Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita"

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA ”TULLIO LEVI-CIVITA”

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Teoria degli Evolutionary Games con insiemi finiti di strategie e approfondimento al caso continuo

Relatore
Prof. Buratto Alessandra

Laureando
Ghezzo Lorenzo

Matricola
1227243

ANNO ACCADEMICO 2023-2024

15/02/2024

Indice

Introduzione

La Teoria degli Evolutionary Games fu idealizzata dal matematico, statistico e biologo britannico Ronald Aylmer Fisher che per primo cercò di dare una spiegazione a quella che è l'approssimativa uguaglianza del rapporto nei sessi dei mammiferi. Il rompicapo che Fisher si pose fu: *perchè la proporzione di sessi è circa la stessa per molte specie, quando la maggioranza dei maschi non si accoppia?* Fisher ipotizzò che misurando il "fitness" dell'individuo maschio in base al numero di prole prodotta, allora tale fitness dipende direttamente dalla distribuzione di uomini e di donne all'interno della popolazione. Quando vi è un numero maggiore di donne nella popolazione allora gli uomini avranno un fitness più alto; viceversa, se vi sono più maschi all'interno della popolazione, le femmine avranno un fitness maggiore. Per maggiori dettagli si veda [6].

Ciò che ne derivò, fu una vera e propria teorizzazione, a livello matematico, degli Evolutionary Games, sviluppata da uno dei più noti matematici biologi. Infatti, grazie a John Maynard Smith, si usa un ramo della Teoria dei Giochi per studiare l'evoluzione di sistemi biologici composti principalmente da una singola specie (vi sono problemi che sono anche composti da due o più specie, o popolazioni). Come visto sopra, per analizzare questo tipo di sistemi è di fondamentale importanza definire e studiare la funzione "fitness" dei singoli individui in base alle caratteristiche strutturali, formali e funzionali del sistema stesso. Nella letteratura della Teoria dei Giochi che tratta sistemi biologici di questo tipo, il payoff dei giocatori viene appunto chiamato "fitness", [si veda 4, p. 710].

La Teoria degli Evolutionary Games è recente: il problema sopra introdotto è stato posto ad inizio del XX secolo, e di conseguenza tutto lo studio a livello matematico è ancora oggi giorno di noto interesse. Tale teoria viene studiata e applicata anche ad altri campi, oltre a quello biologico: infatti, i suoi risultati vengono utilizzati anche per problemi di interesse economico e sociologico, in particolar modo nell'esamina dei comportamenti sociali. La logica con cui andremo a studiare questo argomento è basata su un modello di apprendimento, dove alla base ci sono la raccolta di informazioni e l'imitazione, in particolare come copiare le scelte fatte dagli altri agenti in istanti precedenti, se queste comportano un payoff migliore a tutti i giocatori. I modelli di apprendimento basati sull'imitazione permettono di capire, a posteriori, se gli individui compiono decisioni razionali e di rispondere ad una serie di domande sul comportamento di una data specie. Intraprendere una decisione piuttosto di un'altra, cosa comporta? Avere più informazioni permette di prendere una decisione più razionale?

Per formalizzare il concetto dell'imitazione, nei modelli proposti dalla letteratura dell'argomento, si utilizza il concetto di invasione: se un agente decide di usare una strategia diversa da quella della popolazione e questa comporta un payoff migliore per ognuno di essi, allora anche altri agenti della popolazione osservando questo fatto cambieranno la loro scelta, pertanto tale strategia verrà sempre più usata fino a che non si raggiunge una situazione di equilibrio. Quindi imitazione e invasione sono legati fra di loro, solamente una decisione presa sull'imitazione e/o sulla raccolta di informazioni, permette di attuare una strategia diversa da quella della popolazione, di conseguenza si ha un invasione. Per comprendere meglio l'applicazione che viene fatta in diversi sistemi economici, biologici, ecc... si vedano [2, pp. 1039–1073] e [11, Capitolo 11].
Questa tesi vede al suo interno 3 capitoli:

- Il primo capitolo introduce due concetti base per gli Evolutionary Games, il "replicatore dinamico" e le "Evolutionary Stable Strategy (ESS)", che poi verranno utilizzati in uno dei primi esempi di Gioco Evoluzionario: il gioco Falco-Colomba. Tale sistema studia il comportamento di un'unica popolazione di gatti quando questi devono lottare a due a due, tra di loro, per la conquista di un territorio e delle sue risorse;

- Il secondo capitolo amplia la teoria vista nel primo capitolo, si trattano nel dettaglio proprietà derivanti dalle definizioni di ESS e di replicatore dinamico, per quelli che vengono definiti "Giochi Simmetrici Matriciali". Inoltre, si introducono i "Giochi Simmetrici con spazio dei tratti continuo unidimensionale", considerando spazi continui come insiemi delle strategie ammissibili per i giocatori;

- Il terzo, ed ultimo capitolo, tratta un'altra categoria di problemi: i "Giochi Asimmetrici". A scopo esemplificativo, viene presentato un esempio di gioco asimmetrico in ambito economico: l'entrata di un'azienda in un mercato ove sia già presente al suo interno un'impresa affermata.

Grazie a Ronald Fisher e John Maynard Smith si possono discutere a livello matematico, della teoria degli Evolutionary Games. L'uso dei concetti dei replicatori dinamici, delle ESS (delle sue caratterizzazioni nel caso continuo) e di alcune nozioni base della teoria dei giochi, permettono di analizzare sistemi principalmente in ambito biologico. Però la loro "storia" è così recente che la teoria trova applicazioni anche in ambito economico e sociologico, tanto da dire che il loro grado di espansione non è al momento definibile. Di conseguenza, la teoria che adesso viene usata per l'analisi delle popolazioni, magari, fra qualche anno, verrà "scombinata". A questo proposito, lo stesso John Maynard Smith, nella prefazione del libro di testo "Evolution and the Theory of Games"[10] afferma:

"Quanto è paradossale il fatto che la teoria dei giochi sviluppata per l'ambito economico, sia di più facile lettura per l'ambito biologico. E quanto sia doppiamente paradossale che la teoria degli Evolutionary Games sviluppata per l'ambito biologico, trovi la sua lettura nell'ambito economico".

Capitolo 1

Il Gioco Falco-Colomba

L'obiettivo di questo primo capitolo è quello di dare un chiaro esempio di cosa siano gli Evolutionary Games. In questi giochi è di fondamentale importanza riuscire a formalizzare la funzione di payoff (o fitness) del singolo individuo, in funzione alle decisioni fatte. Come si calcola tale funzione? Nelle sezioni seguenti si darà una risposta a questa domanda, funzionale a come i giochi verranno visti. Però prima di trattare questo argomento, abbiamo bisogno di alcuni concetti base della teoria dei giochi.

1.1 Concetti base della Teoria dei Giochi

Nei libri di Başar [1], di Engelbert [5] e di Li Calzi [3] vengono definiti i concetti più importanti ed utili per lo sviluppo della teoria degli Evolutionary Games. Partendo dalle nozioni alla base della teoria dei giochi, si definisce cosa è un gioco dinamico.

Definizione 1.1 (Gioco Dinamico). *Un gioco viene definito Dinamico se almeno un giocatore può usare una strategia condizionata ad ogni istante sulla base delle azioni, sia degli avversari sia proprie, prese precedentemente durante il gioco.*

Cosa si intende quando si afferma che la strategia viene condizionata sulla base delle azioni dei giocatori? Per studiare i giochi dinamici, bisogna partire descrivendo l'ammontare di informazioni a disposizione di ogni giocatore, per effettuare una determinata azione. Per una esamina dettagliata guardare [5, pp. 21–31]. Nella definizione 1.1 viene usata la parola strategia la cui definizione è la seguente.

Definizione 1.2 (Strategia). *Dato un insieme di giocatori $I = \{1, \ldots, n\}$ si definisce strategia (o controllo) del giocatore i-esimo ($i \in I$) la funzione*

$$u^i(\cdot) : [0, T] \to \Re^{m^i}$$

che associa ad ogni istante del gioco l'azione $u^i(t)$ scelta all'istante t dell'i-esimo giocatore.

Perchè sono importanti le strategie? Come detto sopra, l'azione che un giocatore intraprende nel proprio turno di gioco è determinata dal tipo e dalla quantità di informazioni che egli stesso riesce ad accumulare. Però che mossa deve usare? O meglio che strategia deve scegliere? A questo proposito, risulta utile classificare le possibili strategie secondo due criteri: il primo differenzia le strategie pure da quelle miste (definizioni 1.3 e 1.4); il secondo identifica le strategie dominate da quelle dominanti (definizioni 1.5 e 1.6).

Definizione 1.3 (Strategia Pura). *Una strategia pura s^i_j, per un giocatore $i \in \{1, \ldots, n\}$, è la strategia scelta prima dell'inizio del gioco nell'insieme $S^i = \{s^i_1, \ldots, s^i_{m^i}\}$, nel quale il giocatore stesso può effettuare la propria scelta (ovvero $j \in \{1, \ldots, m^i\}$)*

Definizione 1.4 (Strategia Mista). *Si definisce una strategia mista per l'i-esimo giocatore $i \in I = \{1, \ldots, n\}$, una distribuzione di probabilità sul suo insieme di strategie pure S^i*

Per far capire la differenza a livello concettuale tra le due definizioni si presenta in modo breve il gioco de "La caccia al cervo", tratto dal testo di Carpenter e Robbet "Game Theory and Behaviour" [4, p. 716].

Esempio 1 (Stag-Hunt Game). Questo gioco studia una popolazione di agenti che si confrontano a coppie per cacciare o cervi o lepri. Il singolo individuo può cacciare solamente Cervi oppure solamente Lepri a seconda delle informazioni che riesce ad ottenere sulla popolazione. Facendo uno studio più approfondito della popolazione, oltre alle due strategie pure (quando la popolazione gioca solamente o Cervo o Lepre), si individua una terza strategia, secondo la quale i $\frac{2}{3}$ della popolazione giocano Cervo mentre il restante $\frac{1}{3}$ gioca Lepre. Si tratta appunto di un a strategia mista.

Definizione 1.5 (Strategia Dominata). *Dato un insieme di giocatori $I = \{1, \ldots, n\}$ si definisce strategia dominata per il giocatore i-esimo ($i \in I$) una strategia pura $s^i_j \in S^i$ tale che*

$$J_i(s^i_j, s^{-i}) \leq J_i(s^i_w, s^{-i}) \; \exists s^i_w \neq s^i_j, \; \forall s^{-i} \in S^{-i}$$

e tale che

$$J_i(s^i_j, s^{-i}) < J_i(s^i_w, s^{-i}) \; \exists s^i_w \neq s^i_j, \; \exists s^{-i} \in S^{-i}$$

ove con s^{-i} si indicano le strategie scelte da tutti i partecipanti ad eccezione dell'i-esimo, ovvero $s^{-i} = (s^1, \ldots, s^{i-1}, s^{i+1}, \ldots, s^n) \in S^{-i}$

Definizione 1.6 (Strategia Dominante). *Dato un insieme di giocatori $I = \{1, \ldots, n\}$ si definisce strategia dominante per il giocatore i-esimo ($i \in I$) una strategia pura $s^i_j \in S^i$ tale che*

$$J_i(s_j^i, s^{-i}) \geq J_i(s_w^i, s^{-i})\ \forall s_w^i \neq s_j^i,\ \forall s^{-i} \in S^{-i}$$

e tale che

$$J_i(s_j^i, s^{-i}) > J_i(s_w^i, s^{-i})\ \forall s_w^i \neq s_j^i,\ \exists s^{-i} \in S^{-i}$$

ove con s^{-i} si indicano le strategie scelte da tutti i partecipanti ad eccezione dell'i-esimo, ovvero $s^{-i} = (s^1, \dots, s^{i-1}, s^{i+1}, \dots, s^n) \in S^{-i}$

Inoltre si possono enunciare le definizioni di strategie strettamente dominate e strettamente dominanti (le condizioni da verificare affinchè la definizione venga soddisfatta, presentano un'algebra diversa), ma al fine dello studio del gioco Falco-Colomba, ci interessa di più la loro interpretazione concettuale che il loro risvolto matematico.

L'ultimo aspetto importantissimo che ci preme richiamare e che è fondamentale nella teoria dei giochi, e di conseguenza negli Evolutionary Games, è l'equilibrio di Nash. Per semplicità, si mantiene la notazione data in [3].

Definizione 1.7 (Equilibrio di Nash). *Sia dato un insieme di giocatori $I = \{1, \dots, n\}$, e considerato con U^i per $i = 1, \dots, n$ l'insieme delle strategie (sia pure sia miste) dell'i-esimo giocatore. Si definisce* ***equilibrio di Nash*** *una combinazione di strategie*

$$(u_N^1, \dots, u_N^n) \in U^1 \times \dots \times U^n$$

tale che per ogni giocatore $i \in I$

$$J_i(u_N^1, \dots, u_N^i, \dots, u_N^n) \geq J_i(u_N^1, \dots, u^i, \dots, u_N^n) \tag{1.1}$$

L'equilibrio di Nash è un concetto che dal singolo passa al collettivo. Nonostante la disuguaglianza presente nella definizione (1.7) permette di calcolare il payoff migliore per l'i-esimo individuo quando questo usa una determinata strategia, la stessa funzione di payoff è calcolata in base alle strategie altrui. Cioè, porre $(u_N^1, \dots, u_N^n) \in U^1 \times \dots \times U^n$ massimizza il fitness del singolo quando tutti gli agenti decidono la strategia che porta all'equilibrio.

Introdotti i concetti più importanti della teoria dei giochi, facciamo uso di quest'ultimi per analizzare la teoria degli evolutionary games.

1.2 Replicatori Dinamici

Da questa sezione si iniziano a discutere i principali e più importanti concetti sviluppati per la Teoria degli Evolutionary Games. Prima di trattare tali concetti, ci soffermiamo sulla notazione che verrà adottata nella presente tesi.

Con $E(\cdot,\cdot)$ indichiamo la funzione bilineare del payoff di un individuo della popolazione. Tramite questa funzione si calcola il fitness previsto del singolo in base alla strategia scelta, confrontando quest'ultima con le altre possibili strategie che un determinato sistema (biologico, economico, ecc...) ammette. Ad esempio, $E(p, p^*)$ calcola il payoff di un individuo che decide di usare la strategia p contro un altro individuo che usa p^*, oppure (come succede in alcuni sistemi) contro la strategia p^* usata dalla popolazione[1]. In alcuni testi, si vedano ad esempio, [4] e [2], le notazioni date alle strategie e/o alle frequenze (ovvero quantità di popolazione che usa quella strategia) sono diverse. In generale, si considerano $S = \{e_1, \dots, e_m\}$ insieme delle strategie pure con e_i l'i-esima strategia pura e $\Delta^m = \{r = (r_1, \dots, r_m) | \sum_{j=1}^m r_j = 1, r_i \geq 0\}$ insieme delle strategie miste, dove r_i è la porzione di popolazione che usa la strategia e_i in un determinato istante di tempo[2]. Rispetto alla sezione precedente dove l'indice i veniva usato per indicare un giocatore all'interno di un numero di agenti, in questa parte di teoria il pedice i viene usato per indicare l'i-esima strategia e_i e tutto quello ad essa associato. Inoltre, dal testo di Başar e Zaccour, [2], si introducono due formule legate al numero n_i di individui che scelgono l'i-esima strategia. La prima studia il tasso di variazione (crescita o decadimento) del numero di individui che usano la strategia e_i; mentre la seconda permette di calcolare l'i-esima frequenza avendo note le quantità di individui che usano le diverse strategie del sistema. Il loro utilizzo verrà visto alla fine della sezione 1.2.

$$\dot{n_i} = n_i \sum_{j=1}^{m} E(e_i, e_j) r_j = n_i E(e_i, r) \tag{1.2}$$

$$r_i = \frac{n_i}{\sum_{j=1}^m n_j} \tag{1.3}$$

Quindi, riassumendo quanto scritto sopra, la funzione di payoff viene usata nei due modi seguenti:

- $E(e_i, e_j)$ calcola, ad esempio, il payoff della strategia e_i contro la strategia e_j;
- $E(e_i, r)$ determina il payoff quando di un individuo che usa l'i-esima strategia e_i rispetto r che è la distribuzione di strategie della popolazione.

Ora possiamo introdurre il primo fondamentale oggetto su cui fondare la teoria degli evolutionary games: il replicatore dinamico. Per definire il replicatore dinamico, in particolar modo, si utilizzerà la seconda di queste funzioni di payoff. Consideriamo d'apprima una popolazione

[1] In generale, la notazione che usa strategie p e p^* viene usata per non specificare l'insieme di provenienza delle strategie. Per il proseguo della tesi verranno usate queste strategie per trattare la teoria generale.

[2] In popolazioni con due sole strategie pure, si ha che $r \in \Delta^2$ ha porzioni r_1 e $r_2 = 1 - r_1$

infinita di agenti che vengono accoppiati randomicamente per partecipare ad un gioco. Dati S l'insieme delle strategie pure e r_t^i la frequenza della popolazione che usa l'i-esima strategia all'istante t, vogliamo studiare la dinamica della frequenza per ogni strategia $e_i \in S$ con $i = 1, \dots, m$. Iniziando dall'equazione della frequenza dell'i-esimo controllo calcolata all'istante successivo,

$$r_{t+1}^i = r_t^i \frac{E(e_i, r)}{E(r, r)}$$

dove $E(r, r) = \sum_{j=i}^m r_j E(e_j, r)$ è il payoff medio della popolazione, si può sottrarre per la frequenza calcolata all'istante t, r_t^i, ottenendo l'identità

$$r_{t+1}^i - r_t^i = r_t^i \frac{E(e_i, r)}{E(r, r)} - r_t^i$$

che studia la direzione del flusso di individui che usano l'i-esima strategia in un determinato intervallo temporale $[t, t+1]$ con $t \neq 0$. Scrivendo diversamente questa corrispondenza

$$r_{t+1}^i - r_t^i = r_t^i \frac{E(e_i, r)}{E(r, r)} - r_t^i \frac{E(r, r)}{E(r, r)}$$

si ottiene l'equazione

$$r_{t+1}^i - r_t^i = r_t^i \frac{E(e_i, r) - E(r, r)}{E(r, r)}$$

Osservando che il termine al primo membro indica il tasso di crescita o di decadimento del numero di persone che usa una determinata strategia, e assumendo che tale tasso sia piccolo in ogni intervallo temporale, si può approssimare l'evoluzione della popolazione con un'equazione differenziale.

A questo punto, possiamo definire "l'equazione" caratteristica del replicatore dinamico.

$$\dot{r}^i = r_t^i \frac{E(e_i, r) - E(r, r)}{E(r, r)} \tag{1.4}$$

Analizzando nel dettaglio questa equazione differenziale, si osserva che ciò che determina la dinamica del sistema è il numeratore del secondo membro: $r_t^i[E(e_i, r) - E(r, r)]$; mentre il denominatore serve a bilanciare l'evoluzione della popolazione. Riscrivendo questa identità (si veda [8]) in termini del numero di individui che usano l'i-esima strategia si ottiene l'equazione

$$\dot{r}_t^i = r^i \frac{\dot{n}_i - \dot{n}}{n} \tag{1.5}$$

ove $n = \sum_{i=1}^m n_i$ e m è il numero di strategie presente in S. Sostituendo le formule (1.2) e (1.3) all'interno di questa e omettendo la notazione temporale, si può introdurre il concetto di replicatore dinamico.

Definizione 1.8 (Replicatore Dinamico). *Supponiamo di avere una popolazione infinita in cui gli agenti vengono accoppiati randomicamente per partecipare ad un gioco. Siano S l'insieme delle strategie pure, p_t^i la porzione di popolazione che sceglie l'i-esima strategia pura all'istante t e $E(\cdot,\cdot)$ la funzione bilineare di payoff, allora si definisce il replicatore dinamico come*

$$\dot{r}^i = r^i[E(e_i, r) - E(r, r)] \tag{1.6}$$

Come specificato sopra, il coefficiente presente al denominatore nell'"equazione" (1.4) non influisce né sulla direzione verso cui la dinamica si spinge né sugli equilibri evolutivi, oggetto di studio della seguente sottosezione. Pertanto il replicatore dinamico viene definito dallo studio della variazione di porzione della popolazione, che usa l'i-esima strategia e_i. La sua caratteristica principale è quella di non ammettere né l'invasione e né la creazione di nuove strategie all'interno della popolazione; e oltretutto, permette alla funzione di payoff di incorporare la distribuzione di strategie presente nella popolazione in un dato istante t. Si può osservare che la velocità di convergenza della specie dipende dalla differenza presente nell'equazione differenziale (1.6): più la differenza è grande più velocemente la popolazione si evolve, viceversa, più piccolo è il valore di tale differenza più lentamente la popolazione si evolverà.

Sopra, vengono menzionati brevemente gli equilibri evolutivi. Cosa sono questi equilibri evolutivi? Cosa determinano per la popolazione?

1.2.1 Stabilità e Equilibri Evolutivi

Nella presente sezione si parte dalla definizione di equilibrio evolutivo per proseguire l'analisi sulla teoria degli Evolutionary Games, nello specifico quella del replicatore dinamico.

Definizione 1.9 (Equilibrio Evolutivo). *Consideriamo un replicatore dinamico descritto dal sistema di "equazioni" $\dot{r}^i = r_t^i[E(e_i, r) - E(r, r)]$. Allora una strategia p^* è definita equilibrio evolutivo quando $\dot{r}^i = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, m$*

L'importanza dell'equilibrio evolutivo, rispetto a quanto accennato sopra, viene esaltata nella lettura del diagramma di fase dell'equazione differenziale. Tali punti vengono anche chiamati punti fissi, semplicemente perchè, in quanto zeri del replicatore dinamico, annullano l'equazione (1.6), e dunque sono tali per cui $r_{t+1} = r_t$ per ogni t. Come si vedrà dall'esempio sotto, tale diagramma permette di dare una costruzione generica del sistema. La sua lettura racchiude due aspetti:

1. quali equilibri evolutivi, o punti fissi, sono stabili e quali sono instabili;

2. come evolve la dinamica della popolazione.

Per provare quanto scritto, si analizza il diagramma di fase dello Stag-Hunt Game trattato nell'esempio 1. Da questo esempio fino alla fine del capitolo, la teoria verrà trattata con S insieme delle strategie pure di caridinalità due.

Esempio 2 (Stag-Hunt Game (continua)**).** *Riprendendo brevemente quanto detto sopra e integrando il replicatore dinamico, all'interno della discussione, si ottiene che quest'ultimo ha equazione* $\dot{s}^C = s^C[E(C,s) - E(s,s)]$ *da cui si ricava il suo diagramma di fase, rappresentato in figura 1.1. Considerando* C *la scelta di cacciare cervi da parte dell'agente e* s *la frequenza di giocatori che cacciano cervi, allora si può leggere la figura con maggior precisione.*

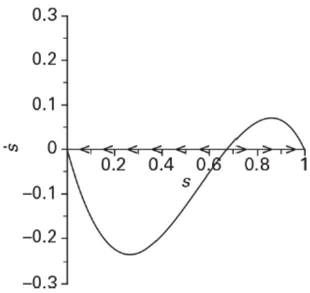

Figura 1.1: Replicatore dinamico dello Stag-Hunt Game [si veda 4, p. 720]

Innanzitutto, si identificano 3 equilibri evolutivi: $s_0 = 0, s_1 = 1$ *e* $s_2 = \frac{2}{3}$*. Avendo definito* s *come la frequenza di agenti che decidono di cacciare i cervi,* $s_0 = 0$ *e* $s_1 = 1$ *indicano, rispettivamente, una situazione in cui la popolazione caccia solo lepri o solo cervi. Le frecce disegnate sull'asse orizzontale vengono chiamate* ***frecce di moto*** *e servono per capire dove "scappa" la popolazione appena vi è una perturbazione nei comportamenti dei singoli individui (ovvero un cambio di strategia perchè l'agente o vuole tentare qualcos'altro oppure ha constatato che quel controllo non comporta il payoff migliore). Per esempio, guardando gli zeri agli estremi dell'intervallo, osserviamo che una popolazione che decide di cacciare tutti Cervi* $s_1 = 1$*, o tutte Lepri* $s_0 = 0$ *è in una situazione di equilibrio stabile. L'invasione di una strategia all'interno della popolazione spinge la specie, attraverso la raccolta di informazioni, alla situazione iniziale. Mentre in* $s_2 = \frac{2}{3}$ *l'equilibrio evolutivo della strategia mista è instabile: un piccolo disturbo nella scelta delle strategie spinge la popolazione in uno dei due equilibri stabili.*

Un altro elemento dato dal diagramma di fase è il ***bacino di attrazione****. Il bacino di attrazione indica la probabilità con cui avviene una strategia pura partendo dalla strategia mista in caso di perturbazione. Ovvero, avere bacino di attrazione più ampio significa che la strategia pura ad esso associata è più plausibile. In questo caso* $s_0 = 0$ *avendo bacino più grande ha percentuale di successo più alta rispetto* $s_1 = 1$.

Partendo dal grafico sopra, si può allargare lo studio alla stabilità degli equilibri, per qualsiasi altro diagramma di fase, a livello matematico. In particolar modo, guardando la pendenza della curva, si può osservare che quando quest'ultima è negativa in un punto di equilibrio, il punto ad essa associato è stabile, mentre se è positiva l'equilibrio è instabile.

Dall'analisi della derivata temporale $\dot{r}$ o $\frac{dr}{dt}$ si può introdurre e spiegare il tasso di variazione delle scelte della popolazione: più grande è l'ampiezza della curva $\dot{r}$, più velocemente la popolazione si evolve. Viceversa, se il valore assoluto di tali derivate è piccolo allora la dinamica è lenta. Da ciò se ne deduce che in prossimità degli equilibri evolutivi (stabili e instabili), essendo il tasso di variazione piccolo, la velocità con cui la popolazione evolve è inferiore rispetto ad un punto intermedio del dominio. Per verificare questa caratteristica di un punto fisso, diamo la definizione di stabilità evolutiva.

Definizione 1.10 (Stabilità Evolutiva). *Consideriamo un gioco a due strategie in un'unica popolazione infinita, un punto fisso p^* del replicatore dinamico $\dot{r} = r[E(e, r) - E(r, r)]$ è detto evolutivamente stabile se $\frac{d\dot{r}}{dr}(p^*) < 0$*

Lo studio per derivare il replicatore dinamico, per poi calcolare gli equilibri evolutivi e verificare quali di essi sono stabili o instabili è lungo, sopratutto se un sistema offre una vasta categoria di strategie pure. Per rendere l'analisi facilmente interpretabile e ricavare quali punti fissi determinano una situazione ottimale dello stesso, si introducono dei criteri che vengono raccolti sotto il concetto di Evolutionary Stable Strategy (ESS), oggetto di studio della prossima sezione.

1.3 ESS: Evolutionary Stable Strategy

Come detto a fine sezione 1.2.1 raccogliamo i criteri che ci permettono di semplificare lo studio dei sistemi, sotto il concetto di ESS. Rispetto a quanto fatto e a quanto si farà anche nei capitoli successivi, le ESS non fanno parte della Teoria dei Giochi dinamica, bensì statica. Infatti, per verificare se un controllo è tale, si studiano i payoff che caratterizzano un problema.

Definizione 1.11 (ESS: Strategie Evolutive Stabili). *Date e_1 e e_2 strategie pure di un sistema, la strategia e_1 viene definita ESS se soddisfa entrambe le seguenti condizioni:*

a) $E(e_1, e_1) \geq E(e_2, e_1)$

b) $E(e_1, e_2) > E(e_2, e_2)$

Ci sono due versioni della definizione di ESS, la prima versione meno debole fu introdotta da John M. Smith e George Price a seguito del loro articolo pubblicato su "Nature" nel 1973

[9], per rendere più semplice lo studio dei sistemi, aggirando l'analisi della dinamica tramite replicatore dinamico. Invece, la seconda versione, scritta sopra, viene introdotta a metà degli anni ottanta per mettere in evidenza i concetti di ESS e di equilibrio di Nash (definizione 1.7). Infatti, osserviamo immediatamente che le ESS sono una raffinata categoria di equilibri di Nash, ovvero ogni ESS corrisponde ad un equilibrio di Nash, ma un equilibrio di Nash non è detto che sia un'ESS. Inoltre, per distinguere ancora di più i due concetti si può osservare che: in un equilibrio di Nash, se tutti i giocatori si adeguano al gioco, nessun agente può ottenere payoff maggiore cambiando strategia; mentre le ESS sono (biologicamente) ereditabili e tutti i giocatori non devono essere a conoscenza dell'evoluzione della popolazione.

La prima condizione corrisponde alla condizione di equilibrio di Nash (se viene soddisfatta da una certa strategia e_1 a disuguaglianza, allora e_1 è strettamente equilibrio di Nash), mentre la seconda viene chiamata condizione di stabilità. Il criterio sulla stabilità chiede, in aggiunta, che la strategia e_1 sia più vantaggiosa rispetto a qualsiasi altra strategia ammissibile del sistema, in questo caso e_2. Qual è l'intuizione dietro questi criteri? Fino a quando un individuo continuerà a giocare e_1?

Ipotizziamo un sistema in cui l'insieme delle strategie ammissibili sia $\{e_1, e_2\}$ e osserviamo due giocatori della specie che possono decidere tra queste due strategie pure. Allora la definizione di ESS consiste nel verificare entrambi i casi seguenti:

a) il payoff del primo giocatore quando entrambi giocano e_1 è maggiore (o uguale) al payoff del primo giocatore quando cambia strategia in e_2 mentre il secondo giocatore rimane sulla stessa strategia e_1;

b) il payoff del primo giocatore quando il suo oppositore cambia strategia a e_2 è maggiore rispetto al payoff in cui entrambi i giocatori cambiano strategia.

Quindi in una popolazione infinita una strategia ammissibile e_1 viene definita ESS se è "impermeabile", ovvero non può essere sostituita, o invasa da ogni altra strategia attraverso selezione naturale (in caso di sistemi biologici). Per ogni altra strategia si intende sia ogni strategia ammissibile presente già all'inizio dello studio, sia ogni strategia nuova che si crea a dinamica in corso.

Per dimostrare perchè entrambi i criteri della definizione 1.11 sono necessari per la stabilità dinamica sotto l'ipotesi che il modello di apprendimento sia basato sull'imitazione, studiamo una popolazione infinita in cui una piccola porzione di abitanti decide di scostarsi decidendo di usare una strategia diversa da quella utilizzata.

Osservazione 1. *Consideriamo un sistema composto da un'unica popolazione infinita dove p^* è la strategia usata e assumiamo che vi sia un invasione dinamica composta da una piccola* *parte ϵ di agenti che usano la strategia p. Dall'"equazione" del replicatore dinamico* (1.6) *si ottiene l'equazione differenziale:*

$$\begin{aligned}
\dot{\epsilon} &= \epsilon[E(p, \epsilon p + (1-\epsilon)p^*) - E(\epsilon p + (1-\epsilon)p^*, \epsilon p + (1-\epsilon)p^*)] \\
&= \epsilon[E(p, \epsilon p + (1-\epsilon)p^*) - \epsilon E(p, \epsilon p + (1-\epsilon)p^*) - (1-\epsilon)E(p^*, \epsilon p + (1-\epsilon)p^*)] \\
&= \epsilon(1-\epsilon)[(1-\epsilon)E(p, p^*) - (1-\epsilon)E(p^*, p^*) + \epsilon E(p, p) - \epsilon E(p^*, p)] \\
&= \epsilon(1-\epsilon)[(1-\epsilon)(E(p, p^*) - E(p^*, p^*)) + \epsilon(E(p, p) - E(p^*, p))]
\end{aligned}$$

Come detto ad inizio sezione 1.2, la funzione di payoff è bilineare su entrambe le strategie p e p^*, di conseguenza possiamo portare fuori i coefficienti dalla funzione e poi raccogliere i termini che hanno lo stesso fattore.

Se si assume che p^* sia equilibrio di Nash stretto, ovvero $E(p^*, p^*) > E(p, p^*)$, allora $\dot{\epsilon} < 0$ per ogni ϵ positivo vicino allo 0 dato che $(1-\epsilon)(E(p, p^*) - E(p^*, p^*))$ è il termine dominante dell'equazione differenziale. Inoltre, se questo termine è nullo, si ha ancora che $\dot{\epsilon} < 0$ grazie alla condizione di stabilità 1.11b. Viceversa, se $\dot{\epsilon} < 0$ per ogni ϵ positiva vicino allo 0, allora p^* soddisfa entrambe le condizioni della definizione di ESS. Di conseguenza, la residente popolazione quando gioca solamente p^* (i.e., $\epsilon = 0$) è stabile evolutivamente per l' "equazione" del replicatore dinamico (1.6) *se e solo se soddisfa entrambi i criteri della definizione di ESS.*

Tale ragionamento si può riassumere con il seguente lemma.

Lemma 1. *Consideriamo una popolazione infinita i cui agenti possono scegliere solamente fra le due strategie pure e_1 e e_2. Allora la strategia e_1 è una ESS $\iff$ e_1 soddisfa entrambe le condizioni 1.11a) e 1.11b) $\iff$ vi è stabilità evolutiva in qualsiasi dinamica di gioco*

Questo risultato si estende a sistemi in cui vi sono più di due strategie pure. Una strategia X è ESS se e solo se soddisfa entrambe le condizioni della definizione per ogni strategia "mutante" ammissibile del sistema. E vi è stabilità evolutiva.

Osservazione 2. *In sistemi in cui l'insieme delle strategie pure ha cardinalità due, ovvero ci sono solo due strategie pure, esiste almeno una ESS pura o una ESS mista. Inoltre se l'ESS è una delle due strategie pure, l'altra strategia pura non è ESS, per la condizione sulla stabilità.*

1.4 Gioco Falco-Colomba

Uno dei primi e più importanti giochi evoluzionari fu lo studio di un particolare sistema biologico composto da una popolazione infinita di animali (in particolare gatti). Nello specifico, in un noto articolo del giornale *Nature* pubblicato nel 1973, John Maynard Smith e George Price [9], analizzarono la logica e il comportamento nei conflitti di una popolazione di gatti, per la conquista di un territorio e delle sue risorse. Il modello di apprendimento formulato è basato sull'imitazione e sulla razionalità delle scelte da parte degli agenti.

Si considera una specie di felini i cui agenti vengono presi singolarmente e accoppiati in modo randomico. Come detto precedentemente, la scelta della strategia da parte dei giocatori viene fatta in modo razionale: la lotta e la conquista di un territorio. Tale obiettivo può avere i suoi benefici, però nello scontro i gatti si fanno male, ovvero perdono salute (fitness). La domanda allora viene spontanea: vale la pena lottare per un territorio quando questo non fornisce le risorse necessarie? La risposta a tale domanda verrà vista più avanti, quando si studiano i payoff con diversi valori numerici. Nel caso in cui un gatto decida di non lottare per un determinato territorio, deve esser ben consapevole delle eventuali risorse che perde, sapendo però, che la propria forma fisica rimane intatta. Ciò comporta che se un gatto decide sempre di rimanere passivo, allora esso potrebbe morire. Viceversa, decidere continuamente di lottare per i territori porta a situazioni differenti a seconda della quantità di risorse disponibili in un terreno. L'idea di partenza è ipotizzare che un territorio più ampio conferisca più risorse, e ciò può essere considerato un vantaggio. Per esempio, se si suppone che un gatto abbia appena conquistato un territorio e quindi il vincitore debba ancora recuperare la propria salute (nel caso abbia lottato), più il territorio conquistato è ampio più ha probabilità di trovare risorse, però, allo stesso tempo, vi è un'alta possibilità che subisca un attacco da un altro gatto.

Per determinare la dinamica della popolazione mediante un replicatore dinamico e/o ESS, si fa un passaggio intermedio con il quale si va ad introdurre il problema da un punto di vista matematico.

1.4.1 L'evoluzione di Falchi e Colombe

Innanzitutto, si identificano le strategie che i gatti possono usare e che permettono l'evoluzione della specie. Da quanto scritto sopra, si può intendere che l'insieme delle strategie pure è composto da due controlli (ovvero, l'insieme ha cardinalità due), che sono:

Falco Il gatto è violento, sceglie di lottare

Colomba Il gatto è pacifico, decide di non lottare

Alla base di tali sistemi vi è un modello di apprendimento fondato sull'imitazione, la quale deriva dal copiare la strategia che comporta il miglior payoff. Per capire quale strategia verifica il fitness migliore, si deve studiare cosa succede quando si accoppiano randomicamente due individui. Dal momento che i gatti fanno parte della stessa popolazione e quindi possono scegliere le stesse strategie, si studiano i seguenti quattro casi:

- Falco contro Falco

- Falco contro Colomba
- Colomba contro Falco
- Colomba contro Colomba

dove ciascuna situazione definisce un payoff diverso. Si può osservare che tale matrice definisce il gioco Falco-Colomba come un gioco simmetrico, data la simmetria dei payoff all'interno della tabella. In questo particolare sistema di animali, si studia il comportamento dei singoli gatti per analizzare il comportamento dell'intera popolazione e derivarne la dinamica. Di conseguenza, strategia e comportamento in questi sistemi biologici vengono identificati come sinonimi. Visto che la scelta della strategia determina quale situazione analizzare, viene spontaneo chiedersi che tipo di comportamento i gatti devono avere per ottenere più payoff. Decidere se lottare per un territorio oppure no dipende, come già anticipato, dalla quantità di risorse che fornisce lo stesso, ed eventualmente dalla "quantità" di salute persa in uno scontro. Indicando con V il vantaggio che fornisce un terreno (per curare la propria salute e/o per produrre prole) e con C la quantità di salute che si perde in uno scontro, si possono discutere dei payoff. Per completezza, si assume che tutti gatti abbiano la stessa probabilità di vincere uno scontro quando questi affrontano altri gatti violenti.

Proviamo ora a descrivere i diversi payoff. Si supponga di osservare un gatto Falco all'istante t. Se tale felino viene accoppiato randomicamente con un altro gatto Falco, avviene lo scontro e oltre all'eventuale vincita delle risorse V, si deve considerare la perdita di salute C. Inoltre, avendo entrambi probabilità paritaria di vincere lo scontro, si può concludere che il payoff per entrambi gli agenti è: $\frac{1}{2}(V - C)$. Invece, se viene accoppiato con un gatto Colomba, essendo quest'ultimo passivo, il gatto Falco otterrà tutte le risorse V. Viceversa, osservare questo caso dal punto di vista del gatto Colomba afferma che, rinunciando alle risorse, questo ottiene un guadagno pari a 0. L'ultimo caso da esaminare è Colomba contro Colomba: i gatti trovando un accordo nel non lottare e nel dividersi le risorse, ottengono, ciascuno, un profitto pari a $\frac{V}{2}$.

		Gatto 2	
		Falco	Colomba
Gatto 1	Falco	$(\frac{1}{2}(V-C),\frac{1}{2}(V-C))$	$(V,0)$
	Colomba	$(0,V)$	$(\frac{V}{2},\frac{V}{2})$

Tabella 1.1: Payoff gioco Falco-Colomba

Osservazione 3. *Essendo un gioco simmetrico si può semplificare la scrittura della tabella inserendo un unico payoff per cella, rispettando la descrizione sopra. Inoltre, la lettura di tale tabella dei payoff permette di calcolare i payoff che definiscono l'"equazione" del replicatore dinamico.*

Rispetto ai dati forniti, si può prevedere che a seconda dei valori di V e di C si studiano due casi diversi. Nel caso in cui $V > C$, cioè le risorse del territorio permettano di ristabilirsi ed eventualmente produrre prole, ci si può aspettare che la popolazione diventi prevalentemente violenta. Viceversa, nel caso $V < C$, risulta più difficile constatare come la dinamica si evolva. La domanda in questo caso diventa: conviene lo stesso lottare per un territorio anche se questo non è dotato di sufficienti risorse? Per rispondere a tale domanda, analizziamo il problema con dei dati numerici.

1.4.2 Replicatori dinamici e ESS per il gioco Falco-Colomba

Completiamo questo capitolo fornendo una doppia analisi. La prima riguarda l'uso del replicatore dinamico e del diagramma di fase, per determinare quale situazione del biosistema è stabile. Mentre nella seconda si usa la definizione di ESS, 1.3, per provare quanto viene affermato nella prima.

Per descrivere l'"equazione" del replicatore dinamico (1.6), abbiamo bisogno di definire alcuni dati. Si denotano con F la strategia Falco, Co la strategia Colomba e con p_f e p_c, rispettivamente, le frequenze delle due strategie all'interno della popolazione. Però come detto in precedenza, essendo un sistema con solo due strategie pure si può scrivere $p_c = 1 - p_f$, ovvero si considera la sola frequenza della strategia Falco. I fitness necessari per completare la discussione sono i seguenti.

$$E(F, p_f) = p_f \frac{V - C}{2} + (1 - p_f)V \qquad \text{payoff atteso di un Falco} \tag{1.7}$$

$$E(Co, p_f) = (1 - p_f)\frac{V}{2} \qquad \text{payoff atteso di un Colomba} \tag{1.8}$$

Da queste si ricava il payoff medio

$$E(p_f, p_f) = p_f E(F, p_f) + (1 - p_f)E(Co, p_f) = \frac{V}{2} - \frac{C}{2}p^2 \tag{1.9}$$

con il quale si calcola il replicatore dinamico.

$$\dot{p_f} = p_f[E(F, p_f) - E(p_f, p_f)] = p_f(1 - p_f)\left(\frac{V}{2} - \frac{C}{2}p_f\right) \tag{1.10}$$

Il passo successivo è cercare gli equilibri evolutivi del problema, ovvero determinare i punti che soddisfano l'identità $\dot{p} = 0$. Dall'equazione (1.10) si ricavano 3 punti fissi $p_0 = 0, p_1 = 1$ e $p^* = \frac{V}{C}$. I primi due permettono di concludere dicendo che in questi casi la popolazione è composta o unicamente da Colombe ($p_0 = 0$) oppure solamente da Falchi ($p_1 = 1$). Questi due stati sono situazioni che non permettono alla popolazione di svilupparsi ulteriormente, ovvero la dinamica della specie non va oltre quello stato (si vedano figure 1.2 e 1.3). Mentre il terzo punto fisso $p^* = \frac{V}{C}$ che identifica la strategia mista permette alla dinamica di sorpassare lo stato della popolazione (figura 1.3). Con questo valore poniamo che i $\frac{V}{C}-$esimi della popolazione scelgono Falco, e la restante porzione di popolazione gioca Colomba. La frequenza $p^* = \frac{V}{C}$ dipende direttamente da V: più basso è il suo valore meno gatti saranno propensi a scegliere Falco, viceversa se assume un valore più grande (si vedrà più avanti che questo caso è fondamentale quando $V < C$) la porzione di popolazione che gioca Falco sarà più grande di quella dei gatti Colomba. Quindi, grazie al replicatore dinamico, si può studiare quali stati della popolazione sono caratteristici del sistema. Pertanto, fra tali stati vi è il caso in cui la specie si trova in equilibrio stabile.

Osservazione 4. *Il replicatore dinamico identifica sempre i suoi equilibri evolutivi con uno specifico stato della specie. Inoltre, a seconda del sistema da studiare, non è detta l'esistenza di una o più strategie miste.*

Si provano ora, ad analizzare i casi individuati a fine sottosezione 1.4.1: $V > C$ e $V < C$.

Caso $V > C$

Per semplificare lo studio assegniamo dei valori numerici ponendo $V = 5$ e $C = 3$. In questo caso, l'"equazione" differenziale del replicatore dinamico diventa

$$\dot{p_f} = p_f(1 - p_f)\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}p_f\right)$$

i quali punti fissi sono esclusivamente $p_0 = 0$ e $p_1 = 1$. Si ricorda che p_f è indice della frequenza e in quanto tale assume valori nell'intervallo $[0,1]$ (per questo motivo $p^* = \frac{5}{3}$ non è equilibrio evolutivo). Facendo riferimento allo Stag-Hunt Game, si consultano esempi 1 e 2, ricaviamo il diagramma di fase del replicatore dinamico e da questo proviamo a discutere della dinamica della popolazione.

Come detto nell'osservazione 3, in questa situazione non è presente la strategia mista: sapendo che $p_f \in [0,1]$, il termine $\frac{5}{2} - \frac{3}{2}p$ è sempre positivo. Di conseguenza $\dot{p_f} \geq 0$ e in quanto tale l'evoluzione dei Falchi è in crescita continua (ad eccezione nei stati p_0 e p_1), pertanto le frecce di moto sono rivolte verso lo stato $p_1 = 1$. Nella realtà, i gatti capiscono che la strategia migliore per ottenere un payoff più alto è scegliere F, pertanto imitano chi precedentemente è diventato un Falco. Quindi si riesce a concludere, sia graficamente sia concettualmente, che il punto fisso del Falco-equilibrio (p_1) è *evolutivamente stabile*: se c'è una perturbazione che spinge qualche gatto a mutare la propria scelta da Falco a Colomba (magari per sperimentare

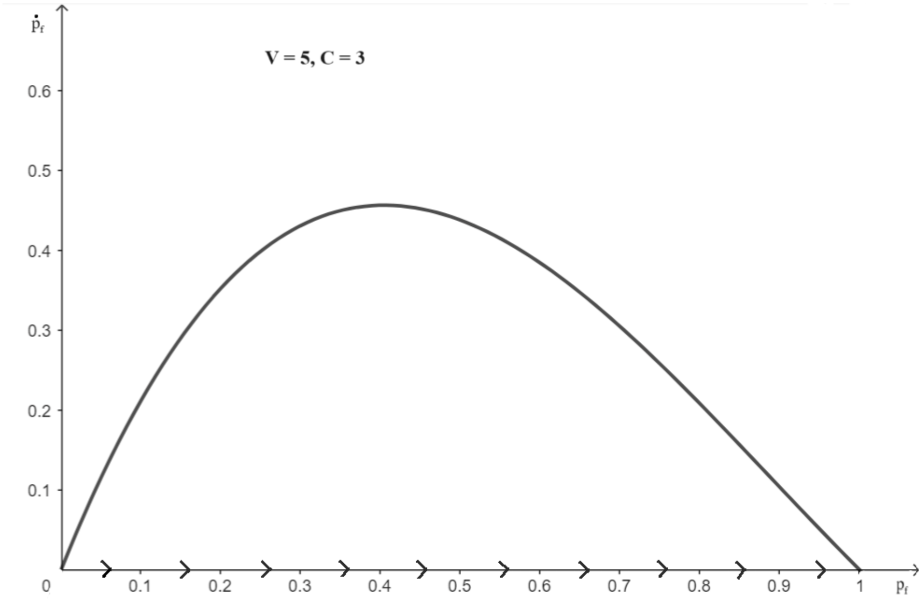

Figura 1.2: Esempio di $V > C$ con $V = 5$ e $C = 3$

cosa succede), la situazione negli istanti successivi tornerà ad essere quella osservata prima della perturbazione.

Per quanto riguarda la stabilità, applicando la definizione 1.10, si deve stabilire quale equilibrio evolutivo p soddisfa la condizione $\frac{d\dot{p}_f}{dp_f}(p) < 0$, ove

$$\frac{d\dot{p}_f}{dp_f} = (1 - p_f)\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}p_f\right) - p_f\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}p_f\right) - \frac{3}{2}p_f(1 - p_f)$$

Pertanto, sostituendo p_f con i valori dei punti fissi trovati, l'unico che risulta essere stabile è $p_1 = 1$, infatti $\frac{d\dot{p}_f}{dp_f}(1) = -1 < 0$, mentre per $p_0 = 0$ si ottiene $\frac{d\dot{p}_f}{dp_f}(0) = \frac{5}{2} > 0$. Inoltre, guardare la pendenza del grafico nei vari stati e la direzione delle frecce di moto, permettono di classificare p_0 equilibrio instabile e p_1 equilibrio stabile.

Caso $V < C$

Passiamo ora ad esaminare il caso in cui $V = 3$ e $C = 5$. Con calcoli analoghi a quanto svolto sopra, si determina l'"equazione" del replicatore dinamico.

$$\dot{p}_f = p_f(1 - p_f)\left(\frac{3}{2} - \frac{5}{2}p_f\right)$$

Rispetto al caso precedente, oltre ai due equilibri evolutivi $p_0 = 0$ e $p_1 = 1$ c'è la presenza di un terzo punto fisso $p^* = \frac{3}{5}$, che denota la strategia mista della popolazione. Analogamente a quanto visto sopra, con questi dati si ha che il Falco-equilibrio, $p_1 = 1$, e il Colomba-equilibrio, $p_0 = 0$, sono instabili: le frecce di moto non hanno il verso che punta verso questi stati, e inoltre

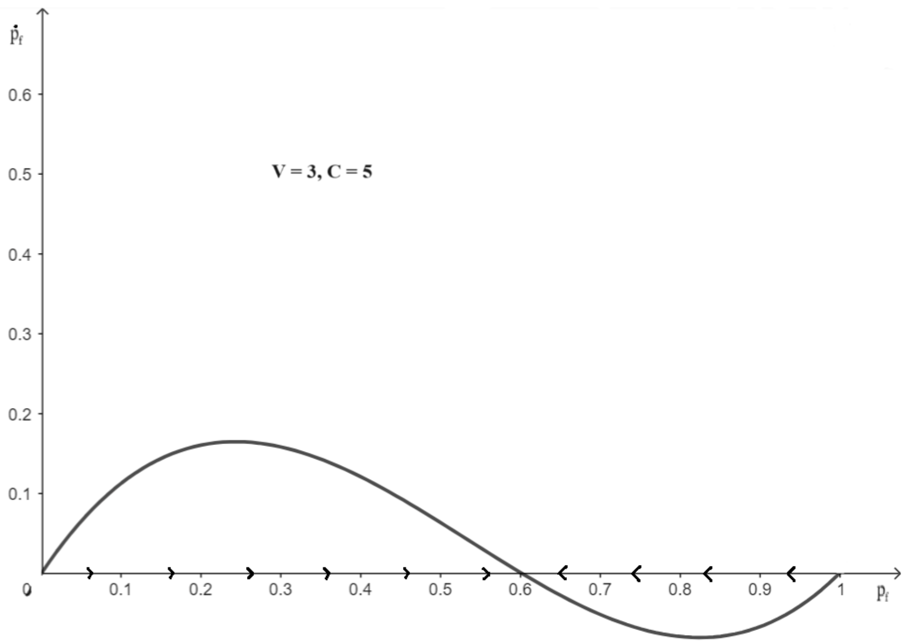

Figura 1.3: Esempio di $V < C$ con $V = 3$ e $C = 5$

negli stessi si ha pendenza positiva. Questo studio, contrariamente al caso $V > C$, dice che se una piccola parte di abitanti decide di variare la propria strategia, allora la dinamica della popolazione si allontanerà. Infatti usando la definizione di punto fisso stabile, si può affermare quanto detto: $\frac{d\dot{p}_f}{dp_f} = (1-p_f)[\frac{3}{2}-\frac{5}{2}p_f]-p_f[\frac{3}{2}-\frac{5}{2}p_f]-\frac{5}{2}p_f(1-p_f)$, dal quale si ottiene che $\frac{d\dot{p}_f}{dp_f}(1) = 1 > 0$ e $\frac{d\dot{p}_f}{dp_f}(0) = \frac{3}{2} > 0$. Quindi quando la specie è monomorfa ad una delle due strategie pure, la popolazione non è stabile. Contrariamente alle strategie pure, la strategia mista $p^* = \frac{3}{5}$ è equilibrio evolutivo stabile: il punto "attrae" la dinamica a sè e, inoltre, $\frac{d\dot{p}_f}{dp_f}(\frac{3}{5}) = -\frac{3}{5} < 0$. Ovvero, una perturbazione delle strategie non sposterà la popolazione, negli istanti successivi, dall'equilibrio stabile. Leggendo nel dettaglio il grafico, partendo dal Colomba-equilibrio, si ha che la crescita del numero di Falchi dentro la popolazione aumenterà con maggior velocità fintanto che la probabilità che un gatto Falco incontri un altro gatto Falco è sufficiente da rendere questo tipo di accoppiamento sempre più frequente. A quel punto l'evoluzione della popolazione porterà lo stesso ad una mutazione di Colombe in Falchi, però con velocità sempre più inferiore, fino a quando non si raggiunge l'equilibrio $p^* = \frac{3}{5}$. Viceversa, partendo dal Falco-equilibrio l'analisi appena effettuata può essere reinterpretata per il numero di Colombe della popolazione. Infine concludendo la lettura del grafico e di questa parte del replicatore dinamico, si può osservare che il bacino di attrazione compreso fra il Colomba equilibrio e la strategia mista è più ampio rispetto al bacino compreso tra la strategia mista e il Falco equilibrio. Ciò significa che ha più probabilità di verificarsi la strategia mista cominciando dallo stato p_0.

Per terminare questo primo capitolo sulla teoria degli Evolutionary Games, andiamo a descrivere l'analisi effettuata sopra, considerando le ESS e i payoff evidenziati sopra. Ricordando brevemente la definizione: date due strategie pure X e Y, X è definita ESS se vengono soddisfatti entrambi i criteri seguenti

a) $E(e_1, e_1) \geq E(e_2, e_1)$

b) $E(e_1, e_2) > E(e_2, e_2)$.

Applicando tali criteri a tutte le strategie ammissibili del sistema, andiamo a verificare quali strategie soddisfano la definizione di ESS, in entrambi i casi: $V > C$ e $V < C$. Guardando la tabella 1.1, si riscrivono i payoff dei singoli individui:

$$E(F, F) = \frac{V - C}{2} \qquad E(F, Co) = V$$
$$E(Co, F) = 0 \qquad E(Co, Co) = \frac{V}{2}$$

Nel caso $V > C$, delle due strategie che si possono usare, solamente F è una ESS. Si può infatti verificare che $E(F, F) = \frac{V-C}{2} > 0 = E(Co, F)$ e quindi affermare che F è equilibrio di Nash. Inoltre, verificando che $E(F, Co) = V > \frac{V}{2} = E(Co, Co)$, F è ESS. Viceversa la strategia Co non è né ESS, né equilibrio di Nash dato che non soddisfa il primo criterio della definizione 1.11.

Passando al caso $V < C$, avendo una strategia mista all'interno del sistema dobbiamo fornire un estensione della definizione di ESS. In questa situazione, avendo provato dal replicatore che essa è stabile, si vuole dimostrare che è ESS. Innanzitutto, si verifica che nessuna delle due strategie pure F e Co sono ESS. F non soddisfa il primo criterio: $E(F, F) = \frac{V-C}{2} < 0 = E(Co, F)$ e quindi non è nemmeno equilibrio di Nash. Lo stesso vale per Co, poichè vale quanto visto nel caso $V > C$. Manca da analizzare la strategia mista, per verificare che essa sia una ESS bisogna soddisfare entrambi i criteri:

(i) $E(p^*, p^*) \geq E(F, p^*)$ e $E(p^*, p^*) \geq E(Co, p^*)$

(ii) $E(p^*, F) > E(F, F)$ e $E(p^*, Co) > E(Co, Co)$

cioè la strategia mista è ESS se soddisfa la definizione 1.11 per entrambe le strategie pure. Ricordando che la strategia mista è $p^* = \frac{V}{C}$ e questa afferma che il valore V delle risorse determina la porzione di popolazione che gioca F, proviamo a verificare che p^* è ESS. Prima di tutto calcoliamo i payoff delle tre funzioni: $E(p^*, p^*), E(F, p^*)$ e $E(Co, p^*)$. Considerando le formule ad inizio sezione 1.4.2, e sostituendo p^* al loro interno si ottengono i fitness cercati

$$\begin{aligned}
E(p^*,p^*) &= \frac{V}{2} - \frac{C}{2}(p^*)^2 = \frac{V}{2} - \frac{V^2}{2C} = \frac{V(C-V)}{2C} \\
E(F,p^*) &= p^*\frac{V-C}{2} + (1-p^*)V = V - \frac{V^2+VC}{2C} = \frac{V(C-V)}{2C} \\
E(Co,p^*) &= (1-p^*)\frac{V}{2} = \frac{V(C-V)}{2C}
\end{aligned}$$

Tutte le funzioni di payoff sopra descrivono la stessa applicazione, di conseguenza il primo criterio delle ESS è soddisfatto ad uguaglianza[3], cioè p^* è equilibrio di Nash. Adesso si verifica che, anche, il secondo criterio viene soddisfatto dalla strategia mista. Per dimostrare le due disuguaglianze del punto **(ii)**, si devono calcolare i payoff rimanenti. Nello specifico, avendo noti $E(F,F)$ e $E(Co,Co)$, mancherebbero da conoscere le funzioni di fitness date da $E(p^*,F)$ e $E(p^*,Co)$. Dimostriamo le disuguaglianze del punto **(ii)** tramite ragionamento logico.

Per verificare quanto scritto, ci chiediamo: la combinazione di strategie dentro la popolazione comporta ad un payoff migliore rispetto ad una popolazione di soli Falchi o di sole Colombe? Si discutono i due casi singolarmente. La strategia mista prevede che solamente i gatti appartenti ai $\frac{V}{C}-$esimi della specie lottino per il territorio, ciò comporta che la restante popolazione si divida le risorse. Questo vuol dire che, nei confronti di una popolazione di soli Falchi il cui payoff è negativo per tutti i suoi agenti, vi è un invasione della strategia mista all'interno della popolazione. Ovvero si verifica che $E(p^*,F) > E(F,F)$. Analogamente, nei confronti di una popolazione di soli gatti Colomba, dove i gatti non combattono e che si dividono V, vi è una mutazione nelle strategie perchè $p^* = \frac{V}{C}$ implica la porzione di gatti che ottiene tutto il vantaggio senza perdere salute. Pertanto $E(p^*,Co) > E(Co,Co)$. Allora, si può concludere che p^* è ESS e in quanto tale è stabile. Pertanto l'analisi fatta si riconduce a quella fatta per il replicatore dinamico. Anche in quel caso si era concluso affermando l'instabilità delle strategie pure e la stabilità della strategia mista.

Questo appena visto viene definito come Gioco Simmetrico in forma Normale, anche detto Gioco Matriciale. Nel prossimo capitolo vediamo delle proprietà derivanti e caratterizzanti del replicatore dinamico e delle ESS per problemi generici con una struttura affine al problema appena studiato.

[3]Lo scopo nel giocare la strategia mista è far sì che gli altri giocatori siano indifferenti tra le loro strategie pure, pertanto i payoff sono gli stessi

Capitolo 2

Giochi Simmetrici

Dopo aver introdotto e utilizzato i concetti alla base della Teoria degli Evolutionary Games, proviamo a fare lo step successivo. Allarghiamo lo studio di questa teoria con proprietà derivanti e caratterizzanti dei giochi simmetrici. Si ricorda che in questi giochi le strategie scelte dagli agenti non influenzano i payoff che descrivono un sistema, bensì sono i payoff stessi che condizionano quale strategia scegliere per ottenere, appunto, il payoff migliore (Gioco Falco-Colomba sezione 1.4).

2.1 Giochi in Forma Normale

Riprendendo la notazione usata nel capitolo 1, siano $S = \{e_1, \ldots, e_m\}$ l'insieme finito delle strategie pure e $\Delta^m = \{r = (r_1, \ldots, r_m) | \sum_{j=1}^{m} r_j = 1, r_i \geq 0\}$ l'insieme delle strategie miste, ove r_i indica la frequenza dell'i-esima strategia pura, in un dato istante t. Prima di affrontare nel dettaglio la teoria, definiamo cosa è un gioco matriciale.

Definizione 2.1 (Giochi Matriciali). *Si definiscono giochi matriciali tutti i sistemi che permettono la costruzione della matrice A data la funzione bilineare di payoff. Se e_i è l'i-esimo vettore colonna in $\Re^m$ e $E(e_i, e_j)$ è l'entrata $ij-$esima della matrice A, allora considerando i vettori $r \in \Delta^m$ e $r^* \in \Delta^m$ (con r^* lo stato della popolazione), il payoff viene definito dalla funzione $E(r, r^*) = r \cdot Ar^*$*

Un esempio generico di gioco matriciale con matrice di payoff di dimensione $2x2$ è raffigurato nella tabella 2.1. La o le dimensioni di tale tabella dipendono dal numero di strategie pure ammissibili di un sistema. Dal testo "Handbook of Dynamic Game Theory" [2, Capitolo 23] tutti i sistemi descritti hanno tabella quadrata. Facendo uso di tali tabelle, si può calcolare il replicatore dinamico e inoltre stabilire quali strategie soddisfano la definizione di ESS.

	e_1	e_2
e_1	$E(e_1, e_1)$	$E(e_1, e_2)$
e_2	$E(e_2, e_1)$	$E(e_2, e_2)$

Tabella 2.1: Gioco in forma normale

Definizione 2.2 (Gioco Simmetrico). *Un gioco viene definito **simmetrico** se i payoff di una particolare strategia dipendono solamente dalle strategie ammissibili, e non da chi le sta usando.*

Quindi la tabella 2.1 può essere letta, per qualsiasi giocatore della popolazione quando viene accoppiato con un altro agente della popolazione. Per questo motivo un gioco simmetrico può anche esser chiamato gioco matriciale.

A questo punto della teoria ci chiediamo se è possibile definire e/o enunciare delle proprietà che permettono di analizzare con più semplicità i giochi simmetrici. Sapendo che le strategie pure sono un caso particolare delle strategie miste, in cui si assegna probabilità pari ad uno all'i-esima strategia e alle restanti probabilità si assegna zero (poichè da definizione la somma delle probabilità è pari a 1: $r_i = 1$ e $r_j = 0$ per $j \neq i$ con $j = 1, \ldots, m$), consideriamo Δ^m l'insieme su cui sviluppare la teoria che segue.

Definizione 2.3. *Consideriamo un gioco matriciale su Δ^m.*

a) *$p^* \in \Delta^m$ è equilibrio di Nash se soddisfa 1.11a per ogni $p \in \Delta^m$*

b) *$p^* \in \Delta^m$ è ESS se è un equilibrio di Nash che soddisfa la 1.11b per ogni $p \in \Delta^m$ con $p \neq p^*$*

c) *Il replicatore dinamico (delle strategie pure) su Δ^m è*

$$\dot{r}^i = r_t^i[E(e_i, r) - E(r, r)]$$

I primi due punti di questa definizione racchiudono quanto detto sui concetti di ESS (definizione 1.11) e di equilibrio di Nash. Inoltre, questi punti ampliano il concetto di ESS alle strategie miste, che possono verificarsi all'interno di un sistema. Mentre il terzo punto definisce il replicatore dinamico su tutto Δ^m. A seguire si enuncia il teorema più importante di questa teoria, il Folk Theorem (o in italiano, Teorema Popolare) chiamato così poichè già noto a metà degli anni cinquanta, nonostante non fosse ancora stato pubblicato.

Teorema 2 (The Folk Theorem). *Il replicatore dinamico per un gioco matriciale definito su Δ^m soddisfa:*

a) *Un punto fisso, o equilibrio evolutivo, stabile è un equilibrio di Nash*

b) *Una traiettoria convergente dentro* Δ^m *evolve in un equilibrio di Nash*

c) *Un equilibrio di Nash è localmente stabile asintoticamente.*

Il Folk Theorem è verificato sia per giochi dinamici simmetrici sia asimmetrici (in quest'ultimo caso al posto degli equilibri di Nash si discutono gli SPNE, sezione 3.2). Con questo teorema si vuole dimostrare che tutti i comportamenti che non sono idonei nel breve periodo, sono più efficaci se adottati per problemi a lungo periodo. Infatti, in giochi ripetuti con un ampio orizzonte temporale finito oppure per giochi con orizzonte temporale infinito, ciascun giocatore deve considerare gli effetti delle proprie scelte sulla propria reputazione e sulla capacità degli altri giocatori di punire comportamenti scorretti o devianti nelle interazioni strategiche future (bisogna sempre tener conto che la strategia scelta è per aumentare il payoff proprio e quello degli altri). L'importanza della scelta della strategia nella popolazione viene rafforzata dal seguente teorema.

Teorema 3. *Si consideri un gioco matriciale su* Δ^m

a) p^* *è ESS* $\iff$ $E(p^*, p) > E(p, p)$ *per ogni* $p \in \Delta^m$ *con* p *sufficientemente vicino, ma non uguale a* p^*

b) *Un ESS* p^* *è localmente un punto fisso asintoticamente stabile del replicatore dinamico* (1.6)

c) *Un ESS* $p^* \in \Delta^m$ *è globalmente un punto fisso asintoticamente stabile per il replicatore dinamico* (1.6)

Il punto a) contentente la nozione di ESS avrà una sua caratterizzazione quando si generalizzeranno i giochi con spazio dei tratti continuo, sezione 2.2, mentre i punti b) e c) li analizziamo adesso. Queste due proprietà furono un successo agli inizi storici degli evolutionary games e della loro teoria, perchè la stabilità degli equilibri (data dal replicatore dinamico) veniva garantita non solo per la strategia della popolazione p^*, ma anche per tutte quelle strategie pure che stavano prendendo piede all'interno della popolazione stessa. Infatti, se la distribuzione di strategie all'interno della popolazione fa si che p^* sia la strategia media della popolazione, allora p^* è asintoticamente stabile mediante le "equazioni" del replicatore dinamico delle strategie miste se e solo se p^* è ESS. Tuttavia, tali proprietà del Teorema 3 non vengono verificate per giochi matriciali a tempo discreto. Un applicazione di quanto appena scritto viene dimostrata con il gioco Sasso-Carta-Forbice.

Esempio 3 (Sasso-Carta-Forbice). *Con il gioco Sasso-Carta-Forbice si intende il gioco a due persone comunemente adottato nella realtà. La sua componente di razionalità e di pensiero permette di considerarlo uno dei più semplici giochi matriciali. A livello di notazione, si utilizza*

	S	C	F
S	0	$-b_2$	a_3
C	a_2	0	$-b_1$
F	$-b_3$	a_1	0

Tabella 2.2: Gioco Sasso-Carta-Forbice

S per indicare Sasso, C per Carta e F per Forbice. Dalle regole classiche del gioco si ha che Carta batte Sasso, Sasso batte Forbice e Forbice batte Carta.

Si ha che tutte le a_i e b_i sono positive per ogni $i = 1{,}2{,}3$, di conseguenza, per convenzione si pone che $a_i = b_i = 1$ per $i = 1{,}2{,}3$. Allora l'unico vettore che determina l'equilibrio di Nash del gioco è:

$$p = \frac{1}{K}(a_1a_3 + b_1b_2 + a_1b_1, a_1a_2 + b_2b_3 + a_2b_2, a_2a_3 + b_1b_3 + a_3b_3)$$

ove K è somma dei tre termini. Allora dall'analisi del gioco si può derivare che S domina su $\{S, F\}$, C domina su $\{C, S\}$ e F domina sulle strategie $\{F, C\}$. Pertanto si riesce a derivare che alcune strategie pure non sono ESS, però sono o localmente o globalmente asintoticamente stabili per il replicatore dinamico.

Entrando nel dettaglio, si osserva che p è un equilibrio globalmente stabile asintoticamente se e solo se $a_1a_2a_3 > b_1b_2b_3$. Inoltre, p è ESS se e solo se $a_1 - b_1$, $a_2 - b_2$ e $a_3 - b_3$ sono tutte quantità positive, e la più grande delle radici quadrate è inferiore della somma delle altre due radici quadrate. Perciò, se p è ESS allora è globalmente stabile asinoticamente per il replicatore dinamico. Tuttavia, il viceversa non è vero, infatti l'SCF è un esempio che dimostra che mentre tutti gli ESS interni sono equilibri attrattivi, non tutti gli equilibri attrattivi sono ESS. Il diagramma di fase di tale gioco è caratterizzato dal seguente triangolo con vertici le 3 strategie pure.

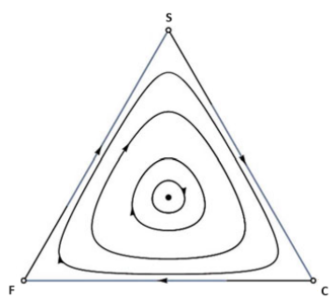

Figura 2.1: Traiettorie del gioco SCF

Osservazione 5. *Si osserva che nell'esempio appena dato, il caso $a_1a_2a_3 = b_1b_2b_3$ (includendo l'ipotesi che $a_i = b_i = 1$ per $i = 1{,}2{,}3$) comporta le orbite chiuse del replicatore dinamico* *e ad un equilibrio interno stabile (ma non asintoticamente stabile). Questo è un esempio dove una piccola perturbazione sui parametri porta a grandi cambiamenti nelle soluzioni, lo si può osservare in figura 2.1. Per studiare il problema con altre variabili prese in considerazione, si vedano capitoli 5 e 23 nel libro di testo di Başar [2]*

Lo studio dei giochi simmetrici, però non è completo. Con la prossima sezione si andranno a considerare i giochi simmetrici con spazio dei tratti continuo, nello specifico con spazio unidimensionale. Fino ad ora avevamo considerato S un insieme finito dal quale utilizzare la strategia, con la prossima parte di teoria, lo stesso S verrà considerato un intervallo di strategie.

2.2 Giochi Simmetrici con spazio dei tratti continuo

Per tutta la parte di teoria in cui consideriamo gli insiemi finiti, i giocatori utilizzano le strategie pure o miste a seconda dell'evoluzione della dinamica del sistema. In questa sezione così come nella sezione 3.4, gli agenti useranno quelli che vengono definiti tratti. Che cosa è un tratto? Il ***tratto*** è la strategia pura di un individuo presa non più in un insieme finito, bensì in un intervallo continuo. Lo sviluppo di questa teoria fu implementata perchè si riconobbe che la relazione fra risultati evolutivi e il concetto di ESS è più complicata nel continuo. Infatti John Maynard Smith e Eshel (1983) notarono che il criterio di stabilità per le ESS (condizione 1.11b) è differente per lo studio di sistemi nel continuo. Questo tipo di problema, nonostante venga analizzato tramite l'osservazione di sistemi in ambiti diversi, appare anche in esempi matematici, come il seguente.

Esempio 4. *Consideriamo un gioco il cui insieme S è parametrizzato dal numero reale v in un intervallo contenente lo 0. Supponiamo che il payoff della strategia v contro la strategia u sia della forma:*

$$E(v, u) = av^2 + buv$$

dove a e b sono parametri fissi e reali. E' immediato verificare che $(0,0)$ è un equilibrio di Nash se e solo se $a < 0$. Infatti, si verifica che $E(v,0) = av^2 < 0 = E(0,0)$ per ogni $v \neq 0$ se e solo se $a < 0$. Pertanto assumendo $a < 0$, si verifica da definizione, che la strategia $u^* = 0$ è ESS, di conseguenza la popolazione non può essere invasa.

D'altra parte, una strategia v contro una popolazione che usa strategia u, soddisfa

$$E(v, u) > E(u, u) \iff (v - u)[a(v + u) + bu] > 0$$

Per v vicino a $u \neq 0$, si ottiene il termine $a(v + u) + bu \cong (2a + b)u$. Perciò, se $2a + b > 0$, la strategia v se è più vicina ad u^* rispetto ad $u \neq 0$ non può invadere; se, invece, è più lontana da u^* rispetto a $u \neq 0$ allora la strategia v può invadere. Di conseguenza, una leggera *perturbazione nei dati tra* $u^* = 0$ *e* $u \neq 0$ *allontana la popolazione da* u^**. Ovvero* $u^* = 0$ *è equilibrio di Nash quando* $a < 0$ *e quindi non può essere invasa; però non è attendibile come risultato se* $2a + b > 0$*, cioè se* $b > -2a$*.*

Questo portò Eshel a formulare le Continuously Stable Strategie (CSS), ovvero le strategie continuamente stabili. Tale concetto oltre a chiedere ad una strategia, in questo caso u^*, di soddisfare la definizione di equilibrio di Nash, richiede lo studio delle dinamiche adattive (e della loro equazione canonica). Inoltre, nonostante un equilibrio di Nash è automaticamente localmente superiore (si veda definizione 2.8) per giochi matriciali, questo non è più vero per giochi con spazio dei tratti continuo. Questo contrasto permetterà di definire il concetto di Neighborhood Invader Strategy (NIS), definizione 2.7, che più avanti vedremo esser collegato al concetto di stabilità, sezione 2.2.2.

2.2.1 CSS e dinamiche adattive

Per evitare sottigliezze che potrebbero verificarsi a livello matematico, soprattutto nei casi limite, supponiamo per la seguente definizione, che se u^* è equilibrio di Nash associato ad una strategia pura appartenente all'intervallo S, allora u^* è equilibrio di Nash (stretto). Lo spazio continuo delle "strategie" miste viene scritto in modo analogo rispetto al caso finito: $\Delta(S)$.

Definizione 2.4 (**CSS: Continuously Stable Strategie**). *Preso* u^* *equilibrio di Nash dentro S, allora* u^* *viene definito CSS se, per qualche* $\epsilon > 0$ *e una qualsiasi strategia* $u \in S$ *con il quale* $|u - u^*| < \epsilon$*, allora* $\exists\ \delta > 0$ *tale che, per* $|v - u| < \delta$[1]$, E(v,u) > E(u,u) \iff |v - u^*| < |u - u^*|$

L'intuizione dietro a questa definizione è che, presa una popolazione in cui gran parte delle persone giocano una strategia sufficientemente vicina alla CSS, allora solamente quelle più vicine ad essa saranno selettivamente vantaggiose, nella definizione tali strategie sono identificate con v. Come accennato sopra, altri due concetti importanti accompagnano lo studio delle CSS: il primo è quello inerente alle dinamiche adattive, il secondo definisce la stabilità convergente di un equilibrio.

Definizione 2.5 (**Dinamiche Adattive**). *A meno di riparametrizzazioni temporali, l'equazione canonica delle dinamiche adattive è*

$$\dot{u} = \frac{\partial E(v,u)}{\partial v}|_{v=u} \tag{2.1}$$

ove si indica $\frac{\partial E(v,u)}{\partial v}|_{v=u} \equiv E_1(u,u)$

[1]Tipicamente, δ dipende da u (e.g. $\delta < |u - u^*|$)

Definizione 2.6 (Stabilità convergente). *Una strategia interna u^* è convergente stabile se è localmente stabile asintoticamente mediante equazione* (2.1)

L'equazione canonica delle dinamiche adattive è tra i più elementari modelli dello studio dell'evoluzione in un insieme continuo unidimensionale.

Per spiegare la funzione delle dinamiche adattive, abbiamo bisogno di introdurre il concetto di *popolazione monomorfa ad un tratto* $u \in S$. Una popolazione si dice che è monomorfa al tratto o alla strategia $u \in S$ quando nella stessa si usa unicamente quel tratto.

Allora grazie alle dinamiche adattive, presa una popolazione monomorfa al tratto $u \in S$ possiamo studiare l'evoluzione della specie mediante sostituzione dei tratti in direzione del tratto v, rispetto alla strategia u. Nello specifico, in ogni istante temporale in cui si studia il sistema, le dinamiche adattive studiano se ci sono strategie mutanti che possono invadere (invadono qualora il loro utilizzo porta una payoff migliore). Tipicamente, le dinamiche adattive sono ristrette a modelli la cui funzione di payoff $E(v, u)$ ha derivate parziali continue fino al secondo ordine. Da questo deriva sopratutto un'analisi del successo mediante uno studio locale dei sistemi[2].

D'altra parte la stabilità convergente fu introdotta prima dell'equazione canonica delle dinamiche adattive, dato che una strategia u^* soddisfa la seconda parte della definizione 2.4. In particolare, la definizione di convergenza stabile non garantisce che una strategia u^* sia equilibrio di Nash. Da questa analisi, si riesce a derivare un risultato importante che lega tra di loro i concetti definiti fino ad adesso.

Lemma 4. *u^* è una CSS $\iff$ u^* è equilibrio di Nash convergente stabile, mediante le dinamiche adattive* (2.1).

Osservazione 6. *Applicando le definizioni 2.5 e 2.6 alla funzione di payoff vista nell'esempio 4, osserviamo che l'equazione canonica delle dinamiche adattive diventa $\dot{u} = (2a + b)u$. In questo caso la strategia $u^* = 0$ è CSS per il lemma 4 se e solo se $a < 0$ (equilibrio di Nash) e $2a + b > 0$ (convergente stabile)*

Dato che la condizione di stabilità convergente è indipendente dalle condizioni che definiscono un equilibrio di Nash, vi è una diversa classificazione dei punti (tale classificazione va oltre il nostro scopo e quindi non trattata). Inoltre, vi sono casi in cui un punto fisso u^* delle dinamiche adattive soddisfa la definizione di stabilità convergente, ma non la definizione di equilibrio di Nash[3]. Viceversa, u^* può essere un equilibrio di Nash pur non essendo stabile con-

[2]In particolare, le dinamiche adattive non vengono applicate ad esempio a giochi come la "War of Attrition", il primo originale esempio di gioco simmetrico con spazio dei tratti continuo [2, cap. 23]. Infatti, consentendo che le strategie di invasione siano lontane rispetto al tratto a cui è monomorfa la popolazione, o che gli individui giochino strategie miste, in questi riferimenti viene mostrato che il risultato evolutivo della "War of Attrition" è una distribuzione continua nell'intervallo S.

[3]In particolare, quando una strategia rientra in questa situazione, allora tali equilibri o sono punti di minimo o punti di biforcazione che producono differenti sottogiochi, ovvero diverse evoluzioni da parte della popolazione.

vergente. Grazie a questa analisi, si ottiene una bistabilità derivante dall'equazione (2.1) quando la popolazione è monomorfa ad una strategia e si muove in una determinata direzione. In particolare, essendo S unidimensionale lo studio dell'evoluzione parte da un estremo e si sposta verso l'altro.

2.2.2 NIS e replicatori dinamici

Per concludere questo capitolo, si completa l'analisi della teoria degli evolutionary games introducendo i replicatori dinamici per giochi simmetrici con spazio dei tratti continuo e concretizzando i concetti, a livello matematico, di NIS e di località superiore. Soprattutto quest'ultimo tornerà utile per legare tutti gli oggetti visti fino ad adesso.

Sapendo che la notazione $E(v, u)$ permette di calcolare il payoff di un individuo che usa strategia v contro un altro individuo che usa strategia u, possiamo determinare il replicatore dinamico per giochi con spazio dei tratti continuo. Procediamo per passi. Assumendo P la misura di probabilità su S, corrispondente all'attuale distribuzione di strategie all'interno della popolazione, si può calcolare il payoff previsto di un individuo che usa strategia v in una randomica interazione.

$$E(v, P) \equiv \int_S E(v, u)P(du) \tag{2.2}$$

Da questa si può ricavare il payoff medio rispetto la distribuzione P

$$E(P, P) \equiv \int_S E(v, P)P(dv)$$

Allora considerando il payoff medio $E(P, P)$ e B sottoinsieme di Borel di S, il replicatore dinamico viene definito dalle seguenti equazioni differenziali.

$$\frac{dP_t}{dt}(B) = \int_B [E(u, P_t) - E(P_t, P_t)]P_t(du) \tag{2.3}$$

Questa definizione permette di affermare che il replicatore dinamico è ben definito sull'insieme di Borel B con $P \in \Delta(S)$[4] distribuzione di strategie, se la funzione di payoff è continua. In questo caso, il replicatore dinamico descrive l'evoluzione della distribuzione di strategie P nel tempo. Inoltre, il sottoinsieme di Borel B di S, in generale, può essere un qualsiasi sottoinsieme di Borel: in questo caso, essendo S unidimensionale allora anche B sarà un intervallo, e di conseguenza l'equazione (2.3) descrive la dinamica della distribuzione nell'intervallo B.

Osservazione 7. *Si può osservare la somiglianza tra il replicatore dinamico continuo* (2.3) *e il replicatore dinamico finito* (1.6)*: la differenza di payoff tra la strategia che l'individuo usa e*

[4]Sotto le ipotesi fate, stiamo lavorando sullo spazio di misura (S, B), con P misura di probabilità in $\Delta(S)$

quella della popolazione (payoff medio), e inoltre la presenza, da una parte della distribuzione di strategie, ovvero della misura di probabilità P_t, mentre dall'altra, della frequenza p di una certa strategia.

A differenza delle dinamiche adattive, le CSS non sono stabili per il replicatore dinamico continuo. Per verificare questo fatto, bisogna definire una topologia su $\Delta(S)$. Si prende la topologia debole e consideriamo una distribuzione di strategie $Q \in \Delta(S)$ vicina a $P \in \Delta(S)$, con supporto finito $\{u_1, \ldots, u_k\}$, se la Q-misura di un intorno per ciascuna u_i è vicina a $P(\{u_i\})$ per ogni $i = 1, \ldots, k$. In particolare, se la distribuzione P è monomorfa ad una strategia u^* CSS, allora ogni intorno di P includerà tutti i casi in cui la popolazione ha supporto vicino a u^*. Perciò u^* deve essere globalmente stabile asintoticamente per il replicatore dinamico (1.6) rispetto ai giochi matriciali con due simmetrie, descritti dalla tabella 2.1. Ignorando i casi limite, allora u^* deve strettamente dominare su tutte le strategie u del gioco: $E(u^*, u^*) > E(u, u^*)$ e $E(u^*, u) > E(u, u)$.

Osservazione 8. *Applicando questa dominanza a giochi la cui funzione di payoff è quadratica* (4)*: $u^* = 0$ soddisfa entrambe le condizioni sopra, rispettivamente, se e solo se $a < 0$ e $a + b < 0$. Perciò, se u^* è equilibrio di Nash e $2a + b < 0 < a + b$, allora u^* è CSS che però, è instabile per* (2.3)*.*

Quindi prendendo in considerazione funzioni di payoff generiche, si possono definire le NIS. Considerando la distribuzione di strategie P, la strategia u^* è punto fisso stabile per (2.3) se e solo se $E(u^*, u^*) > E(u, u^*)$ e $E(u^*, u) > E(u, u)$ per u sufficientemente vicina, ma non uguale a u^*.

Definizione 2.7 (NIS: Neighborhood Invader Strategy). *Consideriamo un gioco simmetrico con S spazio dei tratti continuo. Allora $u^* \in S$ è una NIS se $E(u^*, u) > E(u, u)$ per ogni u sufficientemente vicina, non uguale, a u^*. Inoltre, u^* è un* ***equilibrio di Nash con intorno*** *se $E(u^*, u^*) \geq E(u, u^*)$ per ogni u sufficientemente vicina, non uguale, a u^*.*

Grazie a questa definizione delle NIS, possiamo allora definire la superiorità locale. In alcuni libri di testo (si veda [2]) viene anche detta "*neighborhood superior*", ovvero intorno superiore.

Definizione 2.8 (Superiorità locale). *Assumendo le stesse ipotesi della definizione sopra e fissato $0 \leq k^* < 1$, la strategia $u^* \in S$ viene definita:*

i) ***localmente*** *k^*-**superiore** se $E(u^*, P) > E(P, P)$ per ogni $P \in \Delta(S)$ con $1 > P(\{u^*\}) \geq k^*$ e con supporto sufficientemente vicino a u^**

ii) ***localmente superiore*** *(rispettivamente* ***localmente metà-superiore****) se $k^* = 0$ (rispettivamente, $k^* = \frac{1}{2}$)*

iii) ***globalmente*** k^*-***superiore*** *se* $E(u^*, P) > E(P, P)$ *per ogni* $P \in \Delta(S)$ *con* $1 > P(\{u^*\}) \geq k^*$

I concetti di superiore località e di NIS sono stati introdotti a fine anni novanta e inizio anni duemila, con lo scopo di andare a completare l'analisi della stabilità data dallo studio del replicatore dinamico con S spazio dei tratti continuo. Con il seguente teorema colleghiamo tra di loro tutti i concetti affrontati in questa sezione.

Teorema 5. *Assumiamo* S *spazio unidimensionale continuo e consideriamo* $u^* \in int(S)$ *tale che* u^* *è punto fisso per l'equazione canonica delle dinamiche adattive* (2.1)*. Allora*

a) u^* *è una NIS e un equilibrio di Nash se e solo se è localmente superiore*

b) u^* *è localmente attrattiva rispetto al replicatore dinamico* (2.3) *se e solo se è localmente superiore*

c) u^* *è equilibrio di Nash con intorno se e solo se è localmente* k^*-*superiore per qualche* $0 \leq k^* < 1$

d) u^* *è CSS se e solo se è localmente metà-superiore se e solo se è localmente un equilibrio di Nash che è localmente stabile asintoticamente rispetto all'equazione* (2.1)

Osservazione 9. *Grazie a questa teorema, si può constatare che i concetti di equilibrio di Nash, di CSS e di NIS sono chiaramente distinti per giochi simmetrici con spazio dei tratti continuo.*

Osservazione 10. *Applicando la definizione 2.8 usando la topologia standard su* Δ^m *per giochi matriciali, allora la funzione di payoff implica che la strategia* p^* *è localmente* k^*-*superiore per qualche* $0 \leq k^* < 1$ *se e solo se* $E(p^*, p) > E(p, p)$ *per ogni* p *sufficientemente vicina a* p^**, ma non uguale ad essa (i.e. se e solo se* p^* *è ESS per il Teorema 3a). Ovvero la superiorità* k^* *locale è indipendente dal valore della stessa. Di conseguenza, le ESS, le CSS e le NIS sono lo stesso concetto per giochi matriciali, cioè le CSS e le NIS sono caratterizzazioni diverse del concetto di ESS per giochi con spazio dei tratti continuo.*

Capitolo 3

Giochi Asimmetrici

In quest'ultimo capitolo trattiamo i Giochi Asimmetrici a due giocatori e a due ruoli. Ovvero, si discutono di sistemi composti da due popolazioni infinite, dove ogni specie ha un insieme delle strategie pure di cardinalità due. Come visto nel capitolo 1, lo studio di tali sistemi considera due individui presi in modo randomico ciascuno da una popolazione e si "confrontano" tra di loro i payoff che descrivono il gioco. Nello specifico, si vedranno i concetti visti nei primi due capitoli, reinterpretati per giochi asimmetrici sia con S insieme finito di strategie, sia con S come spazio dei tratti continuo. Per dimostrare la varietà di applicazione della teoria degli evolutionary games verrà visto un gioco in ambito economico.

Definizione 3.1 (Gioco Asimmetrico). *Un gioco viene definito asimmetrico quando gli insiemi delle strategie ammissibili non sono identici per i partecipanti.*

3.1 Giochi Asimmetrici in forma normale

Nei giochi asimmetrici i giocatori si affrontano a coppie dopo aver deciso una strategia tra quelle ammissibili del sistema. In problemi di questo tipo, definiti r e s vettori che indicano la distribuzione di strategie all'interno delle popolazione e $S = \{e_1, \ldots, e_m\}$ e $T = \{f_1, \ldots, f_n\}$ gli insiemi delle strategie pure, possiamo definire le funzioni di payoff di ciascun giocatore per ogni strategia del sistema (si veda la funzione di payoff data nella definzione 2.1). In particolare, preso l'agente 1 nella specie A e l'agente 2 nella specie B, si ottengono i payoff seguenti

$$E_1(e_i; r, s) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} q_j = e_i \cdot As$$

$$E_2(f_j; r, s) = \sum_{i=1}^{m} B_{ij} p_i = f_j \cdot Br$$

A e B sono le matrici di payoff, mentre e_i ed f_j sono le strategie pure che un individuo può usare con $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Per indicare gli insiemi delle strategie miste delle due popolazioni usiamo la notazione vista, specificando la popolazione di provenienza: Δ^m_S e Δ^n_T.

I Giochi asimmetrici in forma normale vengono anche chiamati **giochi bimatriciali**. Infatti, considerando giochi asimmetrici a due ruoli ($m = n = 2$), presi due giocatori i cui insiemi delle strategie pure sono, rispettivamente, $S = \{e_1, e_2\}$ e $T = \{f_1, f_2\}$, si può costruire la tabella 3.1

	f_1	f_2
e_1	$E(e_1, f_1), E(f_1, e_1)$	$E(e_1, f_2), E(f_2, e_1)$
e_2	$E(e_2, f_1), E(f_1, e_2)$	$E(e_2, f_2), E(f_2, e_2)$

Tabella 3.1: Gioco bimatriciale

da cui si ricavano le matrici dei due giocatori.

$$A = \begin{bmatrix} E_1(e_1, f_1) & E_1(e_1, f_2) \\ E_1(e_2, f_1) & E_1(e_2, f_2) \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} E_2(f_1, e_1) & E_2(f_2, e_1) \\ E_2(f_1, e_2) & E_2(f_2, e_2) \end{bmatrix}$$

I modelli evolutivi basati su giochi bimatriciali, sono stati studiati per investigare fenomeni biologici ed economici come “La battaglia dei Sessi” e l’ “Owner-Intruder Game” (Maynard Smith, 1982) [5, pp. 1054–1059]. A meno della costruzione che si fornisce per i giochi asimmetrici, gli esempi appena citati considerano agenti/giocatori della stessa popolazione, che però agiscono in ruoli diversi. In generale, tali problemi possono essere usati per adattare il comportamento quando un certo individuo o è nello stesso ruolo o in ruolo diverso con una certa probabilità, che può dipendere dalle strategie avversarie. Tali generalizzazioni possono influenzare i risultati di un dato sistema, il loro studio va oltre l’obbiettivo di questa tesi, di conseguenza non verranno trattate.

Prima di proseguire, andando ad analizzare e definire concetti importanti per i giochi asimmetrici, ci soffermiamo brevemente sul tipo di interazioni che vi sono all’interno di un sistema. Sistemi di questo tipo sono caratterizzati da due gruppi di interazioni:

1) interazioni interspecifiche, vengono presi randomicamente due individui di due specie diverse e vengono accoppiati tra di loro;

2) interazioni intraspecifiche, gli individui scelti randomicamente provengono dalla stessa specie.

Identificando con $\rho_{k,l}$ le probabilità di interazione, cioè assumendo che le quantità $k, l \in \{A, B\}$, abbiamo che $\rho_{A,A}$ e $\rho_{B,B}$ identificano le interazioni intraspecifiche, mentre $\rho_{A,B}$ e $\rho_{B,A}$ le interazione interspecifiche. Pertanto, porre $\rho_{A,A} = \rho_{B,B} = 0$ e $\rho_{A,B} = \rho_{B,A} = \frac{1}{2}$ vuol dire studiare giochi asimmetrici con sole interazioni fra giocatori di specie diverse, anche detti **giochi puramente asimmetrici**; mentre porre $\rho_{A,A} = \rho_{B,B} = \frac{1}{2}$ e $\rho_{A,B} = \rho_{B,A} = 0$ implica studiare **giochi asimmetrici puramente simmetrici** (pertanto si può pensare che la categoria di giochi simmetrici è contenuta in quella dei giochi asimmetrici).

3.1.1 ESS e Replicatore Dinamico

Elaboriamo la teoria degli evolutionary games, affrontata fino ad ora, per giochi asimmetrici in forma normale. In particolare, si vedono i concetti di ESS e di replicatore dinamico. Per estendere la nozione di ESS (definizione 1.11), si considera la coppia (p^*, q^*) di strategie che corrisponde ad uno stato ben preciso delle popolazioni[1]. Per definire le ESS per giochi asimmetrici, usiamo quanto visto nell'osservazione 1. Date due popolazioni monomorfe allo stato (p^*, q^*), si vuole studiare l'invasione dinamica da parte di una piccola porzione di popolazione in ciascuna di esse. Considerando la coppia di strategie invasive (p, q) e le porzioni di popolazione ϵ_1, ϵ_2 che usano tali strategie, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} \dot{\epsilon_1} = \epsilon_1(1-\epsilon_1)[E_1(p; \epsilon_1 p + (1-\epsilon_1)p^*, \epsilon_2 q + (1-\epsilon_2)q^*) + \\ \qquad -E_1(p^*; \epsilon_1 p + (1-\epsilon_1)p^*, \epsilon_2 q + (1-\epsilon_2)q^*)] \\ \dot{\epsilon_2} = \epsilon_2(1-\epsilon_2)[E_2(q; \epsilon_1 p + (1-\epsilon_1)p^*, \epsilon_2 q + (1-\epsilon_2)q^*) + \\ \qquad -E_2(q^*; \epsilon_1 p + (1-\epsilon_1)p^*, \epsilon_2 q + (1-\epsilon_2)q^*)] \end{cases} \tag{3.1}$$

In questo caso le funzioni di payoff $E_1(\cdot; \epsilon_1 p + (1-\epsilon_1)p^*, \epsilon_2 q + (1-\epsilon_2)q^*)$ e $E_2(\cdot; \epsilon_1 p + (1-\epsilon_1)p^*, \epsilon_2 q + (1-\epsilon_2)q^*)$ calcolano i payoff dei due individui (delle due popolazioni) rispetto alle strategie ammissibili di ciascuna popolazione: $p, p^* \in \Delta_S^m$ e $q, q^* \in \Delta_T^n$. In particolar modo, i termini $\epsilon_1 p + (1-\epsilon_1)p^*$ e $\epsilon_2 q + (1-\epsilon_2)q^*$ indicano, rispettivamente, la distribuzione di strategie che c'è all'interno della specie A e della specie B, in un determinato istante temporale.

Grazie al sistema 3.1 si può affermare che: (p^*, q^*) è coppia di strategie stabilmente evolutiva (i.e., $(\epsilon_1, \epsilon_2) = (0{,}0)$ è localmente stabile asintoticamente per le dinamiche sopra, per ogni scelta di $p \neq p^*$ e di $q \neq q^*$) se e solo se

$$\text{o } E_1(p^*; p, q) > E_1(p; p, q) \text{ o } E_2(q^*; p, q) > E_2(q; p, q) \tag{3.2}$$

per ogni coppia di strategie $(p, q) \in \Delta_S^m \times \Delta_T^n$ sufficientemente vicine, ma non uguali a (p^*, q^*). Inoltre, la condizione 3.2 è equivalente alla proprietà **a)** del Teorema 5, perchè analoga alla superiorità locale di giochi matriciali. Infatti si ha che una strategia p^* se è NIS e equilibrio

[1] Per quanto detto nel capitolo 1, definiamo la coppia di strategie (p^*, q^*) non specificando l'insieme di provenienza. Però, avendo osservato che le strategie pure sono un caso particolare delle strategie miste, si può dire che $p^* \in \Delta_S^m$ e $q^* \in \Delta_T^n$

di Nash allora è una CSS, ovvero una caratterizzazione della definizione di ESS con spazio dei tratti continuo. Perciò la stabilità della coppia di strategie (p^*, q^*) è legata alla superiorità locale. Quindi, in generale, se vale la condizione 3.2 per ogni coppia di strategie $(p, q) \in \Delta^m \times \Delta^n$ (con m ed n non necessariamente distinti) sufficientemente vicina a (p^*, q^*), allora una coppia di strategie (p^*, q^*) che è equilibrio di Nash viene definita ***ESS a due specie***.

Definizione 3.2 (ESS a due specie). *Una coppia di strategie (p^*, q^*) è ESS a due specie se e solo se vengono soddisfatte entrambe le condizioni:*

(i) $E_1(p^*; p^*, q^*) \geq E_1(p; p^*, q^*)$ *per ogni p sufficientemente vicina a p^* e*
$E_2(q^*; p^*, q^*) \geq E_2(q; p^*, q^*)$ *per ogni q sufficientemente vicina a q^*;*

(ii) *o* $E_1(p^*; p, q) > E_1(p; p, q)$ *o* $E_2(q^*; p, q) > E_2(q; p, q)$
per ogni coppia di strategie $(p, q) \in \Delta_S^m \times \Delta_T^n$ sufficientemente vicine, ma non uguali a (p^*, q^*)

Inoltre, l'ESS a due specie (p^*, q^*) gode di proprietà simili a quelle viste per ESS di giochi simmetrici in forma normale. Per completare l'analisi sulle ESS, prima dobbiamo definire il replicatore dinamico per giochi asimmetrici.

Definizione 3.3. *Supponiamo di avere due popolazioni infinite in cui due agenti, uno per ogni popolazione, vengono accoppiati randomicamente per partecipare ad un gioco. Dati S e T l'insieme delle strategie pure, allora il replicatore dinamico per giochi asimmetrici è*

$$\begin{cases} \dot{r}^i = r^i[E_1(e_i; r, s) - E_1(s; r, s)] \; i = 1, \dots, m \\ \dot{s}^j = r^i[E_2(f_j; r, s) - E_2(r; r, s)] \, j = 1, \dots, n \end{cases} \tag{3.3}$$

Tramite il replicatore dinamico e ad alcune proprietà della sezione 2.1, si può concludere che la coppia di strategie (p^*, q^*) è localmente stabile asintoticamente se e solo se è ESS a due specie. Perciò, rispetto ai giochi simmetrici, in questa categoria di sistemi si può affermare che vi è un'equivalenza fra il concetto di ESS a due specie (concetto statico[2]) e il concetto di equilibrio evolutivo stabile.

Tuttavia lo studio sulle ESS non è completo. In questo caso, che stiamo studiando giochi asimmetrici puri (si veda la notazione usata sulle probabilità di interazione a inizio sezione 3.1), gli equilibri di Nash devono essere coppie di strategie pure, di conseguenza questo concetto di ESS è restrittivo. Per completare questa parte di teoria, consideriamo il caso opposto di interazioni, ovvero le interazioni intraspecifiche dove le probabilità di interazione sono $\rho_{A,B} = \rho_{A,B} = 0$

[2] A seconda dei payoff che descrivono un gioco è possibile determinare quale strategia è una ESS, a priori, senza dover studiare la dinamica di un sistema.

e $\rho_{A,A} = \rho_{B,B} = \frac{1}{2}$. Come detto sopra, tale giochi vengono chiamati giochi asimmetrici puramente simmetrici. In questi sistemi (p^*, q^*) è ESS a due specie se e solo se p^* e q^* sono ESS a singola specie, ovvero soddisfano entrambe la definizione 1.11. In questo caso, esistono ESS a singola specie che sono strategie miste. Di conseguenza, unendo le due parti di teoria viste sopra si può concludere che esistono ESS a due specie che possono essere composte da strategie pure e/o da strategie miste.

Allora si può concludere che il concetto di ESS a due specie combina e generalizza il concetto di ESS visto nei capitoli precedenti. Di conseguenza, sapendo che l'obbiettivo di un giocatore è quello di scegliere le proprie strategie in modo tale che tutti abbiano il payoff migliore, i giochi asimmetrici permettono al singolo individuo non solo di raccogliere informazioni sulla propria popolazione, ma anche sull'altra, avendo così un insieme di informazioni più grande da gestire rispetto a quello di un giocatore in un gioco simmetrico.

3.2 Giochi Asimmetrici in forma estesa

In questo paragrafo si studiano sistemi asimmetrici in forma estesa con insiemi finiti delle strategie. I problemi appartenenti a questa categoria vengono anche definiti ***Giochi a Informazione Perfetta***. La differenza principale rispetto ai giochi visti nella sezione 3.1 riguarda la raccolta di informazioni. Un gioco asimmetrico in forma normale non fornisce un immagine chiara e precisa del processo di decisione che sta alla base nella scelta della strategia. Problemi importanti come l'ordine di gioco nel processo di decisione, le informazioni disponibili in un certo istante di gioco e l'evoluzione del gioco in caso di situazioni dinamiche, vengono soppressi quando si descrivono i vari payoff in forma bimatriciale, ovvero nella tabella dei payoff. Per evitare che si verifichino tali problemi, nella teoria dei giochi si introducono i cosiddetti ***Alberi Decisionali***.

Definizione 3.4 (Albero Decisionale). *Un albero decisionale è un albero (grafo) radicato in nodi terminali e non terminali, in cui ogni nodo non terminale è punto decisionale di uno dei due giocatori.*

Per vedere le utilità degli alberi decisionali, consideriamo l'esempio seguente.

Esempio 5. *Consideriamo brevemente il mini-ultimatum game, trattato da Robbet e Carpenter in "Game Theory and Behaviour" [4, pp. 736–740], e descriviamo il gioco raffigurato con l'albero decisionale 3.1. Presi due giocatori di due specie diverse e assegnatoli il ruolo di* Proposer *e di* Responder*, si studia un sistema in cui fatta un'offerta monetaria da parte del* Proposer*, il* Responder *decide se accettare o rifiutare l'offerta stessa. L'obbiettivo di questo sistema è studiare come gli individui si dividono fra di loro il compenso che viene fornito da terzi. Ipotizzando che il totale delle monete sia* 4*, il Proposer può decidere se fare un'offerta*

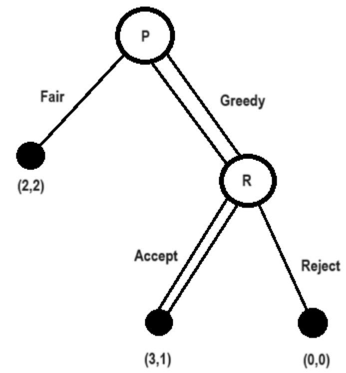

Figura 3.1: Esempio di albero decisionale, mini-Ultimatum Game

Fair*, ovvero equa, e divide esattamente a metà il denaro, oppure fare un'offerta* Greedy*, ovvero divide le monete in modo tale da tenere il più possibile per sè, non privando il* Responder *di un piccolo premio. Fatta un'offerta Fair, non c'è più bisogno di osservare il gioco perchè entrambi i giocatori ottengono lo stesso compenso. Invece, ricevuta un'offerta Greedy, il Responder deve scegliere cosa fare di questa offerta, perchè se la* Accetta *allora il gioco termina secondo le regole date dal Proposer, altrimenti se la* Rifiuta*, nessuno dei due giocatori ottiene il danaro.*

Osservazione 11. *Con questo esempio si evidenzia l'importanza dell'ordine di gioco dei partecipanti, proprietà caratteristica degli Alberi Decisionali. Inoltre, è un caso particolare di gioco che può terminare già alla prima decisione. In generale, vi sono giochi che presentano alberi simmetrici rispetto al nodo radice, ovvero il nodo da cui parte il problema, così come vi sono alberi che per una scelta fatta possono presentare* 3 *o più scelte (si veda [2, p. 500]).*

Come visto fino ad ora, gli obbiettivi principali per i giochi asimmetrici in forma estesa sono: determinare gli equilibri evolutivi del replicatore dinamico (si veda il sistema 3.3) che caratterizzano un sistema e che descrivono uno stato ben preciso di entrambe le popolazione; e verificare quali di essi determinano che l'evoluzione del sistema sia stabile oppure no. Prima di passare ad analizzare questa parte di teoria, vedendo un'applicazione in ambito economico, ci soffermiamo sul perchè studiamo i giochi asimmetrici in forma estesa.

Nei giochi a informazioni perfetta, abbiamo già detto che una delle loro caratteristiche fondamentali è l'ordine di gioco dei partecipanti. Chi decide l'ordine di gioco? In sistemi di questo tipo, c'è l'aggiunta di un giocatore opzionale[3], "Natura", che permette di definire cosa sono le Moves by Nature.

[3]La presenza o meno di tale giocatore dipende dalla costruzione del sistema stesso

Definizione 3.5 (**Moves by Nature**). *Le Moves by Nature sono decisioni o strategie prese dagli agenti, nei giochi in forma estesa, che non hanno alcun interesse nel risultato.*

Il più classico esempio di giocatore che non ha interesse negli esiti dei giochi, è il *dealer* nel poker, ovvero colui che distribuisce le carte e tiene conto delle puntate dei vari partecipanti.

Quello che si ottiene considerando la "Natura" nei sistemi è un effetto randomico aggiuntivo, che va considerato all'interno dei giochi, ed essendo gli agenti razionali devono tener conto di questo effetto aggiuntivo randomico. Le Moves by Nature sono parte integrante dei giochi a informazione imperfetta, però ci aiutano lo stesso a distinguere i giochi a informazione perfetta **generici** da quelli **non generici**. Diamo la definizione di giochi a informazione perfetta generici.

Definizione 3.6 (**Giochi a Informazione Perfetta generici**). *I giochi in forma estesa vengono detti generici se non esistono coppie di strategie pure che portano a due situazioni di dinamica diversa, che però hanno lo stesso payoff per uno dei due giocatori.*

Quindi posso definire un gioco a informazione perfetta privo di moves by Nature, generico se e solo se non esistono nodi terminali nell'albero decisionale che hanno lo stesso payoff. Perchè sono importanti questi giochi generici?

Negli anni alcuni teorici dei giochi argomentarono sul fatto che nei giochi a informazione perfetta generici esiste un solo equilibrio di Nash "razionale" e che tale equilibrio può essere trovato mediante ***induzione inversa***. Partendo da un nodo terminale dell'albero si intraprende l'unica azione possibile per massimizzare il payoff nel sottogioco. Consideriamo questo nodo terminale come radice del sottogioco. Fatta la prima azione tronchiamo l'albero principale su questo nodo, creando a sua volta un nodo terminale dove vi sono presenti i payoff dei giocatori. Tale procedimento viene ripetuto fino a che nell'albero decisionale principale non si hanno più azioni possibili da fare. Tramite l'induzione inversa si ottiene ***l'SPNE***: Subgame Perfect Nash Equilibrium, ovvero l'equilibrio di Nash del sottogioco perfetto. Inoltre, il procedimento è caratterizzato dalla razionalità degli agenti perchè ogni sottogioco che si può "costruire" è razionale. Un noto economista, Reinhard Selten, riuscì a dimostrare che ogni gioco può essere diviso in sottogiochi, contenenti il sottoinsieme di tutte le scelte disponibili del gioco principale, e ogni sistema avrà un equilibrio di Nash del sottogioco perfetto. Tale induzione permette di eliminare tutte le situazioni possibili, ovvero escludere tutti i casi in cui un determinato giocatore fa scelte non credibili (perchè non ottimali) in quel nodo. L'induzione all'indietro viene principalmente usata in giochi di lunghezza finita e non può essere applicata a giochi con informazione imperfetta [7]. L'SPNE è un'unica coppia di strategie pure e spesso viene indicato con le doppie linee nell'albero decisionale, si veda figura 3.1.

Uno dei più semplici esempi di gioco asimmetrico a informazione perfetta (generico) che studia anche l'SPNE è lo *Store-Chain Game*, che descrive l'entrata nel mercato da parte di una nuova azienda, quando all'interno del mercato stesso vi è presente un'azienda già affermata.

3.3 Store-Chain Game

Lo Store-Chain Game studia un sistema composto da due popolazioni di aziende. La prima popolazione è composta unicamente da piccole prese che per aumentare i loro profitti stanno prendendo in considerazione l'idea di entrare nel mercato. La seconda popolazione è formata invece da imprese affermate all'interno del mercato, esse devono decidere, qualora una piccola impresa decidesse di entrare nel mercato, se far *Accomodare* quest'ultima cercando di limitare le proprie perdite dovute all'entrata di una nuova rivale, oppure se decidere di *"Distruggere"*, metaforicamente, la nuova entrata abbassando i prezzi, e/o avendo una campagna pubblicitaria più efficace ecc... (a seconda dei mezzi di comunicazione di un'impresa). Denominando una piccola azienda come *Challenger* e un'impresa affermata come *Incumbent*, il problema in forma estesa può essere descritto dall'albero decisionale in figura 3.3.

Per completare la descrizione del gioco, si devono specificare i payoff di entrambe le imprese quando queste fanno determinate scelte. La matrice di payoff scritta sotto, evidenzia quanto detto ad inizio sezione 3.2.

		Incumbent	
		Accomodare	**Distruggere**
Challenger	**Entrare**	(2,2)	(0,0)
	Rimanere Fuori	(1,5)	(1,5)

Tabella 3.2: Gioco in Forma Normale dello Store Chain Game

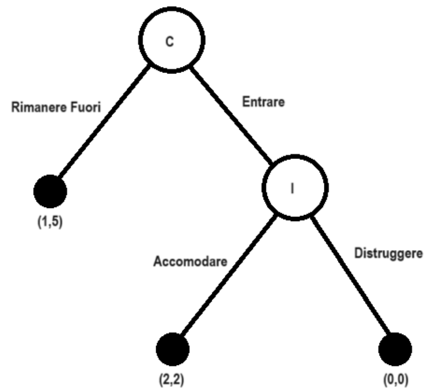

Figura 3.2: Descrizione Chain Store game senza payoff

Quali punti fissi sono equilibri di Nash? Quale fra questi equilibri risulta essere l'SPNE? Prima di procedere concettualmente con l'induzione all'indietro, alla ricerca dell'SPNE, descriviamo il problema facendo uso del replicatore dinamico e della nozione di ESS, visti per giochi asimmetrici. Definite p_E e q_A le frequenze, rispettivamente, delle due popolazioni nello scegliere di Entrare nel mercato e di far Accomodare le nuove imprese, calcoliamo le "equazioni" del replicatore dinamico. Si ricorda che $p_E, q_A \in [0,1]$.

$$\begin{cases} \dot{p}_E = p_E(1-p_E)[2q_A - 1] \\ \dot{q}_A = q_A(1-q_A)[2p_E] \end{cases} \tag{3.4}$$

Come visto nello studio del gioco Falco-Colomba 1.4, per determinare il replicatore dinamico, abbiamo bisogno di calcolare il payoff di un'azienda quando questa decide una determinata strategia rispetto la coppia di frequenze[4]. Identificando con RF e E le strategie Rimanere Fuori e Entrare, mentre con A e D le strategie Accomodare e Distruggere, calcoliamo i payoff seguenti

$$E_1(E; p_E, q_A) = 2q_A + 0(1-q_A) = 2q_A \qquad E_2(A; p_E, q_A) = 2p_E + 5(1-p_E) = 5 - 3p_E$$
$$E_1(RF; p_E, q_A) = 1 \qquad E_2(D; p_E, q_A) = 0p_E + 5(1-p_E) = 5 - 5p_E$$

Rispetto ai sistemi composti da un'unica popolazione in cui il payoff si calcola rispetto la frequenza della stessa, in giochi puramente asimmetrici *l'evoluzione di una popolazione determina l'evoluzione dell'altra*. Per esempio, se nella popolazione di Incumbent la scelta di Distruggere le aziende piccole accade con più probabilità, allora è più plausibile che la popolazione di Challenger si sposti su una scelta più conservativa decidendo quindi di non entrare nel mercato e quindi di mantenere payoff a 1. Viceversa, se Accomodare accade con più frequenza, le Challenger decideranno di Entrare con più "convinzione".

Guardando il replicatore dinamico, si osserva che l'equazione che studia la distribuzione nella popolazione delle Incumbent è non negativa: $\dot{q}_A \geq 0$ per ogni $0 \leq p_E, q_A \leq 1$. Quindi la strategia *Accomodare* è sempre in crescita, ad eccezione dei casi in cui $\dot{q}_A = 0$, cioè nei stati $q_0 = 0, q_1 = 1$ e $p_0 = 0$. Inoltre, la presenza di entrambe le frequenze nelle "equazioni" del replicatore dinamico verificano quanto detto sul fatto che l'evoluzione di una popolazione influisce sulla dinamica dell'altra. Gli equilibri evolutivi del replicatore dinamico sono i vertici $\{(1,0), (1,1)\}$ e il bordo $\{(0, q_A) | 0 \leq q_A \leq 1\}$. Perchè si parla di bordo? Discutendo di sistemi composti da due popolazioni in cui l'evoluzione di una condiziona la dinamica dell'altra, non possiamo disegnare due diagrammi di fase separati, bensì lo spazio degli stati è caratterizzato da un quadrato unitario.

Dal diagramma si riesce a determinare quale coppia di strategie è stabile. Procediamo per gradi e descriviamo cosa succede all'interno delle popolazioni, quando queste si trovano in una determinata situazione. Inanzitutto, la mancanza di punti fissi all'interno del quadrato esclude la presenza di equilibri scritti come coppia di strategie miste. Inoltre, il punto $\overline{q} = \frac{1}{2}$ "divide"

[4] La scelta della strategia viene fatta sulle informazioni di entrambe le popolazioni, non più su quella di provenienza

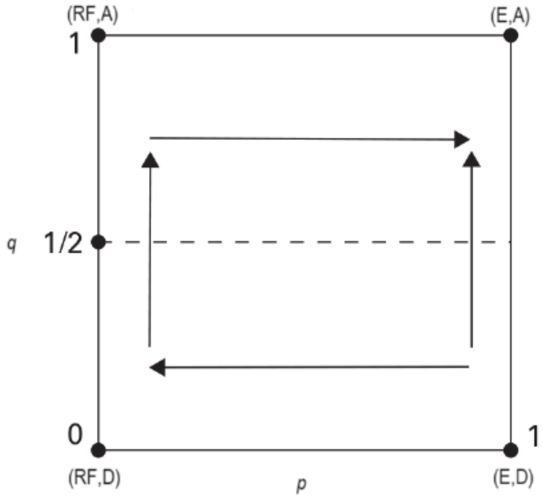

Figura 3.3: Dinamica dello Store Chain Game

il grafico a metà (tale punto è dato dalla prima "equazione" del replicatore dinamico): avere $\overline{q} < \frac{1}{2}$ vuol dire $\dot{p}_E < 0$, cioè la strategia "Entrare" verrà scelta sempre meno nel tempo, di conseguenza "Rimanere Fuori" si espanderà nella popolazione delle Challenger. Viceversa, se $\overline{q} > \frac{1}{2}$ allora $\dot{p}_E > 0$ e di conseguenza, si studierà il caso opposto a quello precedente.

Cosa implicano le frecce del moto sulla dinamica del sistema e sulla stabilità evolutiva dei punti fissi? Partendo dal vertice $(1{,}0)$, cioè (Entrare, Distruggere), le frecce del moto in entrambe le direzioni si allontanano e pertanto, ci permettono di affermare che l'equilibrio $(1{,}0)$ è instabile. Infatti, guardando la tabella dei payoff 3.2 entrambe le imprese non hanno profitto. Di conseguenza, se in una delle due popolazioni (o in entrambe) c'è una mutazione di strategia, nella popolazione di Challenger si sceglie di Rimanere Fuori e/o nella popolazione di Incumbent si decide di far Accomodare, ciò comporterà un aumento di payoff per entrambe (avere profitto 1 è comunque maggiore di 0). Osservando la dinamica dal grafico e ricordando che $\dot{q}_A > 0$ per ogni $q_A \in (0{,}1]$ si può affermare che l'unico equilibrio stabile è il vertice $(1{,}1)$. I restanti due vertici $(0{,}0)$ e $(0{,}1)$ che corrispondono rispettivamente, alla coppia di strategie (Rimanere Fuori, Distruggere) e (Rimanere Fuori, Accomodare) non dicono nulla sulla stabilità, entrambi i vertici hanno frecce del moto entranti e frecce del moto uscenti. Questo vale per tutto il bordo $\{(0, q_A)|0 \leq q_A \leq 1\}$. A livello matematico, per verificare se una coppia di strategie è stabile o instabile, bisogna applicare la definizione 1.9 ad entrambe le strategie della coppia. Infatti, calcolando le derivate del replicatore dinamico rispetto le due frequenze e andando a sostituire le coordinate del punto si ottiene che:

$$\begin{cases} \frac{d\dot{p}_E}{dp_E}|_{p_1=1,q_0=0} = (2q_A - 1)(1 - 2p_E)|_{p_1=1,q_0=0} = 1 > 0 \\ \frac{d\dot{q}_A}{dq_A}|_{p_1=1,q_0=0} = (2p_E)(1 - 2q_A)|_{p_1=1,q_0=0} = 2 > 0 \end{cases}$$

entrambe le derivate sono positive. Viceversa, il punto fisso $(1,1)$ che corrisponde alla coppia di strategie (Entrare,Accomodare) è stabile, infatti entrambe le derivate sono negative.

$$\begin{cases} \frac{d\dot{p}_E}{dp_A}|_{p_1=1,q_1=1} = (2q_A - 1)(1 - 2p_E)|_{p_1=1,q_1=1} = -1 < 0 \\ \frac{d\dot{q}_E}{dq_A}|_{p_1=1,q_1=1} = (2p_E)(1 - 2q_A)|_{p_1=1,q_1=1} = -2 < 0 \end{cases}$$

Anche a livello matematico i rimanenti due vertici e tutto il bordo non affermano nulla sulla stabilità, infatti si può dimostrare che tutti i punti hanno derivate, rispetto alle frequenze, o nulle o con segno discorde.

Quindi dal replicatore dinamico, il punto fisso $(1,1)$ è stabile. Come visto nel gioco Falco-Colomba, sezione 1.4, verifichiamo che $(1,1)$ è ESS a due specie. Mantenendo la stessa scrittura della definizione 3.2, si assume che $(p^*, q^*) = (p_1, q_1) = (1,1) =$, mentre la coppia di strategie (p, q) è sufficientemente vicina, ma non uguale a (p^*, q^*). Allora si dimostra che $E_1(p^*; p^*, q^*) = 2q^* > 1 = E_1(p; p^*, q^*)$ per ogni p sufficientemente vicina a p^* e $E_2(q^*; p^*, q^*) = 5 - 3p^* > 5 - 5p^* = E_2(q; p^*, q^*)$ per ogni q sufficientemente vicina a q^*. Inoltre, la disuguaglianza $E_2(q^*; p, q) = 5 - 3p > 5 - 5p = E_2(q; p, q)$ per ogni coppia (p, q) sufficientemente vicina, ma non uguale a (p^*, q^*) (ad eccezione del caso $p_0 = 0$) e analogamente la disuguaglianza $E_1(p^*; p, q) = 2q > 1 = E_1(p; p, q)$ per ogni coppia sufficientemente vicina (p, q), ma non uguale a (p^*, q^*), in particolar modo per $\overline{q} > \frac{1}{2}$. Quindi la coppia $(p^*, q^*) = (1,1)$ è equilibrio di Nash che soddisfa anche la condizione sulla stabilità asintotica, quindi è ESS a due specie.

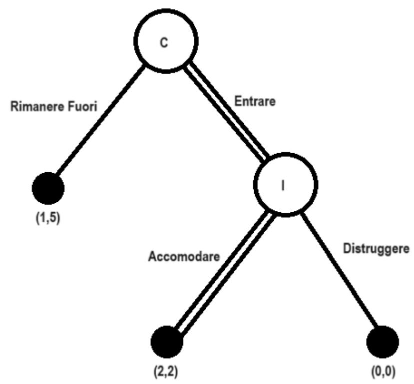

Figura 3.4: SPNE dello Store Chain Game

Per terminare l'analisi dello Store-Chain game ci chiediamo chi è l'SPNE. Applicando l'induzione all'indietro ad ogni singolo sottogioco del sistema, l'SPNE dello Store Chain Game è dato dal punto $(1,1)$, ovvero dalla coppia di strategie (Entrare,Accomodare). Partendo da ogni nodo decisionale finale, si determina il sottogioco con associato il suo sottoalbero avente come nodo radice il nodo terminale. Inoltre, viene rispettata la condizione sulla coppia di strategie, infatti l'SPNE è una coppia di strategie pure. Per un ulteriore verifica di quanto detto, nell' *Handbook of Dynamic Game Theory* [2, p. 496], lo Store Chain Game viene visto in modo del tutto analogo a quanto studiato, però con ipotesi diverse sulle frequenze.

3.4 Giochi Asimmetrici con spazio dei tratti continuo

Per concludere lo studio della teoria degli evolutionary games, approfondiamo i giochi asimmetrici con spazi dei tratti continui. Si assume che gli spazi S e T siano intervalli unidimensionali compatti e convessi e che la funzione di payoff abbia derivate parziali continue fino al secondo ordine, per evitare complicazioni tecniche e di notazione. Quindi rispetto ad una coppia di strategie $(u,v) \in S \times T$, si definiscono $E_1(u';u,v)$ e $E_2(v';u,v)$ i payoff per gli agenti nel ruolo 1 e nel ruolo 2 quando usano, rispettivamente, strategie $u' \in S$ e $v' \in T$. A differenza di quanto visto nella definizione delle dinamiche adattive per giochi simmetrici, 2.5, il significato che si associa alla notazione E_1 è completamente diverso, infatti qui indica il payoff di un agente in un ruolo.

Mantenendo l'ordine visto per i giochi simmetrici, andiamo ad ampliare la teoria vista nella sezione 2.2. Partendo dai concetti di (equazioni canoniche di) dinamiche adattive e di stabilità convergente, affrontiamo la teoria rimanente.

Definizione 3.7. **a)** *Le equazioni canoniche delle* ***dinamiche adattive*** *sono:*

$$\begin{cases} \dot{u} = k_1(u,v)\frac{\partial}{\partial u'}E_1(u';u,v)|_{u'=u} \\ \dot{v} = k_2(u,v)\frac{\partial}{\partial v'}E_2(v';u,v)|_{v'=v} \end{cases} \tag{3.5}$$

ove $k_i(u,v)$ per $i = 1,2$ sono funzioni continue positive rispetto alla coppia di strategie (u,v).

b) *Un punto fisso $(u^*,v^*) \in S \times T$ delle equazioni 3.5 è* ***convergente stabile*** *se è localmente asintotico per il sistema delle equazioni canoniche delle dinamiche adattive, per ogni scelta delle funzioni k_1 e k_2.*

Dire che una coppia di strategie (u^*,v^*) è punto fisso per le equazioni canoniche delle dinamiche adattive vuol dire soddisfare la condizione $\frac{\partial E_1}{\partial u'}|_{u'=u^*} = \frac{\partial E_2}{\partial v'}|_{v'=v^*} = 0$. Come visto a fine capitolo 2, per legare tra di loro i concetti con spazio dei tratti continuo, abbiamo bisogno di definire quando una coppia di strategie è equilibrio di Nash con intorno. Nelle sezioni precedenti di questo capitolo, abbiamo visto il concetto di equilibrio di Nash in funzione della definizione di ESS a due specie.

Definizione 3.8 (Equilibrio di Nash con intorno). *Un punto fisso (u^*, v^*) è definito equilibrio di Nash con intorno se $E_1(u^*; u^*, v^*) \geq E_1(w; u^*, v^*)$ e $E_2(v^*; u^*, v^*) \geq E_2(v; u^*, v^*)$ per ogni coppia di strategie (w, v) sufficientemente vicina, ma non uguale a (u^*, v^*)*

Di questa parte di teoria legata alle dinamiche adattive, manca il concetto delle Continuously Stable Strategies (CSS). Partendo da una linearizzazione delle equazioni canoniche delle dinamiche adattive 3.5, otteniamo la seguente notazione scritta in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1(u^*, v^*) & 0 \\ 0 & k_2(u^*, v^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A+B & C \\ D & E+F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u-u^* \\ v-v^* \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

dove

$$A \equiv \frac{\partial^2}{\partial u' \partial u'} \pi_1(u'; u^*, v^*); \; B \equiv \frac{\partial}{\partial u'} \frac{\partial}{\partial u} \pi_1(u'; u, v^*); \; C \equiv \frac{\partial}{\partial u'} \frac{\partial}{\partial v} \pi_1(u'; u^*, v)$$
$$D \equiv \frac{\partial}{\partial v'} \frac{\partial}{\partial u} \pi_2(v'; u, v^*); \; E \equiv \frac{\partial}{\partial v'} \frac{\partial}{\partial v} \pi_2(v'; u^*, v); \; F \equiv \frac{\partial^2}{\partial v' \partial v'} \pi_2(v'; u^*, v^*)$$

Figura 3.5: Derivate parziali equazione 3.6, [2, p. 503]

Grazie a questa linearizzazione delle equazioni canoniche delle dinamiche adattive in forma matriciale, si può enunciare un teorema che permette di "definire" i concetti sopra esposti, in particolar modo, quelli di equilibrio di Nash con intorno e di stabilità convergente.

Teorema 6. *Sia $(u^*, v^*) \in S \times T$ punto fisso per le equazioni dinamiche adattive 3.5 con rappresentazione matriciale 3.6. Allora*

a) *(u^*, v^*) è equilibrio di Nash con intorno se e solo se A e F sono negative.*

b) *(u^*, v^*) è convergente stabile se e solo se, per ogni $0 \neq (u, v) \in \Re^2$ si ha*

$$o \qquad u((A+B)u + Cv) < 0 \qquad o \qquad v(Du + (E+F)v) < 0$$

se e solo se

$$A + B < 0, \quad E + F < 0 \qquad e \qquad (A+B)(E+F) > CD$$

Considerando valido il lemma 4 visto sui giochi simmetrici, una strategia $u^* \in S$ è CSS se e solo se è equilibrio di Nash convergente stabile (mediante dinamiche adattive (2.1)). Per giochi asimmetrici questo risultato è vero, però si deve adattare il lemma per una coppia di strategia (u^*, v^*). Allora, una coppia di strategie (u^*, v^*) è CSS se e solo se è equilibrio di Nash con intorno convergente stabile tramite dinamiche adattive 3.5, ovvero se e solo se (u^*, v^*) soddisfa entrambe le proprietà del Teorema 6.

Per completare la teoria, si devono definire i concetti di Neighborhood Invader Strategy (NIS) e di superiorità locale rispetto ad una coppia di strategie (u^*, v^*).

Definizione 3.9 (NIS). *La coppia di strategie (u^*, v^*) è una NIS se, per ogni coppia di tratti (u, v) sufficientemente vicina, ma non uguale a (u^*, v^*) si ha $E_1(u^*; u, v) > E_1(u; u, v)$ o $E_2(v^*; u, v) > E_2(v; u, v)$*

Definizione 3.10 (Superiorità locale). *Supponiamo $(u^*, v^*) \in S \times T$ e fissiamo $0 \leq k^* < 1$. Allora la coppia di strategie (u^*, v^*) è*

(a) ***localmente** k^*-**superiore** se*

$$E_1(u^*; P, Q) > E_1(P; P, Q) \text{ oppure } E_2(v^*; P, Q) > E_2(Q; P, Q) \tag{3.7}$$

se per ogni $(P, Q) \in \Delta(S) \times \Delta(T)$ con $1 \geq P(\{u^*\}) \geq k^*$, $1 \geq Q(\{v^*\}) \geq k^*$ e supporto di (P,Q) sufficientemente vicino a (u^*, v^*)

(b) ***localmente metà-superiore** (rispettivamente **localmente superiore**) se $k^* = \frac{1}{2}$ (se $k^* = 0$)*

(c) ***globalmente** k^*-**superiore** se il supporto di (P,Q) in 3.7 è un sottoinsieme arbitrario di $S \times T$*

Queste due definizioni sono le caratterizzazioni dei concetti di NIS e di superiorità locale visti per giochi simmetrici. In particolar modo, per la superiorità locale abbiamo bisogno delle funzioni di payoff che permettono di dare la condizione 3.7. Quindi, data (P, Q) la coppia delle distribuzioni di strategie in $\Delta(S) \times \Delta(T)$ e presa la coppia di strategie (u, v) per ogni $u \in S$ e $v \in T$, per una qualsiasi interazione u^* e v^*, si possono definire i payoff seguenti.

$$E_1(u^*; P, Q) = \int_S \int_T E_1(u^*; u, v) Q(dv) P(du) \tag{3.8}$$

$$E_2(v^*; P, Q) = \int_T \int_S E_2(v^*; u, v) P(du) Q(dv) \tag{3.9}$$

Inoltre, si possono anche calcolare i payoff medi di una popolazione rispetto alla distribuzione di entrambe. Anche nel continuo è valido il fatto che *l'evoluzione di una specie influisce sulla* *dinamica dell'altra*.

$$E_1(P;P,Q) = \int_S E_1(u^*;P,Q)P(du^*) \tag{3.10}$$

$$E_2(Q;P,Q) = \int_T E_2(v^*;P,Q)Q(dv^*) \tag{3.11}$$

Dalle definizioni delle funzioni di payoff si può definire il replicatore dinamico per giochi asimmetrici con spazi dei tratti continui. Facendo uso delle identità sopra si ha che il replicatore dinamico asimmetrico continuo è il seguente.

$$\begin{cases} \frac{dP_t}{dt}(U) & = \int_U (E_1(u'; P_t, Q_t) - E_1(P_t; P_t, Q_t))P_t(du') \\ \frac{dQ_t}{dt}(V) & = \int_V (E_2(v'; P_t, Q_t) - E_2(Q_t; P_t, Q_t))Q_t(dv') \end{cases} \tag{3.12}$$

Per concludere questo capitolo e in generale la tesi, andiamo ad enunciare il teorema che lega tra di loro tutte le nozioni viste in questa sezione. Questo teorema è analogo al teorema 5 visto per giochi simmetrici a fine capitolo 2.

Teorema 7. *Supponiamo che la coppia* $(u^*, v^*) \in S \times T$. *Allora:*

a) *(u^*, v^*) è una CSS se e solo se è localmente metà-superiore*

b) *(u^*, v^*) è una NIS se e solo se, per ogni coppia non nulla $(u, v) \in \Re^2$, si ha*

$$o \quad u((A+2B)u+2Cv) < 0 \quad o \quad v(2Du+(2E+F)v) < 0$$

c) *(u^*, v^*) è un equilibrio di Nash con intorno e NIS se e solo se è un intorno superiore*

d) *Considerando la dinamica delle popolazioni mediante le "equazioni" del replicatore dinamico 3.12, allora (u^*, v^*) è un intorno attrattivo se e solo se è un intorno superiore.*

3.4. GIOCHI ASIMMETRICI CON SPAZIO DEI TRATTI CONTINUO

Bibliografia

[1] Tamer Başar e Geert Jan Olsder. *Dynamic Noncooperative Game Theory*. Academic Press, New York, 1985.

[2] Tamer Başar e Georges Zaccour. *Handbook of Dynamic Game Theory*. Springer International Publishing AG, 2018.

[3] M. Li Calzi. *Teoria dei Giochi*. Etas Libri, 1995.

[4] Jeffrey Carpenter e Andrea Robbett. *Game Theory and Behaviour*. The MIT Press, 2022.

[5] Ngo Van Long Engelbert J. Dockner Steffen Jorgensen e Gherard S. *Differential Games in Economics and Management Science*. Cambridge University Press, 2000.

[6] Alexander J. McKenzie. *Evolutionary Games Theory*. url: `https://plato.stanford.edu/entries/game-evolutionary/`. (Ultimo accesso: 12.02.2024).

[7] E. Rasmusen. *Games and Information*. Blackwell Publishing, 2007.

[8] James Riehl e Ming Cao. *Replicator Dynamic*. url: `https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/replicator-dynamic`. (Ultimo accesso: 12.02.2024).

[9] John M. Smith e George Price. «The logic of Animal conflict». In: *Nature Vol.246* (1973).

[10] John Maynard Smith. *Evolution and the Theory of Games*. Cambridge University Press, 1982.

[11] H. Peyton Young e Shmuel Zamir. *Handbook of Game Theory with Economics Application*. North-Holland, 2015.