s) = \frac{b_1 + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

è necessario l'impiego di un controllore PID:

$$D(s) = K_P \frac{s^2 T_i T_d + s T_i + 1}{s T_i}$$

trascurando il filtro dell'azione derivativa.

Si può verificare che in questo caso il denominatore della funzione di trasferimento a catena chiusa  $W(s)$  è del terzo ordine.

Se indichiamo i poli desiderati con i simboli  $p_i$ ,  $i=1,2,3$ , tale denominatore può essere scritto nella forma  $(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)$ .

A questo punto, imponendo l'eguaglianza del denominatore desiderato con l'espressione del denominatore della  $W(s)$  in funzione dei tre parametri del controllore PID, è possibile ricavare il valore di  $K_P$ ,  $T_i$  e  $T_d$ .

È da evidenziare che il metodo appena esaminato consente di allocare i poli del sistema a catena chiusa  $W(s)$  in posizioni prefissate, ma non gli zeri.

Questi ultimi, infatti, rimangono non controllati e, perciò, possono rendere la risposta del sistema non soddisfacente.

### 4.4.3 Sintesi in frequenza

Tra i diversi metodi di sintesi in frequenza, nel seguito verranno analizzati solo quelli di Haalman e quello basato sul margine di fase.

*Metodo di Haalman :*

Il primo metodo considerato è quello proposto da A. Haalman nel 1965.

Esso trova impiego nel caso in cui il processo da controllare possa essere approssimato con l'espressione:

$$G(s) = K \frac{e^{-\theta s}}{1 + \tau s}$$

dove  $K$ ,  $\theta$  e  $\tau$  sono, rispettivamente, il guadagno, il ritardo e la costante di tempo del modello. Questo metodo consiste nell'assegnare i parametri di un controllore PI in modo che la funzione di trasferimento d'anello abbia forma:

$$L(s) = D(s)G(s) = \frac{2}{3\theta s} e^{-\theta s}$$

Tali parametri sono:

$$K_P = \frac{2\tau}{3\theta K}$$

$$T_I = \tau \qquad K_I = \frac{2}{3\theta K}$$

Con questa scelta, risulta che la pulsazione d'attraversamento  $\omega_c$  di  $L(s)$  è data da  $2/(3\theta)$  rad/s, mentre il margine di fase vale  $m_\varphi = \pi/2 - 2/3$ , corrispondente a circa  $52^\circ$ .

Nel caso di processi per i quali è più adeguata un'approssimazione del tipo:

$$G(s) = \frac{K e^{-\theta s}}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)},$$

il metodo richiede l'adozione di un controllore PID, i cui parametri sono:

$$K_P = \frac{2(T_1 + T_2)}{30K}$$

$$T_I = T_1 + T_2$$

$$K_I = \frac{2}{30K}$$

$$T_D = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$$

$$K_D = \frac{2T_1 T_2}{30K}$$

Un limite del metodo è dovuto al fatto che quando il parametro  $\theta$  è piccolo, la pulsazione  $\omega_c$ , e quindi la banda passante, possono risultare troppo elevate.

In tal caso si può sostituire alla  $L(s)$  un'espressione del tipo  $L(s) = \frac{k}{\theta s} e^{-\theta s}$ , verificando se

esiste un valore  $k^*$  di  $k$  che soddisfa le seguenti relazioni:

$$k^* = \omega_c^* \theta$$

$$k^* \leq \pi/2 - m^*_{\varphi},$$

dove  $\omega_c^*$  e  $m^*_{\varphi}$  sono i valori corrispondenti alle specifiche sulla funzione di trasferimento ad anello aperto.

La nuova regola sui valori da dare ai parametri, nei due casi illustrati sopra qualora la banda passante sia troppo ampia consiste quindi nel sostituire al termine  $2/3$ , nelle espressioni precedentemente scritte, il valore  $k^*$ .

Inoltre negli esempi sopra riportati, come in altri metodi di sintesi, vi sono cancellazioni tra le funzioni di trasferimento  $G(s)$  e  $D(s)$ .

Ad esempio, nel caso del sistema del primo ordine con ritardo, il termine  $1 + sT_1$  a denominatore di  $G(s)$  viene cancellato dallo zero del controllore PI.

Ciò è lecito solo se  $T_1 > 0$ , altrimenti sorgono problemi di stabilità interna.

Sulla base di queste considerazioni occorre tener presente che nella funzione di trasferimento tra l'ingresso e l'uscita di  $W(s)$  compare il prodotto  $D(s)G(s)$ , mentre nella funzione di trasferimento tra il disturbo all'ingresso del processo  $G(s)$  e l'uscita del sistema a catena chiusa:

$$W_d(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)D(s)} = \frac{G'(s)}{(s-p)[1 + G'(s)D'(s)]}$$

compare anche il polo  $p$  di  $G(s) = G'(s)/(s-p)$  che è cancellato da  $D(s) = D'(s)(s-p)$ .

Sempre considerando l'esempio in cui è presentata una funzione di trasferimento del primo ordine con ritardo, risulta che nella  $W_d(s)$  compare al denominatore il termine  $1+sT_1$ .

Ciò implica che la risposta ad un gradino di disturbo conterrà una componente che si attenua con una costante di tempo pari a  $T_1$ .

Se il valore di  $T_1$  è molto maggiore del modo dominante della  $W(s)$ , la risposta al disturbo potrebbe avere un transitorio di durata molto superiore della risposta ad un gradino di riferimento.

### *Sintesi basata sul margine di fase :*

Un'altra tipologia di sintesi in frequenza è data dal metodo basato sul margine di fase.

Per esplicitarne il funzionamento si consideri il seguente sistema di controllo a catena chiusa di figura:

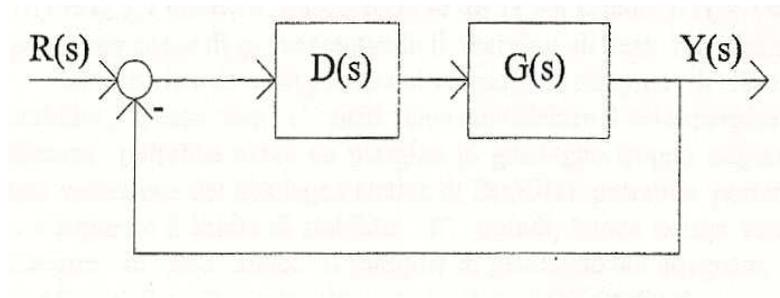


Figura 4.16 Sistema per la sintesi basata sul margine di fase

nel quale la funzione di trasferimento  $G(s)$  del processo da controllare è supposta nota. Essa include l'attuatore, il trasduttore e, in presenza di sistemi di controllo DDC (Direct Digital Control), anche un ricostruttore d'ordine zero. Il controllore  $D(s)$  ha come funzione di trasferimento:

$$D(s) = K_p + K_i/s + sK_d = (K_d s^2 + K_p s + K_i) / s$$

In realtà, come esplicitato nei paragrafi precedenti, per la fisica realizzabilità del controllore il termine derivativo sarà del tipo:

$$\frac{sK_d}{1 + sT_L}$$

E' importante dire che, se  $T_L$  è tale che  $1/T_L$  è sufficientemente lontana dalla pulsazione d'attraversamento  $\omega_c$ , il contributo negativo che apporta al margine di fase può essere trascurato.

Si calcoli ora il vettore  $D(j\omega)$ , e se ne evidenzino modulo  $|D(j\omega)|$  e fase  $\theta_D(\omega)$ :

$$D(j\omega) = K_p + j(\omega K_d - K_i/\omega) = |D(j\omega)|(\cos\theta_D(j\omega) + j \sin\theta_D(j\omega))$$

Ora si supponga di voler calcolare  $D(j\omega)$  in modo che, in corrispondenza di una  $\omega_c$  prefissata nel diagramma di Bode di  $|G(j\omega)D(j\omega)|$ , si abbia (nel diagramma delle fasi) un margine di fase  $m_\phi$  prefissato.

Bisogna dire che ad un aumento di  $\omega_c$  corrisponde un aumento della banda del sistema a catena chiusa, mentre all'aumentare del margine di fase si stabilizza il sistema.

Se fattorizziamo il numeratore della  $D(s)$  vediamo che sono presenti due zeri (nel diagramma delle fasi comportano un incremento del margine di fase, asintoticamente, di  $90^\circ$  ciascuno), mentre il denominatore presenta un polo nell'origine (nel diagramma delle fasi comporta un decremento del margine di fase di  $90^\circ$ ).

Questo implica che il massimo margine di fase positivo che  $D(s)$  può fornire asintoticamente è pari a  $90^\circ$ .

Risulta quindi che  $\omega_c$  dev'essere scelta in modo tale che:

$$\theta_D(\omega_c) < 90^\circ$$

Per definizione di  $\omega_c$ , risulta:

$$|D(j\omega_c)G(j\omega_c)| = 1$$

Per le proprietà del modulo, l'espressione è equivalente alla:

$$|D(j\omega_c)||G(j\omega_c)| = 1$$

da cui è possibile calcolare:

$$|D(j\omega_c)| = \frac{1}{|G(j\omega_c)|}$$

Inoltre, per la fase del prodotto  $D(j\omega_c)G(j\omega_c)$ , deve valere:

$$\theta_D(\omega_c) + \theta_G(\omega_c) = -180^\circ + m_\phi, \text{ dove } \theta_G(\omega_c) = \arg[G(j\omega_c)],$$

e da qui risulta che la fase del controllore  $D(s)$  in  $\omega_c$ , cioè  $\theta_D(\omega_c)$ , vale:

$$\theta_D(\omega_c) = -\theta_G(\omega_c) - 180^\circ + m_\phi.$$

In tale espressione, si può notare che tutti i termini presenti a secondo membro dell'uguaglianza sono noti.

Dall'espressione di  $D(j\omega_c)$  si ricava:

$$D(j\omega_c) = |D(j\omega_c)|(\cos\theta_D(j\omega_c) + j \sin\theta_D(j\omega_c)) = \frac{\cos\theta_D(j\omega_c)}{|G(j\omega_c)|} + j \frac{\sin\theta_D(j\omega_c)}{|G(j\omega_c)|}$$

da cui, considerando la parte reale e immaginaria di  $D(j\omega_c)$ , risultano le seguenti relazioni:

$$K_p = \operatorname{Re}[D(j\omega_c)] = \frac{\cos\theta_D(j\omega_c)}{|G(j\omega_c)|} + j \frac{\sin\theta_D(j\omega_c)}{|G(j\omega_c)|}$$

$$\omega_c K_d - \frac{K_i}{\omega_c} = \operatorname{Im}[D(j\omega_c)] = \frac{\sin\theta_D(j\omega_c)}{|G(j\omega_c)|}$$

Dalla prima relazione trovata si ricava  $K_p$ , mentre la seconda stabilisce un rapporto tra le costanti delle azioni derivativa ed integrale, dove i singoli parametri vengono determinati per tentativi o in base ad altre considerazioni.

Generalmente si ricorre ad una relazione supplementare del tipo :

$$T_i = \alpha T_d,$$

nella quale  $\alpha$  può essere un numero intero non inferiore, per esempio, a 4 (e quindi  $K_d \leq K_p^2 / 4K_i$ ), onde evitare un eccessivo avvicinamento tra  $1/T_i$  e  $1/T_d$ .

Il parametro  $\alpha$  e la banda  $B$  (approssimabile con la pulsazione d'attraversamento  $\omega_c$ ) costituiscono due fondamentali gradi di libertà per la progettazione di un controllore PID, e la loro scelta rappresenta un compromesso tra le varie problematiche che si possono riscontrare.

Tornando alla relazione basata sulla parte immaginaria di  $D(j\omega_c)$  si può notare che, se venissero a mancare il termine derivativo  $K_d$  (caso del controllore PI) o integrale  $K_i$  (caso del controllore PD), la relazione precedentemente trovata verrebbe di molto semplificata, e sarebbe quindi possibile ricavare il parametro non nullo in maniera univoca.

Utilizzando però delle versioni alternative di controllori PID la fase di  $D(s)$  può cambiare.

Un esempio, a dimostrazione di ciò, è quello in cui viene utilizzato un controllore PI.

In questo caso il margine di fase è sempre negativo e varia tra  $-90^\circ$  e  $0^\circ$ , mentre se il controllore è di tipo PD varia tra  $0^\circ$  e  $+90^\circ$ .

Dopo aver scelto la pulsazione  $\omega_c$  è possibile valutare l'effetto del filtro PB che limita il termine derivativo alle alte frequenze.

Ad esempio, nel caso di  $1/(1 + sT_L)$ , il contributo al margine di fase nella pulsazione d'attraversamento  $\varphi_L$  è trascurabile se  $\omega_c T_L \ll 1$ .

In sede di progetto, un possibile criterio per il dimensionamento di  $T_L$  è il seguente :

$$\frac{T_d}{10} < T_L < \frac{T_d}{3}$$

Tuttavia è necessario rispettare la condizione  $T_L > T$  per evitare problemi d'aliasing.

É inoltre da ricordare che, bisogna controllare oltre al margine di fase anche il margine di guadagno per essere sicuri della stabilità del sistema.

Verificare che il margine di guadagno sia adeguato corrisponde a vedere se alla pulsazione per cui  $\arg[D(j\omega)G(j\omega)] = -180^\circ$  il modulo di  $D(j\omega)G(j\omega)$  sia sufficientemente inferiore a 1.

Se ciò non accade è necessario moltiplicare i parametri  $K_i, K_d, K_p$  calcolati considerando solo il margine di fase, per un fattore minore dell'unità.

## 4.5 Sintonizzazione sperimentale

Come accennato nel paragrafo 4.3, sono presenti, oltre ai metodi analitici, dei metodi per cui è possibile effettuare una predisposizione finale dei parametri del controllore manualmente (e quindi sul campo).

Infatti i seguenti metodi forniscono, in generale, una prima scelta dei parametri a partire dalla quale, mediante opportuni aggiustamenti dei loro valori e prove sperimentali, si giunge ad un comportamento soddisfacente, almeno nella maggior parte dei sistemi di controllo industriale. Tale operazione, detta sintonizzazione sperimentale, può avvenire seguendo i criteri suggeriti da Ziegler e Nichols (1942) per sistemi continui, che prevedono le seguenti due tecniche che si basano su:

- risposta ad un gradino d'ingresso del processo in catena aperta, supposto BIBO stabile
- misura del periodo d'oscillazione del sistema a catena chiusa all'aumentare del guadagno  $K_p$

### 4.5.1 Metodo a catena aperta

Il primo metodo citato si basa sull'approssimazione della risposta al gradino del sistema in catena aperta con una curva di tipo esponenziale, monotona e con ritardo.

Da ciò segue che la funzione di trasferimento del sistema da controllare risulta approssimabile nel seguente modo:

$$G(s) = K_G \frac{e^{-sL}}{1 + s\tau}$$

dove  $L$  rappresenta il ritardo della risposta,  $\tau$  la costante di tempo e  $K_G$  il guadagno statico del processo.

Si supponga che la risposta al gradino sia come quella di figura 4.16 e che la funzione di trasferimento del sistema sia approssimata dal modello sopra citato.

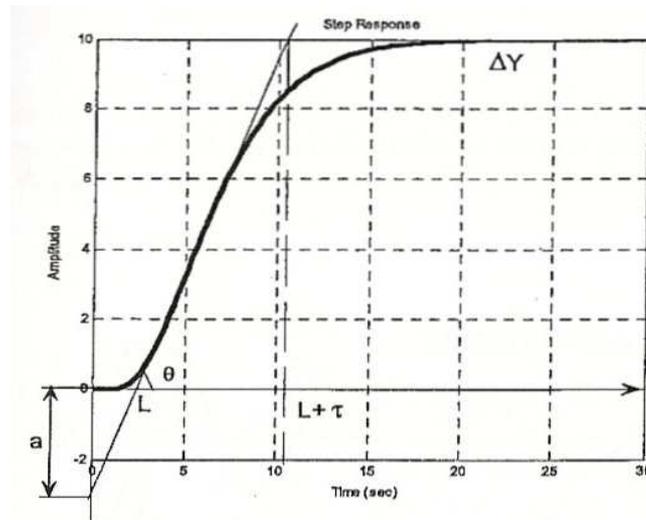


Figura 4.17 Risposta al gradino del sistema  $G(s)$

Se il rapporto  $a/L$ , identificato dalla tangente dell'angolo  $\theta$ , indica la tangente al punto di flesso della curva, è possibile calcolare i parametri:

- $\tau = \Delta Y / \text{tg}\theta = L \Delta Y / a$ , dove  $\Delta Y$  rappresenta la variazione a regime dell'uscita in risposta ad un gradino d'ingresso di  $\Delta m$ ;
- $K_G = \Delta Y / \Delta m$ , dove  $\Delta m$  rappresenta la variazione in ingresso del gradino che produce  $\Delta Y$ .

Qualora si auspicasse a risultati migliori è possibile utilizzare il metodo delle aree. Osservando la risposta al gradino del sistema sottostante, si ricavano facilmente le aree delle zone A e B.

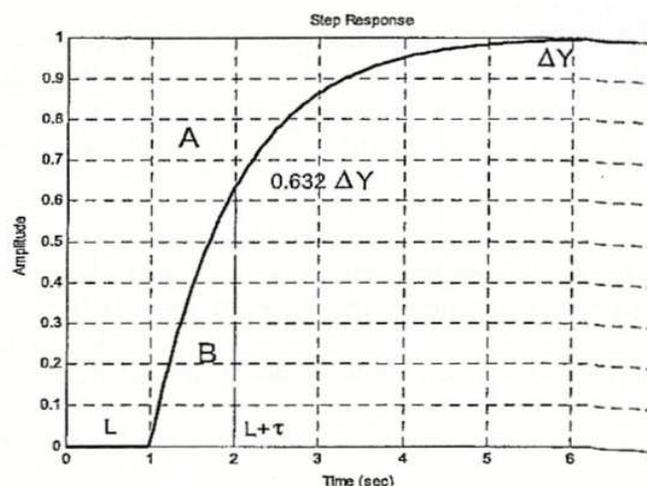


Figura 4.18 Risposta al gradino di  $G(s)$  con metodo delle aree

Le due aree valgono:

$$\text{Area}(A) = \Delta Y(L + \tau)$$

$$\text{Area}(B) = \tau \Delta Y / e, \text{ con } e \text{ base dei logaritmi naturali}$$

La curva sperimentale della risposta al gradino del processo reale è quella di figura 4.19, dove  $L + \tau$  indica l'istante in cui la risposta vale  $0.63 \Delta Y$ .

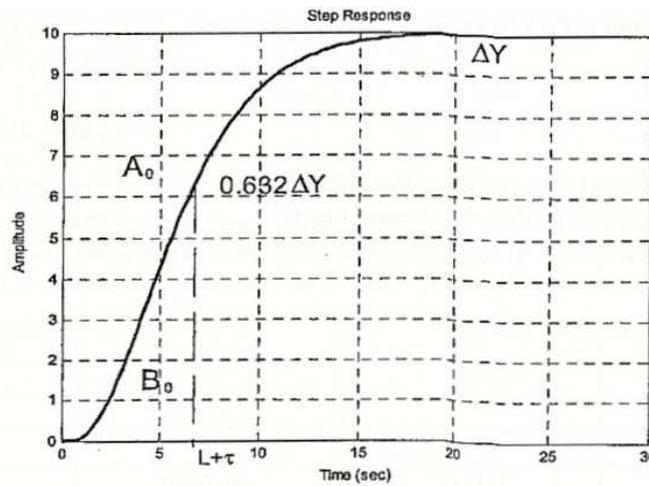


Figura 4.19 Curva sperimentale della risposta al gradino del processo reale

Ponendo  $A_0 \approx A$  e  $B_0 \approx B$  si possono definire il ritardo della risposta e la costante di tempo, che valgono:

$$L = \frac{A_0 - eB_0}{\Delta Y} \qquad \tau = \frac{eB_0}{\Delta Y}$$

Ziegler e Nichols hanno determinato i parametri dei PID che in catena chiusa con un processo che presenta funzione di trasferimento come quella descritta sopra, produce una risposta al gradino del tipo di figura 4.20 con uno smorzamento delle oscillazioni pari a  $d = a_1/a_2 = 1/4$  (decay ratio)

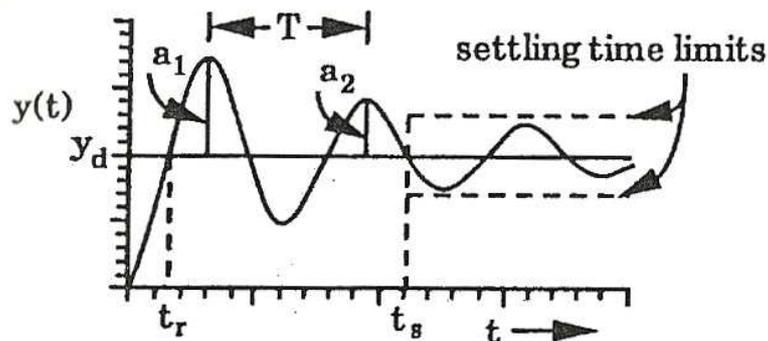


Figura 4.20 Risposta al gradino con smorzamento delle oscillazioni

Possono intercorrere però dei problemi, tra i quali un eccessivo valore della sovralongazione.

Infatti, per un sistema del secondo ordine senza zeri la sovralongazione, pari a  $s = \sqrt{d}$ , risulta essere del 50% e questo può essere inaccettabile.

Per risolvere il problema è necessario, dopo una prima prova con i valori consigliati, ricorrere ad una modifica manuale dei parametri stessi.

Quest'operazione, detta tuning manuale, verrà ripresa e approfondita nel paragrafo 4.6.

I valori consigliati dei parametri sono quelli riportati nella tabella sottostante:

tipo controllore	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$\tau / K_G L$		
PI	$0.9\tau / K_G L$	$3L$	
PID	$1.2\tau / K_G L$	$2L$	$0.5L$

Tabella 4.2 Valori consigliati dei parametri per controllori P,PI,PID col metodo in catena aperta

Nel controllore PID viene posto  $T_d = T_i/4$ .

Risulta anche:

$$\frac{\tau}{K_G L} = \frac{\tau \Delta m}{L \Delta Y} = \frac{\Delta m}{\text{tg}\theta L} = \frac{\Delta m}{a}$$

Dalla tabella si può notare la dipendenza dei parametri dal rapporto  $\tau/L$ , poiché l'aumento del ritardo finito implica una diminuzione dei guadagni per ottenere lo stesso grado di stabilità.

I valori della tabella danno risultati soddisfacenti nel caso:

$$0.1 < \tau/L < 1$$

corrispondenti a valori di ritardo normalizzato  $\tau_N$ :

$$0.1 < \tau_N < \frac{L}{L + \tau} < 0.5$$

Qualora si utilizzino controllori digitali il rapporto  $1/T_d \ll \Omega/2$ , cioè  $T_d/T \gg 0.32$ .

In pratica si pone quindi il rapporto  $T_d/T = 2 \div 10$ .

## 4.5.2 Metodo a catena chiusa

Il secondo metodo di Ziegler Nichols impiega inizialmente solo il blocco P del PID, e quindi l'azione proporzionale, determinando sperimentalmente il valore critico  $K_C$  in corrispondenza al quale il sistema in catena chiusa diviene instabile.

Infatti per tale valore iniziano ad essere presenti oscillazioni con periodo  $T_0$ .

I parametri consigliati per il controllore sono riportati nella seguente tabella:

tipo controllore	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0.5 K_C$		
PI	$0.45 K_C$	$T_0 / 1.2$	
PID	$0.6 K_C$	$0.5 T_0$	$T_0 / 8$

Tabella 4.3 Valori consigliati dei parametri per controllori P,PI,PID col metodo in catena chiusa

Esistono però anche per questo metodo delle limitazioni.

Infatti le prestazioni risultano essere insoddisfacenti qualora siano presenti processi con costanti di tempo troppo elevate, come ad es. in alcuni processi termici in cui i tempi caratteristici sono ore o frazioni di ore.

In questi casi bisogna attendere un tempo troppo lungo per poter misurare il periodo delle oscillazioni a regime.

## 4.6 Sintonizzazione manuale

La sintonizzazione, o tuning, manuale è necessaria, come detto in precedenza, quando i valori consigliati dei parametri non sono soddisfacenti.

Per spiegare tale tipo di sintonizzazione, è necessario illustrare l'effetto delle varie azioni di un controllore PID.

Nella figura 4.21 è riportato l'andamento tipico della risposta ad un gradino di riferimento per vari tipi di controllore (P, PID, P, PI) ed a pari valore della sovralongazione, cioè a pari grado di stabilità, nel caso in cui il processo da controllare non contenga integratori.

Si consideri ora il caso in cui il controllo sia puramente proporzionale (P).

Si può vedere dal grafico che l'errore a regime non risulta essere nullo poiché non è presente un'azione integrale.

Se aumenta  $K_P$ , diminuisce l'errore a regime mentre aumenta la pulsazione d'attraversamento  $\omega_c$ . Questo comporta una diminuzione del tempo di salita, e quindi una maggiore prontezza del sistema.

Il seguente effetto è però accompagnato da una diminuzione della stabilità, e perciò da un aumento della sovralongazione.

Se ora viene introdotta un'azione integrale (controllore PI) l'errore a regime diviene nullo, però compare un ritardo di fase di  $-90^\circ$  a tutte le frequenze.

Ciò significa che, rispetto al caso precedente, il sistema è più vicino all'instabilità e quindi presenta un valore maggiore di sovralongazione.

Per riportare quest'ultima al valore che si aveva con il controllore P si deve diminuire la costante  $K_P$  e quindi anche la prontezza del sistema a catena chiusa.

Qualora il controllore utilizzato fosse invece di tipo PD la presenza del termine derivativo provvede ad un aumento del margine di fase, rendendo più veloce la risposta del segnale.

Se l'azione derivatrice viene introdotta in un controllore PI, il controllore PID ottenuto presenta un beneficio in termini di stabilità sebbene l'aumento di  $K_P$  deve essere minore a causa dell'azione destabilizzante del blocco I.

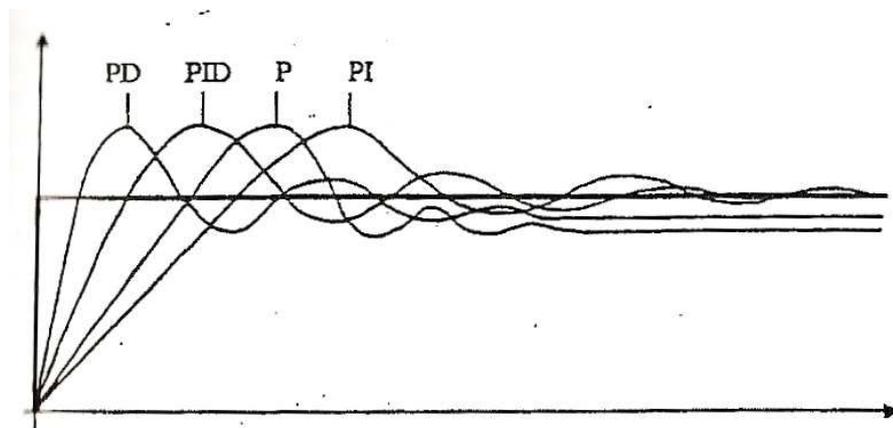


Figura 4.21 Risposta ad un gradino di riferimento per vari tipi di controllori e con pari sovralongazione

In generale, considerando le singole azioni, si può quindi affermare che:

- **P** agisce sulla prontezza del sistema a catena chiusa e, un suo aumento, oltre a far diminuire l'errore a regime ad un gradino, porta il sistema ad essere meno stabile;
- **I** annulla l'errore a regime ma tende a rendere meno stabile il sistema;
- **D** aumenta lo smorzamento (e quindi il margine di fase) e consente, a pari grado di stabilità, d'aumentare l'azione **P** e, di conseguenza, la prontezza del sistema.

Queste considerazioni forniscono utili indicazioni su come far variare i parametri per ottenere la risposta voluta.

## 4.7 Sintonizzazione nei controllori PID digitali

Come già accennato nell'introduzione di questo capitolo, la sintonizzazione e le considerazioni che guidano questa operazione sono del tutto indipendenti dalla realizzazione analogica o digitale del controllore perché la versione digitale è ottenuta discretizzando quella analogica.

Considerando un controllore PID digitale, esso, rispetto alla realizzazione analogica, presenta un parametro aggiuntivo, che è il periodo di campionamento.

Come già discusso nella parte relativa alle tecniche di discretizzazione, all'aumentare di tale parametro il comportamento di un controllore PID si discosta sempre di più da quello continuo, venendo meno l'ipotesi che sta alla base dei metodi di discretizzazione..

Sono presenti, inoltre, delle tecniche per la sintonizzazione dei parametri dei controllori digitali, del tipo di quelle di Ziegler e Nichols, che tengono conto pure del parametro periodo di campionamento.

Vale inoltre la pena di ricordare che in ogni caso il comportamento di un controllore PID digitale non potrà essere migliore di quello continuo, di cui è un'approssimazione.

### 4.7.1 Auto-sintonizzazione

Oltre le tecniche sopra citate, grazie alle quali si può ottenere un controllore PID digitale tramite discretizzazione di uno continuo, è possibile disporre, grazie all'utilizzo di hardware digitali, di un'ulteriore funzionalità chiamata auto-sintonizzazione (auto-tuning).

Un semplice esempio per automatizzare il tuning di un controllore PID è quello basato sulla stima dei parametri di un punto del diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento ad anello aperto.

In particolare si considera l'intersezione del diagramma di Nyquist con il semiasse reale negativo che individua il guadagno critico  $K_C$  e il periodo d'oscillazione critica  $T_C = (2\pi)/\omega_C$ . Per determinare i parametri  $K_C$ ,  $T_C$ , e quindi per risalire ai parametri del controllore  $K_p, T_d, T_i$  per mezzo di classiche formule proposte da Ziegler Nichols e riportate nella tabella 4.4, si effettua in fase di tuning una retroazione attraverso una non linearità di tipo relè.

Come noto dall'analisi della relativa funzione descrittiva, il segnale errore  $e$ , se il processo è filtrante (ossia non genera armoniche in uscita assenti nello spettro del segnale d'ingresso ma può amplificarle, attenuarle e sfasarle), è periodico e simile a una sinusoide di periodo  $T_C$ .

Inoltre se il termine  $d$  rappresenta l'ampiezza della funzione a relè, la prima armonica dell'uscita del relè ha ampiezza  $4d/\pi$  e quindi, se l'uscita sinusoidale del processo ha ampiezza  $A$ , il guadagno critico vale:

$$K_C = \frac{2}{A\pi} \int_0^{\pi} d \sin(\theta) d\theta = \frac{4d}{A\pi}$$

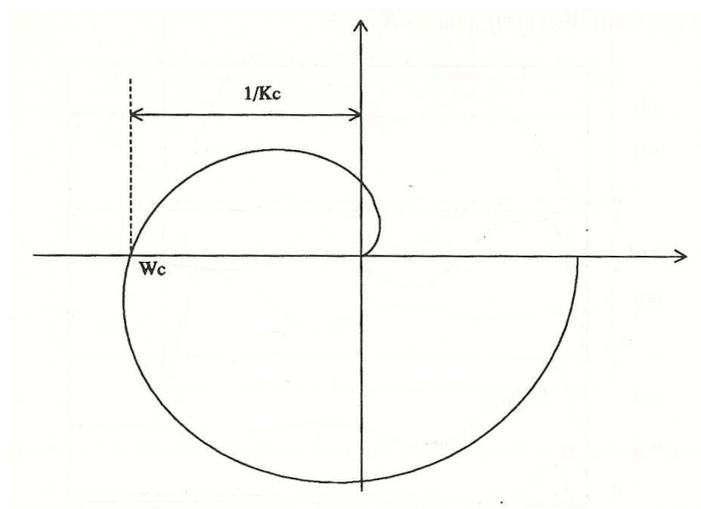


Figura 4.22 Diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento ad anello aperto e margine d'ampiezza  $K_c$

Tipo	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0.5K_c$	$\infty$	0
PI	$0.45K_c$	$P_c/1.2$	0
PID	$0.6K_c$	$0.5P_c$	$0.125P_c$

Tabella 4.4 Formule di tuning di Ziegler Nichols basate sul metodo dell'oscillazione critica

La misura del periodo di campionamento  $T_c$  dell'oscillazione può essere in pratica ottenuta con un circuito zero-crossing (rilevatore utilizzato per individuare i passaggi per lo zero di segnali AC, come ad esempio le sinusoidi) ed un contatore, mentre l'ampiezza  $A$  può essere valutata con un circuito di rilevazione di picco.

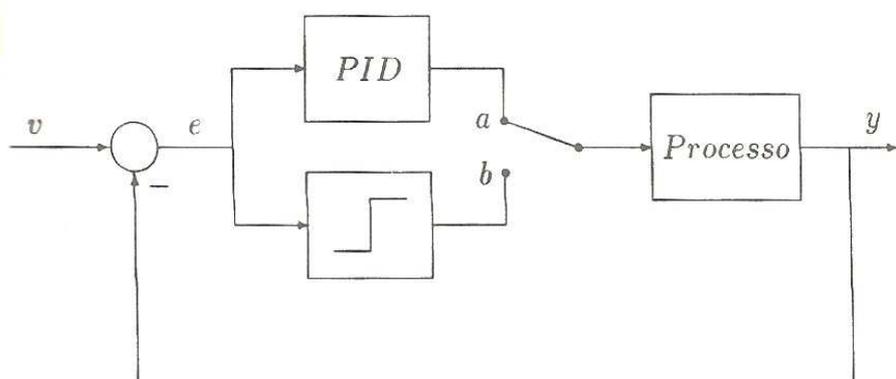


Figura 4.23 Tuning automatico di un regolatore PID in posizione di funzionamento normale (a) e in posizione di tuning (b)

## 4.8 Gestione dei ritardi

Un punto importante da considerare nell'uso dei regolatori PID è la presenza di ritardi significativi nel processo da controllare.

Nella sintesi di controllori a struttura libera si può tener conto di tali ritardi comprendendoli nella legge di controllo, mentre ciò non è possibile nel caso dei controllori a struttura fissa, e quindi ad esempio nel caso in cui s'utilizzi un PID.

Se l'entità del ritardo è nota, un utile provvedimento è l'introduzione del cosiddetto compensatore di ritardo di Smith (in inglese Smith predictor).

Per esplicitare il problema dei ritardi ed il funzionamento del compensatore di ritardo di Smith si consideri l'esempio di figura:

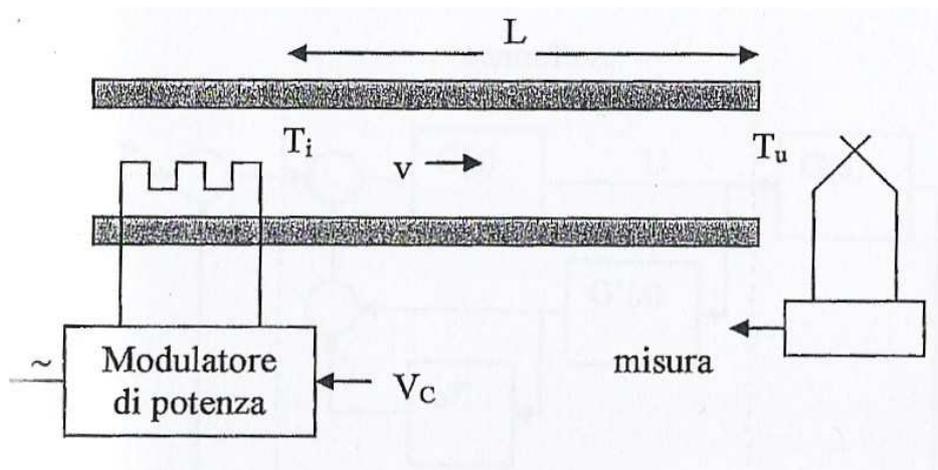


Figura 4.24 Esempio di compensatore di ritardo di Smith

Nel condotto di lunghezza  $L$  perfettamente isolato termicamente, scorre un fluido a velocità costante  $v$  che viene riscaldato all'ingresso da una resistenza elettrica la cui potenza dissipata viene regolata da un modulatore comandato dal segnale  $V_C$ .

Una termocoppia fornisce un segnale proporzionale alla temperatura  $T_u$  alla fine del condotto.

Lo scopo del controllo è di mantenere costante la temperatura  $T_u$  agendo su  $V_C$ .

La funzione di trasferimento tra  $V_C$  e  $T_i$  può essere approssimata con un sistema di primo ordine, mentre quella tra  $T_i$  e  $T_u$  è quella di un ritardo finito  $e^{-s\tau}$ , dove il tempo di percorrenza del condotto  $\tau$  è pari a  $L/v$ .

Lo schema a blocchi del sistema di controllo diviene:

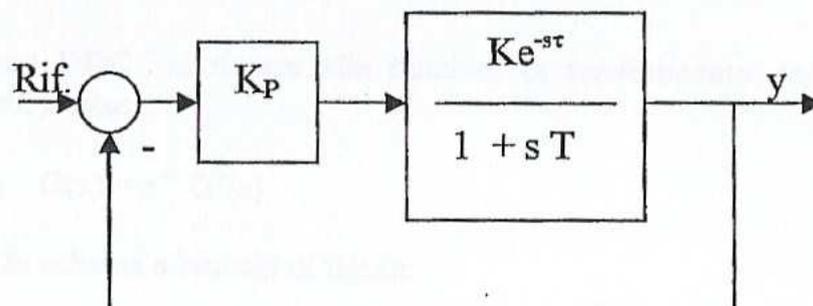


Figura 4.25 Schema a blocchi del sistema di controllo nel caso di controllore proporzionale nel caso di un controllore proporzionale.

Il guadagno  $K_P$  del controllore potrebbe assumere, teoricamente, un qualsiasi valore positivo in assenza di ritardo.

Se quest'ultimo è invece presente, impone delle limitazioni, soprattutto quando è ingente o variabile.

Nel caso di ritardo noto e costante con sufficiente approssimazione, si può ricorrere al compensatore di Smith.

Si consideri un processo da controllare che presenti la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = G'(s) e^{-s\tau}$$

dove  $G'$  rappresenta il fattore comune con la  $D(s)$  e  $\tau$  il ritardo.

La compensazione del ritardo può essere ottenuta, come mostrato in figura 4.26, ponendo in parallelo al processo un blocco dinamico  $D(s)$ , in modo d'annullare nel complesso l'azione del ritardo.

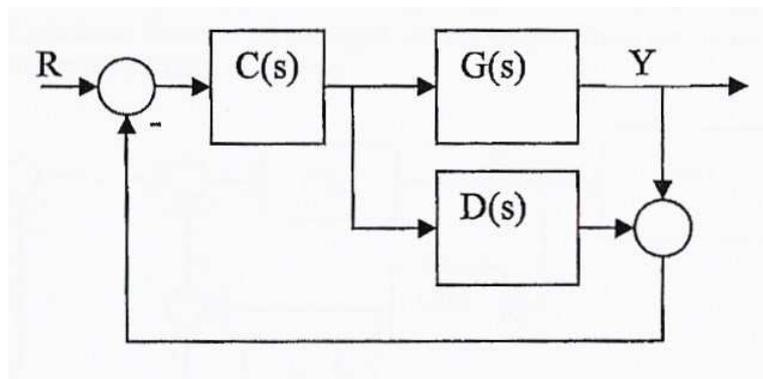


Figura 4.26 Schema a blocchi in parallelo del processo con  $D(s)$

Se si impone:

$$P(s) = G(s) + D(s) = e^{-s\tau} G'(s) + D(s) = G'(s)$$

è possibile dedurre la funzione di trasferimento del blocco aggiunto:

$$D(s) = (1 - e^{-s\tau}) G'(s)$$

La funzione di trasferimento dell'anello diviene  $C(s)G'(s)$  e il ritardo compare solo nella funzione di trasferimento complessiva, senza andare ad influire sulla stabilità del sistema.

La funzione di trasferimento in catena chiusa risulta essere:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{C(s)P(s) + 1} = \frac{C(s)G'(s)}{C(s)G'(s) + 1} e^{-s\tau}$$

In questo modo è possibile ridisegnare lo schema a blocchi di figura 4.26, tenendo conto che  $D(s)$  è parte integrante del controllore.

Il risultato ottenuto consente di eseguire la sintesi del controllore  $C(s)$  come se non vi fosse il ritardo.

E' importante ricordare che, per la buona riuscita della compensazione, è necessario conoscere con precisione il valore del ritardo e della funzione di trasferimento del processo.

In caso contrario la compensazione non risulta essere perfetta e, qualora la funzione di trasferimento del processo si discosti troppo da quella utilizzata nel compensatore, si possono avere problemi d'instabilità del sistema.

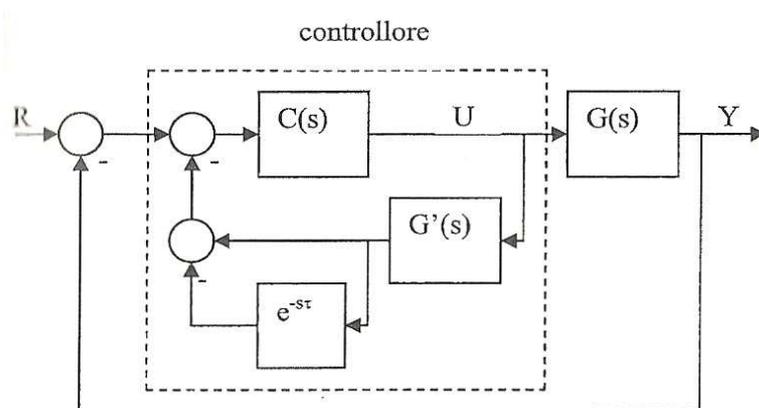


Figura 4.27 Schema a blocchi modificato in cui  $D(s)$  fa parte del controllore

Nel caso di compensatori di Smith analogici è possibile che nasca il problema della realizzazione del ritardo finito, e per questo spesso si ricorre all'approssimazione di Padè :

$$e^{-s\tau} \approx \frac{1 + s\tau/2}{1 - s\tau/2}$$

Nel caso di sistemi DDC si ricorre alle funzioni di trasferimento dei sistemi discreti equivalenti.

Posto  $\tau = NT$  e  $G(z) = z^{-N}G'(z)$ , si ottiene lo schema a blocchi di figura:

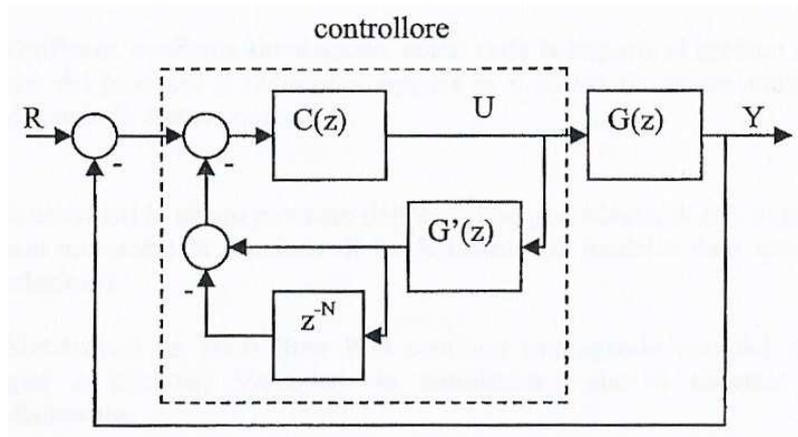


Figura 4.28 Schema a blocchi del sistema DDC

Poiché nel discreto è molto facile realizzare sistemi che presentino ritardi finiti, il compensatore di Smith è stato una tra le prime applicazioni del controllo DDC.

Nel caso che  $G(s)$  non contenga ritardi ma vi sia un ritardo finito  $\tau$  nella catena di reazione dovuto, ad esempio, ad un tempo finito per la misura, applicando lo Smith predictor si produce lo schema a blocchi di figura 4.29, e la funzione di trasferimento totale diviene:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{C(s)G(s) + 1}$$

La  $W(s)$  non presenta il ritardo, sempre nel caso che il modello utilizzato nel compensatore sia uguale alla funzione di trasferimento del sistema reale.

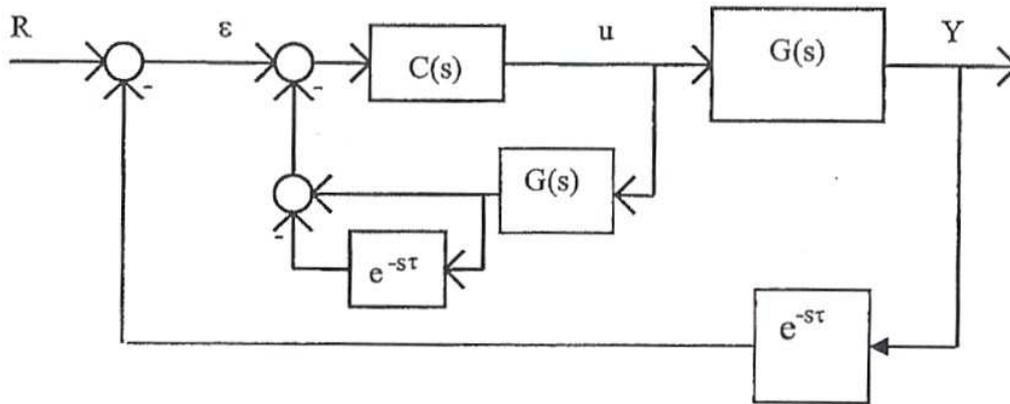


Figura 4.29 Schema a blocchi nel caso si ritardo  $\tau$  nella catena di reazione

## Capitolo 5

# Funzionalità aggiuntive nei controllori PID discreti

## 5.1 Dispositivi di desaturazione (Anti-reset wind-up)

Nei controllori analogici e negli algoritmi assoluti PI o PID si può verificare un comportamento anormale dovuto all'azione integrale, denominato saturazione o reset wind-up.

Per spiegare tale comportamento si consideri il caso in cui l'attuatore venga portato in saturazione dal segnale di controllo.

Se il termine integrale è incluso nel controllore, l'errore continua ad essere integrato nel tempo e l'uscita del termine I aumenta finché, nel caso analogico, l'amplificatore che elabora l'azione integrale si satura.

L'attuatore rimane in saturazione a causa dell'elevato valore assunto dal termine integrale, e non lascia il limite di saturazione fino a quando l'errore non è diventato negativo per un tempo sufficiente a scaricare il termine integrale, cioè finché la somma delle tre azioni P, I e D non porta l'attuatore fuori dalla saturazione.

Di conseguenza l'azione integrale provoca una sovralongazione, la quale non è presente quando l'attuatore non è in saturazione ma in zona lineare.

La sovralongazione, concepita come effetto indesiderato, può essere compensata dalla desaturazione del termine integrale, anche chiamata antisaturazione o anti-reset wind-up.

Nel seguito faremo riferimento solo alla desaturazione dei controllori PID digitali, essendo tale fenomeno non trascurabile rispetto al caso in cui si utilizzano dei controllori analogici.

### 5.1.1 Desaturazione nei controllori PID digitali

Il fenomeno della saturazione sopra descritto è automaticamente evitato se l'algoritmo di controllo utilizzato è "incrementale" o in "forma di velocità".

Ricordando l'espressione di  $\Delta u(k)$ :

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k - 1) = K_p [e(k) - e(k - 1) + T e(k - 1)/T_i + T_d (e(k) - 2e(k - 1) + e(k - 2))/T]$$

risulta che, in caso di errore costante, i termini P e D si annullano, mentre per I rimane solo il termine  $T/T_i e(k)$ , che risulta costante.

Invece nei controllori PI o PID di tipo "assoluto" o in "forma di posizione", il fenomeno della saturazione dell'azione integrativa non può essere trascurato, poiché, durante la stessa, può andare ad insorgere un'elevata sovralongazione alla fine dell'attuatore.

E' necessario quindi introdurre alcuni provvedimenti.

Nella letteratura tecnica sono descritti numerosi metodi di desaturazione dell'azione integrale e tra questi vengono qui illustrati i più diffusi.

Un intervento può essere quello di bloccare la sommatoria dell'azione integrale, dalla quale deriva il problema, allorché l'uscita raggiunga il valore limite, oppure quello d'attivare l'azione integrale solo quando l'errore è piccolo.

In alternativa, uno schema molto utilizzato per gli algoritmi PID è quello che deriva dalla discretizzazione dei vari blocchi presenti nello schema di desaturazione per i sistemi analogici.

Con riferimento allo schema di figura 5.1, nel caso in cui sia disponibile la misura della “posizione” dell’attuatore o una sua stima basata su un semplice modello algebrico dell’attuatore stesso, si può ricorrere allo schema di figura 5.2 in cui  $A_0(z)$  è un polinomio strettamente stabile, che può essere scelto opportunamente, ed  $R(z)$ ,  $S(z)$  e  $T(z)$  sono i polinomi che descrivono nell’usuale forma la dinamica del regolatore.

La relazione che definisce il legame tra  $D(z)$  e i precedenti polinomi è la seguente:

$$D(z) = \frac{S(z)}{R(z)} = \frac{T(z)}{R(z)}$$

Inoltre si può scrivere :

$$\begin{cases} A_0\omega = Tv - Sy + (A_0 - R)u \\ u = \text{sat}(\omega) \end{cases}$$

in cui:

$$\text{sat}(\omega) = \begin{cases} \omega_L & \omega \leq \omega_L \\ \omega & \omega_L \leq \omega \leq \omega_H \\ \omega_H & \omega \geq \omega_H \end{cases}$$

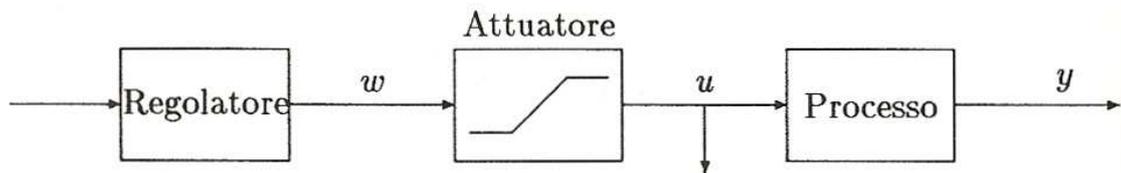


Figura 5.1 Regolatore con saturazione dell’attuatore

Quando il sistema lavora in zona lineare non saturata, allora  $u(k) = \omega(k)$  e quindi il controllore è esattamente quello desiderato.

$$A_0u = Tv - Sy + (A_0 - R)u \longrightarrow Ru = Tv - Sy$$

Se il processo  $G(s)$  è BIBO stabile, è evidente che la  $\omega$ , come uscita di un sistema BIBO stabile in corrispondenza ad un ingresso limitato, è limitata.

Si consideri come esempio il controllore PID avente funzione di trasferimento:

$$D(z) = \frac{q_0z^2 + q_1z + q_2}{(z-1)(z-\varphi)}$$

$$R(z) = (z-1)(z-\varphi) = z^2 - (\varphi+1)z + \varphi$$

$$S(z) = T(z) = q_0z^2 + q_1z + q_2$$

La relazione trovata precedentemente diviene:

$$A_0\omega = (q_0z^2 + q_1z + q_2)e + [A_0 - z^2 + (\varphi + 1)z - \varphi]u$$

per cui, ponendo per semplicità  $A_0 = z^2$ , si ottiene complessivamente:

$$\begin{cases} \omega(k) = q_0e(k) + q_1e(k-1) + q_2e(k-2) + (1 + \varphi)u(k-1) - \varphi u(k-2) \\ u(k) = \text{sat}[\omega(k)] \end{cases}$$

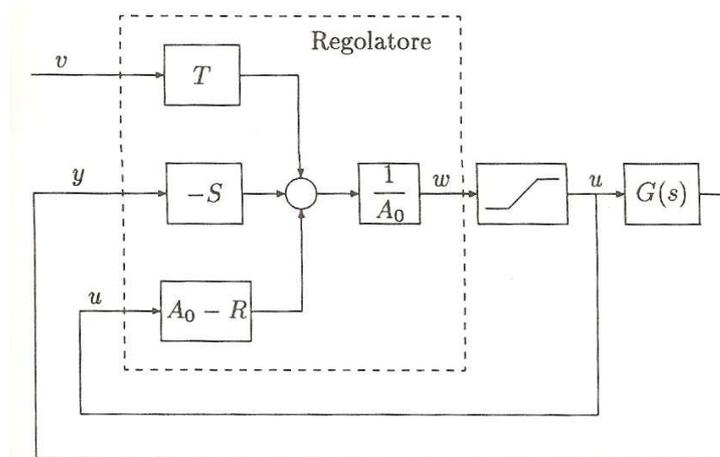


Figura 5.2 Schema di antisaturazione basato su un semplice modello dell'attuatore

Un caso particolare dello schema di antisaturazione appena descritto è quello mostrato in figura 5.3, in cui si è posto:

$$A_0 = z^n$$

$$B(z^{-1}) = \frac{T(z)}{z^n} = \frac{S(z)}{z^n}$$

$$A(z^{-1}) = \frac{R(z)}{z^n}$$

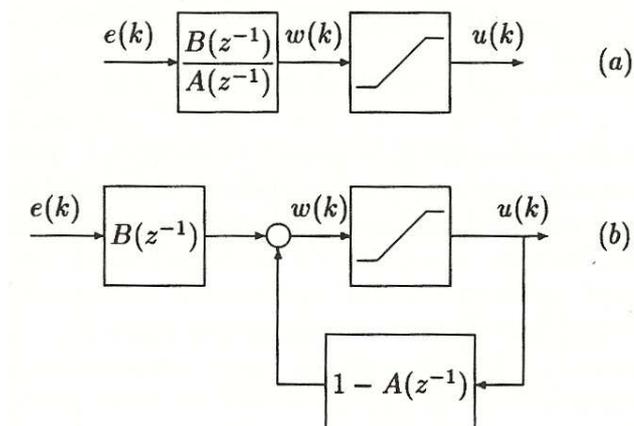


Figura 5.3 Algoritmi di controllo (a) schema normale (b) schema con dispositivo di desaturazione

Rispetto al caso normale (a), in cui la saturazione è posta a valle dell'algorithmo di controllo, lo schema (b) pone la saturazione all'interno di una retroazione.

Per poter utilizzare lo schema di antisaturazione (b) di figura 5.3 evitando situazioni di loop algebrico nel calcolo di  $u(k)$ , il polinomio  $A(z^{-1})$  deve essere monico.

Si ricorda che si definisce loop algebrico un ciclo algebrico, che nel nostro caso consiste nella retroazione. Il problema di fondo in presenza di tale tipo di ciclo è che l'output  $u(k)$  è funzione di sé stesso, e quindi dipende dalla saturazione.

La legge di controllo relativa allo schema 5.3 (b) è la seguente:

$$\begin{cases} \omega(k) = B(z^{-1})e(k) + [1 - A(z^{-1})]u(k) \\ u(k) = \text{sat}[\omega(k)] \end{cases}$$

Se la variabile  $u(k)$  non è in saturazione si ha  $u(k) = \omega(k)$ , e quindi:

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{B(z^{-1})}{1-[1 - A(z^{-1})]} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = D(z)$$

altrimenti, come già anticipato, si possono presentare problemi dovuti al loop algebrico.

### Esempio 5.1

Si consideri il sistema di funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{1 + 0.1s}$$

Supponiamo che per tale sistema sia stato sintetizzato il regolatore ( $T=0.01s$ ):

$$D(z) = \frac{0.1 + 0.2z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

e che sia presente una saturazione  $u(k)$  nell'intervallo  $[-3,+3]$  a valle del regolatore stesso.

I risultati simulativi che si ottengono senza dispositivo di antisaturazione sono riportati nell'immagine sottostante.

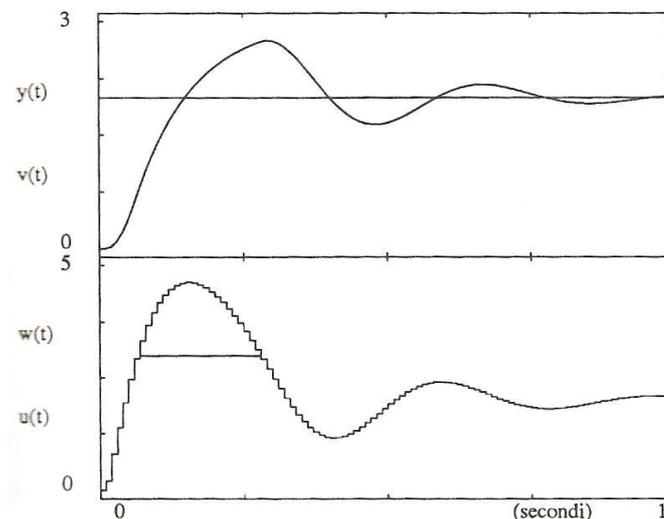


Figura 5.4 Risultati simulativi ottenuti senza il dispositivo di antisaturazione

Il segnale di riferimento in ingresso è  $v(t) = 2$ .

La variabile di controllo  $u(t)$  entra fortemente in saturazione e questo fatto causa una forte sovraelongazione sul segnale d'uscita  $y(t)$ .

I risultati simulativi che invece si ottengono utilizzando lo schema di desaturazione (b) di figura 5.3 sono riportati in figura 5.5.

Si nota facilmente il netto miglioramento che si ha sulla massima sovraelongazione della variabile controllata  $y(t)$ .

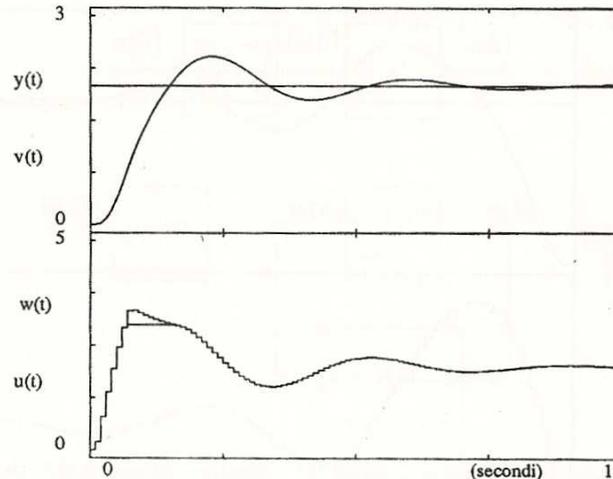


Figura 5.5 Risultati simulativi ottenuti con il dispositivo d'antisaturazione

Un'altra tecnica, che riesce solo a limitare la saturazione dell'azione integrale negli algoritmi assoluti, consiste nel fissare un limite superiore (indicato con il pedice H che sta per high) e inferiore (indicato con il pedice L che sta per low) al termine integrale.

Essa è caratterizzata dal seguente schema:

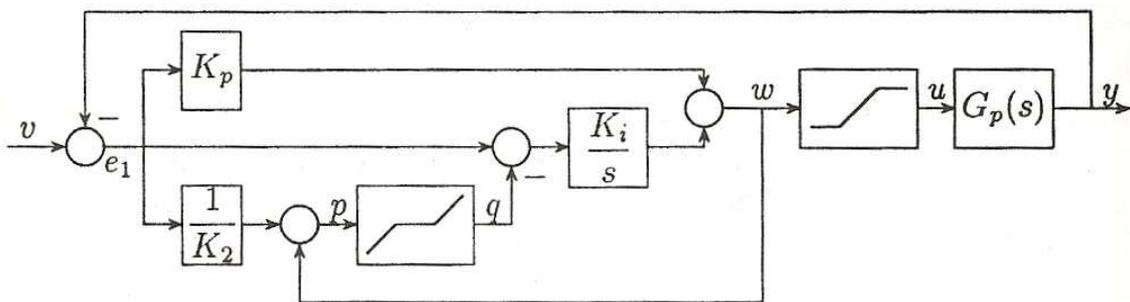


Figura 5.6 Schema di antisaturazione

La relazione tra le variabili  $p$  e  $q$  è di tipo "zona morta", cioè:

$$q(p) = \begin{cases} K_2(p - u_H) & p > u_H \\ 0 & u_L < p < u_H \\ K_2(p - u_L) & p < u_L \end{cases}$$

Lo schema sopra riportato è relativo al caso continuo quando il regolatore è di tipo PI analogico, ma lo stesso schema può essere utilizzato anche nel caso discreto per regolatori PID:

- l'integratore continuo  $1/s$  viene sostituito da uno discreto con funzione di trasferimento  $z^{-1}/(1 - z^{-1})$
- l'azione derivativa, qualora sia presente, deve essere posta in parallelo all'azione proporzionale  $K_p$ .

Osservando lo schema si nota che si può imporre alla variabile  $\omega$  di rimanere entro i limiti fissati  $u_L$  e  $u_H$ , mantenendo la variabile  $p$  entro gli stessi limiti.

Infatti, se dovesse essere  $p = e_1/K_2 + \omega > u_H$ , allora si avrebbe:

$$q = K_2(p - u_H) = K_2(e_1/K_2 + \omega - u_H)$$

Poiché a regime per effetto dell'integratore deve necessariamente essere  $q = e_1$ , si ottiene :

$$K_2\omega + e_1 - K_2u_H = e_1$$

e quindi  $\omega = u_H$ , da cui  $u = u_H$  come desiderato.

Il funzionamento è analogo nel caso in cui  $p < u_L$ .

Il parametro  $K_2$  costituisce un grado di libertà nel progetto per cui valori relativamente maggiori di uno tendono a generare un controllo più pronto con ampiezze elevate, mentre valori inferiori ad uno corrispondono a risposte lente ma più dolci.

Sono riportati in figura 5.7 gli andamenti relativi al sistema quando  $K_2 = 1$ .

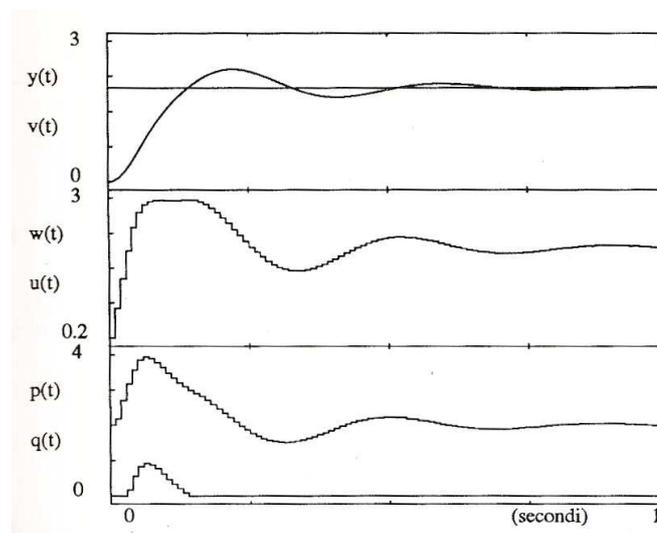


Figura 5.7 Risultati simulativi con dispositivo di antisaturazione quando  $K_2 = 1$

Un ulteriore metodo di antisaturazione è quello talora indicato come “inseguimento dell'integrale”.

Si effettua il calcolo dei limiti dell'integrale ogni volta che l'uscita del regolatore tende a saturare, per esempio a diventare maggiore del limite prefissato  $u_H$ .

In tale situazione il termine integrale  $I$  viene posto uguale al valore:

$$I = \frac{1}{K_p} \left\{ u_H - K_p \left[ e(k) + T_d \frac{e(k) - e(k-1)}{T} \right] \right\}$$

in modo da ottenere in uscita dal regolatore proprio il valore  $u_H$  voluto. Infatti, si ha:

$$u(k) = K_p \left\{ e(k) + I + T_d \frac{e(k) - e(k-1)}{T} \right\} = u_H$$

## 5.2 Funzionamento manuale/automatico

Tra le principali funzionalità del PID viene trattata nel seguente paragrafo, per il particolare interesse presentato, quella chiamata funzionamento manuale/automatico.

Essa si basa sul fatto che il controllore è un sistema dinamico ed è quindi opportuno tener conto del suo stato quando il controllore commuta tra il modo di funzionamento manuale, in cui l'uscita del controllore è sconnessa e si vuole che la variabile manipolabile assuma un valore fissato dall'operatore, e quello automatico, in cui il controllore è attivo nell'anello di regolazione.

Il più semplice schema di controllo che realizza il passaggio manuale/automatico è quello riportato in figura 5.8:

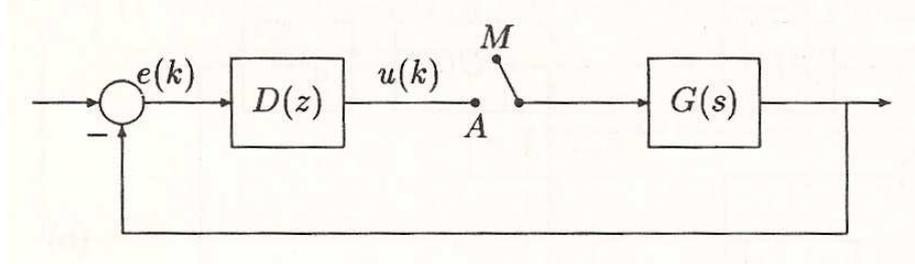


Figura 5.8 Schema base per realizzare il passaggio manuale/automatico

Tuttavia, a causa della memoria del regolatore  $D(z)$ , costituita esclusivamente dalla presenza di un'azione integrale, durante il funzionamento manuale (deviatore su M) il segnale di controllo  $u(k)$  può discostarsi notevolmente dal valore impostato manualmente.

Infatti, in presenza di un'azione integrale il valore di  $u(k)$  può persino tendere all'infinito.

Questo porta a delle conseguenze.

Infatti, al momento del passaggio al funzionamento automatico, caratterizzato dalla presenza del deviatore su A, si possono avere transitori con forti variazioni (bumps).

Dato una legge di controllo  $D(z)$ , per esempio un PID, uno schema che realizza il trasferimento manuale/automatico senza bruschi salti (bumpless) è quello riportato in figura 5.9.

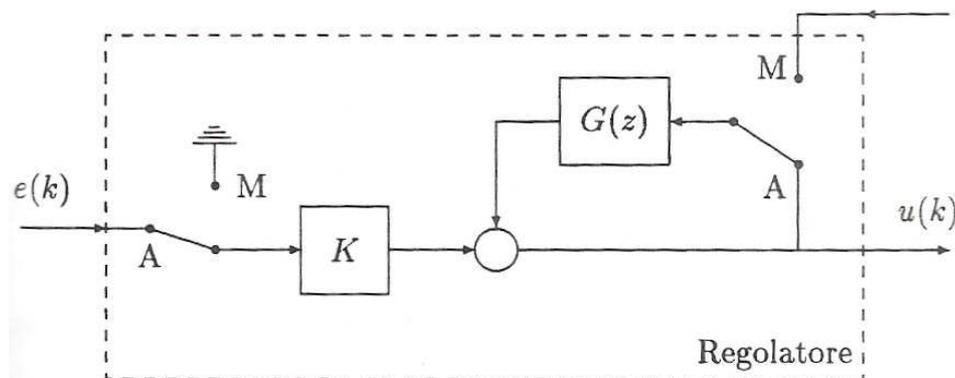


Figura 5.9 Passaggio bumpless da manuale ad automatico

In base a quanto detto in precedenza, la seguente funzionalità viene anche chiamata trasferimento bumpless manuale/automatico.

Le condizioni che devono essere verificate per operare in “modo manuale” sono:

- $G(1) = 1$ ;
- $G(z)$  BIBO stabile;

mentre quelle per il modo automatico sono:

- $D(z) = \frac{K}{1 - G(z)} = \frac{q_0 z^2 + q_1 z + q_2}{(z - 1)(z - \phi)}$ ;
- $G(z)$  deve contenere un fattore  $z^{-1}$ .

Si noti che nella prima considerazione per il modo automatico si è fatto riferimento al caso di regolatore PID.

La soluzione, tuttavia, si può applicare a tipi di regolatori  $D(z)$  anche diversi da quelli PID, purché abbiano un’azione integrale, ossia presentino un polo in  $z=1$ , e abbiano tutti gli zeri all’interno del cerchio di raggio unitario.

Qualora invece l’azione integrale non sia presente nel controllore considerato, non si presenta nessun problema.

Si noti inoltre che la condizione “ $G(z)$  contiene un fattore  $z^{-1}$ ” omette la possibilità di loop algebrico nello schema 5.9.

Dal vincolo relativo alla  $D(z)$  si ricava:

$$G(z) = \frac{D(z) - K}{D(z)} = 1 - \frac{K}{D(z)}$$

Se il controllore  $D(z)$  possiede un polo in  $z = 1$ ,  $D(1) = \infty$  e quindi il vincolo  $G(1) = 1$  è soddisfatto per qualsiasi valore di  $K$ .

Se si esprime il controllore  $D(z)$  nella forma:

$$D(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}} = \frac{b_0 + B_1(z^{-1}) z^{-1}}{a_0 + A_1(z^{-1}) z^{-1}}$$

l’equazione  $G(z) = \frac{D(z) - K}{D(z)}$  diventa:

$$G(z) = \frac{B(z^{-1}) - K A(z^{-1})}{B(z^{-1})} = \frac{b_0 - K a_0 + [B_1(z^{-1}) - K A_1(z^{-1})] z^{-1}}{B(z^{-1})}$$

Il valore di  $K$  per il quale è soddisfatto il vincolo “ $G(z)$  contiene un fattore  $z^{-1}$ ” è  $K = b_0/a_0$ . Sostituendo tale valore nell’equazione di  $G(z)$  si ottiene:

$$G(z) = \frac{B(z^{-1}) - b_0 A(z^{-1})/a_0 \cdot z^{-1}}{B(z^{-1})}$$

Si noti che la funzione  $G(z)$  è BIBO stabile se tutti gli zeri del polinomio  $B(z^{-1})$  sono stabili, cioè se sono tutti all’interno del cerchio unitario.

## Esempio 5.2

Si supponga di voler realizzare il controllore discreto:

$$D(z) = \frac{1.513(1 - 0.741 z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 + 0.392 z^{-1})} = \frac{1.513 - 1.121 z^{-1}}{1 - 0.608 z^{-1} - 0.392 z^{-2}}$$

ottenuto applicando il progetto semplificato secondo Dahlin, che verrà trattato nel paragrafo 8.6, al sistema con la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{(0.5s + 1)(s + 1)^2(2s + 1)}$$

Per il regolatore  $D(z)$  si ha:

$$D(z) = \frac{1.513 - 1.121 z^{-1}}{1 + (-0.608 - 0.392 z^{-1}) z^{-1}} = \frac{b_0 + B_1(z^{-1}) z^{-1}}{a_0 + A_1(z^{-1}) z^{-1}}$$

dove  $b_0 = 1.513$  e  $a_0 = 1$ ,

$$B_1(z^{-1}) = -1.121$$

$$A_1(z^{-1}) = -0.608 - 0.392 z^{-1}$$

da cui applicando la relazione  $G(z) = \frac{B(z^{-1}) - b_0 A(z^{-1})}{a_0 B(z^{-1})} z^{-1}$ , si ricava  $K = \frac{b_0}{a_0} = 1.513$  e

$$\text{quindi } G(z) = \frac{(-0.201 + 0.593 z^{-1}) z^{-1}}{1.513 - 1.121 z^{-1}}$$

I risultati ottenuti sono riportati in figura 5.10

Nella parte superiore dell'immagine sono riportati il segnale d'uscita  $y(t)$  e il segnale di riferimento manuale/automatico.

Nella parte inferiore è riportato invece il segnale di controllo  $u(t)$ .

Per  $0 \leq t < 20$  s e per  $40 \leq t < 60$  s il sistema si trova in condizioni di normale regolazione automatica basata sull'anello di retroazione (il set point vale 1).

Per  $20 \leq t < 40$  s il sistema si trova nella modalità di funzionamento manuale ad anello aperto (il segnale esterno vale 0.5).

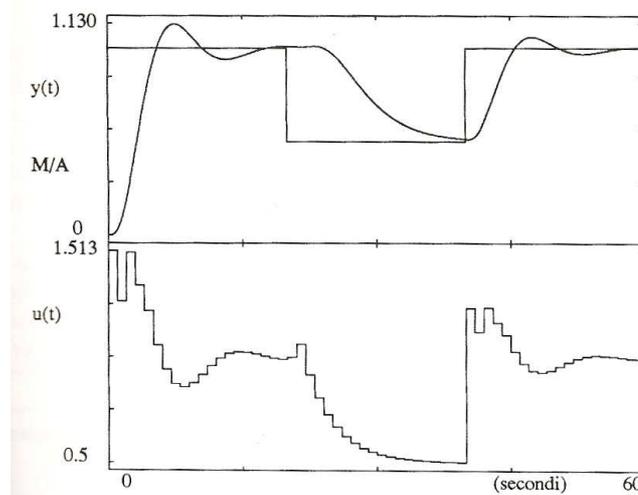


Figura 5.10 Risultati simulativi relativi alla realizzazione dello schema di passaggio funzionamento manuale/automatico

Un metodo concettualmente simile per ottenere il passaggio bumpless manuale/automatico (M/A) si basa su una modifica realizzativa dello schema precedente, riportata in figura 5.11: Nello schema, la funzione di trasferimento  $D(z)$  è quella del controllore progettato secondo le specifiche desiderate, mentre il blocco  $G(z)$  può essere fissato secondo i criteri già presentati, senza tuttavia il vincolo sulla scelta del parametro  $K$ , in quanto in questo caso non si viene a creare un loop algebrico, oppure scelto ad arbitrio con i soli vincoli:

- $G(1) = 1$ ;
- $G(z)$  stabile.

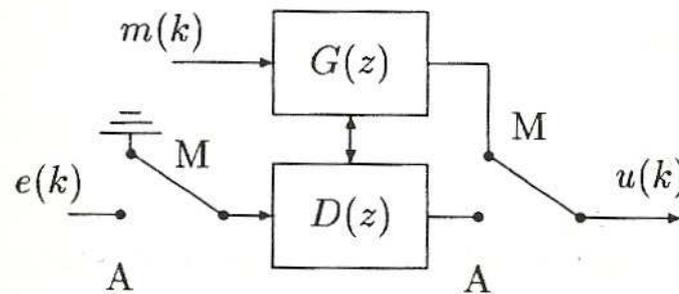


Figura 5.11 Schema realizzativo alternativo del passaggio manuale/automatico bumpless

Rispetto al caso precedente, qualora si volesse fissare  $G(z)$  partendo dalla  $D(z)$ , si ha un ulteriore grado di libertà rappresentato dal parametro  $K$ .

Il valore di questo parametro non ha influenza né in funzionamento automatico né in funzionamento manuale a transitori esauriti, in quanto  $G(1)=1$ .

Il parametro  $K$  influenza solo il transitorio da automatico a manuale.

Infatti piccoli valori di  $K$  comportano transizioni automatico/manuali veloci, mentre valori maggiori determinano transizioni più lente.

Un requisito che bisogna soddisfare esplicitamente in questo particolare schema è quello di mantenere sempre aggiornato lo stato del sistema nel controllore non attivo, alternativamente  $D(z)$  o  $G(z)$ .

Questo aggiornamento è reso possibile salvando i valori della variabile errore  $e(k)$  e della variabile di controllo  $u(k)$ .

### 5.3 Varianti dei controllori PID

I controllori PID digitali, oltre ad essere provvisti di funzionalità per la desaturazione dell'azione integrale e per una transizione bumpless M/A, possono includere la possibilità di compensare un ritardo finito di un processo, tramite il predittore di Smith, l'auto-sintonizzazione e l'impiego di particolari non linearità.

Oltre a queste funzionalità, i PID possono presentare un commutatore R/L, il quale permette di porre il controllore in controllo remoto (R), cioè sotto il controllo di un sistema di supervisione, o in controllo locale, dove il set point è fornito agendo sui comandi del pannello.

Per quanto riguarda le non linearità, in alcune applicazioni, trova impiego un controllore PID nel quale il guadagno  $K_P$  viene posto proporzionale al modulo dell'errore:

$$K_P = K|e(k)| \quad \text{con } K_{\min} < K < K_{\max} \text{ e } K \text{ costante}$$

In tal caso l'azione P diventa proporzionale al quadrato dell'errore in ingresso, producendo un segnale di comando più robusto per valori elevati dell'errore.

Questo assicura che si abbia una risposta più pronta per valori d'errore elevati, ma che una diminuzione di questi provochi un calo del guadagno per assicurare la stabilità.

Una variante meno accurata è quella nella quale l'errore  $e(k)$  viene posto in ingresso di un blocco non lineare a zona morta, per cui non si ha controllo finché esso è all'interno della zona morta stessa, mentre opera linearmente all'esterno.

L'immagine sottostante rappresenta tale situazione:

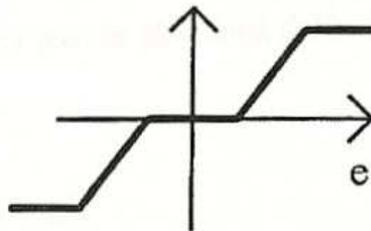


Figura 5.12 Rappresentazione dell'uscita di un blocco lineare a zona morta

Un'altra variante possibile, è quella definita dalla relazione:

$$T_i = T' |e(k)| \quad \text{con } T_{i \min} < T_i < T_{i \max}$$

In questa situazione il guadagno dell'azione integrale risulta essere molto grande per piccoli segnali, mentre è piccolo per grandi segnali.

Nel caso di risposta ad una gradino si evita che durante il transitorio iniziale, quando l'errore assume valori molto grandi, l'integratore si carichi troppo producendo una sovraelongazione, mentre l'azione integrale viene ripristinata a regime.

Una variante a quest'ultimo tipo di non linearità è quella rappresentata in figura 5.13.

Questa non linearità ha la caratteristica di far agire l'azione integrale solo per piccoli valori dell'errore.

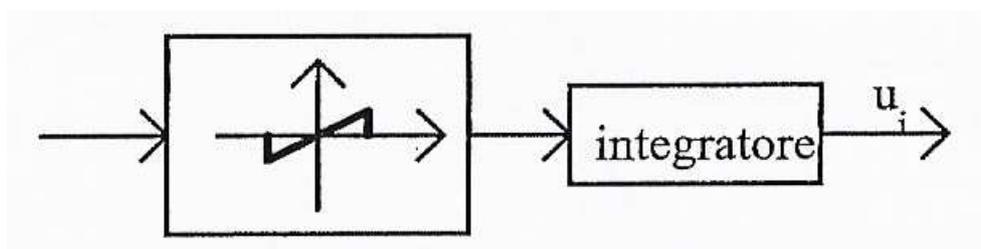


Figura 5.13 Variante dei controllori PID

# Capitolo 6

## Progetto nel piano $\omega$

Come già accennato all'inizio della tesi, in alternativa all'utilizzo di controllori PID ed a tecniche basate sul metodo indiretto, è possibile utilizzare una terza classe, che comprende tecniche di progetto per le quali si lavora direttamente nel dominio discreto, ossia delle trasformate Zeta (metodo diretto).

Esistono diverse tecniche basate su tale metodo.

Quelle che verranno approfondite nei capitoli seguenti sono:

- progetto nel piano  $\omega$ , con l'impiego dei diagrammi di Bode;
- progetto con il luogo delle radici nel piano  $z$ ;
- progetto con metodi analitici (assegnamento poli/zeri, controllo deadbeat, Dahlin).

### 6.1 Definizione del piano $\omega$

Il primo caso considerato è quello di progetto nel piano  $\omega$ .

Prima di analizzare tale metodo è necessario dire che nel caso continuo sono state sviluppate plurime tecniche frequenziali, come quella basata sui diagrammi di Bode, ed è di particolare interesse poterle recuperare anche nel campo discreto.

Molte di queste tecniche nel continuo sono adatte esclusivamente ai regolatori con struttura molto semplice, come le reti correttive a ritardo e/o anticipo di fase, di cui si parlerà nei paragrafi seguenti.

Per poterle utilizzare è necessario vedere come la frequenza entra nel dominio discreto, cioè tramite la relazione  $z = e^{j\omega T}$ , la quale comporta però la perdita di importanti proprietà come la sommabilità dei diagrammi logaritmici.

Per ovviare all'inconveniente, si ricorre alla trasformazione bilineare e alla sua inversa, le quali sono state già trattate nei paragrafi 3.5.3 e 3.5.4.

#### 6.1.1 Definizione del piano $\omega$ : sintesi mediante trasformata bilineare

La trasformazione bilineare:

$$z = \frac{1 + \omega T/2}{1 - \omega T/2}$$

e la sua inversa:

$$\omega = \frac{2(1 - z^{-1})}{T(1 + z^{-1})} = \frac{2(z - 1)}{T(z + 1)}$$

mettono in relazione il piano  $z$  con un piano ausiliario  $\omega$  che approssima il piano complesso  $s$ .

Utilizzando la nuova variabile  $\omega$ , la quale approssima la variabile  $s$  della trasformata di Laplace, è possibile eseguire il progetto del regolatore per mezzo delle usuali tecniche frequenziali, ottenendo dapprima il regolatore  $D(\omega)$  e, tramite una sua antitrasformazione, il regolatore discreto  $D(z)$ .

I passi logici che caratterizzano il progetto sono i seguenti:

1. si fissa un periodo di campionamento  $T$  sulla base delle dinamiche del processo e delle prestazioni desiderate.  
Una regola empirica frequentemente adottata consiste nell'attribuire al parametro  $T$  un valore compreso tra un decimo e un mezzo della più piccola costante di tempo del sistema.  
Infatti all'aumentare della frequenza di campionamento, il periodo tende a zero, e ciò comporta che la  $G(s)$  può essere ben approssimata con la  $G(\omega)$ .  
Si noti però che, non introducendo il procedimento sopra indicato approssimazioni come nel metodo indiretto (eccetto quella tra il piano  $s$  e  $\omega$ ), è possibile utilizzarlo anche per frequenze di campionamento non troppo elevate rispetto la banda passante del sistema a catena chiusa;
2. si ricava  $G(z)$ , considerando la presenza dell'holder  $H_0$ ;
3. tramite la trasformazione bilineare  $z = \frac{1 + \omega T/2}{1 - \omega T/2}$  si trasforma la  $G(z)$  in  $G(\omega)$ ;
4. si ricava la funzione desiderata  $D(\omega)$ , applicando una delle tecniche frequenziali a tempo continuo alla  $G(\omega)$ .  
Il precedente passaggio è reso possibile dal fatto che il progetto di  $D(\omega)$ , data la  $G(\omega)$ , può essere condotto secondo i criteri della sintesi classica dei sistemi continui, lineari e tempo invarianti;
5. si antitrasforma, mediante la relazione  $\omega = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}$ , la  $D(\omega)$  nella  $D(z)$  corrispondente;
6. si verifica che le prestazioni ottenute siano quelle desiderate.

Come già esplicitato nel capitolo sulla discretizzazione, nella trasformazione di Tustin la parte interna del cerchio di raggio unitario nel piano  $z$  viene mappata nel semipiano sinistro del piano complesso  $\omega$ , ed il cerchio stesso nell'asse immaginario.

Inoltre  $z = 0$  viene trasformato in  $\omega = -2/T$  nel piano ausiliario  $\omega$  e corrispondentemente in un punto all'infinito ( $\sigma \rightarrow -\infty$ ) nel piano  $s$ .

La prima relazione citata è del tutto simile alla trasformazione, indotta dal campionamento, tra il piano  $s$  e il piano  $z$ , anche se la fondamentale differenza sta nel fatto che la trasformazione di Tustin è biunivoca.

Sono state descritte in precedenza le caratteristiche frequenziali di questo tipo di applicazione, portando particolare attenzione alla forte compressione che tale trasformazione presenta alle alte frequenze: ponendo  $s = j\omega$  con  $\omega \in [0, \pi/T]$  si hanno frequenze  $j\Omega$  con  $\Omega \in [0, \infty]$  ed il punto corrispondente nel piano  $z$ , secondo la relazione  $z = e^{j\omega T}$ , varia sulla semicirconferenza tra 1 e -1.

Tra le pulsazioni nel piano  $s$  e quelle del piano  $\omega$  vale la relazione:

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan(\omega T/2)$$

in base alla quale si ha che per  $\omega \ll \omega_s/2 = \pi/T$ , si ha  $\Omega \approx \omega$ .

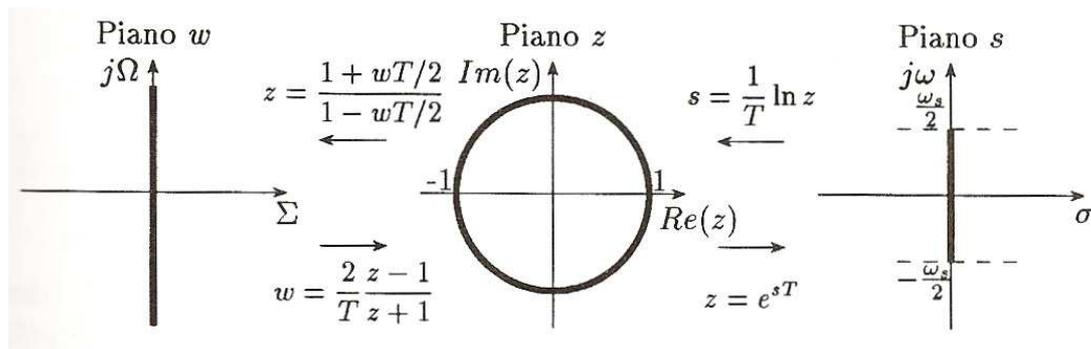


Figura 6.1 Trasformazioni tra il piano  $\omega$ , il piano  $z$  ed il piano  $s$

## 6.1.2 Uso dei diagrammi di Bode nel piano $\omega$

Come anticipato nell'introduzione, un esempio di progetto nel piano  $\omega$  è quello che utilizza i diagrammi di Bode.

Nel paragrafo precedente si è visto come, tramite la trasformazione bilineare e la sua inversa, a partire dalla  $D(z)$  si possa ottenere la funzione di trasferimento "continua"  $D(\omega)$  definita nel piano  $\omega$ .

Va sottolineato il fatto che, nel progetto del regolatore viene utilizzato il piano  $\omega$ , come se coincidesse con quello  $s$ , ma in realtà essi differiscono.

Questa differenza si ripercuote anche sui diagrammi di Bode.

Per esplicitare le conseguenze che tale semplificazione comporta viene riportato l'esempio 6.1.

### Esempio 6.1

Si consideri il filtro passa basso, che presenta la seguente funzione di trasferimento:

$$G_c(s) = \frac{100}{s + 100}$$

Sono tracciati in figura 6.2 i diagrammi di Bode del modulo e della fase relativi al filtro suddetto.

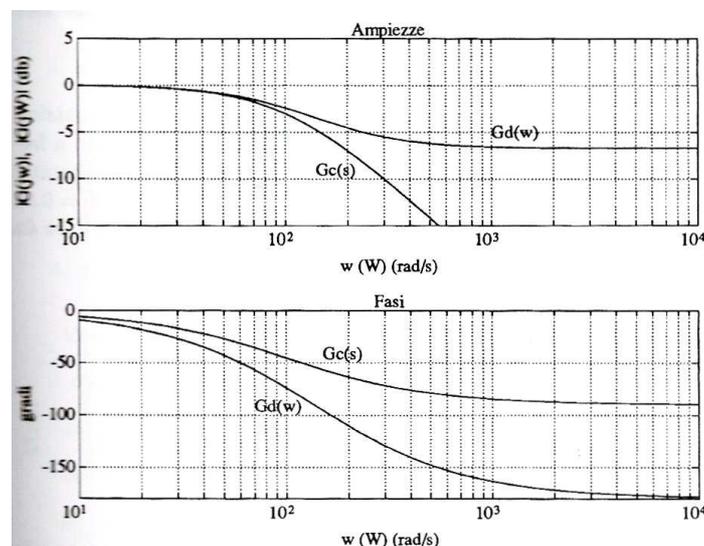


Figura 6.2 Diagrammi di Bode del filtro  $G_c(s)$  e del suo equivalente  $G_d(\omega)$

Il corrispondente sistema a tempo discreto, ottenuto considerando un ricostruttore d'ordine zero  $H_0$  e  $T = 0.01$  s (periodo di campionamento piccolo, per far in modo che  $G_c(\omega)$  sia quanto più prossima a  $G_c(s)$ ), è dato da:

$$G_d(z) = Z \left[ \frac{1 - e^{sT}}{s} \frac{100}{s + 100} \right] = (1 - z^{-1}) Z \left[ \frac{100}{s(s + 100)} \right] = \frac{0.6321}{z - 0.3679}$$

Utilizzando la relazione  $z = \frac{1 + \omega T/2}{1 - \omega T/2}$  è possibile passare al piano  $\omega$ :

$$G_d(\omega) = G_d(z) \Big|_{z = \frac{1 + \omega T/2}{1 - \omega T/2}} = -0.4621 \frac{\omega - 200}{\omega + 92.4234}$$

Si calcolano inoltre i seguenti limiti:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |G_c(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow 0} |(100 / (j\omega + 100))| = 1 = \lim_{\Omega \rightarrow 0} |G_d(j\Omega)|$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G_c(j\omega)| = 0 \neq \lim_{\Omega \rightarrow \infty} |G_d(j\Omega)| = 0.4621 = -6.7\text{dB}$$

dove  $\omega = j\Omega$ .

Osservando le relazioni appena trovate si può dire che il filtro  $G_d(\omega)$  presenta lo stesso numero di poli e di zeri.

Questa proprietà, soddisfatta in generale dalle funzioni  $G(\omega)$ , implica che la risposta frequenziale di tale filtri tende per  $\Omega \rightarrow \infty$  ad un valore costante diverso da zero.

Per quanto riguarda le fasi, si può notare che l'introduzione di zeri a parte reale positiva causata dalla trasformazione di Tustin, implica la possibilità che  $G_d(\omega)$  non sia a fase minima, dove si dice a fase minima una funzione propria avente sia poli che zeri a parte reale negativa. È ovvio che in tali circostanze si deve prestare particolare attenzione nel ricavare i diagrammi di Bode corrispondenti.

Oltre all'esempio appena spiegato, nel seguito verranno illustrati in dettaglio alcuni esempi di progetto di regolatori mediante l'uso del piano  $\omega$ , per la determinazione di reti ritardatrici, anticipatrici ed a ritardo/anticipo.

Si consideri ora il caso di reti ritardatrici ed anticipatrici.

In entrambi i casi si tratta di regolatori che nel discreto assumono la forma:

$$D(z) = k_d \frac{(z - z_0)}{z - z_p}$$

e che vengono trasformati mediante la  $z = \frac{1 + \omega T/2}{1 - \omega T/2}$  in controllori del tipo:

$$D(\omega) = \frac{1 + \omega \tau_0}{1 + \omega \tau_p}$$

da moltiplicare eventualmente per una costante in caso si desideri guadagno statico non unitario.

Facendo riferimento a regolatori che presentano questa struttura, si esegue dapprima il progetto di  $D(\omega)$  e, una volta determinati i valori di  $\tau_0$  e  $\tau_p$ , si applica la trasformazione inversa per tornare nel dominio  $z$ .

Si trova quindi:

$$D(z) = D(\omega) \Big|_{\omega = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}} = \frac{1 + \omega \tau_0}{1 + \omega \tau_p} \Big|_{\omega = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}} = \frac{T + 2\tau_0}{T + 2\tau_p} \frac{z + (T - 2\tau_0)/(T + 2\tau_0)}{z + (T - 2\tau_p)/(T + 2\tau_p)}$$

e quindi possono essere definiti i parametri :

$$k_d = \frac{T + 2\tau_0}{T + 2\tau_p} \quad z_0 = \frac{2\tau_0 - T}{T + 2\tau_0} \quad z_p = \frac{2\tau_p - T}{T + 2\tau_p}$$

## 6.2 Progetto di rete ritardatrice (attenuatrice)

Prima di trattare il progetto di reti ritardatrici è necessario introdurre dei chiarimenti su quando tali tipi di reti vengono utilizzate.

Si consideri di essere nel caso in cui la pulsazione d'attraversamento si trova alla destra di quella desiderata e il margine di fase è superiore al margine desiderato.

Un'idea è quella di abbassare l'ampiezza senza ridurre troppo la fase.

Tale operazione può essere intuitivamente realizzata inserendo opportunamente, attraverso il controllore, una coppia polo/zero entrambi reali negativi in posizione opportuna, operazione che equivale, di fatto, al ricorso ad una rete ritardatrice (detta anche attenuatrice).

Tale rete viene descritta da una funzione razionale propria con un polo reale negativo ed uno zero reale negativo collocato alla sua destra.

Quindi, considerando  $D(\omega) = \frac{1 + \omega \tau_0}{1 + \omega \tau_p}$  si ha che il parametro  $\tau_0$  è minore di  $\tau_p$ .

In figura 6.3 sono riportati i diagrammi di Bode del modulo e della fase di una rete ritardatrice caratterizzata dai parametri  $\tau_0 = 0.01$  s e  $\tau_p = 0.1$  s.

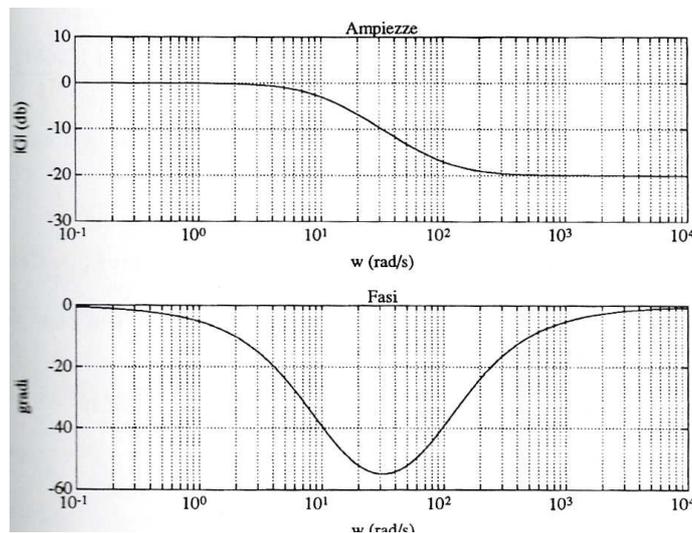


Figura 6.3 Diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi di una rete ritardatrice

Si può notare la presenza di un ritardo di fase indotto dall'azione del polo, il quale viene annullato a frequenze maggiori dall'azione dello zero.

Infatti, alle alte frequenze, il valore del guadagno è dato da:

$$\alpha = \frac{\tau_0}{\tau_p} < 1$$

Lo sfasamento massimo in ritardo è dato da:

$$\Phi_m = -\arcsin \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

e tale valore si ottiene in corrispondenza alla pulsazione:

$$\Omega_m = \frac{1}{\sqrt{\tau_0 \tau_p}} = \frac{1}{\tau_p \sqrt{\alpha}}$$

Gli effetti introdotti da questo tipo di rete sono in parte positivi, come l'attenuazione ad alte frequenze, e in parte negativi, come lo sfasamento in ritardo.

Per risolvere il precedente problema si cerca di fare in modo che nel progetto il ritardo di fase non interessi la pulsazione d'attraversamento  $\Omega_1$  a cui corrisponde modulo unitario, e quindi che il massimo dello sfasamento sia posizionato circa una decade prima di  $\Omega_1$ , in modo che per  $\Omega = \Omega_1$  sia presente solo una attenuazione del guadagno.

Viene ora riportato passo per passo il procedimento per progettare tale tipo di rete:

1. si considerino i diagrammi di Bode della funzione di trasferimento  $G(\omega)$ , eventualmente con guadagno modificato per soddisfare eventuali specifiche sull'errore a regime e le specifiche sul tipo.

Si consideri ora la pulsazione  $\Omega^*$  a cui corrisponde un margine di fase pari a quello desiderato  $M_{des}$ , aumentato di  $5^\circ$  per compensare le approssimazioni introdotte dal procedimento, ovvero

$$\Omega^* : \arg[G(j\Omega^*)] = -180^\circ + M_{des} + 5^\circ$$

2. si impone che, per la pulsazione sopra citata, il fattore d'attenuazione introdotto dalla rete correttiva, per avere un guadagno unitario, valga:

$$\frac{\tau_0}{\tau_p} = \alpha = \frac{1}{|G(j\Omega^*)|} \quad \text{oppure in decibel} \quad 20 \log_{10} \frac{\tau_0}{\tau_p}$$

3. si fissa  $1/\tau_0 = 0.1\Omega^*$ , al fine d'assicurarsi che lo sfasamento in ritardo della rete non influisca in modo apprezzabile in corrispondenza alla pulsazione d'attraversamento
4. si ricava  $\tau_p$  tramite la relazione  $\tau_p = \tau_0/\alpha$

Il seguente tipo di progetto, come quello che verrà analizzato nel paragrafo 6.3, può richiedere diversi tentativi per ottenere le prestazioni desiderate.

E' necessario quindi ripetere in maniera iterativa il procedimento, qualora le prestazioni ottenute non siano soddisfacenti.

### Esempio 6.2

Per dare un esempio concreto di progetto di una rete ritardatrice si consideri il sistema:

$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)}$$

introdotto in un anello di controllo in retroazione di cui viene data una rappresentazione in figura 6.4.

Si desidera progettare una rete ritardatrice digitale  $D(z)$  che garantisca al sistema un margine di fase  $M_{des} = 55^\circ$ .

Per quanto concerne il periodo di campionamento  $T$ , viene posto pari a 0.1 s, poiché la costante di tempo più veloce del sistema, corrispondente al polo collocato in  $s = -2$ , vale  $\tau = 0.5$  s.

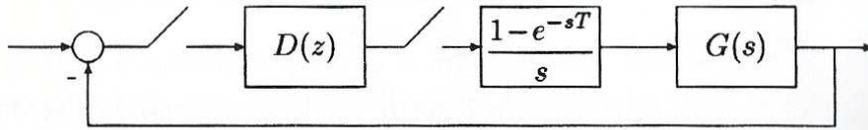


Figura 6.4 Sistema in retroazione

Effettuando la discretizzazione della funzione di trasferimento, si ricava:

$$G(z) = Z \left[ \frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{2}{s(s+1)(s+2)} \right] = \frac{3.043 \cdot 10^{-4} (z + 0.2484)(z + 3.4651)}{(z - 1)(z - 0.9048)(z - 0.8187)}$$

e applicando la trasformazione bilineare  $z = \frac{1 + \omega T/2}{1 - \omega T/2}$  si ottiene:

$$G(\omega) = \frac{8.275 \cdot 10^{-5} (\omega - 20)(\omega - 33.2192)(\omega - 36.2262)}{\omega(\omega - 0.9991)(\omega - 1.9934)}$$

a cui corrispondono le curve (a) dei diagrammi di Bode di figura 6.5.

Viene poi cercato il valore della pulsazione  $\Omega^*$  a cui è associata una fase di:

$$-180^\circ + 55^\circ + 5^\circ = -120^\circ$$

$\Omega^*$  vale circa 0.3446 rad/s e ad essa è associato un valore del modulo pari a 8.64 dB = 2.7039. Perciò assumiamo  $1/\alpha = 2.7039$ .

Si possono quindi calcolare i parametri  $\tau_p$  e  $\tau_0$ , che valgono:

$$\tau_0 = \frac{1}{0.03446} = 29.0191 \quad \text{e} \quad \tau_p = (2.7039)(29.0191) = 78.4649$$

e a cui corrispondono le pulsazioni  $\Omega_0 = 0.03446$  e  $\Omega_p = 0.01274$ .

Sempre in figura 6.5 sono riportate le curve (b), le quali rappresentano i diagrammi di Bode del modulo e della fase della sola rete correttiva, mentre le curve (c) riproducono i diagrammi di Bode relativi al guadagno d'anello  $D(\omega)G(\omega)$ .

Per mezzo dell'antitrasformata e dell'uso delle seguenti formule:

$$k_d = \frac{T + 2\tau_0}{T + 2\tau_p} \quad z_0 = \frac{2\tau_0 - T}{T + 2\tau_0} \quad z_p = \frac{2\tau_p - T}{T + 2\tau_p}$$

è possibile determinare il regolatore discreto  $D(z)$ :

$$D(z) = \frac{0.37023(z - 0.9965599)}{(z - 0.9987264)} = \frac{0.37023z - 0.368956}{(z - 0.9987264)}$$

Viene poi riportata in figura 6.6 la risposta al gradino del sistema in retroazione con il controllore discreto appena trovato (andamenti più smorzati).

Analizzando  $D(z)$  si può notare che il polo ( $z = 0.9987264$ ) e lo zero ( $z = 0.9965589$ ) sono molto prossimi tra loro, ed entrambi nelle vicinanze del punto  $z = 1$ .

Questa situazione capita molto spesso nelle reti ritardatrici e dipende dal posizionamento del polo e dello zero della  $D(\omega)$  a basse frequenze, che risulta essere necessario per non influire con un eccessivo ritardo di fase in prossimità della pulsazione d'attraversamento.

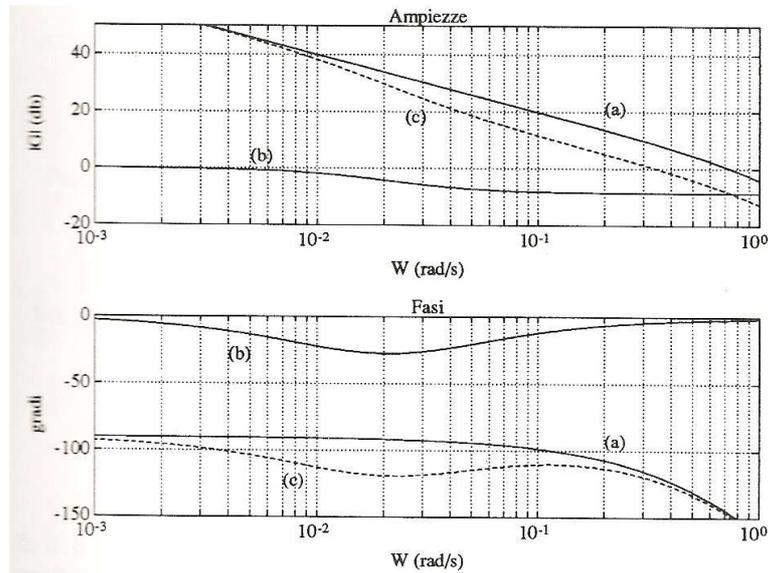


Figura 6.5 Diagrammi di Bode di  $G(\omega)$ , di  $D(\omega)$  e del guadagno di anello  $G(\omega)D(\omega)$

Inoltre tale fenomeno viene accentuato dalla scelta di  $T$  molto piccoli e ciò implica che il regolatore digitale deve essere realizzato con una notevole precisione numerica.

A riprova di ciò, in figura 6.6 si riportano, assieme alle curve nominali, quelle ottenute nel caso in cui si è operato un troncamento a 3 cifre significative dei coefficienti del controllore  $D(z)$ .

L'andamento delle variabili nel caso di troncamento risulta parecchio diverso, anche a causa delle maggiori oscillazioni presenti rispetto al caso privo di troncamento.

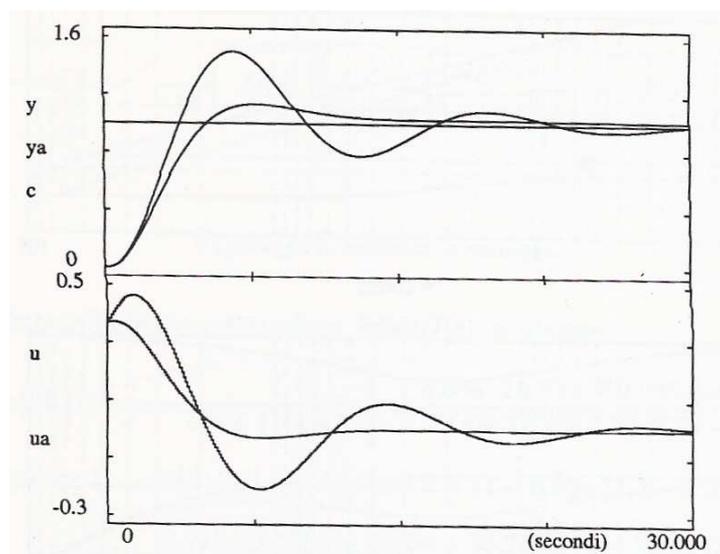


Figura 6.6 Risposta a gradino del processo in retroazione e relative variabile di controllo per il regolatore  $D(z) = \frac{0.37023z - 0.368956}{z - 0.998726}$  e per la sua realizzazione con troncamento numerico

### 6.3 Progetto di rete anticipatrice (lead-lag)

Nel caso complementare al precedente si ha che la pulsazione d'attraversamento si trova alla sinistra di quella desiderata ed il margine di fase è inferiore al margine desiderato.

Tale situazione può essere risolta sollevando entrambi i diagrammi, sia quello delle fasi che quello delle ampiezze.

L'operazione di sollevamento può essere intuitivamente realizzata inserendo opportunamente, attraverso il controllore, uno o più zeri reali negativi in posizione opportuna.

L'aggiunta di uno zero stabile nella funzione di trasferimento in catena aperta, infatti, incrementa di 20 db/decade le pendenze dei diversi tratti del diagramma asintotico delle ampiezze che stanno alla sua destra, spostando in tal modo verso destra la pulsazione d'attraversamento.

Per quanto concerne il diagramma delle fasi, invece, uno zero stabile incrementa, asintoticamente, la fase di  $90^\circ$  (dal punto di spezzamento ad esso relativo in poi) e porta, quindi, ad un incremento del margine di fase.

Se vogliamo realizzare questa operazione di sollevamento con un controllore proprio possiamo ricorrere ad una rete anticipatrice o lead-lag.

Tale tipo di rete è caratterizzato dal fatto che nella espressione della rete correttiva:

$$D(\omega) = \frac{1 + \omega\tau_0}{1 + \omega\tau_p}$$

si verifica che la costante di tempo  $\tau_0$  è maggiore di  $\tau_p$ .

In questo caso, essendo lo zero a frequenza minore rispetto al polo, si ha inizialmente un anticipo di fase che poi viene compensato, per frequenze superiori, dalla presenza del polo.

In figura 6.7 sono riportati i diagrammi di Bode del modulo e della fase di una rete anticipatrice caratterizzata dai parametri  $\tau_p = 0.01$  s e  $\tau_0 = 0.1$  s.

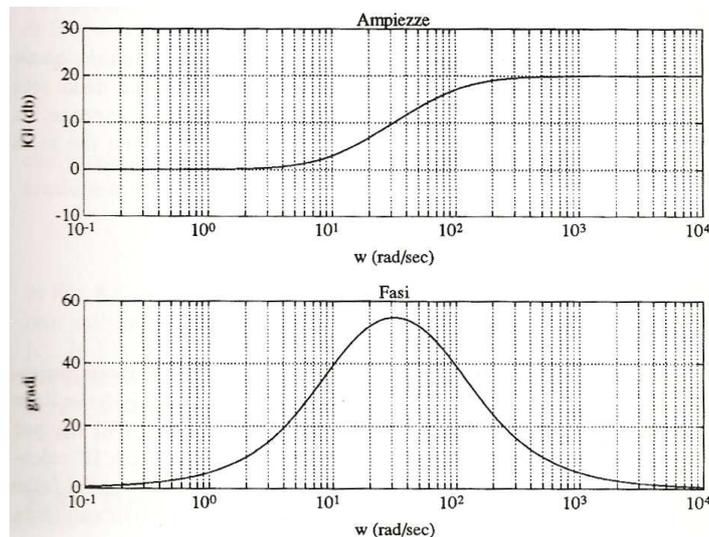


Figura 6.7 Diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi di una rete anticipatrice

Si può verificare che guadagno è minore (tranne a infinito) di  $\tau_0 / \tau_p$  che è per definizione pari a  $1/\alpha$ :

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\tau_0}{\tau_p} > 1$$

mentre lo sfasamento massimo in anticipo, risulta essere uguale e opposto a quello del caso della rete ritardatrice, e quindi è pari a:

$$\Phi_m = \arcsin \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

ottenuto alla pulsazione  $\Omega_m = \frac{1}{\sqrt{\tau_0 \tau_p}} = \frac{1}{\tau_p \sqrt{\alpha}}$ .

I due regolatori sono anche accomunati dalla presenza di effetti in parte positivi e in parte negativi.

L'azione benefica introdotta da questa rete è lo sfasamento in anticipo in una certa banda di frequenze, che permette un allontanamento dal punto critico nel diagramma di Nyquist del guadagno d'anello.

Tuttavia a questo effetto si aggiunge un maggior guadagno complessivo che tende a destabilizzare il sistema, anche se di solito permette d'ottenere risposte più pronte.

Per questo motivo, il progetto di una rete anticipatrice può richiedere diversi tentativi per ottenere le prestazioni desiderate.

Assumendo come valore desiderato del margine di fase  $M_{des}$ , il progetto di una rete anticipatrice si articola nei seguenti passi:

1. si individuano il margine di fase e la pulsazione  $\Omega_1$  d'intersezione dei diagrammi di Bode della  $G(\omega)$ , della quale si è eventualmente modificato il guadagno per soddisfare le specifiche sull'errore a regime ed il requisito sul tipo;
2. si calcola l'anticipo di fase  $\Phi_m$  necessario per avere un margine di fase pari a quello desiderato.

Si ricorda che, per compensare le approssimazioni di progetto, è consigliabile introdurre una maggiorazione di  $5^\circ \div 10^\circ$ ;

3. un volta noto  $\Phi_m$ , si calcola:

$$\alpha = \frac{1 - \sin \Phi_m}{1 + \sin \Phi_m}$$

che rappresenta il reciproco del guadagno all'infinito;

4. si determina dal diagramma di Bode la pulsazione  $\Omega^*$  per la quale l'ampiezza  $G(\omega)$  vale  $\alpha/2$  in dB. Poiché l'introduzione della rete anticipatrice provoca l'aumento del guadagno del sistema alle alte frequenze, la pulsazione  $\Omega^* > \Omega_1$  sarà la nuova pulsazione d'intersezione che si fa corrispondere alla  $\Omega_m$  della rete;
5. si ricavano  $\tau_0$  e  $\tau_p$  tramite le seguente relazioni:

$$\alpha = \frac{\tau_0}{\tau_p} \quad \text{e} \quad \Omega^* = \Omega_m = \frac{1}{\tau_0 \sqrt{\alpha}}$$

6. si valuta se le prestazioni ottenute sono prossime a quelle desiderate e se non è così si ripete il procedimento prendendo un nuovo valore di  $\Omega_m$ , superiore al caso precedente. Spesso può risultare vantaggioso considerare come valore di  $\Omega_m$  una pulsazione diversa (solitamente inferiore) rispetto a  $\Omega^*$  calcolata sulla base del diagramma delle ampiezze.

Il seguente accorgimento può venir giustificato dalla volontà d'avere un maggior anticipo di fase senza variazioni d'ampiezze troppo accentuate.

Per descrivere concretamente tale progetto, viene svolto un esempio caratterizzato dalla medesima funzione di trasferimento dell'esempio 6.2, considerato nel paragrafo precedente.

### Esempio 6.3

Si consideri nuovamente il sistema caratterizzato dalla funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)}$$

Ponendo il periodo di campionamento  $T$  pari a  $0.1$  s, dal diagramma di Bode di  $G(\omega)$  è possibile calcolare il margine di fase, che risulta essere di circa  $30^\circ$  in corrispondenza alla pulsazione di  $0.75$  rad/s.

Desiderando avere in corrispondenza a tale pulsazione  $M_{des} = 55^\circ$ , come primo tentativo si può considerare una rete con anticipo massimo  $\Phi_m = 35^\circ$ .

Con i seguenti dati è possibile calcolare il guadagno e la pulsazione  $\Omega^*$  per la quale l'ampiezza  $G(\omega)$  vale  $\alpha/2$ :

$$\alpha = \frac{1 - \sin 35^\circ}{1 + \sin 35^\circ} = 0.271 \quad e \quad \Omega^* = 2.16 \text{ rad/s}$$

da cui si ricavano  $\tau_0 = 0.8893$  s e  $\tau_p = 0.241$  s.

Calcolando il nuovo margine di fase di  $D(\omega)G(\omega)$ , si nota che esso è di  $49^\circ$ .

Purtroppo, anche se si considerassero valori  $\Omega_m$  diversi da  $\Omega^*$ , non si riuscirebbe mai ad ottenere  $M_{des} = 55^\circ$ .

Perciò in questi casi si è soliti considerare una rete che offra un anticipo di fase maggiore, ad esempio di  $45^\circ$ .

I valori dei parametri ottenuti in questo caso sono:

$$\alpha = 0.1715 \quad \Omega^* = 2.61 \text{ rad/s} \quad \tau_0 = 0.9252 \text{ s} \quad \tau_p = 0.1587 \text{ s}$$

Poiché il margine di fase ottenuto, che è di  $53^\circ$ , risulta essere molto vicino a quello desiderato, è possibile ridefinire il valore di  $\Omega^*$ , che risulta essere pari a  $2.2$  rad/s, e ripetendo il calcolo di  $\tau_0$  e  $\tau_p$  si ottiene la rete anticipatrice:

$$D(\omega) = \frac{1 + 1.0973\omega}{1 + 0.1883\omega}$$

che fornisce il margine di fase complessivo  $M_{des} = 55^\circ$  richiesto.

A questo punto è possibile definire il regolatore discreto  $D(z)$  tramite la trasformazione di Tustin:

$$D(z) = \frac{4.8146(z - 0.91229)}{z - 0.5803}$$

In figura 6.8 vengono riportati i diagrammi di Bode di  $G(\omega)$  (curve (a)), della rete anticipatrice  $D(\omega)$  (curve (b)) e del guadagno d'anello  $D(\omega)G(\omega)$  (curve (c)).

Inoltre in figura 6.9 è mostrata la risposta a gradino del sistema col regolatore

$$D(z) = \frac{4.8146(z - 0.91229)}{z - 0.5803} \quad e \quad \text{la relativa variabile di controllo.}$$

Si noti che la maggiore prontezza rispetto al caso di rete ritardatrice, riportato in figura 6.6, a spese tuttavia di un maggior sforzo di controllo.

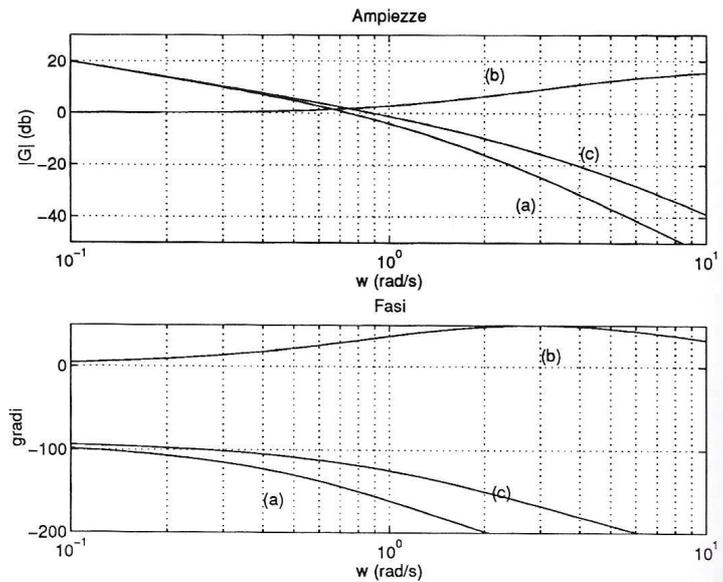


Figura 6.8 Diagrammi di Bode di  $G(\omega)$ , della rete anticipatrice  $D(\omega)$  e del guadagno d'anello  $D(\omega)G(\omega)$

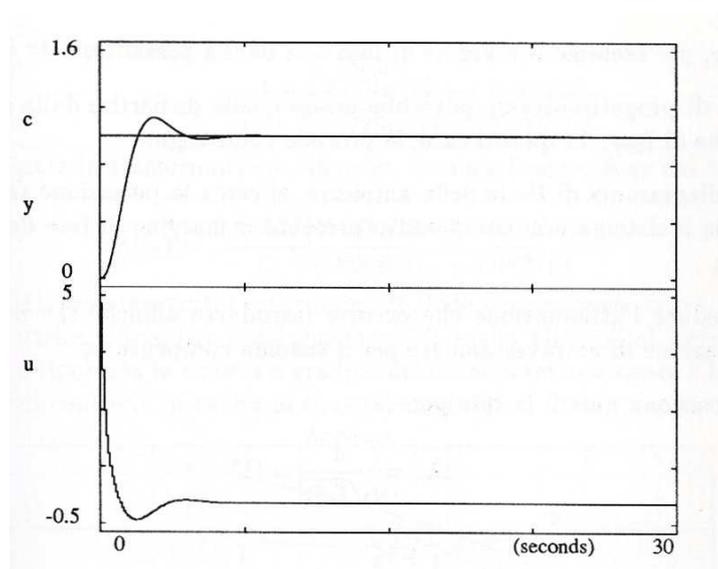


Figura 6.9 Risposta a gradino del processo in retroazione e relativa variabile di controllo

## 6.4 Progetto di rete a ritardo/anticipo (a sella)

Nel seguente paragrafo verranno presentate delle reti correttive più complesse poiché caratterizzate dalla presenza di due poli e due zeri reali.

Il loro utilizzo è consigliabile quando, per raggiungere le specifiche richieste, è necessario effettuare due operazioni opposte sui diagrammi di Bode: il diagramma delle ampezze va abbassato mentre quello delle fasi alzato.

Tali reti, le quali non sono altro che il prodotto di una rete ritardatrice e di una rete anticipatrice, vengono dette reti a sella o reti a ritardo/anticipo.

Esse sono caratterizzate da una funzione di trasferimento del tipo:

$$D(\omega) = \frac{(1 + \tau_1\omega)(1 + \tau_2\omega)}{(1 + (\tau_2/\alpha)\omega)(1 + \alpha\tau_1\omega)} \quad \text{con } 0 < \alpha < 1$$

che introduce alla frequenza  $\Omega_m = \frac{1}{\sqrt{\tau_1\tau_2}}$  uno sfasamento nullo ed un'attenuazione pari a:

$$|D(j\Omega_m)| = \frac{\tau_1 + \tau_2}{(\tau_2/\alpha + \alpha\tau_1)}$$

Per  $\Omega > \Omega_m$  lo sfasamento introdotto è in anticipo, mentre per  $\Omega < \Omega_m$  in ritardo.

Un esempio di andamento frequenziale, che spesso viene adoperato, è quello caratterizzato dai parametri  $\tau_1 = 0.1$  s,  $\tau_2 = 10$  s e  $\alpha = 0.1$ .

Esso viene riportato in figura 6.10.

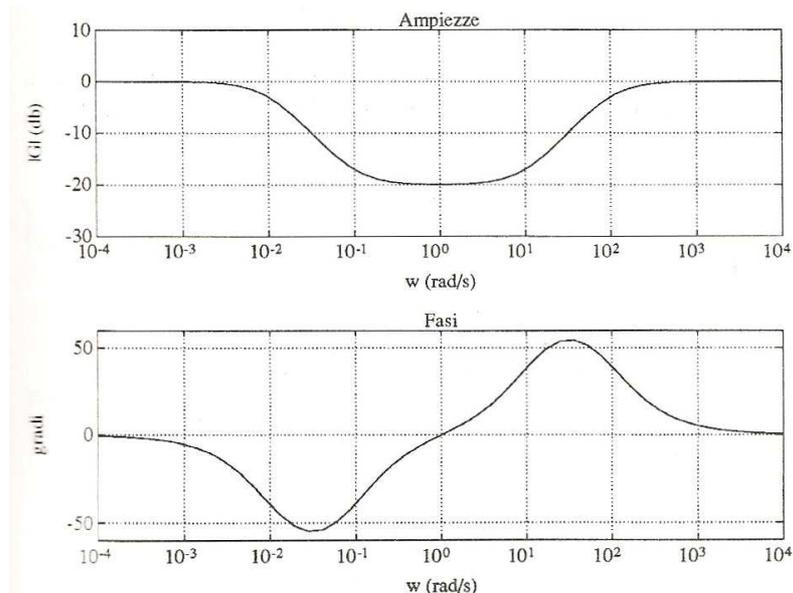


Figura 6.10 Diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi di una rete a ritardo/anticipo

Sfruttando le condizioni legate alle posizioni relative dei poli e zeri di questa rete, il progetto con specifiche sul margine di ampiezza  $M_A$  può essere condotto nel seguente modo:

1. si individua la pulsazione  $\Omega^*$ , dal diagramma di Bode di  $G(\omega)$  eventualmente pre-compensato, alla quale il sistema presenta una fase di  $-180^\circ$  (sempre che esista), ponendo:

$$\Omega_m = \frac{1}{\sqrt{\tau_1\tau_2}} = \Omega^*$$

2. si impone che l'attenuazione introdotta dalla rete alla pulsazione  $\Omega^*$  sia tale che, per il sistema compensato, valga la relazione:

$$|G(j\Omega^*)| \frac{\tau_1 + \tau_2}{(\tau_2/\alpha + \alpha\tau_1)} = \frac{1}{M_A}$$

3. dalle precedenti due relazioni, si può ricavare il valore di  $\tau_1$  e  $\tau_2$  in funzione del terzo parametro  $\alpha$ , che sarà fissato in base ad ulteriori specifiche, per esempio il margine di fase o la banda passante.

Un'alternativa alla tecnica di progetto sopra definita può essere quella che considera la specifica sul margine di fase piuttosto che d'ampiezza.

Il procedimento da seguire in questo caso viene di seguito enunciato:

1. si cerca la pulsazione  $\Omega^+$ , sul diagramma di Bode del modulo, per la quale il sistema non compensato presenta il margine di fase desiderato  $M_{des}$ ;
2. si calcola l'attenuazione necessaria affinché  $\Omega^+$  diventi la pulsazione d'attraversamento del sistema compensato;
3. si posiziona la rete in modo da verificare i seguenti accorgimenti :

$$\Omega_m = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} = \Omega^* \quad \text{e} \quad \frac{\tau_1 + \tau_2}{(\tau_2/\alpha + \alpha \tau_1)} = \frac{1}{|G(j\Omega^+)|}$$

4. si fissa il grado di libertà residuo sulla base d'ulteriori specifiche.

Qualora si volessero ricercare degli aspetti che accomunano le due tecniche progettuali di reti a ritardo/anticipo, si può dire che in entrambi i casi è stato necessario, per la determinazione della rete, fissare  $\Omega_m$  e per tale pulsazione porre il guadagno pari ad una costante:

$$\Omega_m = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} \quad \text{e} \quad \frac{\tau_1 + \tau_2}{(\tau_2/\alpha + \alpha \tau_1)} = k$$

In base poi ai parametri ottenuti, è stato possibile ricavare il valore di  $\tau_1$  e  $\tau_2$  in funzione del terzo parametro  $\alpha$ :

$$\tau_2 = \sqrt{(\alpha - \alpha k^2)/(k - \alpha)} \quad \text{e} \quad \tau_1 = 1/\Omega_m^2 \tau_2$$

#### Esempio 6.4

Si consideri la stessa funzione di trasferimento degli esempi 6.2 e 6.3, con la specifica sul margine di fase della funzione di trasferimento in catena aperta  $M_{des} = 55^\circ$ .

Dai diagrammi di Bode si ricavano i seguenti valori:

$$\Omega^+ = 0.41 \text{ rad/s} \quad \arg[G(j\Omega^+)] = -125^\circ \quad |G(j\Omega^+)| = 2.216$$

per cui si ottiene la rete:

$$D(\omega) = \frac{(1 + 4.6779\omega)(1 + 1.27167\omega)}{(1 + 0.46779\omega)(1 + 12.7167\omega)}$$

che, mediante la trasformazione bilineare, fornisce l'espressione:

$$D(z) = \frac{0.94527(z - 0.97884)(z - 0.92433)}{(z - 0.80687)(z - 0.99216)}$$

In figura 6.11 vengono riportati i diagrammi di Bode di  $G(\omega)$  (curve (a)), della rete anticipatrice  $D(\omega)$  (curve (b)) e del guadagno d'anello  $D(\omega)G(\omega)$  (curve (c)).

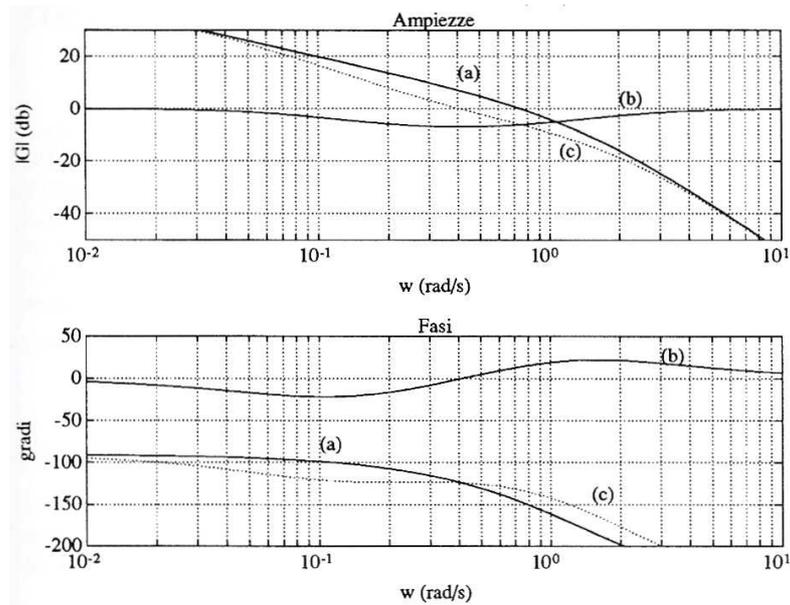


Figura 6.11 Diagrammi di Bode di  $G(\omega)$ , della rete anticipatrice  $D(\omega)$  e del guadagno d'anello  $D(\omega)G(\omega)$

Inoltre in figura 6.12 è mostrata la risposta a gradino del sistema col regolatore  $D(z)$  e la relativa variabile di controllo in uscita al controllore.

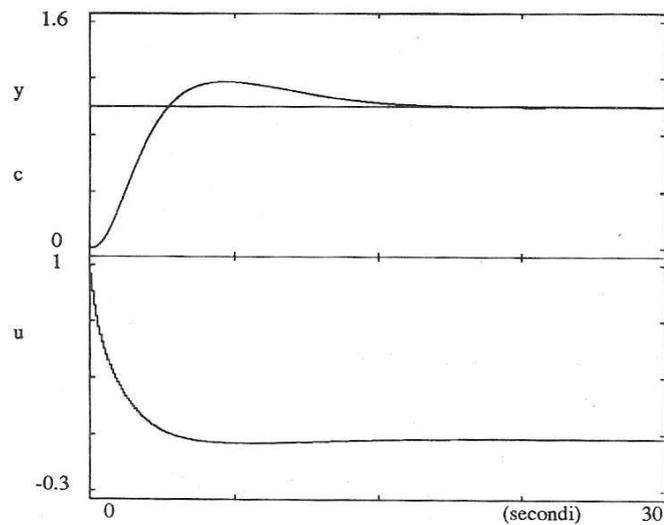


Figura 6.12 Risposta a gradino del processo in retroazione e relativa variabile di controllo per la rete a ritardo/anticipo

Effettuando poi un confronto tra le risposte a gradino e le relative variabili di controllo delle 3 tipologie di reti risulta che nel primo caso si ha il tempo di salita maggiore, nel secondo quello minore ma azione di controllo più ampia, mentre il terzo rappresenta un buon compromesso tra i precedenti.

## Capitolo 7

# Progetto mediante il luogo delle radici

### 7.1 Premessa

La tecnica di progetto mediante il luogo delle radici rappresenta la seconda tecnica analizzata basata sul metodo diretto.

Essa rappresenta un valido complemento ai metodi di sintesi per tentativi basati sulle risposte in frequenza poiché permette di prevedere, anche se solo in termini qualitativi, l'effetto della scelta di una determinata azione compensatrice sulla collocazione dei poli della funzione di trasferimento.

Una situazione, ad esempio, nella quale non è facile ricorrere ai metodi considerati nel capitolo precedente è quella in cui la funzione di trasferimento del processo controllato presenti poli con parte reale positiva.

La tecnica di progetto basata sul luogo delle radici originariamente si è sviluppata nell'ambito del controllo continuo, ma è stato possibile estenderla senza alcuna modifica, tranne per quanto riguarda il dominio di stabilità, al caso di sistemi discreti.

La regione di stabilità si trasforma infatti dal semipiano sinistro del piano complesso  $s$  al cerchio unitario, centrato nell'origine, del piano  $z$ .

La funzione di tale luogo è quella di valutare la posizione nel piano complesso delle radici dell'equazione caratteristica, la quale nei sistemi a controreazione, come quello riportato in figura 7.1, conserva la stessa struttura sia a tempo discreto che a tempo continuo.

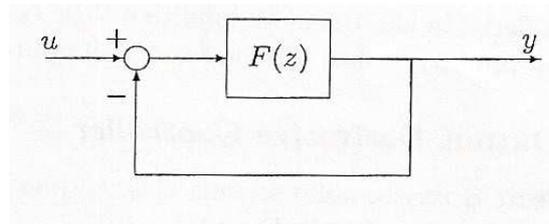


Figura 7.1 Sistema di controllo in controreazione a tempo discreto

Per il precedente tipo di sistema l'equazione caratteristica è:

$$1 + F(z) = 0$$

che risulta essere analoga a quella del sistema di controllo a tempo continuo.

È possibile esprimere la funzione di trasferimento in catena diretta (supposta strettamente propria) in forma di Evans, mettendo in evidenza i poli (indicati nella forma  $p_i$  con  $i = 1, \dots, n$ ), gli zeri (sono  $m < n$  e vengono indicati nella forma  $z_i$  con  $i = 1, \dots, m$ ) ed il coefficiente di guadagno  $K'$ , come:

$$F(z) = K' \frac{\prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)}$$

L'equazione caratteristica associata alla funzione di trasferimento  $F(z)$  produce l'equazione sottostante, detta equazione del luogo delle radici:

$$f(z, K') = \prod_{i=1}^n (z - p_i) + K' \prod_{i=1}^m (z - z_i) = 0$$

Essa può essere riscritta in modo equivalente ricorrendo a due equazioni, rispettivamente dette equazione del modulo ed equazione della fase:

$$\prod_{i=1}^n |z - p_i| = |K'| \prod_{i=1}^m |z - z_i| \quad \text{e} \quad \prod_{i=1}^n \arg[(z - p_i)] - \arg[K'] - \prod_{i=1}^m \arg[(z - z_i)] = (2k + 1)\pi$$

con  $k$  intero arbitrario.

Come accennato in precedenza, lo studio del luogo ha lo scopo d'individuare le posizioni delle radici dell'equazione caratteristica, ovvero i poli del sistema a ciclo chiuso, nel piano complesso, al variare di  $K'$ , usualmente tra  $0$  e  $+\infty$  (luogo positivo delle radici).

La necessità della ricerca di tali radici giace nel fatto che esse influenzano in maniera evidente le prestazioni del sistema di controllo nel suo complesso.

Per quanto concerne il tracciamento del luogo, sono disponibili strumenti software che permettono di ottenere versioni esatte e rapide.

Usualmente però si predilige, salvo la richiesta d'analisi più approfondite, un tracciamento qualitativo.

Per svolgerlo, il progettista ha bisogno di una buona familiarità con le regole del tracciamento, che rappresentano delle indicazioni dedotte dalla struttura analitica dell'equazione, applicabili ad una  $F(z)$  di qualsiasi complessità.

## 7.2 Le regole del tracciamento

Poiché, come detto, il luogo delle radici di  $F(z)$  è il luogo dei punti del piano  $z$  che soddisfano l'equazione:

$$f(z, K') = \prod_{i=1}^n (z - p_i) + K' \prod_{i=1}^m (z - z_i) = 0$$

per ogni valore di  $K'$  fissato, è importante ricordare che tale equazione ha in generale  $n$  soluzioni (non necessariamente distinte), dove  $n$  è il grado della stessa equazione.

Questo implica che il grafico del luogo che ci aspettiamo d'individuare sarà costituito da  $n$  rami, ciascuno dei quali relativo alla posizione nel piano complesso di ognuna delle  $n$  radici al variare di  $K'$ .

E' opportuno ricordare che, le regole riportate, hanno come riferimento soltanto il luogo delle radici positivo, ovvero quello costruito per valori positivi del coefficiente di guadagno.

E' possibile, utilizzando delle regole analoghe a quelle che verranno di seguito descritte, costruire pure il luogo negativo delle radici, il quale sarà caratterizzato ovviamente da valori negativi di  $K'$ .

Non vengono riportate ulteriori informazioni su di esso poiché usualmente la tipologia di luogo utilizzata in esercizi di questo tipo è positivo.

**REGOLA 1:**

Gli  $n$  rami del luogo originano dagli  $n$  poli a ciclo aperto  $p_i$ , caratterizzati dal valore di  $K'$

nullo.

Inoltre, m degli n rami che costituiscono il luogo delle radici convergono sugli zeri a ciclo aperto  $z_i$ , i quali corrispondono al valore  $K' = \infty$ , mentre i rimanenti n-m rami vanno all'infinito asintoticamente.

Tutti i rami vanno contrassegnati con delle frecce che indicano il verso secondo cui si modifica il ramo all'aumentare del coefficiente di guadagno.

REGOLA 2:

Appartengono al luogo tutti i punti dell'asse reale che lasciano alla propria destra un numero dispari di poli e/o zeri della funzione  $F(z)$  contati con la loro molteplicità.

REGOLA 3:

Gli n - m rami che divergono all'infinito, lo fanno secondo asintoti che formano i seguenti angoli:

$$\varphi_k = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} \quad \text{con } k = 0, \dots, n-m-1$$

con l'asse reale del piano complesso.

Da questo deriva che:

- se  $n - m = 1$ , esiste un unico asintoto orientato secondo  $\varphi_1 = \pi$ ;
- se  $n - m = 2$ , esistono due asintoti orientati secondo  $\varphi_1 = \pi/2$  e  $\varphi_2 = 3\pi/2$ ;
- se  $n - m = 3$ , esistono tre asintoti orientati secondo  $\varphi_1 = \pi/3$ ,  $\varphi_2 = 3\pi/2$  e  $\varphi_3 = 5\pi/3$ ;
- .....

REGOLA 4:

Gli asintoti discussi nella REGOLA 3, nel caso  $n - m > 1$ , si incontrano in un punto  $z_0$ , detto centro degli asintoti, calcolabile secondo l'espressione:

$$z_0 = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m}$$

REGOLA 5:

Bisogna tener conto dell'esistenza di valori del parametro  $K'$  in corrispondenza dei quali l'equazione:

$$f(z, K') = \prod_{i=1}^n (z - p_i) + K' \prod_{i=1}^m (z - z_i) = 0$$

non ha tutte radici distinte. Per tali valori, pertanto, esistono soluzioni con molteplicità maggiore di uno. Tali soluzioni possono essere calcolate analiticamente risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} f(z, K') = 0 \\ \frac{\partial f(z, K')}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

o equivalentemente , usando l'equazione:

$$\sum_{i=1}^n 1/(z - p_i) - \sum_{i=1}^m 1/(z - z_i) = 0$$

Inoltre, in corrispondenza dei punti singolari si avrà la confluenza di un numero di rami (o porzioni di essi) pari al doppio della molteplicità del punto singolare stesso.

Si noti anche che l'equazione sopra indicata fornisce tutti i punti singolari, ovvero appartenenti sia al luogo positivo che a quello negativo.

REGOLA 6:

Nell'intorno di ciascun punto singolare di molteplicità  $\mu$ , i rami del luogo sono disposti in modo da formare una stella che divide l'angolo giro in  $2\mu$  settori angolari di ugual ampiezza. Inoltre i rami, o le porzioni di essi, sono alternativamente convergenti e divergenti.

Oltre alle regole sopra citate è importante notare che possono presentarsi delle funzioni di trasferimento con alcune particolarità, come la seguente:

$$F(z) = K' \frac{1}{z(z + a)} \quad \text{con } a > 0$$

Il luogo delle radici relativo a tale funzione per  $a = 2$  e  $K' > 1$  è riportato in figura 7.2 e mostra come sia possibile avere una coincidenza tra gli asintoti ed i rami del luogo, i punti singolari e il centro degli asintoti.

Questo fatto è però esclusivo della funzione di trasferimento in esame e quindi non può essere considerato sempre valido effettuando esempi generici.

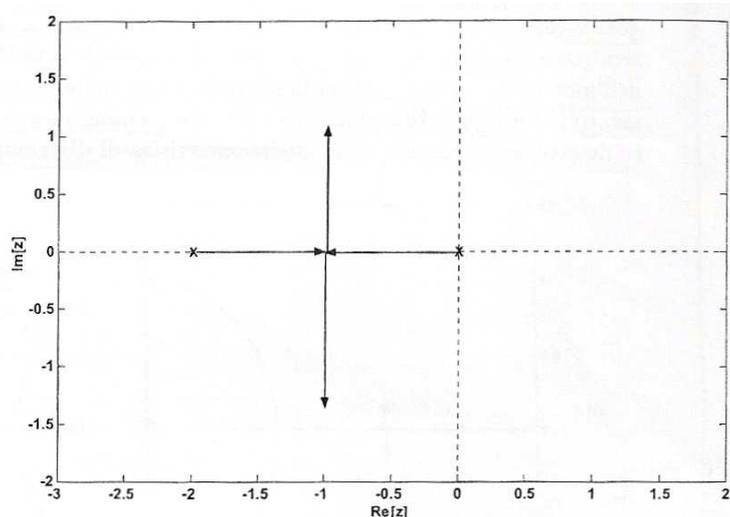


Figura 7.2 Luogo delle radici per  $a=2$  e per valori di  $K > a^2/4$

### 7.3 Esempio di tracciamento di luogo delle radici

Viene di seguito riportato un esempio di tracciamento del luogo delle radici, utilizzando le regole precedentemente esposte.

Si può notare inoltre come tali regole vengano applicate secondo l'ordine sopra enunciato. Si consideri la funzione di trasferimento in catena aperta:

$$F(z) = K' \frac{(z + 0.5)}{(z - 1)(z - 0.5)}$$

Si tracci il relativo luogo delle radici positivo ( $K' > 0$ ), valutando anche la stabilità BIBO del sistema a ciclo chiuso ottenuto per retroazione unitaria negativa da  $F(z)$  al variare del parametro  $K'$ .

La prima azione da svolgere nel tracciamento è quella d'individuare nel piano  $z$  le posizioni dei 2 poli.

Essi sono rispettivamente  $z = 1$  e  $z = 0.5$  e vengono contrassegnati nel grafico con una crocetta.

È presente anche uno zero in  $z = -0.5$ , la cui posizione viene indicata con un cerchietto.

Il luogo sarà costituito da 2 rami, essendo  $n=2$  l'ordine dell'equazione caratteristica associata alla funzione di trasferimento.

Il luogo origina dai due poli individuati e uno dei due rami converge, per  $K' = +\infty$ , verso lo zero.

Come seconda fase, bisogna determinare le porzioni dell'asse reale appartenenti al luogo.

Sulla base della seconda regola si evince che appartengono al luogo positivo sia il segmento reale  $0.5 \leq z \leq 1$  che la semiretta  $z \leq -0.5$ .

Per quanto concerne la valutazione degli asintoti, essendo  $n - m = 1$ , avremo un unico asintoto con fase  $\pi$ .

Per esso non ha senso determinare il centro degli asintoti.

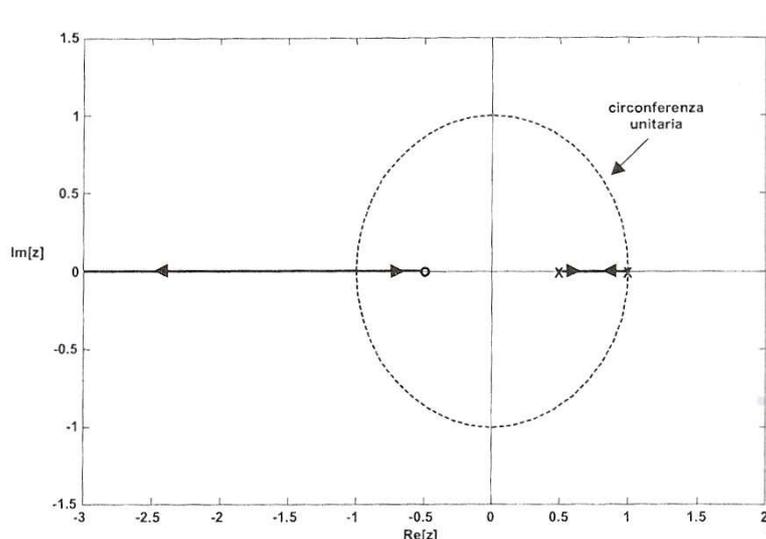


Figura 7.3 Tracciamento preliminare del luogo delle radici

Rimane ora il problema di raccordare le varie porzioni del luogo appena individuate. Intuitivamente è facile immaginare che la presenza di versi contrastanti in corrispondenza di uno stesso segmento dell'asse reale sia sintomo della presenza di un punto singolare collocato in una posizione non determinabile a priori.

Secondo questo ragionamento intuitivo, dunque, si può prevedere la presenza di due punti singolari, di cui uno all'interno del segmento reale tra  $0.5 \leq z \leq 1$ , e l'altro lungo la semiretta reale  $z \leq -0.5$ .

E' possibile anche calcolare analiticamente i punti singolari tramite l'equazione:

$$\sum_{i=1}^n 1/(z - p_i) - \sum_{i=1}^m 1/(z - z_i) = 0 \text{ che equivale a } z^2 + z - 1.25 = 0.$$

Risolvendo l'ultima equazione si trovano i punti singolari  $z \approx 0.725$  e  $z \approx -1.725$ , i quali giacciono nelle zone che si erano individuate qualitativamente.

Ognuno dei due punti costituisce una sorta di raccordo tra due rami del luogo, pertanto la molteplicità di ciascuno di essi è due.

Di conseguenza, occorre prevedere, in corrispondenza ad essi altri due rami o porzioni di ramo per rendere soddisfatta la sesta regola.

Inoltre essi dividono localmente l'angolo giro in 4 parti uguali, formando angoli di  $\pi/2$ .

Come ultimo passo, rimane ora soltanto da raccordare tra di loro i rami abbozzati, coerentemente con i versi indicati.

Il luogo delle radici conclusivo è quello riportato in figura 7.4.

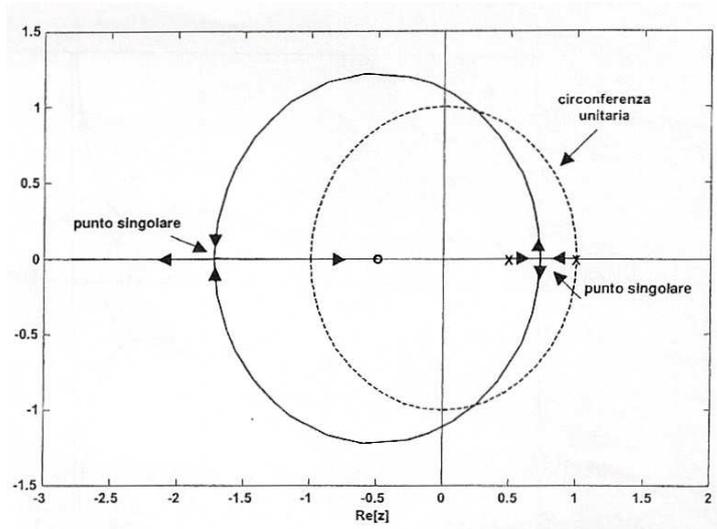


Figura 7.4 Tracciamento finale del luogo delle radici

In base al luogo delle radici appena tracciato, possiamo dire che le radici giacciono all'interno della circonferenza unitaria per valori del parametro compresi tra  $K_1' = 0$  e il valore del parametro  $K_2'$  corrispondente all'intersezione tra la circonferenza unitaria e il luogo stesso. Possiamo quindi dedurre che il sistema a ciclo chiuso è BIBO stabile nell'intervallo indicato, estremi esclusi.

Per quanto concerne il calcolo di  $K_2'$ , esso può essere svolto sia in maniera approssimata sia in maniera esatta.

Vengono esplicitati entrambi i procedimenti, relativi al precedente esempio, nel paragrafo sottostante.

## 7.4 Calcolo nell'intervallo di stabilità del parametro

Il calcolo dell'intervallo di stabilità, come detto in precedenza, può essere svolto in modo approssimato, ricorrendo a uno studio grafico del luogo delle radici.

L'approssimazione consiste nel considerare che il luogo si disponga esattamente come una circonferenza tra i punti singolari posti in  $z \approx 0.725$  e  $z \approx -1.725$ .

E' quindi ragionevole approssimare il luogo come una circonferenza centrata nel punto medio tra i due punti singolari (e quindi di parte reale pari a  $(-1.725 + 0.725) / 2 = -0.5$ ), e di raggio pari a  $0.5 + 0.725 = 1.225$ .

In altre parole, ponendo  $z = \alpha + j\beta$ :

$$(\alpha + 0.5)^2 + \beta^2 = 1.225^2$$

e risolvendo il sistema sottostante:

$$\begin{cases} (\alpha + 0.5)^2 + \beta^2 = 1.225^2 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 1 \end{cases}$$

si ottengono i seguenti punti nel piano complesso:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.25 \\ \beta &= \sqrt{0.75} \approx \pm 0.866 \end{aligned}$$

che sono le coordinate delle intersezioni tra le due circonferenze.

Infine, è necessario determinare i valori di  $K'$  corrispondenti ai punti trovati.

Per fare ciò, è possibile utilizzare l'equazione del modulo, esplicitando il parametro  $|K'|$ .

In questo modo si ottiene:

$$|K'| = \frac{\prod_{i=1}^n |z - p_i|}{\prod_{i=1}^m |z - z_i|}$$

e sostituendo  $z = -0.25 + j0.866$  nell'espressione precedente, risulta:

$$|K'| = \frac{|(0.25 + j0.866 - 1)(0.25 + j0.866 - 0.5)|}{|0.25 + j0.866 + 0.5|} = |-0.25 + j0.866| \approx 0.9$$

E' facile dimostrare che, utilizzando la radice coniugata  $\alpha - j\beta$ , cioè  $z = -0.25 - j0.866$ , si giunge allo stesso risultato:

$$|K'| = \frac{|(0.25 - j0.866 - 1)(0.25 - j0.866 - 0.5)|}{|0.25 - j0.866 + 0.5|} = |-0.25 - j0.866| \approx 0.9$$

Quindi, trattandosi di luogo positivo delle radici, vale  $K_2' = 0.9$ .

Alternativamente, per calcolare in modo esatto gli estremi  $K'_1$  e  $K'_2$  dell'intervallo del parametro  $K'$  per il quale è garantita la stabilità BIBO del sistema a ciclo chiuso, basta applicare il criterio di Jury al polinomio caratteristico del sistema.

Il criterio di Jury è un criterio algebrico in grado di stabilire se le radici di un polinomio assegnato sono tutte con modulo minore di uno.

Per enunciare tale criterio, si faccia riferimento ad un generico polinomio  $d(z)$ :

$$d(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

a partire dal quale è possibile la costruzione di una tabella opportuna, detta appunto tabella di Jury.

Tale tabella è costruita nella seguente maniera:

- La prima riga si costruisce usando i coefficienti del polinomio a partire dal coefficiente  $a_0$  associato al termine di grado zero.
- La seconda riga si costruisce usando i coefficienti del polinomio a partire dal coefficiente  $a_n$  associato al termine di grado  $n$  (cioè i coefficienti vanno inseriti in ordine inverso rispetto alla riga precedente).
- Le due righe successive alla seconda si costruiscono sulla base delle due righe immediatamente precedenti secondo lo schema seguente:

riga 1	a <sub>0</sub> a <sub>1</sub> a <sub>2</sub> ... a <sub>n</sub>
riga 2	a <sub>n</sub> a <sub>n-1</sub> a <sub>n-2</sub> ... a <sub>0</sub>
riga 3	b <sub>0</sub> b <sub>1</sub> ... b <sub>n-1</sub>
riga 4	b <sub>n-1</sub> b <sub>n-2</sub> ... b <sub>0</sub>
...	
riga 2n-4	p <sub>3</sub> p <sub>2</sub> p <sub>1</sub> p <sub>0</sub>
riga 2n-3	q <sub>0</sub> q <sub>1</sub> q <sub>2</sub>

dove i coefficienti  $b_i$  hanno la forma:

$$b_i = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-i} \\ a_n & a_i \end{vmatrix} \quad \text{con } i = 0, \dots, n-1$$

- I coefficienti di tutte le righe successive alla riga 4 si calcolano in modo analogo usando le due righe immediatamente precedenti.  
Nel caso dell'ultima riga indicata in tabella si ha, ad esempio:

$$q_i = \begin{vmatrix} p_0 & p_{3-i} \\ p_3 & p_i \end{vmatrix} \quad \text{con } i = 0, 1, 2$$

- La tabella contiene  $2n - 3$  righe, cioè termina quando si arriva a formare una riga costituita da 3 elementi.

Una volta costruita la tabella corrispondente, il Criterio di Jury può essere enunciato come segue:

*Si assuma  $a_n > 0$  nel polinomio  $d(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ .*

*Le radici del polinomio  $d(z)$  hanno tutte modulo minore di uno se sono soddisfatte tutte le seguenti condizioni:*

1.  $|a_0| < a_n$ ;
2.  $d(z)|_{z=1} > 0$ ;
3.  $(-1)^n d(z)|_{z=-1} > 0$ ;
4.  $\begin{cases} |b_0| > |b_{n-1}| \\ \dots \\ |q_0| > |q_2| \end{cases}$

E' utile notare che, poiché le condizioni 1-3 possono essere valutate senza la costruzione dell'intera tabella di Jury, qualora non siano soddisfatte è inutile proseguire, in quanto è possibile già stabilire che il polinomio ha almeno una radice con modulo maggiore od uguale ad uno.

Nell'esempio in cui  $F(z) = \frac{K'(z + 0.5)}{(z - 1)(z - 0.5)}$ , il polinomio caratteristico del relativo sistema in catena chiusa è:

$$d(z) = (z - 1)(z - 0.5) + K'(z + 0.5) = z^2 + (K' - 1.5)z + 0.5(K' + 1) = 0$$

Essendo tale polinomio di ordine due, l'applicazione del criterio stesso è banale. Infatti, le condizioni 1-3 del teorema sopra definito danno:

1.  $|a_0| < a_n$ ;  $\rightarrow |0.5(K' + 1)| < 1$  ;
2.  $d(z)|_{z=1} = 1.5K' > 0$  ;
3.  $(-1)^2 d(z)|_{z=-1} = 3 - 0.5K' > 0$  ;

Per risolvere facilmente la condizione 1 è possibile elevare al quadrato entrambi i membri della disuguaglianza:

$$|0.5(K' + 1)|^2 < 1$$

e ciò fornisce come soluzione l'intervallo  $-3 < K' < 1$ .

Dalla condizione 2 si ottiene semplicemente  $K' > 0$ , mentre la 3 produce  $K' < 6$ .

Deduciamo quindi che l'intervallo del parametro  $K'$ , garante della stabilità a ciclo chiuso è  $K_1' = 0 < K' < K_2' = 1$ .

Possiamo concludere quindi che l'approssimazione sopra utilizzata è molto simile al caso esatto, in quanto il valore di  $K_2'$  determinato approssimativamente è molto vicino al valore  $K_2' = 1$  trovato con il criterio di Jury.

## 7.5 Il progetto del controllore con il luogo delle radici

La sintesi tramite il luogo delle radici avviene, come accennato in precedenza, per tentativi.

Infatti il punto di partenza della procedura consiste nel tracciamento preliminare del luogo delle radici del processo, a cui si antepone un compensatore (quindi un controllore) di primo tentativo progettato in modo da garantire il soddisfacimento di alcune specifiche, come quelle relative al tipo di sistema.

Successivamente bisogna semplicemente manipolare il luogo così ottenuto, tramite l'aggiunta di poli e/o zeri in numero tale da soddisfare le specifiche richieste, garantendo comunque la fisica realizzabilità del controllore nel suo complesso.

### Esempio 7.1

Si consideri lo schema di figura 7.5, in cui il processo  $G(z)$  è descritto da:

$$G(z) = \frac{(z + 0.5)}{(z - 0.7)(z - 0.2)}$$

Progettare il compensatore  $D(z)$  in modo che:

- il sistema sia di tipo 1
- le radici a ciclo chiuso abbiano tutte modulo inferiore a 0.6

Per soddisfare la prima specifica è necessario constatare di quale tipo è il sistema originale. Prima di soffermarci su questo caso in particolare viene data la definizione di tipo del sistema nel caso continuo, e poi in quello discreto.

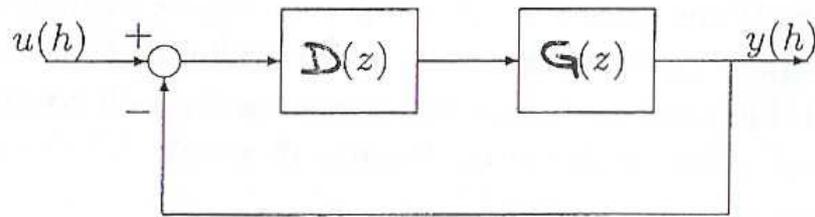


Figura 7.5 Sistema di controllo in controeazione a tempo discreto

Dato il sistema  $G(s)$  si definisce tipo del sistema il numero  $N$  di poli di  $G(s)$  presenti nell'origine, ossia il valore di  $N$ .

Si hanno così sistemi di tipo 0, di tipo 1,2, etc.

Nel caso discreto la definizione di tipo fa riferimento al numero di poli nel punto  $z = 1$ .

Ritornando all'esempio 7.1, la specifica 1 richiede l'introduzione di un polo in  $z = 1$ , essendo il sistema originario di zero.

Si prevede quindi un compensatore di primo tentativo  $D'(z)$  del tipo:

$$D'(z) = \frac{K'}{z - 1}$$

e si procede al tracciamento del luogo delle radici della cascata processo controllore di primo tentativo:

$$F(z) = D'(z)G(z) = K' \frac{(z + 0.5)}{(z - 1)(z + 0.7)(z - 0.2)}$$

mostrato in figura 7.6

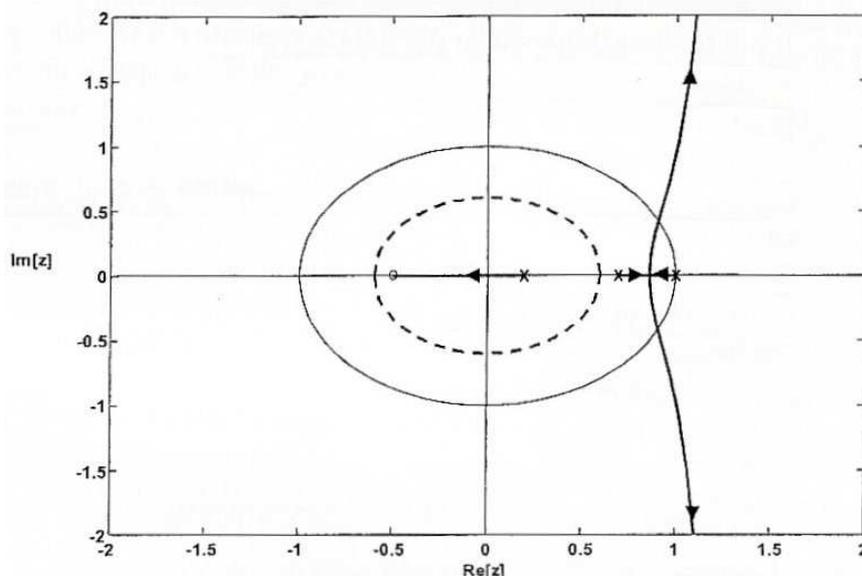


Figura 7.6 Luogo delle radici di primo tentativo

Si può notare come i rami che tendono verso i due asintoti centrati in  $z_0 = 1.2$  siano esterni alla zona d'interesse, rappresentata dal cerchio di raggio 0.6, contrassegnato con un tratteggio.

Per soddisfare la specifica richiesta potrebbe essere conveniente ridurre il numero degli asintoti da due a uno, col fine di portare i rami del luogo nella zona desiderata.

Si procede quindi con la riduzione dell'eccesso poli-zeri n-m, preservando la realizzabilità fisica del compensatore. Una soluzione abbastanza ovvia ed immediata consiste nell'aggiunta di uno zero  $z = r$  nella  $G'(z)$ , ottenendo così:

$$D''(z) = D'(z) (z - r) = K' \frac{(z - r)}{(z - 1)}$$

Il luogo della funzione compensata non soddisfa le specifiche, principalmente a causa del fatto che il punto singolare, presente nel semiasse reale a sinistra dello zero in  $z = -0.5$ , cade al di fuori della circonferenza di raggio 0.6.

La soluzione proposta potrebbe essere soddisfacente se si potesse vincolare tale punto singolare, forzandolo a cadere nella regione di specifica.

Il grado elevato dell'equazione dei punti singolari associato al caso in esame ( $n + m - 1 = 4$ ) rende però difficoltosa una soluzione del genere.

E' interessante notare che si può facilmente arrivare ad una semplificazione del problema se si effettua la cancellazione zero-polo interna alla zona di specifica, ovvero se si considera un compensatore del tipo:

$$D'''(z) = K' \frac{(z - 0.2)(z - r)}{(z + 0.5)(z - 1)}$$

In tal caso si ottiene il luogo riportato in figura 7.7 , che presenta la seguente funzione di trasferimento in catena aperta:

$$F'''(z) = D'''(z)G(z) = K' \frac{(z - r)}{(z - 1)(z - 0.7)}$$

Nel grafico sottostante si è scelto di porre  $r = 0.6$ , in modo da trovare il punto singolare all'interno della regione di specifica.

Questa è una scelta arbitraria ma piuttosto ragionevole, in quanto è da preferire una collocazione dello zero in  $z = r$  quanto più a destra possibile, in modo che il punto singolare cada nella zona dell'asse reale compresa tra -0.6 e +0.6, estremi inclusi.

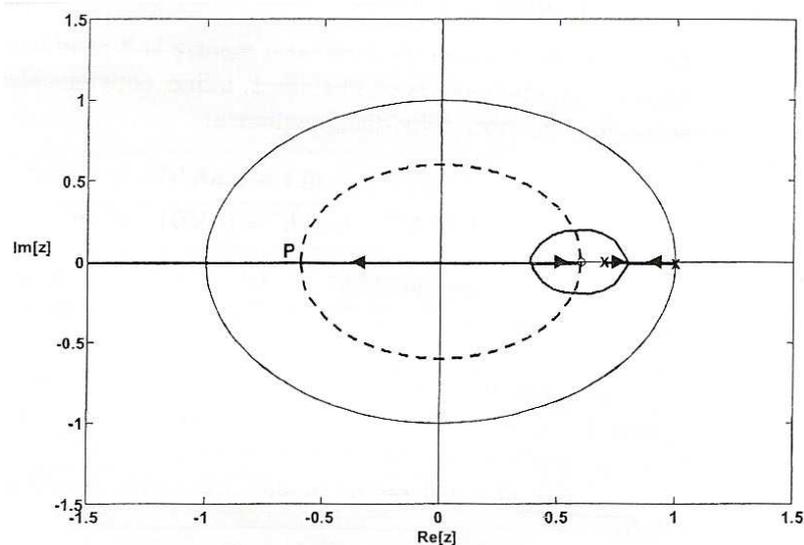


Figura 7.7 Tracciamento del luogo delle radici con il compensatore  $D'''(z)$

Qualora si preferisca utilizzare un metodo più corretto, si può adoperare l'equazione dei punti singolari, da cui risulta:

$$\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-0.7} + \frac{1}{z-r} = 0 \quad \rightarrow \quad z^2 - 2rz + (1.7r - 0.7) = 0$$

Le soluzioni di tale equazione sono le seguenti:

$$z_{1,2} = r \pm \sqrt{r^2 - 1.7r + 0.7}$$

Si ottiene il discriminante positivo per  $r < 0.7$  oppure  $r > 1$ , ma l'ultima condizione enunciata non viene accettata in quanto, in base alle specifiche indicate nel testo, non ha senso considerare un ramo esterno alla circonferenza unitaria.

Inoltre, non ha senso scegliere soluzioni con  $r > 0.6$ , in quanto si andrebbe a considerare una zona esterna alla regione d'interesse.

Tenendo presente le condizioni discusse, proviamo ora a determinare i valori di  $r$  tali che:

$$r - \sqrt{r^2 - 1.7r + 0.7} = 0.4$$

supponendo di voler vincolare il punto singolare in  $z = 0.4$ .

Risolviendo l'equazione, si ottiene proprio  $r = 0.6$ , che soddisfa le condizioni precedentemente indicate.

Determinato lo zero  $z = r = 0.6$ , l'ultima fase del progetto consiste nel far soddisfare al sistema la seconda specifica.

Per adempiere a tale funzione si utilizza il criterio di Jury, dopo aver applicato la trasformazione  $z = 0.6\zeta$  al polinomio caratteristico del sistema:

$$d(\zeta) = (0.6\zeta - 1)(0.6\zeta - 0.7) + K'(0.6\zeta - 0.6) = 0.36\zeta^2 + (0.6K' - 1.02)\zeta + (0.7 - 0.6K')$$

Considerando il polinomio  $d(\zeta)$ , le condizioni 1-3 del teorema di Jury forniscono:

1.  $|a_0| < a_n \quad \rightarrow \quad |0.7 - 0.6K'| < 0.36$
2.  $d(\zeta)|_{\zeta=1} = 0.04 > 0$
3.  $(-1)^2 d(\zeta)|_{\zeta=-1} = 2.08 - 1.2K' > 0$

Per trovare i valori utili di  $K'$  della condizione 1 è consigliabile elevare al quadrato entrambi i membri della disuguaglianza e risolvendola si ottiene:

$$|0.7 - 0.6K'|^2 < 0.36^2 \quad \rightarrow \quad 0.36K'^2 - 0.84K' + 0.364 < 0$$

L'intervallo fornito da tale condizione è  $0.567 < K' < 1.767$ .

Inoltre la condizione 2 è sempre verificata, mentre la 3 produce  $K' < 1.733$ .

Deduciamo quindi che l'intervallo del parametro  $K'$  che garantisce la stabilità del sistema a ciclo chiuso è:

$$K'_1 = 0.576 < K' < 1.733 = K'_2$$

## Esempio 7.2

Si consideri lo schema di figura 7.8, in cui il processo e' descritto da:

$$G(s) = \frac{1}{(s - 0.2)}$$

Assumendo un periodo di campionamento  $T = 1$  s, si vuole progettare il compensatore  $D(z)$  in modo che il sistema a ciclo chiuso sia:

- di tipo 1
- BIBO stabile

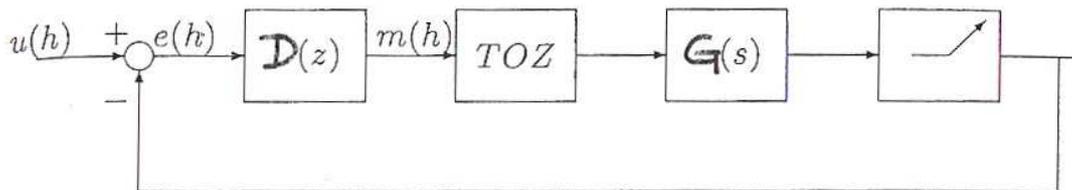


Figura 7.8 Sistema di controllo a dati campionati

Innanzitutto è necessario dire che, facendo riferimento allo schema in retroazione con campionamento sopra riportato, il tracciamento del luogo delle radici mette in evidenza come la stabilità si deteriori all'aumentare del periodo di campionamento.

Per quanto riguarda lo svolgimento del progetto vero e proprio, come primo passo dobbiamo determinare la funzione di trasferimento discreta  $G(z)$  equivalente alla cascata dell'holder (rappresentato nello schema a blocchi dalla sigla TOZ) e del processo  $G(s)$ , sottoposto ad un campionatore.

Definendo:

$$Q(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{1}{s(s - 0.2)}$$

si ha che, scomponendo in fratti semplici la  $Q(s)$ , si ottiene:

$$Q(s) = -\frac{5}{s} + \frac{5}{s - 0.2}$$

da cui antitrasformando e ponendo  $t = hT$  per evidenziare il valore del segnale agli istanti di campionamento, si ricava:

$$q(t)|_{t=hT} = 5(-1 + e^{0.2hT})\delta_{-1}(h) = 5(-1 + e^{0.2h})\delta_{-1}(h), \text{ dove } \delta_{-1}(h) \text{ rappresenta il gradino unitario.}$$

Passando nel dominio della trasformata zeta si ha:

$$Q(z) = \left[ -5 \frac{z}{z - 1} + 5 \frac{z}{z - e^{0.2}} \right]$$

pertanto la funzione di trasferimento  $G(z)$  cercata è:

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \left[ -5 \frac{z}{z - 1} + 5 \frac{z}{z - e^{0.2}} \right] \approx \frac{1.11}{z - e^{0.2}} \approx \frac{1.11}{z - 1.22}$$

La specifica 1 richiede l'introduzione di un polo in  $z=1$ , essendo il sistema originario di tipo zero.

Si prevede quindi un compensatore di primo tentativo  $D'(z)$  del tipo:

$$D'(z) = \frac{K'}{z-1}$$

e si procede al tracciamento del luogo delle radici della cascata processo – controllore di primo tentativo:

$$F'(z) = D'(z)G(z) = \frac{K'}{(z-1)(z-1.22)}$$

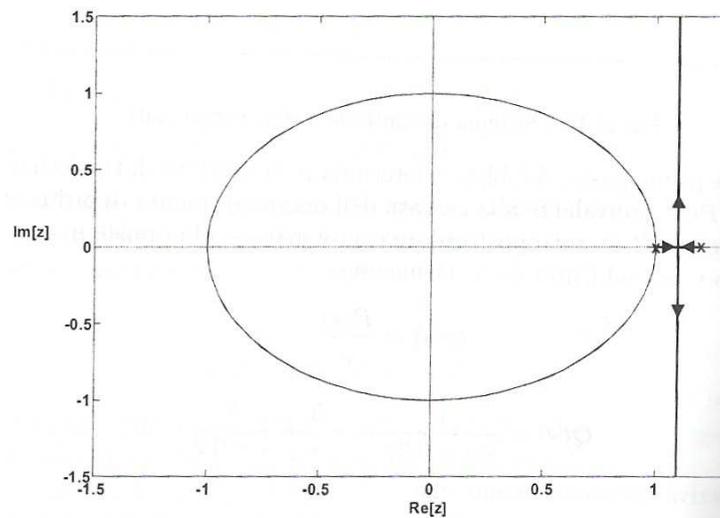


Figura 7.9 Tracciamento del luogo delle radici di primo tentativo

Osservando la figura 7.9 si può vedere come i rami tendenti agli asintoti, orientati a  $\pm \pi/2$  e centrati in  $z_0 = 1.11$ , siano completamente esterni alla zona di specifica, costituita dalla circonferenza di raggio unitario.

Una soluzione del problema consiste nel ridurre il numero degli asintoti a uno, con lo scopo di portare nella zona desiderata i rami.

Per raggiungere questo scopo è necessario ridurre l'eccesso dei poli-zeri  $n-m$ , preservando tuttavia la fisica realizzabilità del compensatore.

Una soluzione possibile consiste nell'inserire uno zero in  $r$  nel compensatore  $D'(z)$ , ottenendo:

$$D''(z) = K' \frac{z-r}{z-1}$$

Il luogo complessivo risultante è riportato in figura 7.10 nel caso  $r = 0.8$ .

La scelta di  $r$  praticata è giustificata dalla volontà da parte del progettista di portare il punto singolare all'interno della regione di specifica.

Con il precedente valore di  $r$  i punti singolari possono essere calcolati tramite l'equazione:

$$\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-1.2} + \frac{1}{z-0.8} = 0 \quad \rightarrow \quad z^2 - 1.6z + 0.56 = 0$$

e risultano quindi essere pari a  $z = 1.083$  e  $z = 0.517$ .

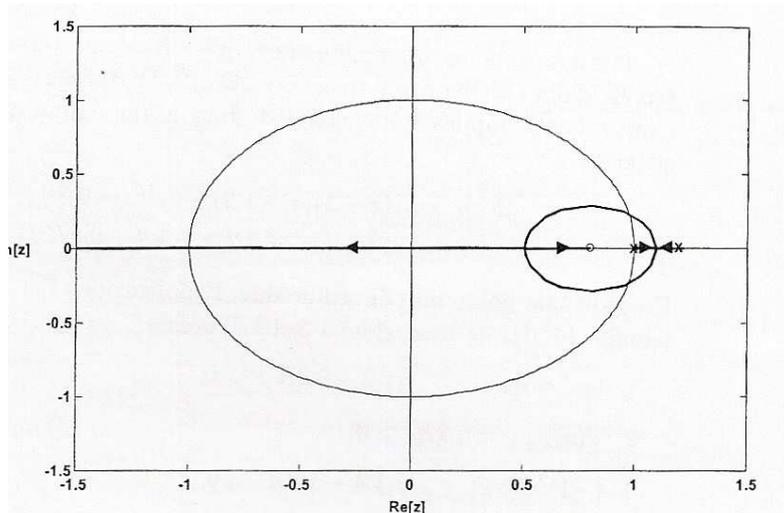


Figura 7.10 Tracciamento finale del luogo

Infine, per soddisfare la seconda specifica, è necessario applicare il criterio di Jury al polinomio del sistema:

$$d(z) = (z - 1)(z - 1.2) + K'(z - 0.8) = z^2 + (K' - 2.2)z + 1.2 - 0.8K' = 0$$

Poiché tale polinomio presenta ordine due l'applicazione del criterio di Jury è banale. Le condizioni 1-3 del teorema sono:

1.  $|a_0| < a_n \quad \rightarrow \quad |1.2 - 0.8K'| < 1$
2.  $d(z)|_{z=1} = 0.2K' > 0$
3.  $(-1)^2 d(z)|_{z=-1} = 4.4 - 1.8K' > 0$

Per valutare la condizione 1 è utile elevare al quadrato entrambi i membri della disuguaglianza:

$$|1.2 - 0.8K'|^2 < 1 \quad \rightarrow \quad 0.64K'^2 - 1.92K' + 1.44 < 1$$

che fornisce l'intervallo  $0.25 < K' < 2.75$ .

Dalla condizione 2 si deduce subito che la soluzione ricercata è  $K' > 0$ , mentre la 3 produce  $K' < 2.44$ .

Si può concludere quindi che l'intervallo di stabilità è  $K'_1 = 0.25 < K' < 2.44 = K'_2$ .

Come nell'esempio 7.1, è possibile dire per quale valore di  $K'$  l'equazione caratteristica  $d(z)$  passa per il punto -1.

$$d(z) = (z - 1)(z - 1.2) + K'(z - 0.8)|_{z=-1} = 0 \quad \rightarrow \quad K' = K'_2 = 2.44$$

Si nota che, come ci si poteva aspettare, tale valore è prossimo a quello di  $K'_2$  ottenuto con il criterio di Jury.

# Capitolo 8

## Progetto con metodi analitici

In questo capitolo si illustrano alcuni metodi analitici per la sintesi delle leggi di controllo digitale.

Si considera dapprima il regolatore come un sistema dinamico ad una uscita (variabile manipolabile) e due ingressi (segnale di riferimento e variabile controllata) e si considera come specifica di progetto la funzione di trasferimento ad anello chiusa desiderata: il problema è dunque quello dell'assegnamento dei poli e degli zeri ammissibili.

Successivamente, riducendosi al caso in cui all'ingresso del regolatore sia presente la sola variabile errore si sviluppa il progetto particolare con specifiche "deadbeat", ossia specifiche sulle risposte ai segnali di prova (gradino, rampa,..) caratterizzate da errore a regime nullo, tempo d'assestamento minimo ed eventuale assenza di oscillazioni fra gli istanti di campionamento.

Infine si introducono alcune tecniche semplificate di sintesi analitica, quali deadbeat a totale cancellazione, sintesi alla Dahlin e con specifica diretta sulla variabile di controllo.

### 8.1 Progetto per assegnamento poli-zeri

Si consideri lo schema di figura 8.1, dove il sistema da controllare è descritto da una funzione di trasferimento discreta:

$$G_p(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

dove  $B(z)$  e  $A(z)$  sono due polinomi in  $z$  primi tra di loro e di grado, rispettivamente  $m$  ed  $n$ .

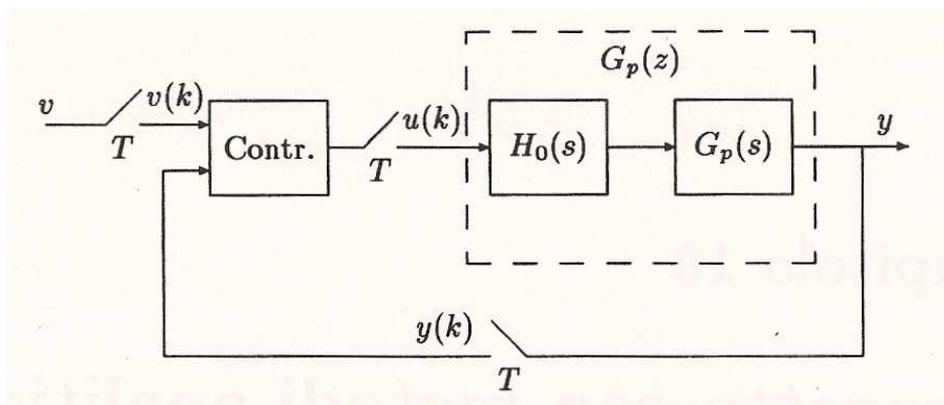


Figura 8.1 Processo  $G_p(z)$  controllato in retroazione

Poiché supponiamo che il sistema considerato sia causale,  $n \geq m$  e la differenza tra i due termini esprime il ritardo in tempo, in multipli di  $T$ , nel processo.

Lo scopo che ci si prefigge è di progettare un controllore discreto per il quale la relazione (in termini di trasformate zeta) tra l'uscita  $u(k)$  e gli ingressi  $v(k)$  e  $y(k)$  è descritta dall'equazione:

$$R(z)U(z) = T(z)V(z) - S(z)Y(z)$$

in cui  $V(z)$  rappresenta la trasformata zeta della variabile di riferimento e  $R(z)$ ,  $S(z)$  e  $T(z)$  opportuni polinomi in  $z$ .

Nella formula appena descritta è presente la combinazione tra due componenti.

La prima è una retroazione con funzione di trasferimento  $S(z)/R(z)$  mentre la seconda è un'azione in avanti (feedforward) descritta dalla funzione di trasferimento  $H_{ff}(z) = T(z)/R(z)$ .

Perché sia assicurata la causalità è necessario che, nelle funzioni di trasferimento sopra citate, il numeratore abbia grado maggiore o uguale al denominatore.

Si ha quindi:

$$\text{grado}(R) \geq \text{grado}(T)$$

$$\text{grado}(R) \geq \text{grado}(S)$$

In pratica, qualora si trascuri il ritardo d'elaborazione come usualmente capita, si richiede:

$$\text{grado}(R) = \text{grado}(T) = \text{grado}(S)$$

oppure, se il tempo d'elaborazione è comparabile con un periodo di campionamento:

$$\text{grado}(R) = 1 + \text{grado}(T) = 1 + \text{grado}(S)$$

Il sistema  $G_p(z)$  chiuso in retroazione con il controllore precedentemente descritto è rappresentato in figura 8.2.

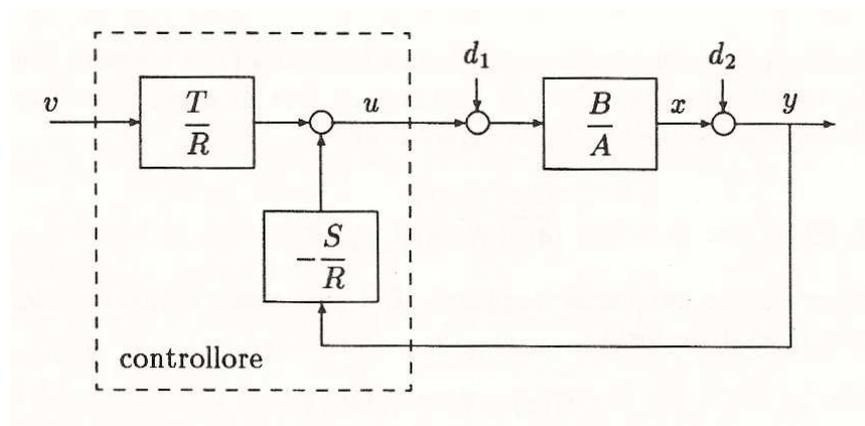


Figura 8.2 Processo  $G_p(z)$  chiuso in retroazione con il controllore  $R(z)U(z) = T(z)V(z) - S(z)Y(z)$

La funzione di trasferimento del sistema retroazionato che si ottiene è la seguente:

$$\frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{BT}{AR + BS}$$

L'obiettivo del progetto è quello di imporre che la suddetta sia uguale ad una specifica funzione di trasferimento:

$$G_m(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)}$$

dove sia  $A_m(z)$  che  $B_m(z)$  sono polinomi coprimi e verificano la condizione:

$$\text{grado}(A_m) - \text{grado}(B_m) \geq \text{grado}(A) + \text{grado}(B)$$

la quale implica che il ritardo del sistema ad anello chiuso sia superiore di quello ad anello aperto.

È opportuno anche dire che nel seguente tipo di sistema possono essere presenti delle dinamiche, dette dell'osservatore, le quali vengono specificate per mezzo dell'introduzione di un polinomio  $A_0(z)$  stabile nella funzione di trasferimento, in modo che essa valga:

$$G_m(z) = \frac{B_m(z)A_0(z)}{A_m(z)A_0(z)}$$

Inoltre la scelta di  $A_0(z)$  è molto importante perché influenza l'uscita tra  $Y(z)$  ed i segnali di disturbo.

Al fine di avere piccoli errori per disturbi a bassa frequenza, il guadagno d'anello:

$$\left. \frac{B(z)S(z)}{A(z)R(z)} \right|_{z=e^{j\omega T}} \quad \text{deve essere elevato per } \omega \rightarrow 0$$

Ne segue un controllo di tipo integrale, nella forma  $R(z) = (z - 1)^q R_1(z)$ .

Se i polinomi  $S(z)$  e  $T(z)$  sono uguali, la legge di controllo diventa:

$$R u = S(v - y) = S e$$

dove  $e = v - y$  indica l'errore d'inseguimento.

Il problema di progetto consiste quindi nella ricerca dei polinomi  $T$ ,  $S$  e  $R$  che soddisfano la funzione di trasferimento specifica  $G_m(z)$  ed opportuni vincoli sulle specifiche, che verranno approfonditi nel paragrafo successivo.

## 8.2 Vincoli sulle specifiche

Nella definizione della specifica ad anello chiuso sono presenti alcuni vincoli, come già anticipato nel paragrafo precedente.

Infatti, affinché un fattore di  $B$  non sia un fattore di  $B_m$ , esso deve essere un fattore di  $AR + BS$ . Ciò implica che sia possibile effettuare delle cancellazioni tra gli zeri di  $B$  e quelli di  $AR + BS$ .

Tuttavia, essendo le cancellazioni approssimative, solo gli zeri stabili di  $B$  possono essere rimossi. Fattorizzando  $B$  come:

$$B = B^+ B^-$$

dove  $B^+$  rappresenta il fattore stabile poiché i suoi zeri sono tutti dentro il cerchio con raggio unitario, e  $B^-$  indica il fattore instabile, in quanto gli zeri hanno modulo maggiore o uguale a quello unitario, le precedenti considerazioni ci dicono che  $B^-$  non può essere rimosso, e quindi dovrà comparire nella fattorizzazione  $B_m = B'_m B^-$ .

In altre parole, gli zeri instabili del sistema in catena aperta devono rimanere zeri del sistema retroazionato.

Si noti che la presenza di zeri a modulo maggiore di uno (ossia  $B^- \neq 1$ ) in  $G_p(z)$  dipende in modo notevole dal valore del periodo di campionamento  $T$  usato nello schema 8.1 per discretizzare la funzione  $G_p(s)$ :

$$G_p(z) = Z \left[ \frac{1 - e^{-sT}}{s} G_p(s) \right]$$

Indicando con  $l$  la differenza tra il numero di poli e di zeri di  $G_p(s)$ , si può verificare che:

$$\lim_{T \rightarrow 0} G_p(z) = Z \left[ \frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{1}{s^l} \right]$$

Inoltre per quanto concerne il secondo membro dell'equazione, si può facilmente dimostrare che per periodi di campionamento infinitesimi e per  $l \geq 3$  è presente almeno uno zero instabile.

Il fattore stabile  $B^+$  può invece essere cancellato imponendo che sia un fattore di  $AR + BS$ .

Ciò comporta che:

$$R = B^+ R'$$

L'equazione indicante l'obiettivo del progetto può essere riscritta nella forma:

$$\frac{B^+ B'^T}{B^+(AR' + B'S)} = \frac{B^- B'_m}{A_m}$$

che si riduce a:

$$\frac{T}{AR' + B'S} = \frac{B'_m}{A_m}$$

Inoltre, tenendo conto della dinamica dell'osservatore  $A_0$ , la condizione appena espressa si traduce nelle due equazioni di progetto:

$$\begin{aligned} AR' + SB^- &= A_0 A_m \\ T &= A_0 B'_m \end{aligned}$$

Conseguentemente, l'equazione caratteristica dell'anello risulta:

$$AR + BS = B^+ A_0 A_m = 0$$

la quale implica che i poli stabili del sistema retroazionato sono:

- i poli della dinamica dell'osservatore ( $A_0$ );
- i poli del modello di specifica ( $A_m$ );
- gli zeri stabili cancellati del sistema in catena aperta ( $B^+$ ).

Nel caso poi si desiderasse cancellare anche i poli stabili in catena aperta, ossia gli zeri di  $A$ , sarebbe necessario imporre degli ulteriori vincoli, nelle due equazioni di progetto, ai polinomi  $A_0, T$  e  $S$ .

Per quanto concerne invece la regione di stabilità delle radici di  $B^+ = 0$ , cioè gli zeri cancellabili, è necessario considerare una regione interna al cerchio di raggio unitario, delimitata da curve con coefficiente di smorzamento e tempo d'assestamento opportuni.

### 8.3 Calcolo della soluzione dell'equazione diofantea

La soluzione del problema sopra proposto si riduce fondamentalmente alla soluzione dell'equazione  $AR' + SB^- = A_0A_m$  nei polinomi incogniti  $R'$  e  $S$ .

Tale equazione è riconducibile al problema per cui dati 3 polinomi noti  $A, B, C$  ci si domanda come determinare, se esistono, due polinomi incogniti  $X$  e  $Y$ , di grado opportuno, tali che  $AX + BY = C$ .

L'equazione lineare polinomiale  $AX + BY = C$  è detta equazione diofantea, dal nome del matematico greco Diofanto di Alessandria, vissuto intorno al III secolo a.C.

La soluzione di tale equazione, qualora esista, si determina risolvendo il sistema di equazioni lineari ottenuto uguagliando i coefficienti delle potenze uguali presenti a primo e secondo membro.

Un classico risultato stabilisce che condizione necessaria e sufficiente affinché esista una soluzione  $(X, Y)$  è che  $C$  sia multiplo di  $MCD(A, B)$ .

Si noti che tale condizione è ovviamente verificata se  $A$  e  $B$  sono primi fra di loro.

Si può inoltre dimostrare che se esiste una coppia di valori  $(X_0, Y_0)$  tale che  $X_0A + Y_0B = D$  dove  $D = MCD(A, B)$ , allora le soluzioni di  $XA + YB = D$  sono tutte e sole:

$$(X, Y) = (X_0, Y_0) + T(B/D, -A/D).$$

con  $T$  arbitrario.

Infine, si dimostra che l'equazione  $AX + BY = C$  ammette un'unica soluzione se:

$$\text{grado}(X) < \text{grado}(B) \qquad \text{oppure} \qquad \text{grado}(Y) < \text{grado}(A).$$

Applicando i risultati generali all'equazione di progetto  $AR' + SB^- = A_0A_m$ , si può osservare che essa ammette sempre soluzione in quanto i polinomi  $A$  e  $B$  (e quindi  $B^-$ ) sono, per ipotesi, primi fra di loro.

Inoltre, al fine di individuare in accordo con le relazioni precedentemente scritte una unica soluzione, si assume:

$$\text{grado}(S) = \text{grado}(A) - 1$$

Complessivamente i vincoli di causalità che devono essere soddisfatti dal problema di progetto sono:

$$\begin{aligned} \text{grado}(A_m) - \text{grado}(B_m) &\geq \text{grado}(A) - \text{grado}(B) \\ \text{grado}(A_0) &\geq 2\text{grado}(A) - \text{grado}(A_m) - \text{grado}(B^+) - 1 \end{aligned}$$

Mentre la prima condizione è giustificabile intuitivamente, la seconda implica che il polinomio  $A_0$  deve essere scelto di grado sufficientemente alto per la causalità della legge di controllo.

Se si tiene anche conto della relazione  $R(z) = (z - 1)^q R_1(z)$ , che assicura guadagni elevati alle basse frequenze, si dovrà modificare l'equazione di progetto in:

$$A(z - 1)^q R'_1 + SB^- = A_0A_m$$

e la condizione di causalità nel seguente modo:

$$\text{grado}(A_0) \geq 2\text{grado}(A) - \text{grado}(A_m) - \text{grado}(B^+) + q - 1$$

Svolgendo un breve riepilogo dei passi del procedimento del progetto:

1. Si assumono come dati il modello del processo  $G_p = B/A$ , il polinomio stabile  $A_0$  e la specifica desiderata in retroazione  $G_m = B_m/A_m$  con i vincoli:
  - a.  $B_m = B'_m B^-$
  - b.  $\text{grado}(A_m) - \text{grado}(B_m) \geq \text{grado}(A) - \text{grado}(B)$
  - c.  $\text{grado}(A_0) \geq 2\text{grado}(A) - \text{grado}(A_m) - \text{grado}(B^+) + q - 1$ .
 Inoltre si specifica la regione di stabilità.
2. Si fattorizza  $B = B^+ B^-$  e  $B_m = B'_m B^-$  dove  $B^+$  è monico, ossia con coefficiente del termine di grado massimo uguale a uno, e con tutti gli zeri nella regione di stabilità.
3. Si risolve il sistema di equazioni  $A(z-1)^q R'_1 + S B^- = A_0 A_m$  dove si è scelto:
  - a.  $\text{grado}(S) = \text{grado}(A) + q - 1$
  - b.  $\text{grado}(R'_1) = \text{grado}(A_0) + \text{grado}(A_m) - \text{grado}(A) - q$ .
4. Si scrive la legge di controllo:

$$R u = T v - S y$$

$$\text{con } R = B^+ R', T = B'_m A_0 \text{ e } R' = (z-1)^q R'_1.$$

Si noti che nelle applicazioni pratiche la specifica  $G_m = B_m/A_m$  non può che basarsi su pochi parametri globali quali la banda e il picco di risonanza, o, in altri termini, sulla considerazione del caso dei poli dominanti.

Ciò significa specificare che  $A_m$  abbia come fattore il termine:

$$Q(z) = z^2 + p_1 z + p_2$$

con  $p_1 = -2e^{-\omega_n \delta T} \cos(\omega_n T \sqrt{1 - \delta^2})$  e  $p_2 = 2e^{-\omega_n \delta T}$  (dove  $\omega_n$  è la pulsazione naturale e  $\delta$  il coefficiente di smorzamento desiderati) ovvero, desiderando un comportamento senza sorpasso:

$$Q(z) = z - a \text{ ed } a = e^{-T/\tau}$$

dove  $\tau$  è la costante di tempo desiderata.

La dinamica in anello chiuso desiderata, con guadagno statico unitario, sarà allora semplicemente:

$$G_m = \frac{Q(1) B^-(z)}{B^-(1) z^k Q(z)}$$

dove  $B^-$  tiene conto degli zeri non cancellabili mentre  $z^k$  tiene conto del ritardo presente e della dinamica approssimata di ordine elevato del sistema in catena aperta  $G_p(z)$ .

### Esempio 8.1

Si consideri una funzione di trasferimento continua del tipo:

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

La funzione di trasferimento discreta corrispondente alla cascata tra la  $G_p(s)$  e l'holder, vale:

$$G_p(z) = Z \left[ \frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{1}{s(s+1)} \right] = \frac{K(z-b)}{(z-1)(z-a)}$$

dove

$$a = e^{-T} \quad K = a + T - 1 \quad b = 1 - \frac{T(1-a)}{K}$$

Si può notare che, essendo  $b < 0$ , lo zero di  $G_p(z)$  sarà situato sul semiasse reale negativo. Inoltre la specifica di progetto sulla funzione di trasferimento del sistema in catena chiusa sia:

$$G_m(z) = \frac{z(1 + p_1 + p_2)}{z^2 + p_1z + p_2}$$

La funzione  $G_p(z)$  presenta uno zero in  $z = b$ , che non è presente nella  $G_m(z)$ , per cui necessariamente il regolatore dovrà cancellare tale zero.

Fattorizzando  $B$  nella forma  $B = B^+B^-$  con  $B^+ = z - b$  e  $B^- = K$ , si ha che:

$$B'_m = \frac{B_m}{K} = \frac{z(1 + p_1 + p_2)}{K}$$

Il grado della dinamica dell'osservatore viene scelto in modo che  $\text{grado}(A_0) \geq 0$ , e in questo caso per semplicità,  $A_0 = 1$ .

Per quanto concerne i gradi dei polinomi  $R'$  e  $S$ , essi soddisfano:

$$\begin{aligned} \text{grado}(R') &= \text{grado}(A_0) + \text{grado}(A_m) - \text{grado}(A) = 0 \\ \text{grado}(S) &= \text{grado}(A) - 1 = 1 \end{aligned}$$

Sia  $R' = r_0$  e  $S = (s_0z + s_1)$ .

L'equazione di progetto  $AR' + SB^- = A_0A_m$  assume quindi la seguente forma:

$$(z-1)(z-a)r_0 + K(s_0z + s_1) = z^2 + p_1z + p_2$$

Tramite l'uguaglianza tra i coefficienti d'uguale potenza si ottiene:

$$r_0 = 1 \quad s_0 = \frac{1 + a + p_1}{K} \quad s_1 = \frac{p_2 - a}{K}$$

L'equazione  $T(z) = A_0B'_m$  sarà quindi pari a  $\frac{z(1 + p_1 + p_2)}{K} = t_0z$ .

La legge di controllo è quindi esprimibile nella forma:

$$u(k) = bu(k-1) + t_0v(k) - s_0y(k) - s_1y(k-1)$$

In figura 8.3 sono riportati la risposta  $y(t)$  del sistema a catena chiusa ad un ingresso a gradino, e la variabile di controllo  $u(k)$ , nel caso in cui si ponga  $\delta = 0.6$ ,  $\omega_n = 1.2$  e  $T = 0.2$  s.

È quindi possibile calcolare il valore dei coefficienti  $r_0 = 1$ ,  $s_0 = 6.341$ ,  $s_1 = -3.682$  e  $t_0 = 2.659$ .

Inoltre in figura 8.4 si considera un caso analogo, in cui però il periodo di campionamento sia pari a 0.8 s.

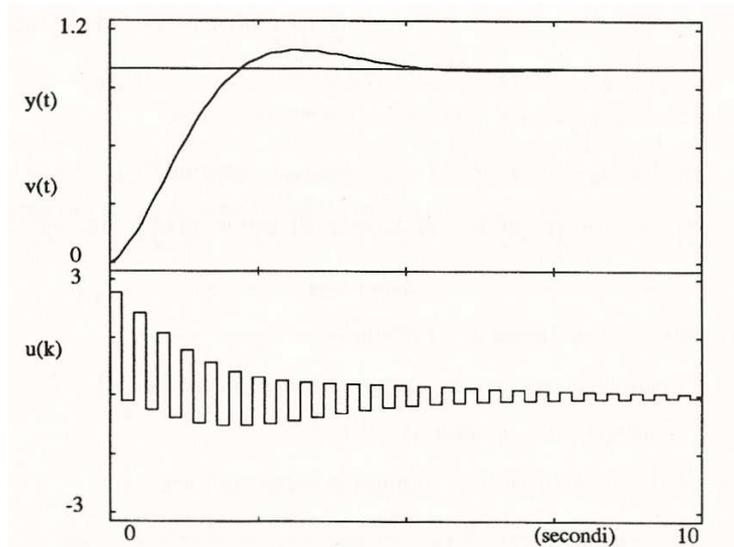


Figura 8.3 Uscita  $y(t)$  e variabile di controllo  $u(k)$  nel caso in cui  $\delta = 0.6$ ,  $\omega_n = 1.2$  e  $T = 0.2$  s

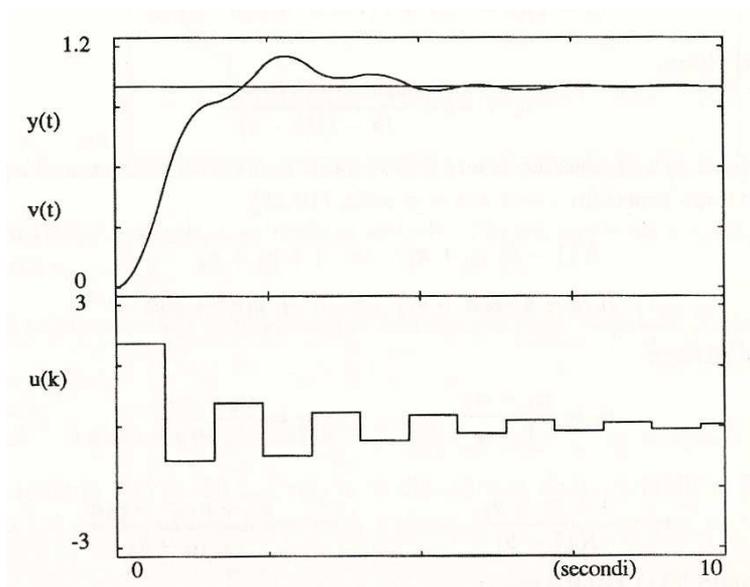


Figura 8.4 Uscita  $y(t)$  e variabile di controllo  $u(k)$  nel caso in cui  $\delta = 0.6$ ,  $\omega_n = 1.2$  e  $T = 0.8$  s

Il cambiamento del valore di  $T$  provoca una mutazione del valore dei parametri, i quali valgono  $r_0 = 1$ ,  $s_0 = 2.569$ ,  $s_1 = -0.5347$  e  $t_0 = 2.035$ .

Nel caso suddetto sono evidenziate delle oscillazioni alla frequenza di campionamento.

Questo fenomeno, detto ringing, è dovuto alla cancellazione dello zero  $z = b$  del sistema e può essere risolto tramite un'opportuna modifica della funzione di trasferimento desiderata  $G_m(z)$ .

Essa può essere imposta pari a:

$$G_m(z) = \frac{1 + p_1 + p_2}{1 - b} \frac{z - b}{z^2 + p_1 z + p_2}$$

Si noti che lo zero  $z = b$  di  $G_p(z)$  è ora presente anche nella funzione di specifica  $G_m(z)$ .

Questo implica che tale zero non dovrà essere cancellato da un corrispondente polo del regolatore caratterizzato da un modo di risposta oscillatorio.

Svolgendo il procedimento in modo analogo a quello del caso precedente, si arriva a calcolare la legge di controllo risultante, che è:

$$u(k) = -r_1 u(k-1) + t_0 v(k) - s_0(k) - s_1 y(k-1)$$

Osservando i grafici di figura 8.5, in cui sono riportati i risultati simulativi della risposta al gradino del sistema, relativamente ai valori di progetto  $\delta = 0.6$ ,  $\omega_n = 1.2$  e  $T = 0.2$  s, si può notare un notevole miglioramento dell'andamento desiderato della variabile di controllo  $u$ , anche se la legge suddetta presenta, tranne per quanto riguarda i coefficienti, struttura analoga alla precedente.

Oltre a quanto detto in precedenza, è importante anche considerare l'azione dei disturbi. Dallo schema a blocchi di figura 8.2 è infatti possibile ricavare la dipendenza della variabile  $x$  dal riferimento  $v$  e da segnali di disturbo  $d_1$  e  $d_2$ .

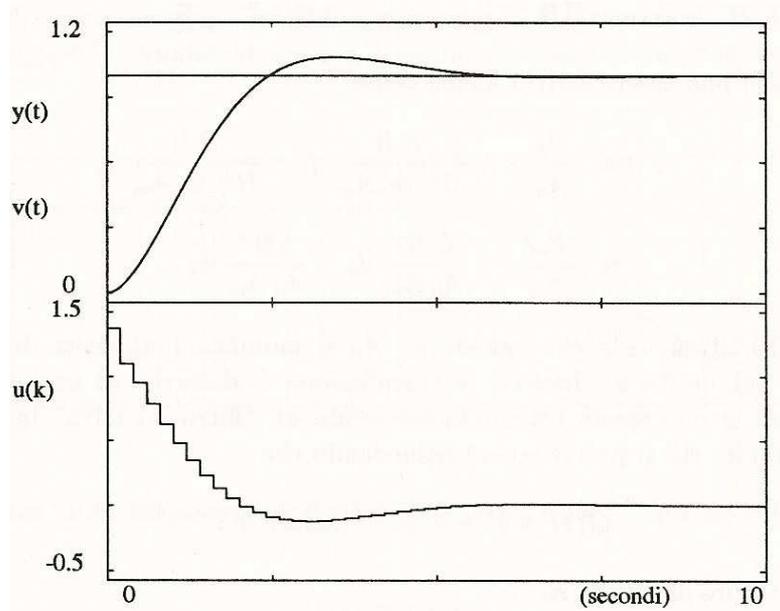


Figura 8.5 Uscita  $y(t)$  e variabile di controllo  $u(k)$  nel caso in cui  $\delta = 0.6$ ,  $\omega_n = 1.2$  e  $T = 0.2$  s

Essa vale:

$$x = \frac{T B}{1 + \frac{S B}{R A}} v + \frac{B}{1 + \frac{S B}{R A}} d_1 - \frac{S B}{1 + \frac{S B}{R A}} d_2 = \frac{T B}{R A + B S} v + \frac{R B}{R A + B S} d_1 - \frac{S B}{R A + S B} d_2 =$$

$$= \frac{B_m}{A_m} v + \frac{H_a}{1 + H_a} \frac{1}{H_{fb}} d_1 - \frac{H_a}{1 + H_a} d_2$$

dove  $H_{fb} = S/R$  è il guadagno di retroazione mentre  $H_a = B S/A R$  il guadagno d'anello. È quindi possibile ricalcolare il valore di  $x$ , tenendo conto delle seguenti considerazioni:

$$x = \frac{B_m}{A_m} v + \frac{R B}{A_0 A_m} d_1 - \frac{S B}{A_0 A_m} d_2$$

Inoltre è possibile vedere che, agendo su  $A_0$  si modifica l'influenza dei disturbi su  $x$ . Infine è utile dire che la trasmissione dei disturbi alla frequenza  $\omega$  può essere attenuata con un filtro selettivo in  $S$  e/o  $R$ .

## 8.4 Controllo deadbeat

Nelle considerazioni che seguono in tale paragrafo si farà riferimento ad un controllore con un solo grado di libertà, ossia al caso con il solo ingresso errore, ove  $R u = S e$ , ovvero:

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{S(z)}{R(z)} = D(z)$$

con  $D(z)$  funzione di trasferimento del controllore.  
Per chiarezza, si fa riferimento allo schema di figura 8.6.

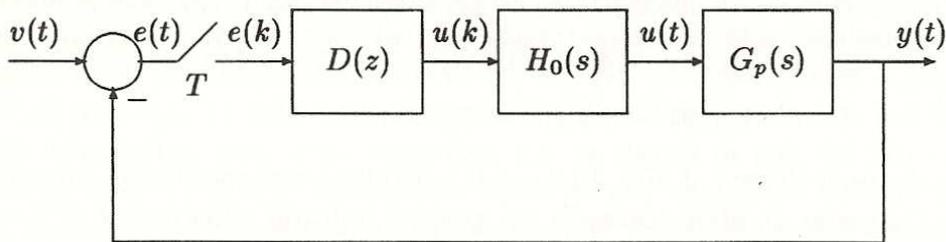


Figura 8.6 Schema di controllo digitale

Le cosiddette specifiche deadbeat fanno riferimento alle caratteristiche della risposta del sistema retroazionato quando l'ingresso di riferimento è un segnale di prova a gradino, rampa o parabola.

Si consideri ora il caso della risposta al gradino per cui le specifiche richiedono:

1. l'errore a regime nullo (tracking esatto);
2. estinzione del transitorio in un tempo minimo finito;
3. non siano presenti oscillazioni tra gli istanti di campionamento.

Le prime due specifiche citate stanno ad indicare che è necessario un numero finito di passi affinché l'errore diventi nullo e che tale condizione è raggiunta nel minimo tempo possibile.

Queste specifiche possono essere introdotte solo per sistemi discreti poiché nei sistemi di controllo a tempo continuo il regime transitorio si estingue in un tempo teoricamente infinito.

La terza specifica mira ad evitare la presenza di oscillazioni nascoste, ovvero oscillazioni indesiderate che si manifestano a tempo continuo nonostante il valore della variabile negli istanti di campionamento sia conforme a quanto desiderato, e che sono di fatto invisibili a tempo discreto perché in qualche modo mascherate dal processo di campionamento.

Qualora per il controllore sia valida tale specifica è possibile definirlo ripple-free.

Bisogna inoltre dire che, sotto opportuni vincoli sulla scelta del periodo di campionamento  $T$ , si può dimostrare che, se esiste un istante finito a partire dal quale l'errore di tracking s'annulla per ogni valore maggiore del suddetto e, sempre per tali valori la grandezza di controllo si mantiene definitivamente costante, allora l'uscita si mantiene pari al valore desiderato per istanti multipli del periodo di campionamento  $T$ .

La funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso vale:

$$\frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{D(z)G_p(z)}{1 + D(z)G_p(z)}$$

dove si è assunto  $G_p(z) = Z[H_0(s)G_p(z)]$ .

Al fine di soddisfare la specifica deadbeat, s'impone che la relazione precedente valga:

$$\frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{D(z)G_p(z)}{1 + D(z)G_p(z)} = G_m(z) = \frac{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_N}{z^N} = a_0 + a_1 z^{-1} + a_N z^{-N}$$

con  $N \geq n$ , essendo  $n$  il grado del denominatore di  $G_p(z)$ .

E' possibile quindi calcolare il controllore:

$$D(z) = \frac{G_m(z)}{[1 - G_m(z)]G_p(z)}$$

Affinché l'equazione di progetto definisca una legge di controllo fisicamente realizzabile, devono essere soddisfatte delle condizioni di stabilità e causalità.

Per quanto riguarda la causalità, le condizioni da soddisfare sono due.

La prima impone che se  $G_p(z)$  presenta un fattore  $z^{-k}$  la  $G_m(z)$  deve contenere almeno un fattore  $z^{-h}$  con  $h \geq k$ .

La seconda invece dice che è necessario che il grado del numeratore di  $D(z)$  sia minore o uguale a quello del denominatore.

Per quanto riguarda invece le condizioni di stabilità è necessario, anche se non sufficiente, evitare la cancellazione poli-zeri a modulo maggiore di uno tra il controllore  $D(z)$  e il sistema  $G_p(z)$ .

Per soddisfare tale condizione è necessario che tutti i poli instabili, o al limite di stabilità, di  $G_p(z)$  siano zeri di  $1 - G_m(z)$  e che tutti gli zeri di  $G_p(z)$ , che giacciono nella regione di instabilità, siano anche zeri di  $G_m(z)$ .

Una volta chiarite le specifiche, il progetto si sviluppa come segue.

La classe di ingressi che si considera è quella dei segnali canonici discreti, la cui trasformata zeta  $V(z)$  è data da:

$$V(z) = \frac{P(z)}{(1 - z^{-1})^{q+1}}$$

dove  $P(z)$  è un polinomio in  $z^{-1}$  privo di zeri in  $z = 1$ .

Nei sistemi di controllo interessano le risposte al gradino unitario ( $P(z) = 1$  e  $q = 0$ ), alla rampa lineare ( $P(z) = Tz^{-1}$  e  $q = 1$ ) e più raramente alla rampa parabolica ( $P(z) = 0.5T^2 z^{-1}[1 + z^{-1}]$  e  $q = 2$ ) dove  $T$  è il periodo di campionamento.

Il segnale d'errore  $E(z)$  può essere calcolato mediante la:

$$E(z) = V(z) - Y(z) = V(z) [1 - G_m(z)] = \frac{P(z)[1 - G_m(z)]}{(1 - z^{-1})^{q+1}}$$

e poiché si desidera che l'errore si annulli in un tempo finito e che rimanga tale a regime, si impone:

$$1 - G_m(z) = (1 - z^{-1})^{q+1} N(z)$$

dove  $N(z)$  è un polinomio in  $z^{-1}$ .

Si ottiene poi, sostituendo  $1 - G_m(z) = (1 - z^{-1})^{q+1} N(z)$  nell'espressione di  $E(z)$ , che  $E(z) = P(z)N(z)$  e questa ci dice che  $E(z)$  è espresso come una somma di un numero finito di termini in  $z^{-1}$  e che dunque la sequenza  $e(kT)$  va a zero in un numero finito di periodi di campionamento.

Dalle precedenti considerazioni, l'espressione del regolatore  $D(z) = G_m(z)/[1 - G_m(z)]G_p(z)$  diviene:

$$D(z) = \frac{G_m(z)}{G_p(z)(1 - z^{-1})^{q+1}N(z)}$$

Come spiegato in precedenza, per far sì che il sistema non presenti, dopo il transitorio, oscillazioni tra gli istanti di campionamento, si dovranno imporre, nell'ipotesi di sistema continuo  $G_p(s)$  BIBO stabile, le condizioni:

$$\begin{aligned} y(t) &= \text{costante per } t \geq NT \text{ per ingresso a gradino;} \\ dy(t)/dt &= \text{costante per } t \geq NT \text{ per ingresso a rampa lineare;} \\ d^2y(t)/dt^2 &= \text{costante per } t \geq NT \text{ per ingresso a rampa parabolica.} \end{aligned}$$

Le precedenti condizioni devono essere tradotte in condizioni sul controllo  $u(t)$ .

Per concludere, prima di svolgere degli esempi esplicativi, vengono fatti alcuni commenti di tipo generale sul progetto di tipo deadbeat.

In primo luogo il comportamento del sistema in retroazione dipende molto dai segnali d'ingresso canonici per cui è stato progettato il controllore. Infatti si potrebbero avere delle risposte non soddisfacenti per segnali diversi da quelli specificati.

Inoltre i sistemi a tempo di risposta minimo, non sono sempre da preferire perché comportano valori elevati per il segnale di controllo e quindi maggior potenza e costo dell'attuatore che non deve saturare, pena una risposta difforme da quella progettata.

Infine la variabile di controllo può presentare notevole ringing (ossia oscillazioni alla frequenza di campionamento), di ampiezza tale da poter provocare saturazioni degli attuatori nel sistema reale, e ciò in particolare per periodi di campionamento troppo piccoli.

## Esempio 8.2

Si consideri lo schema 8.6 in cui:

$$G_p(s) = \frac{1}{(s+1)s}$$

e si voglia progettare il controllore  $D(z)$  in modo che il sistema retroazionato abbia una risposta deadbeat in corrispondenza all'ingresso a gradino.

Il periodo di campionamento scelto è  $T = 0.8$  s.

Si noti che la funzione di trasferimento adottata è la stessa dell'esempio 8.1.

Calcolando la trasformata zeta d'entrambi i membri dell'equazione si ottiene:

$$G_p(z) = Z \left[ \frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{1}{s(s+1)} \right] = \frac{K(z-b)}{(z-1)(z-a)} = \frac{K(1 - bz^{-1})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - az^{-1})} = \frac{0.2493(1 + 0.7669z^{-1})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.4493z^{-1})}$$

Poiché  $G_p(z)$  presenta un ritardo  $z^{-1}$  ed è un sistema del secondo ordine (infatti  $n = 2$  relativamente alla rappresentazione in  $z$ ), si assume  $a_0 = 0$  ed  $N=2$ .

La funzione di trasferimento ad anello chiuso risulta pertanto:

$$G_m(z) = a_1z^{-1} + a_2z^{-2}$$

e quindi, poiché si sta considerando un dead-beat per ingresso a gradino (caratterizzato da  $q = 0$ ), si ottiene  $1 - G_m(z) = (1 - z^{-1})N(z)$ .

Si noti che per evitare la cancellazione critica del polo in  $z = 1$  di  $G_p(z)$  si dovrebbe imporre che uno zero nella stessa posizione compaia in  $1 - G_m(z)$ , ma tale condizione appare già soddisfatta nella relazione  $1 - G_m(z) = (1 - z^{-1})N(z)$ .

Inoltre per evitare ripple tra i vari istanti di campionamento è necessario imporre che l'uscita sia costante per  $t \geq 2T$ , essendo  $N$  pari a 2.

Tale condizione, riportata sull'uscita dell'holder, richiede che il segnale di controllo sia costante sempre per  $t \geq 2T$ , ossia:

$$U(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + \dots$$

In particolare deve essere  $b = 0$  in quanto  $G_p(s)$  contiene un integratore e quindi  $y(t)$  costante implica  $u(t)$  nullo.

La precedente relazione si semplifica quindi in  $U(z) = b_0 + b_1 z^{-1}$ .

Moltiplicando sia il numeratore che il denominatore per la trasformata zeta dell'ingresso  $v(t)$ , conoscendo la relazione  $G_m(z) = Y(z)/V(z)$  e  $U(z) = Y(z)/G_p(z)$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} U(z) &= \frac{Y(z)V(z)}{G_p(z)V(z)} = \frac{G_m(z)V(z)}{G_p(z)} = G_m(z) \frac{1}{(1 - z^{-1})} \frac{(1 - z^{-1})(1 - 0.4493z^{-1})}{0.2493(1 + 0.7669z^{-1})z^{-1}} = \\ &= G_m(z) \frac{(1 - 0.4493z^{-1})}{0.2493(1 + 0.7669z^{-1})z^{-1}} \end{aligned}$$

La condizione affinché la precedente espressione si riduca alla forma  $U(z) = b_0 + b_1 z^{-1}$  impone:

$$\begin{aligned} G_m(z) &= (1 + 0.7669z^{-1})z^{-1}G_1 \\ U(z) &= \frac{(1 - 0.4493z^{-1})G_1}{0.2493} \end{aligned}$$

con  $G_1$  parametro costante.

Sostituendo  $G_m(z) = a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$  in  $1 - G_m(z) = (1 - z^{-1})N(z)$  si ha l'uguaglianza:

$$1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} = (1 - z^{-1})N(z)$$

da cui è possibile ricavare le due relazioni sottostanti:

$$\begin{aligned} N(z) &= 1 + (1 - a_1 z^{-1})z^{-1} \\ 1 - a_1 - a_2 &= 0 \end{aligned}$$

in quanto  $N(z)$  deve dividere il primo membro della  $1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} = (1 - z^{-1})N(z)$ .

Uguagliando  $G_m(z) = (1 + 0.7669z^{-1})z^{-1}G_1$  e  $G_m(z) = a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$  si ottiene:

$$\begin{aligned} G_1 &= a_1 \\ a_2 - 0.7669 a_1 &= 0 \end{aligned}$$

da cui si ricavano i valori dei coefficienti  $a_i$  della  $G_m(z)$  espressa come somma di un numero finito di termini in  $z^{-1}$ , i quali valgono  $a_1 = 0.566$  e  $a_2 = 0.434$ .

Dopo aver ricavato  $G_m(z)$  e  $N(z)$ , è possibile ricavare il controllore  $D(z)$ :

$$\begin{aligned} G_m(z) &= 0.566z^{-1} + 0.434z^{-2} \\ N(z) &= 1 + 0.434z^{-1} \end{aligned}$$

$$D(z) = \frac{G_m(z)}{G_p(z)[1 - z^{-1}]N(z)} = \frac{2.27 - 1.02z^{-1}}{1 + 0.434z^{-1}}$$

Vengono riportati in figura 8.7 i risultati della simulazione in cui il sistema controllato sia esattamente uguale a quello nominale.

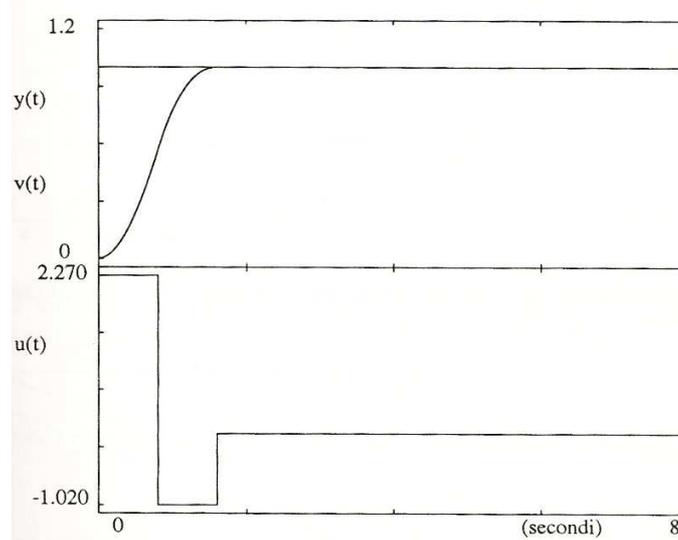


Figura 8.7 Simulazione nel caso in cui il sistema controllato sia uguale a quello nominale  $G_p(s)$

Inoltre in figura 8.8 sono mostrati i risultati nel caso in cui il sistema controllato reale presenti una dinamica non modellata, e quindi la funzione di trasferimento "reale" sia la seguente:

$$G_p(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+10)}$$

mentre il controllore sia sempre basato sul modello nominale.

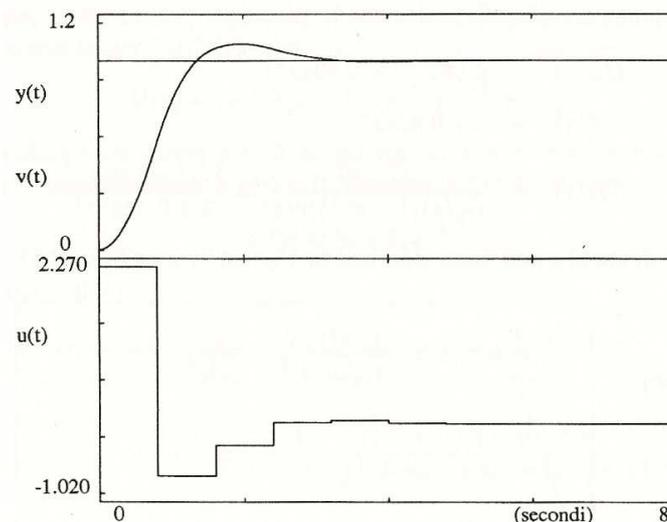


Figura 8.8 Simulazione nel caso in cui il sistema controllato presenti una dinamica non modellata con un polo in  $s = -10$ .

Infine è riportata in figura 8.9 la simulazione in condizioni di  $G_s(s)$  nominale, con ingresso  $V(s)$  a rampa lineare.

Con tale ingresso si può definire l'errore a regime  $e_v$  data l'ampiezza del segnale d'ingresso  $r_0$  ed una costante di velocità  $k_v$ .

Infatti, si ha che  $e_v = r_0 / k_v$ .

Nel caso esaminato si nota un errore a regime corrispondente ad una costante di velocità  $k_v = 0.872$ .

Supponiamo ora di voler modificare il progetto in modo da imporre anche una specifica sulla costante di errore di velocità, ossia  $k_v = k_{vv}$ .

In tal caso, poiché è presente un ulteriore vincolo, sarà necessario modificare la specifica su  $G_m(z)$  introducendo nuovi gradi di libertà, ossia imponendo  $N \geq 3$ .

Per semplicità si considera il caso in cui  $N=3$  e si assume:

$$G_m(z) = a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3}$$

Inoltre vale:

$$k_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{1 - z^{-1}}{T} D(z) G_p(z) \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{1 - z^{-1}}{T} \frac{G_m(z)}{(1 - z^{-1})N(z)} \right] = \frac{G_m(1)}{T N(1)} = k_{vv}$$

dove  $T$  è il periodo di campionamento.

Poiché il modello  $G_m(z)$  ha un guadagno statico unitario, ovvero  $G_m(1) = 1$  è possibile ricavare:

$$N(1) = \frac{1}{T k_{vv}}$$

Qualora fossimo nel caso ripple-free per  $t \geq 3T$ , la trasformata zeta del segnale di controllo varrebbe:

$$U(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$$

Il progetto verrà svolto in maniera analoga a quella indicata nella prima parte di questo esempio, eccetto per il fatto che nella relazione  $U(z) = \frac{(1 - 0.4493z^{-1})}{0.2493} G_1$  il termine  $G_1$  non è una costante, ma bensì un polinomio di primo grado in  $z^{-1}$ .

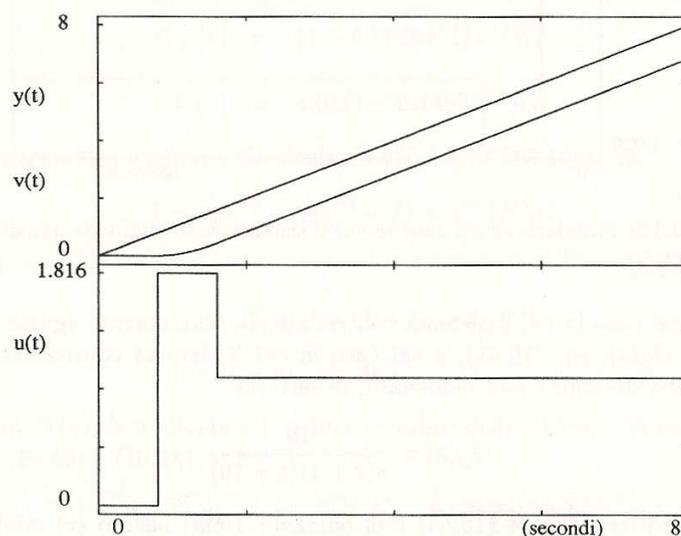


Figura 8.9 Simulazione in condizioni di  $G_p(s)$  nominale, per ingresso  $V(s)$  a rampa

## 8.5 Progetto deadbeat semplificato

Si considera ora un procedimento di tipo deadbeat semplificato rispetto a quello presentato nel paragrafo precedente.

Lo schema di controllo a cui si fa riferimento è sempre quello di figura 8.1, anche se nel seguente tipo di progetto, per semplicità, la trattazione sarà limitata solo al caso d'ingresso a gradino.

È importante ricordare che, nel caso in cui  $G_p(z)$  non abbia né poli né zeri fuori dal cerchio unitario o dalla comunque dalla regione di stabilità, non vengono posti vincoli alla totale cancellazione della dinamica del sistema da parte del controllore e quindi si può richiedere sul sistema in catena chiusa la seguente specifica semplificata:

$$G_m(z) = z^{-k}$$

dove  $k$  è maggiore o uguale a  $n - m$ , che rappresenta la differenza tra il grado del denominatore e del numeratore di  $G_p(z)$ .

La semplificazione adottata corrisponde al caso  $G_m(z) = a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}$  in cui tutti i coefficienti  $a_i$  con  $i=0, \dots, k-1$  e con  $i = k+1, \dots, N$  sono nulli, e  $a_k = 1$ .

Sostituendo  $G_m(z) = z^{-k}$  in  $D(z) = \frac{G_m(z)}{[1 - G_m(z)]G_p(z)}$  si ottiene:

$$D(z) = \frac{z^{-k}}{[1 - z^{-k}]G_p(z)}$$

In questo modo il progetto del regolatore risulta di molto semplificato.

## 8.6 Progetto semplificato secondo Dahlin

In questo procedimento l'obiettivo è quello di progettare un controllore a tempo discreto in modo tale che il risultante sistema a catena chiusa presenti una risposta al gradino simile a quella di un sistema di primo ordine con un ritardo fisso.

Prima di definire la risposta al gradino  $Y(s)$ , si ricorda che allo scopo d'ottenere regolatori a bassa complessità, è opportuno utilizzare modelli semplificati del sistema da controllare.

Si consideri ora la risposta al gradino:

$$Y(s) = \frac{e^{-\theta s}}{\lambda s + 1} \frac{1}{s}$$

dove  $\theta$  rappresenta il ritardo e  $\lambda$  un parametro d'aggiustamento che corrisponde ad una costante di tempo.

Si può definire l'uscita corrispondente a tempo discreto:

$$Y(z) = Z \left[ \frac{e^{-sNT}}{\lambda s + 1} \frac{1}{s} \right] = \frac{(1 - e^{-T/\lambda}) z^{-N-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-T/\lambda} z^{-1})}$$

dove il valore  $N$  esprime in multipli del periodo di campionamento  $T$  il ritardo contenuto in  $\theta$ . Considerando come ingresso un gradino, la cui trasformata zeta è  $V(z) = 1 / (1 - z^{-1})$  la specifica di progetto diventa:

$$G_m(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{(1 - e^{-T/\lambda})z^{-N-1}}{1 - e^{-T/\lambda}z^{-1}} = \frac{1 - e^{-T/\lambda}}{z^{N+1} - z^N e^{-T/\lambda}}$$

Il regolatore ottenuto è il seguente:

$$D(z) = \frac{1}{G_p(z)} \frac{G_m(z)}{1 - G_m(z)} = \frac{1}{G_p(z)} \frac{(1 - e^{-T/\lambda})z^{-N-1}}{1 - e^{-T/\lambda}z^{-1} - (1 - e^{-T/\lambda})z^{-1-N}}$$

Per la fisica realizzabilità del regolatore  $D(z)$ ,  $N+1$  non può essere inferiore alla differenza tra il numero di poli e quello degli zeri di  $G_p(z)$ .

Si deve anche considerare la possibilità che  $G_p(z)$  contenga zeri esterni al cerchio unitario o poco smorzati. In questo caso dovranno essere contenuti tutti a loro volta zeri di  $G_m(z)$ .

In alternativa si può ricavare la  $D(z)$  dalla formula precedente considerando, però, come modello del processo la seguente funzione di trasferimento:

$$G'(z) = z^m B^-(z)B^+(1)/A(z)$$

dove  $B^+(1)$  è il polinomio che contiene tutti gli  $m$  zeri incriminati di  $G_p(z)$  valutato per  $z = 1$  per non variare il guadagno statico, mentre il termine  $z^m$  mantiene inalterata la differenza tra i gradi del numeratore e del denominatore. Ciò corrisponde a sostituire agli  $m$  zeri esterni, o poco smorzati,  $m$  zeri nell'origine.

In ogni caso l'espressione finale per la funzione di trasferimento a catena chiusa è diversa dalla  $G_m(z)$  del sistema del primo ordine.

Inoltre essendo  $\lambda$  un parametro d'aggiustamento, la sua diminuzione comporta la necessità per sistema d'andare a regime in un tempo più breve e quindi la specifica di progetto richiederà un'azione più accurata di controllo.

### Esempio 8.3

Si consideri un processo da controllare descritto dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G_p(s) = \frac{1}{(0.5s + 1)(s + 1)^2 (2s + 1)}$$

In questo caso si considera il seguente modello:

$$G_1(s) = \frac{e^{-1.46s}}{3.34s + 1}$$

Si suppone di porre  $T = 1$  s e si sostituisce dunque nella formula di  $D(z)$  la  $G_1(z)|_{T=1}$ . Innanzitutto è necessario effettuare la discretizzazione di  $G_1(s)$ :

$$\begin{aligned} G_1(z)|_{T=1} &= Z \left[ \frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{e^{-1.46s}}{3.34s + 1} \right] = z^{-1}(1 - z^{-1}) Z \left[ \frac{e^{-0.46s}}{s(3.34s + 1)} \right] = \\ &= z^{-2} \left[ \frac{1 - e^{-m\alpha T} + (e^{-m\alpha T} - e^{-\alpha T})z^{-1}}{1 - e^{-\alpha T}z^{-1}} \right] = \frac{0.1493(z + 0.7334)}{z^2(z - 0.7413)} \end{aligned}$$

dove  $\alpha = 1/3.34 = 0.2994$  ed  $m = 1 - 0.46 = 0.54$ .

Il regolatore che così si ottiene, per il valore del parametro  $\lambda=2$ , è il seguente:

$$\begin{aligned}
D(z)|_{\lambda=2} = G_p(s) &= \frac{0.392 z^{-2}}{(1 - 0.608 z^{-1} - 0.392 z^{-2})} = \frac{z^2(1 - 0.741 z^{-1})}{(0.149 + 0.11 z^{-1})} = \\
&= \frac{2.63(1 - 0.741 z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 + 0.392z^{-1})(1 + 0.738 z^{-1})} = \\
&= \frac{0.6487 - 0.4809z^{-1}}{0.2461 + 0.03123z^{-1} - 0.2063 z^{-2} - 0.07103z^{-3}}
\end{aligned}$$

In effetti, il confronto tra gli andamenti temporali dell'uscita nei tre casi  $\lambda=1$ ,  $\lambda=2$  e  $\lambda=5$ , riportato nella parte alta della figura 8.10, ha suggerito di scegliere  $\lambda=2$ .

Nella parte bassa dell'immagine è riportato invece l'andamento della variabile manipolabile  $u(t)$  nel caso  $\lambda=2$ .

Si noti la presenza di un notevole effetto di ringing, ossia di oscillazioni alla frequenza di campionamento, che può causare problemi di usura nel caso in cui l'attuatore sia di tipo meccanico.

Le oscillazioni della variabile manipolabile sono dovute essenzialmente alla presenza in  $D(z)$  del polo  $z=-0.738$  sull'asse reale negativo, che è prossimo al punto -1.

Una possibile soluzione è quella che consiste nell'eliminazione del polo e nella modifica del guadagno del regolatore.

Per poter applicare questo rimedio il sistema da controllare deve essere sufficientemente filtrante.

Il polo che si desidera eliminare fornisce, a regime, il seguente contributo al guadagno:

$$1 + 0.738z^{-1}|_{z=1} = 1.738$$

per cui il regolatore Dahlin originario viene così modificato:

$$D(z) = \frac{1.513(1 - 0.741 z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 0.392z^{-1})}$$

L'andamento della variabile d'uscita  $y(t)$  e di quella manipolabile  $u(t)$  nella nuova condizione di progetto sono riportate in figura 8.11.

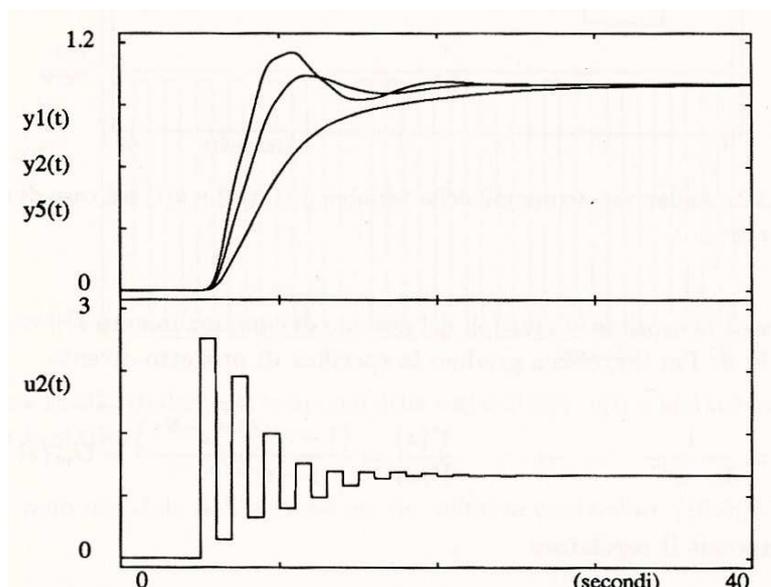


Figura 8.10 Confronto grafico tra gli andamenti temporali dell'uscita per  $\lambda=1$ ,  $\lambda=2$  e  $\lambda=5$

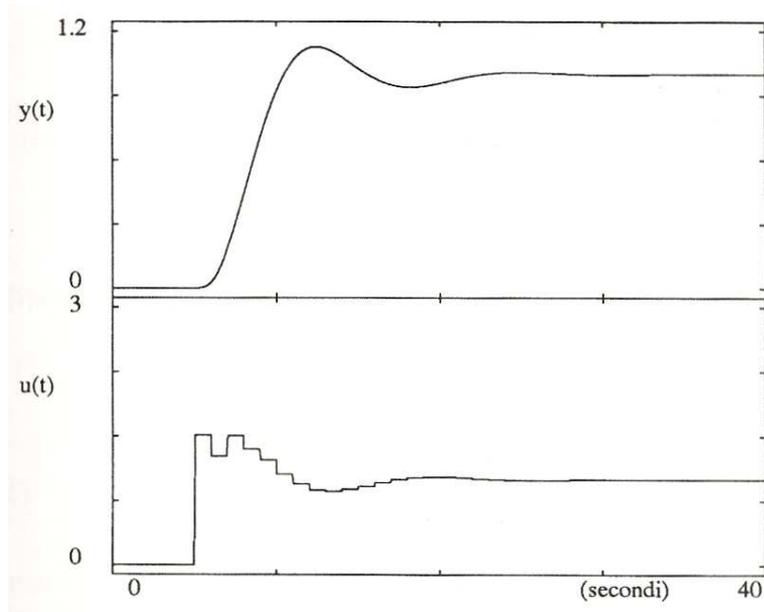


Figura 8.11 Andamento delle variabili  $y(t)$  e  $u(t)$  dopo la correzione dell'effetto ringing

## 8.7 Progetto con specifica diretta sul controllo

Questo tipo di progetto è molto semplice, ma non ammette nessun grado di libertà d'aggiustamento, a differenza, ad esempio, del progetto semplificato secondo Dahlin (parametro  $\lambda$ ).

In risposta al gradino unitario  $V(z) = 1/(1 - z^{-1})$  si desidera che le variabili  $y(t)$  e  $u(t)$  abbiano l'andamento di figura 8.12, ossia, considerando i valori negli istanti discreti, si vuole che valga:

$$Y(z) = y_1 z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots$$

$$U(z) = u_0 + u_1 z^{-1} + u_f z^{-2} + u_f z^{-3} + \dots$$

o, più in generale, ammettendo un transitorio di  $N$  passi,

$$Y(z) = y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + \dots + y_N z^{-N} + z^{-N-1} + \dots$$

$$U(z) = u_0 + u_1 z^{-1} + \dots + u_N z^{-N} + u_f (z^{-N-1} + z^{-N-2} + \dots)$$

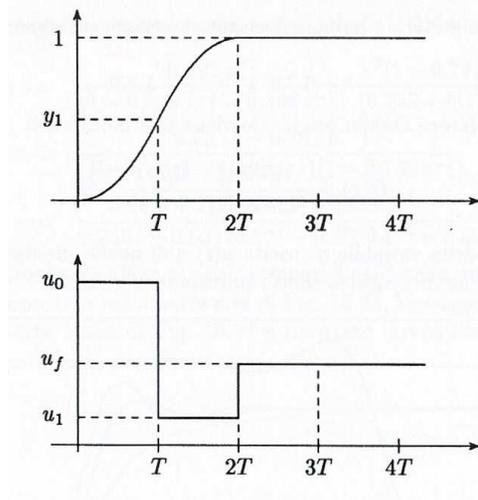


Figura 8.12 Andamento di specifica dell'uscita  $y(t)$  e del controllo  $u(t)$

Si noti che il valore  $u_f$ , riportato in figura 8.12, è necessariamente pari al reciproco del guadagno statico del processo.

La relazione  $Y(z)/V(z)$  è di tipo polinomiale e, nel caso cui si fa qui riferimento per semplicità espositiva, si ha:

$$\frac{Y(z)}{V(z)} = (1 - z^{-1})(y_1 z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots) = y_1 z^{-1} + (1 - y_1)z^{-2} = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} = P(z)$$

Come la relazione tra l'uscita e l'ingresso, anche quella tra la variabile manipolabile e l'ingresso è di tipo polinomiale. Infatti, si ha:

$$\frac{U(z)}{Q(z)} = (1 - z^{-1})(u_0 + u_1 z^{-1} + u_f z^{-2} + \dots) = u_0 + (u_1 - u_0)z^{-1} + (u_f - u_1)z^{-2} = q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} = V(z)$$

Come si può facilmente verificare, in generale, i coefficienti dei polinomi  $P(z)$  e  $Q(z)$  soddisfano le relazioni:

$$\sum_i p_i = 1 \qquad \sum_i q_i = u_f$$

Inoltre poiché la funzione di trasferimento  $G_p(z)$  può essere espressa come rapporto tra i polinomi precedenti:

$$G_p(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Y(z)}{V(z)} \frac{V(z)}{U(z)} = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

il regolatore  $D(z)$  è espresso tramite la seguente relazione:

$$D(z) = \frac{1}{G_p(z)} \frac{Y(z)/V(z)}{1 - Y(z)/V(z)} = \frac{Q(z) P(z)}{P(z) 1 - P(z)} = \frac{Q(z)}{1 - P(z)}$$

Siccome  $u(t)$  è costante a tratti, il numero di variazioni da imporre è uguale all'ordine del modello del processo.

Si noti inoltre che, se il processo contiene un ritardo  $z^{-N}$ , l'espressione di  $D(z)$  è ancora fisicamente realizzabile.

### Esempio 8.4

Si consideri ancora lo stesso sistema utilizzato nel progetto secondo Dahlin.

Si assuma il modello discreto  $G_1(z)|_{T=1}$  e lo si normalizzi in modo che i due polinomi a numeratore e a denominatore soddisfino le relazioni  $\sum_i p_i = 1$  e  $\sum_i q_i = u_f$ :

$$G_1(z)|_{T=1} = \frac{z^{-2}(0.1493 + 0.1095 z^{-1})}{1 - 0.7413 z^{-1}} = \frac{z^{-2}(0.577 + 0.423 z^{-1})}{3.86 - 2.86 z^{-1}} = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Utilizzando la formula, precedentemente esposta per il regolatore  $D(z)$ , si ottiene:

$$D(z) = \frac{1 - 0.7413 z^{-1}}{0.2588 - z^{-2}(0.1493 - 0.1095 z^{-1})}$$

Gli andamenti della variabile controllata  $y(t)$  e della variabile manipolabile  $u(t)$  sono rappresentati in figura 8.13.

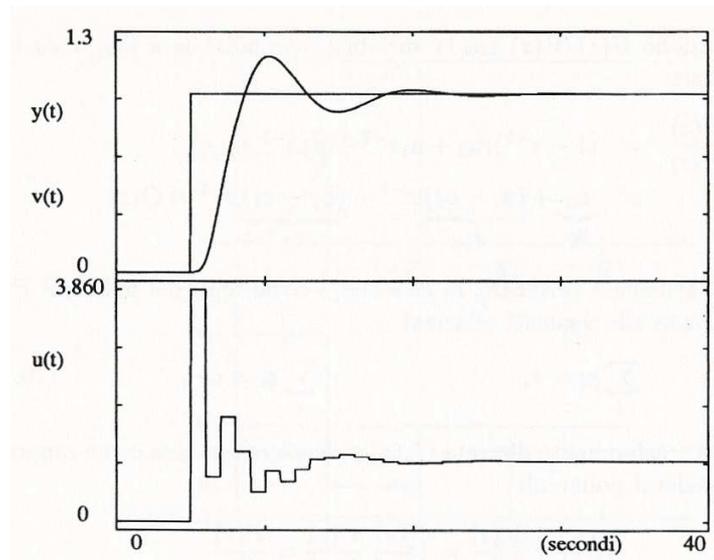


Figura 8.13 Andamento delle variabili  $y(t)$  e  $u(t)$  relative al regolatore ottenuto con una specifica diretta sul controllo

## 8.8 Progetto con variazioni di carico

Le tipologie di progetto espote nei paragrafi precedenti erano basate su richieste d'asservimento dell'uscita al segnale di riferimento, mentre in questo caso si opererà al fine di minimizzare l'influenza del disturbo, come ad esempio variazioni di carico.

Questa tecnica è di particolare interesse applicativo nel caso d'adozione di periodi di campionamento  $T$  grandi.

Facendo dunque riferimento allo schema di figura 8.14, l'uscita può essere espressa nel seguente modo:

$$Y(z) = \frac{NG(z)}{1 + D(z)G_p(z)}$$

$$G_p(z) = Z[H(s)G_p(s)]$$

ed elaborando tale relazione, si ottiene l'espressione del regolatore:

$$D(z) = \frac{NG(z) - Y(z)}{G_p(z)Y(z)}$$

dove  $NG(z)$  è la  $Z$ -trasformata del prodotto  $N(s)G_p(s)$ .

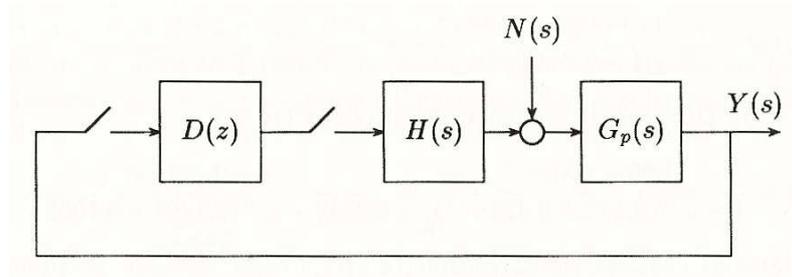


Figura 8.14 Schema relativo al progetto per variazione di carico

Il procedimento da adottare per giungere alla sintesi del controllore  $D(z)$  è il seguente:

- si sceglie il disturbo d'ingresso  $N(s)$ , che tipicamente è un disturbo a gradino;
- si specifica l'andamento desiderato per la variabile d'uscita  $Y(z)$ ;
- si calcola il controllore  $D(z)$ .

La differenza, rispetto al caso d'inseguimento dell'ingresso, consiste nel fatto che l'istante d'applicazione del disturbo non è fisso, e quindi non prevedibile da parte del progettista. Tale situazione dovrebbe far prendere come riferimento il caso peggiore, anche se, nella situazione più generale in cui il disturbo è sincronizzato con il campionamento, non siamo in tale condizione.

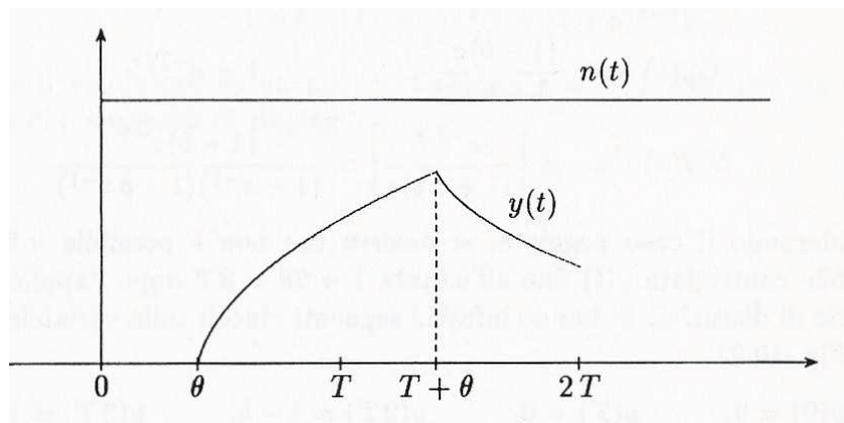


Figura 8.15 Caso d'applicazione del disturbo in un istante di campionamento

Nell'ipotesi che il processo abbia un ritardo  $\theta$ , fisicamente presente oppure derivante da dinamiche non modellate, il caso peggiore d'applicazione del disturbo è  $\theta$  unità di tempo prima di un istante di campionamento, come si può vedere nell'immagine sottostante. Infatti, è facile verificare la presenza di un ritardo pari a  $2\theta + T$  tra l'applicazione del disturbo e la reazione nella variabile d'uscita  $y(t)$ , mentre nel caso precedente tale intervallo era solo  $T + \theta$ .

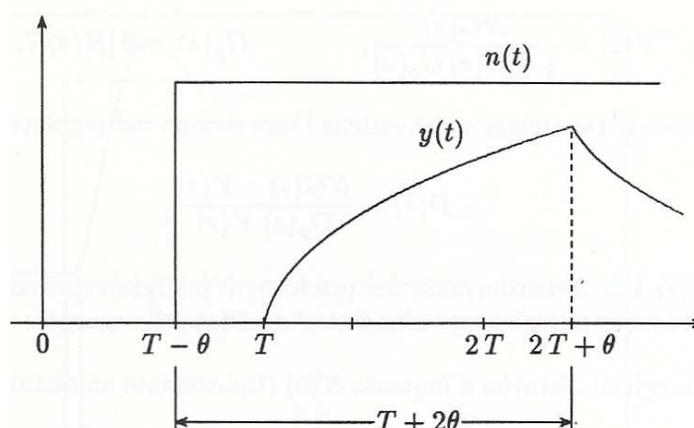


Figura 8.16 Caso peggiore d'applicazione del disturbo

### Esempio 8.5

Si consideri un sistema con un ritardo  $\theta$  che, per semplicità, si assume pari al periodo di campionamento  $T$ .

$$G_p(s) = \frac{e^{-sT}}{1 + \tau s}$$

La prima operazione da svolgere è calcolare:

$$G_p(z) = \frac{(1-b)z^{-2}}{1-bz^{-1}} \quad \text{con } b = e^{-T/\tau}$$

$$NG(z) = \mathcal{Z} \left[ \frac{e^{-sT}}{(1 + \tau s)s} \right] = \frac{(1-b)z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-bz^{-1})}$$

Se si considera il caso peggiore, dopo l'applicazione del gradino di disturbo si può osservare che non è possibile influire sulla variabile controllata  $y(t)$  fino all'istante  $T + 2\theta = 3T$ .

Si hanno infatti i seguenti vincoli sulla variabile d'uscita:

$$y(0) = 0 \quad y(T) = 0 \quad y(2T) = 1 - b \quad y(3T) = 1 - b^2$$

che si ricavano calcolando l'antitrasformata della funzione  $NG(z)$ , con  $N(s) = 1/s$ , nei primi quattro istanti di campionamento.

Essi sono riportati in figura 8.17.

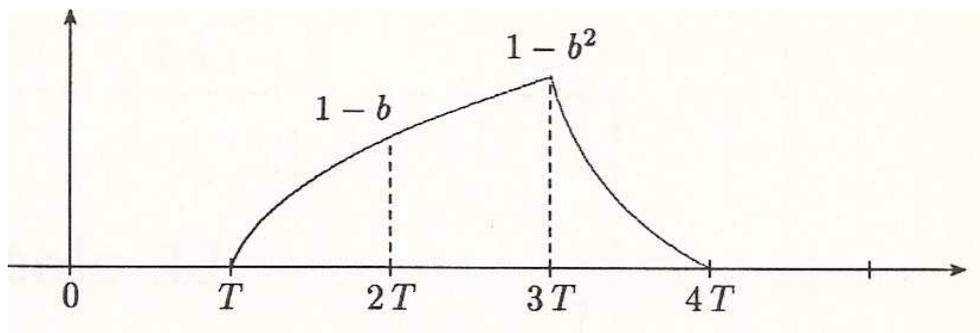


Figura 8.17 Vincoli sulla variabile d'uscita

Inoltre, essendo  $NG(z) = g(2T)z^{-2} + g(3T)z^{-3} + \dots$  i valori di  $g(2T)$  e  $g(3T)$ , cioè i vincoli sulla  $y(t)$ , si calcolano come riportato:

$$g(2T) = \lim_{z \rightarrow \infty} NG(z)z^2$$

$$g(3T) = \lim_{z \rightarrow \infty} [NG(z) - g(2T)z^{-2}] z^3$$

I valori di  $y(nT)$  per  $n > 3$  possono essere assegnati a piacere e costituiscono la vera e propria specifica sulla variabile d'uscita.

Assegnando  $y(nT) = 0$  per  $n > 3$ , in quanto si vuole annullare il prima possibile l'effetto del disturbo, si ha:

$$Y(z) = (1-b)z^{-2} + (1-b^2)z^{-3}$$

e quindi il regolatore  $D(z)$  assume la forma:

$$D(z) = \frac{1 + b + b^2}{1 - b} \frac{1 - \frac{b(1+b)}{1 + b + b^2} z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + (1+b)z^{-1})}$$

Si noti che è possibile l'insorgenza del fenomeno di ringing, ossia di oscillazioni alla frequenza di campionamento, in quanto è presente un polo instabile in  $z = -(1 + b)$ .

# Bibliografia

Bennet S. “A brief history of automatic control” IEEE Control System Magazine, pp 51-60, marzo 1997.

Bisiacco M. e Valcher M.E. (2008). *Controlli automatici*. Edizione Libreria Progetto, Padova.

Bonivento C., Melchorri C. e Zanasi R. (1995). *Sistemi di controllo digitale*. Progetto Leonardo, Bologna.

Ciscato D. (2009). *Appunti di controllo digitale*, Padova.

Corradini M. L. e Orlando G. (2005). *Controllo digitale di sistemi dinamici*. Franco Angeli, Milano.

Ferrante A., Lepschy A. e Viaro U.(2000). *Introduzione ai controlli automatici*. CittàStudi Edizioni, Torino.

Franklin G.F., Powell J.D. e Workman M.L. (1998). *Feedback control of dynamic systems*. IV Ed. Prentice Hall. Upper Saddle River, New Jersey.

Guardabassi G. (1990). *Elementi di controllo digitale*. CittàStudi Edizioni, Torino

Isidori A.(1992). *Sistemi di controllo*. Siderea, Roma.

Oppenheim A.V. e Schafer R.V. (2001). *Elaborazione numerica dei segnali*. FrancoAngeli, Milano.

# Ringraziamenti

Il primo ringraziamento, nonchè il più sentito, va alla mia relatrice, la carissima prof.ssa Valcher, che in questi mesi di stesura della tesi mi ha aiutato molto.

Infatti è riuscita con il suo carisma a farmi appassionare all'argomento della tesi, nonostante non fosse propriamente attinente al mio corso di laurea.

Inoltre, la sua gentilezza e disponibilità, hanno permesso un lavoro di stretta collaborazione studente-docente, che spero abbia prodotto un buon lavoro.

Un ringraziamento particolarmente dovuto è dato a Damiano, il quale mi ha aiutato tantissimo, sia moralmente che dal punto di vista didattico, e per questo gli voglio un mondo di bene.

Ringrazio poi tutti i miei compagni di corso e gli amici, che mi hanno sostenuto in questi anni, ma soprattutto i miei genitori e mia sorella che hanno sopportato i miei lamenti e le mie disperazioni universitarie.