



**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA**

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA MECCATRONICA

---

***TESI DI LAUREA MAGISTRALE***

**ANALISI DELLE PRESTAZIONI DI UN MANIPOLATORE  
PARALLELO PER IL PICK-AND-PLACE TRAMITE INDICI  
CINEMATICI E DINAMICI**

*Relatore:* Ch.mo Prof. GIOVANNI BOSCHETTI

*Laureando:* LUCA VIRZÌ

Matricola 603416-IMC

ANNO ACCADEMICO 2009-2010



## Sommario

La principale caratteristica che distingue i manipolatori paralleli da quelli seriali è la possibilità di disporre i motori a telaio e di alleggerire, quindi, la struttura meccanica in movimento; ne consegue la capacità di ottenere elevate accelerazioni sull'organo terminale.

In questo elaborato, si studiano le prestazioni di Quattro™, robot parallelo a quattro gradi di libertà (tre di traslazione e uno di rotazione attorno all'asse verticale) prodotto dall'Adept Technology Inc., a oggi il più veloce nella categoria dell'imballaggio.

Le prestazioni saranno valutate tramite indici cinematici e dinamici che, tenendo conto della direzione di movimento analizzata (verticale o orizzontale), individuano le zone dello spazio di lavoro in cui il manipolatore garantisce le maggiori prestazioni riguardo a spostamenti lineari.

I risultati ottenuti saranno rapportati a dei cicli standard di *pick-and-place* per individuare le aree in cui il tempo necessario al compimento del movimento sia il minore, con conseguente aumento della velocità produttiva.



# Indice

<b>Elenco delle figure .....</b>	<b>9</b>
<b>Elenco delle tabelle.....</b>	<b>11</b>
<b>Introduzione.....</b>	<b>13</b>
<b>Capitolo 1: Manipolatori paralleli e Adept Quattro™.....</b>	<b>15</b>
1.1 Confronto tra manipolatori seriali e paralleli .....	16
1.2 Applicazioni dei manipolatori paralleli .....	17
1.3 Adept Quattro™ .....	18
1.3.1 Struttura meccanica .....	19
1.3.2 Modello geometrico semplificato .....	22
1.3.3 Convenzione sui segni delle rotazioni .....	24
1.4 Cinematica di posizione .....	25
1.4.1 Cinematica di posizione inversa .....	25
1.4.2 Cinematica di posizione diretta.....	29
1.5 Termini correttivi del modello geometrico.....	29
<b>Capitolo 2: Matrice Jacobiana .....</b>	<b>35</b>
2.1 Determinazione della matrice Jacobiana.....	35
2.2 A cosa serve la matrice Jacobiana .....	36
2.3 Matrice Jacobiana dell'Adept Quattro™.....	37
2.3.1 Determinazione della matrice $J_x$ .....	38
2.3.2 Determinazione della matrice $J_q$ .....	39
2.4 Analisi cinematica di velocità .....	39
2.5 Analisi cinematica di accelerazione .....	40
2.5.1 Determinazione della derivata della matrice $J_x$ .....	41
2.5.2 Determinazione della derivata della matrice $J_q$ .....	42

<b>Capitolo 3: Indici cinematici .....</b>	<b>43</b>
3.1 Indici di prestazione .....	43
3.1.1 Manipolabilità .....	43
3.1.2 Numero di condizionamento .....	44
3.1.3 Isotropia cinematica .....	44
3.2 Separazione dei contributi e normalizzazione della Jacobiana .....	44
3.2.1 Divisione dei contributi traslazionali e rotazionali .....	45
3.2.2 Normalizzazione della matrice Jacobiana .....	45
3.3 Indice di manipolabilità riferito alla traslazione per l'Adept Quattro™ .....	45
3.4 Indici cinematici direzionali .....	46
3.5 Indici cinematici direzionali valutando gli autovalori .....	48
<b>Capitolo 4: Matrice di inerzia generalizzata ridotta all'end effector (GIMRE) .....</b>	<b>51</b>
4.1 General Inertia Matrix .....	51
4.2 Isotropia dinamica e suo significato geometrico .....	52
4.3 Determinazione della GIMRE per un manipolatore parallelo.....	52
4.4 Determinazione della GIMRE per l'Adept Quattro™.....	54
4.4.1 Terne di riferimento .....	54
4.4.2 Tensori di inerzia .....	62
4.4.3 Matrici Jacobiane .....	65
4.5 Scomposizione della GIMRE.....	68
4.6 Indice di isotropia dinamica.....	70
4.6.1 Risultati da simulazione .....	71
4.7 Separazione dei contributi traslazionali .....	71
<b>Capitolo 5: Modello dinamico .....</b>	<b>73</b>
5.1 Modello dinamico inverso e diretto.....	73
5.1.1 Metodo di Newton-Eulero .....	73
5.2 Parametri e assunzioni per definire il modello dinamico.....	74
5.3 Modello dinamico dell'Adept Quattro™.....	76
5.3.1 Contributo della parte attiva .....	76
5.3.2 Contributo della piattaforma mobile e del carico.....	78
5.4 Somma dei contributi .....	80
5.4.1 Forza applicata dai motori .....	81
5.4.2 Forza centrifuga e di Coriolis.....	81

5.4.3 Forza di gravità .....	82
5.5 Capacità di produrre accelerazione.....	82
5.6 Movimento verticale .....	84
5.7 Movimento orizzontale .....	86
<b>Capitolo 6: Prove sperimentali .....</b>	<b>89</b>
6.1 Movimento orizzontale .....	89
6.2 Movimento verticale .....	91
6.3 Adept Cycle .....	93
<b>Capitolo 7: Conclusioni.....</b>	<b>97</b>
7.1 Confronto tra indici e prove sperimentali .....	97
7.2 Sviluppi futuri.....	98
<b>Ringraziamenti.....</b>	<b>101</b>
<b>Bibliografia .....</b>	<b>103</b>
<b>Appendice A .....</b>	<b>107</b>





## Elenco delle figure

1.1 Esempio di manipolatore seriale SCARA, con schematizzazione del suo spazio di lavoro .....	16
1.2 Esempi di manipolatori paralleli .....	16
1.3 Elementi costitutivi dell'Adept Quattro™ .....	18
1.4 Spazio di lavoro dell'Adept Quattro™ .....	19
1.5 Particolare del braccio superiore dell'Adept Quattro™ .....	20
1.6 Particolare dell'accoppiamento di forza del braccio inferiore.....	21
1.7 Particolare della piattaforma mobile dell'Adept Quattro™ e del sistema di rotazione.....	21
1.8 Rappresentazione MATLAB® del modello geometrico semplificato e terna di riferimento a telaio .....	22
1.9 Riassunto delle semplificazioni geometriche.....	23
1.10 Convenzione dei segni per le variabili di giunto .....	24
1.11 Convenzione sui segni della rotazione della piattaforma mobile .....	24
1.12 Determinazione del punto $B_i$ come intersezione dei bracci superiore e inferiore .....	26
1.13 Modello geometrico con correzione riguardante il punto di collegamento del <i>link 2</i> .....	30
1.14 Inserimento del sistema assoluto Adept nel modello geometrico .....	32
1.15 Nuovo modello geometrico comprendente le tre correzioni e particolare dell' <i>end effector</i> .....	33
3.1 Ciclo di <i>pick-and-place</i> .....	46
3.2 Indice di manipolabilità riferito alla traslazione .....	46
3.3 Indice selettivo: movimento orizzontale .....	47
3.4 Indice selettivo: movimento verticale .....	48
3.5 Indici selettivi calcolati con gli autovalori .....	49
4.1 Notazione utilizzata: identificazione dei <i>link</i> .....	53
4.2 Notazione utilizzata: identificazione delle terne di riferimento .....	53
4.3 Terne di riferimento riferite a ciascun componente e ingrandimento delle terne dei <i>link</i> .....	55
4.4 Matrici di rotazione per il braccio 1: caso 1. ....	57
4.5 Matrici di rotazione per il braccio 1: caso 2 .....	57
4.6 Matrici di rotazione per il braccio 1: caso 3 .....	57
4.7 Matrici di rotazione per il braccio 1: caso 4 .....	58
4.8 Indice di isotropia dinamica .....	71
4.9 Indice $dTIM_z$ .....	72
5.1 Semplificazione dinamica del <i>link 2</i> .....	75
5.2 Semplificazione dinamica della piattaforma mobile articolata .....	75

5.3 Coppia generata dalla gravità per il braccio 1.....	77
5.4 Andamento del modulo della forza non lineare .....	82
5.5 Andamento del modulo della forza di gravità riportata all'organo terminale.....	82
5.6 Indice dinamico di massa riferito a una traslazione generica .....	83
5.7 Indice dinamico di massa riferito a una traslazione lungo z (piano x-z).....	84
5.8 Coefficiente $\alpha_z$ per spostamenti verticali .....	85
5.9 Coefficiente $\alpha_x$ per spostamenti orizzontali.....	87
6.1 Indice $\alpha_x$ per il piano orizzontale z = -800 mm, con corrispondente grafico sperimentale dei tempi .....	90
6.2 Indice $\alpha_x$ per il piano orizzontale z = -900 mm, con corrispondente grafico sperimentale dei tempi .....	90
6.3 Indice $\alpha_x$ per il piano orizzontale z = -1000 mm, con corrispondente grafico sperimentale dei tempi .....	91
6.4 Indice $\alpha_z$ per il piano verticale, con corrispondente grafico sperimentale dei tempi .....	91
6.5 Particolare del canale centrale ottenuto sperimentalmente.....	92
6.6 Indice $\alpha_z$ per il piano orizzontale z = -1000 mm, con corrispondente grafico sperimentale dei tempi .....	92

## Elenco delle tabelle

6.1 Tempi medi di percorrenza dello Standard Adept Cycle centrato in $x = 0$ mm .....	93
6.2 Tempi medi di percorrenza dello Standard Adept Cycle centrato in $x = 75$ mm .....	93
6.3 Tempi medi di percorrenza dello Standard Adept Cycle con partenza da $x = 0$ mm .....	94
6.4 Tempi medi di percorrenza dello Standard Adept Cycle con partenza da $x = 75$ mm .....	94
6.5 Tempi medi di percorrenza dell'Extended Adept Cycle centrato in $x = 0$ mm.....	95



# Introduzione

Nello studio di un manipolatore parallelo, l'analisi non può ridursi alle sole considerazioni cinematiche, come spesso accade per i robot seriali. È necessario determinare un modello dinamico il più preciso possibile, data la prerogativa di questi robot di garantire elevate velocità e accelerazioni. La presenza di catene chiuse e le interazioni tra i diversi *link* cinematici rendono l'analisi dinamica un problema di non immediata soluzione.

Nel primo capitolo di questo elaborato, dopo un elenco di vantaggi e svantaggi riferiti all'utilizzo di manipolatori paralleli al posto di quelli seriali, si descrive il modello geometrico dell'Adept Quattro™ utilizzato per l'implementazione via software. Si risolve, inoltre, la cinematica di posizione inversa.

Nel secondo capitolo, sono riportati i calcoli per ottenere la matrice Jacobiana del manipolatore in esame, la cui determinazione permette di impostare i problemi cinematici di velocità e di accelerazione e di individuare le condizioni di singolarità.

Segue un capitolo, il terzo, in cui si descrivono degli indici cinematici dipendenti dalla Jacobiana e si calcolano per l'Adept Quattro™, con lo scopo di determinare le aree dello spazio di lavoro dove il manipolatore può lavorare più facilmente e velocemente dal punto di vista della sola cinematica.

Nel quarto capitolo, invece, sono presenti le prime considerazioni dinamiche; in particolare, è calcolata la matrice d'inerzia generalizzata riferita all'*end effector*, dalla quale è possibile definire l'indice di isotropia dinamica.

Per eseguire un'analisi più precisa, però, è necessario definire un modello più completo, che tenga conto di tutti i contributi che entrano in gioco dal punto di vista delle forze generalizzate. Nel capitolo cinque, allora, si determina il modello dinamico dell'Adept Quattro™, sulla base del quale si cercheranno le zone dello spazio di lavoro in cui il robot presenta la maggiore capacità di accelerare il proprio organo terminale.

Nel capitolo sei sono riportati i risultati di alcune prove sperimentali effettuate con il manipolatore per individuare le reali zone che garantiscano massima accelerazione di trascinamento.

Nel capitolo sette, infine, si confrontano i risultati ottenuti tramite gli indici con quelli delle prove sperimentali, con lo scopo di determinare dove il manipolatore compia i cicli di *pick-and-place* in modo più veloce e in che maniera gli indici evidenzino queste aree.

In appendice A è riportato il codice MATLAB® utilizzato per le simulazioni.



# CAPITOLO 1

## MANIPOLATORI PARALLELI E ADEPT QUATTRO™

Con il termine robot (dal ceco *Ròbota*, “lavoro pesante” o “lavoro forzato”) industriale s’intende “*un manipolatore a più gradi di libertà, governato automaticamente, riprogrammabile, multiscopo, che può essere fisso sul posto o mobile per utilizzo in applicazioni di automazioni industriali*” (norma ISO TR/8373) progettato per trasportare materiali, parti, utensili o dispositivi dedicati, secondo movimenti variabili programmati.

Si possono riconoscere, in generale, quattro parti funzionali che caratterizzano un qualsiasi manipolatore:

- struttura meccanica: gli elementi o *link* che lo compongono e i tipi di accoppiamento tra di essi, cui si aggiunge l'*end effector* o organo terminale, differente in base alla funzione da assolvere;
- attuatori: i motori, nella maggior parte dei casi elettrici, con i relativi motoriduttori tra albero e asse attuato; un *link* collegato direttamente a un motore o motoriduttore prende il nome di *link* attivo;
- sensori: gli encoder posti sul motore, indispensabili per l’individuazione della posizione di un giunto attivo;
- elettronica di controllo: il controllore, la cui progettazione incide sulle prestazioni e sulla precisione del manipolatore in termini di accuratezza e ripetibilità<sup>1</sup>.

I robot industriali possono essere divisi in due grandi categorie: macchine seriali e parallele.

I manipolatori seriali sono caratterizzati da sequenze di *link* e relativi accoppiamenti cinematici. Ogni *link* è mosso da un attuatore a esso collegato; il primo e l’ultimo *link* non sono connessi tra loro. Esempi di moderni robot seriali sono il manipolatore SCARA (figura 1.1) e il braccio antropomorfo.

I manipolatori paralleli o PKM (*Parallel Kinematic Machines*), invece, presentano delle strutture meccaniche chiuse; sono composti da  $n$  catene cinematiche uguali tra loro, che collegano il telaio (piattaforma fissa) a una piattaforma mobile. Il grosso vantaggio di questi manipolatori è che i motori sono posti sulla base, riducendo nettamente la quantità di masse sospese e in movimento con conseguenti vantaggi per quanto concerne la dinamica.

---

<sup>1</sup> Con il termine accuratezza s’intende la differenza tra le coordinate richieste e quelle effettivamente raggiunte quando il manipolatore si porta per la prima volta in un punto; con il termine ripetibilità, invece, ci si riferisce alla capacità di ritornare in un punto in cui il manipolatore è già stato.

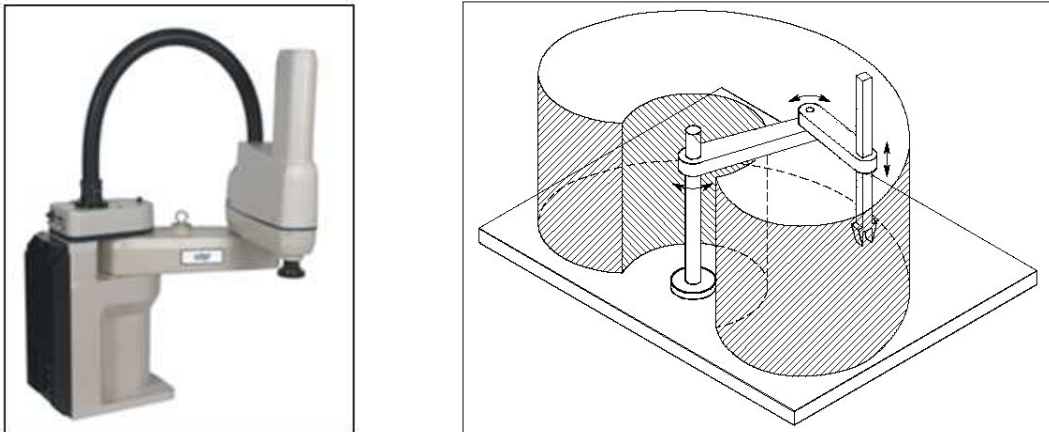


Figura 1.1: esempio di manipolatore seriale SCARA, con schematizzazione del suo spazio di lavoro.

Si parla di manipolatori paralleli ridondanti quando il numero di gradi di libertà dell'organo terminale è minore del numero di *link* attivi; si parla di manipolatori paralleli non ridondanti quando il numero di movimenti permessi all'*end effector* uguaglia quello degli attuatori, [14].

Come si può vedere in figura 1.2, esempi di PKM sono la piattaforma di Stewart (3-DOF) e il modello Quattro™ dell'Adept Technology [36], manipolatore sottoposto a un'approfondita analisi cinematica e dinamica nel corso di questo elaborato.



Figura 1.2: esempi di manipolatori paralleli: (a) piattaforma di Stewart, (b) Adept Quattro™.

Esiste un'ulteriore categoria di robot industriali, quella dei manipolatori ibridi, composti da catene cinematiche consecutive, come i manipolatori seriali, con l'aggiunta, però, di anelli chiusi, per aumentare la solidità della struttura e spostare i motori a telaio.

## 1.1 Confronto tra manipolatori seriali e paralleli

Negli ultimi vent'anni, il possibile utilizzo di robot paralleli in ambito industriale, per operazioni di *packaging*, *pick-and-place*, ecc., ha destato un grande interesse nell'ambito della ricerca. Questi



manipolatori hanno la capacità di rispondere al crescente bisogno di automazione nei processi industriali, con lo scopo di ridurre al minimo gli errori di posizione e orientazione dell'organo terminale e i tempi di ciclo ([1], [3], [20]). E' bene, quindi, passare in rassegna quelli che sono i vantaggi e gli svantaggi legati all'utilizzo di manipolatori paralleli al posto di quelli seriali.

Lo spostamento degli attuatori a telaio nelle PKM permette di avere un'inerzia enormemente minore dal punto di vista delle masse in movimento. Come conseguenza, è possibile snellire la struttura dei *link* costruendoli in materiali più leggeri (fibra di carbonio), ma garantendo la medesima rigidità di una struttura seriale, poiché il carico è ripartito su più catene cinematiche. Tutto questo permette di raggiungere velocità e accelerazioni maggiori, a parità di attuazione, e, quindi, di ridurre il tempo di percorrenza di un percorso stabilito ([2], [13]). Una caratteristica negativa dei manipolatori paralleli è l'elevato rapporto tra ingombro della struttura ed effettivo spazio di lavoro<sup>2</sup> del robot, rispetto a quello delle macchine seriali.

In questo elaborato, l'analisi delle prestazioni dell'Adept Quattro™ sarà orientata principalmente alle operazioni di *pick-and-place*; a tal proposito, lo svantaggio appena descritto riguardo all'ingombro non è così importante. Un robot seriale che movimentava oggetti presenta, in generale, un ampio spazio di lavoro con una "zona morta" corrispondente alla colonna centrale, dove è presente la struttura del robot stesso (si veda la figura 1.1); questo non permette l'esecuzione di movimenti lineari passanti per il centro dello spazio di lavoro, [2]. Per un manipolatore parallelo che, come nel caso del Quattro™, è montato sulla parte superiore della cella di lavoro, questo problema non si presenta.

## 1.2 Applicazioni dei manipolatori paralleli

I manipolatori paralleli hanno trovato molti campi di utilizzo e tuttora rappresentano le più valide scelte quando sono richieste elevate prestazioni cinematiche e dinamiche e un alto standard di precisione.

Le categorie in cui i robot paralleli hanno trovato maggior impiego sono riportate di seguito:

- movimentazione e trasporto: sono quelle applicazioni, come la pallettizzazione, il confezionamento delle merci, lo scarico e il carico di nastri trasportatori, che prevedono lo spostamento da parte del robot di semilavorati o prodotti finiti;
- lavorazione: a seconda dell'organo terminale che viene montato sulla piattaforma mobile del manipolatore, si riescono a compiere vari processi (saldatura, taglio laser o a getto d'acqua, verniciatura, fresatura, incollaggio) tipici dei robot seriali;
- assemblaggio e montaggio: di gruppo meccanici ed elettrici, di schede elettroniche, ecc.;
- misura e ispezione: ad esempio le operazioni di rilevamento profili, collaudo dimensionale e individuazione di difetti di lavoro.

---

<sup>2</sup> Lo spazio di lavoro di un manipolatore è definito come la regione descritta dall'*end effector* quando ai giunti del manipolatore si fanno compiere tutti i moti possibili; è un sottoinsieme dello spazio raggiungibile il quale racchiude tutti i punti dello spazio che l'organo terminale può raggiungere con almeno un'orientazione.

### 1.3 Adept Quattro™

L'Adept Quattro™<sup>3</sup> (figura 1.3) è un manipolatore parallelo che presenta quattro bracci identici (4-RUU) ciascuno costituito da due *link*: quello più vicino al telaio sarà chiamato braccio superiore o *link* 1, l'altro prenderà il nome di braccio inferiore o *link* 2 del braccio *i*-esimo. Questo robot, prodotto dall'Adept Technology [36] dal 2007, nasce in ambito accademico ([3]). Rappresenta l'ultima evoluzione della famiglia dei DELTA-Robot ([1], [2], [3]), con la peculiarità di dotare l'*end effector* di 4 gradi di libertà, per la realizzazione di moti a elevate velocità e accelerazioni. La particolare struttura della piattaforma mobile garantisce la rotazione dell'*end effector* attorno al suo asse verticale.

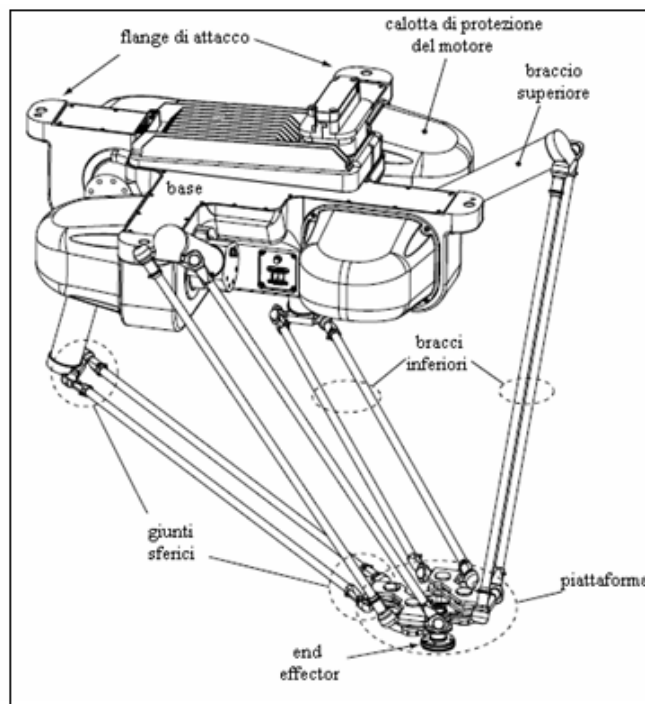


Figura 1.3: elementi costitutivi dell'Adept Quattro™.

L'Adept Quattro™ si presta a movimentazioni veloci di prodotti leggeri nel campo alimentare e farmaceutico; presenta una limitazione di carico massimo pari a 6 kg. Le sue prestazioni in termini di velocità e accelerazione sono le migliori nella categoria dell'imballaggio; dal *data-sheet* ([36]) del manipolatore si riporta che la massima velocità lineare raggiungibile è pari a 10 m/s, mentre la massima accelerazione lineare è di 150 m/s<sup>2</sup>. Nella figura 1.4, è riportata la rappresentazione dello spazio di lavoro del manipolatore, [36].

<sup>3</sup> La versione dell'Adept Quattro™ su cui si basano le considerazioni di questo elaborato è la s650H, modello disponibile nel laboratorio di robotica del Dipartimento di Tecniche e Gestione delle imprese, sede distaccata di Vicenza della facoltà d'ingegneria dell'Università di Padova.

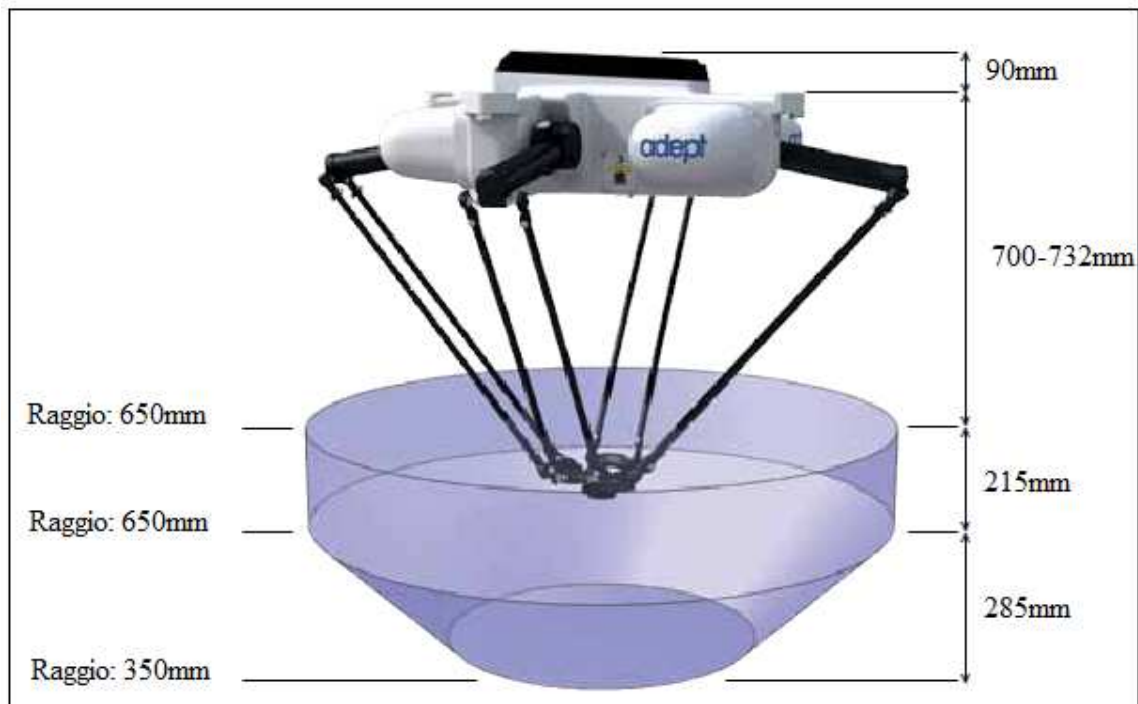


Figura 1.4: spazio di lavoro dell'Adept Quattro™.

### 1.3.1 Struttura meccanica

Il collegamento a telaio di Quattro™, come spesso capita per le macchine parallele, avviene sulla parte superiore del manipolatore, dove sono presenti i quattro attuatori, protetti da calotte in alluminio. Il robot in esame presenta una struttura simmetrica e ciascuna delle quattro catene cinematiche, che collegano il telaio alla piattaforma mobile, è costituita, come detto, da una parte superiore e da una inferiore.

#### BRACCIO SUPERIORE

Il *link* 1 di ciascun braccio del robot è una manovella in fibra di carbonio collegata, tramite motoriduttore, al corrispondente motore fisso a telaio, come si può vedere dalla figura 1.5.

Il movimento che la manovella può compiere è quello di rotazione sul piano ortogonale all'albero del motore; considerando come centro l'estremità collegata al telaio, il luogo dei punti dove l'altra estremità può disporsi è un arco di circonferenza. Di seguito sono riportati alcuni dati riguardanti ciascun braccio superiore:

Lunghezza:  $br = 375 \text{ mm.}$

Raggio:  $r_b = 28 \text{ mm.}$

Distanza tra punto a telaio e attacco del *link* 2:  $b = 376 \text{ mm.}$

Massa:  $m_b = 1,45 \text{ kg,}$   
 $m_b = 1,85 \text{ kg}$  se si considera anche il peso delle 8 viti di collegamento.

Posizione del centro di massa rispetto al centro di rotazione:  $l_g = 121 \text{ mm}$ .

Rotazione consentita:  $123^\circ$  verso il basso,  
 $51^\circ$  verso l'alto.

N.B.: i dati riguardanti la massa sono stati richiesti direttamente alla ditta produttrice, poiché lo smontaggio del pezzo avrebbe reso necessaria una nuova calibrazione dei motori.

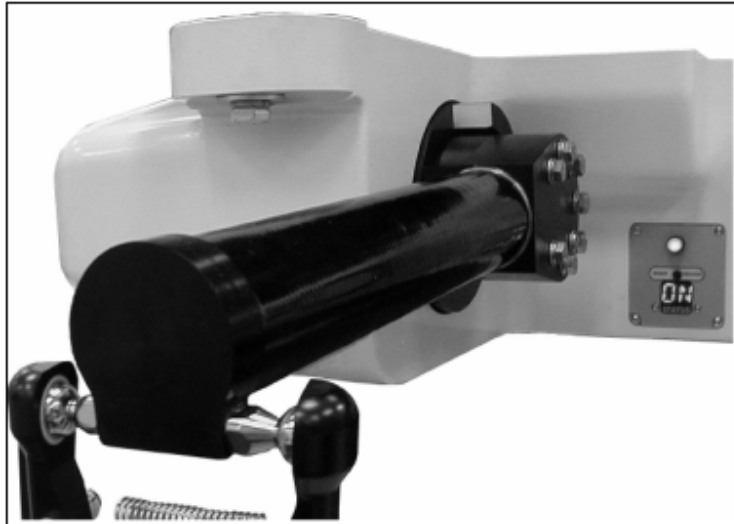


Figura 1.5: particolare del braccio superiore dell'Adept Quattro™.

### BRACCIO INFERIORE

Il *link* 2 di ciascun braccio del robot è costituito da una coppia di bielle, sempre in fibra di carbonio, collegate al *link* 1 tramite giunti sferici e tenute unite tra loro da accoppiamenti di forza tra sfera e calotta per mezzo di molle (figura 1.6). Le due bielle, collegate inferiormente alla piattaforma mobile, si muovono nello spazio; una volta stabilita la posizione del corrispondente *link* 1, il luogo dei punti in cui l'estremità collegata alla piattaforma può posizionarsi è una calotta sferica, il cui centro è rappresentato dall'altra estremità. Di seguito sono riportati alcuni dati riguardanti ciascun braccio inferiore:

Lunghezza:  $c = 825 \text{ mm}$ .

Raggio:  $r_c = 6,75 \text{ mm}$ .

Massa singola asta:  $m_c = 0,24 \text{ kg}$ .

Posizione del centro di massa rispetto all'estremità superiore:  $l_{g2} = c/2$ .

Il particolare tipo di accoppiamento inibisce la rotazione attorno all'asse centrale della coppia di bielle e fa in modo che la piattaforma mobile mantenga una posizione orizzontale nel piano  $x$ - $y$ , assumendo  $z$  come asse verticale.

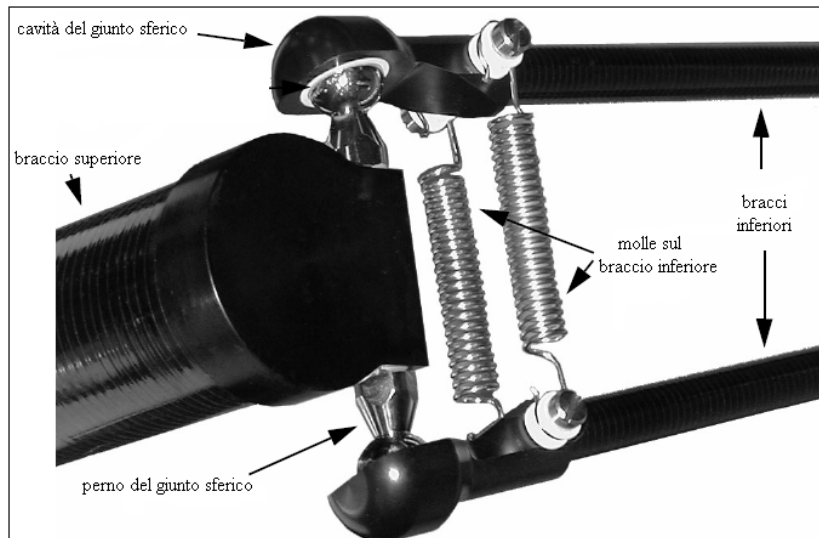


Figura 1.6: particolare dell'accoppiamento di forza del braccio inferiore.

### PIATTAFORMA ARTICOLATA MOBILE

La piattaforma mobile del manipolatore in esame (figura 1.7) ha una forma che può essere ricondotta a un quadrato, su ciascun vertice del quale sono collegati i bracci inferiori. È in grado di muoversi nelle tre direzioni cartesiane e, come detto, mantiene sempre una posizione parallela al piano di base. Per quanto riguarda la rotazione, è presente una particolare struttura composta da due ruote, con rapporto di riduzione 1:4, collegate da una cinghia di trasmissione. L'organo terminale, collegato alla ruota più piccola, è in grado di ruotare di  $\pm 180^\circ$ , in seguito ad una rotazione della ruota maggiore di  $\pm 45^\circ$ . L'*end effector*, di conseguenza, non è collocato esattamente al centro della piattaforma, ma presenta un *offset* pari a 75 mm rispetto al centro di simmetria.

Di seguito sono riportati alcuni dati riguardanti la piattaforma mobile:

Lunghezza di un lato:  $d = 150 \text{ mm}$ .

Massa totale:  $m_p = 0,262 \text{ kg}$ .

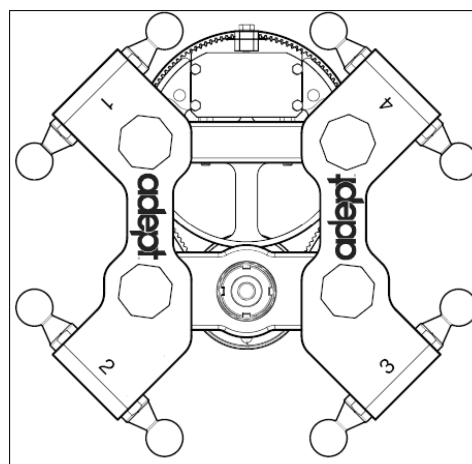


Figura 1.7: particolare della piattaforma mobile dell'Adept Quattro™ e del sistema di rotazione.

### 1.3.2 Modello geometrico semplificato

Per lo studio cinematico e l'analisi dinamica, è necessario semplificare la geometria del manipolatore appena descritto, con lo scopo di facilitare la definizione del modello analitico da implementare via software. Nella figura seguente (1.8), è rappresentata graficamente la struttura semplificata del robot con la terna di riferimento posta a telaio.

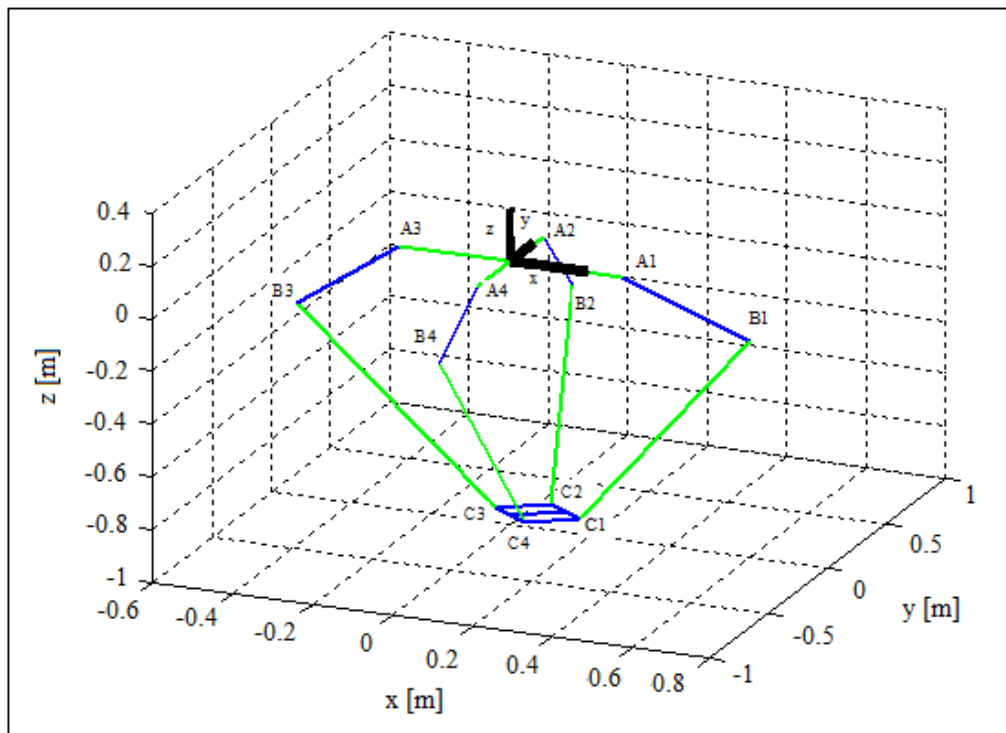


Figura 1.8: rappresentazione MATLAB® del modello geometrico semplificato e terna di riferimento a telaio.

La parte a telaio è stata ridotta a quattro segmenti perpendicolari tra loro di lunghezza pari a 275 mm; questo valore sarà indicato, in seguito, dalla lettera  $a$ . Per semplificare i calcoli, non si è considerato il sistema di riferimento proposto dalla ditta, ma uno in cui gli assi  $x$  e  $y$  giacciono su due di questi segmenti, appartenenti rispettivamente al braccio 1 e al braccio 2. Se si volesse riportare il tutto alla terna proposta da Adept, basterebbe ruotare il sistema di riferimento di  $-135^\circ$ , con conseguente adeguamento delle coordinate dei punti.

Per quanto concerne i *link* 2 dei quattro bracci, si può vedere come siano stati ridotti a un unico segmento, parallelo alle bielle e passante per il centro del quadrilatero che esse formano.

La piattaforma mobile, invece, è stata trattata come un puro quadrato senza considerare i segmenti di raccordo che si possono trascurare, se non si analizzano gli stress interni degli elementi strutturali del robot [2]. La figura 1.9 riassume le semplificazioni appena elencate.

Il centro della terna di riferimento rappresenta l'origine  $O = (0, 0, 0)$ . Considerando l' $i$ -esimo braccio, l'estremità del *link* 1 collegata all'attuatore individua il punto  $A_i$ , mentre l'altra estremità, intersezione con il *link* 2,  $B_i$ . Il punto di collegamento tra *link* 2 e piattaforma mobile è denominato  $C_i$  (figura 1.8).

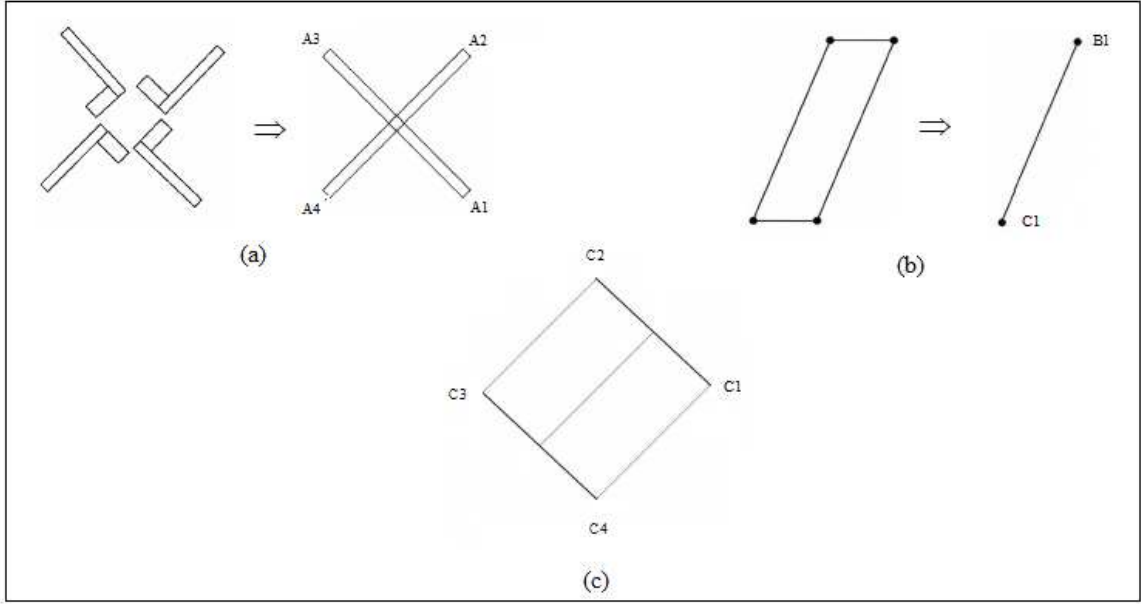


Figura 1.9: riassunto delle semplificazioni geometriche: (a) a telaio, (b) *link* 2 del braccio 1 (è lo stesso per gli altri bracci), (c) piattaforma mobile.

Di seguito sono riportate le coordinate dei punti sopra elencati, in funzione delle lunghezze dei bracci, delle coordinate lineari ( $x_0$ ,  $y_0$  e  $z_0$ ) e rotazionali ( $\theta_0$ ) del centro della piattaforma mobile e degli angoli  $q_i$  d'inclinazione dell' $i$ -esimo *link* rispetto al piano  $x$ - $y$ :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= (a \quad 0 \quad 0)^T & B_1 &= (a + b \cos(q_1) \quad 0 \quad -b \sin(q_1))^T \\
 A_2 &= (0 \quad a \quad 0)^T & B_2 &= (0 \quad a + b \cos(q_2) \quad -b \sin(q_2))^T \\
 A_3 &= (-a \quad 0 \quad 0)^T & B_3 &= (-(a + b \cos(q_3)) \quad 0 \quad -b \sin(q_3))^T \\
 A_4 &= (0 \quad -a \quad 0)^T & B_4 &= (0 \quad -(a + b \cos(q_4)) \quad -b \sin(q_4))^T
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \left( x_0 + \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) + \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad y_0 + \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) - \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad z_0 \right)^T \\
 C_2 &= \left( x_0 + \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) - \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad y_0 + \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) + \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad z_0 \right)^T \\
 C_3 &= \left( x_0 - \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) - \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad y_0 - \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) + \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad z_0 \right)^T \\
 C_4 &= \left( x_0 - \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) + \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad y_0 - \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) - \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad z_0 \right)^T .
 \end{aligned}$$

Determiniamo anche le coordinate dei punti medi,  $M_{12}$  e  $M_{34}$ , dei *link* di collegamento tra gli estremi  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ ,  $C_4$  della piattaforma:

$$M_{12} = \left( x_0 + \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \quad y_0 + \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \quad z_0 \right)^T$$

$$M_{34} = \left( x_0 - \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \quad y_0 - \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \quad z_0 \right)^T.$$

### 1.3.3 Convenzione sui segni delle rotazioni

Dopo aver stabilito una terna di riferimento assoluta a telaio, è bene definire anche il segno delle rotazioni delle variabili di giunto ( $q_i$ ) e dell'organo terminale ( $\theta_0$ ).

Una rotazione del braccio superiore verso il basso genera un angolo d'inclinazione positivo rispetto al piano orizzontale; una rotazione verso l'alto, invece, darà luogo a un angolo dal valore negativo (figura 1.10).

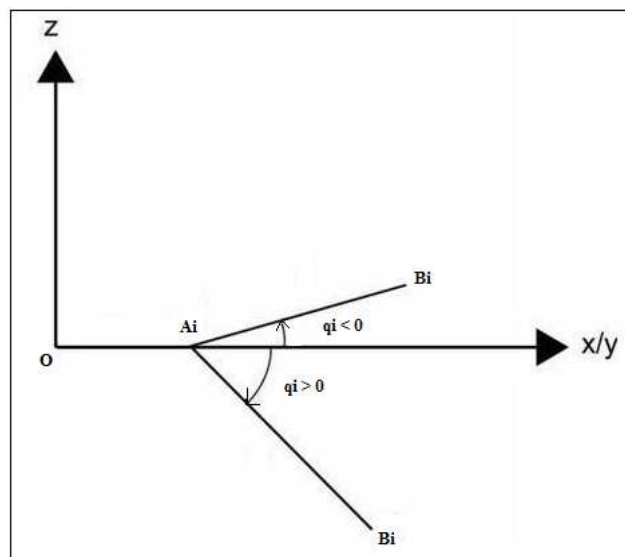


Figura 1.10: convenzione dei segni per le variabili di giunto.

La figura 1.11 mostra la convenzione adottata per quanto riguarda la piattaforma mobile; una rotazione in senso antiorario è legata a un valore di  $\theta_0$  positivo, una rotazione in senso orario, viceversa, a un valore di  $\theta_0$  negativo.

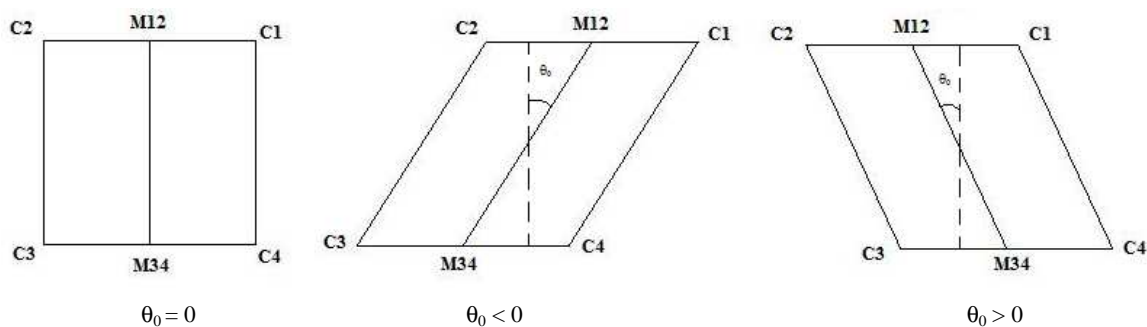


Figura 1.11: convenzione sui segni della rotazione della piattaforma mobile.



## 1.4 Cinematica di posizione

L'analisi cinematica di posizione di un manipolatore studia la disposizione dei *link* che compongono il robot in base ai vincoli e agli accoppiamenti con i quali essi sono collegati, senza considerare le forze e coppie che compaiono durante una movimentazione.

Si parla di analisi cinematica di posizione diretta quando, note le variabili di giunto  $q_i$  e, quindi, le posizioni degli attuatori, si determinano le coordinate cartesiane dell'*end effector* (valori di  $x_0$ ,  $y_0$  e  $z_0$ ) e la sua posizione angolare ( $\theta_0$ ). Si parla di analisi cinematica di posizione inversa, all'opposto, quando si determinano le posizioni dei giunti attuati, a partire dalle coordinate dell'*end effector*.

A differenza dei manipolatori seriali, l'analisi cinematica diretta di una PKM presenta diverse difficoltà e un modello matematico la cui risoluzione può avvenire solo per via numerico-iterativa; l'analisi cinematica inversa, invece, è di norma più semplice e può essere spesso risolta, come nel caso dell'Adept Quattro™, per via analitico-geometrica ([2], [3], [7]).

Si indicheranno con  $\mathbf{q}$  il vettore delle variabili di giunto e con  $\mathbf{x}$  quello delle coordinate libere che determinano posizione e orientazione dell'*end effector*; entrambi hanno dimensione  $4 \times 1$ .

La risoluzione della cinematica di posizione inizia con la definizione di una funzione  $\mathbf{F}$   $n$ -dimensionale, dove  $n$  è il numero di gradi di libertà del manipolatore, ([1],[7],[10]). Le equazioni di congruenza che essa contiene dipendono dagli elementi di  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{x}$ ; ciascuna delle  $n$  equazioni è riferita a un singolo braccio ed è risolvibile in modo indipendente dalle altre.

$$\{\mathbf{q}\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} \quad \{\mathbf{x}\} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ \theta_0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (1.1)$$

Nella definizione dell'equazione (1.1),  $\mathbf{0}$  indica il vettore nullo  $n$ -dimensionale.

N.B.: come prima approssimazione, i valori del vettore  $\mathbf{x}$  sono riferiti al punto centrale della piattaforma mobile e non alle reali coordinate dell'organo terminale.

### 1.4.1 Cinematica di posizione inversa

Si conoscano le coordinate  $\mathbf{x}$  dell'organo terminale; lo scopo dell'analisi cinematica di posizione inversa è quello di determinare le variabili di giunto attraverso le equazioni di chiusura di (1.1). Data la struttura dell'Adept Quattro™, è possibile analizzare singolarmente ciascun braccio. Nota, infatti, la posizione della piattaforma, si risale alla singola variabile di giunto, cercando l'intersezione tra l'arco di circonferenza rappresentante le possibili posizioni dell'estremità non fissata a telaio del braccio superiore e il luogo dei punti raggiungibili dall'estremità non fissata alla piattaforma del braccio inferiore (figura 1.12).

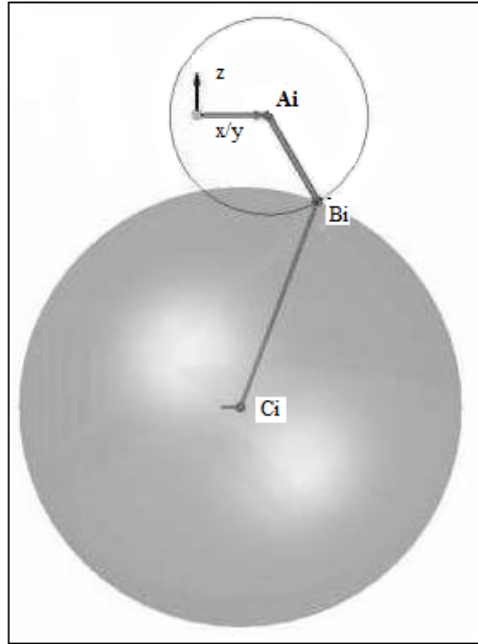


Figura 1.12: determinazione del punto  $B_i$  come intersezione dei bracci superiore e inferiore.

Dal punto di vista analitico, per ogni catena cinematica si dovrà risolvere un sistema della forma seguente:

$$\begin{cases} (x_{A_i} - x_{B_i})^2 + (y_{A_i} - y_{B_i})^2 + (z_{A_i} - z_{B_i})^2 = b^2 \\ (x_{C_i} - x_{B_i})^2 + (y_{C_i} - y_{B_i})^2 + (z_{C_i} - z_{B_i})^2 = c^2 \end{cases} \quad (1.2)$$

La prima equazione si riduce all'espressione di una circonferenza perché, secondo il braccio che si considera, le coordinate  $x$  o  $y$  di  $A_i$  e  $B_i$  sono nulle.

Si procede con lo svolgimento del sistema (1.2) per le quattro catene cinematiche del robot che si sta analizzando.

### BRACCIO 1

La manovella del braccio 1 si muove nel piano  $x$ - $z$ , per cui il sistema risultante è il seguente:

$$\begin{cases} (x_{A_1} - x_{B_1})^2 + (-z_{B_1})^2 = b^2 \\ (x_{C_1} - x_{B_1})^2 + (y_{C_1})^2 + (z_{C_1} - z_{B_1})^2 = c^2 \end{cases} \quad (1.3)$$

Come incognite del sistema si considerano le coordinate di  $B_1$  (uniche dipendenti direttamente da  $q_1$ ), tenendo conto che  $y_{B_1}$  è sempre nulla; una volta determinate, si potrà risalire al valore della variabile di giunto corrispondente.

Sottraendo la prima equazione di (1.3) dalla seconda si ottiene:

$$x_{C_1}^2 - x_{A_1}^2 - 2x_{B_1}(x_{C_1} - x_{A_1}) + y_{C_1}^2 + z_{C_1}^2 - 2z_{C_1}z_{B_1} - c^2 + b^2 = 0,$$

da cui è possibile ricavare il valore di  $z_{B1}$  in funzione di  $x_{B1}$ :

$$z_{B1} = \frac{s_1 - 2x_{B1}f_1}{2z_{C1}} \quad \text{con} \quad \begin{cases} s_1 = x_{C1}^2 - x_{A1}^2 + y_{C1}^2 + z_{C1}^2 - c^2 + b^2 \\ f_1 = x_{C1} - x_{A1} \end{cases} \quad (1.4)$$

Si sostituisce, ora, il valore trovato alla prima relazione del sistema (1.3), ottenendo un'equazione di secondo grado nella variabile  $x_{B1}$ , le cui soluzioni sono:

$$x_{B1,2} = \frac{\left( z_{C1}^2 x_{A1} + \frac{s_1 f_1}{2} \right) \pm \sqrt{RAD_1}}{z_{C1}^2 + f_1^2} \quad (1.5)$$

$$\text{con} \quad RAD_1 = \left( z_{C1}^2 x_{A1} + \frac{s_1 f_1}{2} \right)^2 - (z_{C1}^2 + f_1^2) \cdot \left( z_{C1}^2 (x_{A1}^2 - b^2) + \frac{s_1^2}{4} \right). \quad (1.6)$$

Se  $RAD_1$  assume valore negativo, il manipolatore si trova in una condizione di singolarità per cui la posizione dell'organo terminale indicata dalle coordinate  $\mathbf{x}$  non è raggiungibile. Nel caso opposto, si troveranno due valori per  $x_{B1}$ : come si può vedere dalla figura (1.12), la scelta corretta è quella di tenere il valore di  $x_{B1}$  maggiore.

Si ricavano, ora, coseno e seno dell'angolo  $q_1$  eguagliando i valori ricavati all'espressione generale delle coordinate di  $B_1$ , riportata nel paragrafo 1.3.2. Applicando la funzione arcotangente si ottiene il risultato della variabile di giunto:

$$\begin{cases} x_{B1} = a + b \cos(q_1) \\ z_{B1} = -b \sin(q_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos(q_1) = \frac{x_{B1} - a}{b} \\ \sin(q_1) = -\frac{z_{B1}}{b} \end{cases} \Rightarrow q_1 = \text{atg} 2(\sin(q_1), \cos(q_1)). \quad (1.7)$$

## BRACCIO 2

La manovella del braccio 2 si muove nel piano  $y$ - $z$ , per cui il sistema risultante è il seguente:

$$\begin{cases} (y_{A2} - y_{B2})^2 + (-z_{B2})^2 = b^2 \\ (x_{C2})^2 + (y_{C2} - y_{B2})^2 + (z_{C2} - z_{B2})^2 = c^2 \end{cases} \quad (1.8)$$

Come incognite del sistema si considerano le coordinate di  $B_2$  (uniche dipendenti direttamente da  $q_2$ ), tenendo conto che  $x_{B2}$  è sempre nulla; una volta determinate, si potrà risalire al valore della variabile di giunto corrispondente.

Sottraendo la prima equazione di (1.8) dalla seconda si ottiene:

$$x_{C2}^2 - y_{A2}^2 - 2y_{B2}(y_{C2} - y_{A2}) + y_{C2}^2 + z_{C2}^2 - 2z_{C2}z_{B2} - c^2 + b^2 = 0,$$

da cui è possibile ricavare il valore di  $z_{B2}$  in funzione di  $y_{B2}$ :

$$z_{B2} = \frac{s_2 - 2y_{B2}f_2}{2z_{C2}} \quad \text{con} \quad \begin{cases} s_2 = x_{C2}^2 - y_{A2}^2 + y_{C2}^2 + z_{C2}^2 - c^2 + b^2 \\ f_2 = y_{C2} - y_{A2} \end{cases} \quad (1.9).$$

Si sostituisce, ora, il valore trovato alla prima relazione del sistema (1.8), ottenendo un'equazione di secondo grado nella variabile  $y_{B2}$ , le cui soluzioni sono:

$$y_{B2,1,2} = \frac{\left( z_{C2}^2 y_{A2} + \frac{s_2 f_2}{2} \right) \pm \sqrt{RAD_2}}{z_{C2}^2 + f_2^2} \quad (1.10)$$

$$\text{con} \quad RAD_2 = \left( z_{C2}^2 y_{A2} + \frac{s_2 f_2}{2} \right)^2 - (z_{C2}^2 + f_2^2) \cdot \left( z_{C2}^2 (y_{A2}^2 - b^2) + \frac{s_2^2}{4} \right). \quad (1.11)$$

Se  $RAD_2$  assume valore negativo, il manipolatore si trova in una condizione di singolarità per cui la posizione dell'organo terminale indicata dalle coordinate  $\mathbf{x}$  non è raggiungibile. Nel caso opposto, si troveranno due valori per  $y_{B2}$ : la scelta corretta è quella di tenere il valore di  $y_{B2}$  maggiore.

Si ricavano, ora, coseno e seno dell'angolo  $q_2$  eguagliando i valori ricavati all'espressione generale delle coordinate di  $B_2$  riportata nel paragrafo 1.3.2. Applicando la funzione arcotangente si ottiene il risultato della variabile di giunto:

$$\begin{cases} y_{B2} = a + b \cos(q_2) \\ z_{B2} = -b \sin(q_2) \end{cases} \begin{cases} \cos(q_2) = \frac{y_{B2} - a}{b} \\ \sin(q_2) = -\frac{z_{B2}}{b} \end{cases} \Rightarrow q_2 = \text{atg} 2(\sin(q_2), \cos(q_2)). \quad (1.12)$$

### BRACCIO 3

Il ragionamento e il procedimento da seguire per trovare il valore di  $q_3$  sono gli stessi riportati per il braccio 1, con l'unica differenza che, nella scelta tra i due valori di  $x_{B3}$ , si opterà per quello con il numeratore minore, data la simmetria. Determinati  $x_{B3}$  e  $z_{B3}$ , si ricavano coseno e seno dell'angolo  $q_3$  eguagliando i valori ottenuti all'espressione generale delle coordinate di  $B_3$ , riportata nel paragrafo 1.3.2. Applicando la funzione arcotangente si ottiene il risultato della variabile di giunto.

$$\begin{cases} x_{B3} = -(a + b \cos(q_3)) \\ z_{B3} = -b \sin(q_3) \end{cases} \begin{cases} \cos(q_3) = \frac{-x_{B3} - a}{b} \\ \sin(q_3) = -\frac{z_{B3}}{b} \end{cases} \Rightarrow q_3 = \text{atg} 2(\sin(q_3), \cos(q_3)). \quad (1.13)$$

### BRACCIO 4

Il ragionamento e il procedimento da seguire per trovare il valore di  $q_4$  sono gli stessi riportati per il braccio 2, con l'unica differenza che, nella scelta tra i due valori di  $y_{B4}$ , si opterà per quello con il numeratore minore, data la simmetria. Determinati  $y_{B4}$  e  $z_{B4}$ , si ricavano coseno e seno dell'angolo

$q_4$  eguagliando i valori ottenuti all'espressione generale delle coordinate di  $B_4$ , riportata nel paragrafo 1.3.2. Applicando la funzione arcotangente si ottiene il risultato della variabile di giunto.

$$\begin{cases} y_{B_4} = -(a + b \cos(q_4)) \\ z_{B_4} = -b \sin(q_4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos(q_4) = \frac{-y_{B_4} - a}{b} \\ \sin(q_4) = -\frac{z_{B_4}}{b} \end{cases} \Rightarrow q_4 = \text{atg2}(\sin(q_4), \cos(q_4)). \quad (1.14)$$

Il problema cinematico inverso di posizione ha soluzione se e solo se i valori di  $\text{RAD}_1$ ,  $\text{RAD}_2$ ,  $\text{RAD}_3$  e  $\text{RAD}_4$  sono contemporaneamente maggiori o uguali a zero, altrimenti la posizione indicata per l'organo terminale si trova fuori dallo spazio raggiungibile, dando luogo a una condizione di singolarità.

## 1.4.2 Cinematica di posizione diretta

Sia noto il vettore delle variabili di giunto  $\mathbf{q}$ ; lo scopo dell'analisi cinematica di posizione diretta è quello di determinare le coordinate di posizione e orientazione dell'*end effector* attraverso le equazioni di chiusura di (1.1). Per un robot parallelo, la risoluzione di questo tipo di problema presenta, nella maggior parte dei casi e così anche per il Quattro<sup>TM</sup>, numerose difficoltà legate alla non linearità delle relazioni inverse ottenibili dal sistema (1.1). La via analitica non è sempre banale o percorribile e potrebbero esistere soluzioni multiple a parità di vettore  $\mathbf{q}$  ([1], [7]); il procedimento da seguire è quello di tipo numerico o iterativo [3]. Questo non si sposa, tra le altre cose, con la necessità del sistema di controllo *real-time* di effettuare i propri calcoli in tempi con scadenze ristrette.

Sono, comunque, presenti in letteratura diversi approcci per la risoluzione della cinematica di posizione diretta, [7]. Per quanto riguarda questa tesi, l'analisi diretta non è trattata poiché esula dagli obiettivi finali dell'elaborato.

## 1.5 Termini correttivi del modello geometrico

Il modello geometrico descritto nel paragrafo 1.3.2 e utilizzato per la cinematica di posizione presenta alcune semplificazioni rispetto alla reale struttura dell'Adept Quattro<sup>TM</sup>.

Si sono introdotti, quindi, dei termini correttivi che avvicinino il più possibile il modello alla realtà senza modificare i calcoli svolti fino a questo punto.

### 1. VARIABILI DI GIUNTO

Il *link* 2 dell' $i$ -esimo braccio non è collegato al centro del rispettivo *link* 1, ma alla parte inferiore dell'estremità indicata con il nome  $B_i$  (figura 1.5). Nei calcoli effettuati, si è tenuto conto di questo particolare. Nella prima equazione di (1.2), infatti, il raggio della circonferenza considerata è posto pari a  $b$ , valore riportato nel paragrafo 1.3.1 e ricavato come:

$$b = \sqrt{b_r^2 + r_b^2},$$

dove  $b_r$  rappresenta la lunghezza del *link* cilindrico e  $r_b$  il suo raggio. Il valore di  $q_i$  che si ottiene è riferito all'inclinazione rispetto al piano  $x$ - $y$  del segmento che unisce  $A_i$  all'estremità superiore del

*link 2* e differisce, di una quantità chiamata *alp*, dal valore che assume l'angolo considerando l'inclinazione dell'asse della manovella<sup>4</sup>.

La figura 1.13 rappresenta graficamente la correzione effettuata sul modello geometrico.

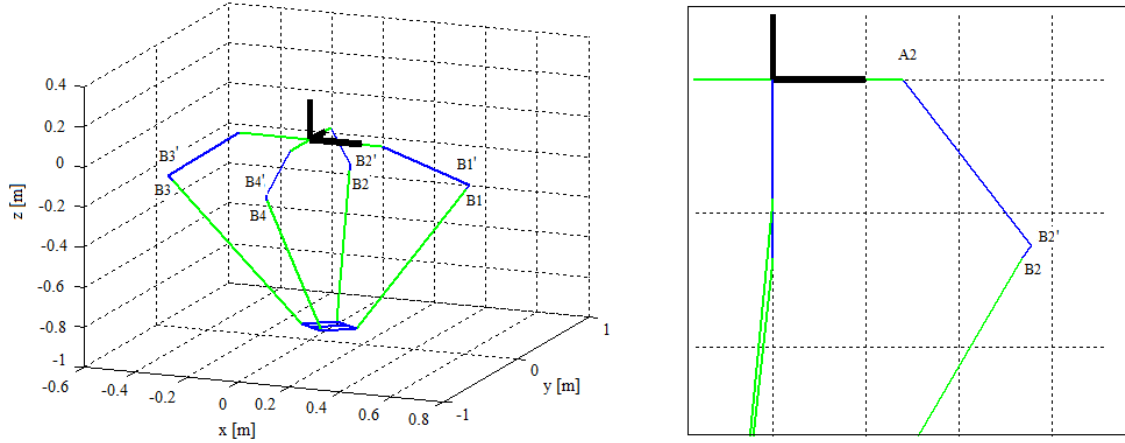


Figura 1.13: modello geometrico con correzione riguardante il punto di collegamento del *link 2* e ingrandimento riferito al braccio 2.

Il valore di *alp* si può ricavare da semplici relazioni goniometriche nel modo seguente:

$$\begin{cases} br = b \cdot \cos(alp) \\ r_b = b \cdot \sin(alp) \end{cases} \Rightarrow tg(alp) = \frac{r_b}{br} \Rightarrow alp = atg\left(\frac{r_b}{br}\right) = 4,3276^\circ.$$

Il ragionamento sopra riportato è valido sia quando l'angolo  $q_i$  è positivo (verso il basso), sia quando assume valore negativo (verso l'alto). Di conseguenza, i valori dei reali angoli d'inclinazione della manovella sono:

$$q_{r1} = q_1 - alp; \quad q_{r2} = q_2 - alp; \quad q_{r3} = q_3 - alp; \quad q_{r4} = q_4 - alp.$$

Si determinano, inoltre, i punti  $B_1'$ ,  $B_2'$ ,  $B_3'$  e  $B_4'$  corrispondenti al centro della sezione cilindrica dell'estremità non vincolata a telaio del *link 1*:

$$\begin{aligned} B_1' &= (a + br \cos(q_{r1}) \quad 0 \quad -br \sin(q_{r1}))^T \\ B_2' &= (0 \quad a + br \cos(q_{r2}) \quad -br \sin(q_{r2}))^T \\ B_3' &= (-(a + br \cos(q_{r3})) \quad 0 \quad -br \sin(q_{r3}))^T \\ B_4' &= (0 \quad -(a + br \cos(q_{r4})) \quad -br \sin(q_{r4}))^T. \end{aligned}$$

<sup>4</sup> Il sistema di controllo del manipolatore considera come variabili di giunto gli angoli  $q_i$  già descritti; si è verificato, infatti, che la posizione con inclinazione nulla è quella in cui la congiungente tra il punto di rotazione della manovella  $A_i$  e il punto  $B_i$  è orizzontale.

## 2. SISTEMA DI RIFERIMENTO ASSOLUTO ADEPT

La ditta produttrice del robot colloca l'origine del sistema di riferimento assoluto a telaio in una posizione più alta di  $105 \text{ mm}$  rispetto a quella considerata fino adesso. Poiché le reali coordinate dell'organo terminale sono espresse in questo sistema di riferimento, è bene modificare anche nel modello la posizione della terna assoluta. Se si considera, poi, che l'organo terminale è posto  $85 \text{ mm}$  più in basso della quota della piattaforma, il tutto si può tradurre in una traslazione complessiva verso il basso di una quantità, chiamata *base*, pari a  $190 \text{ mm}$ . I punti identificati in precedenza sono ora ridefiniti:

$$O = (0 \quad 0 \quad -base)^T$$

$$A_1 = (a \quad 0 \quad -base)^T \quad B_1 = (a + b \cos(q_1) \quad 0 \quad -b \sin(q_1) - base)^T$$

$$A_2 = (0 \quad a \quad -base)^T \quad B_2 = (0 \quad a + b \cos(q_2) \quad -b \sin(q_2) - base)^T$$

$$A_3 = (-a \quad 0 \quad -base)^T \quad B_3 = (-(a + b \cos(q_3)) \quad 0 \quad -b \sin(q_3) - base)^T$$

$$A_4 = (0 \quad -a \quad -base)^T \quad B_4 = (0 \quad -(a + b \cos(q_4)) \quad -b \sin(q_4) - base)^T$$

$$C_1 = \left( x_0 + \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) + \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad y_0 + \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) - \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad z_0 - base \right)^T$$

$$C_2 = \left( x_0 + \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) - \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad y_0 + \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) + \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad z_0 - base \right)^T$$

$$C_3 = \left( x_0 - \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) - \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad y_0 - \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) + \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad z_0 - base \right)^T$$

$$C_4 = \left( x_0 - \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) + \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad y_0 - \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) - \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad z_0 - base \right)^T$$

$$M_{12} = \left( x_0 + \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \quad y_0 + \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \quad z_0 - base \right)^T$$

$$M_{34} = \left( x_0 - \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \quad y_0 - \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \quad z_0 - base \right)^T$$

$$B_1' = (a + br \cos(q_{r1}) \quad 0 \quad -br \sin(q_{r1}) - base)^T$$

$$B_2' = (0 \quad a + br \cos(q_{r2}) \quad -br \sin(q_{r2}) - base)^T$$

$$B_3' = (-(a + br \cos(q_{r3})) \quad 0 \quad -br \sin(q_{r3}) - base)^T$$

$$B_4' = (0 \quad -(a + br \cos(q_{r4})) \quad -br \sin(q_{r4}) - base)^T.$$

I calcoli riguardanti la cinematica sono ancora validi, a patto che  $z_0$  continui a rappresentare la distanza dell'organo terminale da O, appena ridefinito. La figura 1.14 mostra la nuova rappresentazione del modello.

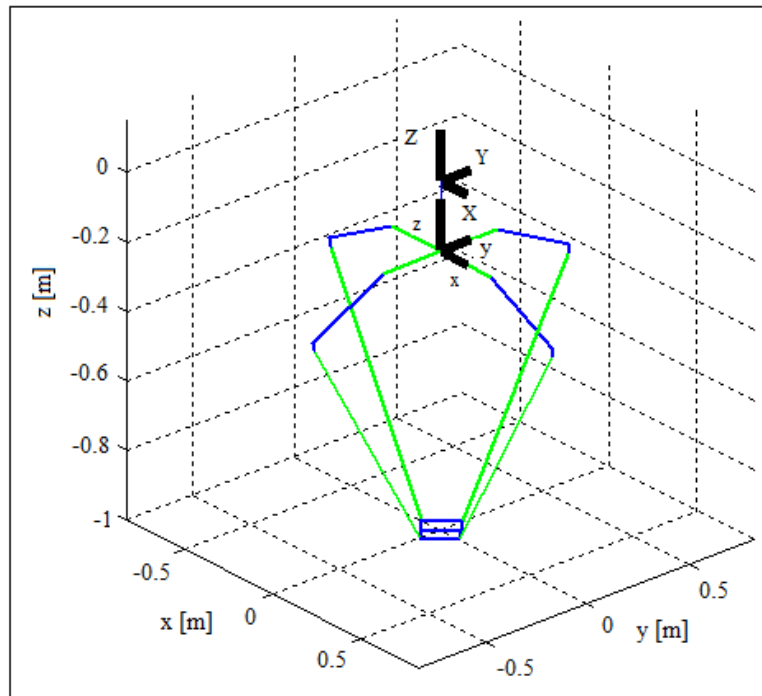


Figura 1.14: inserimento del sistema assoluto Adept nel modello geometrico.

Per evitare problemi d'interpretazione, si decide di indicare con  $z$  la distanza dell'*end effector* dall'origine del nuovo sistema di riferimento, in modo tale che valga la relazione seguente (i valori di  $z$  e  $z_0$  sono sempre negativi):

$$z_0 = z + base$$

### 3. END EFFECTOR

Come anticipato in precedenza, il centro della piattaforma mobile non coincide con il punto in cui viene collocato l'*end effector*. Il meccanismo di rotazione introduce, infatti, un *offset* che decentra la posizione dell'organo terminale di 75 mm, facendolo coincidere con  $M_{34}$ .

Chiamando  $x$  e  $y$  i valori della reale posizione dell'*end effector* e continuando a indicare con  $x_0$  e  $y_0$  le coordinate del centro della piattaforma, la risoluzione del problema cinematico è ancora valida. Si stabiliscono, quindi, le seguenti relazioni:

$$x_0 = x + offset \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right)$$

$$y_0 = y + offset \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right)$$

dove *offset* vale 75 mm.

Considerando, poi, che l'*end effector* che sarà collegato alla piattaforma presenta una certa lunghezza che influisce sulla coordinata  $z$ , si può stabilire la seguente relazione:



$$z_0 = z + base + ee,$$

dove  $ee$  rappresenta la lunghezza dell'*end effector*.

E' necessario considerare questa correzione perché il linguaggio di programmazione del manipolatore (*Adept V+*) prevede un comando (`TOOL TRANS`) che trasla automaticamente lo spazio di lavoro del manipolatore in funzione della lunghezza dell'organo terminale.

Nella figura 1.15, si riporta la rappresentazione del modello geometrico dell'*Adept Quattro*<sup>TM</sup>, comprendente le tre correzioni descritte.

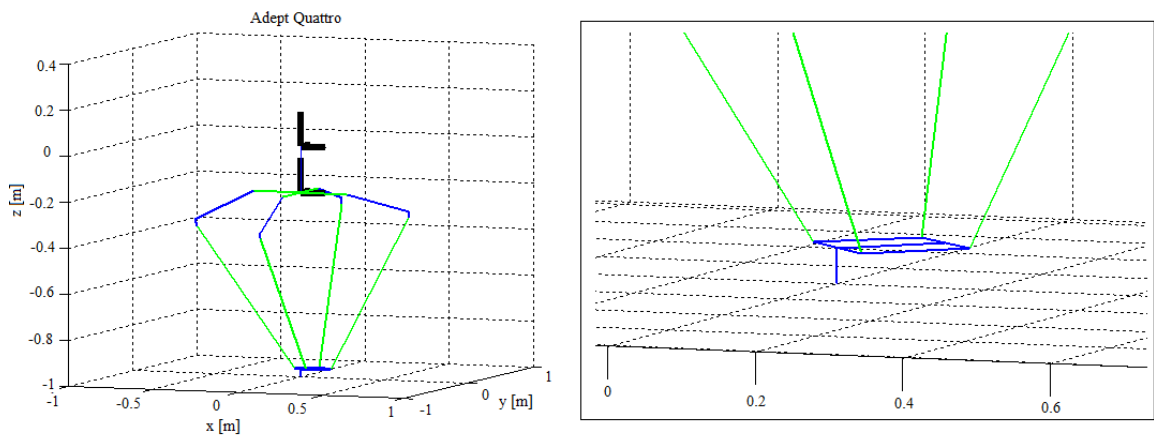


Figura 1.15: nuovo modello geometrico comprendente le tre correzioni e particolare dell'*end effector*.



### MATRICE JACOBIANA

La matrice Jacobiana (o Jacobiano) di un manipolatore è composta da termini che variano in funzione della configurazione assunta dal robot. Questi elementi rappresentano i rapporti di velocità che legano linearmente le derivate temporali delle coordinate generalizzate dell'*end effector* con quelle delle variabili di giunto, secondo la relazione seguente (il puntino sopra la variabile indica la derivata temporale):

$$\{\dot{x}\} = J \cdot \{\dot{q}\} \quad (2.1)$$

dove

$$\{\dot{x}\} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \\ \dot{\theta}_0 \end{Bmatrix} \quad \{\dot{q}\} = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{Bmatrix}$$

Ai fini di ottenere le velocità dei giunti attivi e delle coordinate libere, è indifferente utilizzare i valori definiti in (1.1) o quelli ottenuti a seguito dell'introduzione dei termini correttivi; l'operazione di derivazione, infatti, uniforma i valori che differiscono solo per delle costanti (come spiegato in seguito, si considererà un valore di rotazione sempre nullo).

Nella sua forma generale, la matrice Jacobiana ha dimensione  $6 \times 6$  e le coordinate di velocità dell'*end effector* sono composte dalle velocità lineari lungo i tre assi cartesiani e da quelle angolari attorno a essi. Se un manipolatore presenta meno di 6 gradi di libertà, la Jacobiana può essere espressa in forma ridotta e, nel caso di manipolatore non ridondante, rimarrà comunque quadrata. I gradi di libertà dell'*end effector* dell'Adept Quattro™ sono 4, così come le variabili di giunto, per cui la matrice  $J$  ridotta avrà dimensione  $4 \times 4$ .

Si possono individuare due diversi tipi di Jacobiano, secondo il modo in cui sono espresse le velocità angolari dell'*end effector*: quello analitico e quello geometrico. Si parla di Jacobiano analitico, quando le tre velocità angolari del vettore  $\mathbf{x}$  sono le derivate degli angoli di orientazione dell'organo terminale, espressi mediante una rappresentazione minima. Si parla di Jacobiano geometrico, invece, se gli ultimi tre termini di  $\mathbf{x}$  rappresentano le velocità angolari riferite all'*end effector*, in generale differenti dalle derivate degli angoli di orientazione. Nel caso dell'Adept Quattro™, poiché la piattaforma può muoversi solo parallelamente al piano di base, la velocità angolare dell'unica rotazione permessa coincide con la derivata dell'angolo di rotazione stesso.

#### 2.1 Determinazione della matrice Jacobiana

Per la determinazione della matrice Jacobiana, si possono utilizzare due metodi:

- derivare rispetto al tempo le relazioni di posizione;
- utilizzare le proprietà base per la determinazione delle velocità di un corpo rigido su ogni *link* del manipolatore, [2].

Nel paragrafo 2.3, dove si determinerà la Jacobiana di Quattro™, sarà utilizzato il primo metodo. Per individuare i singoli termini dello Jacobiano, si calcola la derivata temporale delle equazioni di chiusura (1.1) del manipolatore in analisi. Si ottiene la seguente relazione, ([1], [2], [3]):

$$Jx \cdot \{\dot{x}\} = Jq \cdot \{\dot{q}\}, \quad \text{dove} \quad Jx = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad \text{e} \quad Jq = -\frac{\partial f_i}{\partial q_k}. \quad (2.2)$$

Le due matrici  $Jx$  e  $Jq$  sono quadrate di dimensione  $n$ , pari al numero di gradi di libertà;  $Jx$  si ottiene derivando la (1.1) rispetto agli elementi del vettore  $\mathbf{x}$ , mentre  $Jq$  si ottiene facendo lo stesso con il vettore  $\mathbf{q}$ . Seguono, in modo immediato, le definizioni della matrice Jacobiana e della sua inversa:

$$J = Jx^{-1} \cdot Jq = \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \quad \text{e} \quad J^{-1} = Jq^{-1} \cdot Jx = \frac{\partial q_k}{\partial x_j}. \quad (2.3)$$

Nel caso di manipolatore seriale, la matrice Jacobiana dipende solo dalle coordinate libere, mentre, per quanto concerne i robot paralleli, la matrice  $J$  è funzione sia delle coordinate di posizione e orientazione dell'*end effector*  $\mathbf{x}$ , sia delle variabili di giunto  $\mathbf{q}$ , [13].

## 2.2 A cosa serve la matrice Jacobiana

La matrice Jacobiana di un manipolatore permette di semplificare alcuni problemi di analisi per quanto riguarda la cinematica e la dinamica. Di seguito sono riportate le sue funzioni principali.

### 1. RISOLUZIONE DELL'ANALISI CINEMATICA DI VELOCITÀ

La matrice Jacobiana rappresenta il legame diretto tra il vettore velocità dell'organo terminale e il vettore velocità delle variabili di giunto. Sono fondamentali la relazione (2.1) e la sua inversa, definita quando  $J$  è invertibile:

$$\{\dot{q}\} = J^{-1} \cdot \{\dot{x}\}. \quad (2.4)$$

### 2. RISOLUZIONE DELL'ANALISI CINEMATICA DI ACCELERAZIONE

Nel paragrafo 2.5 si mostra come la matrice Jacobiana e la sua derivata temporale giochino un ruolo fondamentale nella risoluzione del problema di accelerazione diretto e inverso.

### 3. DETERMINAZIONE DELLE CONFIGURAZIONI SINGOLARI

Una configurazione singolare è una posizione assunta dal manipolatore cui corrisponde la perdita di un grado di libertà: il robot non può essere completamente controllato o perché l'organo terminale non può più compiere liberamente tutti i movimenti oppure perché la sua rigidità decresce drasticamente, [3]. In corrispondenza di queste singolarità, inoltre, può capitare che, per portare a

termine anche un piccolo movimento, i motori debbano fornire elevate coppie e velocità, [33].  
 Le condizioni di singolarità, in generale, corrispondono a quelle pose del robot per le quali il determinante della Jacobiana è nullo (in questa condizione  $J$  è singolare e, quindi, non invertibile).  
 In letteratura, i tipi di singolarità sono classificati essenzialmente in due categorie: singolarità seriale e parallela. Queste condizioni possono essere analizzate analiticamente considerando le matrici  $Jq$  e  $Jx$  definite prima. Si parla di singolarità parallela o della cinematica diretta se si annulla il determinante di  $Jx$ , di singolarità seriale o della cinematica inversa se si annulla il determinante di  $Jq$ , [10].

Per quanto riguarda il manipolatore in analisi, è importante notare come le zone di singolarità siano presenti solamente nei pressi della frontiera dello spazio raggiungibile e si possano evitare cercando di non lavorare in punti estremi.

#### 4. EQUILIBRIO STATICO DEL SISTEMA

La matrice Jacobiana può essere utilizzata anche in dinamica, per stabilire le equazioni di equilibrio statico del manipolatore. La trasposta dello Jacobiano, infatti, lega direttamente le coppie dei motori ( $\tau$ ) con le forze che si vogliono generare sull'organo terminale ( $F$ ):

$$\{\tau\} = J^T \cdot \{F\}. \quad (2.5)$$

La dimostrazione di quest'uguaglianza deriva direttamente dal principio dei lavori virtuali<sup>5</sup>.

### 2.3 Matrice Jacobiana dell'Adept Quattro™

Per determinare gli elementi della matrice Jacobiana di Quattro™, si calcolano le derivate delle equazioni di posizione di ciascun braccio, in particolare della seconda equazione del sistema (1.2) poiché in essa compaiono termini in funzione sia delle coordinate libere sia delle variabili di giunto. Si riportano di seguito le equazioni di chiusura considerate:

BRACCIO 1:

$$\left( x_0 + \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) + \frac{d}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - (a + b \cos(q_1)) \right)^2 + \left( y_0 + \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) - \frac{d}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + (z_0 + b \sin(q_1))^2 = c^2 \quad (2.6)$$

BRACCIO 2:

$$\left( x_0 + \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) - \frac{d}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left( y_0 + \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) + \frac{d}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - (a + b \cos(q_2)) \right)^2 + (z_0 + b \sin(q_2))^2 = c^2 \quad (2.7)$$

---

<sup>5</sup> *Dimostrazione di (2.5):* dal principio dei lavori virtuali  $\{\tau\}^T \cdot \{dq\} = \{F\}^T \cdot \{dx\}$ , dove  $d\theta$  e  $dx$  rappresentano rispettivamente gli spostamenti infinitesimi delle variabili di giunto e dell'organo terminale. Da  $\{dx/dt\} = J \cdot \{dq/dt\}$ , è immediato ottenere  $\{dx\} = J \cdot \{dq\}$ . Sostituendo questo valore di  $dx$  alla prima equazione, semplificando  $dq$  e trasponendo, poi, entrambi i membri, si ottiene l'espressione (2.5).

**BRACCIO 3:**

$$\left( x_0 - \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) - \frac{d}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + (a + b \cos(q_3)) \right)^2 + \left( y_0 - \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) + \frac{d}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + (z_0 + b \sin(q_3))^2 = c^2 \quad (2.8)$$

**BRACCIO 4:**

$$\left( x_0 - \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) + \frac{d}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left( y_0 - \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) - \frac{d}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + (a + b \cos(q_4)) \right)^2 + (z_0 + b \sin(q_4))^2 = c^2 \quad (2.9)$$

N. B.: nelle equazioni (2.6), (2.7), (2.8) e (2.9) si sono mantenuti i valori del modello semplificato senza le correzioni riportate nel paragrafo 1.5. Il risultato che si ottiene è lo stesso di quello che si avrebbe utilizzando i valori corretti perché, in entrambi i casi, le relazioni imposte sono analiticamente corrette.

### 2.3.1 Determinazione della matrice $Jx$

La matrice  $Jx$  si ricava derivando le quattro equazioni di chiusura rispetto a  $x_0$  (prima colonna), rispetto a  $y_0$  (seconda colonna), rispetto a  $z_0$  (terza colonna) e rispetto a  $\theta_0$  (quarta colonna). Di seguito, sono riportati i termini della matrice  $Jx$ , ciascuno caratterizzato da due pedici indicanti la posizione (il primo individua la riga, il secondo la colonna):

$$Jx = [ jx_{ij} ]$$

- RIGA 1:

$$jx_{11} = 2 \left( x_0 + \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) + \frac{d}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - (a + b \cos(q_1)) \right),$$

$$jx_{12} = 2 \left( y_0 + \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) - \frac{d}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

$$jx_{13} = 2(z_0 + b \sin(q_1)),$$

$$jx_{14} = d \left( -x_0 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) + y_0 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) + (a + b \cos(q_1)) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) - \frac{d}{2} \cos(\theta_0) \right);$$

- RIGA 2:

$$jx_{21} = 2 \left( x_0 + \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) - \frac{d}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

$$jx_{22} = 2 \left( y_0 + \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) + \frac{d}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - (a + b \cos(q_2)) \right),$$

$$jx_{23} = 2(z_0 + b \sin(q_2)),$$

$$jx_{24} = d \left( -x_0 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) + y_0 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) - (a + b \cos(q_2)) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) + \frac{d}{2} \cos(\theta_0) \right);$$

- RIGA 3:

$$j\dot{x}_{31} = 2 \left( x_0 - \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) - \frac{d}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + (a + b \cos(q_3)) \right),$$

$$j\dot{x}_{32} = 2 \left( y_0 - \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) + \frac{d}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

$$j\dot{x}_{33} = 2(z_0 + b \sin(q_3)),$$

$$j\dot{x}_{34} = d \left( x_0 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) - y_0 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) + (a + b \cos(q_3)) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) - \frac{d}{2} \cos(\theta_0) \right);$$

- RIGA 4:

$$j\dot{x}_{41} = 2 \left( x_0 - \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) + \frac{d}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

$$j\dot{x}_{42} = 2 \left( y_0 - \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) - \frac{d}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + (a + b \cos(q_4)) \right),$$

$$j\dot{x}_{43} = 2(z_0 + b \sin(q_4)),$$

$$j\dot{x}_{44} = d \left( x_0 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) - y_0 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) - (a + b \cos(q_4)) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) + \frac{d}{2} \cos(\theta_0) \right).$$

### 2.3.2 Determinazione della matrice $Jq$

I termini della matrice  $Jq$  si ottengono derivando le equazioni di chiusura rispetto alle variabili di giunto  $q_i$ . Ciascun braccio dipende direttamente solo dalla variabile di giunto a esso associata; le derivate rispetto alle altre variabili sono, quindi, nulle. La matrice risultante è, allora, diagonale:

$$Jq = \text{diag}(jq_1, jq_2, jq_3, jq_4)$$

dove:

$$jq_1 = -2b \left( x_0 \sin(q_1) + z_0 \cos(q_1) - a \sin(q_1) + \frac{d}{2} \sin(q_1) \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \right) \right);$$

$$jq_2 = -2b \left( y_0 \sin(q_2) + z_0 \cos(q_2) - a \sin(q_2) + \frac{d}{2} \sin(q_2) \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \right) \right);$$

$$jq_3 = -2b \left( -x_0 \sin(q_3) + z_0 \cos(q_3) - a \sin(q_3) + \frac{d}{2} \sin(q_3) \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \right) \right);$$

$$jq_4 = -2b \left( -y_0 \sin(q_4) + z_0 \cos(q_4) - a \sin(q_4) + \frac{d}{2} \sin(q_4) \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \right) \right).$$

### 2.4 Analisi cinematica di velocità

Nota la configurazione assunta dal manipolatore in termini di variabili di giunto e di coordinate

libere dell'organo terminale e note anche le velocità dei *link* attivi, è possibile risalire ai valori di velocità dell'*end effector* tramite la relazione (2.1). Quello appena descritto rappresenta la risoluzione del problema di velocità diretto. Il problema di velocità inverso, invece, si basa sulla conoscenza della cinematica di posizione e delle velocità dell'organo terminale, per ricavare le velocità dei giunti tramite la relazione inversa (2.4).

## 2.5 Analisi cinematica di accelerazione

Per ottenere le equazioni che regolano la cinematica di accelerazione, è necessario derivare rispetto al tempo l'equazione (2.2) dei legami di velocità. Si ottiene la seguente relazione<sup>6</sup>:

$$\dot{J}x \cdot \{\dot{x}\} + Jx \cdot \{\ddot{x}\} = \dot{J}q \cdot \{\dot{q}\} + Jq \cdot \{\ddot{q}\} \quad (2.10)$$

dove compaiono le velocità dell'*end effector* e delle variabili di giunto e le loro accelerazioni definite come

$$\{\ddot{q}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \end{Bmatrix} \quad \{\ddot{x}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{y}_0 \\ \ddot{z}_0 \\ \ddot{\theta}_0 \end{Bmatrix}.$$

Sono presenti, inoltre, le derivate delle matrici  $Jx$  e  $Jq$ , intese come le matrici i cui elementi sono le derivate temporali del termine corrispondente; dipenderanno, dunque, dalle derivate degli elementi dei vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{q}$ . Nei paragrafi 2.5.1 e 2.5.2, si ricavano queste matrici per l'Adept Quattro™.

Dall'equazione (2.10), si può già notare come il legame tra le accelerazioni non sia lineare per la presenza di termini dipendenti dai vettori velocità.

### ANALISI CINEMATICA DI ACCELERAZIONE INVERSA

Lo scopo del problema di accelerazione inverso è quello di ricavare i valori di accelerazione delle variabili di giunto, conoscendo le accelerazioni dell'*end effector* oltre alla cinematica di posizione (per determinare  $Jx$  e  $Jq$ ) e di velocità (per determinare le derivate di  $Jx$  e  $Jq$  e per i termini non lineari). Tramite alcuni semplici passaggi matematici e ricordando la (2.4), è possibile isolare il termine di accelerazione delle variabili di giunto ed esprimerlo in funzione dell'accelerazione e della velocità dell'organo terminale:

$$\{\ddot{q}\} = J^{-1} \cdot \{\ddot{x}\} + Jq^{-1} \cdot (Jx - \dot{J}q \cdot J^{-1}) \cdot \{\dot{x}\} \quad (2.11)$$

Si identificano un termine di accelerazione di trascinamento e uno dipendente dalla velocità (accelerazione centrifuga e di Coriolis).

---

<sup>6</sup> Il doppio puntino indica la derivata seconda nel tempo della variabile.



## ANALISI CINEMATICA DI ACCELERAZIONE DIRETTA

Lo scopo del problema di accelerazione diretto è quello di ricavare i valori di accelerazione dell'*end effector*, conoscendo le accelerazioni delle variabili di giunto oltre alla cinematica di posizione (per determinare  $Jx$  e  $Jq$ ) e di velocità (per determinare le derivate di  $Jx$  e  $Jq$  e i termini non lineari). In modo analogo al problema inverso, sfruttando la (2.1), si ricava:

$$\{\ddot{x}\} = J \cdot \{\ddot{q}\} + Jx^{-1} \cdot (Jq - \dot{J}x \cdot J) \cdot \{\dot{q}\} \quad (2.12)$$

### 2.5.1 Determinazione della derivata della matrice $Jx$

I termini di  $Jx$  sono dipendenti da  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{q}$  e, quindi, dal tempo. Per questo motivo, nel termine di destra di (2.10), è presente la derivata della matrice  $Jx$ , i cui termini sono le derivate degli elementi corrispondenti di  $Jx$ . Derivando gli elementi trovati nel paragrafo 2.3.2, per l'Adept Quattro™ si ottiene:

$$\dot{J}x = [ \dot{j}\ddot{x}_{ij} ]$$

dove

- RIGA 1:

$$\dot{j}\ddot{x}_{11} = 2 \left( \dot{x}_0 - \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \cdot \dot{\theta}_0 + b \sin(q_1) \cdot \dot{q}_1 \right),$$

$$\dot{j}\ddot{x}_{12} = 2 \left( \dot{y}_0 + \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \cdot \dot{\theta}_0 \right),$$

$$\dot{j}\ddot{x}_{13} = 2 \left( \dot{z}_0 + b \cos(q_1) \cdot \dot{q}_1 \right),$$

$$\begin{aligned} \dot{j}\ddot{x}_{14} = & d \left( -\dot{x}_0 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) - x_0 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \cdot \dot{\theta}_0 + \dot{y}_0 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) - y_0 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \cdot \dot{\theta}_0 + \frac{d}{2} \sin(\theta_0) \cdot \dot{\theta}_0 + \right. \\ & \left. - b \sin(q_1) \cdot \dot{q}_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) + (a + b \cos(q_1)) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \cdot \dot{\theta}_0 \right); \end{aligned}$$

- RIGA 2:

$$\dot{j}\ddot{x}_{21} = 2 \left( \dot{x}_0 - \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \cdot \dot{\theta}_0 \right),$$

$$\dot{j}\ddot{x}_{22} = 2 \left( \dot{y}_0 + \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \cdot \dot{\theta}_0 + b \sin(q_2) \cdot \dot{q}_2 \right),$$

$$\dot{j}\ddot{x}_{23} = 2 \left( \dot{z}_0 + b \cos(q_2) \cdot \dot{q}_2 \right),$$

$$\begin{aligned} \dot{j}\ddot{x}_{24} = & d \left( -\dot{x}_0 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) - x_0 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \cdot \dot{\theta}_0 + \dot{y}_0 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) - y_0 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \cdot \dot{\theta}_0 - \frac{d}{2} \sin(\theta_0) \cdot \dot{\theta}_0 + \right. \\ & \left. + b \sin(q_2) \cdot \dot{q}_2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) + (a + b \cos(q_2)) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \cdot \dot{\theta}_0 \right); \end{aligned}$$

- RIGA 3:

$$\dot{j}\ddot{x}_{31} = 2 \left( \dot{x}_0 + \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \cdot \dot{\theta}_0 - b \sin(q_3) \cdot \dot{q}_3 \right),$$

$$j\dot{x}_{32} = 2\left(\dot{y}_0 - \frac{d}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \cdot \dot{\theta}_0\right),$$

$$j\dot{x}_{33} = 2(\dot{z}_0 + b\cos(q_3) \cdot \dot{q}_3),$$

$$j\dot{x}_{34} = d\left(\dot{x}_0 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) + x_0 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \cdot \dot{\theta}_0 - \dot{y}_0 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) + y_0 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \cdot \dot{\theta}_0 + \frac{d}{2}\sin(\theta_0) \cdot \dot{\theta}_0 + \right. \\ \left. - b\sin(q_3) \cdot \dot{q}_3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) + (a + b\cos(q_3)) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \cdot \dot{\theta}_0\right);$$

- RIGA 4:

$$j\dot{x}_{41} = 2\left(\dot{x}_0 + \frac{d}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \cdot \dot{\theta}_0\right),$$

$$j\dot{x}_{42} = 2\left(\dot{y}_0 - \frac{d}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \cdot \dot{\theta}_0 - b\sin(q_4) \cdot \dot{q}_4\right),$$

$$j\dot{x}_{43} = 2(\dot{z}_0 + b\cos(q_4) \cdot \dot{q}_4),$$

$$j\dot{x}_{44} = d\left(\dot{x}_0 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) + x_0 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \cdot \dot{\theta}_0 - \dot{y}_0 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) + y_0 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \cdot \dot{\theta}_0 - \frac{d}{2}\sin(\theta_0) \cdot \dot{\theta}_0 + \right. \\ \left. + b\sin(q_4) \cdot \dot{q}_4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) + (a + b\cos(q_4)) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \cdot \dot{\theta}_0\right).$$

## 2.5.2 Determinazione della derivata della matrice Jq

I termini di  $Jq$  sono dipendenti da  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{q}$  e, quindi, dal tempo. Per questo, nel termine di sinistra di (2.10), è presente la derivata della matrice  $Jq$ , i cui termini sono le derivate dei termini corrispondenti di  $Jq$ . Derivando gli elementi trovati nel paragrafo 2.3.2, per l'Adept Quattro™ si ha:

$$\dot{J}q = \text{diag}(j\dot{q}_1, j\dot{q}_2, j\dot{q}_3, j\dot{q}_4)$$

dove

$$j\dot{q}_1 = -2b(\dot{x}_0 \sin(q_1) + x_0 \cos(q_1) \cdot \dot{q}_1 + \dot{z}_0 \cos(q_1) - z_0 \sin(q_1) \cdot \dot{q}_1 - a \cos(q_1) \cdot \dot{q}_1 + \\ + \frac{d}{2}\cos(q_1) \cdot \dot{q}_1 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right)\right) - \frac{d}{2}\sin(q_1) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \cdot \dot{\theta}_0);$$

$$j\dot{q}_2 = -2b(\dot{y}_0 \sin(q_2) + y_0 \cos(q_2) \cdot \dot{q}_2 + \dot{z}_0 \cos(q_2) - z_0 \sin(q_2) \cdot \dot{q}_2 - a \cos(q_2) \cdot \dot{q}_2 + \\ + \frac{d}{2}\cos(q_2) \cdot \dot{q}_2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right)\right) + \frac{d}{2}\sin(q_2) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \cdot \dot{\theta}_0);$$

$$j\dot{q}_3 = -2b(-\dot{x}_0 \sin(q_3) - x_0 \cos(q_3) \cdot \dot{q}_3 + \dot{z}_0 \cos(q_3) - z_0 \sin(q_3) \cdot \dot{q}_3 - a \cos(q_3) \cdot \dot{q}_3 + \\ + \frac{d}{2}\cos(q_3) \cdot \dot{q}_3 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right)\right) - \frac{d}{2}\sin(q_3) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \cdot \dot{\theta}_0);$$

$$j\dot{q}_4 = -2b(-\dot{y}_0 \sin(q_4) - y_0 \cos(q_4) \cdot \dot{q}_4 + \dot{z}_0 \cos(q_4) - z_0 \sin(q_4) \cdot \dot{q}_4 - a \cos(q_4) \cdot \dot{q}_4 + \\ + \frac{d}{2}\cos(q_4) \cdot \dot{q}_4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right)\right) + \frac{d}{2}\sin(q_4) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \cdot \dot{\theta}_0).$$

### INDICI CINEMATICI

La valutazione delle prestazioni cinematiche di un manipolatore e il confronto con altri robot della stessa categoria possono essere eseguiti attraverso degli indici ottenibili dalla matrice Jacobiana. Tali indici, definiti fin dai primi anni di esistenza della robotica ([10]), sono riferiti in modo particolare ai manipolatori seriali; non sempre il passaggio alle PKM è immediato perché la matrice che, generalmente, risulta disponibile è la Jacobiana inversa.

#### 3.1 Indici di prestazione

Per la progettazione o il controllo di un robot parallelo, è richiesta una valutazione del comportamento cinematico dei *link* che lo compongono. In altre parole, data una precisa configurazione assunta dal manipolatore, si vuole misurare l'effetto del movimento dei motori sullo spostamento dell'*end effector*.

Gli strumenti più noti e impiegati per considerazioni di questo tipo sono gli indici cinematici. Tra i molti definiti in letteratura, quelli maggiormente utilizzati sono la manipolabilità (su cui si concentreranno le valutazioni riferite all'Adept Quattro™) e il numero di condizionamento.

##### 3.1.1 Manipolabilità

L'indice di manipolabilità, definito per le macchine seriali da Yoshikawa come  $\mu = \sqrt{\det(J \cdot J^T)}$ , quantifica la capacità di trasmissione della velocità dai motori all'organo terminale (sensibilità). Nel caso di meccanismi non ridondanti, questo indice può essere calcolato semplicemente come il modulo del determinante di  $J$ . Valori dell'indice prossimi allo zero o troppo elevati individuano zone in cui il manipolatore incontra una certa difficoltà a lavorare (tipicamente corrispondono a configurazioni vicine alla frontiera dello spazio di lavoro).

Come espresso nel capitolo precedente, per i manipolatori paralleli la matrice ricavabile in modo immediato è la Jacobiana inversa. Se indichiamo con  $\lambda_i$  gli autovalori di una generica matrice quadrata, gli autovalori della sua inversa saranno  $1/\lambda_i$ . Ricordando che il determinante è uguale al prodotto degli autovalori, si può pervenire a una definizione dell'indice di manipolabilità più adatta all'analisi di manipolatori paralleli ([1], [12]):

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\det(J^{-T} \cdot J^{-1})}}, \quad (3.1)$$

dove si è sfruttato il fatto che l'inverso di un prodotto di matrici è uguale al prodotto con ordine scambiato delle matrici di partenza invertite.

### 3.1.2 Numero di condizionamento

Considerando il sistema lineare  $J^{-1} \cdot \{dx\} = \{dq\}$ , il numero di condizionamento esprime quanto un errore relativo di posizione in  $\mathbf{q}$  risulta amplificato e trasformato in un errore relativo in  $\mathbf{x}$ , [10]. Questo indice può essere definito come:

$$\kappa(J) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}},$$

dove  $\lambda_{\max}$  e  $\lambda_{\min}$  sono gli autovalori di  $J$  con il valore massimo e minimo.

Assume valori che partono dall'unità fino a raggiungere numeri anche elevati. Per questo motivo, spesso, si considera il suo inverso per ottenere valori compresi tra 0 e 1:

$$r\kappa(J) = \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}}.$$

Con questa definizione, il valore unitario coincide con la perfetta corrispondenza tra velocità d'ingresso e di uscita; un valore nullo, invece, è legato all'avvicinamento a zone di singolarità dove il manipolatore fatica a lavorare e i rapporti di velocità possono tendere a infinito.

Il numero di condizionamento fornisce una valutazione locale della destrezza (*dexterity*) del manipolatore, ma può essere valutato anche mediamente nello spazio di lavoro considerato: si parla, in questo caso, d'indice di condizionamento globale, [10].

### 3.1.3 Isotropia cinematica

Un manipolatore si trova in una configurazione isotropica dal punto di vista della cinematica quando le sue prestazioni sono le stesse, qualunque sia la direzione del moto. Ottenere un robot con configurazioni isotropiche è spesso un obiettivo di progetto, [10]. In queste pose, infatti, il numero di condizionamento assume valore unitario, così come il determinante della matrice Jacobiana, e il manipolatore presenta un'ottima capacità di trasmettere il movimento, [32].

Poiché il determinante di una matrice è uguale a quello della sua trasposta e il determinante di un prodotto di matrici è uguale al prodotto dei determinanti, se la Jacobiana ha determinante pari a uno, l'indice di manipolabilità sarà anch'esso uguale all'unità.

In [32], Carricato e Parenti-Castelli definiscono isotropico un manipolatore che assuma almeno una configurazione con le caratteristiche appena descritte, mentre chiamano totalmente isotropici i robot che presentano isotropia in tutto il loro spazio di lavoro (in [10], Merlet definisce isotropica solamente quest'ultima categoria di manipolatori).

## 3.2 Separazione dei contributi e normalizzazione della Jacobiana

Uno dei maggiori problemi legati alla definizione e all'interpretazione dell'indice di manipolabilità nasce dal fatto che esso lega arbitrariamente le capacità traslazionali e quelle rotazionali, qualora presenti, [10]. Nel caso di manipolatori con gradi di libertà sia di traslazione sia di rotazione, è bene separare i due diversi contributi in modo da far assumere alla manipolabilità un significato fisico

maggiormente chiaro ed eseguire valutazioni più precise in base al movimento d'interesse.

Si noti, inoltre, come, nella definizione della matrice Jacobiana di Quattro™, i termini di  $Jx$  non abbiano tutti la medesima unità di misura poiché quelli delle prime tre colonne sono i risultati di una derivazione rispetto a una lunghezza, mentre quelli della quarta colonna sono rapportati a una rotazione.

### 3.2.1 Divisione dei contributi traslazionali e rotazionali

Per valutare separatamente le prestazioni riferite alle traslazioni e alle rotazioni, si divide la matrice Jacobiana in due parti ( $J_T$  e  $J_R$ ) e si applica la definizione (3.1) in modo distinto. La sottomatrice  $J_T$  conterrà i termini legati ai movimenti lineari, cioè i rapporti tra le traslazioni dell'*end effector* e gli spostamenti dei giunti;  $J_R$ , viceversa, conterrà i rapporti tra le rotazioni dell'organo terminale e gli spostamenti dei giunti. Applicando questo ragionamento ai robot paralleli, si definiscono le seguenti matrici inverse:

$$J_T^{-1} = Jq^{-1} \cdot Jx_T \qquad J_R^{-1} = Jq^{-1} \cdot Jx_R \qquad (3.2)$$

dove  $Jx_T$  è la matrice  $4 \times 3$  con le prime tre colonne di  $Jx$ , mentre  $Jx_R$  ( $4 \times 1$ ) contiene la quarta colonna di  $Jx$ .

In questo elaborato si è interessati a valutare le prestazioni del manipolatore con riferimento alle sue capacità di traslazione; per questo motivo si considera solamente la matrice  $J_T$  inversa.

### 3.2.2 Normalizzazione della matrice Jacobiana

Un secondo problema legato alla definizione dell'indice di manipolabilità è la presenza di disomogeneità tra le unità di misura dei termini che compongono la matrice Jacobiana. È utile ricorrere a una normalizzazione dello Jacobiano. Questa soluzione può essere facilmente applicata ai robot seriali pesando  $J$  con lunghezze caratteristiche [1], mentre, per i robot paralleli il discorso è più complicato. Se, però, tutti i giunti che collegano i motori ai *link* attivi sono rotoidali, si può legare la velocità di traslazione alla velocità tangenziale delle manovelle, invece che a quella angolare, ottenendo, quindi, un indice di manipolabilità adimensionale. Per ottenere quanto detto, si moltiplica la matrice  $J_T$  inversa per uno scalare pari alla lunghezza  $br$  della manovella stessa.

Nelle formule seguenti, le matrici normalizzate saranno indicate dal pedice  $D$ .

## 3.3 Indice di manipolabilità riferito alla traslazione per l'Adept Quattro™

L'analisi delle prestazioni dell'Adept Quattro™ è svolta in riferimento ad un classico movimento industriale di *pick-and-place* (figura 3.1) che consiste nel sollevamento verticale di un pezzo (fase di *lift on*), nel suo trasporto in direzione orizzontale (fase di *travel*) e nel suo rilascio dopo un abbassamento verticale (fase di *set down*). Le caratteristiche del movimento s'indicano con le lunghezze in millimetri dei tre tratti, riportate in ordine.

Per il confronto del tempo di ciclo tra manipolatori della stessa categoria esistono dei percorsi di *pick-and-place* di benchmarking: lo "Standard Adept Cycle" è descritto dalle seguenti lunghezze 25/305/25 mm, mentre lo "Extended Adept Cycle" da 40/700/40 mm.

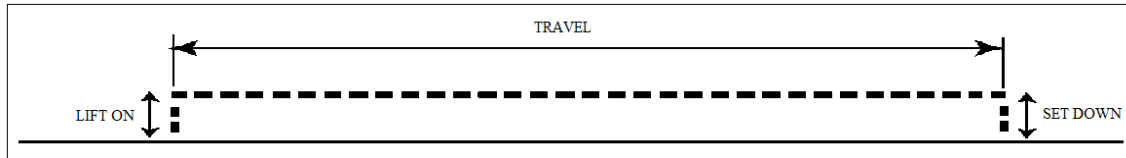


Figura 3.1: ciclo di *pick-and-place*.

Per la definizione dell'indice di manipolabilità riferito alla sola traslazione dell'organo terminale, è sufficiente sostituire nella (3.1) la matrice  $J_T$  inversa normalizzata:

$$\mu_{DT} = \frac{1}{\sqrt{\det(J_{DT}^{-T} \cdot J_{DT}^{-1})}} \quad (3.3)$$

Utilizzando i termini della Jacobiana ricavati nel capitolo due, si esegue, con il software MATLAB®, una simulazione del comportamento del manipolatore nel suo spazio di lavoro.

Come anche per le simulazioni seguenti, il valore del termine  $\theta_0$  è fissato a zero per concentrare l'attenzione sul movimento di traslazione; allo stesso modo anche i parametri *ee* e *offset* riguardanti l'*end effector* si considerano pari a zero. Un valore non nullo di *ee* darebbe luogo a una traslazione dello spazio di lavoro lungo l'asse  $z$  negativo; dando, invece, a *offset* il suo valore reale, si avrebbe una traslazione di  $75 \text{ mm}$  lungo l'asse  $x$  del sistema di riferimento introdotto da Adept (equivalente a uno spostamento di  $-53 \text{ mm}$  lungo gli assi  $x$  e  $y$  del sistema utilizzato in questo elaborato).

Il grafico riferito all'indice  $\mu_{DT}$  è riportato in figura 3.2:

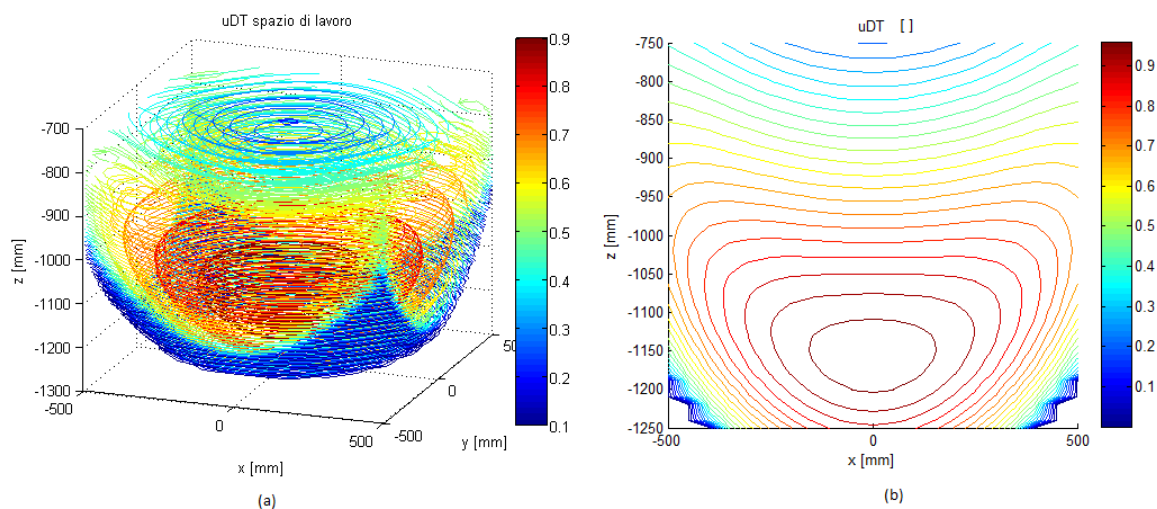


Figura 3.2: indice di manipolabilità riferito alla traslazione: (a) vista dello spazio di lavoro, (b) vista del piano  $x$ - $z$ .

La figura (b) rivela come zona in cui l'indice assume i valori più elevati quella attorno al punto  $P_T = \{0 \ 0 \ -1170\} \text{mm}$ .

### 3.4 Indici cinematici direzionali

Il risultato riportato nel paragrafo 3.3 è di carattere generale perché riferito a un movimento

generico. Andando più nello specifico, è interessante valutare in modo separato il comportamento del manipolatore, secondo il tipo di movimento.

A questo scopo, in [1], sono definiti due indici di manipolabilità selettivi in base alla direzione del moto. Il primo è riferito a un movimento orizzontale nel piano  $x$ - $y$ , il secondo a un movimento verticale lungo l'asse  $z$ :

$$\mu_{xy} = \frac{1}{\sqrt{\det(J_{xy}^{-T} \cdot J_{xy}^{-1})}} \quad \mu_z = \frac{1}{\sqrt{\det(J_z^{-T} \cdot J_z^{-1})}} \quad (3.4)$$

dove  $J_{xy}$  è la matrice  $4 \times 2$  contenente le prime due colonne dell'inversa di  $J$ , mentre  $J_z$  ( $4 \times 1$ ) contiene la terza colonna. Utilizzando la versione normalizzata delle matrici appena considerate, gli indici in (3.4) si possono scrivere nel modo seguente:

$$\mu_{D_{xy}} = \frac{1}{\sqrt{\det(J_{D_{xy}}^{-T} \cdot J_{D_{xy}}^{-1})}} \quad \mu_{D_z} = \frac{1}{\sqrt{\det(J_{D_z}^{-T} \cdot J_{D_z}^{-1})}} \quad (3.5)$$

In figura 3.3 è riportato il grafico dell'indice di manipolabilità che rappresenta il movimento orizzontale, mentre in figura 3.4 quello relativo al movimento verticale; si riporta solo la vista del piano  $x$ - $z$ , poiché gli indici sono simmetrici e hanno lo stesso comportamento nel piano  $y$ - $z$ .

Le zone legate al miglior comportamento cinematico si differenziano da quella individuata nel paragrafo 3.3, in base alla direzione presa in esame; questo sottolinea la necessità di utilizzare gli indici selettivi per valutare al meglio le prestazioni di un manipolatore.

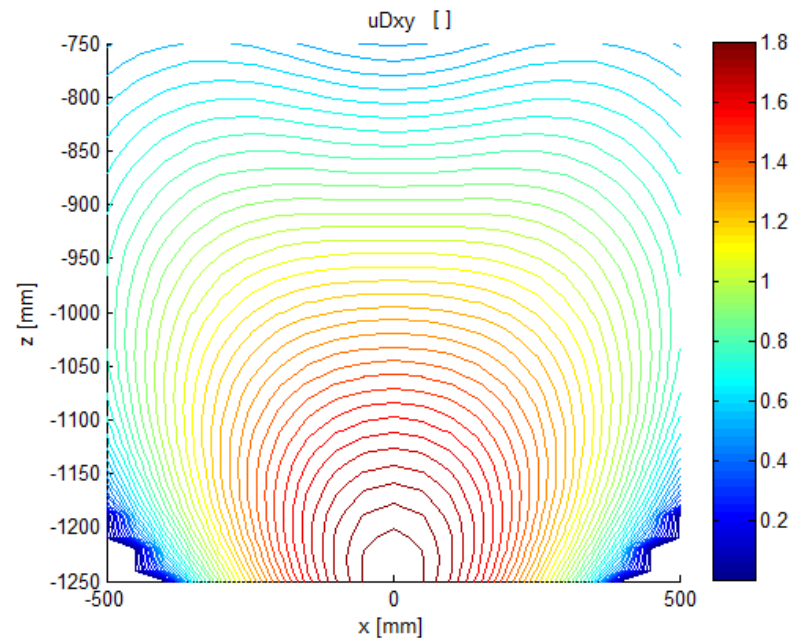


Figura 3.3: indice selettivo: movimento orizzontale.

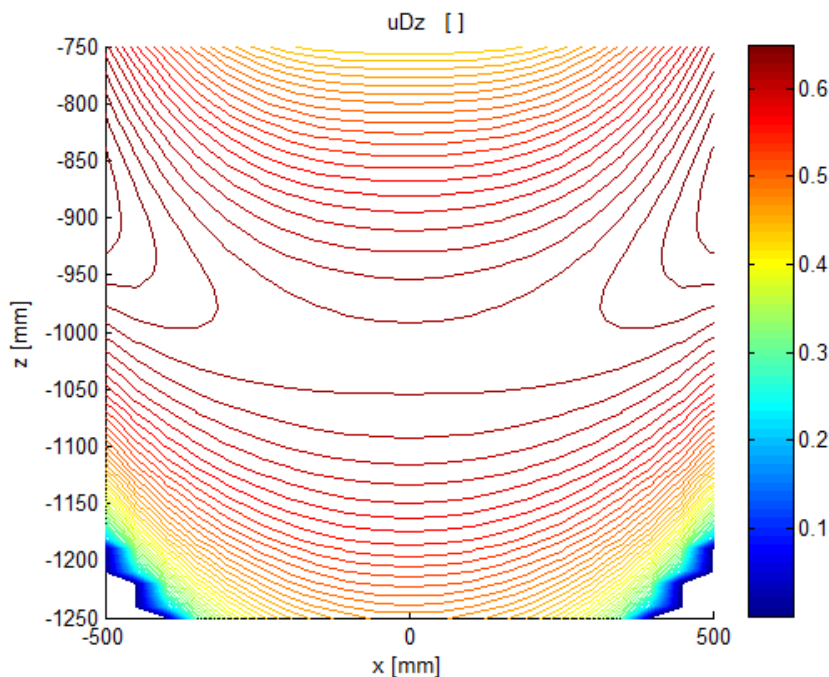


Figura 3.4: indice selettivo: movimento verticale.

In figura 3.3, l'indice di manipolabilità riferito al movimento lungo il piano orizzontale presenta delle curve di livello concentriche, lungo le quali il comportamento cinematico del manipolatore può ritenersi identico. Per le considerazioni fatte in precedenza sull'isotropia, è ragionevole ritenere che le prestazioni siano indipendenti dalla direzione di moto per valori dell'indice attorno all'unità, [1]. Si assume come punto indicante questo comportamento  $P_{xy} = \{0 \quad 0 \quad -920\}mm$ .

In figura 3.4, il comportamento migliore, con riferimento ad un movimento verticale, si ha all'interno di un canale avente centro nel punto  $P_z = \{0 \quad 0 \quad -1020\}mm$ . Da evidenziare i picchi che l'indice raggiunge nella parte esterna del canale.

### 3.5 Indici cinematici direzionali valutando gli autovalori

Ragionando con la matrice Jacobiana diretta, ottenibile come inversione numerica della Jacobiana inversa, è possibile definire gli stessi indici considerando di volta in volta la riga o la sottomatrice d'interesse della  $J$  normalizzata. I grafici che si ottengono, però, assumono gli stessi valori di quelli sopra riportati solamente in corrispondenza dell'asse  $z$ , mentre nel resto dello spazio di lavoro hanno un comportamento che si discosta dall'andamento trovato, pur individuando le medesime zone di massimo. Questa diversità è dovuta al fatto che le sottomatrici considerate non sono una l'inversa dell'altra.

Per ottenere un risultato uguale sia nel caso si consideri la Jacobiana inversa sia quella diretta, si propone di riconsiderare l'equazione (3.1) dove, come detto, il determinante corrisponde, in ogni punto dello spazio di lavoro, all'inverso di quello che si avrebbe utilizzando la matrice diretta. Osservando i quattro autovalori, si nota che ciascuno è riferito a uno dei gradi di libertà; in



particolare, considerando l'inversa, l'autovalore riferito alla rotazione è il minore, mentre quello riferito a  $z$  assume sempre il valore maggiore.

È possibile, quindi, separare i contributi riguardanti la traslazione calcolando il determinante come prodotto dei tre autovalori relativi a  $x_0$ ,  $y_0$  e  $z_0$ ; l'indice riferito a un particolare movimento si ottiene, invece, considerando solo il prodotto tra gli autovalori legati alla direzione in questione.

In figura 3.5, si riportano i grafici ottenuti per la traslazione in generale (a), per il movimento orizzontale (b) e per quello verticale (c) utilizzando il metodo esposto.

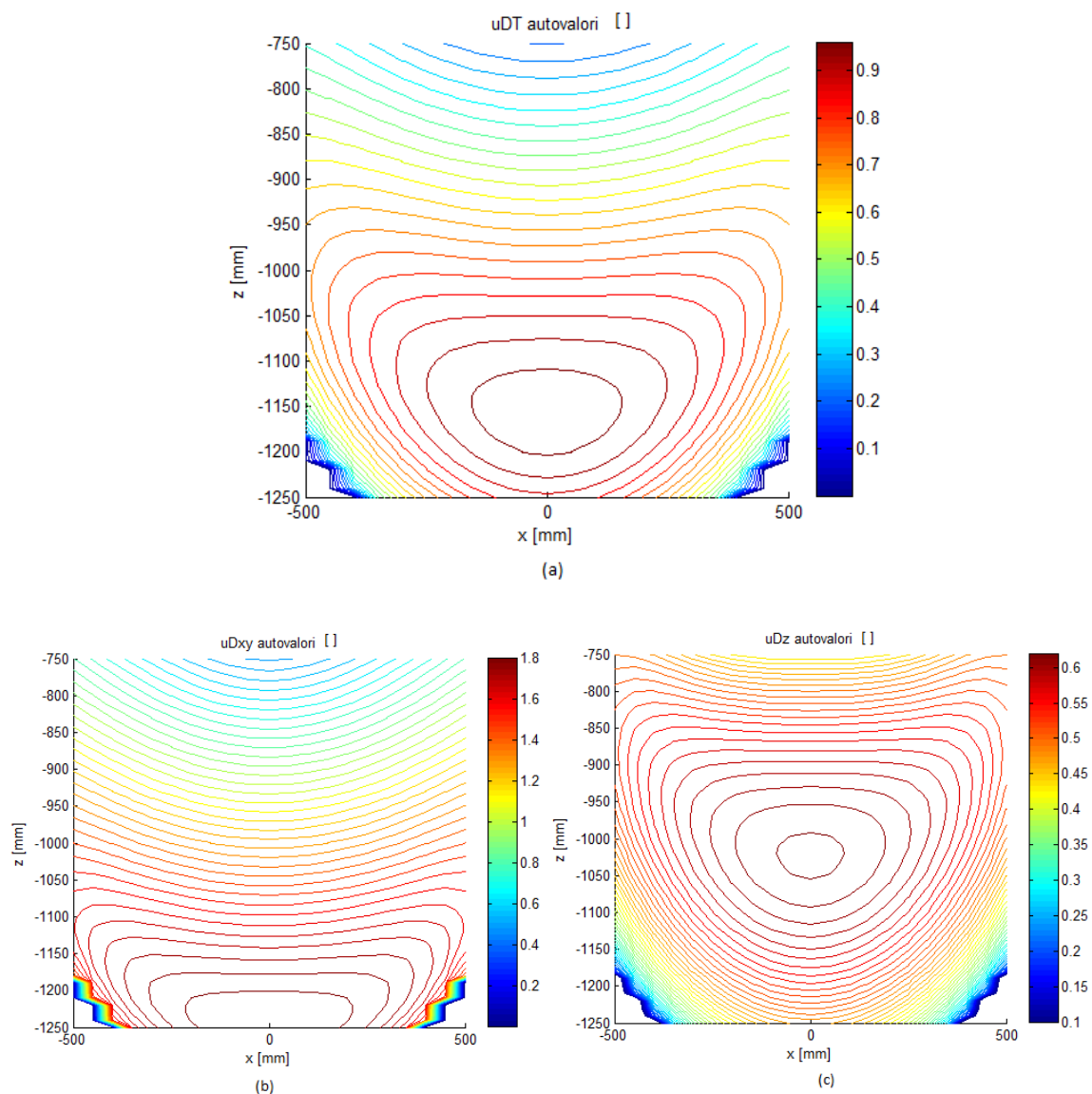


Figura 3.5: indici selettivi calcolati con gli autovalori: (a) traslazione, (b) movimento sul piano orizzontale, (c) movimento sul piano verticale.

Mentre per la traslazione generale il grafico è identico a quello di figura 3.2, per l'indice relativo al movimento orizzontale le linee di livello sono più schiacciate, pur mantenendo il valore unitario intorno al punto  $P_{xy}$ .

Quanto alla figura (c), il grafico cambia qualitativamente, evidenziando la zona attorno al punto  $P_z$  e non i picchi laterali come nel caso precedente, anche se in corrispondenza di quelle zone il valore dell'indice è comunque elevato.

Nel capitolo 6, sulla base di misure effettuate con l'Adept Quattro™, si discuterà della precisione e dell'utilità di questi indici.

# MATRICE DI INERZIA GENERALIZZATA RIDOTTA ALL'END EFFECTOR (GIMRE)

L'analisi di un manipolatore si limita, molto spesso, alla sola cinematica, nonostante il suo comportamento dipenda fortemente dalle masse, dalle inerzie e dalla flessibilità dei *link*. Quando si esamina o si progetta un manipolatore a elevata velocità, però, non si può prescindere dallo studio della sua rigidità e del suo comportamento dinamico. La flessibilità dei *link*, infatti, limita la precisione nel posizionamento, mentre le caratteristiche inerziali sono direttamente legate alla capacità di raggiungere elevate accelerazioni e ridurre il tempo di esecuzione del movimento richiesto. Come esposto nel primo capitolo, i robot paralleli si distinguono per le loro elevate prestazioni dinamiche, conseguenza diretta del montaggio a telaio dei motori, che permette l'utilizzo di materiali leggeri per la costruzione dei *link*.

L'obiettivo di questo capitolo è di descrivere, tramite indici, il comportamento dinamico di un manipolatore per il confronto con altri o per specificare delle direttive per migliorare le prestazioni dinamiche qualora ci si trovi ancora in fase di progettazione. Le considerazioni effettuate non saranno, ovviamente, orientate alla progettazione ma all'individuazione delle zone dello spazio di lavoro in cui il manipolatore di cui si dispone possa ottenere le migliori prestazioni dinamiche. L'analisi della rigidità dei *link* non viene presa in considerazione.

### 4.1 General Inertia Matrix (GIM)

In letteratura sono descritti vari metodi per determinare il modello dinamico di manipolatori paralleli a 3, 4 o 6 gradi di libertà; si citano Newton-Eulero, Lagrange e D'Alembert. In tutti i casi, il comportamento dinamico dipende fortemente da una matrice d'inerzia ([4], [18]).

La matrice di inerzia generalizzata o *General Inertia Matrix (GIM)* contiene i valori di massa e inerzia equivalenti che il manipolatore assume rispetto all'origine del sistema di riferimento in cui si sta calcolando e dipende dalla posizione assunta dai vari *link* e dalla piattaforma mobile. La *GIM* di un manipolatore parallelo a  $n$  gradi di libertà è una matrice quadrata di ordine  $n$ , simmetrica e definita positiva con autovalori reali e positivi, [4]. Per ricavarla, ci si baserà sull'espressione dell'energia cinetica totale del manipolatore, ricavabile come somma dei contributi di ciascun componente, [13].

Per la definizione degli indici dinamici in [4] e [5], si è utilizzata una particolare espressione della matrice d'inerzia, la stessa che si utilizzerà in questo elaborato, considerando come sistema di riferimento quello in cui le coordinate dell'organo terminale rappresentano l'origine; si parlerà di *GIMRE (General Inertia Matrix Reduced to the End effector)*. Gli autovalori di questa formulazione sono direttamente collegati ai quattro gradi di libertà dell'organo terminale.

Poiché in questo elaborato non si considerano le rotazioni, per la definizione delle proprietà

dinamiche del manipolatore si utilizzeranno solo i tre autovalori corrispondenti alle traslazioni.

## 4.2 Isotropia dinamica e suo significato geometrico

Un manipolatore si trova in una configurazione dinamicamente isotropica se la sua attitudine a produrre accelerazione dell'*end effector* non dipende dalla direzione delle forze generalizzate che la causano. Una modifica del moto, quindi, coinvolge forze d'inerzia le cui intensità sono indipendenti dal verso del cambiamento.

In [6], Asada riporta un'interpretazione geometrica del concetto d'isotropia dinamica basata sulla matrice  $GIM$ , estendendo il concetto di ellissoide d'inerzia riferito alla dinamica di un corpo rigido; definisce, così, l'ellissoide di inerzia generalizzata ( $GIE$ , *Generalized Inertia Ellipsoid*). La  $GIE$  di un manipolatore a  $n$  gradi di libertà possiede  $n$  assi principali le cui semi-lunghezze hanno un valore pari al reciproco delle radici quadrate degli autovalori di  $GIM$  e, perciò, anche l'ellissoide generalizzato dipende dalla configurazione assunta. Considerando robot a più di tre gradi di libertà, non è possibile riprodurre graficamente la  $GIE$  e, qualora la rappresentazione sia possibile, essa è complessa e difficile da interpretare.

In generale, si può dire che, in corrispondenza della periferia dello spazio raggiungibile, la  $GIE$  ha una forma stretta e allungata; al contrario, in posizione centrale, essa tende ad assumere una forma più larga e tondeggiante, fino a diventare una sfera in caso di isotropia (gli autovalori hanno tutti lo stesso valore). Ci si aspetta, dunque, un comportamento dinamicamente isotropico al centro dello spazio di lavoro.

La variazione di forma e orientazione dell'ellissoide d'inerzia è associata alle forze non lineari che compaiono durante uno spostamento, [9]. Per questo motivo, l'isotropia dinamica è un obiettivo di progetto per i manipolatori industriali: le forze non lineari, infatti, scompaiono quando gli autovalori sono uguali, [6]. Se il movimento di un braccio, al contrario, presenta elevate non linearità e caratteristiche differenti in base alla direzione del moto stesso, esso non risponderà in modo accurato alla legge di moto imposta. L'isotropia si traduce, in termini di automazione, in una riduzione della complessità del sistema di controllo e in un conseguente aumento delle prestazioni.

## 4.3 Determinazione della GIMRE per un manipolatore parallelo

La determinazione della matrice di inerzia generalizzata e, in particolare, di quella riferita all'organo terminale, si basa sulla definizione dell'energia cinetica. Prima di ricavare le relazioni energetiche, si descrive la notazione utilizzata.

Si consideri un manipolatore con  $n$  catene cinematiche, ciascuna composta da  $k$  *link*. Il *link* caratterizzato dai pedici  $ij$  indica il  $j$ -esimo *link* della  $i$ -esima catena cinematica; le grandezze relative alla piattaforma mobile, invece, sono individuate dal pedice  $p$ . Si determinino, poi, un sistema di riferimento base  $S_b$  centrato a telaio, un sistema di riferimento  $S_p$  avente come origine il centro di massa della piattaforma mobile ( $G_p$ ) e un sistema di riferimento  $S_{ij}$  per ciascun *link* individuato con la notazione sopra descritta e avente come origine il centro di massa del *link* ( $G_{ij}$ ). Le figure 4.1 e 4.2 riportano graficamente la notazione utilizzata.

Si definiscano le masse dei *link* e della piattaforma mobile,  $m_{ij}$  e  $m_p$ , e i loro tensori di inerzia,  $I_{ij}$  e  $I_p$ , riferiti ai rispettivi sistemi di riferimento. Si vogliono proiettare, ora, i tensori di inerzia sul sistema di riferimento base tramite delle matrici di rotazione.

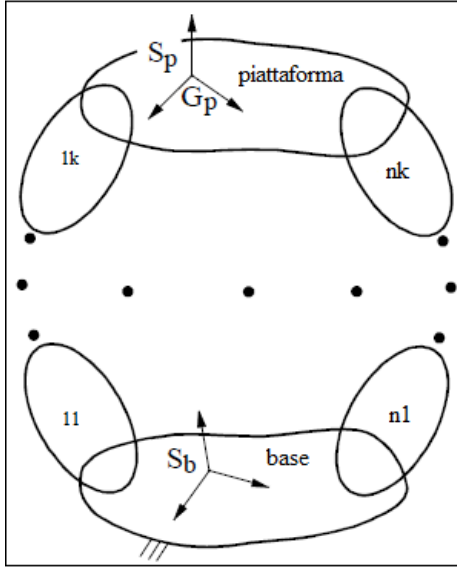


Figura 4.1: notazione utilizzata: identificazione dei link.

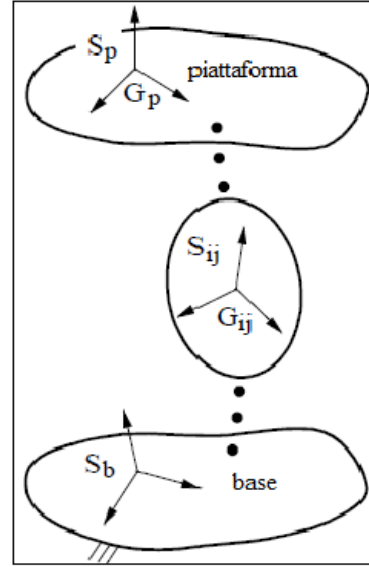


Figura 4.2: notazione utilizzata: identificazione delle terne di riferimento.

Si ottengono le relazioni seguenti:

$${}^b I_{ij} = {}^b R_{ij} \cdot I_{ij} \cdot {}^b R_{ij}^T \quad {}^b I_p = {}^b R_p \cdot I_p \cdot {}^b R_p^T, \quad (4.1)$$

dove  ${}^b R_{ij}$  e  ${}^b R_p$  indicano le matrici di rotazione per passare dai sistemi  $S_{ij}$  e  $S_p$  al sistema  $S_b$ .

L'energia cinetica totale del manipolatore può essere scritta come somma dell'energia cinetica dei  $link_{ij}$  e della piattaforma mobile:

$$E = E_p + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k E_{ij} \quad (4.2)$$

$$\text{con} \quad E_{ij} = \frac{1}{2} [m_{ij} \cdot \dot{G}_{ij}^2 + \omega_{ij}^T \cdot {}^b I_{ij} \cdot \omega_{ij}], \quad E_p = \frac{1}{2} [m_p \cdot \dot{G}_p^2 + \omega_p^T \cdot {}^b I_p \cdot \omega_p] \quad (4.3)$$

dove  $\dot{G}_{ij}$  e  $\dot{G}_p$  sono i vettori di velocità lineare e  $\omega_{ij}$  e  $\omega_p$  i vettori di velocità angolare dei centri di massa dei  $link$  e della piattaforma articolata.

Per ottenere la *GIMRE*, è necessario definire tutte le velocità in funzione di  $\{\dot{x}\}$ , tramite delle particolari matrici Jacobiane dipendenti dalla posizione e dalla geometria del manipolatore:

$$\dot{G}_{ij} = H_{ij} \cdot \{\dot{x}\}, \quad \omega_{ij} = L_{ij} \cdot \{\dot{x}\}, \quad \dot{G}_p = H_p \cdot \{\dot{x}\}, \quad \omega_p = L_p \cdot \{\dot{x}\}. \quad (4.4)$$

Sostituendo le relazioni (4.4) in (4.3) e ricordando che la trasposizione di una moltiplicazione di matrici è uguale al prodotto delle singole matrici trasposte e cambiate di ordine, si ottiene:

$$\begin{aligned}
E_{ij} &= \frac{1}{2} \{\dot{x}\}^T \cdot [m_{ij} \cdot H_{ij}^T \cdot H_{ij} + L_{ij}^T \cdot {}^b I_{ij} \cdot L_{ij}] \cdot \{\dot{x}\} \\
E_p &= \frac{1}{2} \{\dot{x}\}^T \cdot [m_p \cdot H_p^T \cdot H_p + L_p^T \cdot {}^b I_p \cdot L_p] \cdot \{\dot{x}\}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Inserendo, poi, i valori di (4.5) in (4.2), si ottiene la formula generale dell'energia cinetica, contenente la matrice d'inerzia  $N$  ricercata:

$$E = \frac{1}{2} \{\dot{x}\}^T \cdot N \cdot \{\dot{x}\} \tag{4.6}$$

$$\text{con } N = m_p \cdot H_p^T \cdot H_p + L_p^T \cdot {}^b I_p \cdot L_p + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k [m_{ij} \cdot H_{ij}^T \cdot H_{ij} + L_{ij}^T \cdot {}^b I_{ij} \cdot L_{ij}]. \tag{4.7}$$

La matrice  $N$  è simmetrica perché somma di matrici simmetriche e definita positiva; dipende dalla configurazione assunta dal manipolatore e dai parametri geometrici e inerziali.

## 4.4 Determinazione della GIMRE per l'Adept Quattro™

Applicando il procedimento descritto, si determina la *General Inertia Matrix Reduced to the End effector* per l'Adept Quattro™. Il numero di catene cinematiche  $n$  è pari a 4 e i *link* dell' $i$ -esimo braccio sono 2 (il braccio superiore costituisce il  $link_{i1}$  mentre il braccio inferiore il  $link_{i2}$ ); come sistema di riferimento base si considera la terna centrata in O e già definita nel capitolo 1.

### 4.4.1 Terne di riferimento

Considerando i  $link_{i1}$  e ricordando che possono muoversi solo lungo un piano, si è scelto di porre l'asse  $x$  coincidente con il braccio superiore per quanto riguarda le catene 1 e 3, mentre, per le catene 2 e 4 sarà l'asse  $y$  a essere sovrapposto alla manovella. In questo modo, la determinazione dei tensori di inerzia e delle matrici di rotazione rispetto al sistema base risultano immediate.

Riguardo ai  $link_{i2}$ , si segue lo stesso principio appena utilizzato, facendo coincidere il braccio inferiore con gli assi  $x$  per le catene cinematiche 1 e 3 e con gli assi  $y$  per le catene 2 e 4. L'origine delle terne è il centro di massa e come asse  $z$ , perpendicolare al *link*, si considera quello con direzione uscente rispetto all'ingombro del robot.

Per quanto riguarda la piattaforma, infine, si considera una terna centrata nel punto di collegamento dell'*end effector*, con l'asse  $z$  uscente verso il basso. Quanto detto è rappresentato in figura 4.3 dove, per chiarezza, si sono rappresentati gli assi  $x$  in nero, gli assi  $y$  in giallo e gli assi  $z$  in rosso.

La determinazione delle matrici di rotazione che riportano i sistemi di riferimento dei *link* al sistema base non è un problema di immediata risoluzione per quanto riguarda i bracci inferiori. Di seguito sono riportati i passaggi per ciascun componente.

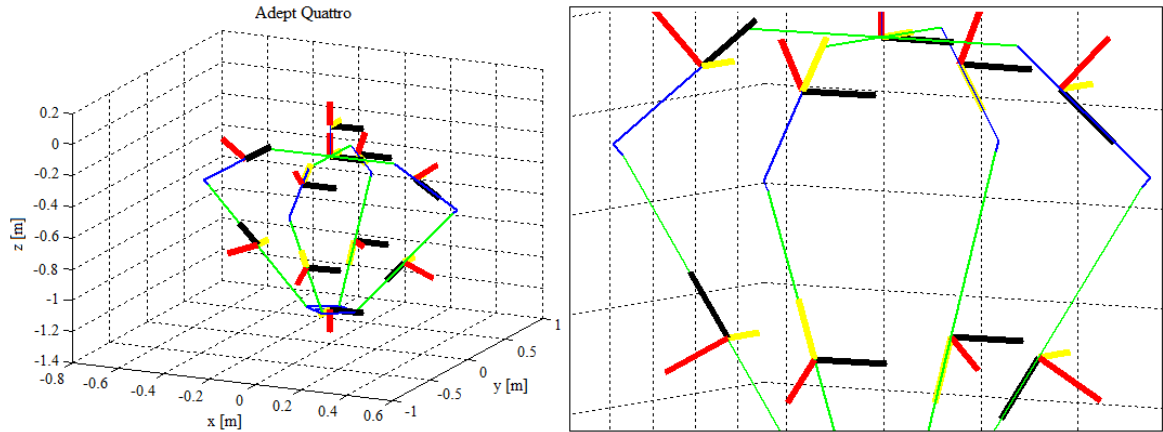


Figura 4.3: terne di riferimento riferite a ciascun componente e ingrandimento delle terne dei *link*.

### BRACCIO 1

- *Link*<sub>11</sub>:

Il centro di massa del *link*<sub>11</sub>,  $G_{11}$ , non coincide con il centro del braccio superiore. Si colloca a una distanza pari a  $lg$  dal punto  $A_1$  e ha le seguenti coordinate:

$$G_{11} = (a + lg \cdot \cos(q_{r1}) \quad 0 \quad -lg \cdot \sin(q_{r1}) - base)^T.$$

La matrice che riporta la terna di riferimento  $S_{11}$  alla terna  $S_b$  è una rotazione attorno all'asse  $y$  di un angolo pari a  $-q_{r1}$ :

$${}^b R_{11} = R_y(-q_{r1}) = \begin{bmatrix} \cos(-q_{r1}) & 0 & \sin(-q_{r1}) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(-q_{r1}) & 0 & \cos(-q_{r1}) \end{bmatrix}.$$

- *Link*<sub>12</sub>:

Il centro di massa del *link*<sub>12</sub>,  $G_{12}$ , coincide con il centro del braccio inferiore:

$$G_{12} = \frac{1}{2} \left( x_0 + \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) + \frac{d}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + a + b \cos(q_1) \quad y_0 + \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) - \frac{d}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \quad z_0 - b \sin(q_1) - 2base \right)^T$$

La matrice di rotazione che riporta la terna di riferimento  $S_{12}$  alla terna  $S_b$  è una composizione (notazione di Cardano)<sup>7</sup> di una rotazione attorno all'asse  $z$ , che porta virtualmente il braccio sullo stesso piano dove scorre il *link*<sub>11</sub>, e una rotazione attorno all'asse  $y$  della terna risultante dalla rotazione precedente.

<sup>7</sup> La notazione di Cardano descrive una rotazione generica tramite tre rotazioni: la prima attorno all'asse  $z$  della terna di partenza, la seconda attorno all'asse  $y$  della terna ottenuta dalla prima rotazione e la terza attorno all'asse  $x$  della terna ottenuta con la seconda rotazione. Noti gli angoli di rotazione, la matrice di trasformazione totale si ottiene come post-moltiplicazione delle tre matrici così definite.

Si ricavano, tramite considerazioni geometriche, due angoli utili per l'individuazione delle effettive rotazioni, le quali variano in base alla posizione del punto  $G_{12}$ .

Si consideri  $i_1$ , la proiezione della semi-lunghezza del  $link_{12}$  sul piano  $x$ - $z$ , definita come:

$$i_1 = \sqrt{(x_{G_{12}} - x_{B_1})^2 + (z_{G_{12}} - z_{B_1})^2}.$$

$\beta_1$  rappresenta l'angolo d'inclinazione del  $link_{12}$  rispetto al piano su cui si muove il rispettivo braccio superiore e si trova tramite la seguente relazione trigonometrica inversa:

$$\beta_1 = a \cos\left(\frac{i_1}{c/2}\right).$$

Considerando sempre la proiezione del braccio sul piano  $x$ - $z$ ,  $\alpha_1$  rappresenta l'angolo compreso tra  $i_1$  e il cateto corrispondente alla differenza di coordinate zeta tra i punti  $G_{12}$  e  $B_1$ .

$$\alpha_1 = a \cos\left(\frac{|z_{G_{12}} - z_{B_1}|}{i_1}\right).$$

In base alla posizione assunta da  $G_{12}$ , si ottengono quattro matrici  ${}^b R_{12}$  diverse:

1. La coordinata  $y$  di  $G_{12}$  è positiva e la sua coordinata  $x$  è minore di quella di  $B_1$  (fig. 4.4):

$${}^b R_{12} = R_z(-\beta_1) \cdot R_y\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right).$$

2. La coordinata  $y$  di  $G_{12}$  è positiva e la sua coordinata  $x$  è maggiore di quella di  $B_1$  (fig. 4.5):

$${}^b R_{12} = R_z(-\beta_1) \cdot R_y\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha_1\right).$$

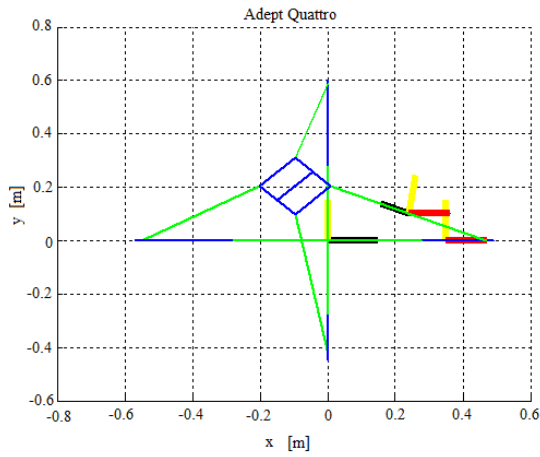
3. La coordinata  $y$  di  $G_{12}$  è negativa e la sua coordinata  $x$  è minore di quella di  $B_1$  (fig. 4.6):

$${}^b R_{12} = R_z(+\beta_1) \cdot R_y\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right).$$

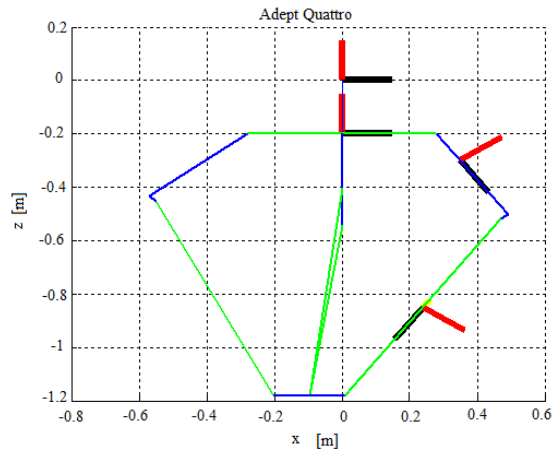
4. La coordinata  $y$  di  $G_{12}$  è negativa e la sua coordinata  $x$  è maggiore di quella di  $B_1$  (fig. 4.7):

$${}^b R_{12} = R_z(+\beta_1) \cdot R_y\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha_1\right).$$



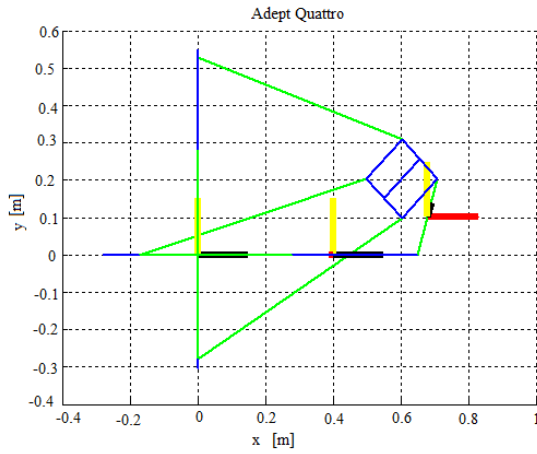


(a)

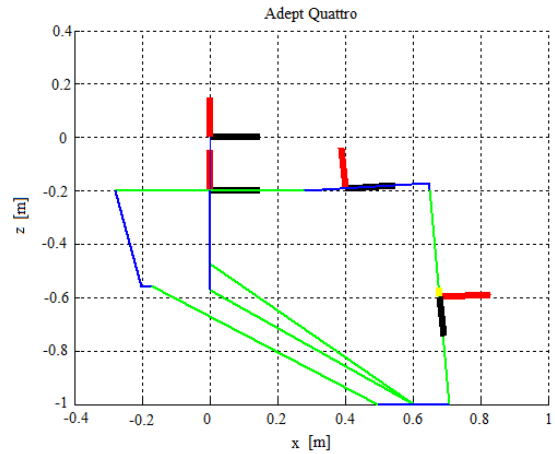


(b)

Figura 4.4: matrici di rotazione per il braccio 1, caso 1: (a) vista dal piano x-y, (b) vista dal piano x-z.

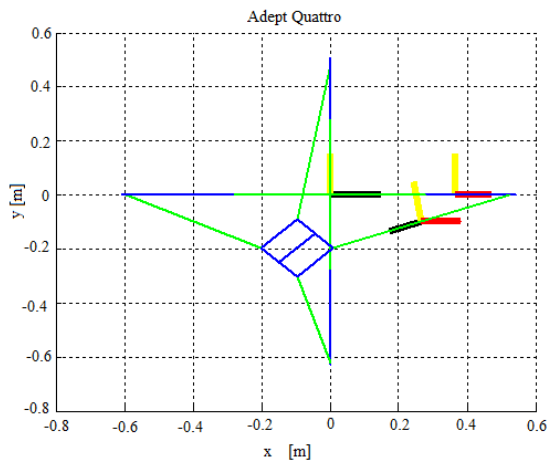


(a)

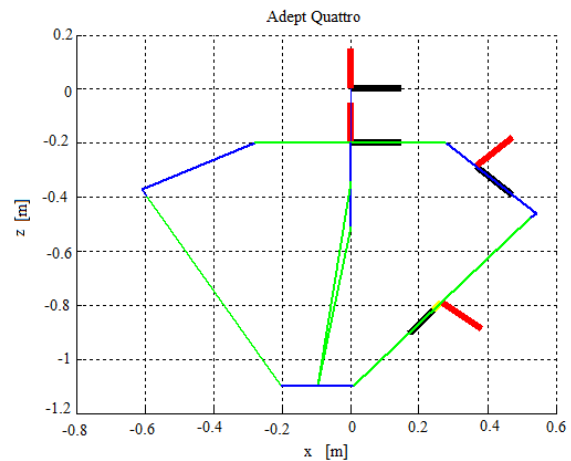


(b)

Figura 4.5: matrici di rotazione per il braccio 1, caso 2: (a) vista dal piano x-y, (b) vista dal piano x-z.



(a)



(b)

Figura 4.6: matrici di rotazione per il braccio 1, caso 3: (a) vista dal piano x-y, (b) vista dal piano x-z.

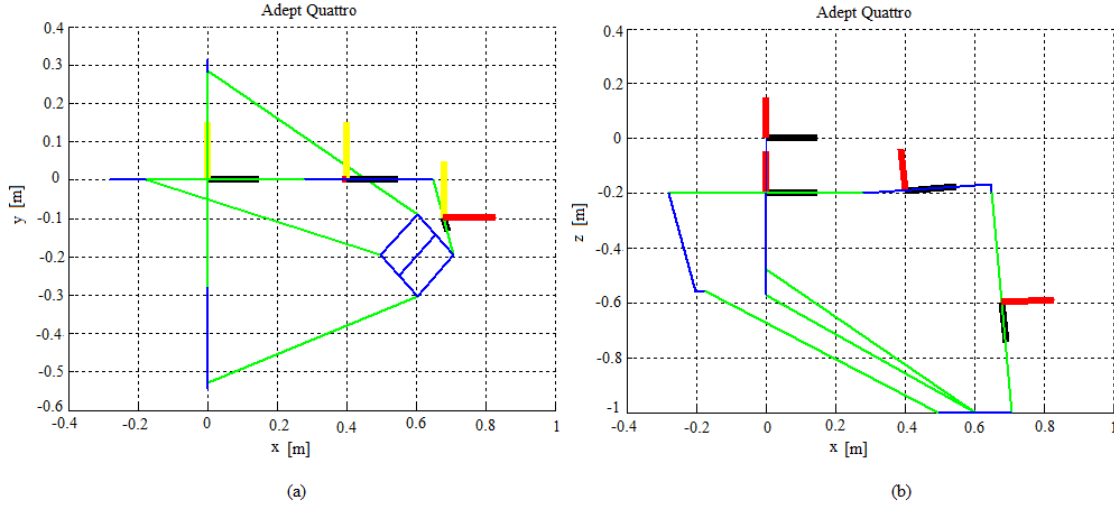


Figura 4.7: matrici di rotazione per il braccio 1, caso 4: (a) vista dal piano x-y, (b) vista dal piano x-z.

## BRACCIO 2

- *Link*<sub>21</sub>:

Il centro di massa del *link*<sub>21</sub>,  $G_{21}$ , non coincide con il centro del braccio superiore. Si colloca a una distanza pari a  $lg$  dal punto  $A_2$  e ha le seguenti coordinate:

$$G_{21} = (0 \quad a + lg \cdot \cos(q_{r2}) \quad -lg \cdot \sin(q_{r2}) - base)^T.$$

La matrice che riporta la terna di riferimento  $S_{21}$  alla terna  $S_b$  è una rotazione attorno all'asse  $x$  di un angolo pari a  $q_{r2}$ :

$${}^b R_{21} = R_x(q_{r2}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_{r2}) & -\sin(q_{r2}) \\ 0 & \sin(q_{r2}) & \cos(q_{r2}) \end{bmatrix}.$$

- *Link*<sub>22</sub>:

Il centro di massa del *link*<sub>22</sub>,  $G_{22}$ , coincide con il centro del braccio inferiore:

$$G_{22} = \frac{1}{2} \left( x_0 + \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) - \frac{d}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \quad y_0 + \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) + \frac{d}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + a + b \cos(q_2) \quad z_0 - b \sin(q_2) - 2base \right)^T$$

La matrice di rotazione che riporta la terna di riferimento  $S_{22}$  alla terna  $S_b$  è una composizione, secondo Cardano, di una rotazione attorno all'asse  $z$ , che porta virtualmente il braccio sullo stesso piano dove scorre il *link*<sub>21</sub>, e una rotazione rispetto all'asse  $x$  della terna risultante.

Si ricavano, tramite considerazioni geometriche, due angoli utili per l'individuazione delle effettive rotazioni, le quali variano in base alla posizione del punto  $G_{22}$ .

Si consideri  $i_2$ , la proiezione della semi-lunghezza del *link*<sub>22</sub> sul piano y-z, definita come:

$$i_2 = \sqrt{(y_{G_{22}} - y_{B_2})^2 + (z_{G_{22}} - z_{B_2})^2}.$$

$\beta_2$  rappresenta l'angolo d'inclinazione del  $link_{22}$  rispetto al piano su cui si muove il  $link_{21}$  e si trova tramite la seguente relazione trigonometrica inversa:

$$\beta_2 = a \cos\left(\frac{i_2}{c/2}\right).$$

Considerando sempre la proiezione del braccio sul piano  $y$ - $z$ ,  $\alpha_2$  rappresenta l'angolo compreso tra  $i_2$  e il cateto corrispondente alla differenza di coordinate zeta tra i punti  $G_{22}$  e  $B_2$ .

$$\alpha_2 = a \cos\left(\frac{|z_{G_{22}} - z_{B_2}|}{i_2}\right).$$

In base alla posizione assunta da  $G_{22}$ , si ottengono quattro matrici  ${}^b R_{22}$  diverse:

1. La coordinata  $x$  di  $G_{22}$  è negativa e la sua coordinata  $y$  è minore di quella di  $B_2$ :

$${}^b R_{22} = R_z(-\beta_2) \cdot R_x\left(+\frac{\pi}{2} + \alpha_2\right).$$

2. La coordinata  $x$  di  $G_{22}$  è negativa e la sua coordinata  $y$  è maggiore di quella di  $B_2$ :

$${}^b R_{22} = R_z(-\beta_2) \cdot R_x\left(+\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right).$$

3. La coordinata  $x$  di  $G_{22}$  è positiva e la sua coordinata  $y$  è minore di quella di  $B_2$ :

$${}^b R_{22} = R_z(+\beta_2) \cdot R_x\left(+\frac{\pi}{2} + \alpha_2\right).$$

4. La coordinata  $x$  di  $G_{22}$  è positiva e la sua coordinata  $y$  è maggiore di quella di  $B_2$ :

$${}^b R_{22} = R_z(+\beta_2) \cdot R_x\left(+\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right).$$

La rappresentazione grafica dei quattro casi riferiti al braccio 2 è qualitativamente uguale a quella riportata per il braccio 1 con i dovuti cambiamenti degli assi di riferimento.

### BRACCIO 3

Il procedimento d'individuazione delle terne di riferimento è lo stesso svolto per il braccio 1.

- *Link<sub>31</sub>*:

Il centro di massa del *link<sub>31</sub>*,  $G_{31}$ , ha le seguenti coordinate:

$$G_{31} = \left( -(a + l_g \cdot \cos(q_{r3})) \quad 0 \quad -l_g \cdot \sin(q_{r3}) - base \right)^T.$$

La matrice che riporta la terna di riferimento  $S_{3l}$  a  $S_b$  è una rotazione attorno all'asse  $y$  di un angolo pari a  $q_{r3}$ :

$${}^b R_{31} = R_y(q_{r3}) = \begin{bmatrix} \cos(q_{r3}) & 0 & \sin(q_{r3}) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(q_{r3}) & 0 & \cos(q_{r3}) \end{bmatrix}.$$

- *Link<sub>32</sub>*:

Il centro di massa del *link<sub>32</sub>*,  $G_{32}$ , ha le seguenti coordinate:

$$G_{32} = \frac{1}{2} \left( x_0 - \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) - \frac{d}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - a - b \cos(q_3) \quad y_0 - \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) + \frac{d}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \quad z_0 - b \sin(q_3) - 2base \right)^T$$

Tramite considerazioni geometriche, si ricavano la proiezione sul piano  $x$ - $z$  della semi-lunghezza del *link<sub>32</sub>* e i due angoli,  $\beta_3$  e  $\alpha_3$ , in modo del tutto simile a quanto fatto per il braccio 1.

$$i_3 = \sqrt{(x_{G_{32}} - x_{B_3})^2 + (z_{G_{32}} - z_{B_3})^2},$$
$$\beta_3 = a \cos\left(\frac{i_3}{c/2}\right) \qquad \alpha_3 = a \cos\left(\frac{|z_{G_{32}} - z_{B_3}|}{i_3}\right).$$

In base alla posizione assunta da  $G_{32}$ , si ottengono quattro matrici  ${}^b R_{32}$  diverse:

1. La coordinata  $y$  di  $G_{32}$  è negativa e la sua coordinata  $x$  è maggiore di quella di  $B_3$ :

$${}^b R_{32} = R_z(-\beta_3) \cdot R_y\left(+\frac{\pi}{2} + \alpha_3\right).$$

2. La coordinata  $y$  di  $G_{32}$  è negativa e la sua coordinata  $x$  è minore di quella di  $B_3$ :

$${}^b R_{32} = R_z(-\beta_3) \cdot R_y\left(+\frac{\pi}{2} - \alpha_3\right).$$

3. La coordinata  $y$  di  $G_{32}$  è positiva e la sua coordinata  $x$  è maggiore di quella di  $B_3$ :

$${}^b R_{32} = R_z(+\beta_3) \cdot R_y\left(+\frac{\pi}{2} + \alpha_3\right).$$

4. La coordinata  $y$  di  $G_{32}$  è positiva e la sua coordinata  $x$  è minore di quella di  $B_3$ :

$${}^b R_{32} = R_z(+\beta_3) \cdot R_y\left(+\frac{\pi}{2} - \alpha_3\right).$$

La rappresentazione grafica dei quattro casi riferiti al braccio 3 è qualitativamente uguale a quella riportata per il braccio 1 con i dovuti cambiamenti legati alla simmetria della rappresentazione.

#### BRACCIO 4

Il procedimento d'individuazione delle terne di riferimento è lo stesso svolto per il braccio 2.

- *Link*<sub>41</sub>:

Il centro di massa del *link*<sub>41</sub>,  $G_{41}$ , ha le seguenti coordinate:

$$G_{41} = (0 \quad -(a + l_g \cdot \cos(q_{r4})) \quad -l_g \cdot \sin(q_{r4}) - base)^T.$$

La matrice che riporta la terna di riferimento  $S_{41}$  a  $S_b$  è una rotazione attorno all'asse  $x$  di un angolo pari a  $-q_{r4}$ :

$${}^b R_{41} = R_x(-q_{r4}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-q_{r4}) & -\sin(-q_{r4}) \\ 0 & \sin(-q_{r4}) & \cos(-q_{r4}) \end{bmatrix}.$$

- *Link*<sub>42</sub>:

Il centro di massa del *link*<sub>42</sub>,  $G_{42}$ , ha le seguenti coordinate:

$$G_{42} = \frac{1}{2} \left( x_0 - \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) + \frac{d}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \quad y_0 - \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) - \frac{d}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - a - b \cos(q_4) \quad z_0 - b \sin(q_4) - 2base \right)^T$$

Tramite considerazioni geometriche, si ricavano la proiezione sul piano  $y$ - $z$  della semi-lunghezza del *link*<sub>42</sub> e i due angoli,  $\beta_4$  e  $\alpha_4$ , in modo del tutto simile a quanto fatto per il braccio 2.

$$i_4 = \sqrt{(y_{G_{42}} - y_{B_4})^2 + (z_{G_{42}} - z_{B_4})^2},$$

$$\beta_4 = a \cos\left(\frac{i_4}{c/2}\right) \qquad \alpha_4 = a \cos\left(\frac{|z_{G_{42}} - z_{B4}|}{i_4}\right).$$

In base alla posizione assunta da  $G_{42}$ , si ottengono quattro matrici  ${}^b R_{32}$  diverse:

1. La coordinata  $x$  di  $G_{42}$  è positiva e la sua coordinata  $y$  è maggiore di quella di  $B_4$ :

$${}^b R_{42} = R_z(-\beta_4) \cdot R_x\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha_4\right).$$

2. La coordinata  $x$  di  $G_{42}$  è positiva e la sua coordinata  $y$  è minore di quella di  $B_4$ :

$${}^b R_{42} = R_z(-\beta_4) \cdot R_x\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha_4\right).$$

3. La coordinata  $x$  di  $G_{42}$  è negativa e la sua coordinata  $y$  è maggiore di quella di  $B_4$ :

$${}^b R_{42} = R_z(+\beta_4) \cdot R_x\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha_4\right).$$

4. La coordinata  $x$  di  $G_{42}$  è negativa e la sua coordinata  $y$  è minore di quella di  $B_4$ :

$${}^b R_{42} = R_z(+\beta_4) \cdot R_x\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha_4\right).$$

La rappresentazione grafica dei quattro casi riferiti al braccio 4 è qualitativamente uguale a quella riportata per il braccio 1 con i dovuti cambiamenti degli assi di riferimento.

#### PIATTAFORMA MOBILE

La trasformazione che porta a coincidere il sistema di riferimento della piattaforma, centrato nel punto di collegamento dell'*end effector* e con l'asse  $z$  rivolto verso il basso, alla terna  $S_b$  è una rotazione attorno a  $x$  di un angolo pari a  $\pi$ :

$${}^b R_p = R_x(\pi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

### 4.4.2 Tensori di inerzia

Il tensore di inerzia di un corpo rigido esprime in che modo una distribuzione (discreta o continua)

di massa reagisce ai cambiamenti di stato del moto e, in particolar modo, ne descrive il comportamento in caso di rotazioni attorno a un asse.

Il tensore di inerzia valutato rispetto a un sistema di riferimento nello spazio è una matrice simmetrica  $3 \times 3$  della forma:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

dove gli elementi sulla diagonale principale rappresentano i momenti di inerzia rispetto all'asse indicato, mentre gli altri sono termini di accoppiamento. Nel caso in cui si consideri come riferimento una terna composta dagli assi principali d'inerzia<sup>8</sup> del corpo rigido in esame, la (4.8) si trasforma in una matrice diagonale, della seguente forma:

$$I = \begin{bmatrix} I'_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I'_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I'_{zz} \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Si richiamano, ora, alcune nozioni sull'inerzia dei corpi rigidi, che saranno utili nella determinazione degli elementi dei tensori d'inerzia dei *link*:

- Definizione generale d'inerzia rispetto a un asse ( $x$  rappresenta la distanza dall'asse della massa infinitesima  $dm$ ):

$$I = \int x^2 \cdot dm; \quad (4.10)$$

- Inerzia di un corpo puntiforme ( $dist$  è la distanza della massa  $m$  dal punto rispetto cui si sta calcolando):

$$I = m \cdot dist^2; \quad (4.11)$$

- Inerzia di un'asta sottile rispetto a un asse ortogonale passante per il centro ( $d$  rappresenta la lunghezza del corpo di massa  $m$ ):

$$I = \frac{1}{12} \cdot m \cdot d^2; \quad (4.12)$$

- Inerzia di un corpo cilindrico pieno rispetto al suo asse di simmetria ( $r$  rappresenta il raggio del corpo di massa  $m$ ):

$$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2. \quad (4.13)$$

---

<sup>8</sup> Essendo la matrice d'inerzia simmetrica, il teorema spettrale per il caso reale garantisce l'esistenza di una base ortonormale (terna degli assi principali di inerzia) in cui il tensore si diagonalizza.

### TENSORE DI INERZIA DEI LINK<sub>1l</sub>

Si considerino il  $link_{1l}$  dell' $i$ -esimo braccio, visto come un'asta cilindrica, e la terna  $S_{1l}$  degli assi principali di inerzia. Il momento di inerzia rispetto all'asse di simmetria dell'asta ( $x$  per i bracci 1 e 3,  $y$  per 2 e 4) si calcola tramite la (4.13), mentre quello rispetto agli altri due assi della terna si calcola tramite la (4.10) perché il centro di massa non coincide con il centro di simmetria dell'asta. Si riportano i calcoli per il braccio 1 ( $\rho$  rappresenta la densità e  $S$  la sezione dell'asta):

$$I_{xx} = \int x^2 \cdot dm = \rho S \int_{-(br-lg)}^{lg} x^2 \cdot dx = \frac{\rho S}{3} \cdot [x^3]_{-(br-lg)}^{lg} = m_b \cdot \left( \frac{br^2}{3} - br \cdot lg + lg^2 \right).$$

Possiamo, adesso, definire i tensori di inerzia del  $link_{1l}$  e del  $link_{3l}$  (uguali tra loro) e dei  $link_{2l}$  e  $link_{4l}$  (anch'essi coincidenti):

$$I_{11} = I_{31} = \text{diag} \left[ \frac{1}{2} m_b r_b^2 \quad m_b \cdot \left( \frac{br^2}{3} - br \cdot lg + lg^2 \right) \quad m_b \cdot \left( \frac{br^2}{3} - br \cdot lg + lg^2 \right) \right],$$
$$I_{21} = I_{41} = \text{diag} \left[ m_b \cdot \left( \frac{br^2}{3} - br \cdot lg + lg^2 \right) \quad \frac{1}{2} m_b r_b^2 \quad m_b \cdot \left( \frac{br^2}{3} - br \cdot lg + lg^2 \right) \right].$$

### TENSORE DI INERZIA DEI LINK<sub>12</sub>

Si considerino il  $link_{12}$  dell' $i$ -esimo braccio, visto come un'unica asta cilindrica secondo la semplificazione apportata al modello dell'Adept Quattro™, e la terna  $S_{12}$  degli assi principali di inerzia. Il momento di inerzia rispetto all'asse di simmetria dell'asta ( $x$  per i bracci 1 e 3,  $y$  per 2 e 4) si trova tramite la (4.13). Dato il piccolo valore di  $r_c$ , esso potrà essere trascurato. L'inerzia rispetto agli altri due assi della terna, invece, si calcola tramite la (4.12).

Per simmetria, i tensori di inerzia del  $link_{12}$  e del  $link_{32}$  sono uguali tra loro così come quelli dei  $link_{22}$  e  $link_{42}$ :

$$I_{12} = I_{32} = 2 \cdot \text{diag} \left[ \frac{1}{2} m_c r_c^2 \quad \frac{1}{12} m_c c^2 \quad \frac{1}{12} m_c c^2 \right],$$
$$I_{22} = I_{42} = 2 \cdot \text{diag} \left[ \frac{1}{12} m_c c^2 \quad \frac{1}{2} m_c r_c^2 \quad \frac{1}{12} m_c c^2 \right].$$

### PIATTAFORMA MOBILE

La piattaforma mobile del manipolatore in analisi può solo muoversi nelle tre direzioni cartesiane. L'unica coordinata libera di rotazione, non presa in esame nelle considerazioni di questo elaborato, è conseguenza di un particolare sistema di trasmissione montato su di essa. La traslazione del punto su cui si collega l'organo terminale coincide con quella dell'intera piattaforma; per questo motivo, possiamo considerare l'insieme come una massa concentrata in quel punto. Nota la distanza tra l'origine del sistema di base e l'*end effector*, l'espressione del tensore di inerzia è la seguente:

$$I_p = m_p \cdot dist^2 \cdot \text{diag}[1 \quad 1 \quad 1] \quad \text{con} \quad dist = \sqrt{x^2 + y^2 + z_0^2}.$$



Nel caso in cui il manipolatore stia movimentando un carico, la massa di quest'ultimo può essere inclusa direttamente nel valore di  $m_p$ .

### 4.4.3 Matrici Jacobiane

Il passo successivo per la determinazione della matrice *GIMRE* di Quattro™ è trovare le matrici Jacobiane<sup>9</sup> per esprimere i vettori di velocità, lineari ( $v$ ) e angolari ( $\omega$ ), dei componenti del robot in funzione del vettore velocità dell'*end effector*.

Si riportano di seguito, per ogni braccio, i vettori di velocità lineare dei centri di massa dei *link*, ottenuti derivando nel tempo i corrispondenti vettori posizione, e quelli di velocità angolare ottenuti dividendo la velocità lineare per il raggio di rotazione del centro di massa stesso. Sono definite, inoltre, le matrici Jacobiane, di dimensione  $3 \times 4$ , per le velocità lineari ( $H_{ij}$ ) e per quelle angolari ( $L_{ij}$ ). Un analogo ragionamento è applicato alla piattaforma. Per la determinazione delle  $H_{ij}$ , si utilizza la relazione (2.4) per riferire la matrice alle coordinate libere dell'*end effector*.

#### BRACCIO 1:

- Velocità del *link*<sub>11</sub>:

$$v_{11} = (-lg \cdot \sin(q_{r1}) \cdot \dot{q}_{r1} \quad 0 \quad -lg \cdot \cos(q_{r1}) \cdot \dot{q}_{r1})^T = H_{11} \cdot \{\dot{x}\} \quad \text{e} \quad \omega_{11} = \frac{v_{11}}{lg} = L_{11} \cdot \{\dot{x}\},$$

$$\text{dove} \quad H_{11} = \begin{bmatrix} -lg \cdot \sin(q_{r1}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -lg \cdot \cos(q_{r1}) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot J^{-1} \quad \text{e} \quad L_{11} = \frac{H_{11}}{lg}.$$

- Velocità del *link*<sub>12</sub>:

$$v_{12} = \frac{1}{2} \left( \dot{x}_0 - \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \dot{\theta}_0 - b \sin(q_1) \dot{q}_1 \quad \dot{y}_0 + \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \dot{\theta}_0 \quad \dot{z}_0 - b \cos(q_1) \dot{q}_1 \right)^T = H_{12} \cdot \{\dot{x}\}$$

$$\text{e} \quad \omega_{12} = \frac{v_{12}}{c/2} = L_{12} \cdot \{\dot{x}\}, \quad \text{dove}$$

$$H_{12} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{d}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \\ 0 & 1 & 0 & \frac{d}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{b}{2} \begin{bmatrix} -\sin(q_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos(q_1) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot J^{-1} \quad \text{e} \quad L_{12} = \frac{H_{12}}{c/2}.$$

<sup>9</sup> Essendo matrici che contengono rapporti di velocità, possono essere chiamate anch'esse matrici Jacobiane.

### BRACCIO 2:

- Velocità del  $link_{21}$ :

$$v_{21} = (0 \quad -lg \cdot \sin(q_{r2}) \cdot \dot{q}_{r2} \quad -lg \cdot \cos(q_{r2}) \cdot \dot{q}_{r2})^T = H_{21} \cdot \{\dot{x}\} \quad \text{e} \quad \omega_{21} = \frac{v_{21}}{lg} = L_{21} \cdot \{\dot{x}\},$$

$$\text{dove} \quad H_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -lg \cdot \sin(q_{r2}) & 0 & 0 \\ 0 & -lg \cdot \cos(q_{r2}) & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot J^{-1} \quad \text{e} \quad L_{21} = \frac{H_{21}}{lg}.$$

- Velocità del  $link_{22}$ :

$$v_{22} = \frac{1}{2} \left( \dot{x}_0 - \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \dot{\theta}_0 \quad \dot{y}_0 + \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \dot{\theta}_0 - b \sin(q_2) \dot{q}_2 \quad \dot{z}_0 - b \cos(q_2) \dot{q}_2 \right)^T = H_{22} \cdot \{\dot{x}\}$$

e  $\omega_{22} = \frac{v_{22}}{c/2} = L_{22} \cdot \{\dot{x}\}$ , dove

$$H_{22} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{d}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \\ 0 & 1 & 0 & \frac{d}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{b}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(q_2) & 0 & 0 \\ 0 & -\cos(q_2) & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot J^{-1} \quad \text{e} \quad L_{22} = \frac{H_{22}}{c/2}.$$

### BRACCIO 3:

Per quanto riguarda il braccio 3, i ragionamenti sono del tutto analoghi a quelli riferiti al braccio 1; si riportano solamente i vettori di velocità lineare e le rispettive matrici ottenute.

- Velocità del  $link_{31}$ :

$$v_{31} = (lg \cdot \sin(q_{r3}) \cdot \dot{q}_{r3} \quad 0 \quad -lg \cdot \cos(q_{r3}) \cdot \dot{q}_{r3})^T, \quad H_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & lg \cdot \sin(q_{r3}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -lg \cdot \cos(q_{r3}) & 0 \end{bmatrix} \cdot J^{-1}.$$

- Velocità del  $link_{32}$ :

$$v_{32} = \frac{1}{2} \left( \dot{x}_0 + \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \dot{\theta}_0 + b \sin(q_3) \dot{q}_3 \quad \dot{y}_0 - \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \dot{\theta}_0 \quad \dot{z}_0 - b \cos(q_3) \dot{q}_3 \right)^T,$$

$$H_{32} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & +\frac{d}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{d}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{b}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sin(q_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos(q_3) & 0 \end{bmatrix} \cdot J^{-1}.$$

#### BRACCIO 4:

Per quanto riguarda il braccio 4, i ragionamenti sono del tutto analoghi a quelli riferiti al braccio 2; si riportano solamente i vettori di velocità lineare e le rispettive matrici ottenute.

- Velocità del  $link_{41}$ :

$$v_{41} = (0 \quad lg \cdot \sin(q_{r4}) \cdot \dot{q}_{r4} \quad -lg \cdot \cos(q_{r4}) \cdot \dot{q}_{r4})^T, \quad H_{41} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & lg \cdot \sin(q_{r4}) \\ 0 & 0 & 0 & -lg \cdot \cos(q_{r4}) \end{bmatrix} \cdot J^{-1}.$$

- Velocità del  $link_{42}$ :

$$v_{42} = \frac{1}{2} \left( \dot{x}_0 + \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \dot{\theta}_0 \quad \dot{y}_0 - \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \dot{\theta}_0 + b \sin(q_4) \dot{q}_4 \quad \dot{z}_0 - b \cos(q_4) \dot{q}_4 \right)^T,$$

$$H_{42} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{d}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{d}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{b}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(q_4) \\ 0 & 0 & 0 & -\cos(q_4) \end{bmatrix} \cdot J^{-1}.$$

#### PIATTAFORMA MOBILE:

Per quanto riguarda la piattaforma, i valori di velocità lineare e angolare dell'origine del suo sistema di riferimento sono banalmente:

$$v_p = (\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z}_0)^T = H_p \cdot \{\dot{x}\}, \quad \omega_p = (0 \quad 0 \quad \dot{\theta}_0)^T = L_p \cdot \{\dot{x}\}.$$

Le matrici  $H_p$  e  $L_p$  sono definite nel modo seguente:

$$H_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & offset \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \\ 0 & 1 & 0 & -offset \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad L_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

In conformità a quanto appena determinato, è possibile osservare che:

- le matrici  $H_{i1}$  e  $L_{i1}$  dipendono fortemente dall'inversa dello Jacobiano; la matrice che premoltiplica la  $J$  inversa è funzione unicamente della variabile di giunto del braccio  $i$ -esimo e sono non nulli soltanto i due elementi della  $i$ -esima colonna riferiti al piano di moto del *link* (primo e terzo per i bracci 1 e 3, secondo e terzo per i bracci 2 e 4);
- le matrici  $H_{i2}$  e  $L_{i2}$  sono costituite dalla somma di due termini; il primo esprime la dipendenza della piattaforma mobile dalla posizione e dalla sua eventuale rotazione (quarta colonna), il secondo, invece, la dipendenza dal posizionamento e dalla velocità del *link* precedente;
- la velocità lineare  $v_p$  coincide con il vettore velocità dell'*end effector* a meno del contributo legato all'inclinazione della piattaforma che varia in base alla rotazione; questo si riflette negli elementi presenti nella quarta colonna di  $H_p$ ;
- la velocità angolare  $\omega_p$  presenta solo il termine relativo alla rotazione rispetto all'asse verticale  $z$  che coincide con il grado di libertà  $\theta_0$ .

Siamo, ora, in grado di determinare la *GIMRE* definita in (4.7); i dettagli del calcolo sono riportati nel listato MATLAB® presente in Appendice A.

## 4.5 Scomposizione della GIMRE

La matrice d'inerzia generalizzata ridotta all'*end effector* ( $N$ ) è quadrata di dimensione pari al numero di gradi di libertà del robot, simmetrica, definita positiva con autovalori positivi e reali. È funzione dei parametri geometrici (lunghezze e raggi dei componenti), inerziali (masse e inerzie) e della configurazione assunta dal manipolatore (dipendenza dalla  $J$  inversa, dalle variabili di giunto e dalle coordinate libere).

Utilizzando il formalismo di Lagrange, si può scrivere il seguente modello dinamico:

$$N(x) \cdot \{\ddot{x}\} = g(x, \dot{x}) = \begin{Bmatrix} f(x, \dot{x}) \\ h(x, \dot{x}) \end{Bmatrix}. \quad (4.14)$$

Il vettore ( $4 \times 1$ ) delle forze generalizzate, indicato con  $\mathbf{g}$ , tiene conto del contributo della gravità, delle forze/coppie non lineari, delle forze/coppie applicate dai motori e da quelle applicate dall'esterno sull'organo terminale. Il termine  $\mathbf{f}$  raggruppa i primi tre elementi di  $\mathbf{g}$  e rappresenta le forze agenti nelle direzioni cartesiane, mentre il quarto elemento ( $\mathbf{h}$ ) indica la coppia totale attorno all'asse verticale.

Quando il manipolatore assume una configurazione dinamicamente isotropica, il rapporto tra i moduli dell'accelerazione dell'*end effector* e del vettore  $\mathbf{g}$  non dipende dalla direzione di quest'ultimo. Tale definizione generale perde, però, di significato fisico quando l'accelerazione considerata presenta termini sia lineari sia angolari.

Da un punto di vista cinematico, ciascun moto del manipolatore può essere visto come la composizione di una traslazione e di una rotazione con comportamenti dinamici indipendenti tra loro; si possono, allora, analizzare separatamente i contributi traslazionali e quelli rotazionali. Con questo scopo, si riscrive la matrice  $N$  nella sua forma generica, dividendola in sottomatrici nel modo seguente:

$$N = \begin{bmatrix} m_{xx} & m_{xy} & m_{xz} & c(x) \\ m_{xy} & m_{yy} & m_{yz} & \\ m_{xz} & m_{yz} & m_{zz} & \\ & c^T(x) & & I_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TIM & c(x) \\ c^T(x) & I_\theta \end{bmatrix}.$$

- La sottomatrice  $TIM$  (*Translational Inertia Matrix*, [5]), quadrata e simmetrica di dimensione  $3 \times 3$ , è legata alle forze lineari che si creano quando sull'organo terminale è presente un'accelerazione con orientazione costante. I termini hanno le dimensioni di una massa,  $[kg]$ ; sulla diagonale sono presenti le masse equivalenti rispetto all'asse indicato dal pedice, mentre gli altri elementi sono termini di accoppiamento. Quando ci si trova in un punto appartenente all'asse centrale del manipolatore (i valori delle coordinate  $x_0$  e  $y_0$  sono nulli),  $TIM$  è diagonale. Se la coordinata  $x_0$  non è nulla, compaiono anche i termini di accoppiamento tra l'asse  $x$  e l'asse  $z$  ( $m_{xz}$ ) e allo stesso modo, quando  $y_0$  è diversa da zero, compaiono i termini  $m_{yz}$ . Qualora ci si trovi in una configurazione dove  $x_0$  e  $y_0$  sono entrambi non nulli, sono presenti anche i termini di accoppiamento tra gli assi  $x$  e  $y$  ( $m_{xy}$ ).
- Lo scalare  $I_\theta$  o  $EIM$  (*Equivalent Inertia Moment*, [5]) ha le dimensioni di un momento di inerzia,  $[kg \ m^2]$ , ed è legato alla coppia lineare di inerzia che si crea quando sull'organo terminale agisce un'accelerazione angolare rispetto all'asse verticale  $z$ .
- Il vettore  $3 \times 1$   $c(x)$  o  $DCV$  (*Dynamic Coupling Vector*, [5]) raggruppa i termini di  $N$  che associano le accelerazioni lineari con quella angolare; è proporzionalmente legato alla forza di inerzia che si crea durante una rotazione dell'organo terminale o, viceversa, alla coppia di inerzia presente durante una sua traslazione.

Le considerazioni riportate spiegano il significato delle seguenti equazioni che dividono il modello dinamico in due diversi, il primo riferito alla traslazione, l'altro alla rotazione:

$$TIM(x) \cdot \{\ddot{x}_0 \quad \ddot{y}_0 \quad \ddot{z}_0\}^T + c(x) \cdot \ddot{\theta}_0 = f(x, \dot{x}) \quad (4.15)$$

$$c^T(x) \cdot \{\ddot{x}_0 \quad \ddot{y}_0 \quad \ddot{z}_0\}^T + I_\theta \cdot \ddot{\theta}_0 = h(x, \dot{x}) \quad (4.16)$$

Se si considera un moto di pura traslazione, fissando, quindi, a zero la rotazione e le sue derivate, il modello che si ottiene è:

$$TIM(x) \cdot \begin{cases} \ddot{x}_0 \\ \ddot{y}_0 \\ \ddot{z}_0 \end{cases} = f(x, \dot{x}). \quad (4.17)$$

Considerando (4.17), il robot si trova in una configurazione dinamicamente isotropica per quanto riguarda una traslazione, quando il rapporto tra i moduli dell'accelerazione lineare sull'*end effector* e del vettore delle forze lineari  $f$  è indipendente dalla direzione di quest'ultimo.

## 4.6 Indice di isotropia dinamica

Per valutare l'isotropia dinamica del manipolatore in esame, ci si baserà sull'analisi degli autovalori di  $TIM$ , che variano secondo la configurazione del manipolatore; più vicini sono i loro valori, maggiore sarà l'isotropia del robot.

Denominando con  $aTIM(i)$  l' $i$ -esimo autovalore della matrice  $TIM$ , nel caso in cui essi assumano lo stesso valore, sussiste la relazione, [4]:

$$aTIM(1) \cdot aTIM(2) \cdot aTIM(3) = \left( \frac{aTIM(1) + aTIM(2) + aTIM(3)}{3} \right)^3. \quad (4.18)$$

La (4.18) indica che, il prodotto di tre termini identici è uguale al cubo della loro media. Si può definire, allora, l'indice d'isotropia dinamica  $dTIM$  come:

$$dTIM = \frac{27 \cdot aTIM(1) \cdot aTIM(2) \cdot aTIM(3)}{(aTIM(1) + aTIM(2) + aTIM(3))^3} = \frac{27 \cdot \det(TIM)}{[tr(TIM)]^3}. \quad (4.19)$$

Il valore di  $dTIM$  è unitario quando ci si trova in una configurazione isotropica; è tanto minore di 1 quanto più  $aTIM(1)$ ,  $aTIM(2)$  e  $aTIM(3)$  sono differenti (ovviamente, non assume valori negativi poiché tutti gli autovalori sono positivi). Analizzando, poi, il segno e l'azzeramento contemporaneo delle derivate parziali rispetto ai tre autovalori, si conclude che l'unità sia il massimo assoluto della funzione  $dTIM$ . Si noti come, per la determinazione dell'indice  $dTIM$ , sia sufficiente calcolare determinante e traccia della matrice.

L'indice appena determinato svolge principalmente tre funzioni:

1. in fase di progettazione l'uguaglianza  $dTIM = 1$  può aiutare nell'individuazione dei migliori parametri inerziali e geometrici, che aumentino le prestazioni dinamiche o soddisfino alcuni vincoli legati sempre alla dinamica;
2. la determinazione di un valore medio di  $dTIM$  valutato nello spazio di lavoro di un manipolatore già esistente può rappresentare un parametro di confronto tra robot diversi;
3. la ricerca del valore massimo di  $dTIM$  permette di individuare la zona dello spazio di lavoro in cui il manipolatore presenti un comportamento dinamico isotropico in riferimento ad una pura traslazione.

## 4.6.1 Risultati da simulazione

Tramite il modello dell'Adept Quattro™ implementato in MATLAB®, si sono determinati la matrice *GIMRE* e l'indice *dTIM* descritti in questo capitolo.

La matrice *N* dipende dal peso dell'oggetto che il manipolatore sta movimentando. Si riporta solamente il grafico riferito a un valore nullo di carico (figura 4.8), poiché l'aggiunta della sua eventuale massa ha l'unico effetto di modificare i valori ottenuti (l'isotropia aumenta) ma non l'andamento del grafico.

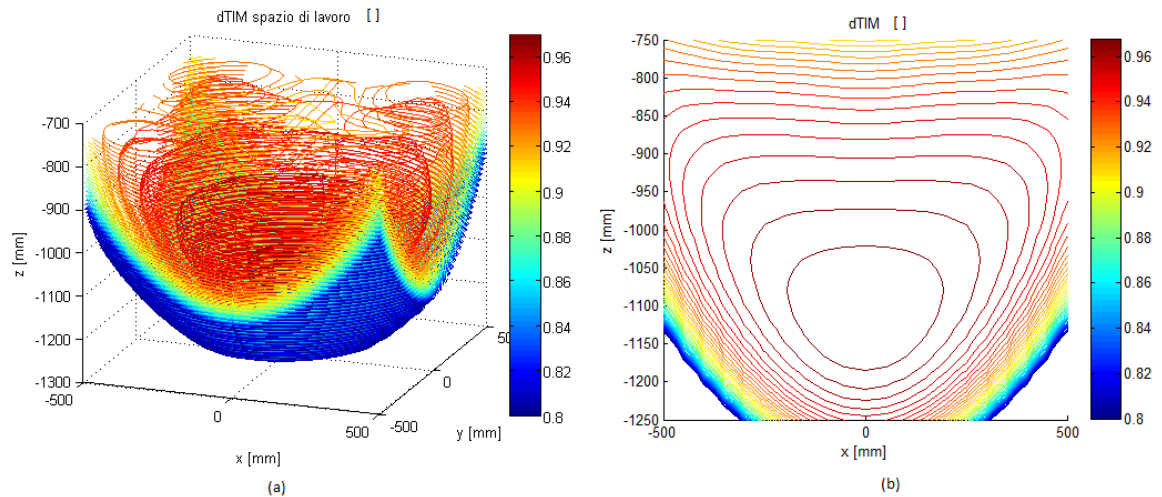


Figura 4.8: indice di isotropia dinamica: (a) vista dello spazio di lavoro, (b) sezione del piano x-z.

I valori dell'indice sono in media molto elevati, a testimonianza del fatto che la simmetria strutturale del manipolatore porti indiscutibili vantaggi al comportamento dinamico. Come ci si può attendere, i valori maggiori si trovano in zona centrale; avvicinandosi, invece, alla periferia dello spazio di lavoro, l'isotropia diminuisce.

Si ricordi che questa simulazione non tiene conto dei valori di *offset* e dell'eventuale lunghezza dell'*end effector* che provocherebbero una traslazione del grafico, come spiegato nel capitolo due.

## 4.7 Separazione dei contributi traslazionali

Tramite la matrice generalizzata d'inerzia, è possibile individuare le zone dove l'*end effector* raggiunge le massime accelerazioni. Anche in questo caso, si separano i contributi in base alla direzione di moto che si esamina.

Per analizzare, in particolare, un movimento nel piano orizzontale si considerano le prime due righe della matrice, mentre per isolare una singola direzione si valuterà la riga 1 per il movimento in *x*, la riga 2 per il movimento in *y* e la riga 3 per quello lungo *z*. Si moltiplica, poi, l'*i*-esima riga della matrice *TIM* ( $TIM_i$ ) per la sua trasposta (nel caso di  $TIM_{xy}$  si calcola anche il determinante) per ottenere un valore scalare. La radice quadrata di questo valore, estratta per avere i risultati con le dimensioni di una massa, individua i nuovi indici:

$$dTIM_{xy} = \sqrt{\det(TIM_{1,2} \cdot TIM_{1,2}^T)}$$

$$dTIM_x = \sqrt{TIM_1 \cdot TIM_1^T} \quad dTIM_y = \sqrt{TIM_2 \cdot TIM_2^T} \quad dTIM_z = \sqrt{TIM_3 \cdot TIM_3^T} .$$

Si ricercano le zone in cui l'indice considerato assuma i valori minori, ai quali corrisponde la possibilità di ottenere i più elevati valori di accelerazione. A titolo di esempio, si riporta il grafico dell'indice  $dTIM_z$  riferito a un movimento verticale (figura 4.9):

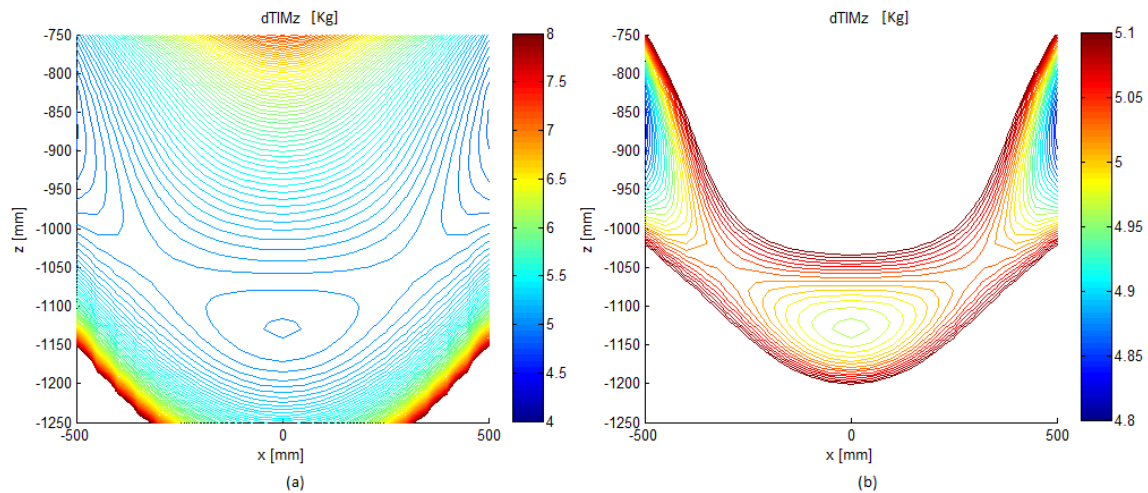


Figura 4.9: indice  $dTIM_z$ : (a) sezione del piano x-z dello spazio di lavoro, (b) particolare del canale centrale.

I valori minimi s'incontrano lateralmente, allo stesso modo del caso cinematico; è presente anche una bolla centrale con valori non troppo lontani dai minimi a una quota che, però, non coincide con quanto trovato nel capitolo 3.

La definizione degli indici basati sulla matrice  $TIM$  presenta un limite: essi misurano l'attitudine di un manipolatore a ottenere elevate accelerazioni sull'organo terminale considerando solo il carico esterno e tralasciando le inerzie della parte attiva. Possono essere definiti indici dinamici passivi, [9].

Si rende necessaria, quindi, un'analisi che entri maggiormente nello specifico delle forze coinvolte durante una traslazione dell'*end effector*, includendo in particolare, anche il contributo delle coppie applicate dai motori.



# MODELLO DINAMICO

La determinazione di un modello dinamico relativo a un manipolatore parallelo si pone alla base dell'analisi delle sue caratteristiche. È, inoltre, importante dal punto di vista del controllo, campo in cui è bene che il sistema simuli il comportamento del robot il più precisamente possibile, e dal punto di vista della progettazione, nella scelta e nella disposizione dei membri e dei motori. Un'accurata analisi dinamica può portare un grande miglioramento in termini di costi, velocità e prestazioni di una macchina industriale.

Le coppie che devono essere fornite dai motori non dipendono solamente dalla legge di moto imposta, ma anche dalle proprietà di massa dei componenti e dalle forze esterne. Determinare un modello completo, che tenga conto di tutti i rapporti che entrano in gioco, è un problema non lineare e di non immediata soluzione, soprattutto se riferito a manipolatori paralleli. La complessità è causata principalmente dalle interazioni tra i vari *link*, dalla presenza di forze non lineari (Coriolis e centrifuga) e dalla variazione dell'inerzia del robot in base alla configurazione che esso assume.

In letteratura sono descritte alcune procedure per la definizione del modello dinamico di diversi robot. I metodi più comunemente utilizzati possono essere classificati in tre categorie: Newton-Eulero ([16], [34]), Lagrange ([9]) e principio dei lavori virtuali ([15], [21]).

In generale, un modello dinamico deve essere completo, ma allo stesso tempo semplice e veloce in termini di costo computazionale per permettere al sistema di controllo *real-time* di svolgere i calcoli entro l'intervallo di tempo predeterminato.

In questo capitolo, ci si concentrerà, più che sulla velocità di calcolo, su come la determinazione di un modello dinamico per l'Adept Quattro™ possa aiutare ad analizzare le prestazioni tramite indici che, al contrario di quelli descritti nel capitolo quattro, tengano conto anche delle forze attive.

## 5.1 Modello dinamico inverso e diretto

Con modello dinamico inverso s'intendono le relazioni che permettono di determinare forze e coppie che i giunti motorizzati devono applicare, in funzione delle leggi di posizione, velocità e accelerazione che si vogliono far compiere all'*end effector* e della massa del carico trasportato. Il modello dinamico diretto, al contrario, determina le forze da applicare all'organo terminale, note le forze prodotte dai motori.

L'analisi dinamica inversa svolta in questo capitolo utilizza il metodo di Newton-Eulero.

### 5.1.1 Metodo di Newton-Eulero

L'approccio di Newton-Eulero per la determinazione di un modello dinamico per robot paralleli si basa sull'equilibrio delle forze e delle coppie agenti sul manipolatore, sfruttando i seguenti principi:

- equazione dinamica di Newton: la somma delle forze  $F_i$  agenti su un punto materiale P è

uguale alla variazione della quantità di moto:

$$\sum_i F_i = \frac{d}{dt}(m_p \cdot v_p) = m_p \cdot \dot{v}_p \quad (5.1)$$

- equazione dinamica di Eulero: la somma dei momenti agenti su un corpo è uguale alla variazione del momento della quantità di moto:

$$\sum_i \tau_i = \frac{d}{dt}(I_p \cdot \omega_p) = I_p \cdot \dot{\omega}_p + \omega_p \times I_p \cdot \omega_p \quad (5.2)$$

- principio di azione e reazione: le forze e i momenti applicati dal corpo sono uguali in modulo e direzione, ma contrari in verso, alle forze e ai momenti agenti sul corpo.

Le relazioni (5.1) e (5.2) consentono di scrivere l'equazione dinamica di equilibrio delle forze generalizzate per ciascun elemento, mentre il principio di azione e reazione permette di non considerare le forze vincolari agenti sui giunti di collegamento.

L'utilizzo del metodo di Newton-Eulero definisce un modello adatto alla sintesi di sistemi di controllo *real-time*, grazie al non elevato numero di equazioni da considerare, [3].

## 5.2 Parametri e assunzioni per definire il modello dinamico

Prima di passare alla stesura del modello dinamico per l'Adept Quattro™, è necessario riadattare lo schema geometrico descritto nel primo capitolo, vista la complessità delle relazioni che legano i movimenti e le forze agenti lungo una singola catena cinematica. Di seguito sono riportate le semplificazioni effettuate.

### LINK 2:

Esaminando il *link 2* dell'*i*-esimo braccio del manipolatore e ricordando che la rotazione lungo l'asse centrale è inibita, si può osservare come la sua inerzia possa essere considerata piccola abbastanza da essere trascurata, ([2], [16]). La massa, invece, si può distribuire equamente sui due estremi, in modo da rientrare nell'analisi dinamica dei *link 1* e della piattaforma. Con queste semplificazioni, rappresentate in figura 5.1, si riduce la complessità del modello, senza discostarsi troppo dal comportamento reale del manipolatore.

### PIATTAFORMA MOBILE:

La complessità della geometria della piattaforma mobile è stata già ridotta trascurando i tratti di collegamento tra piattaforma e bracci e riducendo la struttura a un semplice quadrato. Se si considera, poi, che la piattaforma sia in grado solamente di traslare, il suo movimento può essere ricondotto a quello del suo asse centrale con le masse concentrate negli estremi, identificati dai punti A e B (figura 5.2).

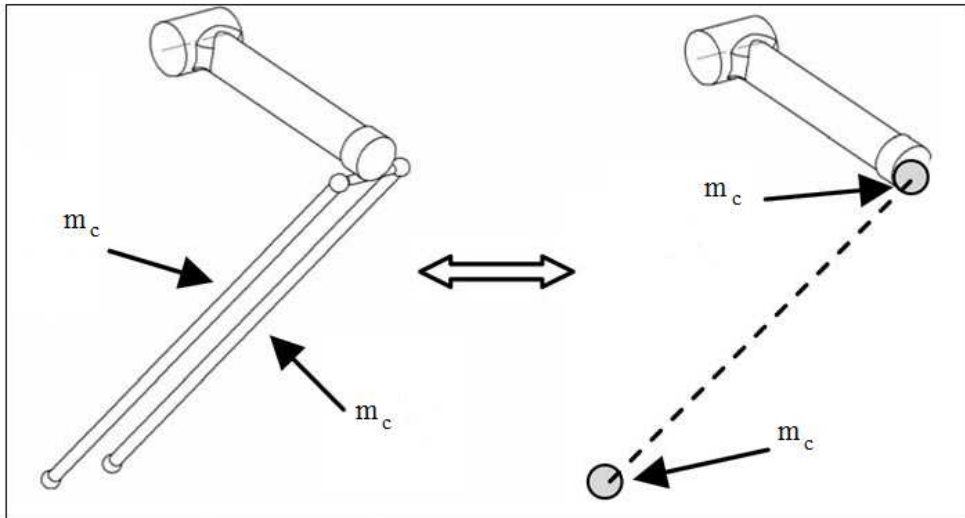


Figura 5.1: semplificazione dinamica del link 2.

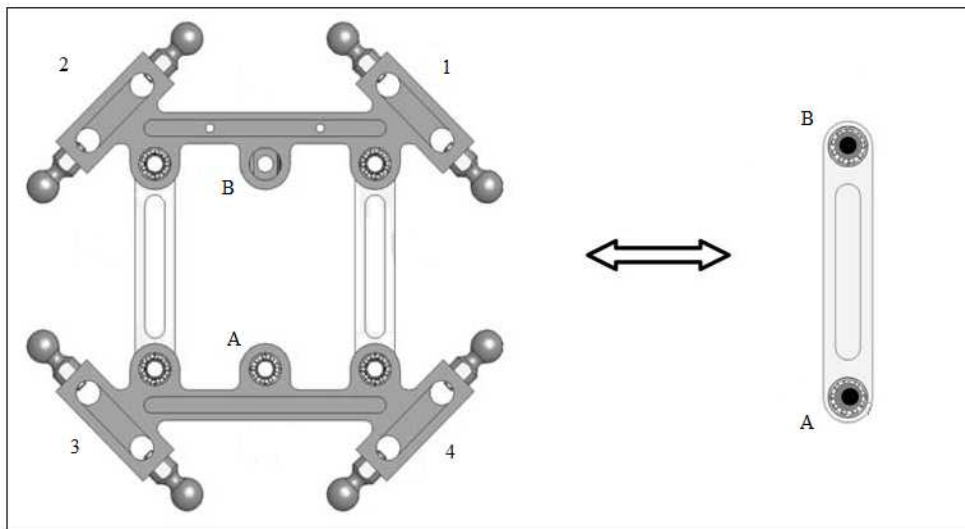


Figura 5.2: semplificazione dinamica della piattaforma mobile articolata.

Le masse riportate alle estremità sono uguali ciascuna a metà del valore di massa della piattaforma, cui si somma due volte il valore di  $m_c$  per effetto della semplificazione descritta in precedenza:

$$m_A = m_B = \frac{m_p}{2} + 2 \cdot m_c.$$

Pur assumendo lo stesso valore, si preferisce mantenere separati i due contributi perché A coincide con il punto di collegamento dell'*end effector* e, quindi, la massa di un eventuale carico potrà essere sommata direttamente a  $m_A$ .

### 5.3 Modello dinamico dell'Adept Quattro™

È possibile procedere alla determinazione del modello dinamico dell'Adept Quattro™ applicando sistematicamente il metodo di Newton-Eulero, ([2], [3]).

La coppia risultante per compiere un dato movimento può essere considerata come somma del contributo della parte attiva con quello della piattaforma e del carico; come espresso nel paragrafo 5.2, il contributo dei *link* 2 può essere incluso negli addendi appena citati.

In base alla convenzione sui segni adottata in questo elaborato, una coppia che provochi un movimento dei giunti motorizzati verso l'alto ha segno negativo, mentre una coppia che li fa muovere verso il basso segno positivo. Trasformando, poi, i momenti nelle corrispondenti forze nello spazio cartesiano, i segni cambiano, uniformandosi alla convenzione dell'asse  $z$  (verso l'alto forza positiva e viceversa). Si riporta l'equazione (2.5) che lega le coppie dei motori alle forze generate sull'*end effector*:

$$\{\tau\} = J^T \cdot \{F\} \quad (5.3)$$

I paragrafi seguenti analizzano ciascun contributo presente nel modello dinamico del manipolatore, espresso in notazione matriciale.

#### 5.3.1 Contributo della parte attiva

In questa sezione si considerano i contributi degli attuatori, dei *link* 1 e delle masse  $m_c$  (concentrate agli estremi) in termini di inerzia dei corpi rotanti, gravità e attrito.

La coppia necessaria risultante per il movimento dei componenti elencati è la somma vettoriale del contributo dato dai motori, quello della forza di gravità ( $g$  rappresenta il modulo dell'accelerazione di gravità pari a  $9,81 \text{ m/s}^2$ ) e quello dovuto agli attriti:

$$\tau_{ACT} = I_{ACT} \cdot \{\ddot{q}\} + g \cdot M_{ARM} \cdot \cos(q) - F_S - F_V \cdot \{\dot{q}\} \quad (5.4)$$

Il primo addendo del termine a destra dell'uguale rappresenta la coppia applicata dai motori in seguito a un'accelerazione dei giunti pari a  $\{\ddot{q}\}$ . La matrice d'inerzia diagonale ( $4 \times 4$ ) che premoltiplica l'accelerazione è definita come segue:

$$I_{ACT} = \text{diag}(I_{eq} \quad I_{eq} \quad I_{eq} \quad I_{eq}) \quad \text{con} \quad \begin{cases} I_{eq} = i^2 \cdot I_{mot} + I_{link1} + m_c \cdot b^2 \\ I_{link1} = \frac{1}{3} \cdot m_b \cdot br^2 \end{cases}$$

dove  $I_{eq}$  rappresenta l'inerzia equivalente di un singolo braccio valutata in corrispondenza del punto  $A_i$ . Si notino la presenza dell'inerzia del motore, che dipende dal quadrato del suo rapporto di trasmissione  $i$ , l'inerzia del *link* 1 rispetto all'estremità e quella del punto di massa  $m_c$ . Il valore di inerzia del motore è pari a  $0,811 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , mentre  $i$  vale 50 (dato fornito dall'azienda produttrice del robot); proprio per l'elevato valore di  $i$ , l'inerzia del motore rappresenta un dato indispensabile per una corretta analisi dinamica.

Il secondo addendo in (5.4) rappresenta il momento provocato dalla componente ortogonale al *link* 1 della forza di gravità e  $M_{ARM}$  è una matrice diagonale  $4 \times 4$  i cui termini sono il prodotto della massa equivalente per la distanza dall'estremità  $A_i$ .

I contributi di questo membro si devono, però, suddividere in due. Il primo è dovuto al peso del solo *link* 1, che, agendo nel suo centro di massa, genera la seguente coppia (figura 5.3a):

$$\tau_{link1} = g \cdot m_b \cdot l_g \cdot \cos(q_r) \quad \text{con} \quad \cos(q_r) = [\cos(q_{r1}) \quad \cos(q_{r2}) \quad \cos(q_{r3}) \quad \cos(q_{r4})]^T.$$

Il secondo contributo è riferibile, invece, al peso del punto di massa  $m_c$  che si trova a una distanza  $b$  dal punto  $A_i$  (figura 5.3b):

$$\tau_{m_c} = g \cdot m_c \cdot b \cdot \cos(q) \quad \text{con} \quad \cos(q) = [\cos(q_1) \quad \cos(q_2) \quad \cos(q_3) \quad \cos(q_4)]^T.$$

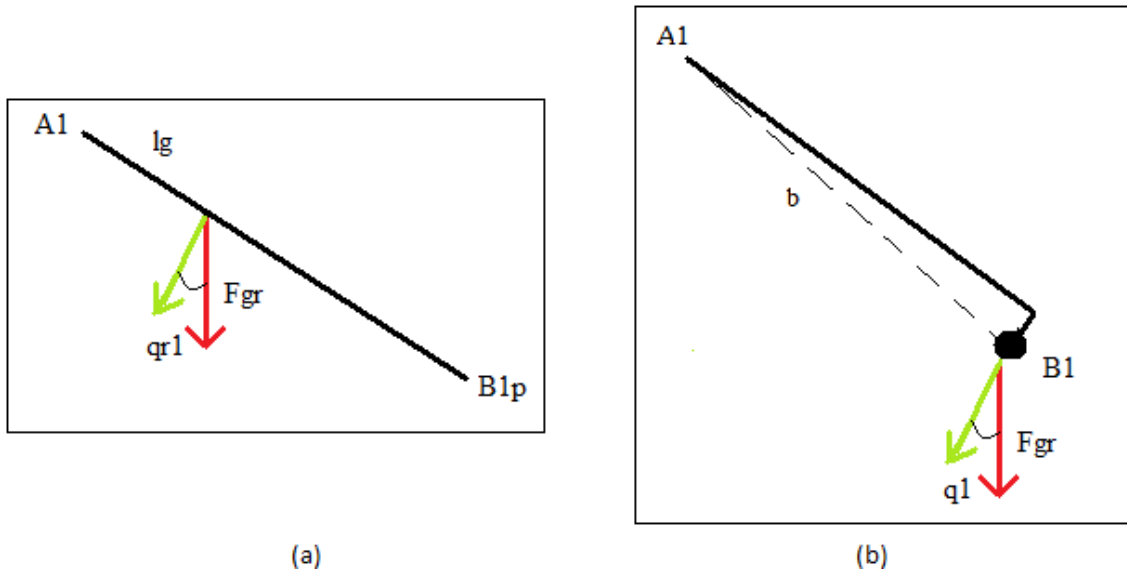


Figura 5.3: coppia generata dalla gravità per il braccio 1: (a) contributo del *link* 1, (b) contributo della massa  $m_c$ .

Il terzo e il quarto termine della somma in (5.4) rappresentano i contributi degli attriti Coulombiano (o di strisciamento) e viscoso, che si oppongono al moto. Data la simmetria del manipolatore, possiamo considerare uguali in modulo, per tutti e quattro i bracci, la coppia di attrito Coulombiano  $f_s$ , misurata in  $[N m]$ , e il coefficiente di attrito viscoso  $f_v$ , misurato in  $[m^2 kg/s]$ . Si definiscono, allora:

$$F_s = f_s \cdot [\text{sign}(\dot{q}_1) \quad \text{sign}(\dot{q}_2) \quad \text{sign}(\dot{q}_3) \quad \text{sign}(\dot{q}_4)]^T$$

$$F_v \cdot \{\dot{q}\} = \text{diag}[f_v \quad f_v \quad f_v \quad f_v]^T \cdot \{\dot{q}\}.$$

Per gli obiettivi di questo elaborato, è possibile trascurare i termini appena descritti ([17]). Se si volesse, però, determinare un modello dinamico più preciso da inserire, ad esempio, nel sistema di controllo, bisognerebbe valutare l'incidenza dell'attrito sulle coppie generate.

In base alle considerazioni effettuate, la (5.4) può essere riscritta nel modo seguente:

$$\tau_{ACT} = I_{eq} \cdot \{\ddot{q}\} + g \cdot m_b \cdot l_g \cdot \cos(q_r) + g \cdot m_c \cdot b \cdot \cos(q) \quad (5.5)$$

dove la matrice  $I_{ACT}$  è stata sostituita dallo scalare  $I_{eq}$  per snellire la notazione.

### 5.3.2 Contributo della piattaforma mobile e del carico

In questa sezione si considerano i contributi legati al movimento e al peso della piattaforma mobile, la cui massa si pensa concentrata in due punti A e B, coincidenti rispettivamente con i punti  $M_{34}$  e  $M_{12}$ , già definiti.

Le velocità di A e B si ottengono derivando le loro coordinate di posizione e sono riportate di seguito (s'inscrive anche un quarto termine riferito alla velocità di rotazione attorno all'asse z, sempre uguale a 0):

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \left( \dot{x}_0 + \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \cdot \dot{\theta}_0 \quad \dot{y}_0 - \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \cdot \dot{\theta}_0 \quad \dot{z}_0 \quad 0 \right)^T \\ \dot{B} &= \left( \dot{x}_0 - \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \cdot \dot{\theta}_0 \quad \dot{y}_0 + \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \cdot \dot{\theta}_0 \quad \dot{z}_0 \quad 0 \right)^T. \end{aligned}$$

Derivando una seconda volta nel tempo, si calcolano anche i valori di accelerazione:

$$\begin{aligned} \ddot{A} &= \left( \ddot{x}_0 + \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \dot{\theta}_0^2 + \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \ddot{\theta}_0 \quad \ddot{y}_0 + \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \dot{\theta}_0^2 - \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \ddot{\theta}_0 \quad \ddot{z}_0 \quad 0 \right)^T \\ \ddot{B} &= \left( \ddot{x}_0 - \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \dot{\theta}_0^2 - \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \ddot{\theta}_0 \quad \ddot{y}_0 - \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \dot{\theta}_0^2 + \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \ddot{\theta}_0 \quad \ddot{z}_0 \quad 0 \right)^T. \end{aligned}$$

Si determinano, ora, le matrici Jacobiane  $J_A$  e  $J_B$  che legano le velocità di A e B a quelle dei giunti attivi; in questo modo si ottiene la relazione tra le forze applicate alla piattaforma e le coppie dei motori.

Il primo passo è definire l'equivalenza che unisce  $\dot{A}$  e  $\dot{B}$  con le velocità dell'organo terminale, definendo rispettivamente le matrici  $T_A$  e  $T_B$ :

$$\dot{A} = T_A \cdot \{\dot{x}\} \quad \text{con} \quad T_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{B} = T_B \cdot \{\dot{x}\} \quad \text{con} \quad T_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{d}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \\ 0 & 1 & 0 & +\frac{d}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta_0\right) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Da passaggi di tipo cinematico, si definiscono le seguenti relazioni per ricavare  $J_{x_A}$  e  $J_{x_B}$ :

$$J_{x_A} \cdot \dot{A} = Jq \cdot \{\dot{q}\} \quad \text{e} \quad J_{x_B} \cdot \dot{B} = Jq \cdot \{\dot{q}\},$$

$$J_{x_A} = \begin{bmatrix} jx_{11} & jx_{12} & jx_{13} & 2 \cdot jx_{14} \\ jx_{21} & jx_{22} & jx_{23} & 2 \cdot jx_{24} \\ jx_{31} & jx_{32} & jx_{33} & 0 \\ jx_{41} & jx_{42} & jx_{43} & 0 \end{bmatrix} \quad J_{x_B} = \begin{bmatrix} jx_{11} & jx_{12} & jx_{13} & 0 \\ jx_{21} & jx_{22} & jx_{23} & 0 \\ jx_{31} & jx_{32} & jx_{33} & 2 \cdot jx_{34} \\ jx_{41} & jx_{42} & jx_{43} & 2 \cdot jx_{24} \end{bmatrix}.$$

Possiamo definire, adesso, le matrici  $J_A$  e  $J_B$  come:

$$J_A = J_{x_A}^{-1} \cdot Jq \quad \text{e} \quad J_B = J_{x_B}^{-1} \cdot Jq.$$

#### CONTRIBUTO DEL PUNTO A:

La forza che muove il punto A è uguale alla somma vettoriale della corrispondente forza trasmessa dai motori e di quella di gravità (il punto ha massa  $m_A$ ). In notazione matriciale, racchiudendo i contributi di tutte e quattro le catene cinematiche, si può scrivere:

$$F_A = M_A \cdot (\ddot{A} + G) \quad (5.6)$$

Il vettore  $G$  rappresenta l'accelerazione gravitazionale, mentre  $M_A$  è una matrice di massa  $4 \times 4$  diagonale:

$$G = [0 \quad 0 \quad -9,81 \quad 0]^T, \quad M_A = \text{diag}([m_A \quad m_A \quad m_A \quad 0]).$$

L'equazione di equilibrio in (5.6) è riferita alle forze agenti sull'*end effector* (spazio cartesiano); si può trasformare in un'equivalente relazione di equilibrio nello spazio dei giunti, tramite la (5.3):

$$\tau_A = J_A^T \cdot M_A \cdot (\ddot{A} + G). \quad (5.7)$$

#### CONTRIBUTO DEL PUNTO B:

Pe quanto riguarda il punto B, il ragionamento è analogo a quello fatto per A. La forza inerziale si può definire come:

$$F_B = M_B \cdot (\ddot{B} + G) \quad \text{con} \quad M_B = \text{diag}([m_B \quad m_B \quad m_B \quad 0]) \quad (5.8)$$

Applicando la (5.3) per trasportare l'equazione (5.8) nello spazio dei giunti, si ottiene:

$$\tau_B = J_B^T \cdot M_B \cdot (\ddot{B} + G). \quad (5.9)$$

#### CONTRIBUTO DEL CARICO:

L'effetto prodotto sulla dinamica dal peso di un carico si può ridurre al contributo, in termini di coppia, generato da un punto P, coincidente con A, di massa  $m_{load}$ . Le coordinate saranno le medesime, con l'eccezione dei valori di velocità e accelerazione angolari che non sono nulli, ma pari rispettivamente a  $\dot{\theta}_0$  e  $\ddot{\theta}_0$ .

Determinando, come in precedenza, la matrice Jacobiana riferita a P, si ottiene  $T_p$ . Se si considera un valore di rotazione nullo, la matrice  $T_p$  può essere identificata con  $T_a$  e, allo stesso modo, possiamo eguagliare le accelerazioni. I passaggi successivi, di conseguenza, sono gli stessi svolti per A. L'unica differenza cui porre attenzione è che, nella matrice di massa  $M_p$ , è presente anche un termine inerziale pari al prodotto della massa del carico per la distanza dall'origine O:

$$M_p = \text{diag}([m_{load} \quad m_{load} \quad m_{load} \quad I_{load}]).$$

La coppia che muove il carico secondo la legge di moto desiderata si può scrivere come:

$$\tau_p = J_A^T \cdot M_p \cdot (\ddot{A} + G). \quad (5.10)$$

## 5.4 Somma dei contributi

Sommando i contributi di (5.5), (5.7), (5.9) e (5.10) si ottiene il modello dinamico dell'Adept Quattro™ riferito allo spazio dei giunti:

$$\tau = I_{eq} \cdot \{\ddot{q}\} + g \cdot m_b \cdot l_g \cdot \cos(q_r) + g \cdot m_c \cdot b \cdot \cos(q) + J_A^T \cdot (M_A + M_p) \cdot (\ddot{A} + G) + J_B^T \cdot M_B \cdot (\ddot{B} + G)$$

Se la rotazione è nulla, le accelerazioni di A e B sono uguali all'accelerazione di  $\mathbf{x}$ . L'espressione precedente si può scrivere nel seguente modo:

$$\tau = I_{eq} \cdot \{\ddot{q}\} + g \cdot m_b \cdot l_g \cdot \cos(q_r) + g \cdot m_c \cdot b \cdot \cos(q) + PLAT \cdot \{\ddot{x}\} + PLAT \cdot G \quad (5.11)$$

dove  $PLAT = J_A^T \cdot (M_A + M_p) + J_B^T \cdot M_B$ .

In (5.11) sono presenti le accelerazioni dei motori espresse sia nello spazio dei giunti sia in quello cartesiano. Per unificare la notazione si può utilizzare l'equazione (2.11) della cinematica di accelerazione inversa, ottenendo:



$$\begin{aligned} \tau = & [ I_{eq} \cdot J^{-1} + PLAT ] \cdot \{\ddot{x}\} + [ I_{eq} \cdot Jq^{-1} \cdot (\dot{J}x - \dot{J}q \cdot J^{-1}) ] \cdot \{\dot{x}\} + g \cdot m_b \cdot \lg \cdot \cos(q_r) + \\ & + g \cdot m_c \cdot b \cdot \cos(q) + PLAT \cdot G. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Per riportare tutto nello spazio cartesiano, è sufficiente premoltiplicare i membri di (5.12) per l'inversa della trasposta della matrice Jacobiana. In questa forma, il modello dinamico individua separatamente i contributi dati dalla forza applicata dai motori sulla piattaforma, dalle forze non lineari e da quella di gravità.

$$F = LL \cdot \{\dot{x}\} + F_{cc}(x, \dot{x}) + F_{gr}(x). \quad (5.13)$$

### 5.4.1 Forza applicata dai motori

In (5.13),  $LL$  rappresenta la matrice d'inerzia  $4 \times 4$  che moltiplica l'accelerazione lineare data alla piattaforma:

$$LL = J^{-T} \cdot I_{eq} \cdot J^{-1} + J^{-T} \cdot PLAT$$

Questa matrice, dipendente dalla posizione, differisce da quella trovata nel capitolo quattro perché considera anche l'inerzia della parte attiva e, per questo, permette una valutazione non solo passiva delle capacità di accelerazione del manipolatore.

### 5.4.2 Forza centrifuga e di Coriolis

Il termine  $F_{cc}$  di (5.13), dipendente dal vettore velocità, rappresenta il contributo al modello delle forze non lineari, riportate alla piattaforma. La matrice che premoltiplica  $\{\dot{x}\}$  dipende dalla posizione assunta dal manipolatore e, a sua volta, dalla velocità. L' $i$ -esimo termine di  $F_{cc}$  (che ha dimensione  $4 \times 1$ ), infatti, può essere scritto in forma quadratica, isolando il trasposto del vettore velocità dalle derivate delle matrici  $Jx$  e  $Jq$ :

$$F_{cc_i} = \frac{1}{2} \{\dot{x}\}^T \cdot C_i \cdot \{\dot{x}\}.$$

La figura 5.4 riporta l'andamento del modulo delle forze non lineari generate da una velocità unitaria lungo l'asse  $z$  positivo (grafico a) e lungo una diagonale del piano  $x$ - $y$  (grafico b). Imporre un valore maggiore alla velocità, modifica i grafici solo quantitativamente (dipendenza dal quadrato della velocità), ma non qualitativamente.

Per quanto riguarda uno spostamento verticale, la zona dello spazio di lavoro in cui le forze non lineari hanno contributo nullo o trascurabile è costituita dal solito canale centrale, con il minimo attorno al punto  $P_z$  definito nel capitolo tre. Per il movimento orizzontale, invece, le forze lineari sono minime in un intorno del punto appartenente all'asse verticale con altezze  $z$  pari a  $-1050 \text{ mm}$ . Si può pensare che in queste aree il manipolatore presenti le migliori caratteristiche per quanto riguarda la capacità di trasmettere la velocità dai motori alla piattaforma (*velocity capability*, [9]).

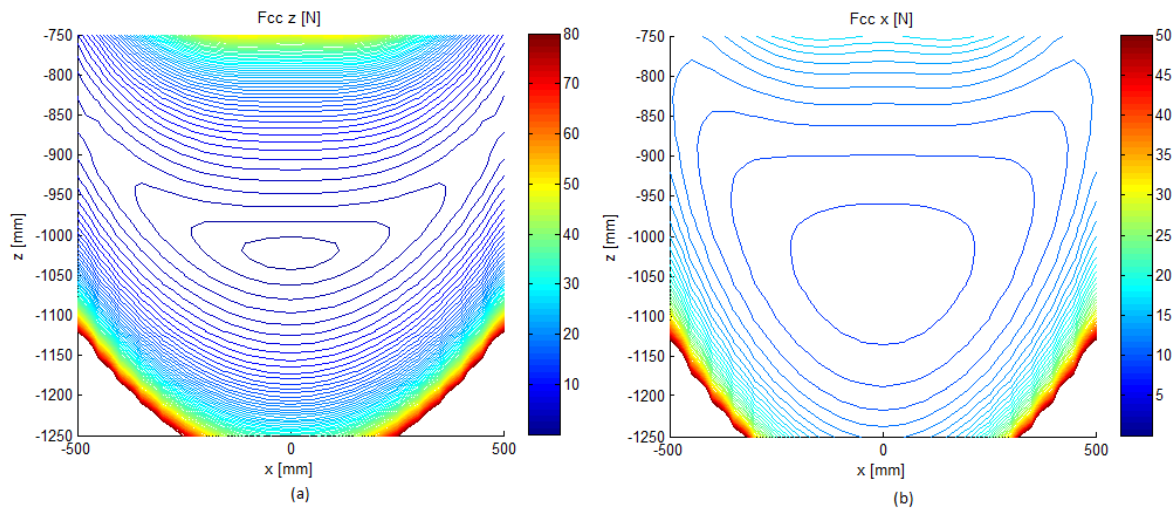


Figura 5.4: andamento del modulo della forza non lineare in corrispondenza di: (a) un movimento verticale, (b) un movimento orizzontale.

### 5.4.3 Forza di gravità

Il termine  $F_{gr}$  di (5.13) racchiude i contributi del peso dei *link*, della piattaforma e del carico, riportati all'organo terminale; si evidenzia la dipendenza dalla configurazione assunta dal manipolatore. Il modulo della forza di gravità riportata all'*end effector* ha valore massimo se tutti i bracci presentano elevata energia potenziale gravitazionale, valore minimo quando le quattro catene cinematiche tendono a essere completamente distese. La figura 5.5 riporta l'andamento del modulo di  $F_{gr}$  nello spazio di lavoro dell'Adept Quattro™:

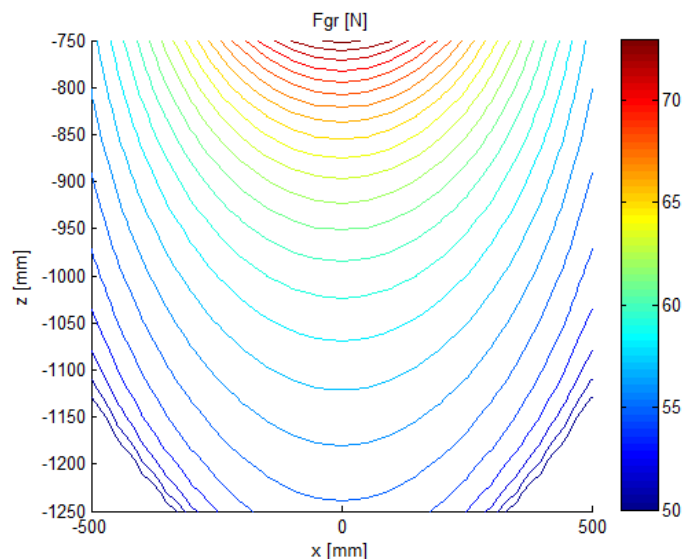


Figura 5.5: andamento del modulo della forza di gravità riportata all'organo terminale.

## 5.5 Capacità di produrre accelerazione

Per descrivere la capacità del robot di accelerare linearmente il suo organo terminale (*acceleration*

*capability* o *swiftness*), è utile slegare la valutazione dai valori di accelerazione e velocità per trovare degli indici dipendenti esclusivamente dalla configurazione del manipolatore.

Si considera, allora, la matrice di inerzia ricavata dal modello dinamico e, in particolare, la sottomatrice simmetrica  $L$  di dimensione  $3 \times 3$  relativa alla traslazione. La forza attiva che genera un'accelerazione unitaria lineare lungo una direzione è legata alla corrispondente riga di  $L$  e il suo modulo minimo può essere determinato utilizzando lo stesso procedimento usato con la *GIMRE*. Indicando con  $L_i$  l' $i$ -esima riga della matrice  $L$ , si definiscono:

$$kat_x = \sqrt{L_1 \cdot L_1^T} \quad kat_y = \sqrt{L_2 \cdot L_2^T} \quad kat_z = \sqrt{L_3 \cdot L_3^T}$$

$$kat = \frac{1}{3} \left( \sqrt{L_1 \cdot L_1^T} + \sqrt{L_2 \cdot L_2^T} + \sqrt{L_3 \cdot L_3^T} \right) \quad kat_{xy} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{L_1 \cdot L_1^T} + \sqrt{L_2 \cdot L_2^T} \right).$$

dove gli ultimi due indici rappresentano una media dei contributi per riferire gli indici dinamici di massa a una traslazione generica ([9]) e a una nel piano orizzontale.

Le zone dello spazio di lavoro, dove il manipolatore ha una maggiore capacità di produrre un'accelerazione lineare sull'*end effector*, corrispondono ai valori minimi di massa equivalente.

La figura 5.6 riporta l'indice di massa riferito a una traslazione generica; i valori minori si trovano a un'altezza pari a  $-1100 \text{ mm}$ . Si noti, inoltre, il comportamento nei pressi della frontiera dello spazio di lavoro: avvicinandosi a una condizione di singolarità, i valori passano bruscamente dal massimo al minimo, giustificando la presenza di coppie elevatissime sui motori anche per un minimo movimento.

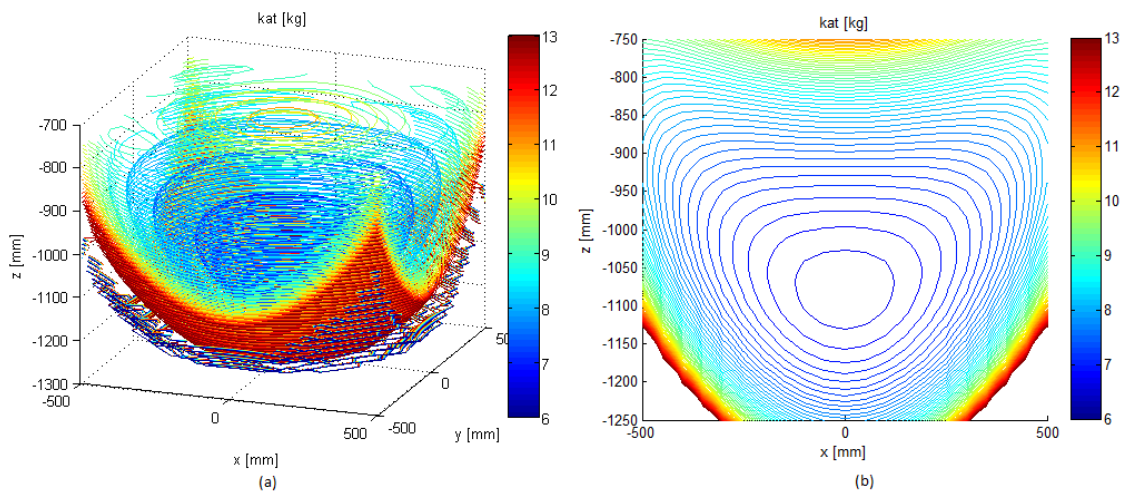


Figura 5.6: indice dinamico di massa riferito a una traslazione generica: (a) spazio di lavoro, (b) piano  $x$ - $z$ .

Un'analisi più precisa impone la divisione dei contributi in base al piano di moto. In figura 5.7 si riporta l'andamento dell'indice  $kat_z$ , riferito a un movimento verticale.

Si notino la presenza di una bolla centrale, intorno al punto  $P_z$ , e dei picchi laterali lungo il canale evidenziato, entrambe zone di minima massa equivalente.

Si può confrontare questo grafico con quello dell'indice  $dTIM_z$  (figura 4.9); le prove sperimentali

dimosteranno che gli indici ottenuti dalla matrice  $L$  rappresentano meglio il comportamento del manipolatore.

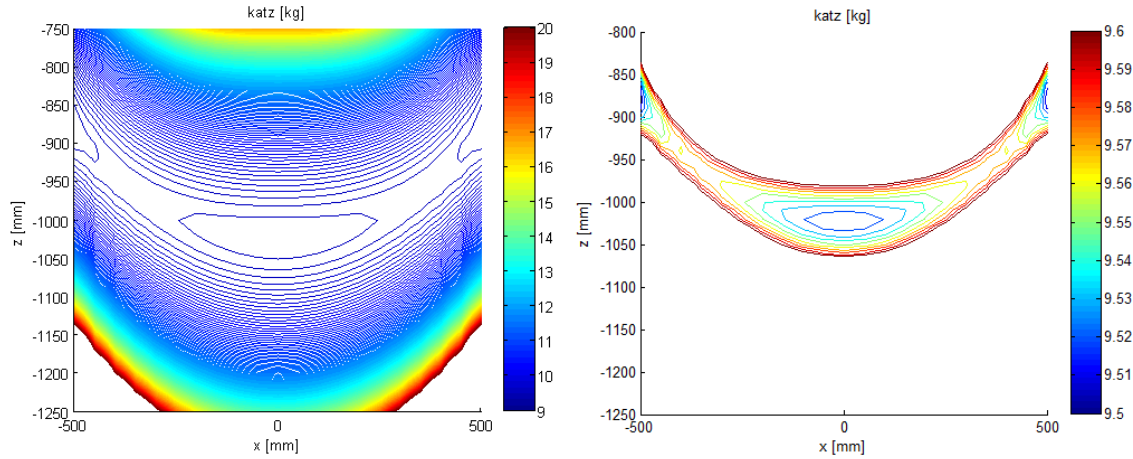


Figura 5.7: indice dinamico di massa riferito a una traslazione lungo  $z$  (piano  $x$ - $z$ ) con particolare dell'andamento lungo il canale centrale.

Gli indici di *acceleration capability* definiti in questo paragrafo indicano il comportamento dinamico del manipolatore a parità di accelerazione. È bene, però, considerare anche come il sistema di controllo del robot pianifica il movimento.

## 5.6 Movimento verticale

Si analizza il comportamento dinamico del manipolatore quando compie un movimento verticale (fasi di sollevamento o di abbassamento di un pezzo durante un tragitto di *pick-and-place*), con particolare attenzione alla massima accelerazione di trascinamento ottenibile.

Il controllore dell'Adept Quattro™ lavora in modo che almeno uno dei quattro motori fornisca la massima coppia. Nota la posizione del robot, una volta individuato il motore la cui coppia fornita è maggiore in corrispondenza di un'accelerazione verticale unitaria, si calcola un fattore di moltiplicazione,  $alfa_z$ , che permetta di ridimensionare le coppie per ottenerne almeno una massima.

$$J^T \cdot LL \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = J^T \cdot F_{mot} = \tau_{mot} \quad \Rightarrow \quad alfa_z = \frac{\tau'_{NOM}}{\max|\tau_{mot}|}$$

I motori dell'Adept Quattro™ presentano coppia nominale  $\tau_{NOM}$  pari a  $2,39 Nm$  e una potenza di  $700 W$ . Ipotizzando come ideale la trasmissione che riduce la velocità di un fattore  $i$  (50), la massima coppia sull'albero condotto sarà uguale al prodotto di  $i$  per  $\tau_{NOM}$  ( $\tau'_{NOM} = 119,5 Nm$ ).

Per un punto dello spazio di lavoro appartenente all'asse verticale, la coppia massima è riferita a tutti e quattro i motori. Se ci si trova lungo le diagonali del piano  $x$ - $y$ , invece, si ha coppia massima su due dei motori; negli altri casi uno solo è quello sfruttato appieno.

Dato la linearità della relazione, il valore di  $\text{alfa}_z$  rappresenta anche la massima accelerazione di trascinamento lungo l'asse  $z$  che si ottiene in una determinata configurazione.

In figura 5.8 si riporta il valore del coefficiente  $\text{alfa}_z$ , valutato in ogni punto dello spazio di lavoro.

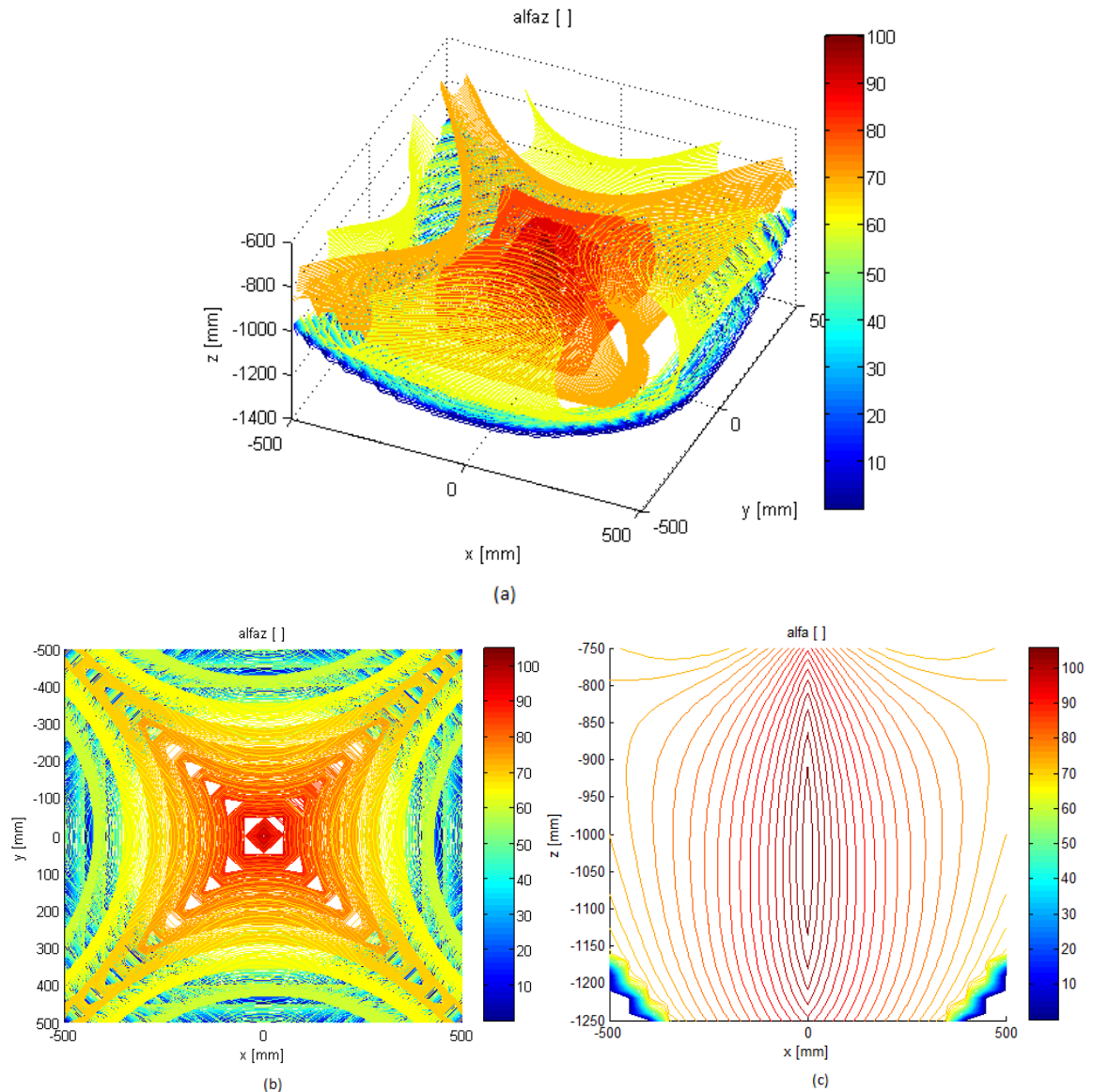


Figura 5.8: coefficiente  $\text{alfa}_z$  per spostamenti verticali: (a) spazio di lavoro, (b) piano  $x$ - $y$ , (c) sezione di una diagonale.

I valori massimi di  $\text{alfa}_z$  si ottengono in una zona appartenente all'asse verticale e centrata in  $P_z$ . Sono presenti accelerazioni elevate lungo le due diagonali del piano orizzontale (corrispondenti agli assi  $x$  e  $y$  della piattaforma nel sistema di riferimento reale), soprattutto in punti con coordinata  $z$  maggiore di  $P_z$ .

Considerando l'*offset* della piattaforma, i grafici risulterebbero traslati.

## 5.7 Movimento orizzontale

L'analisi appena svolta per il movimento verticale, può essere ripetuta per un movimento orizzontale generico o specifico lungo gli assi.

Per uno spostamento orizzontale lungo l'asse  $x$  o  $y$  della piattaforma, la coppia massima sarà riferita a due motori; negli altri casi uno solo sarà quello sfruttato appieno.

Il sistema di riferimento indicato da Adept sulla piattaforma non coincide con quello utilizzato in questo elaborato; è possibile far coincidere i due sistemi ruotando la terna di riferimento del modello di  $-135^\circ$  attorno a  $z$ . L'asse  $x$  della piattaforma reale coincide con una diagonale del piano  $x$ - $y$  del modello geometrico utilizzato e, quindi, un'accelerazione unitaria lungo l'asse  $x$  positivo della piattaforma corrisponde a un'accelerazione unitaria lungo la diagonale del sistema di riferimento del modello geometrico utilizzato.

Seguendo il ragionamento del paragrafo 5.6, si ottiene:

$$J^T \cdot LL \cdot \begin{Bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = J^T \cdot F_{mot} = \tau_{mot} \Rightarrow \text{alfa}_x = \frac{\tau'_{NOM}}{\max|\tau_{mot}|}$$

Dato la linearità della relazione, il valore di  $\text{alfa}_x$  rappresenta anche la massima accelerazione di trascinamento lungo l'asse  $x$  che si riesce a ottenere in una determinata configurazione.

In figura 5.9 si riporta l'andamento del coefficiente  $\text{alfa}_x$ , valutato in ogni punto dello spazio di lavoro.

A differenza del caso precedente, le massime accelerazioni di trascinamento si generano in corrispondenza di un punto centrale con coordinata  $z$  pari a  $-850 \text{ mm}$ . Lungo l'asse centrale e in direzione delle due diagonali si hanno valori elevati; in particolare, lungo la diagonale corrispondente all'asse  $x$  della piattaforma, le aree con accelerazione elevata arrivano fino ai punti estremi dello spazio di lavoro.

Riferendosi ad accelerazioni lungo  $y$  il comportamento sarà simmetrico.

Nel capitolo 6, sono riportati i risultati di alcune prove sperimentali effettuate con l'Adept Quattro™ per verificare l'esattezza degli indici  $\text{alfa}_z$  e  $\text{alfa}_x$ .

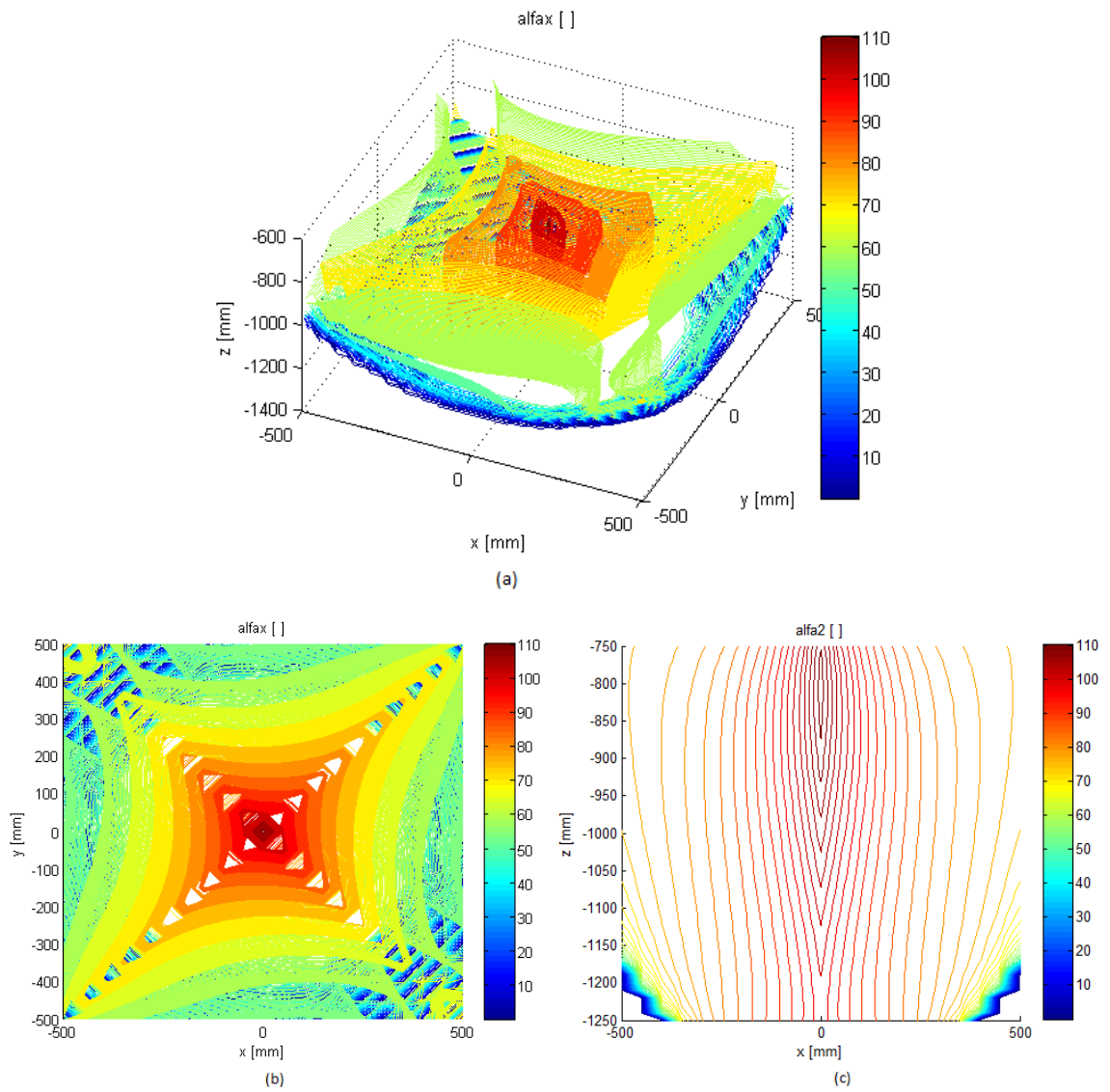


Figura 5.9: coefficiente  $\alpha_x$  per spostamenti orizzontali: (a) spazio di lavoro, (b) piano x-y, (c) sezione della diagonale.





### PROVE SPERIMENTALI

L'efficacia degli indici e del modello dinamico, definiti nel corso dell'elaborato, è valutata con delle prove sperimentali svolte utilizzando l'Adept Quattro™.

Con lo scopo di individuare le zone dove è possibile ottenere le maggiori accelerazioni di trascinamento, si fa compiere al manipolatore un'oscillazione di  $20\text{ mm}$  nella direzione desiderata, attorno al punto che si vuole analizzare. Tramite un timer interno al controllore (*Timer 0*) si registra il tempo impiegato a compiere quest'oscillazione per un numero ripetuto di volte (15 per i movimenti orizzontali, 20 per quelli verticali), in modo da ottenere un valore temporale significativo. Pur facendo compiere il movimento alla massima velocità consentita, in nessuno dei punti si riesce a raggiungere questo valore di regime a causa della brevità del movimento. Il tempo ricavato è, allora, inversamente legato alla pendenza con cui il manipolatore cerca di raggiungere la velocità massima e, quindi, all'accelerazione di trascinamento del punto.

Si sono valutati, infine, i tempi di percorrenza degli *Adept Cycle* fatti svolgere al robot in diverse posizioni del piano verticale con coordinata  $y$  nulla e con tratto orizzontale parallelo all'asse  $x$  della piattaforma.

Nei paragrafi seguenti, gli assi  $x$  e  $y$  considerati sono quelli del sistema della piattaforma e le figure saranno riferite a questo sistema di riferimento.

I piani dello spazio di lavoro analizzati sono descritti di seguito; si riportano, per ciascun caso, il grafico ottenuto da simulazione e quello che rappresenta i dati sperimentali. Per un confronto più verosimile, le simulazioni sono state eseguite inserendo nel codice MATLAB® il reale valore di *offset* dell'*end effector* rispetto al punto centrale della piattaforma.

#### 6.1 Movimento orizzontale

- 1) Piano orizzontale, quota  $z = -800\text{ mm}$ :  
- range  $x$ :  $[-400; 400]\text{mm}$ , passo  $50\text{ mm}$ ;  
- range  $y$ :  $[-400; 400]\text{mm}$ , passo  $50\text{ mm}$ .

La figura 6.1 mostra il grafico dell'indice  $\alpha_x$  valutato lungo il piano orizzontale con altezza  $-800\text{ mm}$  e quello sperimentale dove si evidenziano i tempi, in secondi, rappresentati nel punto dello spazio di lavoro in cui sono stati misurati.

In entrambi i grafici, l'area con i valori maggiori di accelerazione e minimi di tempo è circoscritta in un intorno del punto con coordinata  $x$  pari a  $75\text{ mm}$  e  $y$  nulla; si noti che la zona di massimo segue la direzione dell'asse  $x$ .

Come sarà più chiaro dalle prove seguenti, i migliori valori di tempo in questo piano sono minori rispetto a quelli riferiti agli altri casi esaminati, a conferma del risultato trovato in figura 5.9c.

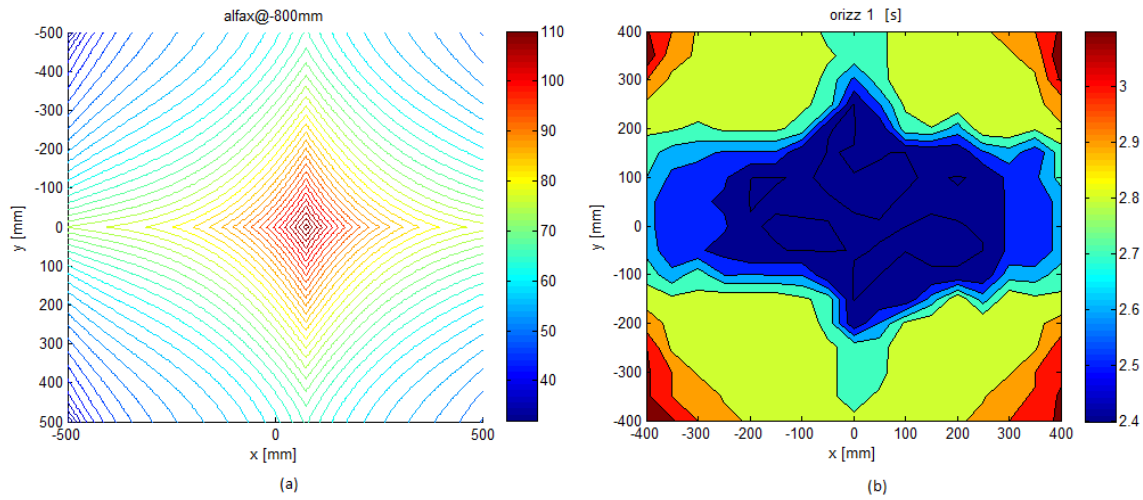


Figura 6.1: (a) indice  $\alpha_x$  per il piano orizzontale  $z = -800$  mm; (b) corrispondente grafico sperimentale dei tempi.

- 2) Piano orizzontale, quota  $z = -900$  mm:
- range  $x$ :  $[-400; 400]$ mm, passo 50 mm;
  - range  $y$ :  $[-400; 400]$ mm, passo 50 mm.

La figura 6.2 mostra il grafico dell'indice  $\alpha_x$  valutato lungo il piano orizzontale con altezza -900 mm e quello sperimentale dove si evidenziano i tempi, in secondi, riferiti ai punti dello spazio di lavoro dove sono stati misurati.

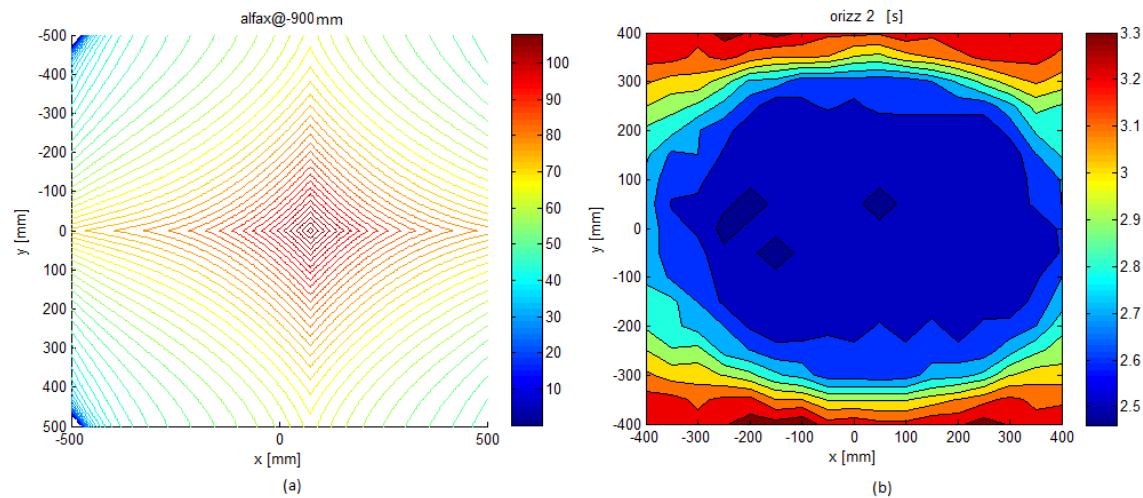


Figura 6.2: (a) indice  $\alpha_x$  per il piano orizzontale  $z = -900$  mm; (b) corrispondente grafico sperimentale dei tempi.

L'andamento dei grafici è simile a quello del piano precedente. La zona di massima accelerazione (a) e minimo tempo (b) è più estesa; sono presenti, però, valori temporali maggiori rispetto al piano precedente, proprio come ci si aspettava dalla simulazione.

- 3) Piano orizzontale, quota  $z = -1000$  mm:
- range  $x$ :  $[-300; 300]$ mm, passo 50 mm;
  - range  $y$ :  $[-300; 300]$ mm, passo 50 mm.

La figura 6.3 mostra il grafico dell'indice  $\alpha_x$ , valutato lungo il piano orizzontale con altezza  $z$  pari a  $-1000\text{ mm}$  e quello sperimentale con i tempi, in secondi, nei punti in cui sono stati misurati. La zona considerata è ridotta rispetto alle prove 1 e 2 perché il raggio dello spazio di lavoro è minore rispetto agli altri piani.

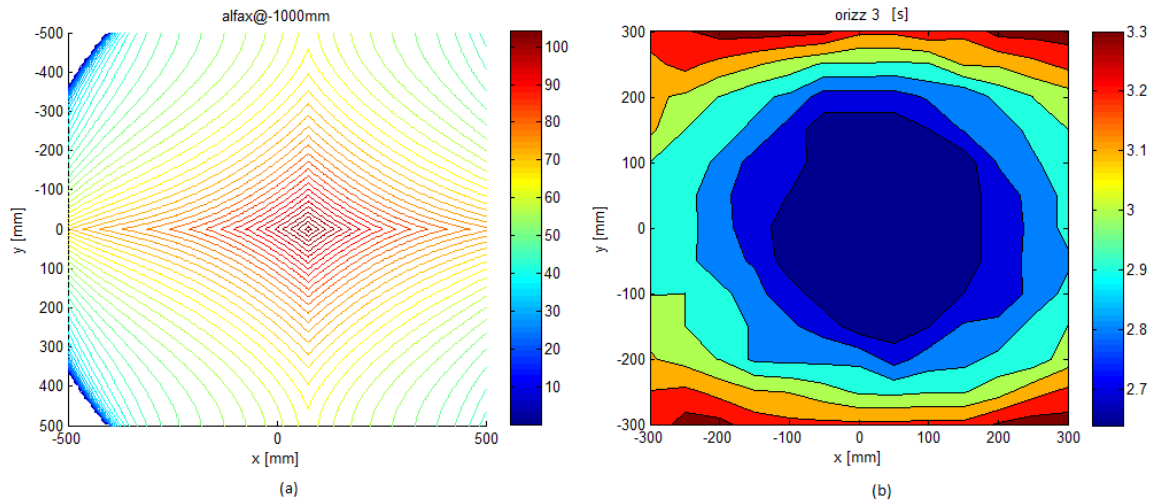


Figura 6.3: (a) indice  $\alpha_x$  per il piano orizzontale  $z = -1000\text{ mm}$ ; (b) corrispondente grafico sperimentale dei tempi.

Anche in questo caso, l'andamento ricalca quello delle prove precedenti, seppur con valori temporali maggiori.

## 6.2 Movimento verticale

- 1) Piano verticale, quota  $y = 0\text{ mm}$ :  
 - range  $x$ :  $[-400; 400]\text{mm}$ , passo  $50\text{ mm}$ ;  
 - range  $z$ :  $[-1150; -850]\text{mm}$ , passo  $25\text{ mm}$ .

La figura 6.4 mostra il grafico dell'indice  $\alpha_z$  lungo il piano verticale con coordinata  $y$  nulla e quello sperimentale dove si evidenziano i tempi, in secondi, nei punti in cui sono stati misurati.

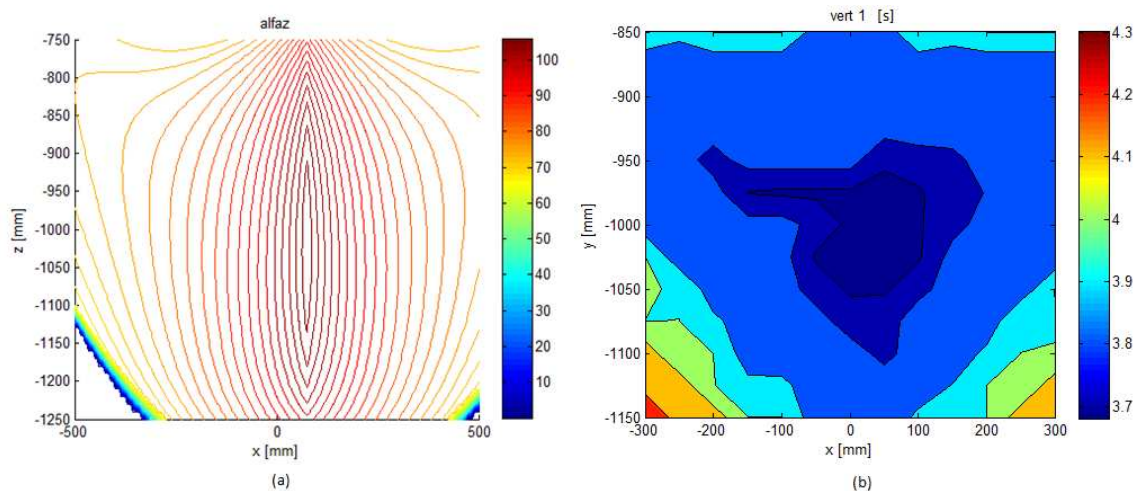


Figura 6.4: (a) indice  $\alpha_z$  per il piano verticale; (b) corrispondente grafico sperimentale dei tempi.

Nella zona centrale, traslata rispetto all'asse verticale di  $75\text{ mm}$  lungo  $x$ , compaiono i valori minori di tempo intorno al punto  $P_z$ , definito in precedenza; valori bassi si hanno anche in corrispondenza di zone laterali del piano ad altezza maggiore.

Per evidenziare la presenza del canale individuato nelle simulazioni dei capitoli precedenti, si riporta, in figura 6.5, una prova effettuata sul piano verticale con range di  $x$  pari a  $[-500; 500]\text{mm}$  e passo  $50\text{ mm}$ , per valori di  $z$  definiti nell'intervallo  $[-950; -800]\text{mm}$  con passo  $25\text{ mm}$ .

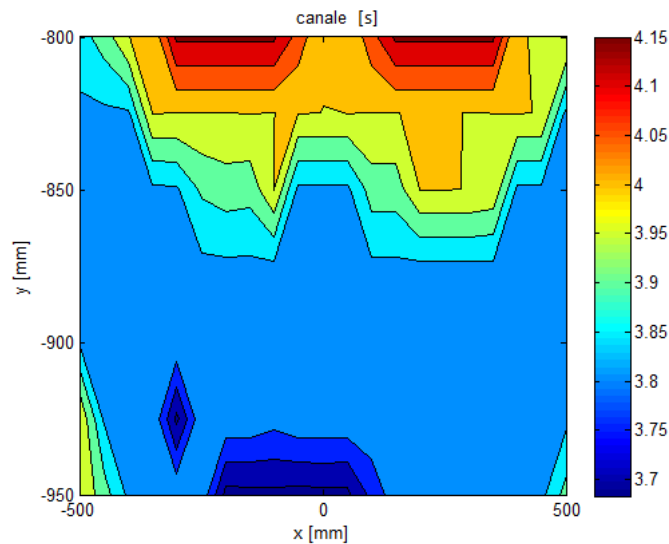


Figura 6.5: Particolare del canale centrale ottenuto sperimentalmente.

- 2) Piano orizzontale, quota  $z = -1000\text{ mm}$ :  
 - range  $x$ :  $[-300; 300]\text{mm}$ , passo  $50\text{ mm}$ ;  
 - range  $y$ :  $[-300; 300]\text{mm}$ , passo  $50\text{ mm}$ .

La figura 6.6 mostra il grafico dell'indice  $\alpha_{fa_z}$  valutato lungo il piano orizzontale con altezza pari a  $-1000\text{ mm}$  e quello sperimentale dove si evidenziano i tempi, in secondi, riferiti ai punti dello spazio di lavoro in cui sono stati misurati.

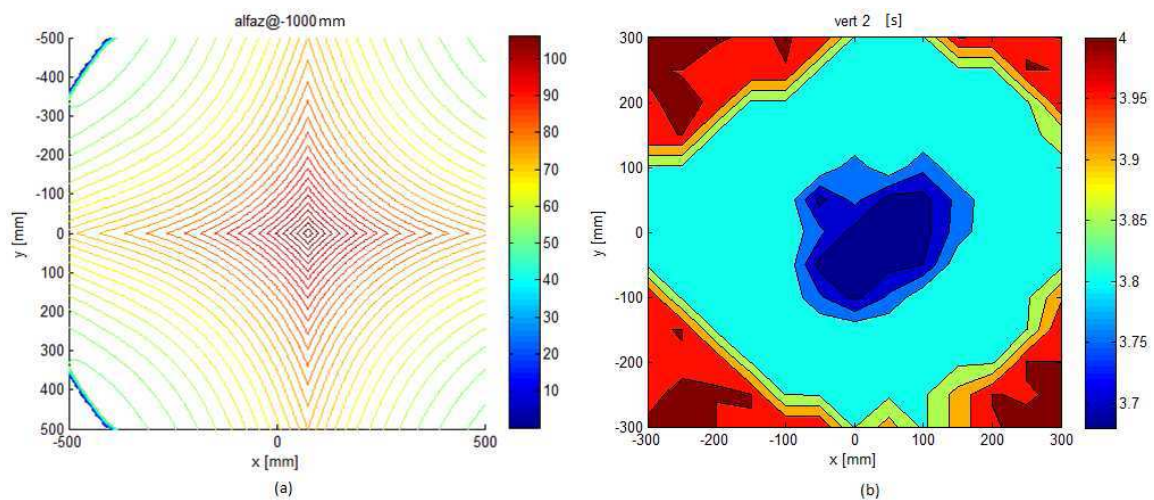


Figura 6.6: (a) indice  $\alpha_{fa_z}$  per il piano orizzontale  $z = -1000\text{ mm}$ ; (b) corrispondente grafico sperimentale dei tempi.

Si evidenzia l'andamento simmetrico lungo gli assi  $x$  e  $y$ , con i punti indicanti la massima accelerazione verticale che corrispondono ai tempi minori trovati sperimentalmente.

### 6.3 Adept Cycle

Utilizzando le specifiche riportate nel terzo capitolo riguardo alle lunghezze dei cicli di *pick-and-place* standard, si sono cronometrati i tempi di percorrenza dello *Standard Adept Cycle* e dell'*Extended Adept Cycle*. Per avere valori più indicativi, si è ripetuto 10 volte il singolo movimento che consiste nel percorrere il ciclo muovendosi dalla quota prefissata e tornando al punto di partenza. Per un'analisi più precisa, si sono fatte variare le coordinate  $z$  nel piano  $x$ - $z$ , con coordinata  $y$  nulla, poiché, sulla base delle prove sperimentali e delle simulazioni, su questo piano si ottengono le prestazioni migliori. Come tratto di *travel*, si fa muovere il manipolatore parallelamente all'asse  $x$ .

La tabella 6.1 riporta i dati riferiti allo *Standard Adept Cycle* svolto in modo simmetrico rispetto all'asse centrale (le coordinate  $x$  dei punti di partenza e di arrivo sono rispettivamente  $-152,5\text{ mm}$  e  $+152,5\text{ mm}$ ). In tabella 6.2, invece, sono presenti i valori ottenuti con lo stesso ciclo effettuato simmetricamente al punto di coordinata  $x$  pari a  $75\text{ mm}$  (l'*offset* dell'*end effector*).

z [mm]	Tempi medi per 10 movimenti [s]
-800	9,7600
-825	9,6021
-850	9,6001
-875	9,4552
-900	9,4400
-925	9,4401
-950	9,3754
-975	9,3600
-1000	9,3599
-1025	9,3600
-1050	9,3753
-1075	9,4217
-1100	9,4399
-1125	9,4587
-1150	9,5263

Tabella 6.1: Standard Adept Cycle centrato in  $x = 0\text{ mm}$ .

z [mm]	Tempi medi per 10 movimenti [s]
-800	9,7599
-825	9,5999
-850	9,5999
-875	9,4399
-900	9,4400
-925	9,4120
-950	9,3640
-975	9,3600
-1000	9,3199
-1025	9,3200
-1050	9,3560
-1075	9,3999
-1100	9,4400
-1125	9,4800
-1150	9,5320

Tabella 6.2: Standard Adept Cycle centrato in  $x = 75\text{ mm}$ .

I valori minori della tabella 6.1 s'incontrano quando ci si trova intorno ai  $-1000\text{ mm}$  (il tratto di *travel* è svolto  $25\text{ mm}$  sopra la quota indicata): a questa altezza i valori di accelerazione verticale sono i massimi e quelli di accelerazione orizzontale sono elevati, pur non essendo i migliori. Si consideri anche che, in quest'area, le forze non lineari assumono valori minimi e che si hanno buoni valori di manipolabilità cinematica.

Considerando, invece, la tabella 6.2, il valore minimo si ottiene, come prima, quando il tragitto

orizzontale è svolto a un'altezza pari a  $-975\text{ mm}$  ma si ha un miglioramento del tempo di percorrenza dello 0,43% rispetto al corrispondente valore della tabella 6.1.

Analizzando le altre altezze, s'incontrano valori temporali minori in 6.2 per tutti i punti tranne le quote più basse. Il motivo è riconducibile alla ridotta zona con i valori massimi di  $\alpha_x$  a quei livelli (figura 5.9c), da cui consegue il fatto di non avere accelerazioni di trascinamento troppo elevate, né all'andata né al ritorno, rispetto al ciclo centrato in  $0\text{ mm}$ .

Le tabelle 6.3 e 6.4 riportano i tempi riferiti allo svolgimento del ciclo descritto in precedenza con la differenza che il punto di partenza, adesso, ha coordinata  $x$  pari rispettivamente a  $0\text{ mm}$  e  $75\text{ mm}$ . Lo scopo di quest'analisi è di verificare se, facendo partire il tratto di *travel* dall'asse verticale dove sono presenti i valori maggiori di accelerazione, si riescono ad ottenere tempi minori rispetto al movimento simmetrico. La brevità del ciclo considerato, infatti, aumenta l'influenza delle accelerazioni di trascinamento sul movimento totale.

Per quanto riguarda la tabella 6.4, l'analisi è stata ridotta alle sole altezze superiori per non rischiare di uscire dallo spazio di lavoro.

<b>z [mm]</b>	<b>Tempi medi per 10 movimenti [s]</b>
-800	9,7200
-825	9,6001
-850	9,5354
-875	9,4322
-900	9,4400
-925	9,4322
-950	9,3906
-975	9,3201
-1000	9,3400
-1025	9,3600
-1050	9,3599
-1075	9,4400
-1100	9,4670
-1125	9,4799
-1150	9,5197

Tabella 6.3: Standard Adept Cycle con partenza da  $x = 0\text{ mm}$ .

<b>z [mm]</b>	<b>Tempi medi per 10 movimenti [s]</b>
-800	9,7600
-825	9,6000
-850	9,4840
-875	9,4400
-900	9,4399
-925	9,4399
-950	9,4040
-975	9,3960

Tabella 6.4: Standard Adept Cycle con partenza da  $x = 75\text{ mm}$ .

Confrontando la tabella 6.3 con la 6.1 e la 6.4 con la 6.2, si ottengono misure di tempo minori dello 0,67% e dell'1,21% per altezze  $z$  pari a  $-850\text{ mm}$ , punto individuato come centro della massima accelerazione di trascinamento orizzontale.

I tempi minori, come prima, si ottengono in una fascia centrale, in particolare a una quota di  $-975\text{ mm}$ ; questo è attribuibile in parte all'influenza della rapidità di percorrenza dei due tratti verticali (figura 6.4), in corrispondenza di valori comunque buoni di accelerazioni orizzontali, e in parte alle accelerazioni che si hanno nella fase di ritorno del ciclo.

Confrontando, infine, i valori di tabella 6.3 e 6.4, si noti come lo *Standard Adept Cycle* svolto a partire dall'asse  $x = 75\text{ mm}$ , sia più veloce per l'altezza  $z = -850\text{ mm}$ , come ci si attendeva.

In tabella 6.5, infine, sono presenti i dati raccolti in seguito all'esecuzione dell'*Extended Adept Cycle* svolto in modo simmetrico rispetto all'asse centrale; anche in questo caso la tabella è ridotta alle sole quote superiori.

<b>z [mm]</b>	<b>Tempi medi per 10 movimenti [s]</b>
-800	13,2019
-825	13,1245
-850	12,8429
-875	12,8234
-900	12,7231
-925	12,6401
-950	12,6400
-975	12,6399

Tabella 6.5: *Extended Adept Cycle* centrato in  $x = 0\text{ mm}$ .

I valori minori di tempo s'incontrano in una fascia ad altezza maggiore rispetto a prima (si consideri che, rispetto la quota indicata, il movimento orizzontale ha luogo  $40\text{ mm}$  più in alto). Questo risultato non stupisce: il tratto orizzontale, in tal caso, incide maggiormente sul movimento totale e, per questo motivo, i tempi minori s'incontrano avvicinandosi alla zona di maggior accelerazione di trascinamento ed elevata manipolabilità cinematica riferite a un movimento orizzontale.

In generale, conviene far eseguire i cicli di *pick-and-place* a partire da un'altezza posta tra  $-1000\text{ mm}$  e  $-950\text{ mm}$ . Per quanto riguarda lo *Standard Adept Cycle*, il miglioramento rispetto al caso peggiore raggiunge il 4,10% per i valori centrati in  $0\text{ mm}$  e il 4,51% per quelli centrati in  $75\text{ mm}$ . Considerando lo stesso movimento non simmetrico ma traslato, si ottengono miglioramenti del 4,11% per i cicli che partono dall'asse centrale e del 3,72% per quelli che partono dall'asse  $x = 75\text{ mm}$ .

Per l'*Extended Adept Cycle*, infine, i tempi di esecuzione possono migliorare del 4,26%.





# CONCLUSIONI

### 7.1 Confronto tra indici e prove sperimentali

L'utilizzo di indici per l'analisi delle prestazioni di un manipolatore porta all'individuazione delle zone dello spazio di lavoro in cui il robot può compiere il percorso richiesto nel minor tempo.

In prima analisi, si è considerato il concetto di manipolabilità cinematica, basato sulla matrice Jacobiana. Gli indici direzionali selettivi definiti forniscono delle buone indicazioni riguardo alle zone dove il manipolatore è più agile, ma generano risultati che non tengono conto delle masse in movimento.

Si consideri, ad esempio, il movimento verticale: la figura 3.4 individua solo i picchi laterali, al contrario della 3.5(c) i cui massimi si trovano al centro, intorno al punto indicato da  $P_z$ , anche se sono presenti elevati valori agli estremi del canale individuato. Le prove sperimentali hanno dimostrato che l'indice individuato considerando solo l'autovalore è maggiormente in linea con il comportamento del manipolatore.

Per quanto riguarda il movimento nel piano orizzontale (figure 3.3 e 3.5b), invece, le prove sperimentali sui cicli di *pick-and-place* verificano che la zona con manipolabilità migliore corrisponde a valori dell'indice  $\mu_{Dxy}$  di poco superiori all'unità.

Per i manipolatori paralleli, un'analisi più precisa si ottiene in conformità a considerazioni dinamiche, esaminando la matrice di massa che include, oltre ai parametri geometrici, anche le masse e le inerzie. Se, però, non si considerano parametri attivi, come l'inerzia del motore, le considerazioni che si ottengono descrivono il comportamento passivo del manipolatore legato alla sola gravità del carico. Questo è il caso degli indici ricavati dalla matrice *GIMRE*, quali l'isotropia dinamica.

Delle considerazioni più esatte si ottengono considerando la matrice d'inerzia del modello dinamico dell'Adept Quattro<sup>TM</sup>, ricavato tramite l'approccio di Newton-Eulero.

Come primo passo, si esaminano, di nuovo, gli indici di massa. Si analizza la capacità del manipolatore di accelerare il proprio organo terminale e i risultati ottenuti si rivelano più precisi rispetto a quelli cinematici, come dimostrano le prove sperimentali. Si consideri, ad esempio, la figura 5.8 dove le zone di minima massa equivalente, riferite a un movimento verticale, sono indicate da un canale centrale che evidenzia sia i picchi laterali sia la bolla centrale ad altezza  $P_z$ . L'*acceleration capability* è valutata a parità di accelerazione dell'organo terminale.

In secondo luogo, deducendole sempre dal modello dinamico, si sono considerate le aree dello spazio di lavoro in cui le accelerazioni di trascinamento assumono i valori maggiori, adeguandosi al comportamento del sistema di controllo del manipolatore. Per un movimento verticale, oltre a una

zona centrale di massimo di coordinate  $P_z$ , sono presenti dei valori elevati lungo gli assi  $x$  e  $y$  riferiti alla piattaforma, nelle aree indicate anche dagli indici di massa. L'analisi del movimento orizzontale lungo  $x$ , invece, indica come miglior direzione, lungo la quale compiere la traslazione, l'asse  $x$  stesso, in un intorno del punto appartenente all'asse centrale e di coordinata  $z$  pari a  $-850$  mm.

Mettendo insieme le proprietà analizzate (manipolabilità, accelerazioni di trascinamento, forze non lineari), infine, si definisce la migliore zona in cui compiere un movimento di *pick-and-place*. Poiché il ciclo è caratterizzato da un lungo tratto orizzontale, si considererà principalmente una zona che favorisca questo movimento, collegandola per quanto possibile ai valori in cui il sollevamento e l'abbassamento avvengono in maniera più rapida. La zona individuata, con la conferma delle prove sperimentali, è quella in cui, in seguito a un movimento verticale verso l'alto, ci si trova a compiere il tratto di *travel*, lungo l'asse  $x$  (o  $y$ ) della piattaforma, a una quota di  $-950$  mm. Per quanto riguarda lo *Standard Adept Cycle*, i tempi minori si ottengono facendo partire il ciclo dall'asse centrale o centrandolo attorno all'asse  $x = 75$  mm, poiché si sfruttano al meglio le migliori accelerazioni di trascinamento nel tratto di andata.

Le prove sperimentali hanno confermato quanto indicato dagli indici, determinando una diminuzione massima dei tempi del 4,25%, con la sola modifica dell'altezza di svolgimento del ciclo di lavoro. Dato l'elevato numero di cicli compiuti dall'Adept Quattro™ in una giornata lavorativa, la riduzione dei tempi, anche se di pochi punti percentuali, incrementa la capacità produttiva di molto e in modo gratuito, con la sola individuazione della miglior zona di movimentazione all'interno della cella di lavoro.

Tutta l'analisi è stata svolta senza considerare la presenza di un carico, poiché il manipolatore è predisposto alla movimentazione di elementi leggeri o ultraleggeri. È lecito attendersi che le prestazioni peggiorino dal punto di vista dei tempi all'aumentare della massa trasportata, senza comunque modificare le zone in cui si ottengono le accelerazioni maggiori.

Una seconda funzione degli indici trovati è di determinare parametri per il confronto tra manipolatori della stessa categoria, anche se, spesso, nella scelta di acquisto di un robot entrano in gioco parecchi altri fattori come il numero di gradi di libertà richiesti dall'applicazione, la qualità del sistema di controllo, la presenza o meno di un sistema di visione e il costo.

## 7.2 Sviluppi futuri

Nella valutazione delle prestazioni di un robot, sia esso seriale o parallelo, è fondamentale tener conto di tre concetti primari:

- cinematica;
- dinamica;
- controllo.

In questo elaborato sono trattati i primi due punti, con particolare risalto alla dinamica poiché il manipolatore analizzato è parallelo.

Una prima miglioria dell'analisi delle prestazioni dell'Adept Quattro™ può essere eseguita considerando la rotazione, posta sempre a zero in questo elaborato, qualora si voglia sfruttare anche questo grado di libertà (alcuni movimenti di *pick-and-place* prevedono una rotazione durante il tratto orizzontale per orientare il pezzo secondo una determinata direzione).

Lo studio del modello dinamico impostato nel quinto capitolo, poi, può essere approfondito e affinato (l'attrito non viene considerato e non è valutata l'effettiva incidenza delle semplificazioni) per rappresentare al meglio il comportamento del manipolatore. Il confronto con il comportamento reale può essere eseguito inserendo le leggi di moto desiderate di posizione, velocità e accelerazione.

Una volta terminata quest'analisi, si può pensare di verificare i possibili miglioramenti delle prestazioni, fondando la strategia di controllo su una compensazione dinamica ([16], [17]), con lo scopo di migliorare ulteriormente le capacità d'inseguimento e velocità del manipolatore.

Sulla base delle considerazioni svolte sulla cinematica e sulla dinamica, infine, uno sviluppo futuro è quello di implementare un simulatore per individuare le zone dove si ottengono i tempi migliori e stimare la durata dei cicli di lavoro, conoscendo il percorso da svolgere e le masse in movimento.



## Ringraziamenti

Giunto alla conclusione di questo percorso, è doveroso ricordare e dire grazie a quanti sono stati al mio fianco in questi anni.

In primo luogo, ci tengo a ringraziare il mio Relatore, Giovanni Boschetti, un professore in grado di dare del “tu” agli studenti, capendo le loro esigenze e aiutandoli con positività. Da lui ho sempre ricevuto incoraggiamento e motivazioni a migliorarmi in questi mesi di tesi, che posso ricordare come un periodo davvero... “eccezionale”.

Ringrazio anche il professor Giulio Rosati per il tempo messo a disposizione per la valutazione del mio lavoro.

Un ringraziamento enorme alla mia famiglia: a mia mamma Giannella, a mio papà Gaetano, a mia sorella Grazia Maria e ai parenti tutti. Da voi ho ricevuto sostegno sotto ogni punto di vista, non facendomi mancare mai niente, dandomi libertà e favorendomi in ogni mia scelta.

Ringrazio Elisa, gli amici di una vita e i compagni di liceo perché mi vogliono bene e condividono con me esperienze, valori e divertimento; mi ritengo fortunato ad avervi conosciuto.

Grazie, infine, ai compagni di università per aver condiviso, chi per più tempo e chi per meno, questa esperienza di crescita, creando un gruppo di amici prima ancora che di colleghi.

È bello poter condividere la strada con tutte queste persone, nella speranza e nella certezza che mi accompagneranno ancora per molto tempo.

*Luca*



## Bibliografia

- [1] G. Boschetti, A. Trevisani, "Direction Selective Performance Indexes for Parallel Manipulators", *The 1<sup>st</sup> Joint International Conference on Multibody System Dynamics*, Lappeenranta, Finland, May 25-27, 2010.
- [2] O. Company, F. Pierrot, S. Krut, V. Nabat, "Simplified dynamic modelling and improvement of a four-degree-of-freedom pick-and-place manipulator with articulate moving platform", *Proceedings of IMechE Vol. 223 Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, pp. 13-29, 2009.
- [3] F. Pierrot, V. Nabat, O. Company, S. Krut, P. Poignet, "Optimal design of a 4-DOF Parallel Manipulator: From Academia to Industry", *IEEE Transactions on robotics*, Vol. 25, n° 2, April 2009.
- [4] R. Di Gregorio, V. Parenti Castelli, "Dynamic performance indices for 3-DOF parallel manipulators", *Advances in robot kinematics: Theory and Applications*, pp. 11-20, 2002
- [5] R. Di Gregorio, V. Parenti Castelli, "On the Characterization of the Dynamic Performances of Planar Manipulators", *Meccanica 40*, pp. 267-279, Springer, 2005.
- [6] H. Asada, "Dynamic Analysis and Design of Robot Manipulators Using Inertia Ellipsoids", *Robotics and Automation*, pp.94-102, March, 1984.
- [7] F. Sartori, "Analisi cinematica di un manipolatore parallelo a 4 gradi di libert ", *Tesi di laurea triennale in ingegneria gestionale, Dipartimento di Tecnica e Gestione dei sistemi industriali*, Vicenza, 2008.
- [8] C. Carone, "Analisi e applicazione di indici dinamici per manipolatori paralleli", *Tesi di laurea triennale in ingegneria gestionale, Dipartimento di Tecnica e Gestione dei sistemi industriali*, Vicenza, 2010.
- [9] Y. Li, J. Wang, X. J. Liu, L. P. Wang, "Dynamic performance comparison and counterweight optimization of two 3-DOF parallel manipulators for a new hybrid machine tool", *Elsevier, Mechanism and Machine Theory 45*, pp. 1668-1680, 2010.
- [10] J. P. Merlet, "Jacobian, Manipulability, Condition Number, and Accuracy of Parallel Robots", *Journal of Mechanical Design*, Vol. 128, pp. 199-206, January 2006.
- [11] E. Ozgur, N. Andreff, P. Martinet, "Vector-Based Dynamic Modeling and Control of the Quattro Parallel Robot by means of Leg Orientations", *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Anchorage, Alaska, USA, May 3-8, 2010.
- [12] P. Cardou, S. Bouchard, C. Gosselin, "Kinematic-Sensitivity Indexes for Dimensionally Nonhomogeneous Jacobian Matrices", *IEEE Transactions on Robotics*, Vol. 26, N° 1, February, 2010.

- [13] A. Codourey, "Dynamic Modeling of Parallel Robots for Computed-Torque Control Implementation", *The International Journal of Robotics Research*, 17, pp. 1325-1336, 1998.
- [14] W. Khalil, O. Ibrahim, "General Solution for the Dynamic Modeling of Parallel Robots", *Journal Intelligent Robot Systems*, 49, pp. 19-37, 2007.
- [15] J. Wang, C. M. Gosselin, "A New Approach for the Dynamic Analysis of Parallel Manipulators", *Multibody System Dynamics*, 2, pp. 317-334, 1998.
- [16] H. B. Choi, A. Konno, M. Uchiyama, "Inverse Dynamic Analysis of a 4-DOF Parallel Robot H4", *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Sendai, Japan September 28-October 2, 2004.
- [17] H. B. Choi, A. Konno, M. Uchiyama, "Design, implementation and performance evaluation of a 4-DOF parallel robot", *Robotica*, Vol. 28, pp. 107-118, 2010.
- [18] R. Di Gregorio, V. Parenti-Castelli, "Dynamics of a Class of Parallel Wrists", *Transaction of the ASME*, Vol. 126, pp. 436-441, May, 2004.
- [19] Y. Zhao, F. Gao, "Dynamic formulation and performance evaluation of the redundant parallel manipulator", *Elsevier, Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 25, pp. 770-781, 2009.
- [20] J. Wu, J. Wang, L. Wang, T. Li, "Dynamics and control of a planar 3-DOF parallel manipulator with actuation redundancy", *Elsevier, Mechanism and Machine Theory*, 44, pp. 835-849, 2009.
- [21] A. Codourey, "Dynamic Modelling and Mass Matrix Evaluation of the DELTA Parallel Robot for Axes Decoupling Control", *IEEE*, 1996.
- [22] J. J. Gil, I. Zabalza, J. Ros, J. M. Pintor, J. M. Jiménez, "Kinematics and dynamics of a 6-RUS hunt-type parallel manipulator by using natural coordinates".
- [23] S. Bhattacharya, D. N. Nenchev, M. Uchiyama, "A recursive formula for the inverse of the inertia matrix of a parallel manipulator", *Elsevier, Mechanism and Machine Theory*, 33, N° 7, pp. 957-964, 1998.
- [24] R. Featherstone, D. Orin, "Robot Dynamics: Equations and Algorithms", *International Conference on Robotics & Automation*, San Francisco, CA, April, 2000.
- [25] L. Wang, J. Wu, J. Wang, "Dynamic formulation of a planar 3-DOF parallel manipulator with actuation redundancy", *Elsevier, Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 26, pp. 67-73, 2010.
- [26] X. Guo, S. Liu, Z. Wang, "Analysis for dynamics performance indices of 4-RR(RR)R parallel mechanism", *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, Vol. 2, N° 4, August, 2006.
- [27] W. Shang, S. Cong, F. Kong, "Identification of dynamic and friction parameters of a parallel manipulator with actuation redundancy", *Elsevier, Mechatronics*, 20, pp. 192-200, 2010.



- [28] J. Wu, J. Wang, L. Wang, T. Li, "Dynamic formulation of redundant and nonredundant parallel manipulators for dynamic parameter identification", *Elsevier, Mechatronics*, 19, pp. 586-590, 2009.
- [29] P. K. Koshla, T. Kanade, "Parameter Identification of Robot Dynamics", *Proceeding of 24<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, Lauderdale, FL, December, 1985.
- [30] J. Gallardo-Alvarado, J. M. Rico-Martinez, G. Alici, "Kinematics and singularity analysis of a 4-dof parallel manipulator using screw theory", *Elsevier, Mechanism and Machine Theory*, 41, pp. 1048-1061, 2006.
- [31] E. Courteille, D. Deblaise, P. Maurine, "Design Optimization of a Delta-Like Parallel Robot through Global Stiffness Performance Evaluation", *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, St. Louis, USA, October 11-15, 2009.
- [32] M. Carricato, V. Parenti-Castelli, "Singularity-Free Fully-Isotropic Translational Parallel Mechanism", *The International Journal of Robotics Research*, 21, pp. 161-174, 2002.
- [33] J. P. Merlet, "A Formal-Numerical Approach for Robust In-Workspace Singularity Detection", *IEEE Transactions on Robotics*, Vol. 23, N° 3, June, 2007.
- [34] L. Hongjun, L. Shuai, W. Yingzi, "Dynamic Analysis of a Parallel Kinematic Planer", *Proceedings of the 8<sup>th</sup> World Congress on Intelligent Control and Automation*, Jinan, China, July 6-9, 2010.
- [35] G. Xiang, Z. Kai, G. Xijuan, "Analysis of Dynamic Performance Indices of 3-RPC Parallel Mechanism", *2<sup>nd</sup> Conference on Environmental Science and Information Application Technology*, 2010.
- [36] Adept Technology, Inc., [www.adept.com](http://www.adept.com)



## Appendice A

Di seguito è riportato il programma in MATLAB® con cui sono state ottenute le simulazioni del comportamento del manipolatore. Le funzioni  $R_x(\alpha)$ ,  $R_y(\beta)$  e  $R_z(\gamma)$  sono definite in altri file .m presenti all'interno della directory di lavoro.

```
%%%%%%%%%%%%% DEFINIZIONE DEGLI INDICI PER I GRAFICI %%%%%%%%%%%%%%
indicealfa = zeros(21,21,51);
indicealfa2 = zeros(21,21,51);
%...

%ROTAZIONE
th0 = 0/180*pi; %[rad]

%%%%%%%%%%%%% DATI GEOMETRICI %%%%%%%%%%%%%%

a = 0.28; %[m]
br = 0.375; %[m]
c = 0.825; %[m]
d = 0.15; %[m]
rb = 0.028; %[m]
rc = 0.00675; %[m]
b = sqrt(br^2+rb^2); %termine correttivo per braccio superiore
alp = atan(rb/br); %termine correttivo per gli angoli
%offset = 0.075; %[m] termine correttivo per piattaforma
offset = 0;
base = 0.20; %[m] termine correttivo: offset terna di riferimento
ee = 0; %[m] eventuale lunghezza end effector

%%%%%%%%%%%%% DATI DINAMICI %%%%%%%%%%%%%%

mload = 0.; %[kg] carico
mp = 2.62; %[kg] piattaforma
mc = 0.24; %[kg] singola asta braccio inferiore
%mb = 1.45; %[kg]
mb = 1.85; %[kg] braccio superiore contando anche il peso delle viti
n = 50; % rapporto di riduzione del motore
Iact = 0.811*10^-4; %[kg*m^2] inerzia motore
Imot = n^2*Iact;
Iarm = 1/3*mb*br^2; %[kg*m^2] inerzia link 1 rispetto a una estremità
g = 9.81; %[m/s^2]
fs = 0; %[N*m] attrito coulombiano (trascurato)
fv = 0; %[m^2*kg/s] attrito viscoso (trascurato)
lg = 0.121; %[m] posizione del centro di massa del braccio superiore

[X,Y,Z] = meshgrid(-50:5:50, -50:5:50, -106-base*100:1:-56-base*100);

contx = 0;
for x = -0.50:0.05:0.50
    ii = round(x*100+51-contx);
    contx = contx+4;
    x0 = x+offset*cos(pi/4+th0);

conty = 0;
for y = -0.50:0.05:0.50
    jj = round(y*100+51-conty);
```

```

        conty = conty+4;
        y0 = y+offset*sin(pi/4+th0);

    for z = -1.06-base:0.01:-0.56-base
        kk = round(z*100+107+base*100);
        z0 = z+ee+base;

        %%%%%%%%% ANALISI CINEMATICA DI POSIZIONE INVERSA %%%%%%%%%
%braccio 1
A1 = [a, 0, 0];
C1 = [+d/2*sqrt(2)/2+d/2*cos(pi/4+th0)+x0, -d/2*sqrt(2)/2+
      d/2*sin(pi/4+th0)+y0, z0];
s1 = C1(1)^2-A1(1)^2+C1(2)^2+C1(3)^2+b^2-c^2;
f1 = C1(1)-A1(1);
rad1 = (C1(3)^2*A1(1)+s1*f1/2)^2-(C1(3)^2+f1^2)*(C1(3)^2*(A1(1)^2-b^2)
      +s1^2/4);
%braccio 3
A3 = [-a, 0, 0];
C3 = [-d/2*sqrt(2)/2-d/2*cos(pi/4+th0)+x0,
      d/2*sqrt(2)/2-d/2*sin(pi/4+th0)+y0, z0];
s3 = C3(1)^2-A3(1)^2+C3(2)^2+C3(3)^2+b^2-c^2;
f3 = C3(1)-A3(1);
rad3 = (C3(3)^2*A3(1)+s3*f3/2)^2-(C3(3)^2+f3^2)*(C3(3)^2*(A3(1)^2-b^2)
      +s3^2/4);
%braccio 2
A2 = [0, a, 0];
C2 = [-d/2*sqrt(2)/2+d/2*cos(pi/4+th0)+x0,
      d/2*sqrt(2)/2+d/2*sin(pi/4+th0)+y0, z0];
s2 = C2(1)^2-A2(2)^2+C2(2)^2+C2(3)^2+b^2-c^2;
f2 = C2(2)-A2(2);
rad2 = (C2(3)^2*A2(2)+s2*f2/2)^2-(C2(3)^2+f2^2)*(C2(3)^2*(A2(2)^2-b^2)
      +s2^2/4);
%braccio 4
A4 = [0, -a, 0];
C4 = [+d/2*sqrt(2)/2-d/2*cos(pi/4+th0)+x0,
      -d/2*sqrt(2)/2-d/2*sin(pi/4+th0)+y0, z0];
s4 = C4(1)^2-A4(2)^2+C4(2)^2+C4(3)^2+b^2-c^2;
f4 = C4(2)-A4(2);
rad4 = (C4(3)^2*A4(2)+s4*f4/2)^2-(C4(3)^2+f4^2)*(C4(3)^2*(A4(2)^2-b^2)
      +s4^2/4);

%controllo singolarità
if (rad1>=0)&&(rad2>=0)&&(rad3>=0)&&(rad4>=0)
    %braccio 1
    x1 = ((C1(3)^2*A1(1)+s1*f1/2)+sqrt(rad1))/(C1(3)^2+f1^2);
    z1 = (s1-2*x1*f1)/(2*C1(3));
    y1 = 0;
    B1 = [x1, y1, z1];
    cq1 = x1/b-a/b;
    sq1 = -z1/b;
    q1 = atan2(sq1,cq1);
    %braccio 3
    x3 = ((C3(3)^2*A3(1)+s3*f3/2)-sqrt(rad3))/(C3(3)^2+f3^2);
    z3 = (s3-2*x3*f3)/(2*C3(3));
    y3 = 0;
    B3 = [x3, y3, z3];

```

```

cq3 = -x3/b-a/b;
sq3 = -z3/b;
q3 = atan2(sq3,cq3);
%braccio 2
y2 = ((C2(3)^2*A2(2)+s2*f2/2)+sqrt(rad2))/(C2(3)^2+f2^2);
z2 = (s2-2*y2*f2)/(2*C2(3));
x2 = 0;
B2 = [x2, y2, z2];
cq2 = y2/b-a/b;
sq2 = -z2/b;
q2 = atan2(sq2,cq2);
%braccio 4
y4 = ((C4(3)^2*A4(2)+s4*f4/2)-sqrt(rad4))/(C4(3)^2+f4^2);
z4 = (s4-2*y4*f4)/(2*C4(3));
x4 = 0;
B4 = [x4, y4, z4];
cq4 = -y4/b-a/b;
sq4 = -z4/b;
q4 = atan2(sq4,cq4);

%controllo angoli
if (-51/180*pi<q1)&&(q1<123/180*pi)&&(-51/180*pi<q2)&&
(q2<123/180*pi)&&(-51/180*pi<q3)&&(q3<123/180*pi)&&
(-51/180*pi<q4)&&(q4<123/180*pi)

q = [q1/pi*180, q2/pi*180, q3/pi*180, q4/pi*180]';
%angoli corretti
qr = [(q1-alp)/pi*180, (q2-alp)/pi*180, (q3-alp)/pi*180,
(q4-alp)/pi*180]';
qr1 = q1-alp;
qr2 = q2-alp;
qr3 = q3-alp;
qr4 = q4-alp;

%ridefinizione dei punti tenendo conto della traslazione lungo z di -19cm
A1 = [a, 0, -base];
C1 = [+d/2*sqrt(2)/2+d/2*cos(pi/4+th0)+x0,
-d/2*sqrt(2)/2+d/2*sin(pi/4+th0)+y0, z0-base];
B1 = [x1, y1, z1-base];
A3 = [-a, 0, -base];
C3 = [-d/2*sqrt(2)/2-d/2*cos(pi/4+th0)+x0,
d/2*sqrt(2)/2-d/2*sin(pi/4+th0)+y0, z0-base];
B3 = [x3, y3, z3-base];
A2 = [0, a, -base];
C2 = [-d/2*sqrt(2)/2+d/2*cos(pi/4+th0)+x0,
d/2*sqrt(2)/2+d/2*sin(pi/4+th0)+y0, z0-base];
B2 = [x2, y2, z2-base];
A4 = [0, -a, -base];
C4 = [+d/2*sqrt(2)/2-d/2*cos(pi/4+th0)+x0,
-d/2*sqrt(2)/2-d/2*sin(pi/4+th0)+y0, z0-base];
B4 = [x4, y4, z4-base];

B1p = [A1(1)+br*cos(qr1), 0, -br*sin(qr1)-base];
B2p = [0, A2(2)+br*cos(qr2), -br*sin(qr2)-base];
B3p = [A3(1)-br*cos(qr3), 0, -br*sin(qr3)-base];
B4p = [0, A4(2)-br*cos(qr4), -br*sin(qr4)-base];

```

```

EE = [x, y, z0-base];
EEr = [x, y, z-base];

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% MATRICE JACOBIANA %%%%%%%%%%%%%%

%Jx
jx11 = 2*(x0+d/2*cos(pi/4+th0)+d/2*sqrt(2)/2-(a+b*cos(q1)));
jx12 = 2*(y0+d/2*sin(pi/4+th0)-d/2*sqrt(2)/2);
jx13 = 2*(z0+b*sin(q1));
jx14 = d*(-x0*sin(pi/4+th0)+y0*cos(pi/4+th0)+
          -d/2*cos(th0)+(a+b*cos(q1))*sin(th0+pi/4));

jx21 = 2*(x0+d/2*cos(pi/4+th0)-d/2*sqrt(2)/2);
jx22 = 2*(y0+d/2*sin(pi/4+th0)+d/2*sqrt(2)/2-(a+b*cos(q2)));
jx23 = 2*(z0+b*sin(q2));
jx24 = d*(-x0*sin(pi/4+th0)+y0*cos(pi/4+th0)+d/2*cos(th0)+
          -(a+b*cos(q2))*cos(th0+pi/4));

jx31 = 2*(x0-d/2*cos(pi/4+th0)-d/2*sqrt(2)/2+(a+b*cos(q3)));
jx32 = 2*(y0-d/2*sin(pi/4+th0)+d/2*sqrt(2)/2);
jx33 = 2*(z0+b*sin(q3));
jx34 = d*(x0*sin(pi/4+th0)-y0*cos(pi/4+th0)-d/2*cos(th0)+
          +(a+b*cos(q3))*sin(th0+pi/4));

jx41 = 2*(x0-d/2*cos(pi/4+th0)+d/2*sqrt(2)/2);
jx42 = 2*(y0-d/2*sin(pi/4+th0)-d/2*sqrt(2)/2+(a+b*cos(q4)));
jx43 = 2*(z0+b*sin(q4));
jx44 = d*(x0*sin(pi/4+th0)-y0*cos(pi/4+th0)+
          d/2*cos(th0)-(a+b*cos(q4))*cos(th0+pi/4));

Jx = [jx11, jx12, jx13, jx14;
      jx21, jx22, jx23, jx24;
      jx31, jx32, jx33, jx34;
      jx41, jx42, jx43, jx44]; %4x4

%Jq
jq1 = 2*b*(x0*sin(q1)+z0*cos(q1)+
          -a*sin(q1)+d/2*sin(q1)*(sqrt(2)/2+cos(pi/4+th0)));
jq2 = 2*b*(y0*sin(q2)+z0*cos(q2)+
          -a*sin(q2)+d/2*sin(q2)*(sqrt(2)/2+sin(pi/4+th0)));
jq3 = 2*b*(-x0*sin(q3)+z0*cos(q3)+
          -a*sin(q3)+d/2*sin(q3)*(sqrt(2)/2+cos(pi/4+th0)));
jq4 = 2*b*(-y0*sin(q4)+z0*cos(q4)+
          -a*sin(q4)+d/2*sin(q4)*(sqrt(2)/2+sin(pi/4+th0)));

Jq = -diag([jq1, jq2, jq3, jq4]); %4x4

%J
Jinv = inv(Jq)*Jx; %4x4
J = inv(Jinv); %4x4

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% TERNE DI RIFERIMENTO %%%%%%%%%%%%%%
%Braccio 1
R11 = inv(Ry(-qr1));
G11 = [a+lg*cos(qr1), 0, -lg*sin(qr1)-base];

```

```

G12 = 1/2*[x0+d/2*cos(pi/4+th0)+d/2*sqrt(2)/2+a+b*cos(q1),
          y0+d/2*sin(pi/4+th0)-d/2*sqrt(2)/2, z0-b*sin(q1)-2*base];
i1 = sqrt((G12(1)-B1(1))^2+(G12(3)-B1(3))^2);
c1 = abs(G12(3)-B1(3));
alpha1 = acos(c1/i1);
beta1 = real(acos(i1/(c/2)));

if (G12(2) >= 0)
    if (B1(1) >= G12(1))
        R12 = inv(Rz(-beta1)*Ry(-pi/2-alpha1));
    else
        R12 = inv(Rz(-beta1)*Ry(-pi/2+alpha1));
    end
else
    if (B1(1) >= G12(1))
        R12 = inv(Rz(+beta1)*Ry(-pi/2-alpha1));
    else
        R12 = inv(Rz(+beta1)*Ry(-pi/2+alpha1));
    end
end

%Braccio 2
R21 = inv(Rx(qr2));
G21 = [0, a+lg*cos(qr2), -lg*sin(qr2)-base];
G22 = 1/2*[x0+d/2*cos(pi/4+th0)-d/2*sqrt(2)/2, y0+d/2*sin(pi/4+th0)
          +d/2*sqrt(2)/2+a+b*cos(q2), z0-b*sin(q2)-2*base];
i2 = sqrt((G22(2)-B2(2))^2+(G22(3)-B2(3))^2);
c2 = abs(G22(3)-B2(3));
alpha2 = acos(c2/i2);
beta2 = real(acos(i2/(c/2)));

if (G22(1) <= 0)
    if (B2(2) >= G22(2))
        R22 = inv(Rz(-beta2)*Rx(+pi/2+alpha2));
    else
        R22 = inv(Rz(-beta2)*Rx(+pi/2-alpha2));
    end
else
    if (B2(2) >= G22(2))
        R22 = inv(Rz(+beta2)*Rx(+pi/2+alpha2));
    else
        R22 = inv(Rz(+beta2)*Rx(+pi/2-alpha2));
    end
end

%Braccio 3
R31 = inv(Ry(qr3));
G31 = [-(a+lg*cos(qr3)), 0, -lg*sin(qr3)-base];
G32 = 1/2*[x0-d/2*cos(pi/4+th0)-d/2*sqrt(2)/2-(a+b*cos(q3)),
          y0-d/2*sin(pi/4+th0)+d/2*sqrt(2)/2, z0-b*sin(q3)-2*base];
i3 = sqrt((G32(1)-B3(1))^2+(G32(3)-B3(3))^2);
c3 = abs(G32(3)-B3(3));
alpha3 = acos(c3/i3);
beta3 = real(acos(i3/(c/2)));

if (G32(2) <= 0)

```

```

    if (B3(1) <= G32(1))
        R32 = inv(Rz(-beta3)*Ry(+pi/2+alpha3));
    else
        R32 = inv(Rz(-beta3)*Ry(+pi/2-alpha3));
    end
else
    if (B3(1) <= G32(1))
        R32 = inv(Rz(+beta3)*Ry(+pi/2+alpha3));
    else
        R32 = inv(Rz(+beta3)*Ry(+pi/2-alpha3));
    end
end

%Braccio 4
R41 = inv(Rx(-qr4));
G41 = [0, -(a+lg*cos(qr4)), -lg*sin(qr4)-base];
G42 = 1/2*[x0-d/2*cos(pi/4+th0)+d/2*sqrt(2)/2, y0-d/2*sin(pi/4+th0)-
d/2*sqrt(2)/2-(a+b*cos(q4)), z0-b*sin(q4)-2*base];
i4 = sqrt((G42(2)-B4(2))^2+(G42(3)-B4(3))^2); %proiezione del braccio
c4 = abs(G42(3)-B4(3));
alpha4 = acos(c4/i4);
beta4 = real(acos(i4/(c/2)));

if (G42(1) >= 0)
    if (B4(2) <= G42(2))
        R42 = inv(Rz(-beta4)*Rx(-pi/2-alpha4));
    else
        R42 = inv(Rz(-beta4)*Rx(-pi/2+alpha4));
    end
else
    if (B4(2) <= G42(2))
        R42 = inv(Rz(+beta4)*Rx(-pi/2-alpha4));
    else
        R42 = inv(Rz(+beta4)*Rx(-pi/2+alpha4));
    end
end

%Piattaforma
Rp = inv(Rz(th0-pi/4-pi/2)*Rx(pi));

                %%%%%%%%%% INDICI CINEMATICI %%%%%%%%%%
JxT = [jx11, jx12, jx13;
        jx21, jx22, jx23;
        jx31, jx32, jx33;
        jx41, jx42, jx43]; %4x3
JxR = [jx14; jx24; jx34; jx44]; %4x1

JTinv = inv(Jq)*JxT; %4x3

JDTinv = JTinv*br; %4x3
Jxyinv = Jinv(:,1:2); %4x2
Jzinv = Jinv(:,3); %4x1
JDxyinv = Jxyinv*br; %4x2
JDzinv = br*Jzinv; %4x1

aqinv = eig(Jinv'*Jinv*br^2);

```



```

uDT = sqrt(1/(det(Jinv'*Jinv*br^2)/(min(aqinv))));
uDxy = sqrt(1/(det(Jinv'*Jinv*br^2)/(max(aqinv)*min(aqinv))));
uDz = sqrt(1/(max(aqinv)));

uDT2 = 1/sqrt(det(JDTinv'*JDTinv));
uDxy2 = 1/sqrt(det(JDxyinv'*JDxyinv));
uDz2 = 1/sqrt(det(JDzinv'*JDzinv));

%%%%%%%%% GENERALIZED INERTIA MATRIX REDUCED TO THE END EFFECTOR %%%%%%%%%%
%piattaforma mobile
dist = sqrt(x^2+y^2+z0^2);
Hp = [eye(3),[offset*sin(pi/4+th0), -offset*cos(pi/4+th0), 0]']; %3x4
Lp = [zeros(3),[0, 0, 1]'];
Ip = (mp+mload)*dist^2*eye(3); %3x3
bRp = Rx(-pi); %3x3
bIp = bRp*Ip*bRp'; %3x3

%braccio 1
I11 = mb*diag([1/2*rb^2, br^2/3-br*lg+lg^2, br^2/3-br*lg+lg^2]); %3x3
L11 = [-sin(qr1), 0, -cos(qr1)]', zeros(3)]*Jinv; %3x4
H11 = lg*L11; %3x4
bR11 = Ry(-qr1); %3x3
bI11 = bR11*I11*bR11'; %3x3
I12 = 2*mc*diag([0, 1/12*c^2, 1/12*c^2]); %3x3
H12 = 1/2*[eye(3),[-d/2*sin(pi/4+th0),d/2*cos(pi/4+th0),0]']
      +b/2*[-sin(q1), 0, -cos(q1)]', zeros(3)]*Jinv;
L12 = 2/c*H12; %3x4
bR12 = inv(R12); %3x3
bI12 = bR12*I12*bR12'; %3x3

%braccio 2
I21 = mb*diag([br^2/3-br*lg+lg^2, 1/2*rb^2, br^2/3-br*lg+lg^2]); %3x3
L21 = [zeros(3,1), [0, -sin(qr2), -cos(qr2)]', zeros(3,2)]*Jinv; %3x4
H21 = lg*L21; %3x4
bR21 = Rx(qr2); %3x3
bI21 = bR21*I21*bR21'; %3x3
I22 = 2*mc*diag([1/12*c^2, 0, 1/12*c^2]); %3x3
H22 = 1/2*[eye(3),[-d/2*sin(pi/4+th0), d/2*cos(pi/4+th0),0]']
      +b/2*[zeros(3,1), [0, -sin(q2), -cos(q2)]', zeros(3,2)]*Jinv;
L22 = 2/c*H22; %3x4
bR22 = inv(R22); %3x3
bI22 = bR22*I22*bR22'; %3x3

%braccio 3
I31 = mb*diag([1/2*rb^2, br^2/3-br*lg+lg^2, br^2/3-br*lg+lg^2]); %3x3
L31 = [zeros(3,2),[sin(qr3), 0, -cos(qr3)]', zeros(3,1)]*Jinv; %3x4
H31 = lg*L31; %3x4
bR31 = Ry(qr3); %3x3
bI31 = bR31*I31*bR31'; %3x3
I32 = 2*mc*diag([0, 1/12*c^2, 1/12*c^2]); %3x3
H32 = 1/2*[eye(3),[d/2*sin(pi/4+th0),-d/2*cos(pi/4+th0),0]']
      +b/2*[zeros(3,2),[sin(q3), 0, -cos(q3)]', zeros(3,1)]*Jinv;
L32 = 2/c*H32; %3x4
bR32 = inv(R32); %3x3
bI32 = bR32*I32*bR32'; %3x3

```

```

%braccio 4
I41 = mb*diag([br^2/3-br*lg+lg^2, 1/2*rb^2, br^2/3-br*lg+lg^2]); %3x3
L41 = [zeros(3),[0, sin(qr4), -cos(qr4)]]'*Jinv; %3x4
H41 = lg*L41; %3x4
bR41 = Rx(-qr4); %3x3
bI41 = bR41*I41*bR41'; %3x3
I42 = 2*mc*diag([1/12*c^2, 0, 1/12*c^2]); %3x3
H42 = 1/2*[eye(3),[d/2*sin(pi/4+th0),-d/2*cos(pi/4+th0),0]']
      +b/2*[zeros(3),[0, sin(q4), -cos(q4)]]'*Jinv;
L42 = 2/c*H42; %3x4
bR42 = inv(R42); %3x3
bI42 = bR42*I42*bR42'; %3x3

N =
(mp*Hp'*Hp+Lp'*bIp*Lp+mb*(H11'*H11+H21'*H21+H31'*H31+H41'*H41)+2*mc*(H12'
*H12+H22'*H22+H32'*H32+H42'*H42)+L11'*bI11*L11+L21'*bI21*L21+L31'*bI31*L3
1+L41'*bI41*L41+L12'*bI12*L12+L22'*bI22*L22+L32'*bI32*L32+L42'*bI42*L42);

      %%%%%%%%%% INDICI DINAMICI %%%%%%%%%%%%%%
TIM = N(1:3,1:3); %3x3
aTIM = eig(TIM);
dTIM = 27*(aTIM(1)*aTIM(2)*aTIM(3))/(aTIM(1)+aTIM(2)+aTIM(3))^3;
dTIMxy = sqrt(det(N(1:2,:)*N(1:2,:))');
dTIMz = sqrt(N(3,:)*(N(3,:))');
dTIMx = sqrt(N(1,:)*(N(1,:))');
dTIMy = sqrt(N(2,:)*(N(2,:))');

      %%%%%%%%%%%%%% CINEMATICA DI ACCELERAZIONE %%%%%%%%%%%%%%
jpx11 = 2*(xvel(1)-d/2*sin(pi/4+th0)*xvel(4)+b*sin(q1)*qvel(1));
jpx12 = 2*(xvel(2)+d/2*cos(pi/4+th0)*xvel(4));
jpx13 = 2*(xvel(3)+b*cos(q1)*qvel(1));
jpx14 = d*(-xvel(1)*sin(pi/4+th0)-x0*cos(pi/4*th0)*xvel(4)
      +xvel(2)*cos(pi/4+th0)-y0*sin(pi/4+th0)*xvel(4)
      +d/2*sin(th0)*xvel(4)-b*sin(q1)*qvel(1)*sin(pi/4+th0)
      +(a+b*cos(q1))*cos(pi/4+th0)*xvel(4));
jpx21 = 2*(xvel(1)-d/2*sin(pi/4+th0)*xvel(4));
jpx22 = 2*(xvel(2)+d/2*cos(pi/4+th0)*xvel(4)+b*sin(q2)*qvel(2));
jpx23 = 2*(xvel(3)+b*cos(q2)*qvel(2));
jpx24 = d*(-xvel(1)*sin(pi/4+th0)-x0*cos(pi/4*th0)*xvel(4)
      +xvel(2)*cos(pi/4+th0)-y0*sin(pi/4+th0)*xvel(4)
      -d/2*sin(th0)*xvel(4)+b*sin(q2)*qvel(2)*cos(pi/4+th0)
      +(a+b*cos(q2))*sin(pi/4+th0)*xvel(4));
jpx31 = 2*(xvel(1)+d/2*sin(pi/4+th0)*xvel(4)-b*sin(q3)*qvel(3));
jpx32 = 2*(xvel(2)-d/2*cos(pi/4+th0)*xvel(4));
jpx33 = 2*(xvel(3)+b*cos(q3)*qvel(3));
jpx34 = d*(xvel(1)*sin(pi/4+th0)+x0*cos(pi/4*th0)*xvel(4)
      -xvel(2)*cos(pi/4+th0)+y0*sin(pi/4+th0)*xvel(4)+
      d/2*sin(th0)*xvel(4)-b*sin(q3)*qvel(3)*sin(pi/4+th0)
      +(a+b*cos(q3))*cos(pi/4+th0)*xvel(4));
jpx41 = 2*(xvel(1)+d/2*sin(pi/4+th0)*xvel(4));
jpx42 = 2*(xvel(2)-d/2*cos(pi/4+th0)*xvel(4)-b*sin(q4)*qvel(4));
jpx43 = 2*(xvel(3)+b*cos(q4)*qvel(4));
jpx44 = d*(xvel(1)*sin(pi/4+th0)+x0*cos(pi/4*th0)*xvel(4)
      -xvel(2)*cos(pi/4+th0)+y0*sin(pi/4+th0)*xvel(4)
      -d/2*sin(th0)*xvel(4)+b*sin(q4)*qvel(4)*cos(pi/4+th0)
      +(a+b*cos(q4))*sin(pi/4+th0)*xvel(4));

```

```

Jpx = [jpx11 jpx12 jpx13 jpx14;
       jpx21 jpx22 jpx23 jpx24;
       jpx31 jpx32 jpx33 jpx34;
       jpx41 jpx42 jpx43 jpx44]; %4x4

jpeq1 = 2*b*(xvel(1)*sin(q1)+x0*cos(q1)*qvel(1)+xvel(3)*cos(q1)-
          z0*sin(q1)*qvel(1)-a*cos(q1)*qvel(1)
          +d/2*cos(q1)*qvel(1)*(sqrt(2)/2+cos(pi/4+th0))
          -d/2*sin(q1)*sin(pi/4+th0)*xvel(4));
jpeq2 = 2*b*(xvel(2)*sin(q2)+y0*cos(q2)*qvel(2)+xvel(3)*cos(q2)-
          z0*sin(q2)*qvel(2)-a*cos(q2)*qvel(2)
          +d/2*cos(q2)*qvel(2)*(sqrt(2)/2+sin(pi/4+th0))
          +d/2*sin(q2)*cos(pi/4+th0)*xvel(4));
jpeq3 = 2*b*(-xvel(1)*sin(q3)-x0*cos(q3)*qvel(3)+xvel(3)*cos(q3)-
          z0*sin(q3)*qvel(3)-a*cos(q3)*qvel(3)
          +d/2*cos(q3)*qvel(3)*(sqrt(2)/2+cos(pi/4+th0))
          -d/2*sin(q3)*sin(pi/4+th0)*xvel(4));
jpeq4 = 2*b*(-xvel(2)*sin(q4)-y0*cos(q4)*qvel(4)+xvel(3)*cos(q4)-
          z0*sin(q4)*qvel(4)-a*cos(q4)*qvel(4)
          +d/2*cos(q4)*qvel(4)*(sqrt(2)/2+sin(pi/4+th0))
          +d/2*sin(q4)*cos(pi/4+th0)*xvel(4));

Jpq = -diag([jpeq1 jpeq2 jpeq3 jpeq4]); %4x4

%%%%%%%%%%%% ANALISI DINAMICA %%%%%%%%%%%%%%
%contributo arm
Ieq = Imot+Iarm+mc*b^2; %[kg*m^2]
IACT = diag([Ieq Ieq Ieq Ieq]);
cosq = [cos(q1) cos(q2) cos(q3) cos(q4)]';
cosqr = [cos(qr1) cos(qr2) cos(qr3) cos(qr4)]';
Fs = fs*[sign(qvel(1)) sign(qvel(2)) sign(qvel(3)) sign(qvel(4))]'';
Fv = diag([fv fv fv fv]);
%contributo piattaforma
Iload = mload*dist^2; %[kg*m^2]
G = [0 0 -g 0]';
MA = diag([mA mA mA 0]);
MB = diag([mB mB mB 0]);
Mload = diag([mload mload mload Iload]);

Ta = [1 0 0 +d/2*sin(pi/4+th0);
      0 1 0 -d/2*cos(pi/4+th0);
      0 0 1 0;
      0 0 0 1];
Tb = [1 0 0 -d/2*sin(pi/4+th0);
      0 1 0 +d/2*cos(pi/4+th0);
      0 0 1 0;
      0 0 0 1];
Jxa = [jx11, jx12, jx13, 2*jx14;
       jx21, jx22, jx23, 2*jx24;
       jx31, jx32, jx33, 0;
       jx41, jx42, jx43, 0];
Jxb = [jx11, jx12, jx13, 0;
       jx21, jx22, jx23, 0;
       jx31, jx32, jx33, 2*jx34;
       jx41, jx42, jx43, 2*jx44];

```

```

Ja = inv(Jxa)*Jq;
Jb = inv(Jxb)*Jq;

LL = Jinv'*IACT*Jinv+Jinv'*Ja'*(MA+Mload)+Jinv'*Jb'*MB;
L = LL(1:3,1:3);

                %%%%%%%%%% INDICI DINAMICI DI MASSA %%%%%%%%%%%%%%
L1 = L(1,:);
L2 = L(2,:);
L3 = L(3,:);
kat = 1/3*(sqrt(L1*L1')+sqrt(L2*L2')+sqrt(L3*L3'));
%kat = sqrt(det(L*L'));
katxy = 1/2*(sqrt(L1*L1')+sqrt(L2*L2'));
%katxy = sqrt(det(L(1:2,:)*(L(1:2,:))'));
katz = (sqrt(L3*L3'));
katx = (sqrt(L1*L1'));
katy = (sqrt(L2*L2'));

                %%%%%%%%%% MOVIMENTO VERTICALE %%%%%%%%%%%%%%
accele = [0, 0, 1, 0]';
Fmot = LL*accele;
Tau = J'*Fmot;
alfa = 119.5/max(abs(Tau));
Fmot = alfa*Fmot;
Tau = alfa*Tau;

Fcc = Jinv'*IACT*inv(Jq)*(Jpx-Jpq*Jinv)*xvel;
Fgr =
(Jinv'*(+g*mc*b*cosq+g*mb*lg*cosqr)+inv(J')*(Ja'*(MA+Mload)+Jb'*MB)*G);
%Fattr=Jinv'*(Fs+Fv*Jinv*xvel);
Fattr = 0;
Fin = Fmot+Fcc+Fgr+Fattr;

                %%%%%%%%%% MOVIMENTO ORIZZONTALE %%%%%%%%%%%%%%
accele = 1/sqrt(2)*[-1, -1, 0, 0]';
Fmot = LL*accele;
Tau = J'*Fmot;
alfa2 = 119.5/max(abs(Tau));
Fmot = alfa2*Fmot;
Tau = alfa2*Tau;

%DEFINIZIONE VALORE DEGLI INDICI
indicealfa(ii,jj,kk)=alfa;
indicealfa2(ii,jj,kk)=alfa2;
%...

else
    disp('angolo fuori dal range');
end
else
    disp('condizione singolare');
end
end
end
end
end

```