



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Elaborato Finale di Laurea

**STUDIO DI APPARATI SPERIMENTALI E
OTTIMIZZAZIONE DELLA LORO GEOMETRIA
PER LA MISURA DELL'EFFETTO AMPÈRE
GRAVITAZIONALE**

Relatore: **Prof. Jean-Pierre Zendri**

Laureando: **Tommaso Comellato**

ANNO ACCADEMICO 2012/2013

Indice

0.1	Introduzione	2
I	Teoria Gravitoelettromagnetica	3
1	Equazioni di Einstein linearizzate	4
1.1	Linearizzazione delle equazioni di Einstein	5
1.2	Formulazione Maxwelliana delle equazioni di Einstein	6
2	Effetti Gravitomagnetici	8
2.1	Forza di Lorentz	8
2.2	Campo gravitomagnetico di una massa in rotazione	9
2.3	Effetto Lense-Thirring	9
2.4	Effetto Ampère	10
II	Esperimento di tipo Ampère	11
3	Studio preliminare	12
3.1	Il segnale	13
3.1.1	Cilindro cavo	13
3.1.2	Cilindro pieno con incavo	17
3.1.3	Guscio sferico	19
3.2	Il rumore	20
3.2.1	Estrazione del segnale e rapporto segnale-rumore	24
3.2.2	Attrazione Gravitoelettrostatica	26
	Bibliografia	32

0.1 Introduzione

La teoria della Relatività Generale di Einstein costituisce una pietra miliare della moderna fisica. Essa studia in maniera sistematica la gravità, stravolgendo il significato newtoniano di attrazione a distanza tra due corpi e dandone una nuova connotazione geometrica. La chiave della Relatività Generale è il Principio di Equivalenza, quello che Einstein stesso definì *glücklichste Gedanke meines Lebens*, vale a dire *il pensiero più felice della mia vita*. L'idea originale fu che il campo gravitazionale ha un'esistenza meramente relativa, poiché per un osservatore in caduta libera non esiste, almeno nelle immediate vicinanze, alcun campo gravitazionale. Ma c'è dell'altro: se l'osservatore lascia cadere degli oggetti, allora questi rimangono, per lui, in uno stato di quiete o di moto uniforme, indipendentemente dalla loro natura chimica o fisica. Questo sancisce l'equivalenza tra campo gravitazionale e accelerazione, ed è facile capire come questa idea sia in forte contrasto con la teoria newtoniana. Si pensi, ad esempio, a un fascio di fotoni: essi hanno massa uguale a zero, dunque per la fisica newtoniana non dovrebbero essere curvati dalla presenza di massa. Per il Principio di Equivalenza, invece, ogni fotone subisce l'accelerazione equivalente al campo gravitazionale generato dalla presenza di massa e la traiettoria risulta curvata. Lo spaziotempo della Relatività Generale non è più, quindi, lo spazio piatto di Minkowski, ma una struttura caratterizzata da una geometria curva, dove i corpi soggetti alla forza gravitazionale si muovono lungo le geodetiche di tale spazio.

Dal punto di vista matematico l'informazione sulla curvatura dello spazio è contenuta nel tensore metrico $g_{\mu\nu}$, quella sulla massa nel tensore energia-impulso $T^{\mu\nu}$. Per un fluido perfetto non relativistico vale:

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu \quad (1)$$

con ρ densità del fluido e u_μ quadrivelocità del fluido stesso. La relazione tra tensore metrico, tensore energia-impulso e altri due oggetti che derivano dal tensore di curvatura $R_{\mu\nu\rho}^\sigma$ è data dalle equazioni di Einstein, un set di equazioni differenziali non lineari che mette in relazione la distribuzione di materia ed energia con la curvatura dello spaziotempo. La loro forma è

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2)$$

dove G è la costante di gravitazione universale e c la velocità della luce nel vuoto. I termini $R_{\mu\nu}$ e R sono rispettivamente il tensore e lo scalare di Ricci, definiti mediante contrazioni successive del tensore di curvatura. La non linearità di queste equazioni risiede nel fatto che la sorgente di curvatura è tutta l'energia dell'universo, compresa quella associata alla gravitazione. In alcuni casi i termini non lineari sono abbastanza deboli e possono pertanto essere trascurati, portando a una linearizzazione delle equazioni.

Lo studio delle equazioni di Einstein linearizzate e della loro fenomenologia è l'argomento di questa tesi. Particolare risalto è dato ai cosiddetti effetti gravitomagnetici, la cui teoria è trattata nella Parte I. La Parte II propone un esperimento di laboratorio atto a rilevare tali effetti e si occupa dello studio del rapporto segnale-rumore nell'esperimento proposto.

Parte I

Teoria

Gravitoelettromagnetica

Capitolo 1

Equazioni di Einstein linearizzate

Le equazioni di campo di Einstein mettono in relazione la curvatura dello spaziotempo con la distribuzione di energia-impulso. La non linearità di queste equazioni rende analiticamente complicata una trattazione generale delle soluzioni. L'approccio può dunque essere duplice: si trattano soluzioni con particolari simmetrie, oppure, seguendo una via più generale, si può fare l'assunzione fisica che i campi trattati siano deboli; ciò corrisponde matematicamente alla linearizzazione delle equazioni, ed è l'argomento che verrà affrontato in questo capitolo. Le ipotesi di lavoro sono due: campi deboli e velocità non relativistiche.

Campi deboli Una regione dello spaziotempo in cui è presente un campo debole è solo *leggermente* curvata. Ciò significa che in una tale regione esiste un sistema di coordinate che assume la forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

dove $\eta_{\mu\nu}$ è il tensore di Minkowski ($\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$), soluzione delle equazioni di Einstein per uno spazio piatto, e $h_{\mu\nu}$ è una perturbazione molto piccola. Il motivo per cui si utilizzano queste coordinate (chiamate *quasi-Minkowskiane*) risiede nel fatto che, se esiste un sistema in cui l'eq (1.1) vale, allora ne esistono infiniti altri, e questi si trovano mediante trasformazioni di Lorentz, del tipo

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (1.2)$$

oppure trasformazioni infinitesime, ossia

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x) \quad (1.3)$$

con $\xi(x)$ dello stesso ordine di $h_{\mu\nu}$.

Nel primo caso si trova che il tensore $h_{\mu\nu}$ trasforma come le componenti di un tensore nello spazio di Minkowski; questo suggerisce di adottare una nuova ottica: invece di considerare uno spazio *leggermente* curvato che rappresenta un campo debole, è possibile considerare $h_{\mu\nu}$ come un campo tensoriale simmetrico di rango 2 in uno spazio piatto. Sotto quest'ottica siamo in grado di dare un'interpretazione fisica alla trasformazione infinitesima di $h_{\mu\nu}$

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu \quad (1.4)$$

ossia vedere (1.4) come una trasformazione di gauge, in analogia al caso elettromagnetico. Ciò significa che $h_{\mu\nu}$ e $h'_{\mu\nu}$ descrivono la stessa fisica.

Velocità non relativistiche L'approssimazione di velocità non relativistiche significa che le velocità che entrano in gioco nel sistema sono piccole se confrontate con la velocità della luce c . Questo implica che è possibile approssimare il fattore lorentziano $\gamma = 1/\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}$ a 1 e, di conseguenza, trascurare alcune componenti del tensore energia-impulso $T_{\mu\nu}$. Infatti, da (1):

$$T_{00} \approx \rho c^2 \quad T_{0i} \approx \rho c u_i \quad T_{ij} \approx \rho u_i u_j \quad (1.5)$$

e quindi $|T_{ij}| \ll |T_{0i}| \ll |T_{00}|$.

1.1 Linearizzazione delle equazioni di Einstein

Nell'approssimazione di campo debole si arriva alle equazioni di Einstein linearizzate espandendo le equazioni di campo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

in serie di potenze di $h_{\mu\nu}$, utilizzando un sistema di coordinate dove vale (1.1) e tenendo solo i termini lineari. Abbiamo dunque bisogno di trovare un'espressione linearizzata per il tensore di curvatura, quindi per contrazioni successive otterremo il tensore e lo scalare di Ricci. Per prima cosa dobbiamo calcolare la forma linearizzata del simbolo di Christoffel $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$, da sostituire nell'espressione del tensore di curvatura:

$$R^\sigma_{\mu\nu\rho} = \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\rho} - \partial_\rho \Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \Gamma^\tau_{\mu\rho} \Gamma^\sigma_{\tau\nu} - \Gamma^\tau_{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\tau\rho} \quad (1.6)$$

Si trova che gli ultimi due termini contengono fattori al secondo ordine in $h_{\mu\nu}$, e quindi, dopo aver effettuato le contrazioni su $R^\sigma_{\mu\nu\rho}$, si trova che le equazioni di Einstein prendono la forma

$$\partial_\nu \partial_\mu h + \square^2 h_{\mu\nu} - \partial_\nu \partial_\rho h_\mu^\rho - \partial_\rho \partial_\mu h_\nu^\rho - \eta_{\mu\nu} (\square^2 h - \partial_\rho \partial_\sigma h^{\rho\sigma}) = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (1.7)$$

avendo definito la traccia $h \equiv h^\sigma_\sigma$. Questa espressione può essere semplificata definendo il tensore a traccia nulla $\bar{h}_{\mu\nu}$, dato da

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \quad (1.8)$$

Si trova quindi

$$\square^2 \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\sigma \bar{h}^{\rho\sigma} - \partial_\nu \partial_\rho \bar{h}_\mu^\rho - \partial_\mu \partial_\rho \bar{h}_\nu^\rho = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.9)$$

che si può semplificare ulteriormente mediante una trasformazione di gauge del tipo (1.4). Scegliendo quella trasformazione di gauge tale che $\partial_\nu \bar{h}'^{\mu\nu} = 0$

(chiamata *gauge di Lorentz*), le equazioni di campo di Einstein prendono la forma

$$\square^2 \overline{h^{\mu\nu}} = -\frac{16\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}. \quad (1.10)$$

La soluzione generale è nota ed è data da

$$\overline{h^{\mu\nu}}(ct, x) = -\frac{4G}{c^4} \int_V \frac{T^{\mu\nu}(ct_{ret}, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3y \quad (1.11)$$

dove V è il volume che racchiude la distribuzione di massa considerata e t_{ret} è il *tempo ritardato*, tale che $ct_{ret} = ct - |\vec{x} - \vec{y}|$.

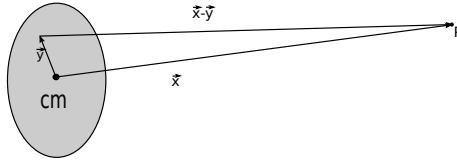


Figura 1.1: Tempo ritardato: l'informazione arriva all'osservatore con un ritardo dovuto al tempo di propagazione della luce dalla sorgente al punto P

Si noti che le equazioni di Einstein linearizzate sono scritte in forma covariante.

1.2 Formulazione Maxwelliana delle equazioni di Einstein

Abbiamo visto nella precedente sezione che la soluzione linearizzata delle equazioni di Einstein presenta una significativa analogia con l'elettromagnetismo. Cerchiamo ora di approfondire questa analogia, utilizzando l'ipotesi che le velocità in gioco non siano relativistiche. In tal caso le espressioni per il tensore energia-impulso sono le eq. (1.5), da cui abbiamo $\overline{h^{ij}} \approx 0$. Inoltre

$$\overline{h^{00}} = \frac{4G}{c^2} \int_V \frac{\rho}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3y \quad (1.12)$$

$$\overline{h^{0i}} = \frac{4G}{c^4} \int_V \frac{\rho c u^i}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3y. \quad (1.13)$$

Definiamo allora un potenziale scalare ϕ

$$\phi_g := -G \int_V \frac{\rho(ct_{ret}, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3y \quad (1.14)$$

e un potenziale vettore \vec{A}_g

$$A_g^i := -\frac{4G}{c^2} \int_V \frac{\rho(ct_{ret}, \vec{y}) u^i(ct_{ret}, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3y \quad (1.15)$$

Da queste definizioni possiamo scrivere

$$\overline{h^{00}} = -\frac{4\phi}{c^2} \quad \overline{h^{0i}} = -\frac{A^i}{c}. \quad (1.16)$$

Le equazioni linearizzate diventano dunque, in termini di ϕ_g e \vec{A}_g :

$$\nabla^2 \phi_g = 4\pi G \rho \quad (1.17a)$$

$$\nabla^2 \vec{A}_g = \frac{16\pi G}{c^2} \vec{j} \quad (1.17b)$$

dove \vec{j} è il vettore di densità di corrente di massa: $\vec{j} = \rho \vec{u}$. La gauge di Lorentz ($\partial_\nu \overline{h}'^{\mu\nu} = 0$) diventa

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_g}{\partial t} + \frac{1}{4} \nabla \cdot \vec{A}_g = 0 \quad (1.18)$$

Se ora definiamo i campi gravitoelettrico e gravitomagnetico

$$\vec{E}_g := -\nabla \phi_g + \frac{1}{4} \frac{\partial \vec{A}_g}{\partial t} \quad (1.19)$$

$$\vec{B}_g := \nabla \times \vec{A}_g \quad (1.20)$$

e sostituiamo queste nuove espressioni nelle equazioni del campo troviamo che i campi \vec{E}_g e \vec{B}_g soddisfano le relazioni

$$\nabla \times \vec{E}_g = -\frac{1}{4} \frac{\partial \vec{B}_g}{\partial t} \quad (1.21a)$$

$$\nabla \cdot \vec{E}_g = -4\pi G \rho \quad (1.21b)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}_g = 0 \quad (1.21c)$$

$$\nabla \times \vec{B}_g = -\frac{8\pi G}{c^2} \vec{j} + \frac{2}{c^2} \frac{\partial \vec{B}_g}{\partial t} \quad (1.21d)$$

che sono uguali (tramite l'identificazione $\epsilon_0 = -\frac{1}{4\pi G}$ e $\mu_0 = -\frac{8\pi G}{c^2}$ e a meno di un fattore 1/2) alle equazioni di Maxwell per l'elettromagnetismo.

Questo significa che ci aspettiamo una fenomenologia gravitomagnetica del tutto simile a quella elettromagnetica, non prevista dalla gravitazione di Newton.

Capitolo 2

Effetti Gravitomagnetici

Gli effetti gravitomagnetici costituiscono una nuova classe di fenomeni, poiché implicano forze che vanno al di là della semplice attrazione newtoniana. Vediamo ora qualche esempio.

2.1 Forza di Lorentz

Diversamente dal caso elettromagnetico in cui la Forza di Lorentz venne postulata, ora dimostriamo la sua esistenza nel formalismo gravitomagnetico, limitandoci al caso stazionario. L'equazione del moto per una particella in un campo gravitazionale è data dall'equazione della geodetica

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\tau^2} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (2.1)$$

Se la particella si muove a velocità non relativistiche possiamo trascurare i termini al secondo ordine in v/c , e quindi $\gamma_v = \sqrt{1 - (v/c)^2} \approx 1$. La quadrivelocità diventa allora

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma(c, \vec{u}) \approx (c, \vec{u})$$

che implica $\frac{d^2 x^0}{d\tau^2} = 0$. Vale inoltre $d\tau = \gamma dt \approx dt$ quindi possiamo rimpiazzare le derivate rispetto a τ in derivate rispetto a t . Dunque l'equazione della geodetica (2.1) diventa (ricordando che il caso di campo stazionario significa $\partial_0 g^{\mu\nu} = 0$):

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \approx -(c^2 \Gamma^i_{00} + 2c \Gamma^i_{0j} u^j + \Gamma^i_{ij} u^i u^j) \approx -(c^2 \Gamma^i_{00} + 2c \Gamma^i_{0j} u^j) \quad (2.2)$$

Sostituendo l'espressione per il simbolo di Christoffel e dopo alcuni passaggi troviamo l'espressione per la Forza di Lorentz gravitazionale:

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} \approx \vec{E}_g + \vec{u} \times \vec{B}_g. \quad (2.3)$$

Il primo termine a secondo membro costituisce il noto risultato newtoniano per il moto di una particella soggetta a un campo gravitazionale dovuto a una sorgente gravitazionale statica non relativistica, mentre il secondo termine è

facilmente interpretabile come una forza *extra* che sente una particella *in moto* in presenza di un campo prodotto da masse *in moto* in una sorgente stazionaria non relativistica.

2.2 Campo gravitomagnetico di una massa in rotazione

Abbiamo visto che una particella in moto risente di una forza dovuta a un campo generato da altre masse in moto. È dunque particolarmente utile calcolare il campo gravitomagnetico generato da un tale sistema. In particolar modo studiamo il campo generato da un corpo rotante stazionario di momento angolare \vec{J} . Il potenziale vettore di tale sistema è dato da (1.15). Valutando \vec{A}_g in un punto lontano dal corpo rotante ($|x| \gg r$, con r dimensione tipica della rotazione), è possibile espandere il termine $1/|\vec{x} - \vec{y}|$ in serie di Taylor; se arrestiamo lo sviluppo al primo ordine otteniamo:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} = \frac{1}{|\vec{x}|} + y^j \partial_j \frac{1}{|\vec{x}|} + o\left(\frac{r}{|\vec{x}|}\right)^2 \approx \frac{1}{|\vec{x}|} - \frac{y^j x_j}{|\vec{x}|^2} \quad (2.4)$$

che, sostituito in (1.15), dà, dopo alcuni conti,

$$\vec{A}_g = \frac{4G}{c^2} \frac{(\vec{J}/2) \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3} \quad (2.5)$$

Nel caso elettromagnetico il potenziale vettore di un dipolo magnetico $\vec{\mu}$ è dato dalla formula

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mu} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3} \quad (2.6)$$

Confrontando le due espressioni possiamo dunque affermare che una massa rotante con momento angolare \vec{J} può essere considerata, a distanze molto più grandi della dimensione tipica della rotazione, un momento di dipolo gravitomagnetico, che definiamo in questo modo: $\vec{\mu}_g = \frac{1}{2}\vec{J}$.

2.3 Effetto Lense-Thirring

Nel caso elettromagnetico un dipolo magnetico di momento $\vec{\mu}$ genera un campo magnetico

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3\vec{r}(\vec{\mu} \cdot \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{\mu}}{r^3} \right). \quad (2.7)$$

Sostituendo ora

$$\mu_0 \longleftrightarrow -\frac{8\pi G}{c^2} \quad e \quad \vec{\mu} \longleftrightarrow \frac{\vec{J}}{2}$$

otteniamo il campo gravitomagnetico

$$\vec{B}_g = -\frac{2G}{c^2} \left(\frac{3\vec{r}((\vec{J}/2) \cdot \vec{r})}{r^5} - \frac{(\vec{J}/2)}{r^3} \right). \quad (2.8)$$

Consideriamo che a generarlo sia una grossa massa che ruota, ad esempio la Terra e inseriamo un giroscopio con momento angolare \vec{L} che vi orbiti attorno. Esso risentirà di un momento

$$\vec{\tau}_g = \vec{L} \times \vec{B}_g \quad (2.9)$$

e dunque

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_g = \vec{L} \times \vec{B}_g. \quad (2.10)$$

Ciò significa che il momento angolare \vec{L} precessa, e lo fa con velocità angolare $\vec{\Omega}$. Per trovarla basti considerare che $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$. Quindi:

$$\vec{\Omega}_{LT} = \frac{G}{c^2} \left(\frac{3\vec{r}(\vec{J} \cdot \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{J}}{r^3} \right). \quad (2.11)$$

Questo effetto prende il nome di effetto Lense-Thirring, o anche *frame dragging*.

2.4 Effetto Ampère

Come in elettromagnetismo due fili percorsi da corrente sentono una forza che li attrae (o respinge a seconda del verso della corrente), nel caso gravitomagnetico due correnti di massa dovrebbero sentire lo stesso effetto, ovviamente scalato delle opportune costanti. Ad oggi non esistono test sperimentali che verifichino questo effetto; in questo lavoro di tesi proveremo a sviluppare un'idea di V. M. Braginsky [4] per rilevare il fenomeno e vedremo se è possibile effettuare una misura di una tale forza.

Parte II

Esperimento di tipo Ampère

Capitolo 3

Studio preliminare

L'esperimento di cui vogliamo studiare la fattibilità in questo lavoro di tesi è l'analogo gravitomagnetico dell'esperimento di Ampère dove al posto delle correnti elettriche abbiamo correnti di massa. Nel dettaglio vogliamo studiare in laboratorio la forza che esercita un corpo rotante, che sarà la nostra sorgente, su una massa in rotazione, che fungerà da detector, posta su un braccio di una bilancia a torsione. Studieremo quindi il campo \vec{B}_g lungo l'asse di simmetria e la sua interazione con un dipolo gravitomagnetico $\vec{\mu}_g$.

Se considerassimo la sorgente e il detector come punti senza estensione avremmo una forza pari a

$$\vec{F} = 6 \frac{G}{c^2} \frac{\vec{J} \cdot \vec{J}_D}{d^4} \quad (3.1)$$

con \vec{J} momento angolare della sorgente, \vec{J}_D momento angolare del rivelatore e d la distanza tra i due oggetti. Nel paragrafo 3.2 faremo un'analisi generale del rapporto segnale/rumore aspettato, che ci aiuterà a capire per quale motivo riteniamo il set up sperimentale proposto quello che più si adatta al nostro problema. Prima però analizziamo il segnale che dobbiamo rivelare.

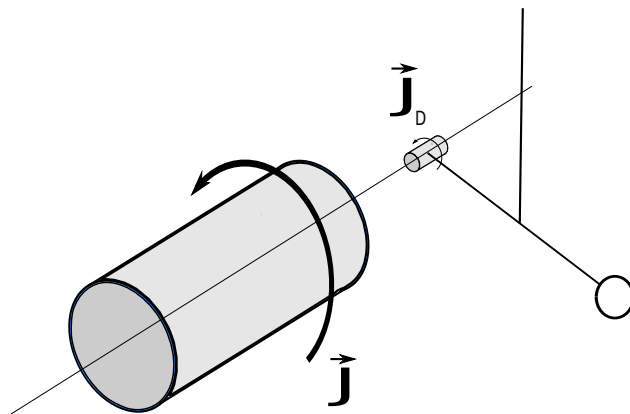


Figura 3.1: Schema dell'esperimento: un cilindro rotante attorno al proprio asse è la sorgente del campo gravitomagnetico. Su un braccio di una bilancia a torsione è posta una massa più piccola che ruota sullo stesso asse.

3.1 Il segnale

Ciò che dobbiamo fare è determinare come varia la forza tra un \vec{J} esteso e uno puntiforme al variare dei parametri di cui disponiamo, come ad esempio la distanza tra i corpi e le dimensioni della sorgente. Per prima cosa dobbiamo dunque determinare il campo gravitomagnetico \vec{B}_g generato da un corpo esteso che ruota attorno al proprio asse di simmetria. Limitiamo per ora lo studio del campo \vec{B}_g lungo l'asse di simmetria, perché supponiamo che questo sia allineato con la direzione di $\vec{\mu}_g$. Procederemo ora con la trattazione utilizzando i risultati dell'elettromagnetismo e sostituiremo a questi le grandezze e i valori opportuni delle costanti per portarci al caso gravitomagnetico.

Studieremo diverse geometrie per la sorgente, in modo da poter trovare quella che ci darà il segnale più intenso.

3.1.1 Cilindro cavo

Iniziamo il nostro studio con una spira circolare percorsa da corrente.

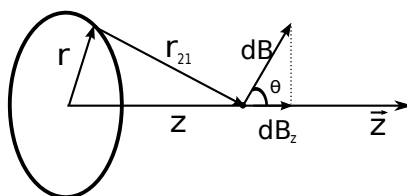


Figura 3.2: Calcolo del campo magnetico sull'asse di una spira circolare percorsa da corrente.

Il campo magnetico generato da tale distribuzione lungo l'asse di simmetria (sia l'asse z) è uguale a

$$B_z = \frac{\mu_0}{2} I \frac{r^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (3.2)$$

con riferimento a figura 3.2. Questo equivale a un campo gravitomagnetico

$$B_g = -\frac{4\pi G}{c^2} \rho \omega r \frac{r^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (3.3)$$

Noi sappiamo che il campo generato da una spira percorsa da corrente può essere considerato di tipo dipolare (lo stesso vale per l'equivalente gravitomagnetico) a grandi distanze dalla spira stessa. Cerchiamo ora di valutare quale sia il limite di una tale affermazione. Se proviamo a fare un grafico dell'andamento del campo secondo la formula (3.2) e lo confrontiamo con l'andamento dipolare

$$B_z = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \Sigma \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \right) = 2 \frac{\mu_0}{4\pi} I \pi r^2 \frac{1}{z^3} \quad (3.4)$$

dove I è la corrente che circola nella spira e Σ l'area della stessa, troviamo il risultato di figura 3.3.

Questo ci permette di dire che l'approssimazione di dipolo è valida fino a quando non siamo a distanze confrontabili con il raggio della spira. Per questo motivo non utilizziamo l'approssimazione di dipolo.

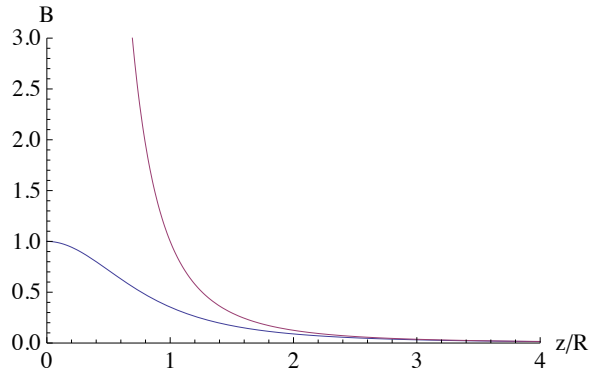


Figura 3.3: Confronto tra soluzione generale e soluzione dipolare. La linea in blu è la soluzione generale, quella in rosso è la soluzione per un dipolo ($z \gg r$).

Estendiamo quanto detto al caso di un cilindro cavo lungo L , di raggio interno r_{int} e raggio esterno r_{ext} . Il campo \vec{B}_g sarà dato da:

$$\vec{B}_g = -\frac{4\pi G}{c^2} \rho \omega \int_{r_{int}}^{r_{ext}} \int_{z_1}^{z_1+L} \frac{r^3}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dr dz \quad (3.5)$$

che dà come risultato:

$$\begin{aligned} \vec{B}_g = -\frac{4\pi G}{c^2} \rho \omega \left\{ L \cdot \left(\sqrt{r_{ext}^2 + (L + z_1)^2} - \sqrt{r_{int}^2 + (L + z_1)^2} \right) + \right. \\ \left. + z_1 \cdot \left(-\sqrt{r_{ext}^2 + z_1^2} + \sqrt{r_{int}^2 + z_1^2} + \sqrt{r_{ext}^2 + (L + z_1)^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \sqrt{r_{int}^2 + (L + z_1)^2} \right) \right\} \quad (3.6) \end{aligned}$$

con riferimento a figura 3.4.

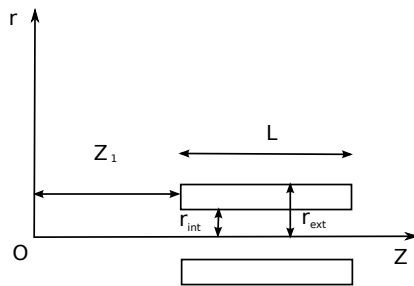


Figura 3.4: Sezione del sistema. Studiamo il campo \vec{B}_g all'origine, al variare dei parametri z_1, L, r_{int}, r_{ext} .

Il risultato è una funzione di 4 parametri: z_1, L, r_{int} e r_{ext} .

Come prima cosa vogliamo studiare l'andamento del campo e della forza al variare della distanza z_1 . A questo scopo fissiamo dei valori tipici per il nostro

esperimento per i parametri

$$L = 0.15 \text{ m}, \quad r_{int} = 0.03 \text{ m}, \quad r_{ext} = 0.17 \text{ m}, \quad \omega = 25000 \text{ rad/s}, \quad \rho = 19000 \text{ Kg/m}^3$$

e studiamo l'andamento del campo \vec{B}_g in funzione di z_1 . Otteniamo i risultati illustrati in figura 3.5.

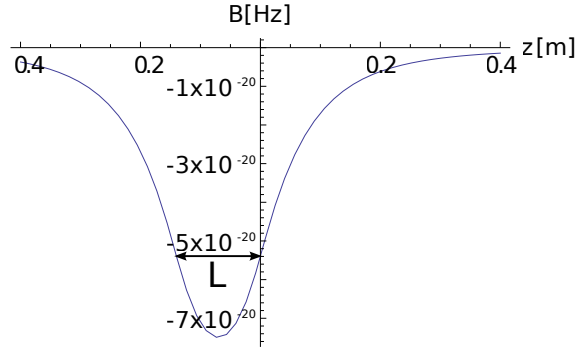


Figura 3.5: $\vec{B}_g(z_1)$. Campo gravitomagnetico di un cilindro in rotazione. Si noti che il massimo del campo magnetostatico si ha per $z_1 = -L/2$, ossia il punto che meno risente degli effetti di bordo.

Per avere la forza sul detector assumiamo $\vec{J} = 2 \hat{z} \text{ Kg m}^2/\text{s}$. In questo modo,

$$U = -\vec{B}_g \cdot \frac{\vec{J}}{2} = -(B_g)_z \quad e \quad \vec{F} = -\nabla U = \frac{\partial (B_g)_z}{\partial z} \quad (3.7)$$

Il risultato si può apprezzare in figura 3.6.

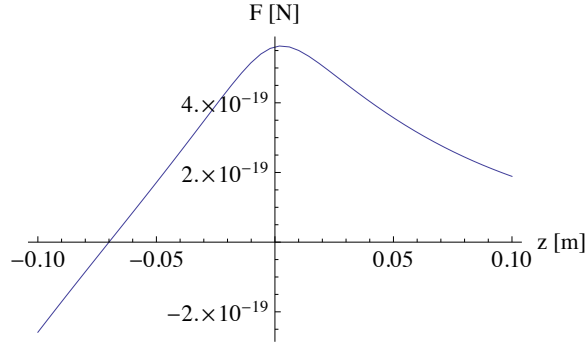


Figura 3.6: Forza sul detector in funzione della distanza.

Si può vedere che il massimo della forza si ha per $z_1 \approx 0$. In particolare, utilizzando le equazioni (3.6) e (3.7) ed espandendo la derivata seconda di \vec{B}_g in serie di potenze di z_1 otteniamo, fermandoci al primo ordine,

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 B}{\partial z_1^2} \right|_{z_1=0+\varepsilon} &= -\frac{L^3}{(L^2 + r_{ext}^2)^{3/2}} + \frac{3L}{\sqrt{L^2 + r_{ext}^2}} + \frac{L^3}{(L^2 + r_{int}^2)^{3/2}} - \frac{3L}{\sqrt{L^2 + r_{int}^2}} + \\
&+ \varepsilon \left(-\frac{3}{r_{ext}} + \frac{3L^4}{(L^2 + r_{ext}^2)^{5/2}} - \frac{6L^2}{(L^2 + r_{ext}^2)^{3/2}} + \frac{3}{\sqrt{L^2 + r_{ext}^2}} + \right. \\
&\left. + \frac{3}{r_{int}} - \frac{3L^4}{(L^2 + r_{int}^2)^{5/2}} + \frac{6L^2}{(L^2 + r_{int}^2)^{3/2}} - \frac{3}{\sqrt{L^2 + r_{int}^2}} \right) + o(\varepsilon^2)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Se alla (3.8) sostituiamo i valori desiderati per le variabili del sistema, otteniamo una stima della distanza alla quale la forza è massima e sarà circa quello il punto in cui posizioneremo il detector (con i valore suddetti, troviamo $z_1 \approx 3.5 \text{ mm}$). Assodato questo fatto, agiamo sugli altri parametri per ottimizzare la geometria del sistema.

Per prima cosa stabiliamo che r_{int} sarà il più piccolo possibile: questo perché vorremo avere la maggior quantità di massa nella lunghezza L , tenendo presente che deve esserci lo spazio per il sensore. Prenderemo dunque $r_{int} = 0.03 \text{ m}$.

Per quanto riguarda L , avrà senso spingersi in lunghezza fino ad arrivare al limite in cui il detector vedrà ogni spira circolare, di cui è costituito il cilindro, come un dipolo: in quel caso il campo cadrà come x^{-3} e dunque non darà grosso contributo alla forza. Nel grafico di figura 3.7 abbiamo raggruppato i due parametri rimasti liberi (L e r_{ext}) in un solo. Per fare questo abbiamo definito $\alpha = L/r_{ext}$ e abbiamo imposto $\rho\pi(r_{ext}^2 - r_{int}^2) \cdot L = M$ con M massa totale della sorgente (che fissiamo a 250 Kg). Da questo abbiamo ricavato $r_{ext}(\alpha)$, che poi abbiamo sostituito nell'espressione della forza (eqs. (3.6) e (3.7)). Questo ci permette di fare una considerazione generale, ossia che la configurazione ottimale, come si vede in figura (e come si trova più precisamente con una derivata) è quella per cui $L \approx 0.86 r_{ext}$, che, per un cilindro, è una geometria che si avvicina a una sfera. Si noti anche che al crescere del rapporto L/r_{ext} , la forza tende a calare: questo perché abbiamo fissato la massa totale. Infatti, nel caso in cui $L \gg r_{ext}$ il detector "vede" meno massa e ne risente in quantità minore.

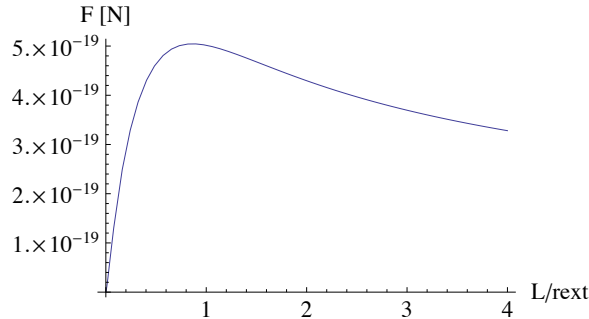


Figura 3.7: Campo \vec{B}_g in funzione del rapporto $\alpha = L/r_{ext}$. Abbiamo fissato : $z_1 = 0.0035$, $r_{int} = 0.03 \text{ m}$. α è il rapporto L/r_{ext} .

Se dunque fissiamo il valore della massa a 250 Kg e il raggio interno a 0.03 m , troviamo che la configurazione ottimale per questa geometria è di $r_{ext} = 0.17\text{ m}$ e $L = 0.15\text{ m}$. L'andamento della forza con questi valori è dato da figura 3.6. Si trova con questa geometria che la forza massima è uguale a

$$F_{max} \approx 5 \cdot 10^{-19}\text{ N}.$$

Ricordiamo tuttavia che per arrivare a questo risultato abbiamo imposto $\omega = 25000\text{ rad/s}$ per un cilindro di 250 Kg , raggio 17 cm e lunghezza 15 cm . Purtroppo un tale oggetto non può essere spinto a una velocità così elevata, perché la forza centrifuga sarebbe superiore alla tensione interna del materiale e il cilindro si frantumerebbe. Una velocità di rotazione raggiungibile con l'attuale tecnologia si calcola con la formula

$$\sigma = \rho r^2 \omega^2, \quad (3.9)$$

dove σ è lo stress cui è sottoposto un corpo in rotazione a velocità angolare ω . La formula (3.9) vale nel caso di un anello di raggio r , ma si può vedere che nel caso di un cilindro cavo il valore che si calcola con (3.9) è dello stesso ordine di grandezza del valore che si sarebbe trovato usando la formula esatta [9].

Dai tabulati abbiamo preso lo stress di rottura del Tungsteno e con tale valore abbiamo trovato $\omega \sim 2500\text{ rad/s}$ vale a dire un ordine di grandezza inferiore a quella considerata. Poiché la forza cresce linearmente con ω , ci aspettiamo di avere una diminuzione della forza della stessa quantità. La forza massima che possiamo ottenere è dunque

$$F_{max} \approx 5 \cdot 10^{-20}\text{ N}. \quad (3.10)$$

D'ora in poi considereremo sempre $\omega = 2500\text{ rad/s}$.

3.1.2 Cilindro pieno con incavo

Facciamo un ulteriore passo verso una configurazione ottimizzata: riempiamo gradualmente il cilindro. Per poter mettere la massa maggiore lasceremo un incavo grande a sufficienza per il sensore.

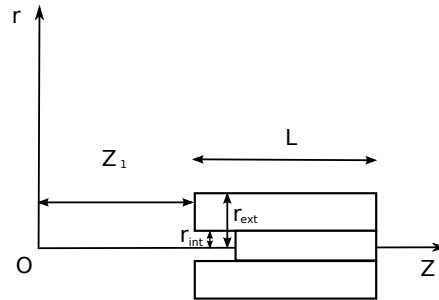


Figura 3.8: Schema della geometria studiata in questo paragrafo

Utilizzando l'equazione (3.6) due volte, una per un cilindro cavo lungo 0.03 m e di raggio $r_{int} = 0.03\text{ m}$ e una per un cilindro pieno lungo $(L - 0.03)\text{ m}$ e raggio r_{ext} troviamo il campo gravitomagnetico \vec{B}_g (di cui non riportiamo l'espressione

esplicita per motivi di spazio) in funzione di L , r_{ext} e z_1 . Come fatto nel precedente paragrafo, cerchiamo il massimo della forza al variare di z_1 . A questo scopo fissiamo provvisoriamente dei valori plausibili per i parametri L e r_{ext} , che studieremo in seguito. Abbiamo dunque:

$$L_{incavo} = 0.03m, \quad r_{int} = 0.03m, \quad L = 0.15m, \quad r_{ext} = 0.17m$$

Si trova il grafico 3.9.

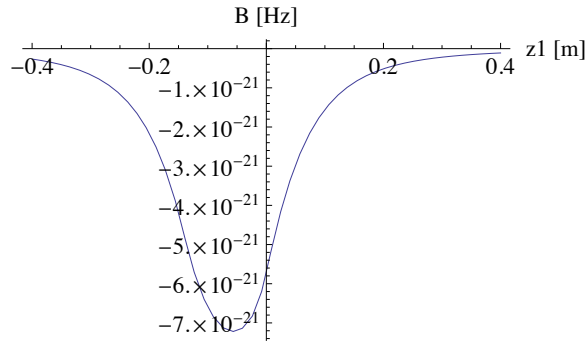


Figura 3.9: Andamento del campo \vec{B}_g in funzione della distanza z_1 .

La forza poi è data dal gradiente del campo, che dà i risultati di figura 3.10.

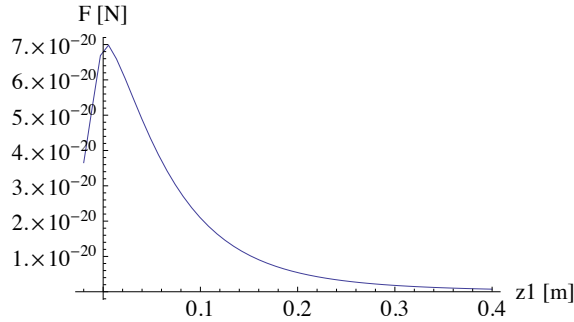


Figura 3.10: Andamento della forza in funzione della distanza z_1 .

Studiando la derivata si trova che la forza ha un massimo in $z_1 \approx 0.001 m$. Agiamo ora sui parametri L e r_{ext} . Questi sono legati dalla relazione:

$$\rho\pi (r_{ext}^2 \cdot L - r_{int}^2 \cdot 0.03) = M \quad (3.11)$$

Possiamo scrivere $L = \alpha r_{ext}$ e ripetere i passaggi del paragrafo precedente per ottimizzare alpha (questa volta per $z_1 = 0.001 m$). Si ottiene che $\alpha_{opt} \approx 1.07$, ossia

$$r_{ext} \approx 0.16 m \quad e \quad L \approx 0.17 m. \quad (3.12)$$

In questo caso la forza massima che si può ottenere è

$$F_{max} \approx 7 \cdot 10^{-20} N$$

3.1.3 Guscio sferico

Dal momento che con le geometrie precedenti ci avviciniamo sempre più a una sfera, studiamo in questo paragrafo il caso di un guscio sferico.

Per avere il campo gravitomagnetico del guscio sferico dobbiamo risolvere l'integrale:

$$\vec{B}_g = -\frac{4\pi G}{c^2} \rho\omega \iint_C \frac{r^4}{(r^2 + z^2)^{3/2}} d\theta dr \quad (3.13)$$

con C corona circolare di cui in figura 3.11.

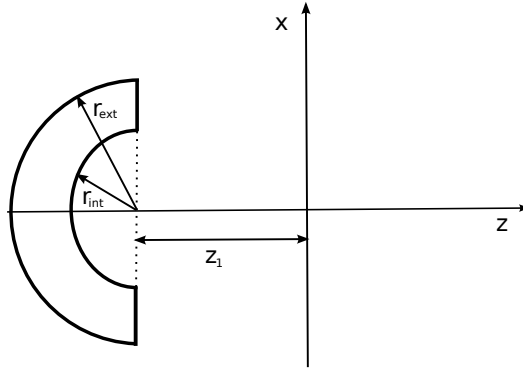


Figura 3.11: Schema della geometria che studiamo in questo paragrafo. Abbiamo un guscio sferico a distanza z_1 dall'origine, e vogliamo studiare il campo sull'asse.

Per valutare gli estremi di integrazione operiamo una traslazione della coordinata z , in modo che $z' = z + z_1$. In questo modo l'integrale da risolvere è:

$$\begin{aligned} \vec{B}_g &= -\frac{4\pi G}{c^2} \rho\omega \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \int_{r_{int}}^{r_{ext}} \frac{r^4}{(r^2 + z'^2)^{3/2}} d\theta dr \\ &= -\frac{4\pi G}{c^2} \rho\omega \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \int_{r_{int}}^{r_{ext}} \frac{r^4}{(r^2 + r^2 \cos^2 \theta + z_1^2 - 2z_1 \cos \theta)^{3/2}} d\theta dr \end{aligned} \quad (3.14)$$

che purtroppo non è risolvibile banalmente. Se lo risolviamo numericamente, a passi di 1 mm , otteniamo i risultati di figura 3.12. Si noti che se in questo caso abbiamo r_{int} fisso, allora r_{ext} è determinato immediatamente dalla condizione $M = 250\text{ Kg}$. Abbiamo quindi $r_{int} = 0.03\text{ m}$ e $r_{ext} = 0.18\text{ m}$.

La forza è mostrata in figura 3.13.

Si trova, con questa geometria, che la forza massima si ha per $z_1 \approx 0$. Si noti che questa geometria è quella che, a parità di massa ed ω , dà la forza maggiore, ossia

$$F_{max} \approx 1.25 \cdot 10^{-19}\text{ N}.$$

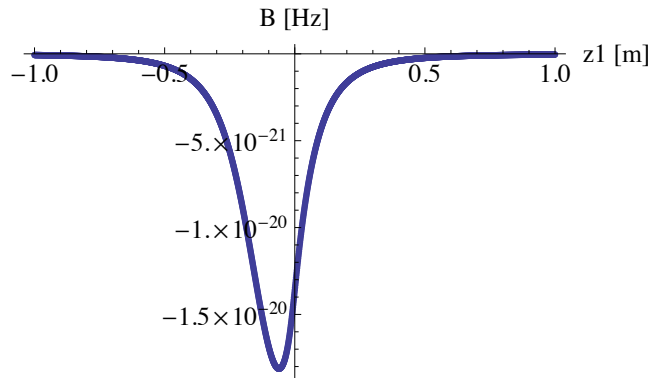


Figura 3.12: Campo gravitomagnetico generato da un guscio sferico in rotazione attorno al proprio asse di simmetria, al variare della distanza lungo l'asse.

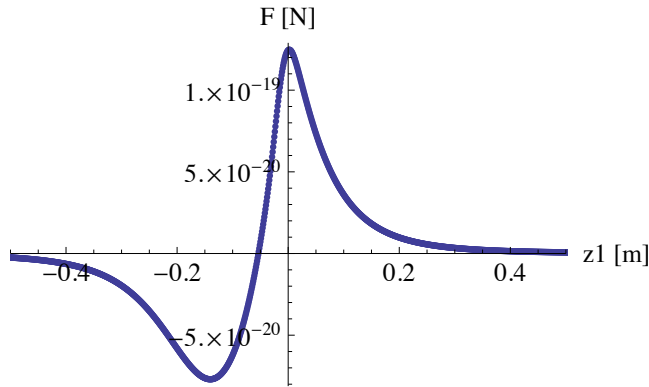


Figura 3.13: Forza esercitata da un guscio sferico in rotazione attorno al proprio asse, al variare della distanza lungo l'asse.

3.2 Il rumore

La misura che facciamo non è una misura diretta della forza, ciò che misuriamo è invece lo spostamento indotto da questa su un oscillatore armonico, la cui equazione è

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = F_{mis}, \quad (3.15)$$

con F_{mis} forza da misurare. Allo scopo di massimizzare lo spostamento sarebbe conveniente avere la forza con una componente spettrale massima nei pressi della frequenza di risonanza dell'oscillatore. Per fare questo possiamo pensare di modulare la forza tramite una modulazione della frequenza di rotazione del segnale nell'equazione (3.6), cioè sostituiamo ω con

$$\Omega = \Omega_0 e^{i\omega_{mod}t}. \quad (3.16)$$

In un sistema reale, tuttavia, oltre alla forza dovuta al segnale esistono almeno altre due forze di rumore che agiscono sul sistema: la prima è la forza di Langevin di fluttuazione termica F_{th} con spettro di potenza

$$S_{F_{Th}F_{Th}} = 4k_B T \frac{m\omega_0}{Q} \quad (3.17)$$

dove k_B è la costante di Boltzmann, T la temperatura del detector ed ω_0 la frequenza di risonanza del sistema. La seconda forza che agisce sul sistema è la forza di retroazione del readout F_{ba} generata dal sistema di trasduzione-amplificazione. L'equazione del moto prende quindi la forma

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = F_{mis} + F_{th} + F_{ba}. \quad (3.18)$$

Prendendo la trasformata di Fourier dell'equazione e risolvendo per ciascuna forza singolarmente si ottiene

$$x(\omega) = \frac{F_{mis} + F_{Th} + F_{ba}}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega\omega_0}{Q}}, \quad (3.19)$$

dove ω_0 è la frequenza di risonanza. Lo spostamento totale in uscita dallo stadio di amplificazione è

$$x_{nTOT} = x_n + \frac{F_{ba} + F_{Th}}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\frac{\omega\omega_0}{Q}} + \frac{F_{mis}}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\frac{\omega\omega_0}{Q}}, \quad (3.20)$$

dove x_n è rumore additivo dovuto al readout.

Si noti che la meccanica quantistica pone il vincolo ([11])

$$S_{x_n x_n} S_{F_{ba} F_{ba}} \geq \frac{\hbar^2}{4}, \quad (3.21)$$

fatto che sfrutteremo in seguito per ridurre il numeri di parametri.

A questo punto, anziché considerare un amplificatore-trasduttore reale, ne consideriamo uno ideale e pensiamo il rumore dell'elettronica e termico come un'ulteriore forza sul sistema, che chiamiamo F_n e che quindi rappresenta tutto il rumore (si veda figura 3.14).

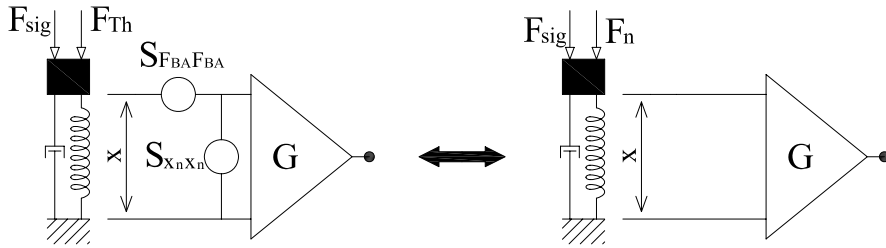


Figura 3.14: Schema della semplificazione che adottiamo. Raggruppiamo tutto il rumore del sistema sotto un'unica forza che chiamiamo F_n .

Affinché questo secondo approccio descriva lo stesso sistema di partenza, dev'essere soddisfatta l'uguaglianza

$$\frac{F_n}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega\omega_0}{Q}} = \frac{F_{ba} + F_{Th}}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega\omega_0}{Q}} + x_n. \quad (3.22)$$

cioè

$$F_n = m \left((\omega_0^2 - \omega^2) + i \frac{\omega \omega_0}{Q} \right) x_n + F_{ba} + F_{Th} \quad (3.23)$$

In questo modo possiamo confrontare la F_n con la forza che vogliamo misurare perché agiscono sullo stesso punto. Inoltre, se studiamo lo spettro di potenza di F_n in funzione dell'unico parametro libero ω (supponiamo $S_{F_{ba}F_{ba}}$ e $S_{F_{Th}F_{Th}}$ costanti), notiamo che questo ha un minimo per $\omega = \omega_0$. Ciò significa che se moduliamo la frequenza di rotazione della sorgente a una frequenza $\omega_{mod} \approx \omega_0$ otteniamo il rapporto segnale-rumore più favorevole. Lo spettro di F_n è presentato in figura 3.15 .

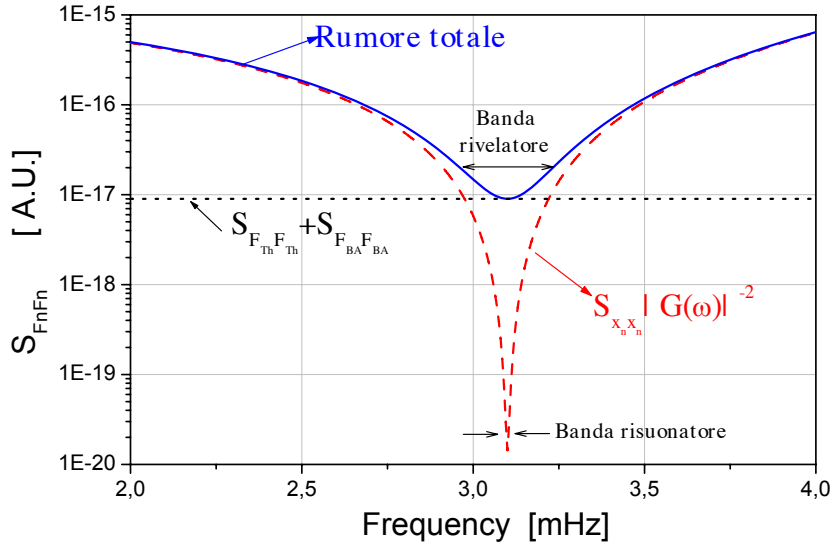


Figura 3.15: Spettro di potenza di F_n . Si noti che lo spettro ha un minimo per ω_0 che in questo caso è $\sim 3 \text{ mHz}$. I valori degli spettri sono puramente indicativi e non corrispondono al nostro set up.

A livello sperimentale ci chiediamo quanto possiamo rilassare l'ipotesi $\omega_{mod} = \omega_0$. Per fare questo andiamo ad indagare la larghezza di banda $\Delta\omega$ del rumore, studiando la funzione

$$S_{F_n F_n} = m^2 \left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega_0^4}{Q^2} \right) S_{x_n x_n} + S_{F_{Th} F_{Th}} + S_{F_{ba} F_{ba}}, \quad (3.24)$$

dove si è usata la (3.23) e si è assunto che le sorgenti di rumore x_n , F_{ba} e F_{Th} siano scorrelate.

Nel caso di un oscillatore armonico forzato, la larghezza di banda è per definizione data da $\Delta\omega = \omega_0/Q$ e, poiché per un buon oscillatore $Q \approx 10^6$, la condizione $\omega_{mod} = \omega_0$ risulta particolarmente impegnativa. Fortunatamente

la larghezza di banda del rumore si comporta in modo leggermente diverso. Riscrivendo l'equazione (3.24) si ottiene:

$$\begin{aligned} S_{F_n F_n} &= m^2 S_{x_n x_n} \left((\omega_0^2 - \omega^2) + \omega_0^4 \left(\frac{1}{Q^2} + \frac{1}{m^2 \omega_0^4} \frac{S_{F_{th} F_{th}} + S_{F_{ba} F_{ba}}}{S_{x_n x_n}} \right) \right) = \\ &= m^2 S_{x_n x_n} \left((\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{\omega_0^4}{Q_{eff}^2} \right), \end{aligned} \quad (3.25)$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo definito un fattore di merito efficace Q_{eff} tale che

$$\frac{1}{Q_{eff}^2} = \frac{1}{Q^2} + \frac{1}{m^2 \omega_0^4} \frac{S_{F_{th} F_{th}} + S_{F_{ba} F_{ba}}}{S_{x_n x_n}} \approx \frac{1}{m^2 \omega_0^4} \frac{S_{F_{th} F_{th}} + S_{F_{ba} F_{ba}}}{S_{x_n x_n}}. \quad (3.26)$$

Da questo troviamo una larghezza di banda efficace $\Delta\omega_{eff}$ che è uguale a

$$\Delta\omega_{eff} = \frac{\omega_0}{Q_{eff}} = \frac{1}{m\omega_0} \sqrt{\frac{S_{F_{th} F_{th}} + S_{F_{ba} F_{ba}}}{S_{x_n x_n}}}. \quad (3.27)$$

Siccome il rumore termico è molto maggiore della forza di back-action, possiamo tranquillamente trascurare il secondo addendo in (3.27). Per valutare questa espressione si può procedere in due modi: il primo è quello di definire una costante di richiamo k_n del rumore tale che $k_n^2 = \frac{S_{F_n F_n}}{S_{x_n x_n}}$ e vedere dove lo spettro di potenza è minimo in funzione di questo parametro. In questo caso otteniamo, per $\omega_0 \sim 2\pi \cdot 10^{-3}$ rad/s, $\Delta\omega_{eff} \approx 10^{-1}$ rad/s. Il secondo approccio è di valutare sperimentalmente quanto valgono i vari contributi al rumore e inserirli in (3.27) (utilizzando, per esempio, i risultati di [7], troviamo una larghezza di banda sperimentale di $\Delta\omega_{eff} = 0.26 \omega_0$).

In entrambi i casi comunque si trova che nell'impostare ω_{mod} dobbiamo stare entro un intervallo $\Delta\omega_{eff}$ (e non $\Delta\omega$), che risulta un obiettivo sperimentalmente raggiungibile. È inoltre importante avere un $\Delta\omega_{eff}$ abbastanza ampio perché eventuali drift di ω_{mod} all'interno di $\Delta\omega_{eff}$ non darebbero praticamente nessun deterioramento del rapporto S/N (si veda paragrafo 3.2.1).

Quale oscillatore scegliere

Come già affermato, il contributo maggiore al rumore è dato dalla componente termica, che pone un limite sotto al quale non è possibile vedere il segnale. Sulla base di questo noi scegliamo l'oscillatore da adottare in questo esperimento. Infatti, il rumore termico è dato da

$$4k_B T \frac{m\omega_0}{Q}, \quad (3.28)$$

quindi, per minimizzarlo, possiamo agire su T , m e ω_0 . Per quanto riguarda la temperatura, il meglio che possiamo fare è arrivare a qualche *Kelvin*; potremmo inoltre diminuire la massa, utilizzando dei nano oscillatori meccanici (con i quali si sono raggiunti rumori termici dell'ordine di zN/\sqrt{Hz} [10]). Questo, tuttavia,

non ha molto senso, poiché il rapporto segnale-rumore cresce con m^1 , quindi è vero che diminuendo la massa avremmo un rumore termico minore, ma in tal modo perderemmo più segnale della quantità di rumore che toglieremmo. Quello che vorremmo è dunque una frequenza di risonanza ω_0 molto bassa e una massa m alta. Se prendessimo una molla con una costante di richiamo molto piccola ($\sim 10^{-9} N/m$), questa non sarebbe in grado di sostenere una massa dell'ordine dell'ettogrammo senza rompersi. Il miglior apparato per la misura che dobbiamo effettuare è invece una bilancia a torsione, poiché con essa riusciamo a disaccoppiare la forza di gravità dalla forza che vogliamo misurare (dal momento che sono su piani ortogonali tra loro). In questo modo possiamo caricare un discreto peso e, allo stesso tempo, avere una costante di richiamo molto piccola.

3.2.1 Estrazione del segnale e rapporto segnale-rumore

Per estrarre il segnale utilizziamo un amplificatore lock-in. Questo è composto da un mixer seguito da un filtro passa-basso. Il mixer è un sistema a due ingressi che in uscita dà il prodotto dei due segnali in ingresso; il filtro passa basso è un circuito che “taglia” lo spettro al di sopra di una certa frequenza.

Nel nostro caso, i due segnali in ingresso al mixer sono

- La forzante che vogliamo misurare $F_0 \cos \omega_0 t$ (data dal gradiente di (3.6) e modulata alla frequenza di risonanza dell'oscillatore) più il rumore F_n ;
- Una funzione sinusoidale $\cos(\omega_0 t)$ alla frequenza di risonanza del sistema.

Quindi il segnale in uscita dal mixer e dal passa basso è

$$y' = F_0 \cos \omega_0 t \cos \omega_0 t = \frac{F_0}{2} (\cos 2\omega_0 t + 1) \approx \frac{F_0}{2} \quad (3.29)$$

Lo spettro di potenza in uscita dal mixer e dal passa basso è invece (si veda [6])

$$S_{y'y'}(\omega) = \frac{1}{4} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} \left(S_{F_n F_n}(\omega - \omega_0) + S_{F_n F_n}(\omega + \omega_0) \right), \quad (3.30)$$

dove τ è il tempo di integrazione legato alla frequenza di taglio del passa basso dalla relazione $\delta\nu_{taglio} = \frac{1}{\pi\tau}$. Il lock-in riporta quindi a bassa frequenza il rumore del sistema a frequenza ω_0 e seleziona una parte di questo rumore larga $\Delta\nu_{taglio}$ intorno a ω_0 . L'intervallo di frequenze che viene in questo modo selezionato è tanto più stretto quanto più è elevato il tempo di integrazione τ .

Se ora calcoliamo la varianza del segnale in uscita dal passa basso otteniamo, per τ molto grande,

$$\sigma_{y'}^2 = \frac{1}{2\pi} \int S_{y'y'} d\omega = \frac{1}{4\tau} S_{F_n F_n}(\omega \sim \omega_0) \quad (3.31)$$

vale a dire

¹La varianza di F è data da $\sigma_F^2 = \int S_{FF} d\omega$, quindi è proporzionale a $\frac{m\omega_0}{Q} = \frac{m}{Q} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{Q} \sqrt{k m}$. Il segnale invece è proporzionale a m , dunque il rapporto segnale-rumore cresce come $m^{3/4}$.

$$\sigma_{y'} = \sqrt{\frac{S_{F_{Th}F_{Th}} + S_{F_{ba}F_{ba}}}{4\tau}}. \quad (3.32)$$

A queste due forze possiamo aggiungere il rumore in spostamento dovuto al readout, ottenendo

$$\sigma_{y'} = \sqrt{\frac{S_{F_{Th}F_{Th}} + S_{F_{ba}F_{ba}} + S_{x_n x_n} \frac{m^2 \omega_0^4}{Q^2}}{4\tau}}. \quad (3.33)$$

Il rapporto segnale-rumore è quindi

$$\frac{S}{N} = \frac{F_0/2}{\sqrt{\frac{S_{F_{Th}F_{Th}} + S_{F_{ba}F_{ba}} + S_{x_n x_n} \frac{m^2 \omega_0^4}{Q^2}}{4\tau}}} = \frac{F_0}{\sqrt{\frac{S_{F_{Th}F_{Th}} + S_{F_{ba}F_{ba}} + S_{x_n x_n} \frac{m^2 \omega_0^4}{Q^2}}{\tau}}}. \quad (3.34)$$

La minima ampiezza rivelabile F_0^{min} si ha per $S/N = 1$ e dunque, dal momento che siamo dominati dal rumore termico, il tempo di integrazione minimo per effettuare una misura è

$$\tau \simeq \frac{S_{F_{Th}F_{Th}}}{F_0^2} \quad (3.35)$$

Siccome la forza che dobbiamo rivelare F_0 è dell'ordine di $10^{-19} N/J_D$, ciò che ci manca è valutare il rumore termico nel caso di una bilancia a torsione. Sostituiamo quindi, al posto dell'espressione (3.28), la forma

$$S_{F_{Th}F_{Th}} = 4k_B T \frac{I\omega_0}{Qb^2} \quad (3.36)$$

dove b è la lunghezza dei bracci della bilancia a torsione ($0.5 m$) e I è il suo momento d'inerzia, dato da (trascurando i bracci della bilancia): $I = 2m_D [\frac{1}{12}(l^2 + 4r^2) + b^2]$, con m_D massa del detector ed l la sua lunghezza.

A questo punto dobbiamo definire le caratteristiche del detector \vec{J}_D . Poiché il segnale cresce con \vec{J}_D , vorremmo un momento angolare elevato, tenendo in considerazione che la bilancia di torsione non può sostenere un peso di qualche Kg . Sapendo che $J_D = \frac{1}{2}Mr^2\omega$, un buon compromesso potrebbe essere la scelta dei seguenti valori:

$$r = 0.028 m, \quad l = 0.02 m, \quad m = 0.93 Kg, \quad k = 4 \cdot 10^{-9} N/m$$

dai quali otteniamo $I = 0.46 Kg m^2$, quindi $\omega_0 = \sqrt{k/I} \approx 10^{-4} rad/s$.

La velocità angolare che può sopportare un tale oggetto è di $\sim 11000 rad/s$. Se, con questi valori, valutiamo l'espressione (3.35) a temperatura ambiente ($\simeq 300 K$), otteniamo un tempo di integrazione $\tau \simeq 10^7 s$, che risulta troppo elevato (~ 100 giorni). Se però riuscissimo a portare il detector alla temperatura di qualche Kelvin (per esempio a $4.2 K$, la temperatura dell'*He* liquido), allora avremmo $\tau \simeq 7 \cdot 10^5 s$, che corrisponde a circa una settimana, un tempo di integrazione accettabile.

3.2.2 Attrazione Gravitoelettrica

Oltre alle forze gravitomagnetiche e alle forze di rumore, sull'oscillatore armonico agiscono anche forze gravitoelettriche F_{GE} . Quindi

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = F_{mis} + F_{Th} + F_{ba} + F_{GE} \quad (3.37)$$

Di seguito calcoleremo il valore di F_{GE} e lo confronteremo con F_{mis} .

La forza gravitoelettrica, dovuta al fatto che sia il detector che la sorgente hanno massa, classicamente si calcola a partire dalle equazioni dell'elettrostatica, sostituendo ai risultati i valori opportuni delle costanti. Facciamo un esempio: consideriamo un cilindro cavo (si veda figura 3.16) di materiale conduttore: studiamo il campo elettrico in un punto sull'asse di simmetria.

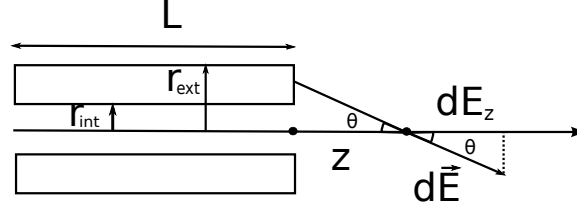


Figura 3.16: Sezione di un cilindro cavo e calcolo del campo lungo l'asse di simmetria

Il campo infinitesimo dE_z sarà dato da

$$dE_z = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{(r^2 + z^2)} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{z\rho dV}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (3.38)$$

Quindi il campo E_z :

$$\begin{aligned} E_z &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_{int}}^{r_{ext}} dr \int_{z_1}^{z_1+L} dz \frac{z\rho r}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{r_{ext}^2 + z_1^2} - \sqrt{r_{int}^2 + z_1^2} - \sqrt{r_{ext}^2 + (L + z_1)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{r_{int}^2 + (L + z_1)^2} \right) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Ossia:

$$\begin{aligned} (E_g)_z &= -2\pi\rho G \left(\sqrt{r_{ext}^2 + z_1^2} - \sqrt{r_{int}^2 + z_1^2} - \sqrt{r_{ext}^2 + (L + z_1)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{r_{int}^2 + (L + z_1)^2} \right) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Il campo E_g in funzione di z_1 e con i valori dei parametri r_{ext} e L ottimali è raffigurato in figura 3.17. Si ricorda che la forza sul sensore è data da

$F_{GE} = (E_g)_z \cdot m_{sensore}$. Nel nostro caso $m \sim 0.93 \text{ Kg}$, quindi il valore della forza sarà circa uguale a quello del campo.

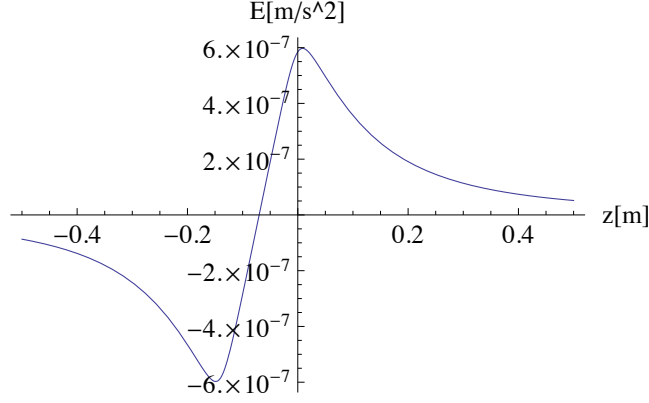


Figura 3.17: Campo gravitoelettrico di un cilindro lungo l'asse di simmetria. Qui $r_{int} = 0.03 \text{ m}$, $r_{ext} = 0.17 \text{ m}$ e $L = 0.15 \text{ m}$. Come si vede, la forza di natura gravitoelettrostatica è di ~ 10 ordini di grandezza superiore alla forza gravitomagnetica.

Di per sè la forza gravitoelettrica è una forza statica, che ha come effetto quello di cambiare la posizione di equilibrio dell'oscillatore ($x_0 \rightarrow x_0 + F_{GE}/k$) e quindi, non avendo componenti a $\omega = \omega_{mod}$, non compare nella formula della sensibilità. Può succedere però che la massa in rotazione cambi la sua posizione a causa delle vibrazioni indotte dalla rotazione o a causa del rumore sismico. Poiché il campo gravitoelettrico dipende dalla posizione z della massa rotante, se quest'ultima vibra di x_{vib} , la forza gravitoelettrica cambia come

$$\Delta F_{GE}(\omega) = \alpha \Delta x_{vib}(\omega), \quad (3.41)$$

dove $\alpha = \left. \frac{\partial F_{GE}}{\partial x} \right|_{x=x_{eq}}$.

Abbiamo calcolato α nel caso di un cilindro vuoto e di un cilindro pieno con incavo, ottenendo, in entrambi i casi, $\alpha \approx 10^{-6} \text{ N/m}$, avendo posto il sensore in $x_{eq} = 0.1 \text{ mm}$ (abbiamo supposto, per questo risultato, di riuscire a determinare la posizione del detector con una precisione del millimetro).

Lo spettro di potenza della forza gravitoelettrica acquisterà quindi una dipendenza dalla frequenza, cioè, usando la (3.41),

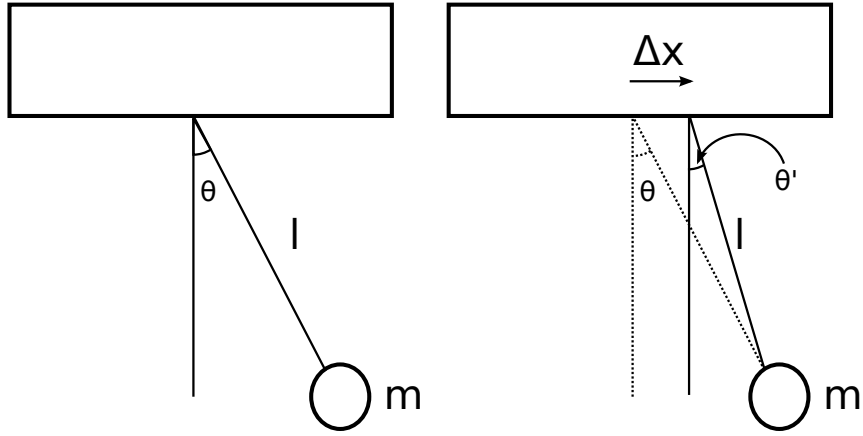
$$S_{F_{GE}F_{GE}}(\omega) = \alpha^2 S_{x_{vib}x_{vib}}(\omega) \quad (3.42)$$

Affinché le fluttuazioni di forza gravitoelettrica non influiscano sulla sensibilità bisogna avere

$$S_{F_{GE}F_{GE}}(\omega = \omega_{mod}) < S_{F_{Th}F_{Th}}(\omega = \omega_{mod}), \quad (3.43)$$

ossia lo spettro di vibrazione deve essere minore di

$$S_{x_{vib}x_{vib}} \leq \frac{1}{\alpha^2} 4k_B T \frac{I\omega_0}{Qb^2} \approx 10^{-20} \text{ m}^2/\text{Hz} \quad (3.44)$$



(a) Se non c'è rumore sismico l'equazione del moto è $l\ddot{\theta} = -g\theta$.
 (b) Se il soffitto si muove di un Δx , allora $\theta' \simeq \theta - \frac{\Delta x}{l}$. L'equazione del moto diventa: $l\ddot{\theta} = -g\theta + g\frac{\Delta x}{l}$.

Figura 3.18: Schema dell'effetto del rumore sismico sull'oscillatore armonico

Questo limite è abbastanza impegnativo, anche se non critico, come vedremo.

Vediamo allora di analizzare qualitativamente quali sono le possibili sorgenti di $S_{x_{vib}x_{vib}}$. Innanzitutto abbiamo il rumore sismico, che però dipende da sito a sito. Per avere una stima possiamo comunque utilizzare il modello di Peterson [8], che dice che per frequenze dell'ordine del mHz ($\omega_{mod} \sim 2\pi \cdot 10^{-3} rad/s$), il valore medio del rumore sismico vale

$$S_{x_{sis}x_{sis}}^{1/2}(\omega) \sim \frac{1}{\omega^2} \cdot 10^{-9} m/\sqrt{Hz}. \quad (3.45)$$

Il rumore sismico in spostamento comunque agisce sia sul pendolo che sulla sorgente. Bisogna quindi vedere se si forma uno spostamento differenziale e se questo soddisfa l'eq. (3.44).

Il punto di aggancio del pendolo e l'ancoraggio del rotore si muovono entrambi di $\Delta x_{sismico}$. Le masse del pendolo quindi seguono la seguente equazione del moto:

$$l\ddot{\theta} = -g\theta + g\frac{\Delta x}{l}, \quad (3.46)$$

con riferimento a figura 3.18. Da questa equazione ricaviamo

$$\theta(\omega)[-l\omega^2 + g] = \frac{g}{l}\Delta x(\omega), \quad (3.47)$$

cioè, visto che la pulsazione di risonanza del pendolo è $\omega_{pendolo} = \sqrt{g/l}$,

$$\theta(\omega) = \frac{\omega_{pendolo}^2}{\omega_{pendolo}^2 - \omega^2} \frac{\Delta x_{sis}(\omega)}{l}. \quad (3.48)$$

Quindi, visto che il basamento (e dunque il rotore), si sposta di Δx_{sis} , lo spostamento relativo tra rotore e massa del pendolo sarà

$$\Delta x_{relativo} = \Delta x_{sis} - l\theta(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega_{pendolo}^2 - \omega^2} \Delta x_{sis}. \quad (3.49)$$

Dal momento che noi lavoriamo a $\omega \ll \omega_{pendolo}$ ($\omega_{mod} \sim 2\pi \cdot 10^{-3}$ rad/s, $\omega_{pendolo} = \sqrt{g/l} \sim \sqrt{10/1} \sim 3$ rad/s), possiamo approssimare l'espressione (3.49) nella forma

$$\Delta x_{relativo} \simeq \left(\frac{\omega}{\omega_{pendolo}} \right)^2 \Delta x_{sis}. \quad (3.50)$$

Usando la (3.45), otteniamo

$$S_{x_{relativo}x_{relativo}}^{1/2} \approx \frac{10^{-9}}{\omega_{pendolo}^2} \approx 1 \cdot 10^{-10} m/\sqrt{Hz}. \quad (3.51)$$

Visto che il valore di (3.51) è grossomodo dello stesso ordine di grandezza della condizione (3.44), sembrerebbe che il rumore sismico non costituisca un grosso problema alla misura.

Per migliorare ulteriormente la sensibilità potremmo studiare una geometria del tipo di figura 3.19.

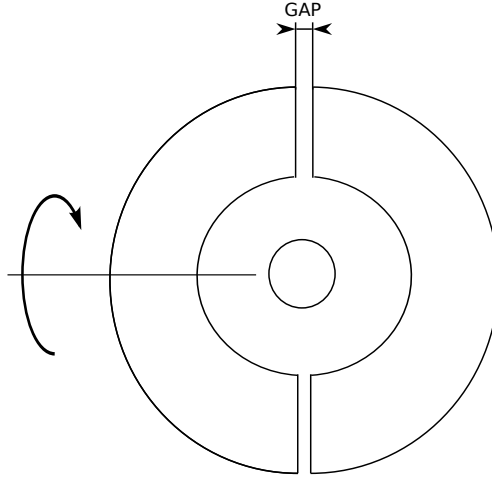


Figura 3.19: Sezione della geometria scelta per migliorare la sensibilità. Il cilindro a sinistra ruota attorno al suo asse mentre quello a destra è fermo.

In questo modo dovremmo ottenere, per un gap che tende a zero, un campo gravitoelettrico tendente a zero all'interno di tutta la cavità. Ciò significa che dovremmo avere una derivata del campo molto piccola. In formule, se abbiamo un $\Delta x_{relativo}$ tra le due masse ed il sensore dovremo avere

$$\Delta F = \alpha' \Delta x_{relativo} \quad (3.52)$$

e ci aspettiamo che $\alpha' \ll \alpha$ (α è dato dalla (3.41)).

Diversa è la situazione in cui è solo uno dei due gusci sferici a muoversi rispetto al sensore. Potremmo avere questa situazione nel caso, per esempio, in cui il sistema di rotazione di uno dei due gusci induca delle vibrazioni spurie al

sistema. Questo caso è peggiore del precedente perché il movimento di uno solo dei due non viene compensato, a livello di campo gravitoelettrico, dal movimento dell'altro. In questo caso, se S_{xx} è maggiore del valore massimo consentito dalla (3.44), bisogna muovere anche l'altro guscio per compensare questo movimento. Bisogna cioè fornire il sistema di un meccanismo di retroazione in grado di mantenere la distanza relativa tra i due gusci costante. Un metodo potrebbe essere quello illustrato in figura 3.20.

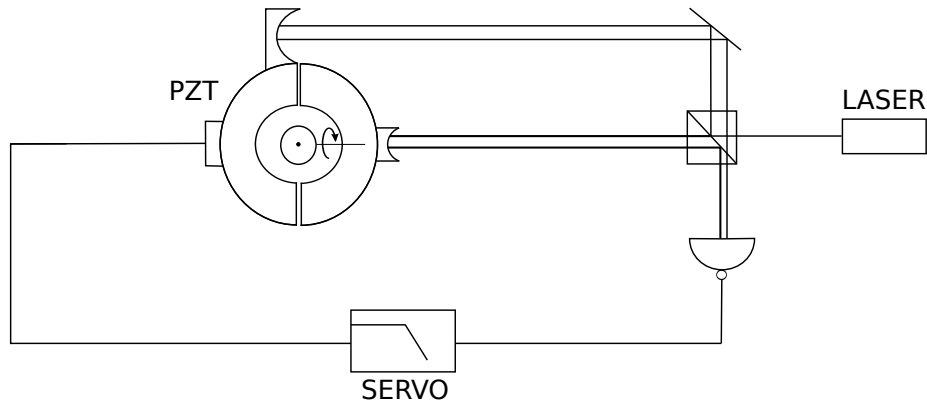


Figura 3.20: Esempio di applicazione dell'interferometria nell'esperimento che abbiamo studiato. Si monta uno specchio sull'asse del guscio sferico che ruota, uno sulla sommità del guscio fermo e si va a vedere come cambia la figura di interferenza. Il meccanismo di controreazione è costituito qui da un filtro (indicato con *PID* in figura), con cui selezioniamo le frequenze che ci interessano, e un piezoelettrico (indicato con *PZT*) che a un impulso elettrico associa uno spostamento meccanico.

Con i metodi dell'interferometria si possono raggiungere sensibilità in spostamento dell'ordine di $\sim 10^{-14\div 15} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$, che quindi possono far raggiungere $S_{x_{relativo}x_{relativo}}$ dello stesso ordine, che dovrebbero essere sufficienti per ottenere la nostra curva di sensibilità.

Conclusioni

In questo lavoro ho calcolato il rapporto segnale/rumore aspettato per un esperimento di Ampère gravitazionale. Il calcolo è stato fatto assumendo per i parametri sperimentali numeri già dimostrati sperimentalmente su sistemi simili, ad eccezione della temperatura della bilancia di torsione, che è stata posta a $4.2 K$ (e non $300 K$). Bilance di torsione sono state già raffreddate ma ancora non si è dimostrato sperimentalmente che il rumore in queste condizioni è dominato dalle fluttuazioni termiche. Un'altra caratteristica del sistema studiato è quella di montare su un braccio di una bilancia un rotore ad alta velocità angolare. A nostra conoscenza non esiste nessun apparato di questo genere, quindi per decidere sulla fattibilità dell'esperimento andranno fatti degli appositi test per verificare se le basse perdite meccaniche dei pendoli torsionali vengono mantenute anche inserendo un rotore.

Ad ogni modo il tempo di integrazione stimato risulta abbastanza grande (giorni). Riteniamo tuttavia che sia possibile una ricerca di materiali e geometrie che possano aumentare di un fattore $2 \div 3$ il segnale, in maniera da rendere il tempo di integrazione inferiore al giorno.

Abbiamo infine stimato quantitativamente il rumore indotto sull'apparato da vibrazioni meccaniche della sorgente. Nel caso di rumore sismico abbiamo visto che questo può essere tollerato. Se, altrimenti, dovessimo avere un rumore di vibrazione superiore a $10^{-10} m/\sqrt{Hz}$ (sia esso di natura sismica o di vibrazione della sorgente), sarebbe opportuno cambiare la geometria del sistema oppure dotarlo di un sistema di controreazione, in modo da stabilizzare la posizione della massa rotante.

Bibliografia

- [1] Alessandro Bettini, *Elettromagnetismo*, Decibel (2003)
- [2] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley & Sons, 1962
- [3] M.P. Hobson, G. Efstathiou, A.N. Lasenby, *General Relativity: an introduction for physicists*, Cambridge (2006)
- [4] V. B. Braginsky, C. M. Caves, K. S. Thorne, *Phys. Rev. D* 8, pp. 2047-2068, 1977
- [5] Athanasios Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, McGraw-Hill - New York (1965)
- [6] Vitale, *Appunti del dottorato*, 1992-1993
- [7] A. Cavalleri, G. Ciani, R. Dolesi, *A new torsion pendulum for testing the limits of free-fall for LISA test masses*
- [8] J. Peterson, *Observations and modeling of seismic background noise*, U.S. Geol. Surv., pages 93-322, 1993
- [9] Warren C. Young, *ROARK'S Formulas for Stress & Strain*, McGraw-Hill, pages 703-704, 1989
- [10] J. Moser et al, *Ultrasensitive force detection with a nanotube mechanical resonator*, Nature Nanotech. 8, 493-496, 2013
- [11] Farid Ya. Khalili et al, *Quantum back-action in measurements of zero-point mechanical oscillations*, arXiv:1206.0793, 2012