

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA “TULLIO LEVI-CIVITA”

Corso di Laurea Triennale in Matematica

**Funzioni a variazione totale limitata
e problemi di segmentazione di segnali o immagini**

**Relatrice:
Prof.ssa Giulia Treu**

**Laureando: Ester Parpinel
Matricola: 1229057**

Anno Accademico 2022/2023

21 luglio 2023

Indice

1	Derivazione e integrazione	5
1.1	Funzioni monotone	5
1.2	Funzioni a variazione limitata	11
1.3	Derivazione di un integrale	12
1.4	Funzioni assolutamente continue	14
2	Funzioni a variazione limitata e derivate distribuzionali	17
2.1	Richiami di teoria della misura	17
2.2	Derivata debole e spazio $W^{1,p}$	18
2.3	Funzioni a variazione limitata ed esempi	20
2.4	Decomposizione misura derivata	22
3	Segmentazione di immagini	25
3.1	Descrizione del problema	25
3.2	Funzionale Mumford-Shah	26
3.2.1	Implementazione numerica	27
3.2.2	Esempi di possibili applicazioni	28

Introduzione

Le immagini di valore scientifico presentano alcune caratteristiche particolari: spesso offrono sintesi potenti di grandi quantità di informazioni; a volte rivelano novità o al contrario confermano ipotesi. Generalmente si reputa fedele un'immagine quando riduce al minimo gli elementi di arbitrarietà, restituendo il dato esterno nel modo più diretto possibile. Tuttavia, quando un'immagine ha lo scopo di verificare una certa ipotesi, lo scienziato deliberatamente seleziona o esalta certe sue caratteristiche. E per questo si è sviluppata l'analisi delle immagini.

Anche l'acquisizione digitale dei segnali riveste un ruolo fondamentale nelle nostre vite. L'elaborazione delle immagini e dei segnali si evolve rapidamente e continuamente e la matematica ha giocato e gioca un ruolo fondamentale in questo.

Lo scopo di questa trattazione è iniziare a far intuire come un formale e rigoroso sviluppo della teoria matematica può permettere una maggiore comprensione in tutti gli ambiti della scienza e che talvolta è mosso proprio per questo.

La tesi si propone di presentare lo spazio delle funzioni a variazione totale limitata (BV) in dimensione 1. E' questo spazio, infatti, lo spazio privilegiato per la rappresentazione di immagini e segnali in formato digitale.

Le funzioni a variazione totale limitata sono funzioni limitate che variano in modo uniforme all'interno del proprio dominio e possono presentare punti di salto in quantità al più numerabile.

Nel primo capitolo, a partire dalla definizione di ricoprimento di Vitali di un insieme, verrà innanzitutto esposto un teorema di derivabilità per funzioni monotone, da cui si può dedurre la derivabilità delle funzioni a variazione totale limitata, in quanto differenza di due funzioni crescenti. Si enunceranno, poi, dei risultati che mettono in relazione la derivazione e l'integrazione secondo Lebesgue, per arrivare a definire lo spazio delle funzioni assolutamente continue, spazio in cui è valido il teorema fondamentale del calcolo integrale.

Nel secondo capitolo verrà generalizzato il concetto di derivata, con la definizione di derivata debole e di spazio di Sobolev $W^{1,p}$. Si dimostrerà che lo spazio delle funzioni assolutamente continue coincide con lo spazio $W^{1,1}$. Si darà, quindi, una seconda definizione di spazio di funzioni a variazione totale limitata. La definizione qui proposta è in \mathbb{R} , ma può essere estesa in \mathbb{R}^n , e si fonda su un concetto ancora più generale di derivata: la derivata distribuzionale. Nel caso di funzioni a variazione limitata, la derivata distribuzionale è una misura finita di Radon e come tale può essere scomposta nelle sue componenti assolutamente continue e singolari rispetto alla misura di Lebesgue. Sfruttando questo nuovo concetto di derivata, il teorema fondamentale del calcolo si può estendere alle fun-

zioni a variazione limitata.

Infine, nell'ultimo capitolo si porterà l'esempio del funzionale di Mumford-Shah, che formalizza da un punto di vista matematico il problema di segmentazione. La segmentazione di immagini (o equivalentemente di segnali) nell'elaborazione digitale è il processo di partizione di un'immagine in regioni significative sulla base di un certo criterio di appartenenza di un pixel ad una regione. L'obiettivo è semplificare la rappresentazione delle immagini per individuare determinati oggetti o confini al loro interno e rendere più facile l'analisi delle stesse. Il funzionale di Mumford-Shah ammette una soluzione nello spazio di funzioni speciali a variazione limitata SBV che è contenuto nello spazio BV .

Capitolo 1

Derivazione e integrazione

Nel presente capitolo, seguendo quanto presentato nel testo di Royden [6], studiamo le relazioni tra derivazione e integrazione secondo Lebesgue e, in particolare, vedremo che il teorema fondamentale del calcolo integrale è valido per una certa classe di funzioni, quelle assolutamente continue.

1.1 Funzioni monotone

Riportiamo la definizione di ricoprimento di Vitali e enunciamo un teorema che ci permetterà di dimostrare la derivabilità di funzioni monotone.

Definizione 1.1. *Sia \mathcal{G} un insieme di intervalli che possono essere aperti, chiusi, nè aperti nè chiusi e sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Diciamo che \mathcal{G} è un ricoprimento di Vitali di E se $\forall \epsilon > 0$ e $\forall x \in E \exists I \in \mathcal{G}$ tale che $x \in I$ e $0 < m(I) < \epsilon$.*

Lemma 1.1 (di Vitali). *Sia E un insieme di misura esterna finita e \mathcal{G} un ricoprimento di Vitali di E . Allora $\forall \epsilon > 0 \exists$ un insieme finito di intervalli disgiunti $\{I_1, \dots, I_N\}$ in \mathcal{G} tale che*

$$m^*(E \setminus \bigcup_{j=1}^N I_j) < \epsilon.$$

Dimostrazione. Se gli intervalli di \mathcal{G} non sono chiusi è sufficiente sostituire ogni intervallo con la sua chiusura e osservare che i due insiemi hanno la stessa misura di Lebesgue, quindi non è restrittivo supporre che ogni intervallo in \mathcal{G} sia chiuso.

Sia U un insieme aperto di misura finita contenente E . Poiché \mathcal{G} è un ricoprimento di Vitali di E , possiamo assumere, senza perdita di generalità, che se $I \in \mathcal{G}$ allora $I \subset U$. Costruiamo ora una successione $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di intervalli disgiunti di \mathcal{G} per induzione.

Siano I_1, \dots, I_n n intervalli appartenenti a \mathcal{G} a due a due disgiunti.

Se $m(E \setminus \bigcup_{i=1}^n I_i) = 0$ abbiamo già concluso.

Se invece $m(E \setminus \bigcup_{i=1}^n I_i) > 0$, scegliamo l'intervallo I_{n+1} come segue: sia

$$k_n = \sup_{I \in \mathcal{G}} \{m(I) \text{ tale che } I \in \mathcal{G} \text{ e } I \cap I_j = \emptyset \forall j = 1, \dots, n\}.$$

Osserviamo che $k_n \leq m(U) < \infty$ e scegliamo un intervallo $I_{n+1} \in \mathcal{G}$ tale che $I_{n+1} \cup I_i = \emptyset$ e $m(I_{n+1}) > k_n/2$.

Di nuovo, se $m(E \setminus \bigcup_{i=1}^n I_i) = 0$ si conclude, altrimenti prendiamo I_{n+2} in \mathcal{G} ripetendo il procedimento descritto.

Vogliamo ora mostrare che la successione di intervalli così costruita è quella cercata.

Poiché $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \subset U$ e gli intervalli sono disgiunti, sfruttando le proprietà di monotonia e σ -additività della misura, si ha che $\sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) \leq m(U) < \infty$.

Quindi, poiché la serie è convergente, $\exists N$ tale che

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} m(I_n) < \frac{\epsilon}{5}.$$

Sia

$$R = E \setminus \bigcup_{n=1}^N I_n.$$

Se mostriamo che $m^*(R) < \epsilon$ abbiamo concluso.

Sia x un punto arbitrario di R . Allora $x \notin \bigcup_{n=1}^N I_n$ che osserviamo essere un insieme chiuso. Quindi, possiamo trovare un intervallo $I \in \mathcal{G}$ tale che $x \in I$, $I \cap I_i = \emptyset \forall i = 1, \dots, N$. Se, ora, $I \cap I_i = \emptyset \forall i \leq n$, si ha che

$$m(I) \leq k_n < 2m(I_{n+1}).$$

Ma, poiché vale anche: $\lim_{n \rightarrow \infty} m(I_n) = 0$, allora l'intervallo I , che ha misura positiva, deve intersecare almeno uno degli intervalli I_n . Sia \bar{n} il più piccolo n tale che $I \cap I_n \neq \emptyset$. Abbiamo $\bar{n} > N$ e $m(I) \leq k_{\bar{n}-1} \leq 2m(I_{\bar{n}})$. Poiché $x \in I$ e I ha almeno un punto in comune con $I_{\bar{n}}$, segue che la distanza tra x e il punto medio di $I_{\bar{n}}$ è al massimo $m(I) + \frac{1}{2}m(I_{\bar{n}}) \leq \frac{5}{2}m(I_{\bar{n}})$. Cioè $x \in J_{\bar{n}}$, dove $J_{\bar{n}}$ ha lo stesso centro di $I_{\bar{n}}$ e $m(J_{\bar{n}}) = 5m(I_{\bar{n}})$. Inoltre, $R \subset \bigcup_{n=N+1}^{\infty} J_n$, quindi si conclude per monotonia:

$$m^*(R) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} m(J_n) = 5 \sum_{n=N+1}^{\infty} m(I_n) < \epsilon$$

□

Per ogni funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $\forall x \in [a, b]$ si possono definire le derivate di Dini nel modo seguente:

Definizione 1.2. (Derivate di Dini) Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Definiamo le derivate di f calcolate in x :

$$\begin{aligned} D^+ f(x) &= \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} & D^- f(x) &= \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \\ D_+ f(x) &= \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} & D_- f(x) &= \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \end{aligned}$$

Osservazione 1.1. Se tutte le derivate di Dini di f sono uguali tra loro e diverse da $\pm\infty$, diciamo che f è derivabile in x e definiamo

$$f'(x) = D^+f(x) = D^-f(x) = D_+f(x) = D_-f(x)$$

come la derivata della funzione f . Se $D^+f(x) = D_+f(x) \neq \pm\infty$ diciamo che f è derivabile a destra e denotiamo con $f'(x+)$ la derivata destra (analogamente per la derivata sinistra $f'(x-)$).

Esempio 1.1. Sia

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$D^+f(0) = 1, D_+f(0) = -1, D^-f(0) = 1, D_-f(0) = -1.$$

Esempio 1.2. Sia

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$D^+f(0) = D_-f(0) = +\infty, D^-f(0) = D_+f(0) = -\infty.$$

Esempio 1.3. Sia

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$D^+f(0) = D_+f(0) = 0, D^-f(0) = D_-f(0) = +\infty.$$

Teorema 1.1. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione crescente. Allora f è derivabile q.o., f' è misurabile e

$$\int_a^b f'(x) dx \leq f(b) - f(a).$$

Dimostrazione. Mostriamo, innanzitutto, che l'insieme in cui due derivate di Dini qualsiasi assumono valori diversi ha misura zero.

Dati $u, v \in \mathbb{Q}$, $v < u$, consideriamo

$$E_{u,v} = \{x : D^+f(x) > u > v > D_-f(x)\}$$

e

$$E = \bigcup_{u,v \in \mathbb{Q}} E_{u,v}.$$

Per la σ -subadditività della misura esterna, sarà sufficiente provare che $m^*(E_{u,v}) = 0 \forall u, v \in \mathbb{Q}$.

Siano u, v fissati, poniamo $s = m^*(E_{u,v})$ e, fissato $\epsilon > 0$, sia U aperto contenente $E_{u,v}$ tale che $m(U) < s + \epsilon$.

L'ipotesi che $D_-f(x) < v$ implica che $\forall x \in E_{u,v} \exists$ un intervallo $[x-h, x] \subset U$ tale che $f(x) - f(x-h) < vh$.

Per il Lemma 1.1 (Vitali) possiamo scegliere una famiglia finita di intervalli disgiunti $\{[x_n - h_n, x_n]\}_{n=1, \dots, N} = \{I_1, \dots, I_N\}$ che ricoprono un certo $A \subseteq E_{u,v} \subset U$ con $m^*(A) > s - \epsilon$.

Allora:

$$\sum_{n=1}^N [f(x_n) - f(x_n - h_n)] < v \sum_{n=1}^N h_n < vm(U) < v(s + \epsilon).$$

Ora, ricordando che $\forall y \in A$ si ha $D^+f(y) > u$ e ragionando in modo analogo a quanto fatto sopra, possiamo dedurre che $\forall y \in A$ esiste un intervallo del tipo $(y, y+k)$ per il quale si ha che $\exists n \in \{1, \dots, N\}$ tale che $(y, y+k) \subset I_n$ e $f(y+k) - f(y) > uk$.

Usando di nuovo il Lemma 1.1, possiamo estrarre una famiglia $\{J_1, \dots, J_M\}$ dagli intervalli $\{I_1, \dots, I_N\}$ tale che la loro unione contiene $A' \subset A$ tale che $m^*(A') > s - 2\epsilon$. Allora:

$$\sum_{i=1}^M [f(y_i + k_i) - f(y_i)] < u \sum_{i=1}^M k_i < u(s - 2\epsilon).$$

Poiché $\forall i \in \{1, \dots, M\} \exists n \in \{1, \dots, N\}$ tale che $J_i \subset I_n$ e se sommiamo su tutti gli i per cui $J_i \subset I_n$ abbiamo, per la monotonia di f : $\sum f(y_i + k_i) - f(y_i) \leq f(x_n) - f(x_n - h_n)$ e quindi:

$$\sum_{n=1}^N f(x_n) - f(x_n - h_n) \geq \sum_{i=1}^M f(y_i + k_i) - f(y_i)$$

Allora $v(s + \epsilon) > u(s - 2\epsilon)$. Per l'arbitrarietà di ϵ vale: $vs \geq us$, ma $u > v$, quindi deve essere $s = 0$. Quindi

$$0 > m(U) \geq m^*(E_{u,v}).$$

Procedendo in modo analogo si può dimostrare che ciascuno degli altri insiemi in cui due derivate di Dini sono diverse ha misura esterna nulla.

Ciò mostra che

$$g(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

è definita q.o. e che f è derivabile in tutti i punti in cui g è finita. Verifichiamo, quindi, che g sia finita q.o..

Definiamo la seguente successione di funzioni:

$$g_n(x) = n[f(x + 1/n) - f(x)],$$

dove poniamo $f(x) = f(b)$ se $x \geq b$.

Allora $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x)$ per q.o. x e di conseguenza g è misurabile, in quanto limite

puntuale q.o. di una successione di funzioni misurabili in uno spazio di misura completo. Inoltre, poiché f è crescente è anch'essa misurabile e $g_n > 0 \forall n$. Quindi possiamo applicare il lemma di Fatou alla successione g_n e otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x)dx &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} n \int_a^b f(x + 1/n) - f(x)dx = \liminf_{n \rightarrow \infty} n \left(\int_a^b f(x + 1/n)dx - \int_a^b f(x)dx \right) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} n \left(\int_{a+1/n}^{b+1/n} f(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} n \left(\int_{a+1/n}^b f(x)dx + \int_b^{b+1/n} f(x)dx - \int_a^{a+1/n} f(x)dx - \int_{a+1/n}^b f(x)dx \right) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} n \left(\int_b^{b+1/n} f(b)dx - \int_a^{a+1/n} f(a)dx \right) \leq f(b) - f(a). \end{aligned}$$

Da questo deduciamo che g è integrabile, quindi anche finita q.o. e $g(x) = f'(x)$ per q.o. $x \in [a, b]$ e

$$\int_a^b f'(x)dx \leq f(b) - f(a).$$

□

Esempio 1.4. Se $f \in C^1([a, b])$ per il Teorema fondamentale del calcolo integrale secondo Riemann $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$.

Esempio 1.5. (La funzione di Heaviside)
Considero la funzione monotona e limitata:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Osserviamo che $\forall x \neq 0$ f è derivabile e $f'(x) = 0$. Inoltre si ha che $\int_0^1 f'(x)dx = 0 < 1 = f(1) - f(0)$.

Esempio 1.6. (La funzione di Cantor)

- Costruiamo l'insieme di Cantor C .

1. Sia $I = [0, 1]$. Si divida $I = [0, 1/3] \cup (1/3, 2/3) \cup [2/3, 1]$ e si rimuova l'intervallo in mezzo, definendo $C_1 = I \setminus (1/3, 2/3)$.
2. A sua volta si suddividano gli intervalli $[0, 1/3]$ e $[2/3, 1]$ in tre intervalli di uguale lunghezza e si rimuova l'intervallo in mezzo; quindi si iteri l'operazione. Al passo k si ottiene un insieme C_k a cui sono stati tolti 2^{k-1} intervalli, ciascuno di ampiezza 3^{-k} .
3. Sia $C = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_k$ l'insieme di Cantor.

Osserviamo che C ha misura 0, poichè $m(C) = m([0, 1]) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 0$.

- Definiamo ora la funzione di Cantor $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

1. Consideriamo $x \in C$. Lo interpretiamo in base ternaria, osservando che in questa base ha come cifre decimali solo 0 o 2, adottando la convenzione che i numeri ternari finiti con ultima cifra uguale a 1 vengano modificati in numeri ternari che terminano con 2 periodico. Lo possiamo quindi scrivere nel seguente modo: $x = 0, a_1 a_2 \dots a_k \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n}$, $a_j \in \{0, 2\}$.

Allora poniamo

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j/2}{2^j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{2^{j+1}}$$

cioè tramite f sostituiamo le cifre 2 con 1 e interpretiamo il valore ottenuto come numero binario.

2. Ora estendiamo f su $[0, 1]$.

Siano $(a_1^n, b_1^n), \dots, (a_{2^{n-1}}^n, b_{2^{n-1}}^n)$ i 2^{n-1} intervalli rimossi al passo n nella costruzione dell'insieme di Cantor.

Definiamo $\forall x \in (a_k^n, b_k^n)$, $f(x) = \frac{2k-1}{2^n}$, $k = 1, \dots, 2^{n-1}$.

$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ è la funzione di Cantor o scala del diavolo.

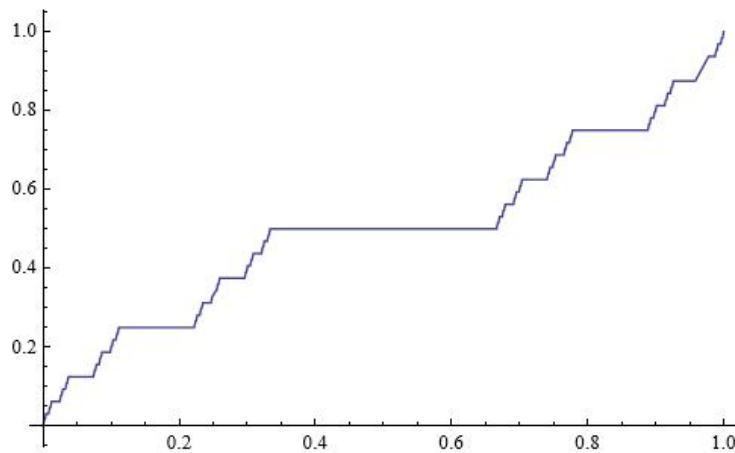


Figura 1.1: Funzione di Cantor

La funzione di Cantor è continua, monotona, suriettiva, derivabile q.o. con derivata nulla q.o., infatti f ristretta a (a_n^k, b_n^k) è costante $\forall n$ e $C = [0, 1] \setminus \bigcup (a_n^k, b_n^k)$ ha misura nulla, tuttavia $f(1) - f(0) = 1 > 0$.

1.2 Funzioni a variazione limitata

Remark 1. Dato $r \in \mathbb{R}$ indichiamo con:

$$r^+ = \begin{cases} r & \text{se } r \geq 0 \\ 0 & \text{se } r < 0 \end{cases}$$

e

$$r^- = \begin{cases} 0 & \text{se } r \geq 0 \\ -r & \text{se } r < 0 \end{cases}$$

Definizione 1.3. Dato l'intervallo $[a, b]$ sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e consideriamo una suddivisione di $[a, b]$, cioè un insieme $D = \{x_i, i = 1, \dots, n, a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} = b\}$. Definiamo:

$$p(D) = \sum_{i=1}^k [f(x_i) - f(x_{i-1})]^+$$

$$n(D) = \sum_{i=1}^k [f(x_i) - f(x_{i-1})]^-$$

$$t(D) = n(D) + p(D) = \sum_{i=1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

e infine:

$$P = P_a^b(f) = \sup\{p(D) : D \text{ suddivisione di } [a, b]\}$$

$$N = N_a^b(f) = \sup\{n(D) : D \text{ suddivisione di } [a, b]\}$$

$$T = T_a^b(f) = \sup\{t(D) : D \text{ suddivisione di } [a, b]\}$$

Chiamiamo rispettivamente P , N e T variazione positiva, negativa e totale di f su $[a, b]$. Se $T < \infty$, f è a variazione limitata su $[a, b]$ ($f \in BV$).

Lemma 1.2. Se f è a variazione limitata su $[a, b]$, allora $T_a^b = P_a^b + N_a^b$ e $f(b) - f(a) = P_a^b - N_a^b$.

Dimostrazione. Con un calcolo diretto si verifica che per ogni suddivisione di $[a, b]$ vale $p = n + f(b) - f(a)$, quindi vale anche $P = N + f(b) - f(a)$. Inoltre, $t = p + n = n + n - f(b) - f(a)$. Prendendo il sup si ottiene: $T = 2N - \{f(b) - f(a)\} = P + N$. \square

Teorema 1.2. Una funzione f è a variazione limitata su $[a, b]$ se e solo se è differenza di due funzioni crescenti a valori reali su $[a, b]$.

Dimostrazione. Sia f una funzione a variazione limitata e $g(x) = P_a^x$ e $h(x) = N_a^x$. Allora g e h sono funzioni monotone crescenti a valori reali.

$$0 \leq P_a^x \leq T_a^x \leq T_a^b < \infty \text{ e } 0 \leq N_a^x \leq T_a^x \leq T_a^b < \infty.$$

Ma $f(x) = g(x) - h(x) + f(a)$ per il Lemma 1.2. Quindi, poiché $h - f(a)$ è una funzione monotona, abbiamo espresso f come differenza di due funzioni monotone. Viceversa, se $f = g - h$ su $[a, b]$ con g e h crescenti, allora \forall partizione di $[a, b]$ si ha:

$$\begin{aligned} \sum |f(x_i) - f(x_{i-1})| &\leq \sum [g(x_i) - g(x_{i-1})] + \sum [h(x_i) - h(x_{i-1})] \\ &= g(b) - g(a) + h(b) - h(a). \end{aligned}$$

Quindi:

$$T_a^b(f) < g(b) + h(b) - g(a) - h(a).$$

□

Corollario 1.1. *Se f è a variazione limitata su $[a, b]$, allora $f'(x)$ esiste per q.o. $x \in [a, b]$.*

Dimostrazione. Per il teorema precedente f si può scrivere come differenza di funzioni monotone e quindi derivabili q.o. per il teorema 1.1. Allora f è derivabile q.o. in $[a, b]$. □

1.3 Derivazione di un integrale

Lemma 1.3. *Se f è integrabile su $[a, b]$, allora la funzione F definita da:*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

è una funzione continua a variazione limitata su $[a, b]$.

Prima di procedere con la dimostrazione ricordiamo la seguente proposizione:

Proposizione 1.1. *Se f è non negativa e integrabile su E , allora preso $\epsilon > 0 \exists \delta \geq 0$ t.c. $\forall A \subset E$ con $m(A) < \delta$ si ha: $\int_A f < \epsilon$.*

Dimostrazione. Per la dimostrazione si veda Royden [6]. □

Dimostrazione. (Lemma 1.3) La continuità di F segue dalla proposizione sopra citata, infatti:

$$|F(x) - F(x_0)| = \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt = \int_{x_0}^x f(t) dt,$$

quindi se $m((x, x_0)) = x - x_0 < \delta$, allora $\int_x^{x_0} f < \epsilon$.

Per mostrare che F è a variazione limitata, osserviamo che per ogni suddivisione D dell'intervallo $[a, b]$ si ha

$$t(D) = \sum_{i=1}^k |F(x_i) - F(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^k \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) dt \right| \leq \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t)| dt = \int_a^b |f(t)| dt$$

e quindi

$$T_a^b(f) = \sup T(D) \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

□

Lemma 1.4. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è limitata e misurabile e

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + F(a)$$

allora $F'(x) = f(x)$ per q.o. $x \in [a, b]$.

Ricordiamo che vale il seguente Lemma:

Lemma 1.5. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile e $\int_a^x f(t) = 0 \forall x \in [a, b]$, allora $f(t) = 0$ q.o. in $[a, b]$.

Dimostrazione. Per la dimostrazione si veda Royden [6]. □

Dimostrazione. (Lemma 1.4) Innanzitutto osserviamo che per il Lemma 1.3 F è a variazione limitata su $[a, b]$, quindi F' esiste q.o. in $[a, b]$. Ora, poiché f è limitata $\exists k$ t.c. $|f| \leq k$.

Consideriamo la successione $\{f_n\}_n$ così definita: $f_n(x) = \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt$, con $h = 1/n$.

Si osserva facilmente che se F è derivabile in x si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = F'(x)$ q.o. e che, per monotonia dell'integrale, $|f_n| \leq k$.

Siamo sotto le ipotesi per poter applicare il teorema di convergenza dominata:

$$\begin{aligned} \int_a^c F'(x)dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^c f_n(x)dx = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^c (F(x+h) - F(x))dx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_c^{c+h} F(x)dx - \int_a^{a+h} F(x)dx \right] = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)dx. \end{aligned}$$

Quindi $\int_a^c (F'(x) - f(x))dx = 0 \forall c \in [a, b]$ e, per il Lemma 1.5, $F'(x) = f(x)$ q.o. □

Teorema 1.3. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile e si consideri:

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$$

Allora, $F'(x) = f(x)$ per q.o. $x \in [a, b]$.

Dimostrazione. Senza perdita di generalità possiamo assumere $f \geq 0$. Sia $\{f_n\}_n$ una successione definita da:

$$f_n = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) < n \\ n & \text{se } f(x) \geq n \end{cases}$$

$f - f_n \geq 0$ e posso definire $\forall n$ la funzione crescente, con derivata ≥ 0 : $G_n(x) = \int_a^x f - f_n$. Inoltre f_n è limitata da n ed è misurabile $\forall n$, per il lemma 1.4 : $\frac{d}{dx} \int_a^x f_n = f_n(x)$ q.o. Allora per q.o. x :

$$F'(x) = \frac{d}{dx} G_n + \frac{d}{dx} \int_a^x f_n \geq f_n(x)$$

Scegliendo n t.c. $f_n(x) = f(x)$ q.o. si ha: $F'(x) \geq f(x)$ q.o., da cui:

$$\int_a^b F'(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \text{ e } \int_a^b (F'(x) - f(x))dx = 0.$$

Ma allora per l'osservazione 1.5 $F'(x) - f(x) = 0$ q.o., quindi $F'(x) = f(x)$ q.o. □

1.4 Funzioni assolutamente continue

Definizione 1.4. Una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è assolutamente continua se $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che per ogni collezione finita di intervalli disgiunti $\{(x'_i - x_i)\}_i$ per cui $\sum_{i=1}^n |x'_i - x_i| < \delta$, si ha $\sum_{i=1}^n |f(x'_i) - f(x_i)| < \epsilon$.

Osservazione 1.2. Se f è assolutamente continua, allora è uniformemente continua, quindi continua, ma non vale il viceversa. Come esempio prendiamo la funzione di Cantor (si veda l'esempio 1.6): essa è continua, monotona e a variazione limitata ma non assolutamente continua, infatti non vale il teorema del calcolo integrale per f , che, come vediamo successivamente, è una caratterizzazione delle funzioni assolutamente continue.

Esempio 1.7. Se f è lipschitziana, allora è assolutamente continua. Infatti: presa L la costante di Lipschitzianità si ha: $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \forall x, y \in [a, b]$, allora, fissato ϵ , $\sum_{i=1}^n |f(x'_i) - f(x_i)| \leq L \sum_{i=1}^n |x'_i - x_i| < L\delta < \epsilon$, se $\delta < \epsilon/L$.

Lemma 1.6. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è assolutamente continua, allora è a variazione limitata e ammette derivata q.o.

Dimostrazione. Sia δ come nella definizione di assoluta continuità corrispondente a $\epsilon = 1$. Sia \bar{n} il più grande intero minore di $1 + (b - a)/\delta$. Se $a = x_0 < \dots < x_n = b$, possiamo raccogliere gli intervalli (x_j, x_{j+1}) in \bar{n} insiemi di intervalli, se necessario infittendo la partizione, ciascuno di lunghezza minore di δ . Allora $\sum |F(x_j) - F(x_{j-1})|$ su ogni gruppo è al massimo 1 e, quindi, $T_a^b(F) \leq \bar{n}$. \square

Lemma 1.7. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è assolutamente continua e $f'(x) = 0$ q.o, allora f è costante.

Dimostrazione. Vogliamo mostrare che $\forall c \in [a, b], f(a) = f(c)$. Denotiamo con $E \subset (a, c)$ un insieme di misura $c - a$ in cui $f'(x) = 0$ e siano ϵ e η due numeri arbitrari positivi. Per ogni $x \in E$ possiamo trovare un intervallo $[x, x+h] \subseteq (a, c)$ tale che $|f(x+h) - f(x)| < \eta h$.

Per il lemma 1.1 (Vitali) esiste una collezione finita di intervalli disgiunti $\{[x_k, y_k]\}$ tale per cui $m(E \setminus \cup_{k=1}^n [x_k, y_k]) < \delta$, dove δ è quello corrispondente a ϵ nella definizione di assoluta continuità di f . Se $x_k \leq x_{k+1}$, si ha che: $a = y_0 \leq x_1 < y_1 \leq x_2 < y_2 \leq \dots < y_n \leq c = x_{n+1}$ e $\sum_{k=0}^n |x_{k+1} - y_k| < \delta$.

Allora

$$\sum_{k=1}^n |f(y_k) - f(x_k)| \leq \eta \sum_{k=1}^n (y_k - x_k) < \eta(c - a) \quad e \quad \sum_{k=0}^n |f(x_{k+1}) - f(y_k)| < \epsilon.$$

Quindi, si ottiene:

$$|f(c) - f(a)| = \left| \sum_{k=0}^n [f(x_{k+1}) - f(y_k)] + \sum_{k=1}^n [f(y_k) - f(x_k)] \right| \leq \epsilon + \eta(c - a).$$

Per l'arbitrarietà di ϵ e η , $f(c) - f(a) = 0$. \square

Teorema 1.4. *Una funzione $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è un integrale indefinito se e solo se è assolutamente continua.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 1.1, l'implicazione diretta è banale applicando la definizione di funzione assolutamente continua a F , integrale indefinito.

Viceversa, sia F assolutamente continua, allora è a variazione limitata e derivabile q.o. Quindi, F può essere scritta nel seguente modo: $F = F_1(x) - F_2(x)$ dove F_1 e F_2 sono funzioni monotone. Allora $|F'_1| \leq F'_1(x) + F'_2(x)$ e $\int_a^b |F'(x)| \leq \int_a^b F'_1 + \int_a^b F'_2 \leq F_1(b) + F_2(b) - F_1(a) - F_2(a) < \infty$. Sia:

$$G = \int_a^x F'(t) dt.$$

Allora G come integrale indefinito è assolutamente continuo e quindi lo è anche la funzione $f = F - G$, in quanto differenza di due funzioni assolutamente continue. Sappiamo che $G'(x) = F'(x)$ q.o., cioè $G'(x) - F'(x) = 0$ q.o e, quindi, per il lemma precedente f è una costante. Quindi:

$$F(x) = \int_a^x F'(t) dt + F(a).$$

□

Corollario 1.2. *Ogni funzione assolutamente continua è l'integrale indefinito della sua derivata.*

Capitolo 2

Funzioni a variazione limitata e derivate distribuzionali

Gli argomenti esposti nel presente capitolo sono una rielaborazione in dimensione 1 di quanto si può trovare a riguardo sul testo di Evans e Gariephy [2] e nelle dispense di Monti [5]. La definizione di funzioni a variazione limitata è tratta dal testo di Giusti [3].

2.1 Richiami di teoria della misura

Definizione 2.1. Sia (X, M) uno spazio misurabile. Una funzione $\nu : M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ si dice misura con segno se:

1. $\nu(\emptyset) = 0$;
2. ν assume al più uno dei valori $+\infty$ o $-\infty$;
3. vale la σ -additività: $\forall \{E_j\}_{j \geq 1} \subseteq M$, con $E_i \cap E_j = \emptyset$ se $i \neq j$, si ha:

$$\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j).$$

Definizione 2.2. Siano ν una misura con segno e μ una misura positiva su (X, M) . Si dice che ν è assolutamente continua rispetto a μ se $\forall E \in M$ tale che $\mu(E) = 0$, si ha $\nu(E) = 0$.

Definizione 2.3. Siano ν una misura con segno e μ una misura positiva su (X, M) . Si dice che ν è singolare rispetto a μ se $\exists E, F \in M$ tali che $E \cup F = X$ e $E \cap F = \emptyset$ con E nullo per μ e F nullo per ν .

Teorema 2.1. (Decomposizione di Lebesgue-Radon-Nikodym)

Siano (X, M) uno spazio misurabile, ν una misura con segno e μ misura positiva, entrambe σ -finite su (X, M) . Allora esistono due misure λ e ρ entrambe σ -finite su (X, M) tali che $\nu = \lambda + \rho$ dove λ è assolutamente continua rispetto a μ e ρ è singolare rispetto a μ . Inoltre λ e ρ sono uniche.

Corollario 2.1. *Sia (X, M) uno spazio misurabile e ν e μ come sopra. Se ν è assolutamente continua rispetto a μ allora $\exists f : X \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile tale che almeno una tra f^+ e f^- è integrabile e vale: $\nu(E) = \int_E f d\mu$, $E \in M$.*

Preso ν una misura con segno, siano ν^+ e ν^- le uniche misure positive tali che: $\nu = \nu^+ - \nu^-$ e ν^+ singolare rispetto a ν^- (decomposizione di Jordan). Denotiamo con $|\nu|$ la misura $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$.

Definizione 2.4. *Una misura con segno ν in \mathbb{R} si dice di Radon se è di Borel regolare tale che:*

1. $|\nu|(K) < \infty$, $\forall K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto;
2. $|\nu|(B) = \inf\{|\nu|(U) \mid B \subseteq U, U \text{ aperto}\}$, $\forall B$ boreliano di \mathbb{R} .

Esempio 2.1. *La misura di Lebesgue è di Radon su \mathbb{R} .*

Esempio 2.2. *Le misure di Lebesgue-Stieltjes sono misure di Radon su \mathbb{R} .*

Sia ν una misura di Radon su \mathbb{R} . Per il teorema di Lebesgue-Radon-Nikodym ν può essere scomposta in parte singolare e assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue: $\nu = \nu_s + \nu_{ac}$.

La parte singolare di ν può essere ulteriormente scomposta in una parte discreta o di salto e una parte cantoriana.

Sia $A = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } \nu_s(\{x\}) \neq 0\}$.

$$\nu_d(E) = \nu_s(A \cap E) = \sum_{x_j \in E} \nu(\{x_j\})$$

Definiamo la parte discreta di ν come:

$$\nu_d = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(\{x_j\}) \delta_{x_j}$$

dove δ_x rappresenta la misura di Dirac.

La misura $\nu_c = \nu_s - \nu_d$ è la parte cantoriana della misura singolare.

2.2 Derivata debole e spazio $W^{1,p}$

Introduciamo la definizione di derivata debole. Essa viene introdotta per generalizzare la definizione di derivata classica. Qualora la derivata classica esista le due derivate coincidono.

Definizione 2.5. *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in L^1$. Diciamo che $g \in L^1([a, b])$ è la derivata parziale debole di f in $[a, b]$ se:*

$$\int_{[a,b]} f \phi' dx = - \int_{[a,b]} g \phi dx.$$

Definizione 2.6. (Spazio di Sobolev $W^{1,p}$)

Sia $1 \leq p \leq \infty$. Definiamo lo spazio di Sobolev $W^{1,p}$ come lo spazio contenente le funzioni $f \in L^p$ tali che la derivata debole di f esiste e appartiene allo spazio L^p .

Se $f \in W^{1,p}$ diremo che f è una funzione di Sobolev.

Esempio 2.3. Consideriamo la funzione valore assoluto $|x|$ definita su $[-a, a]$. Essa non è derivabile in senso classico su $[-a, a]$ ma si può calcolare la sua derivata debole. Infatti, sia $\phi \in C_0^1([-a, a])$, applicando la formula di integrazione per parti e osservando che ϕ si annulla nei termini di bordo si ha:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f \phi' dx &= - \int_{-a}^0 x \phi' dx + \int_0^a x \phi' dx = [x\phi(x)]_0^a - \int_0^a \phi(x) dx - [x\phi(x)]_{-a}^0 + \int_{-a}^0 \phi(x) dx \\ &= - \int_{-a}^a \phi g dx \end{aligned}$$

con $g(x) = \text{sgn}(x) \in L^1(\mathbb{R})$ derivata debole di f . Allora $f(x) = |x| \in W^{1,1}([-a, a])$.

Osservazione 2.1. Se f è di Sobolev allora per definizione vale la formula di integrazione per parti $\forall \phi \in C_0^1([a, b])$:

$$\int_a^b f \phi' dx = - \int_a^b f' \phi dx$$

indicando $f' = g$.

Proposizione 2.1. Presa una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, essa è assolutamente continua se e solo se $f \in W^{1,1}([a, b])$.

Dimostrazione. Se f è assolutamente continua, la sua derivata f' è definita q.o. e $f' \in L^1$ per il Teorema 1.4. Per il teorema di Fubini Tonelli, $\forall \phi \in C_0^1((a, b))$ si ha:

$$\begin{aligned} \int_a^b f \phi' dx &= \int_a^b \left(f(a) + \int_a^x f'(\xi) d\xi \right) \phi'(x) dx = \int_a^b f'(\xi) \left(\int_\xi^b \phi'(x) dx \right) d\xi \\ &= - \int_a^b f' \phi dx \quad \forall \phi \in C_0^1([a, b], \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Questo prova che $f \in W^{1,1}([a, b])$ e che f' è la derivata debole di f .

D'altra parte dobbiamo dimostrare che se $f \in W^{1,1}$, allora nella classe d'equivalenza di f esiste una funzione assolutamente continua.

Sia $f' \in L^1$ la derivata debole di f . La funzione

$$g(x) = \int_a^b f'(\xi) d\xi, \quad x \in [a, b]$$

è assolutamente continua, per cui $g'(x) = f'(x)$ q.o. rispetto alla misura di Lebesgue. Inoltre $\forall \phi \in C_0^1(\Omega)$:

$$\int_a^b (f - g) \phi' dx = \int_a^b (g' - f') \phi dx = 0$$

per cui $(g' - f') = 0$ q.o. e per il Lemma 1.6 $f = g$ a meno di una costante. Quindi

$$f(x) = g(x) + c = \int_a^b f'(\xi) d\xi + c$$

e abbiamo concluso. \square

2.3 Funzioni a variazione limitata ed esempi

Presentiamo ora un'altra definizione di funzione a variazione totale limitata che è adatta anche al caso di funzioni definite su \mathbb{R}^n con $n > 1$.

Ci limiteremo a presentare tale definizione nel caso di una funzione $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e la confronteremo con la definizione e i risultati esposti nel precedente capitolo. Inoltre, metteremo in evidenza il fatto che per le funzioni a variazione totale limitata è possibile considerare una nozione di derivata più generale.

Definizione 2.7. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $f \in L^1([a, b])$. Si dice che f ha variazione totale limitata in $[a, b]$ se

$$\int_{[a,b]} |Df| = \sup \left\{ \int_{[a,b]} f \phi' dx : \phi \in C_0^1([a, b], \mathbb{R}) \text{ e } |\phi(x)| \leq 1 \forall x \in [a, b] \right\}$$

è finito.

Osservazione 2.2. $\int_{[a,b]} |Df| \geq 0$, infatti, nel caso in cui fosse $\int_{[a,b]} f \phi' dx < 0$, $\int_{[a,b]} f(-\phi)' dx > 0$.

Osservazione 2.3. Si ha che $\int_{[a,b]} |Df| = T_a^b(f)$ dove $T_a^b(f)$ è la variazione totale di f definita nel capitolo precedente.

Ci limitiamo a mostrare questa proprietà per le funzioni C^1 .

Sia $f \in C^1([a, b])$, allora presa una suddivisione di $[a, b]$ $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$, per il teorema della media integrale, si ha che:

$$\sum_{i=1}^n \min_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} |f'(\xi)| (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^n \max_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} |f'(\xi)| (x_i - x_{i-1})$$

Poiché $T_a^b = \sup \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|$ rispetto alle possibili suddivisioni di $[a, b]$, infittendo gli intervalli della suddivisione, si ha che T_a^b è compreso tra la somma superiore e la somma inferiore per il calcolo dell'integrale di Riemann, da cui:

$$T_a^b(f) = \int_a^b |f'(x)| dx$$

D'altra parte, sfruttando la formula di integrazione per parti si ha, $\forall \phi \in C_0^1([a, b], \mathbb{R})$ tale che $|\phi| \leq 1$:

$$\int_a^b f \phi' dx = - \int_a^b f' \phi dx$$

da cui

$$\int_a^b f \phi' dx \leq \int_a^b |f'| dx$$

quindi, vale:

$$\int_{[a,b]} |Df| = \sup_{\phi \in C_0^1, |\phi| \leq 1} \int_a^b f \phi' dx \leq \int_a^b |f'| dx$$

Ora resta da mostrare che:

$$\int_{[a,b]} |Df| \geq \int_a^b |f'| dx$$

Consideriamo la seguente funzione:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } f'(x) < 0 \\ 0 & \text{se } f'(x) = 0 \\ -1 & \text{se } f'(x) > 0 \end{cases}$$

Si può trovare una successione $\{\phi_n(x)\}_{n \geq 1} \subseteq C_0^1([a, b])$ che converge puntualmente a ϕ e tale che $|\phi_n| \leq 1 \forall n$. Si ha che: $f'(x)\phi_n(x)$ tende a $f'(x)\phi(x)$ per n che tende a $+\infty$. Inoltre, $|f'\phi_n| \leq |f'| \in L^1([a, b])$. Allora per il teorema di convergenza dominata vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} - \int_a^b f' \phi_n dx = - \int_a^b f' \phi dx = \int_a^b |f'| dx$$

Quindi, $\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon$ tale che se $n > n_\epsilon$

$$- \int_a^b f' \phi_n dx > \int |f'| dx - \epsilon$$

Per l'arbitrarietà di ϵ e la definizione di $\int_a^b |Df|$ si ottiene la disuguaglianza cercata. Dalle due disuguaglianze si ottiene:

$$\int_{[a,b]} |Df| = \int_a^b |f'(x)| dx = T_a^b(f).$$

Se $f \in W^{1,1}$, poiché abbiamo osservato che anche per queste funzioni è valida la formula di integrazione per parti, come per le funzioni C^1 è vero che

$$\int_{[a,b]} |Df| = \int_{[a,b]} |f'| dx$$

dove, con un piccolo abuso di notazione, $f' = g$, con g derivata debole.

Esempio 2.4. Consideriamo la funzione di Heaviside che ricordiamo essere definita nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Si ha:

$$\int |Df| = \sup_{\phi \in C_0^1, \|\phi\|_\infty \leq 1} \int_0^\infty \phi' dx = \sup_{\phi \in C_0^1, \|\phi\|_\infty \leq 1} (-\phi(0)) = 1.$$

Teorema 2.2. (Teorema di struttura per funzioni a variazione limitata)

Sia f una funzione a variazione limitata. Allora esistono una misura di Radon μ su $[a, b]$ e una funzione μ -misurabile $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tali che:

1. $|\sigma(x)| = 1$ μ -q.o.;
2. $\int_{[a,b]} f \phi' dx = - \int_{[a,b]} \phi \sigma d\mu \quad \forall \phi \in C_0^1([a, b])$.

Definizione 2.8. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a variazione limitata. Definiamo la derivata distribuzionale $[Df]$ come la misura di Radon con segno finita tale che $\forall \phi \in C_0^1([a, b])$:

$$\int_{[a,b]} f \phi' dx = - \int_{[a,b]} \phi d[Df].$$

D'ora in poi considereremo solo funzioni f a variazione limitata.

Osservazione 2.4. Come visto nel Teorema 1.2 f si può scomporre come differenza di funzioni monotone crescenti. Siano esse f_1 e f_2 , allora $[Df]$ è la differenza delle misure di Lebesgue-Stieltjes associate a f_1 e f_2 .

Osservazione 2.5. Se la derivata debole esiste essa coincide con la derivata distribuzionale.

2.4 Decomposizione misura derivata

Poiché la derivata distribuzionale $[Df]$ di f è una misura di Radon, attraverso il teorema di Lebesgue-Radon-Nikodym possiamo scomporla in parte assolutamente continua e singolare rispetto alla misura di Lebesgue:

$$[Df] = [Df]_{ac} + [Df]_s$$

Osservazione 2.6. Per il corollario 2.1 $\exists g$ tale che $[Df]_{ac}([a, b]) = \int_{[a,b]} g dx$. La funzione g rappresenta la parte assolutamente continua della derivata distribuzionale di f e coincide con la derivata in senso debole o classico.

Osservazione 2.7. Ricordiamo che la parte singolare può essere scomposta come:

$[Df]_s = [Df]_d + [Df]_c$ che rappresentano rispettivamente la parte discreta e cantoriana di $[Df]_s$.

Esempio 2.5. (Funzioni $C^1(\mathbb{R})$)

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è C^1 , allora vale:

$$\int_{[a,b]} f \phi' dx = - \int_a^b \phi f' dx = - \int_{[a,b]} \phi d[Df]$$

La derivata distribuzionale ha solo parte assolutamente continua e coincide con la derivata in senso classico.

Esempio 2.6. (Funzioni AC o in $W^{1,1}([a, b])$)

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è assolutamente continua vale ancora:

$$[Df]([a, b]) = \int_a^b g dx$$

dove g è la derivata debole di f .

Anche in questo caso la derivata distribuzionale ha solo parte assolutamente continua e coincide con la derivata debole.

Osservazione 2.8. Una funzione è assolutamente continua se e solo se la sua derivata distribuzionale è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue.

Esempio 2.7. (La funzione di Heaviside)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

La derivata in senso classico di f è nulla $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Quindi f ha parte assolutamente continua $g^a = f'$ q.o. nulla. D'altra parte si ha che:

$$\int_{\mathbb{R}} f \phi' dx = \int_0^{+\infty} \phi' dx = \phi(+\infty) - \phi(0) = -\phi(0) = - \int_0^{+\infty} \phi d\delta_0$$

Quindi:

$$[Df] = [Df]_d = \delta_0$$

Esempio 2.8. (La funzione di Cantor)

Sia $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la funzione di Cantor costruita nel capitolo precedente.

Essa ha derivata classica $f'(x) = 0$ q.o. ($\forall x \in [0, 1] \setminus C$) e quindi la sua derivata distribuzionale ha solo parte singolare. Inoltre, poiché f è monotona la derivata distribuzionale coincide con la misura di Lebesgue-Stieltjes ad essa associata. Allora:

$$[Df]([0, x]) = \mu([0, x]) = \mu_s([0, x]) = f(x) - f(0) = f(x) = \int_{[0,x]} d\mu_s$$

Poiché f non ha punti di salto, la parte discreta della derivata distribuzionale è nulla, per cui:

$$\mu_s = \mu_c$$

è l'unica componente non nulla di $[Df]$.

Definizione 2.9. *Sia f una funzione a variazione limitata. Si dice che essa appartiene allo spazio SBV (Special Bounded Variation) qualora la parte cantoriana della sua derivata distribuzionale $[Df]_c$ sia nulla.*

Esempio 2.9. *La funzione di Heaviside appartiene allo spazio SBV.*

Esempio 2.10. *La funzione di Cantor non appartiene allo spazio SBV.*

Capitolo 3

Segmentazione di immagini

3.1 Descrizione del problema

In questa ultima parte della tesi cercheremo di spiegare perché è interessante introdurre lo spazio delle funzioni a variazione totale limitata $BV(\mathbb{R}^n)$ e il suo utilizzo per lo sviluppo di molte discipline scientifiche.

Infatti, in questo spazio si possono formulare problemi che coinvolgono la rappresentazione digitale di segnali o immagini, come ad esempio problemi di ricolorazione, ricostruzione, eliminazione del rumore.

In particolare, accenneremo al fatto che nello spazio di funzioni speciali a variazione limitata SBV è possibile dimostrare l'esistenza di una soluzione per problemi di segmentazione di immagini.

La segmentazione di un'immagine nell'elaborazione digitale è il processo di partizione di un'immagine in regioni significative sulla base di un certo criterio di appartenenza di un pixel ad una regione, come per esempio la cromaticità, l'intensità, la texture.

L'obiettivo è semplificare la rappresentazione delle immagini per individuare determinati oggetti o confini al loro interno e rendere più facile l'analisi delle stesse.

Nell'analisi di segnali, più in generale, la segmentazione permette l'individuazione di zone del segnale con caratteristiche omogenee attraverso un processo che conserva le discontinuità del dato.

E' possibile, quindi, considerare la segmentazione di un'immagine data descritta da una funzione g come la suddivisione, secondo certi criteri, del dominio Ω di g in regioni omogenee e disgiunte Ω_i che presentino una rumorosità inferiore rispetto a quella del dato e i cui bordi rimangano ben individuabili. I bordi sono proprio il luogo dei punti in cui il dato presenta discontinuità che non sono note a priori. Si ottiene:

$$\Omega = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_n \cup K$$

in modo che l'immagine g

- varia uniformemente e lentamente all'interno di ogni Ω_i ;
- varia rapidamente attraverso la maggior parte del confine K tra i diversi Ω_i .

L'immagine proposta tratta dall'articolo [7] schematizza in modo chiaro quanto descritto. Nell'immagine u rappresenta l'approssimazione che segmenta il dato g e sono evidenziate le regioni omogenee Ω_i e le discontinuità K .

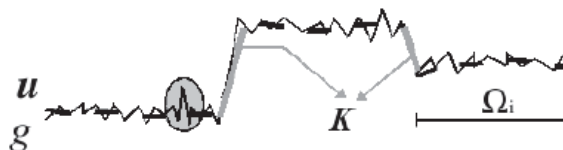


Figura 3.1: Schematizzazione della segmentazione u di un dato g

3.2 Funzionale Mumford-Shah

Da un punto di vista matematico la segmentazione si può formulare seguendo un approccio variazionale e cioè attraverso la formulazione di un problema di minimo.

Consideriamo il modello proposto da Mumford-Shah.

Sia g una funzione misurabile che rappresenta:

- un segnale in una dimensione; in questo caso il dominio di g è un intervallo aperto e limitato (a, b) ;
- un'immagine piana in due dimensioni con dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, limitato e connesso;
- un'immagine volumetrica in tre dimensioni con dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto, limitato e connesso.

La funzione g assume valori in \mathbb{R} qualora rappresenti un segnale o un'immagine in bianco e nero, in \mathbb{R}^3 qualora rappresenti un'immagine a colori.

Il funzionale di Mumford-Shah è definito da:

$$MS(u, K) = \mu^2 \int_{\Omega} |u - g|^2 dx + \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx + \nu H^{n-1}(K)$$

in cui:

- l'incognita è la coppia (u, K) , dove u è la funzione che segmenta il dato e K l'insieme dei bordi delle regioni omogenee;
- μ e ν sono parametri reali positivi;
- H^{n-1} è la misura di Hausdorff $(n - 1)$ -dimensionale che nel caso $n = 1$ coincide con la cardinalità dell'insieme K .

Osserviamo che la ricerca del minimo, cioè la ricerca della segmentazione del dato e l'individuazione esplicita dell'insieme delle discontinuità, va svolta nell'insieme:

$$\{(u, K) : K \subset \Omega \text{ compatto}, u \in W^{1,2}(\Omega \setminus K)\}.$$

Attraverso la minimizzazione dei tre termini si richiede che:

1. la distanza L^2 tra u e il dato sia minima;
2. la soluzione u approssimi g nel modo più regolare possibile all'interno di ogni regione omogenea Ω_i ;
3. l'insieme delle discontinuità risulti il più piccolo possibile, in modo che non vengano individuate discontinuità che non rappresentano il bordo tra due regioni omogenee. Si veda, ad esempio, l'area cerchiata nella Figura 3.1.

E' essenziale il contributo di tutti e tre i termini per arrivare ad una soluzione ottima (u, K) , che sia una buona approssimazione di g ; se, infatti, si escludesse uno dei termini si avrebbero soluzioni banali: senza il primo $u = 0$, $K = \emptyset$; senza il secondo $u = g$, $K = \emptyset$; senza il terzo si può considerare K come l'insieme dei bordi di ogni pixel e u come la funzione che assume il valore di g su ogni pixel.

Per poter studiare analiticamente il problema, l'insieme K viene sostituito dai punti di discontinuità o di salto della funzione u , che denotiamo con S_u . In questo modo si ottiene una formulazione debole del funzionale:

$$MS(u) = \mu^2 \int_{\Omega \setminus S_u} |u - g|^2 dx + \int_{\Omega \setminus S_u} |\nabla u|^2 dx + \nu H^{n-1}(S_u) \quad (3.1)$$

e in dimensione 1 risulta:

$$MS(u) = \mu^2 \int_a^b |u - g|^2 dt + \int_{(a,b) \setminus S_u} |u'|^2 dt + \nu \mu_c(S_u)$$

dove $\mu_c = H^0$ è la misura che conta i punti.

Osserviamo che $|\nabla u|$, o $|u'|$ in dimensione 1, rappresenta la parte assolutamente continua della misura derivata $[Du]$, mentre l'ultimo termine in 3.1 la parte di salto.

E' stato dimostrato che la formulazione debole del funzionale di Mumford-Shah (3.1) ammette una soluzione nello spazio di funzioni $SBV(\Omega)$. La dimostrazione di questo risultato (dimostrato da Ambrosio [1]) utilizza il Metodo Diretto del Calcolo delle Variazioni.

L'enunciato è il seguente:

Teorema 3.1. *Sia $g \in L^\infty(\Omega)$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, limitato e connesso. Allora esiste un minimo $u \in SBV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ di*

$$MS(u) = \mu^2 \int_{\Omega \setminus S_u} |u - g|^2 dx + \int_{\Omega \setminus S_u} |\nabla u|^2 dx + \nu H^{n-1}(S_u).$$

3.2.1 Implementazione numerica

Nonostante si sia dimostrata l'esistenza della soluzione, per arrivare ad una formulazione del funzionale che sia numericamente trattabile bisogna passare attraverso l'individuazione di un'ulteriore approssimazione della forma debole del modello che sia sufficientemente regolare.

In certi casi, lo sviluppo di tale approssimazione si basa sulla definizione e formalizzazione della teoria della Γ -convergenza.

Nell'articolo [1] sono presentati alcuni risultati ottenuti applicando diversi metodi numerici a immagini in dimensione 2.

3.2.2 Esempi di possibili applicazioni

Diverse sono le applicazioni del funzionale di Mumford-Shah per la segmentazione in vari ambiti ingegneristici, come quello biomedico, meccanico, civile e ambientale.

In ambito biomedico, la segmentazione è usata al fine di quantificare i volumi e le aree di interesse dei tessuti biologici per ottenere diagnosi più accurate e una migliore localizzazione delle patologie.

In ambito civile e ambientale il funzionale è stato testato in dimensione due per migliorare la qualità delle ortofoto.

Portiamo, invece, di seguito, un suo possibile utilizzo in dimensione uno, tratto dall'articolo [7]. L'immagine che proponiamo è tratta dallo stesso articolo e rappresenta una serie storica di una coordinata di una stazione permanente e la sua segmentazione ottenuta applicando il funzionale di Mumford-Shah. Le stazioni permanenti sono stazioni meteorologiche sparse in vari punti del territorio che raccolgono dati di precipitazione in vari periodi temporali. I dati raccolti in diversi anni formano le serie storiche.

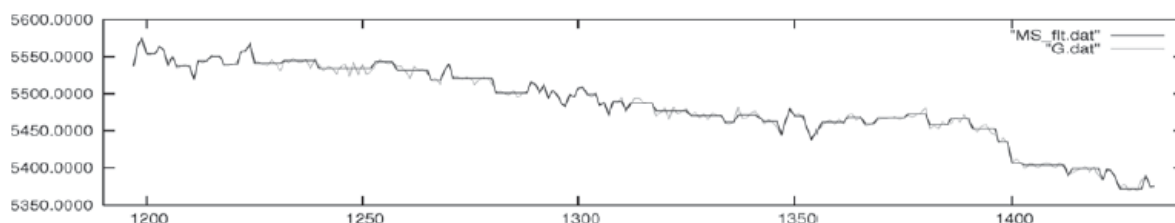


Figura 3.2: Segmentazione di una serie storica di una coordinata di una stazione permanente

Dalla figura si osserva che il modello di Mumford-Shah produce un buon risultato e, essendo del primo ordine, tende a produrre una segmentazione costante a tratti.

Bibliografia

- [1] L. Bar et al. “*Mumford and Shah model and its applications to image segmentation and image restoration*”. In: *Handbook of mathematical methods in imaging. Vol 1,2,3* (2015), pp. 1539–1597.
- [2] L.C. Evans e R.F. Gariephy. *Measure theory and fine properties of functions*. CRC Press, 1992.
- [3] E. Giusti. *Minimal surfaces and functions of bounded variation*. Birkhäuser, 1984.
- [4] P. Ho. *Image Segmentation*. IntechOpen, 2011.
- [5] R. Monti. *Appunti del corso di Analisi Reale*. 2017.
- [6] H.L. Royden. *Real Analysis*. Macmillan Publishing Company, 1988.
- [7] A. Vitti. “*Problemi con discontinuità libere nella segmentazione di immagini e di segnali monodimensionali*”. In: *Atti 12^a conferenza nazionale ASITA (L’Aquila 21-24 ottobre 2008)*, pp. 1917–1922.