



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA
Dipartimento di Ingegneria Industriale DII

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

**Simulazione FEM e validazione sperimentale di cantilever
piezoelettrici ad uso di harvester ed attuatori**

Relatore: prof. Alberto Doria

Cristian Medè
1080098

Anno Accademico 2015/2016

Parole chiave

Energy harvesting, vibrazioni meccaniche, cantilever beam, piezoelettricità.

Sommario

L'obiettivo di questa tesi è di validare un modello elettromeccanico a elementi finiti applicabile a travi piezoelettriche utilizzate sia per il recupero di energia da vibrazioni meccaniche sia come attuatori.

Un modello ad elementi finiti permette la simulazione del comportamento di questi dispositivi e può fornire informazioni utili che riguardano gli aspetti meccanici come l'analisi modale con le frequenze di risonanza, le forme modali, e gli smorzamenti e informazioni che riguardano aspetti elettro-meccanici come l'andamento della tensione elettrica generata al variare dell'eccitazione alla base.

Le simulazioni, se validate sperimentalmente, trovano un'importante applicazione nella progettazione di questi dispositivi e nell'ottimizzazione del loro comportamento funzionale.

Per raggiungere tale obiettivo si è inizialmente effettuata una ricerca bibliografica in modo da avere un'idea chiara sul principio di funzionamento e sulle principali applicazioni delle lamine piezoelettriche (Capitolo 1). Successivamente per comprendere il comportamento e le peculiarità dei materiali piezoelettrici si è studiato la teoria alla base della piezoelettricità lineare, riportata nel capitolo 2.

Nel capitolo 3 è presentato un modello analitico a parametri distribuiti del comportamento elettromeccanico delle lamine ad uso di harvester. Questo modello, trovato nella letteratura scientifica, è utile perché sottolinea le principali grandezze che influenzano le prestazioni, e fornisce un valore analitico della funzione di trasferimento tra tensione generata ed eccitazione alla base.

Nel capitolo 4 è presentato il lavoro svolto in laboratorio per misurare sperimentalmente le grandezze utilizzate per la validazione del modello numerico.

Nel capitolo 5 sono descritti i modelli ad elementi finiti costruiti con il software Comsol 5.0 e sono riportati in modo dettagliato i parametri geometrici utilizzati per le varie piastre, le proprietà dei materiali utilizzate, le condizioni al contorno applicate e le mesh della geometria per discretizzare il problema nei tre studi effettuati: studio delle autofrequenze, analisi armonica, studio del transitorio.

Nel capitolo 6 sono riportati i risultati ottenuti dai modelli numerici e il loro confronto con le misure sperimentali e con i risultati del modello analitico, dove applicabile.

Indice

Introduzione	1
1. L'energy harvesting	3
1.1 L'Energy harvesting e stato dell'arte	3
1.2 L'energy harvesting da vibrazioni e le sue applicazioni	5
1.3 Il Cantilever Piezoelettrico	9
2. La piezoelettricità	11
2.1 Introduzione	11
2.2 Struttura cristallina dei piezoceramici	12
2.3 Formulazione matematica della piezoelettricità lineare	13
2.4 Le costanti Piezoelettriche	17
3. La modellazione analitica del comportamento elettro-meccanico del cantilever beam	23
3.1 Introduzione	23
3.2 Il modello analitico a parametri concentrati	24
3.3 Il modello analitico a parametri distribuiti	27
3.3.1 Le equazione del circuito elettrico	32
3.3.2 Soluzioni in forma chiusa della risposta elettrica e meccanica	34
3.3.3 Equazioni elettromeccaniche Single-Mode	36
3.3.4 Funzioni di trasferimento Single-Mode	36

4. Le misurazioni	39
4.1 Introduzione	39
4.2 L'analisi modale sperimentale impulsiva e la catena di misura	40
4.2.1 Il martelletto strumentato	44
4.2.2 La barra di alluminio	45
4.2.3 Il sistema di afferraggio	46
4.2.4 L'accelerometro	48
4.2.5 Il sistema di acquisizione NI 9234	48
4.2.6 Il software Labview Signal express	49
4.3 Tipi di lamine piezoelettriche testate	50
4.4 L'effetto di carico legato all'impedenza di ingresso, Z_{in}, del sistema di acquisizione	55
4.5 Le misurazioni	59
4.6 I risultati sperimentali	62
5. Il modello numerico	69
5.1 Introduzione	69
5.2 I modelli FEM e la geometria delle piastre	70
5.2.1 Modellazione e geometria della piastra V22B	70
5.2.2 Modellazione della piastra V22BL	72
5.2.3 Modellazione della piastra PPA 1001	73
5.3 Le condizioni al contorno elettriche e meccaniche dei modelli numerici	74
5.4 I materiali	77
5.5 La mesh	80

6. I risultati della simulazione FEM e la validazione sperimentale	81
6.1 Introduzione	81
6.2 I risultati dell'analisi delle autofrequenze	81
6.3 I risultati dell'analisi armonica e del transitorio	85
6.4 Analisi FEM per valutare l'influenza del vincolo sul primo modo di vibrare	93
7. Conclusioni	101
Appendice A: Riduzione delle equazioni piezoelettriche per il modello di trave di Eulero-Bernoulli	105
A.1 Equazioni costitutive 3D della piezoelettricità lineare	105
A.2 Equazioni costitutive ridotte per la trave di Eulero-Bernoulli	106
Appendice B: Script MATLAB del modello Analitico	107
Appendice C: Lo smorzamento isteretico e lo smorzamento viscoso di Rayleigh	111
Appendice D: Rigidezza di un contatto pretensionato	115
Bibliografia	117

Lista delle figure

- 1.1: Cantilever piezoelettrico per il recupero di energia da vibrazioni [3]
- 1.2: a) principio di funzionamento di un VEH elettromagnetico dove un magnete (moving) oscilla rispetto ad un magnete fisso (stator); b) schematizzazione di un gap-closing electrostatic VEH [3].
- 1.3: Energy harvester elettrostatico [3]
- 1.4: Recupero di energia dal movimento del corpo umano [4]
- 1.5: Posizione dei sensori di monitoraggio strutturale nel ponte [4]
- 1.6: Posizione dei sensori di monitoraggio ambientale [4]
- 1.7: Applicazione dell'energy harvesting nel mondo automotive [4]
- 1.8: Cantilever piezoelettrico [5]
- 2.1: Dipoli elettrici nei domini di Weiss: (1) ceramico ferroelettrico non polarizzato, (2) durante polarizzazione, (3) dopo polarizzazione (ceramico piezoelettrico) [6]
- 2.2: Struttura cristallina della Peroskite [7]
- 2.3: Direzione degli assi [8]
- 2.4: Comportamento piezoelettrico [8]
- 3.1: Cantilever piezoelettrico [5]
- 3.2: Schema a parametri concentrati dell'energy harvester [10]
- 3.3: Modello dell'energy harvester a parametri distribuiti[5]
- 3.4: Funzione a gradino di Heaviside [12]
- 3.5: Cantilever piezoelettrico con un solo strato collegato alla resistenza R_l [5]
- 3.6: Schema circuitale dell'harvester bimorfo [5]
- 4.1: Eccitazione sinusoidale con frequenza variabile, sweep
- 4.2: Funzione delta di Dirac e la sua trasformata di Fourier [15]
- 4.3: Banda di eccitazione per punte con rigidzze diverse [14]
- 4.4: Catena di misura
- 4.5: Martelletto strumentato PCB
- 4.6: Barradi di alluminio mantenuta
- 4.7: Primo modo di vibrare della barra di alluminio a 626,68 Hz calcolato con un software FEM
- 4.8: Sistema di incastro della V22B alla 'Clamping Line' con accelerometro PCB

- 4.9: Spessimetro
- 4.10: Sistema di acquisizione NI 9234
- 4.11: Software LabView SignalExpress [18]
- 4.12: Cantilever V22B (unità di misura mm) [20]
- 4.13: Cantilever V22BL (unità di misura mm) [20]
- 4.14: Strati di materiale di V22B e V22BL[21]
- 4.15: Cantilever PPA 1001 [20]
- 4.16: Schema circuitale del sistema di acquisizione collegato alla sorgente da misurare[23]
- 4.17: Schema circuitale dell'harvester bimorfo con gli starti piezoelettrici collegati in serie[5]
- 4.18: Decadimento di un'oscillazione libera smorzata e misura dello smorzamento con il metodo del decremento logaritmico [14]
- 4.18: Configurazioni di vincolo per V22B e V22BL
- 4.19: Configurazioni di vincolo per PPA 1001
- 5.1: Modello 3D della V22B Clamp Line
- 5.2: Modello 3D della V22B Lunghezza massima
- 5.3: Modello 3D della V22BL Clamp Line
- 5.4: Modello 3D della V22BL Lunghezza massima
- 5.5: Modello 3D della PPA 1001 Clamp 0
- 5.6: Modello 3D della PPA 1001 Clamp 6
- 5.7: modellazione 3D della piastra V22B Clamping Line con evidenziate le superfici sulle quali è applicato il vincolo.
- 5.8: Superfici su cui è applicata la condizione di potenziale fluttuante
- 5.9: Rappresentazione dei vari materiali assegnati ai rispettivi domini nella V22B e V22BL
- 5.10: Rappresentazione dei vari materiali assegnati ai rispettivi domini nella PPA 1001
- 5.11: Particolare della mesh, l'elevata discretizzazione nello spessore degli strati piezoelettrici
- 5.12: Discretizzazione di 25 elementi sulla lunghezza
- 6.1: Piastra V22B con il parametro lunghezza, L, oggetto dello studio
- 6.2: Schema a parametri concentrati dell'harvester e del sistema di afferraggio
- 6.3: Sistema di afferraggio dell'harvester

6.4: Trave su due appoggi

6.5: Piastra V22B lunghezza massima con vincolo modellato con la condizione
al contorno letto di molle con rigidità complessiva, K_t , che è
il parametro dell'analisi

C.1: Ciclo di isteresi

C.2: Andamento dello smoramento proporzionale in funzione della pulsazione ω [26]

D.1: Collegamento pretensionato [27]

D.2: Diagramma degli allungamenti della flangia e della vite [27]

Lista delle tabelle

- 1.1: Densità di potenza delle fonti energetiche utilizzate nell'energy harvesting [2]
- 4.1: Caratteristiche dell'accelerometro PCB 352 C 22
- 4.2: Caratteristiche tecniche del sistema di acquisizione [17]
- 4.3: Sensibilità degli strumenti di misura
- 4.4: Spessore degli strati nei cantilever V22B e V22BL [22]
- 4.5: Proprietà di materiali cantilever V22B e V22BL [21]
- 4.6: Strati PPA 1001 [20]
- 4.7: Proprietà materiali PPA 1001 [20]
- 4.8: Configurazioni dei cantilever piezoelettrici testati
- 4.9: Misure effettuate V22B Clamp line
- 4.10: Misure effettuate V22B Lunghezza massima
- 4.11: Misure effettuate V22BL Clamp line
- 4.12: Misure effettuate V22BL Lunghezza massima
- 4.13: Misure effettuate PPA 1001 Clamp 0
- 4.14: Misure effettuate PPA 1001 Clamp 6
- 5.1: Parametri piastra V22B
- 5.2: Parametri piastra V22BL
- 5.3: Parametri piastra PPA 1001
- 5.4: Proprietà materiali cantilever V22B e V22BL
- 5.5: Proprietà materiali cantilever PPA 1001
- 6.1: Modi propri di vibrare della V22B vincolata alla clamping line
- 6.2: Modi propri di vibrare della V22B vincolata alla lunghezza massima
- 6.3: Modi propri di vibrare della V22BL vincolata alla clamping line
- 6.4: Modi propri di vibrare della V22B vincolata alla lunghezza massima
- 6.5: Modi propri di vibrare della PPA 1001 vincolata alla clamp 0
- 6.6: Modi propri di vibrare della PPA 1001 vincolata alla clamp 6
- 6.7: Frequenze del 1° modo di vibrare dall'analisi delle autofrequenze
- 6.8: Confronto dei risultati V22B Clamp line
- 6.9: Confronto dei risultati V22B lunghezza massima

- 6.10: Confronto dei risultati V22BL Clamp line
- 6.11: Confronto risultati V22BL Lunghezza massima
- 6.12: Confronto risultati PPA 1001 Clamp 0
- 6.13: Confronto risultati PPA 1001 Clamp 6

Lista dei grafici

- 3.1: Valore del parametro di correzione μ_1 al variare del rapporto M_t/mL [10]
- 4.1: Accelerazione del matelletto strumentato durante l'impatto
- 4.2: Spettro di potenza dell'accelerazione del martelletto strumentato, si osserva che a 500 Hz il valore del segnale è quasi nullo
- 4.3: Funzione di trasferimento misurata con evidenziato il disturbo a 625 Hz dovuto alla barra
- 4.4: Effetto di carico su V22B e V22BL
- 4.5: Effetto di carico su V22B e V22BL, errore percentuale di misurazione
- 4.6: Effetto di carico su PPA 1001
- 4.7: Effetto di carico su PPA 1001, errore di misurazione percentuale
- 4.8: Funzione di trasferimento misurata V22B clamp line
- 4.9: Funzione di trasferimento misurata V22B Lunghezza massima
- 4.10: Funzione di trasferimento misurata V22BL Clamp line
- 4.11: Funzione di trasferimento misurata V22BL Lunghezza massima
- 4.12: Funzione di trasferimento misurata PPA 1001 Clamp 0
- 4.13: Funzione di trasferimento misurata PPA 1001 Clamp 6
- 6.1: Funzione di trasferimento V22B Clamp line
- 6.2: Andamento della tensione V22B Clamp line
- 6.3: Funzione di trasferimento V22B lunghezza massima
- 6.4: Andamento della tensione V22B lunghezza massima
- 6.5: Funzione di trasferimento V22BL Clamp line
- 6.6: Andamento della tensione V22BL Clamp line
- 6.7: Funzione di trasferimento V22BL Lunghezza massima
- 6.8: Andamento tensione V22BL Lunghezza massima
- 6.9: Funzione di trasferimento PPA 1001 Clamp 0
- 6.10: Andamento tensione PPA 1001 Clamp 0
- 6.11: Funzione di trasferimento PPA 1001 Clamp 6
- 6.12: Andamento tensione PPA 1001 Clamp 6
- 6.13: Frequenza del 1° modo di vibrare della V22B al variare della lunghezza libera

di vibrare della lamina

6.14: frequenza del 1° modo di vibrare della V22BL al variare della lunghezza

libera di vibrare della lamina

6.15: risultati analisi rigidità parametrica

Introduzione

Il presente lavoro si inserisce all'interno delle ricerche riguardanti il settore dell'energy harvesting e ha lo scopo di validare un modello FEM elettromeccanico per dei cantilever piezoelettrici con ultimo fine il recupero di energia da vibrazioni.

Con il termine energy harvesting, o in alternativa energy scavenging, si indicano le tecnologie che si propongono di recuperare piccole quantità di energia da impiegare direttamente nel luogo dove questa viene convertita [1].

Tecnologie sempre più avanzate stanno dando recentemente un nuovo impulso in questa disciplina, che sta portando alla scoperta di metodi sempre più efficienti per la conversione di energia ricavata dall'ambiente.

I dispositivi che trasformano l'energia, chiamati energy harvesters, sono sempre più moderni ed efficienti a tal punto che hanno permesso di estrarre dalla natura energia pulita ed economica in grado di integrare la produzione di impianti di potenza convenzionali.

Questi dispositivi, autonomi sotto il profilo energetico, trovano applicazione qualora una sorgente di energia elettrica come ad esempio una batteria non sia disponibile, oppure l'installazione della stessa rappresenti un costo eccessivo. Infatti i dispositivi sfruttano l'energia estraibile da diverse fonti, dal solare all'eolico, dalle correnti marine alle vibrazioni, convertendola in energia elettrica.

La ricerca sull'energy harvesting si colloca nell'ottica di progresso tecnologico verso l'utilizzazione ottimale e intelligente delle fonti energetiche presenti nell'ambiente.

Le principali sorgenti, nelle quali si sono maggiormente concentrati gli sforzi nell'ideazione degli harvester, sono: energia termica, energia cinetica, energia idraulica, eolica ed applicazioni con materiali polimerici e piezoelettrici.

La ricerca legata a questo genere di dispositivi richiede una forte multidisciplinarietà. Sono infatti richieste competenze in meccanica dei solidi, elettronica, elettrotecnica, fisica, chimica e materiali.

La necessità di comprendere fenomeni legati a più discipline e la loro interazione è ciò che rende complesso lo sviluppo di questi dispositivi ma anche ciò che muove l'interesse di numerosi ricercatori nel mondo.

Gli obiettivi principali del presente lavoro di tesi sono la completa comprensione del funzionamento di piastre piezoelettriche per il recupero di energia da vibrazioni.

In particolare verrà studiato il loro comportamento con un modello analitico di trave a mensola a parametri distribuiti, successivamente verrà effettuata una simulazione con un software FEM, ed in fine verranno presentate le prove sperimentali con il confronto tra i vari modelli.

L'attenzione maggiore è stata rivolta all'accoppiamento tra il problema meccanico e il problema elettrico.

Capitolo 1

L'energy harvesting

1.1 L'Energy harvesting e stato dell'arte

L'energy harvesting, è il processo nel quale l'energia proveniente da sorgenti alternative viene catturata e immagazzinata. Per energia alternativa si intende una particolare fonte di energia differente da quella ottenuta con l'utilizzo dei combustibili fossili e nucleare che costituiscono invece le così dette fonti di energia tradizionali.

L'interesse per questo processo innovativo è aumentato per due principali motivi.

Il primo è la presenza di fonti di energia inesauribili e libere da cui trarre vantaggio, come per esempio:

- Energia delle vibrazioni.
- Energia termica: energia recuperabile da sorgenti di calore.
- Energia luminosa: catturata dal sole.
- Energia elettromagnetica: generata da induttori e trasformatori.
- Energia naturale: dal vento, dalla caduta dell'acqua o da correnti oceaniche.
- Energia del corpo umano: una combinazione di energia meccanica e termica generata da bio organismi o da azioni come camminare o correre.
- Energia delle onde radio.
- Altre energie (provenienti da fonti chimiche e biologiche).

Ciascuna fonte di energia, come quelle sopra elencate, presenta vantaggi e svantaggi. Vediamo alcuni esempi.

L'energia solare è caratterizzata da un'elevata potenza nelle applicazioni all'aperto, ma non risulta altrettanto appetibile negli ambienti chiusi o privi di illuminazione.

Ancora, l'energia termica sfrutta le differenze di temperatura, le quali sono reperibili in molti contesti ma gli attuali sistemi di conversione mostrano ancora una scarsa efficienza.

Le onde radio sono piuttosto abbondanti, ma la densità di potenza è relativamente povera.

Nel caso delle vibrazioni meccaniche, molteplici sono i vantaggi, tra cui la discreta densità di potenza e l'elevato numero di fonti come i macchinari industriali, gli

elettrodomestici, i mezzi di trasporto, i movimenti umani, gli edifici, i ponti e le onde sismiche.

In ogni caso, il pensiero della comunità scientifica sta convergendo nel considerare come migliore una soluzione ibrida che integri più fonti di tipo diverso.

Il secondo motivo che rende interessante l'energy harvesting è dovuto alla diminuzione dei requisiti di alimentazione degli apparecchi elettronici con la disponibilità di dispositivi micro e nano power.

Con l'energy harvesting, infatti, si riesce a recuperare potenze dell'ordine di qualche mW, che fin a qualche anno fa risultavano troppo basse per l'utilizzo pratico.

Fonte Energetica	Densità di Potenza
Rumore acustico	0,003 $\mu\text{W}/\text{cm}^3$ a 75 dB 0,96 $\mu\text{W}/\text{cm}^3$ a 100 dB
Variazioni di temperatura	10 $\mu\text{W}/\text{cm}^3$
Radiofrequenza	1 $\mu\text{W}/\text{cm}^2$
Luce ambiente	100 mW/cm^2 (luce solare) 100 $\mu\text{W}/\text{cm}^2$ (illuminazione interna)
Termoelettrico	60 $\mu\text{W}/\text{cm}^2$
Vibrazione (microgenerazione)	4 $\mu\text{W}/\text{cm}^3$ (movimenti umani – Hz) 800 $\mu\text{W}/\text{cm}^3$ (movimenti macchine – kHz)
Vibrazione (piezoelettricità)	200 $\mu\text{W}/\text{cm}^3$
Vento	1 $\mu\text{W}/\text{cm}^2$

Tabella 1.1: densità di potenza delle fonti energetiche utilizzate nell'energy harvesting[2]

Un energy harvester necessita schematicamente di tre componenti:

- un dispositivo di conversione dell'energia (ad esempio un elemento piezoelettrico che può trasformare energia meccanica in energia elettrica);
- un modulo energy harvesting che cattura, immagazzina e gestisce la potenza del dispositivo;
- una rete di sensori o dispositivi di controllo e monitoraggio.

Le tipologie di energy harvester sono decisamente varie, ad esempio sensori di movimento per l'energia meccanica; fotodiodi, fotosensori o pannelli solari per quella luminosa; sensori di temperatura e termogeneratori per quella termica.

In questa tesi si approfondirà l'argomento dal punto di vista del recupero di energia da vibrazioni attraverso cantilever piezoelettrici che verranno descritti successivamente.

1.2 L'energy harvesting da vibrazioni e le sue applicazioni

L'ambiente in cui viviamo ci mette a disposizione energia potenzialmente illimitata sotto forma di vibrazioni. Le vibrazioni sono presenti in eventi naturali, nel moto sismico, nel vento, nelle maree, nel movimento dei veicoli, persino nell'apparente staticità di strutture come edifici e ponti, e anche nel movimento del corpo umano e degli animali. Sfruttare questo enorme patrimonio è uno dei campi più interessanti e promettenti dell'odierna ricerca energetica.

Ci sono tre principali categorie di sistemi di conversione di energia dalle vibrazioni: piezoelettrici, elettromagnetici ed elettrostatici [3]. Ogni tecnica presenta vantaggi e svantaggi, per cui non esiste una tecnica adattabile sempre, la migliore scelta dipende dal tipo di applicazione.

I trasduttori piezoelettrici fanno uso di materiali polarizzati elettricamente come il titanato di bario (BaTiO_3), ossido di zinco (ZnO) e piombo zirconato di titanio ($\text{Pb}[\text{Zr}_x\text{Ti}_{(1-x)}]\text{O}_3$), comunemente noto come PZT e considerato uno dei migliori materiali per l'accoppiamento elettromeccanico. I materiali piezoelettrici riescono a fornire elevati voltaggi (da 2 ai alcuni V), sono ben adatti per applicazioni particolarmente compatte e ottimi in termini di densità di potenza per unità di volume. Ciononostante, l'accoppiamento piezoelettrico presenta problemi legati all'invecchiamento, alla depolarizzazione, alla fragilità, oltre che alla sensibilità a fatica.

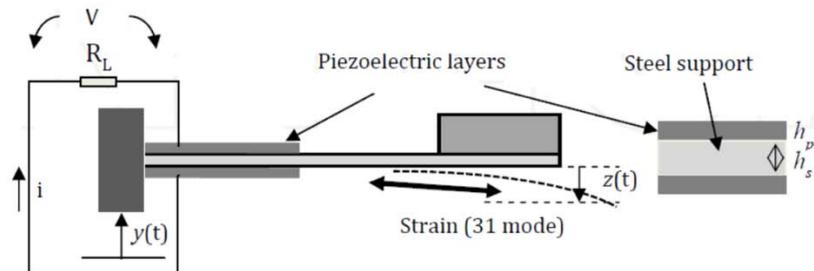


Figura 1.1: Cantilever piezoelettrico per il recupero di energia da vibrazioni [3]

Gli harvester elettromagnetici funzionano sfruttando la legge di Faraday, accoppiando un campo magnetico statico prodotto da un magnete permanente (stator) a un solenoide (mover) in moto relativo rispetto al primo. Tali dispositivi sono raccomandati per basse frequenze (2-20Hz) e dimensioni medie.

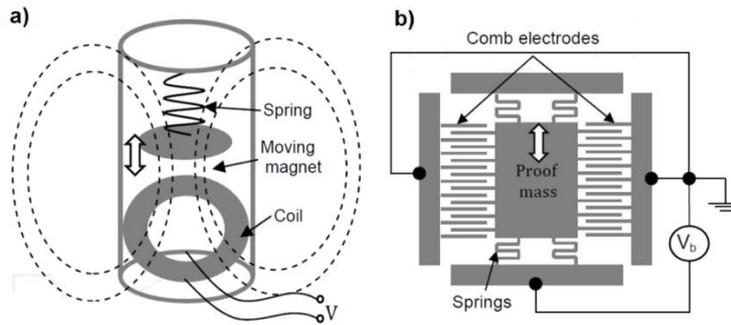


Figura 1.2: a) principio di funzionamento di un VEH elettromagnetico dove un magnete (moving) oscilla rispetto ad un magnete fisso (stator); b) schematizzazione di un gap-closing electrostatic VEH [3].

Il principio di funzionamento degli harvester elettrostatici consiste principalmente in una capacità variabile in cui un elettrodo è attaccato a una massa oscillante sospesa da molle e un elettrodo è fisso al telaio della struttura. Quando una forza è applicata alla massa, o il gap dielettrico (in-plane gap-closing converter), o la loro superficie sovrapposta (overlap varying converter), varia in funzione della direzione di movimento. Come conseguenza la capacità cambia e cariche aggiuntive si accumulano agli elettrodi in modo da bilanciare la tensione di polarizzazione. Durante il movimento della massa dunque si crea una corrente, che fluisce attraverso i piatti. Uno dei principali svantaggi degli harvester elettrostatici è la necessità di un'alimentazione esterna al fine di precaricarli, in quanto il generatore richiede di essere avviato all'inizio del processo di conversione. La potenza generata è inferiore rispetto a quella di dispositivi piezoelettrici ed elettromagnetici.

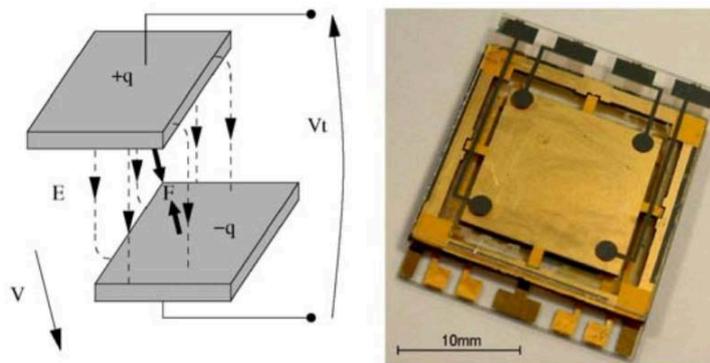


Figura 1.3: Energy harvesters elettrostatico [3]

Oggi sono numerose e suggestive le applicazioni in via di sviluppo che sfruttano le vibrazioni meccaniche come sorgente.

Si possono sfruttare vibrazioni provenienti dal movimento del corpo umano e con queste alimentare 'wearable devices'. Questi sono dispositivi che permettono di monitorare le

attività e funzionalità fisiologiche, come il battito cardiaco durante un'attività sportiva, o semplicemente ricaricare il proprio smartphone (Fig 1.2).



Figura 1.4: Recupero di energia dal movimento del corpo umano [4]

Le vibrazioni possono essere utilizzate per alimentare dei sensori, come quelli posizionati ad alta quota per il monitoraggio strutturale dei ponti o degli edifici, la cui posizione renderebbe pericolosi gli interventi di sostituzione o manutenzione del sistema di alimentazione. In questi casi diviene necessario utilizzare self-powered devices ovvero dispositivi autoalimentati, con tecnologie WSN, Wireless Sensor Networks. Con il termine Wireless Sensor Network si indica una determinata tipologia di rete che, caratterizzata da una architettura distribuita, è realizzata da un insieme di dispositivi elettronici autonomi in grado di prelevare dati dall'ambiente circostante e di comunicare tra loro. Questi permettono il monitoraggio dell'integrità strutturale grazie all'alimentazione di harvester (fig1.3).



Figura 1.5: posizione dei sensori di monitoraggio strutturale nel ponte [4]

Anche in ambito ambientale l'energy harvesting da vibrazione permette di alimentare sensori utilizzati per il controllo di fenomeni o ambienti pericolosi come ad esempio l'attività vulcanica (fig. 1.3).

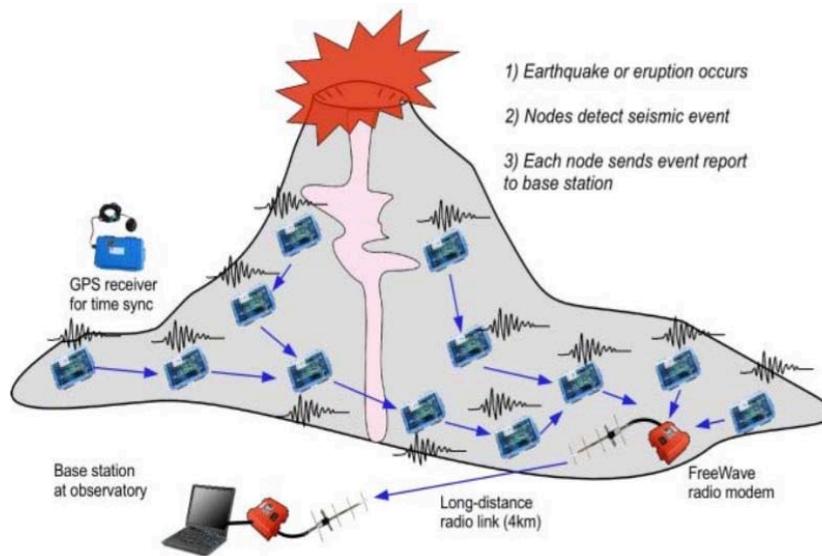


Figura 1.6: posizione dei sensori di monitoraggio ambientale [4]

Per quanto riguarda il mondo automotive molte sono le applicazioni degli harvester, tra le quali il controllo della pressione dei pneumatici tramite i Wireless Tire Pressure Monitoring Systems (TPMS) (figura 1.7). Questi sono dei sensori di pressione autoalimentati tramite harvester di materiale piezoelettrico che recuperano l'energia dalle vibrazioni meccaniche.

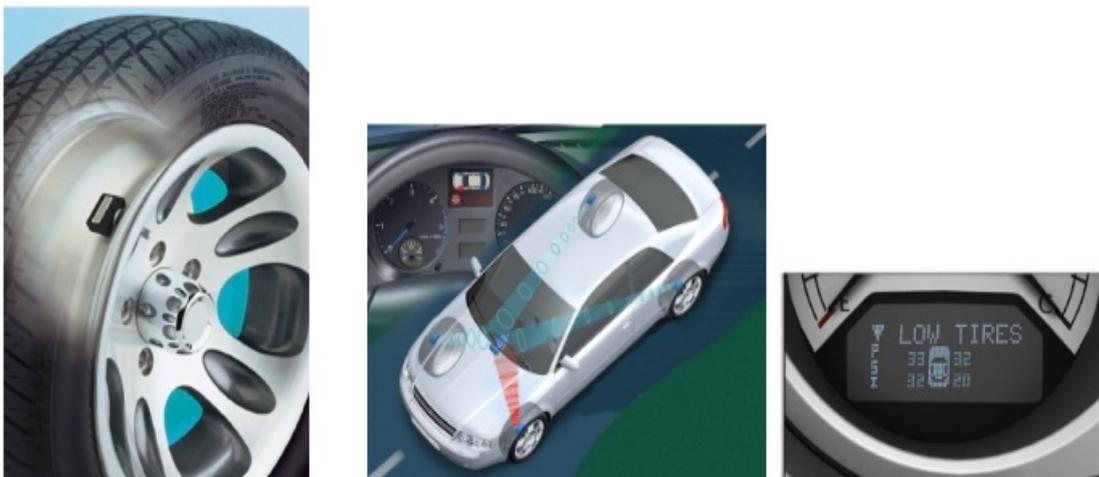


Figura 1.7: applicazione dell'energy harvesting nel mondo automotive [4]

1.3 Il Cantilever Piezoelettrico

Lo strumento che permette il recupero di energia da vibrazioni sfruttando la piezoelettricità è il cantilever beam (figura 3.1). La sua configurazione standard è una trave bimorfa, cioè costituita da due strati di materiale piezoelettrico, a profilo rettangolare. I due strati di materiale piezoelettrico sono solidali ad un substrato di supporto di materiale metallico.

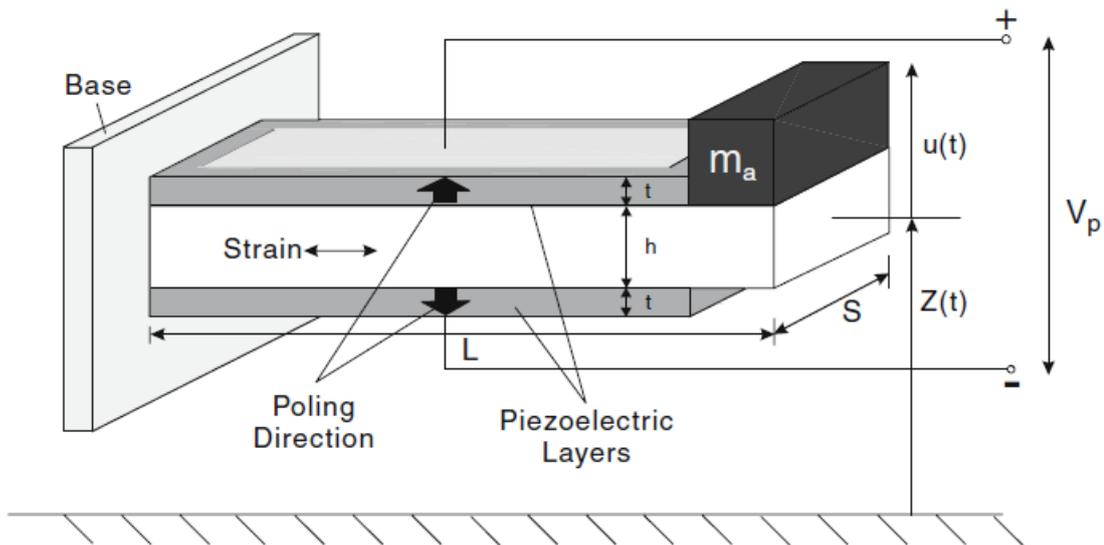


Figura 1.8: cantilever piezoelettrico [5]

La trave è incastrata ad un'estremità e per effetto delle forze d'inerzia, indotte dalle vibrazioni applicate all'incastro, è sottoposta ad una deformazione meccanica.

All'estremo libero è applicata una massa che ha lo scopo di amplificare l'ampiezza degli spostamenti e di consentire una sintonizzazione della frequenza propria del dispositivo, con la frequenza di vibrazione del supporto.

Gli strati piezoelettrici, polarizzati in modo opposto, per l'effetto multifisico elettromeccanico, convertono l'energia meccanica delle vibrazioni in elettrica. Essi realizzano una distribuzione di carica e generano un campo elettrico tra gli elettrodi posti sulla superficie. Questi elettrodi possono essere collegati tramite un circuito esterno in serie o in parallelo.

Questi dispositivi possono essere anche utilizzati anche come attuatori, se tramite il circuito esterno viene applicata una differenza di potenziale agli elettrodi. Queste lamine

piezoelettriche si deformano per la l'effetto piezoelettrico inverso. Infatti la differenza di potenziale presente nel materiale piezoelettrico fa nascere dello stress meccanico e da luogo a deformazioni flessionali.

In questo lavoro di tesi si farà riferimento sia per la parte numerica che per quella sperimentale alla configurazione con collegamento in serie degli elettrodi, questa consente di ottenere la massima differenza di potenziale tra gli elettrodi incollati rispettivamente sull'intradosso e sull'estradosso. L'attenzione principale è posta per l'uso del cantilever come harvester, ma i risultati trovati, che sono caratteristici della piastra come le frequenze di risonanza e modi di vibrare possono essere estesi anche all'uso da attuatore.

Capitolo 2

La Piezoelettricità

2.1 Introduzione

La piezoelettricità è una proprietà che esiste in molti materiali, i quali, sottoposti a forze meccaniche, sviluppano cariche elettriche sulla loro superficie (effetto piezoelettrico diretto) e, viceversa, sottoposti ad un campo elettrico, esibiscono una deformazione meccanica (effetto piezoelettrico inverso) [6].

La prima dimostrazione sperimentale di un collegamento tra i fenomeni piezoelettrici macroscopici e la struttura cristallografica è stata pubblicata nel 1880 da Pierre e Jacques Curie, i quali misurano la carica superficiale che compare su cristalli specificamente preparati (tormalina, quarzo e sale Rochelle), sottoposti a sforzo meccanico.

La prima seria applicazione della piezoelettricità è stata realizzata durante la prima guerra mondiale da Langevin, che costruì la prima sorgente ultrasonora subacquea (sonar) consistente in elementi piezoelettrici di quarzo interposti fra piastre d'acciaio. Il successo del sonar stimolò un'intensa attività di sviluppo su tutti i tipi di dispositivi piezoelettrici. Il controllo della frequenza del cristallo divenne essenziale per la crescente industria di radiodiffusione e radio comunicazione fra le due guerre mondiali, nacquero la maggior parte delle applicazioni piezoelettriche classiche: microfoni, accelerometri, trasduttori ultrasonori, attuatori ad elemento flettente, pick-up di fonografi, filtri di segnale, ecc.

I monocristalli usati a quel tempo avevano basse proprietà piezoelettriche.

La scoperta, durante la seconda guerra mondiale, della possibilità di indurre la piezoelettricità tramite l'applicazione di un forte campo elettrico ad ossidi metallici sinterizzati in modo da allineare i loro domini di dipolo, ha permesso nuove applicazioni piezoelettriche ed aperto la via ad un'intensa ricerca sui piezoceramici.

Il primo piezoceramico è stato il titanato di bario ($BaTiO_3$), che esibisce costanti dielettriche fino a 100 volte superiori a quelle dei cristalli di taglio comune.

Il titanato di bario è stato ampiamente usato subito dopo la seconda guerra mondiale per la generazione di vibrazioni acustiche ed ultrasonore e per gli attuatori, ma oggi è stato

sostituito generalmente dal titanato zirconato di piombo (PZT) per le sue superiori proprietà piezoelettriche e più alte temperature di funzionamento.

Il titanato zirconato di piombo $\text{PbZrO}_3 * \text{PbTiO}_3$, commercialmente denominato PZT, è una soluzione solida di PbZrO_3 ortorombico (52, 54%) e di PbTiO_3 tetragonale (48, 46%) con una struttura del tipo perovskite.

2.2 Struttura cristallina dei piezoceramici

La capacità dei materiali piezoelettrici di trasformare energia elettrica in meccanica e viceversa dipende dalla loro struttura cristallina. La condizione necessaria perché avvenga l'effetto piezoelettrico è l'assenza di un centro di simmetria nel cristallo, che è responsabile della separazione di carica fra ioni positivi e negativi e della formazione dei domini di Weiss, cioè di gruppi di dipoli con orientazione parallela. Applicando un campo elettrico ad un materiale piezoelettrico, i domini di Weiss si allineano proporzionalmente al campo (figura 2.1).

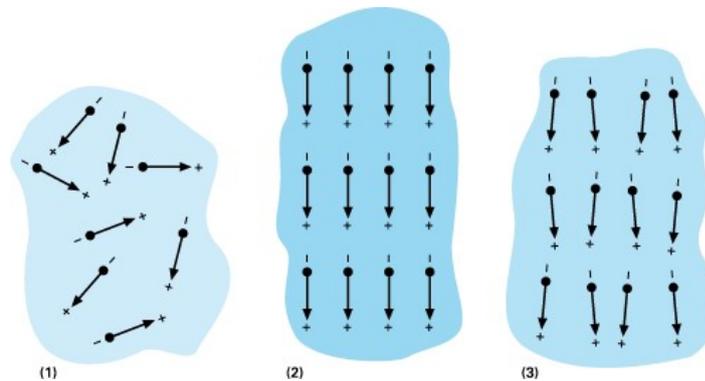


Figura 2.1: Dipoli elettrici nei domini di Weiss: (1) ceramico ferroelettrico non polarizzato, (2) durante polarizzazione, (3) dopo polarizzazione (ceramico piezoelettrico) [6]

Di conseguenza, le dimensioni del materiale cambiano, aumentando o diminuendo se la direzione dei domini di Weiss è la stessa o opposta al campo elettrico.

Dopo la fase di sinterizzazione, il piezoceramico policristallino consiste di un numero enorme di dipoli orientati casualmente senza proprietà piezoelettriche. In questi materiali isotropi la piezoelettricità è indotta tramite un processo di polarizzazione, consistente nell'applicazione di un forte campo elettrico ad alte temperature, che allinea i dipoli molecolari nella stessa direzione del campo applicato. Il momento di dipolo rimane invariato dopo che il campo elettrico è stato rimosso ed il ceramico esibisce proprietà

piezoelettriche senza che una tensione eccessivamente elevata o un alto stress sia imposto o senza che sia riscaldato a temperature molto alte. Se si raggiunge una di queste condizioni, la quantità di energia fornita ai domini eccede la forza interna di legame che mantiene allineati i domini ed il materiale ancora una volta ritorna non polarizzato.

Come precedentemente accennato, la maggior parte dei piezoceramici (BaTiO_3 , PbTiO_3 , PZT) appartengono alla semplice struttura cristallina della perovskite. In figura 2.2 è rappresentata la cella elementare di un cristallo PZT.

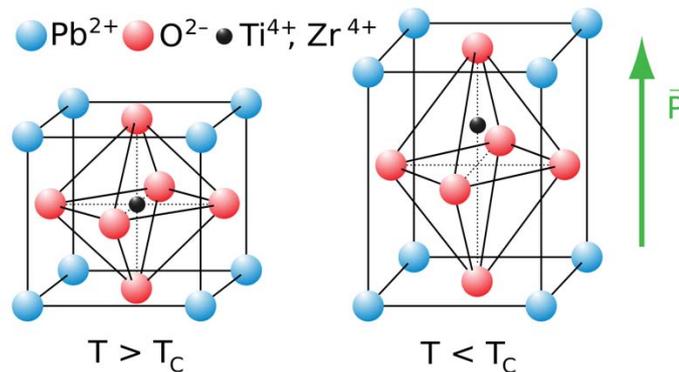


Figura 2.2: Struttura cristallina della Perovskite [7]

Gli atomi di piombo sono posizionati agli angoli della cella unitaria e gli atomi di ossigeno ai centri delle facce. Al di sopra di una temperatura specifica, denominata temperatura di Curie, il reticolo ha una struttura cubica, cioè consiste di ottaedri di ossigeno regolarmente organizzati al centro dei quali è disposto uno ione titanio o zirconio. Al di sotto della temperatura di Curie, la struttura del reticolo si riordina in una miscela di cristalli romboedrici e tetragonali in cui lo ione titanio o zirconio non è più disposto nel centro ma si sposta dalla sua posizione centrale lungo una delle tante direzioni permesse. A causa di questa trasformazione di fase con spostamenti atomici di circa 0.1 \AA , avviene una separazione di cariche che produce un dipolo elettrico con un singolo asse di simmetria.

2.3 Formulazione matematica della piezoelettricità lineare

I materiali piezoelettrici appartengono a quella classe di materiali detti intelligenti o smart material. La piezoelettricità consiste in due aspetti duali: l'effetto piezoelettrico diretto e quello inverso. Il primo si ha quando una carica elettrica appare in un materiale deformato

meccanicamente mentre il secondo consiste nella deformazione del materiale sotto un impulso elettrico.

Il fenomeno piezoelettrico accoppia la risposta elastica del materiale all'applicazione di una corrente elettrica. La sua formulazione matematica è ottenuta considerando le equazioni governanti il problema elastico e quelle governanti il problema elettro-statico e in seguito modificando le relazioni costitutive caratterizzanti il comportamento del materiale [8].

Si consideri un solido di volume Ω e superficie esterna Γ soggetto a forze volumetriche esterne F_i e a forze di superficie esterne f_i . Nell'ipotesi di piccole deformazioni e piccoli spostamenti, la parte meccanica della risposta del solido è governata dall'equilibrio dinamico e dalla congruenza lineare nel volume Ω e sulla superficie Γ :

$$T_{ij,j} + F_i = \rho_m \ddot{s}_i \quad \text{in } \Omega \quad T_{ij}n_i = f_i \quad \text{su } \Gamma_F \quad (2.1)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(s_{i,j} + s_{j,i}) \quad \text{in } \Omega \quad s_i = \bar{s}_i \quad \text{su } \Gamma_S \quad (2.2)$$

Il sistema di equazioni (2.1) rappresenta l'equilibrio dinamico, in cui T_{ij} è il tensore delle componenti di sforzo, ρ_m la densità di massa, \ddot{s}_i le componenti del vettore di accelerazione con s_i le componenti del vettore di spostamento. Le condizioni al contorno statiche su Γ_F legano le forze di superficie al vettore di sforzo $T_{ij}n_i$ con n_i normale unitaria alla superficie. La relazione di compatibilità (2.2) lega le componenti del tensore delle deformazioni S_{ij} alla parte simmetrica del gradiente dello spostamento. Sulla parte di dominio Γ_S si ha l'uguaglianza tra le componenti del vettore di spostamento e quelle del vettore di spostamenti imposti \bar{s}_i .

Analogamente la parte di risposta elettrica del solido è governata dall'equilibrio elettrostatico nel volume Ω e su Γ_{qc} e dalla compatibilità elettrostatica in Ω e su Γ_ϕ .

$$D_{i,i} - \rho_c = 0 \quad \text{in } \Omega \quad D_i n_i = -\rho_c \quad \text{su } \Gamma_{qc} \quad (2.3)$$

$$E_i = -\phi_{,i} \quad \text{in } \Omega \quad \phi = \bar{\phi} \quad \text{su } \Gamma_\phi \quad (2.4)$$

Il sistema di equazioni (2.3) è l'analogo elettrico dell'equilibrio dinamico e impone l'uguaglianza tra la divergenza del vettore di spostamento elettrico D_i e la densità volumica di carica elettrica ρ_c . La carica q_c distribuita sulla superficie Γ_{q_c} eguaglia, a meno del segno, la componente normale dello spostamento elettrico.

Il sistema (2.4) è invece il corrispondente della compatibilità meccanica, le componenti del campo elettrico E_i sono uguagliate al gradiente di un potenziale scalare ϕ . Tale potenziale elettrico è uguagliato su Γ_ϕ a un valore imposto $\bar{\phi}$.

La descrizione matematica del problema elettro-meccanico necessita delle relazioni costitutive che tengono conto dell'accoppiamento dovuto all'effetto piezoelettrico:

$$T_{ij} = C_{ijkl} S_{kl} - e_{mij} E_m, \quad D_j = e_{ijk} S_{jk} - \varepsilon_{ij}^S E_j, \quad (2.5)$$

La prima espressione della (3.5) descrive la legge costitutiva lineare elastica per il solido Ω , in cui compare il termine di accoppiamento piezoelettrico, mentre la seconda descrive la legge costitutiva elettrica in cui compare il termine di accoppiamento elastico.

C_{ijkl} e e_{mij} sono rispettivamente i tensori elastico e piezoelettrico del materiale mentre ε_{ij}^S è il tensore dielettrico valutato a deformazione costante. Usando la notazione vettoriale per sforzi e deformazioni, queste espressioni possono essere raggruppate in un'unica formulazione:

$$\begin{bmatrix} T \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^E & -e^T \\ e & \varepsilon^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ E \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Come si può notare la formulazione (2.6) del problema ha il grosso svantaggio di non essere simmetrica. Per questa ragione si è soliti considerare il problema nella formulazione nelle deformazioni:

$$\begin{bmatrix} S \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^E & d^T \\ d & \varepsilon^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ E \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

La (2.7) mantiene i termini diagonali simmetrici e definiti positivi e introduce termini antidiagonali uguali. La matrice d definisce l'accoppiamento piezo-meccanico ed è detta matrice di carica piezoelettrica.

Classicamente si considera che la direzione di polarizzazione del materiale sia la 3 (figura 2.3).

Si distinguono quindi tre effetti piezoelettrici macroscopici come riportato in figura 2.4: L'effetto "33" è l'effetto principale: si impone un campo elettrico nella direzione della polarizzazione e si utilizzano le deformazioni in questa stessa direzione. L'effetto "31", quello più interessante dal punto di vista del lavoro che si sta illustrando, sfrutta le deformazioni nelle due direzioni ortogonali a quella di polarizzazione generate dal passaggio di corrente in questa direzione. Infine l'effetto "15" provoca uno scorrimento dell'elemento piezoelettrico quando si impone un campo elettrico in una direzione ortogonale a quella di polarizzazione.

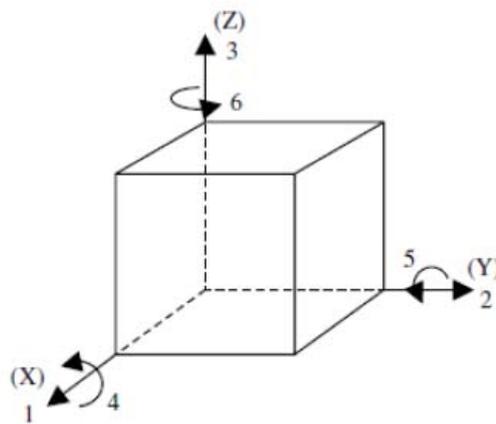


Figura 2.3: Direzione degli assi [8]

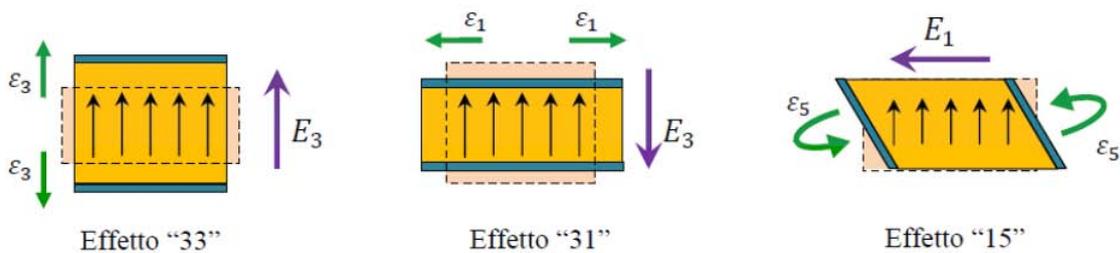


Figura 2.4: Comportamento piezoelettrico [8]

La matrice d che descrive questo comportamento è di dimensioni 3×6 ed è definita nel seguente modo:

$$d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

con le relazione di simmetria: $d_{31}=d_{32}$ e $d_{15}=d_{24}$. Ciò significa che il comportamento piezoelettrico è simmetrico nel piano dell'asse di polarizzazione. Inoltre il legame tra e e d è il seguente:

$$-e^T = c^E d^T \quad (2.9)$$

dove c^E è la matrice di rigidità elastica valutata a tensione costante.

2.4 Le costanti Piezoelettriche

Per fornire una conoscenza più profonda e quantitativa sulle proprietà piezoelettriche dei piezoceramici, saranno ora introdotti diversi coefficienti standardizzati da IEEE, molti dei quali sono stati già discussi. A causa della natura anisotropa dei piezoceramici, gli effetti dipendono fortemente dall'orientamento rispetto all'asse polarizzato [6].

Per correlare quantità elettriche e meccaniche, sono stati introdotti doppi pedici (per esempio d_{ij}).

Il primo pedice dà la direzione del campo elettrico associato alla tensione applicata o alla carica prodotta. Il secondo pedice dà la direzione della sollecitazione meccanica o della deformazione.

Gli apici "S, T, E, D" descrivono una condizione al contorno elettrica o meccanica:

- S = deformazione costante
- T = sollecitazione costante
- E = campo elettrico costante
- D = spostamento elettrico costante

Si noti che i coefficienti piezoelettrici qui descritti non sono costanti indipendenti ma variano con temperatura, pressione, campo elettrico, fattore di forma, condizioni al contorno meccaniche ed elettriche.

I coefficienti descrivono soltanto le proprietà del materiale in condizioni di piccolo segnale.

1. Coefficiente piezoelettrico di Carica (o Deformazione) d:

Questo coefficiente, già introdotto in precedenza, rappresenta la deformazione meccanica prodotta da un campo elettrico applicato.

$$d = \frac{\text{deformazione sviluppata}}{\text{campo elettrico applicato}} \left[\frac{m}{V} \right].$$

Grandi coefficienti d_{ij} si riferiscono a grandi spostamenti meccanici, che sono di solito desiderati in dispositivi con trasduttori di moto.

Viceversa, il coefficiente può essere visto come la carica raccolta sugli elettrodi in seguito alla sollecitazione meccanica applicata:

$$d = \frac{\text{densità di carica di cortocircuito}}{\text{sollecitazione meccanica applicata}} \left[\frac{C/m^2}{N/m^2} \right].$$

A seconda dei modi con cui la deformazione può essere applicata, è possibile avere diversi coefficienti d :

- d_{33} (d diretto) è usato quando la forza è nella direzione 3 (lungo l'asse di polarizzazione) ed è impressa sulla stessa superficie su cui è raccolta la carica; in questo caso la sollecitazione meccanica è parallela al momento di dipolo, producendo un aumento della polarizzazione spontanea lungo l'asse 3;

- d_{31} (d trasversale) è usato quando la carica è raccolta sulla stessa superficie di prima, ma la forza è applicata perpendicolarmente all'asse di polarizzazione;

- d_{15} (d di taglio) è usato quando la carica è raccolta su elettrodi perpendicolari agli elettrodi originali di polarizzazione e la sollecitazione meccanica applicata è di taglio.

Le tre condizioni precedenti sono chiamate rispettivamente effetti d_{33} , d_{31} and d_{15} e sono contributi intrinseci ai coefficienti piezoelettrici, risultando dalla distorsione della struttura cristallina.

2. Coefficiente piezoelettrico di Tensione g :

Rappresenta il campo elettrico prodotto a circuito aperto da una sollecitazione meccanica:

$$g = \frac{\text{campo elettrico a circuito aperto}}{\text{sollecitazione meccanica applicata}} \left[\frac{V/m}{N/m^2} \right].$$

La costante g è una misura della sensibilità di un materiale piezoelettrico, perché è proporzionale alla tensione a circuito aperto. La sensibilità deve essere sufficientemente alta in modo da potere rilevare il segnale generato al di sopra del rumore di fondo. La sensibilità è elevata quando il coefficiente g è elevato. Di conseguenza, elevati costanti g_{ij} sono richieste per i sensori.

Anche se i coefficienti g sono denominati coefficienti di tensione, è corretto dire anche che g_{ij} è il rapporto tra la deformazione sviluppata e la densità di carica applicata:

$$g = \frac{\text{deformazione sviluppata}}{\text{densità di carica applicata}} \left[\frac{m^2}{C} \right].$$

A seconda dei modi con cui la tensione può essere applicata, è possibile avere diversi coefficienti g :

- g_{33} (g diretto) è usato quando il campo elettrico e lo stress meccanico sono entrambi lungo la direzione di polarizzazione;
- g_{31} (g trasversale) è usato quando la pressione è applicata ortogonalmente all'asse di polarizzazione, ma la tensione appare sull'asse di polarizzazione 3;
- g_{15} (g di taglio) è usato quando la sollecitazione applicata è di taglio ed il campo elettrico risultante è perpendicolare all'asse di polarizzazione 3.

3. Coefficiente di accoppiamento elettromeccanico k :

Esso descrive la conversione di energia da elettrica a meccanica o viceversa rappresentando una specie di efficienza piezoelettrica del materiale.

Misura quanto è forte l'accoppiamento fra il modo di vibrazione e l'eccitazione. Poiché questo coefficiente è un rapporto di energia, è adimensionale.

I pedici denotano le direzioni relative delle quantità elettriche e meccaniche e del tipo di movimento in questione.

Grandi coefficienti k_{ij} forniscono un trasferimento di energia più efficiente e sono richiesti negli attuatori piezoelettrici.

$$k = \sqrt{\frac{\text{Energia elettrica accumulata}}{\text{Energia meccanica fornita}}} \quad \text{o} \quad k = \sqrt{\frac{\text{Energia meccanica accumulata}}{\text{Energia elettrica fornita}}}.$$

4. Costante dielettrica K :

La costante dielettrica relativa è il rapporto tra la permittività del materiale, ϵ , e la permittività nel vuoto, ϵ_0 , in condizione senza vincoli, cioè ben al di sotto della risonanza meccanica del componente.

$$K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}.$$

Grandi costanti dielettriche sono richieste per i sensori per superare le perdite associate con i cavi, ma un valore eccessivo di K fa diminuire i coefficienti di tensione e quindi la sensibilità secondo la relazione tra i coefficienti d e g

$$g_{ij} = \frac{d_{ij}}{K\epsilon_0}.$$

5. Temperatura di Curie:

È la temperatura critica alla quale la struttura del cristallo cambia da una forma non simmetrica (piezoelettrica) ad una forma simmetrica (non-piezoelettrica) in cui le proprietà piezoelettriche sono perse. Durante un raffreddamento i dipoli non si riallineano a meno che non siano sottoposti ad un forte campo elettrico. Altre conseguenze di un aumento di temperatura sono i cambiamenti nel valore dei coefficienti elettromeccanici e il processo denominato invecchiamento termicamente attivato. Come regola pratica, la massima temperatura operativa di un piezoceramico è circa la metà della temperatura di Curie.

6. Modulo di Young:

Il modulo di Young di un materiale piezoelettrico, cioè il rapporto tra lo sforzo (forza per unità di superficie) e la deformazione (cambiamento di lunghezza per unità di lunghezza), varia con il carico elettrico.

Poiché la sollecitazione meccanica del ceramico produce una risposta elettrica, che si oppone allo sforzo risultante, il modulo di Young efficace con gli elettrodi cortocircuitati è più basso di quello a circuito aperto. In più, la rigidità è differente nella direzione 3 rispetto a quella nella direzione 1 o 2. Di conseguenza, nell'esprimere tali quantità, devono essere specificate sia la direzione che le condizioni elettriche. Il modulo di Young di un piezoceramico è circa un quarto di quello dell'acciaio.

7. Q factor o fattore di perdita meccanico Q_m :

E' il rapporto tra la deformazione in fase con lo stress e la deformazione sfasata con lo stress nell'elemento vibrante, o in altre parole, l'energia elettrica che è convertita in energia meccanica rispetto a quella convertita in calore. Q_m rappresenta le perdite meccaniche ed è proporzionale al rapporto tra la frequenza di risonanza e la larghezza di banda. I materiali piezoelettrici con alti fattori Q_m sono caratterizzati da stretti picchi di

risonanza, mentre quelli con bassi fattori Q_m hanno larghezze di banda maggiori. A seconda del materiale, i valori di Q_m sono molto differenti; i piezoceramici più comuni hanno valori di Q_m tra 50 e 1000, mentre i cristalli di quarzo hanno Q_m pari a 10.

8. Fattore di dissipazione dielettrica $\tan\delta$:

E' il rapporto tra la potenza dissipata e quella reattiva in un campione soggetto a un'onda sinusoidale in ingresso ad una frequenza molto al di sotto della sua frequenza di risonanza.

9. Velocità di invecchiamento:

La polarizzazione di un ceramico si riduce gradualmente col tempo e la velocità di questo processo, espressa in percento per decade di tempo, è conosciuta come velocità di invecchiamento, che è una funzione logaritmica del tempo. Di conseguenza, il processo di invecchiamento è la tendenza del ceramico a tornare indietro al suo stato originale prima della polarizzazione e può essere attribuito al rilassamento dei dipoli nel materiale.

10. Modi di vibrazione:

Ogni piezoceramico ha una specifica frequenza elastica di vibrazione, che è una funzione del materiale e della sua forma. Quando una tensione alternata è applicata ad un piezoceramico con una frequenza uguale alla sua frequenza specifica di vibrazione, il piezoceramico esibisce risonanza. Questo fenomeno è sfruttato in molte applicazioni piezoelettriche, perché alla risonanza il coefficiente di accoppiamento elettromeccanico è massimo. I ceramici piezoelettrici possono avere diversi modi di vibrazione (modi risonanti), che dipendono dalla loro forma, dall'orientamento di polarizzazione e dalla direzione del campo elettrico.

Capitolo 3

La modellazione analitica del comportamento elettromeccanico del cantilever beam

3.1 Introduzione

Verranno ora descritti i principali modelli elettromeccanici analitici per travi bimorfe sollecitate alla base. Per i vari modelli si farà riferimento alla configurazione di cantilever in figura 3.1.

Nella letteratura sono presenti modelli a parametri distribuiti che sono i più accurati, e modelli a parametri concentrati: gli SDOF Model (Single Degree Of Freedom), i cui limiti principali sono dovuti all'ipotesi che la massa all'estremità sia dominante rispetto a quella della trave. Un miglioramento a questi modelli è possibile introducendo dei fattori di correzione che tengono conto del rapporto tra la massa della trave e quella all'estremità.

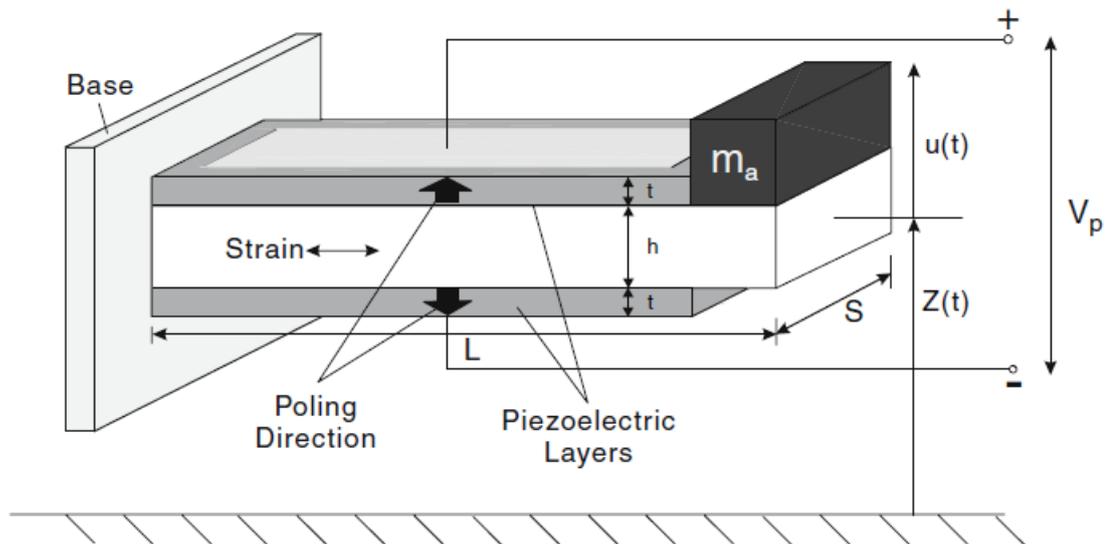


Figura 3.1: cantilever piezoelettrico [5]

In questo lavoro di tesi, sia per i modelli analitici e numerici sia per la parte sperimentale di misurazioni si è studiato il comportamento del cantilever senza massa aggiunta alla punta ($m_a = 0$), e con gli elettrodi collegati in serie. Questa configurazione consente di ottenere la massima differenza di potenziale tra gli elettrodi incollati rispettivamente sull'intradosso e sull'estradosso.

3.2 Il modello analitico a parametri concentrati

L'approccio analitico a parametri concentrati ha lo scopo di descrivere la dinamica di un punto di interesse della trave (solitamente l'estremità libera) in termini di parametri concentrati: la massa equivalente, la rigidezza equivalente e lo smorzamento equivalente (figura 3.2) [10]. La rigidezza equivalente è determinata considerando la relazione della deflessione statica di una trave incastrata soggetta ad un carico concentrato nell'estremità libera. La massa equivalente è ricavata dall'uguaglianza tra l'energia cinetica della trave con l'energia della massa equivalente (da determinare) posta ad una velocità pari a quella dell'estremità della con la base fissa.

É da sottolineare che nel problema dell'eccitazione alla base (a differenza del problema con la base fissa) la trave è eccitata sia dall'inerzia propria sia dall'inerzia del moto rigido della base. Quindi, in altre parole, l'inerzia del sistema è dato da due contributi: il moto vibratorio e dal moto rigido. A causa di questa differenza sarà necessario introdurre dei coefficienti di correzione per il modello[10].

In figura 3.2 sono rappresentati due disegni schematici del modello a parametri concentrati dal quale verranno ricavate le equazioni analitiche che caratterizzano il cantilever.

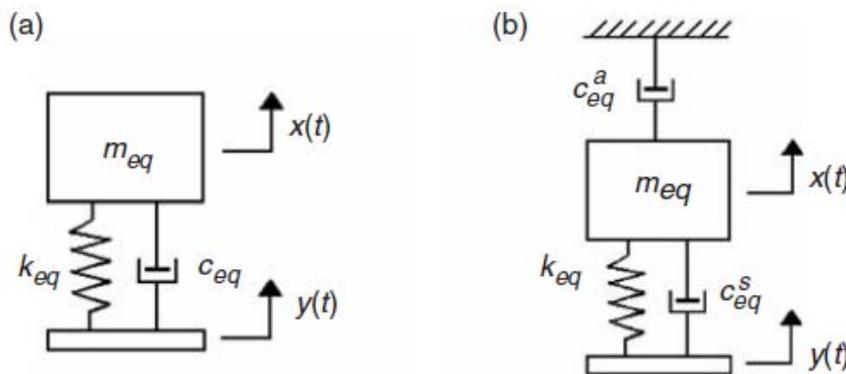


Figura 3.2: schema a parametri concentrati dell'energy harvester[10]

La differenza tra le due configurazioni presentate in è che in (b) viene separato l'effetto dello smorzamento del materiale dallo smorzamento esterno causato dal fluido in cui è immerso il cantilever (solitamente aria). Si osserva infatti che lo smorzamento interno agisce sulla velocità relativa (di deformazione) mentre lo smorzamento esterno agisce sulla velocità assoluta.

$y(t)$ rappresenta l'eccitazione armonica della base $y(t) = Y_0 e^{i\omega t}$, $x(t)$ è lo spostamento trasversale assoluto della massa, mentre lo spostamento relativo è dato da $z(t) = x(t) - y(t)$ che per il sistema in figura 2(a) è pari a:

$$z(t) = \frac{\omega^2 m_{eq}}{k_{eq} - \omega^2 m_{eq} + i\omega c_{eq}} Y_0 e^{i\omega t} . \quad (3.1)$$

Nell'equazione (3.1) il valore delle grandezze presenti è rispettivamente:

$$k_{eq} = 3EI/L^3, \quad (3.2)$$

$$m_{eq} = (33/140)mL + M_t, \quad (3.3)$$

$$c_{eq} = 2\zeta\omega_n m_{eq}, \quad (3.4)$$

$$\omega_n = \sqrt{k_{eq}/m_{eq}}. \quad (3.5)$$

Con M_t massa della punta, ζ rapporto di smorzamento viscoso equivalente e ω_n frequenza naturale del sistema.

La funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$T_{rel}^{SDOF}(\Omega, \zeta) = \frac{\Omega^2}{1 - \Omega^2 + 2i\zeta\Omega}, \quad (3.6)$$

con $\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$.

Questo modello considera un singolo coefficiente di smorzamento che agisce nella velocità relativa del sistema.

Il modello di figura 2(b) considera in modo separato lo smorzamento dell'aria da quello del materiale. Il primo agisce sulla velocità assoluto e viene considerato proporzionale alla massa $c_{eq}^a = a_0 m_{eq}$, il secondo agisce sulla velocità relativa ed è assunto proporzionale alla rigidezza $c_{eq}^s = a_1 k_{eq}$. Si assume quindi un modello di smorzamento proporzionale con a_0 e a_1 costanti di proporzionalità determinate da misure sperimentali dei coefficienti di smorzamento dei primi due modi di vibrare del sistema reale.

Il movimento relativo della massa di questo modello è dato dalla seguente equazione:

$$z(t) = \frac{\omega^2 m_{eq} - i\omega c_{eq}^a}{k_{eq} - \omega^2 m_{eq} + i\omega c_{eq}} Y_0 e^{i\omega t} \quad (3.7)$$

Con $c_{eq} = c_{eq}^a + c_{eq}^s$.

È evidente che nei casi in cui lo smorzamento esterno è trascurabile rispetto allo smorzamento del materiale l'equazione (3.7) si riduce alla (3.6).

Il problema principale di questi modelli ad un grado di libertà è che risultano inaffidabili quando la massa nella punta M_t assume un valore inferiore alla massa complessiva della trave mL .

Risulta quindi necessario apportare un correzione alla (3.6) tramite un coefficiente μ :

$$T_{rel}^{SDOF}(\Omega, \zeta) = \frac{\mu\Omega^2}{1-\Omega^2+2i\zeta\Omega} \quad (3.8)$$

Il coefficiente di correzione μ_1 è calcolato per la prima frequenza di risonanza confrontando il risultato del modello a parametri distribuiti descritto nel seguito con quello a parametri concentrati, e risulta:

$$\mu_1 = \frac{(M_t/mL)^2+0.603(M_t/mL)+0.08955}{(M_t/mL)^2+0.4637(M_t/mL)+0.05718} \quad (3.9)$$

Nella figura 3.3 è rappresentata l'andamento del coefficiente di correzione al variare del parametro M_t/mL .

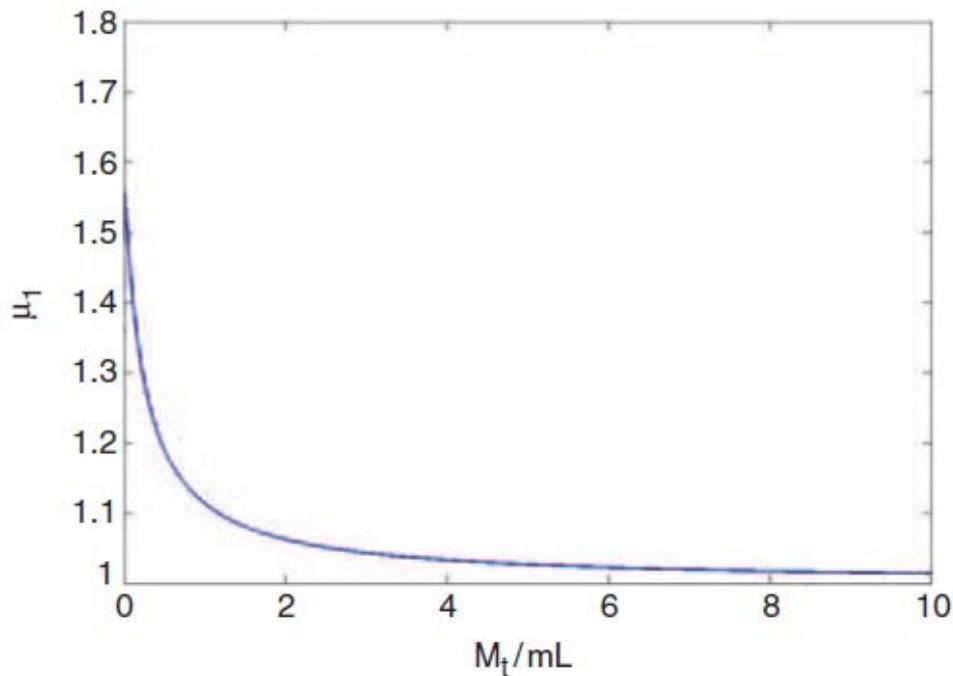


Grafico 3.1: valore del parametro di correzione μ_1 al variare del rapporto M_t/mL [10]

3.3 Il modello analitico a parametri distribuiti

Per descrivere la dinamica del sistema a parametri distribuiti si assume come configurazione di riferimento quella di un cantilever bimorfo con collegamento in serie degli strati piezoelettrici (figura 3.3).

Le principali ipotesi assunte sono le seguenti: si considera il modello di trave di Eulero-Bernoulli composto da strati uniformi di materiale elastico lineare soggetto a piccole deformazioni. Vengono quindi trascurati gli effetti delle deformazioni di taglio e dell'inerzia rotazionale [11].

Gli strati di materiale piezoceramico e quelli della struttura sono considerati perfettamente aderenti l'uno all'altro.

Gli elettrodi che coprono le facce opposte degli strati piezoceramici sono molto sottili, viene quindi trascurato il loro contributo meccanico-strutturale.

Gli strati piezoceramici hanno la polarità rivolta nella direzione dello spessore con verso opposto per i due strati come illustrato in figura 3.4.

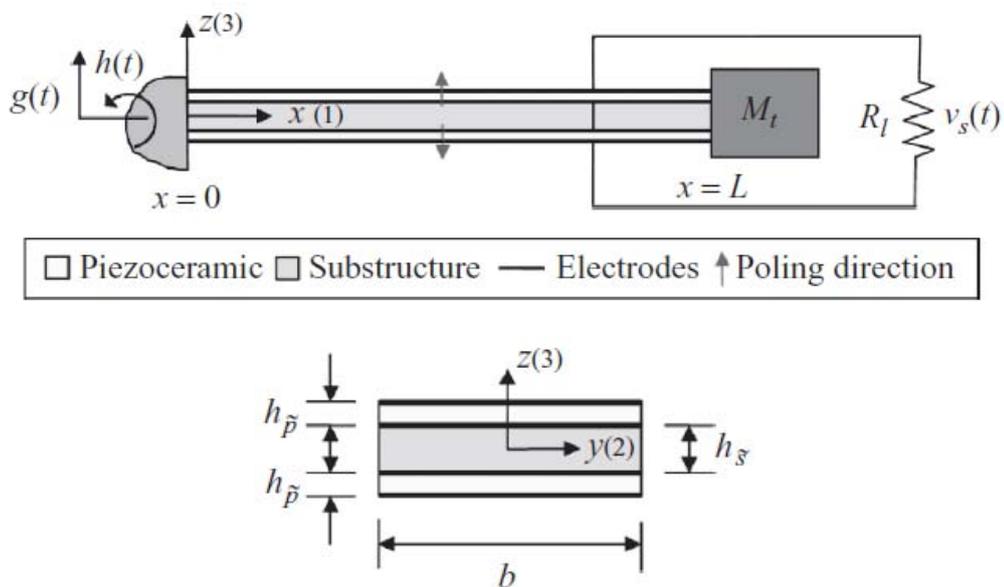


Figura 3.3: modello dell'energy harvester a parametri distribuiti[5]

Sono considerate due perdite meccaniche: una perdita interna viscosa, legata alla velocità di deformazione, data dal coefficiente di smorzamento viscoso c_s , e una perdita esterna

c_a che tiene conto dell'effetto di smorzamento dell'aria, l'effetto di quest'ultima è molto minore rispetto a quello precedente.

Si assume che gli elettodi siano perfettamente conduttivi, e i campi elettrici istantanei indotti negli strati piezoceramici sono uniformi per tutta la lunghezza della trave.

Tramite un circuito esterno è collegato alla trave un carico elettrico resistivo R_l e viene considerata una capacità interna equivalente dovuta all'effetto capacitivo dei due strati piezoceramici.

Per la configurazione mostrata nella Fig. 3.4, le vibrazioni libere sono governate dalla seguente equazione:

$$\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} + c_s I \frac{\partial^5 w(x,t)}{\partial x^4 \partial t} + c_a \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.10)$$

dove m è la massa per unità di lunghezza, c_a è lo smorzamento dovuto all'aria o al rispettivo fluido in cui è immerso il cantilever, c_s è lo smorzamento interno del materiale, e $w_{(x,t)}$ è lo spostamento trasversale assoluto della trave al punto x e al tempo t .

Si sottolinea che il momento flettente $M_{(x,t)}$, che è il momento della tensione assiale integrato attraverso la sezione trasversale della trave, è proporzionale anche ad un termine di tensione indotta dall'effetto piezoelettrico. Per meglio esprimere questo effetto si riporta la seguente espressione della tensione nella direzione dell'asse x [9] nello strato piezoelettrico e nello strato non piezoelettrico:

$$\begin{aligned} T_1^{\tilde{p}} &= c_{11}^E S_1^{\tilde{p}} - e_{31} E_3, \\ T_1^{\tilde{s}} &= E_{\tilde{s}} S_1^{\tilde{s}}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

il momento flettente interno risulta quindi:

$$M(x,t) = b \left(\int_{-h_{\tilde{p}}-h_{\tilde{s}}/2}^{-h_{\tilde{s}}/2} T_1^{\tilde{p}} z dz + \int_{-h_{\tilde{s}}/2}^{h_{\tilde{s}}/2} T_1^{\tilde{s}} z dz + \int_{h_{\tilde{s}}/2}^{h_{\tilde{p}}+h_{\tilde{s}}/2} T_1^{\tilde{p}} z dz \right), \quad (3.12)$$

dove, T_1 è la componente della tensione lungo l'asse x , S_1 è la componente assiale della deformazione, c_{11}^E è la rigidità elastica (Modulo di Young) a campo elettrico costante del materiale piezoelettrico, $E_{\tilde{s}}$ è il modulo di Young del materiale dello strato intermedio, E_3 è la componente del campo elettrico in direzione z e e_{31} è la costante piezoelettrica.

La componente della deformazione lungo l'asse x si può esprimere in termini di curvatura:

$$S_1(x, z, t) = -z \frac{\partial^2 w_{\text{rel}}(x, t)}{\partial x^2}. \quad (3.13)$$

Sostituendo la (3.11) e la (3.13) nella formula del momento flettente interno (3.12) si ottiene:

$$M(x, t) = -EI \frac{\partial^2 w_{\text{rel}}(x, t)}{\partial x^2} + \vartheta v(t) [H_{(x)} - H_{(x-L)}] \quad (3.14)$$

dove, $H_{(x)}$ è la funzione gradino di Heaviside (figura 3.5) e ϑ è il termine di accoppiamento piezoelettrico che dipende dalla connessione degli strati e dal circuito esterno, successivamente verrà descritto il suo valore per la configurazione in serie.

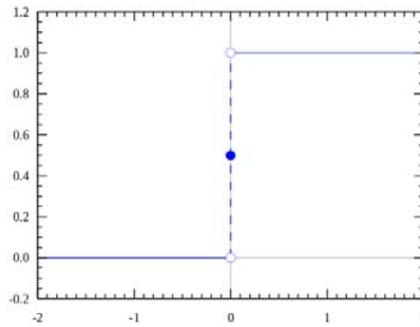


Figura 3.4: Funzione a gradino di Heaviside [12]

La rigidità flessionale per la trave multistrato è pari a :

$$EI = \frac{2b}{3} \left\{ E_{\tilde{s}} \frac{h_{\tilde{s}}}{8} + c_{11}^E \left[\left(h_{\tilde{p}} + \frac{h_{\tilde{s}}}{2} \right)^3 - \frac{h_{\tilde{s}}^3}{8} \right] \right\}, \quad (3.16)$$

e la massa per unità di lunghezza m è:

$$m = b(\rho_{\tilde{s}} h_{\tilde{s}} + 2\rho_{\tilde{p}} h_{\tilde{p}}) \quad (3.17)$$

L'eccitazione alla base $w_{b(x,t)}$ che consiste in una traslazione nella direzione z è data dal contributo di due componenti (figura 3.4):

$$w_{b(x,t)} = g(t) + x h(t), \quad (3.18)$$

E lo spostamento assoluto è dato dalla somma dell'eccitazione alla base e dallo spostamento relativo:

$$w_{(x,t)} = w_{b(x,t)} + w_{\text{rel}}(x,t) \quad (3.19)$$

Sostituendo la (3.19) e la (3.14) nell'equazione delle vibrazioni libere (3.10) si ottiene l'equazione delle vibrazioni trasversali forzate dall'eccitazione alla base:

$$EI \frac{\partial^4 w_{\text{rel}}(x,t)}{\partial x^4} + c_s I \frac{\partial^5 w_{\text{rel}}(x,t)}{\partial x^4 \partial t} + c_a \frac{\partial w_{\text{rel}}(x,t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w_{\text{rel}}(x,t)}{\partial t^2} + \vartheta v(t) *$$

$$* \left[\frac{\partial \delta_{(x)}}{\partial x} - \frac{\partial \delta_{(x-L)}}{\partial x} \right] = -[m + M_t \delta_{(x-L)}] \frac{\partial^2 w_{b(x,t)}}{\partial t^2} \quad (3.20)$$

In questa equazione il momento flettente è stato esplicitato per dare rilievo al termine dovuto alla rigidità flessionale e al termine piezoelettrico. È trascurata l'eccitazione dovuta all'effetto dell'aria. Il termine $\delta_{(x)}$ rappresenta la funzione delta di Dirac, $v_{(t)}$ è la tensione elettrica ai capi della resistenza R_l .

Le condizioni al contorno per la configurazione trave a sbalzo senza massa alla punta sono le seguenti:

$$\begin{aligned} w_{\text{rel}(0,t)} &= 0 \\ \left. \frac{\partial w_{\text{rel}(x,t)}}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0 \\ \left[EI \frac{\partial^2 w_{\text{rel}(x,t)}}{\partial x^2} + c_s I \frac{\partial^3 w_{\text{rel}(x,t)}}{\partial x^2 \partial t} \right]_{x=L} &= 0 \\ \left[EI \frac{\partial^3 w_{\text{rel}(x,t)}}{\partial x^3} + c_s I \frac{\partial^4 w_{\text{rel}(x,t)}}{\partial x^3 \partial t} \right]_{x=L} &= 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

La soluzione dell'equazione differenziale assume la forma:

$$w_{\text{rel}(x,t)} = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) \eta_r(t) \quad (3.22)$$

Dove $\eta_r(t)$ è la r-esima coordinata modale e l'autofunzione $\phi_r(x)$ rappresenta la forma modale per l'r-esimo modo di vibrare:

$$\phi_r(x) = C_r \left[\cos \frac{\lambda_r}{L} x - \cosh \frac{\lambda_r}{L} x + \zeta_r \left(\sin \frac{\lambda_r}{L} x - \sinh \frac{\lambda_r}{L} x \right) \right] \quad (3.23)$$

ζ_r è ottenuta da:

$$\zeta_r = \frac{\sin \lambda_r - \sinh \lambda_r + \lambda_r (M_t/mL) (\cos \lambda_r - \cosh \lambda_r)}{\cos \lambda_r - \cosh \lambda_r + \lambda_r (M_t/mL) (\sin \lambda_r - \sinh \lambda_r)} \quad (3.24)$$

E C_r è la costante modale che è ottenuta dalla normalizzazione delle autofunzioni in accordo con le seguenti condizioni di ortogonalità:

$$\begin{aligned} \int_0^L \phi_{s(x)} m \phi_{r(x)} dx + \phi_{s(L)} M_t \phi_{r(L)} + \left[\frac{d\phi_{s(x)}}{dx} I_t \frac{d^2 \phi_{r(x)}}{dx^2} \right]_{x=L} &= \delta_{rs} \\ \int_0^L \phi_{s(x)} EI \frac{d^4 \phi_{r(x)}}{dx^4} dx - \left[\phi_{s(x)} EI \frac{d^3 \phi_{r(x)}}{dx^3} \right]_{x=L} + \left[\frac{d\phi_{s(x)}}{dx} EI \frac{d^2 \phi_{r(x)}}{dx^2} \right]_{x=L} &= \omega_r^2 \delta_{rs} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Con I_t momento d'inerzia rotazionale della massa nella punta M_t , δ_{rs} è il delta di Kronecker, e ω_r frequenza naturale del sistema per l'r-esimo modo di vibrare:

$$\omega_r = \lambda_r^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad (3.26)$$

Gli autovalori del sistema λ_r si trovano dalla seguente espressione:

$$1 + \cos \lambda \cosh \lambda + \lambda \frac{M_t}{mL} (\cos \lambda \sinh \lambda - \sin \lambda \cosh \lambda) - \frac{\lambda^3 I_t}{mL^3} (\cosh \lambda \sin \lambda + \sinh \lambda \cos \lambda) + \frac{\lambda^4 I_t M_t}{m^2 L^4} (1 - \cos \lambda \cosh \lambda) = 0 \quad (3.27)$$

Se si sostituisce (3.22) nell'equazione (3.20) e si applicano le condizioni di ortogonalità delle autofunzioni(3.25), si ottiene l'equazione meccanica delle coordinate modali:

$$\frac{d^2 \eta_r(t)}{dt^2} + 2\zeta_r \omega_r \frac{d\eta_r(t)}{dt} + \omega_r^2 \eta_r(t) - \chi_r v(t) = f_r(t) \quad (3.28)$$

Dove il termine di accoppiamento elettromeccanico

$$\chi_r = \vartheta_s \left. \frac{d\phi_r(x)}{dx} \right|_{x=L} \quad (3.29)$$

e la forzante meccanica modale:

$$f_r(t) = -m \left(\frac{d^2 g(t)}{dt^2} \int_0^L \phi_r(x) dx + \frac{d^2 h(t)}{dt^2} \int_0^L x \phi_r(x) dx \right) - M_t \phi_r(L) \left(\frac{d^2 g(t)}{dt^2} + L \frac{d^2 h(t)}{dt^2} \right) \quad (3.30)$$

ζ_r è il rapporto di smorzamento meccanico che include lo smorzamento interno e quello esterno dell'aria. Questo smorzamento è determinato dall'analisi sperimentale modale direttamente dalla funzione di trasferimento con il metodo della larghezza di banda, oppure da misure nel dominio del tempo con il metodo del decremento logaritmico.

3.3.1 Le equazione del circuito elettrico

Con lo scopo di ricavare le equazioni che governano il comportamento elettrico della configurazione bimorfa si considera ora il cantilever in figura 3.6 con un solo strato piezoelettrico collegato alla resistenza esterna R_l [5].

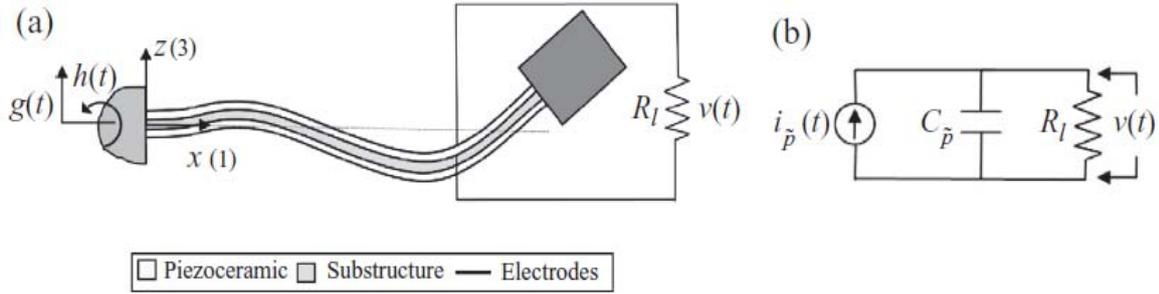


Figura 3.5: cantilever piezoelettrico con un solo strato collegato alla resistenza R_l [5]

Con le ipotesi assunte finora per il cantilever sotto l'eccitazione del momento flettente la rappresentazione tensoriale delle equazioni costitutive piezoelettriche si riduce alla sola equazione:

$$D_3 = e_{31}S_1^{\tilde{p}} + \bar{\epsilon}_{33}^S E_3 \quad (3.31)$$

in cui D_3 è la componente dello spostamento elettrico lungo l'asse z e $\bar{\epsilon}_{33}^S$ la componente della permittività relativa con deformazione costante.

La corrente elettrica nel circuito può ora essere ottenuta dall'integrazione della legge di Gauss:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_A D n dA \right) = \frac{v(t)}{R_l} \quad (3.32)$$

Sostituendo nella (3.32) il valore D della (3.31) e ricordando il valore di $S_1^{\tilde{p}}$ (3.13) si ottiene l'equazione del circuito elettrico in funzione dello spostamento relativo $w_{\text{rel}}(x,t)$:

$$\frac{\bar{\epsilon}_{33}^S b L}{h_{\tilde{p}}} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R_l} + e_{31} h_{\tilde{p}c} b \int_0^L \frac{\partial^3 w_{\text{rel}}(x,t)}{\partial x^2 \partial t} dx = 0 \quad (3.33)$$

dove b , $h_{\tilde{p}}$ e L sono rispettivamente la larghezza, l'altezza e la lunghezza dello strato piezoelettrico e $h_{\tilde{p}c}$ è la distanza dall'asse neutro dal punto centrale di ogni strato piezoelettrico:

$$h_{\tilde{p}c} = \frac{h_{\tilde{p}} + h_s}{2} \quad (3.34)$$

Sostituendo nella (3.33) la forma modale delle vibrazioni relative date dalla:

$$w_{\text{rel}(x,t)} = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x) \eta_r(t) \quad (3.22)$$

si ottiene:

$$\frac{\bar{\epsilon}_{33}^S bL}{h_{\tilde{p}}} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R_l} + \sum_{r=1}^{\infty} \kappa_r \frac{d\eta_r(t)}{dt} = 0 \quad (3.36)$$

Dove κ_r è il termine di accoppiamento modale nell'equazione del circuito elettrico:

$$\kappa_r = e_{31} h_{\tilde{p}c} b \int_0^L \frac{\partial^2 \phi_r(x)}{\partial x^2} dx = e_{31} h_{\tilde{p}c} b \left. \frac{d\phi_r(x)}{dx} \right|_{x=L} \quad (3.37)$$

Risulta utile confrontare le equazioni (3.36) nelle equazioni di un circuito elettrico equivalente del sistema (figura 3.6b), infatti nella letteratura dei cantilever piezoelettrici il comportamento elettrico dello strato piezoelettrico è associato ad un circuito equivalente composto da un generatore di corrente $i_{\tilde{p}}(t)$ posto in parallelo ad un condensatore equivalente $C_{\tilde{p}}$. L'equazione che regola il comportamento del circuito di figura 3.36b ricavata dalla legge di Kirchhoff è la seguente:

$$C_{\tilde{p}} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R_l} - i_{\tilde{p}}(t) = 0 \quad (3.38)$$

Confrontando la (3.36) con la (3.38) si può concludere che:

$$C_{\tilde{p}} = \frac{\bar{\epsilon}_{33}^S bL}{h_{\tilde{p}}} \quad (3.39)$$

$$i_{\tilde{p}}(t) = - \sum_{r=1}^{\infty} \kappa_r \frac{d\eta_r(t)}{dt} \quad (3.40)$$

Identificare questi termini ha un risultato importante nell'estensione del problema per cantilever bimorfi con collegamento in serie o in parallelo del carico resistivo.

Per un dato numero di strati piezoelettrici non è più necessario derivare le equazioni del circuito elettrico da (3.32) e (3.33) ma basta considerare la capacità equivalente (3.39) e il generatore di corrente equivalente (3.40).

Considerando ora il collegamento in serie degli strati piezoelettrici il circuito diventa quello di figura:

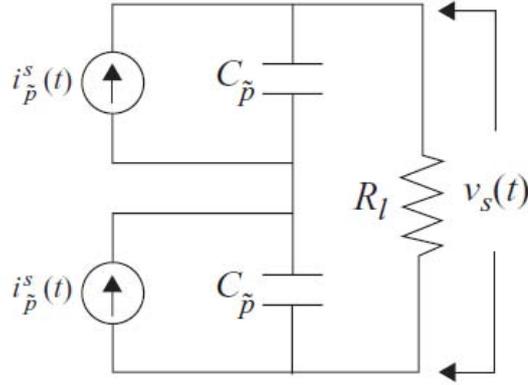


Figura 3.6: schema circuitale dell'harvester bimorfo [5]

E applicando la legge di Kirchhoff si ottiene:

$$\frac{C_{\tilde{p}}}{2} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R_l} - i_{\tilde{p}}(t) = 0 \quad (3.41)$$

Con i valori di capacità interna equivalente e generatore di corrente equivalente sempre pari a :

$$C_{\tilde{p}} = \frac{\bar{\epsilon}_{33}^S bL}{h_{\tilde{p}}} , \quad i_{\tilde{p}}(t) = - \sum_{r=1}^{\infty} \kappa_r \frac{d\eta_r(t)}{dt}, \quad (3.42)$$

e l'accoppiamento modale elettromeccanico:

$$\kappa_r = e_{31} h_{\tilde{p}c} b \int_0^L \frac{\partial^2 \phi_r(x)}{\partial x^2} dx = e_{31} \frac{(h_{\tilde{p}} + h_{\tilde{s}})}{2} b \frac{d\phi_r(x)}{dx} \Big|_{x=L}. \quad (3.43)$$

Con $h_{\tilde{p}c}$ la distanza tra l'asse neuro e il centro degli stati di materiale piezoceramico.

3.3.2 Soluzioni in forma chiusa della risposta elettrica e meccanica

Ricapitolando, la dinamica del sistema viene descritta dal seguente sistema di equazioni [13]:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \eta_r(t)}{dt^2} + 2\zeta_r \omega_r \frac{d\eta_r(t)}{dt} + \omega_r^2 \eta_r(t) - \chi_r v(t) = f_r(t) \\ \frac{C_{\tilde{p}}}{2} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R_l} - i_{\tilde{p}}(t) = 0, \end{cases} \quad (3.44)$$

la prima è l'equazione della risposta meccanica modale $\eta_r(t)$ della trave bimorfa, mentre la seconda è l'equazione della risposta elettrica $v(t)$ ai capi del carico esterno R_l .

Se la traslazione e la rotazione alla base, data dall'equazione (3.18), sono nella forma armonica: $g(t) = W_0 e^{j\omega t}$ e $h(t) = \theta_0 e^{j\omega t}$, con W_0 e θ_0 ampiezze delle piccole rotazioni e traslazioni alla base e ω frequenza di eccitazione, la forzante data dalla (3.30) è pari a:

$$f_r(t) = F_r e^{j\omega t}, \quad (3.45)$$

dove l'ampiezza F_r è:

$$F_r = \omega^2 \left[m \left(W_0 \int_0^L \phi_r(x) dx + \theta_0 \int_0^L x \phi_r(x) dx \right) + M_t \phi_r(L) (W_0 + L\theta_0) \right] \quad (3.46)$$

In queste condizioni la risposta meccanica, η_r , ed elettrica, v , dopo il transitorio iniziale sono considerate armoniche con la stessa pulsazione della forzante, nella forma: $\eta_r(t) = H_r e^{j\omega t}$ e $v(t) = V_0 e^{j\omega t}$.

I valori delle ampiezze H_r e V_0 assumono valore complesso e sono determinati sostituendo i valori di $\eta_r(t)$ e $v(t)$ nel sistema (3.44), che diventa:

$$(\omega_r^2 - \omega^2 + 2j\zeta_r \omega_r \omega) H_r - \chi_r V_0 = F_r, \quad (3.47)$$

$$\left(\frac{1}{R_l} + j\omega \frac{C_{\tilde{p}}}{2} \right) V_0 + j\omega \sum_{r=1}^{\infty} \kappa_r H_r = 0. \quad (3.48)$$

Ricavando H_r e V_0 dalle (3.47) e (3.48) otteniamo i valori della risposta meccanica ed elettrica per l'eccitazione armonica alla base, che assumono i seguenti valori:

$$\eta_r(t) = \left(F_r - \chi_r \frac{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{-j\omega \kappa_r F_r}{(\omega_r^2 - \omega^2 + 2j\zeta_r \omega_r \omega)}}{\frac{1}{R_l} + j\omega \frac{C_{\tilde{p}}}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{-j\omega \kappa_r \chi_r}{(\omega_r^2 - \omega^2 + 2j\zeta_r \omega_r \omega)}} \right) \frac{e^{j\omega t}}{(\omega_r^2 - \omega^2 + 2j\zeta_r \omega_r \omega)} \quad (3.49)$$

$$v(t) = \frac{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{-j\omega \kappa_r F_r}{(\omega_r^2 - \omega^2 + 2j\zeta_r \omega_r \omega)}}{\frac{1}{R_l} + j\omega \frac{C_{\tilde{p}}}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{-j\omega \kappa_r \chi_r}{(\omega_r^2 - \omega^2 + 2j\zeta_r \omega_r \omega)}} e^{j\omega t} \quad (3.50)$$

Lo spostamento trasversale relativo in coordinate fisiche per la trave bimorfa nel punto x è ottenuto dalla sostituzione di (3.39) nella prima equazione (3.20):

$$W_{\text{rel}}(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \left[\left(F_r - \chi_r \frac{\sum_{r=1}^{\infty} \frac{-j\omega \kappa_r F_r}{(\omega_r^2 - \omega^2 + 2j\zeta_r \omega_r \omega)}}{\frac{1}{R_l} + j\omega \frac{C_{\tilde{p}}}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{-j\omega \kappa_r \chi_r}{(\omega_r^2 - \omega^2 + 2j\zeta_r \omega_r \omega)}} \right) \frac{\phi_r(x) e^{j\omega t}}{(\omega_r^2 - \omega^2 + 2j\zeta_r \omega_r \omega)} \right] \quad (3.51)$$

Si fa notare che la risposta vibrazionale data dalla (3.51) è riferita al moto relativo, se si è interessati al moto nelle coordinate assolute è necessario considerare anche il movimento alla base, tramite la seguente espressione:

$$W_{(x,t)} = W_{b(x,t)} + W_{rel(x,t)}. \quad (3.52)$$

3.3.3 Equazioni elettromeccaniche Single-Mode

L'espressione della risposta elettromeccanica ricavata nel precedente paragrafo, valida nelle condizioni con forzante armonica per qualsiasi valore della pulsazione ω , è denominata Multi-Mode Solution poiché include tutti i modi di vibrare del cantilever piezoelettrico. Perciò, il risultato di queste equazioni si applica alla dinamica del sistema non solo per la prima frequenza di risonanza ma per qualsiasi valore della frequenza forzante[5].

Nella maggior parte delle applicazioni è di interesse valutare il comportamento dell'harvester nell'intorno della prima frequenza di risonanza poiché si hanno i valori maggiori di potenza generata.

Questo si traduce matematicamente che la forzante abbia una pulsazione pari al primo modo di vibrare con $r = 1$ e $\omega = \omega_1$. È dimostrato che in questa condizione il maggior contributo nei termini delle equazioni (3.48), (3.49) e (3.50) è dato dal termine $r = 1$, è perciò possibile semplificare le formule della risposta elettrica e meccanica con le seguenti, che tengono conto solamente del primo modo di vibrare denominate Single-Mode Solution:

$$v(t) = \frac{-j\omega R_l \theta_1}{(1+j\omega R_l C_{\bar{p}})(\omega_1^2 - \omega^2 + 2j\zeta_1 \omega_1 \omega) + j\omega R_l \theta_1^2} F_1 e^{j\omega t} \quad (3.53)$$

$$W_{rel(x,t)} = \frac{1+j\omega R_l C_{\bar{p}}}{(1+j\omega R_l C_{\bar{p}})(\omega_1^2 - \omega^2 + 2j\zeta_1 \omega_1 \omega) + j\omega R_l \theta_1^2} F_1 \phi_1(x) e^{j\omega t} \quad (3.54)$$

3.3.4 Funzioni di trasferimento Single-Mode

Fin ora nel modello elettromeccanico proposto si è fatto riferimento a due input di eccitazione alla base dell'harvester:

- Una traslazione: $g(t) = W_0 e^{j\omega t}$
- Una rotazione: $h(t) = \theta_0 e^{j\omega t}$

Se si considera ora come input la sola traslazione è possibile definire una funzione di trasferimento tra le risposte: meccanica, $w_{\text{rel}(x,t)}$, ed elettrica, $v(t)$, trovate nel precedente paragrafo, e l'accelerazione traslazionale applicata alla base, che è pari a:

$$\ddot{g}(t) = -\omega^2 W_0 e^{j\omega t} \quad (3.55)$$

Considerando quindi nulla sia la rotazione alla base, che la massa nella punta, M_t , l'ampiezza, F_0 , della forzante $f_r(t) = F_0 e^{j\omega t}$, riarrangiando formula (3.46), diviene:

$$F_0 = -m \int_0^L \phi_{1(x)} dx \omega^2 W_0 = -\sigma_1 \omega^2 W_0 \quad (3.56)$$

con:

$$\sigma_1 = -m \int_0^L \phi_{1(x)} dx \quad (3.57)$$

Il pedice '1' indica il primo modo di vibrare.

Sostituendo nelle (3.53) e (3.54) l'equazione (3.56), si ottengono le risposte elettromeccaniche Single-Mode all'eccitazione traslazionale della base, per una configurazione dell'harvester senza massa applicata alla punta:

$$v(t) = \frac{-j\omega R_l \theta_1 \sigma_r}{(1 + j\omega R_l C_{\tilde{p}})(\omega_1^2 - \omega^2 + 2j\zeta_1 \omega_1 \omega) + j\omega R_l \theta_1^2} (-\omega^2 W_0) e^{j\omega t} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} W_{\text{rel}(x,t)} &= \frac{(1 + j\omega R_l C_{\tilde{p}}) \sigma_r \phi_{1(x)}}{(1 + j\omega R_l C_{\tilde{p}})(\omega_1^2 - \omega^2 + 2j\zeta_1 \omega_1 \omega) + j\omega R_l \theta_1^2} (-\omega^2 W_0) e^{j\omega t} \\ &= \frac{(1 + j\omega R_l C_{\tilde{p}}) \sigma_r \phi_{1(x)}}{(1 + j\omega R_l C_{\tilde{p}})(\omega_1^2 - \omega^2 + 2j\zeta_1 \omega_1 \omega) + j\omega R_l \theta_1^2} (-\omega^2 W_0) e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (3.59)$$

Dividendo la (3.58) e la (3.59) per l'accelerazione alla base si ottengono le funzioni di trasferimento Single Mode [5]:

$$\frac{v(t)}{\ddot{g}(t)} = \frac{-j\omega R_l \theta_1 \sigma_r}{(1 + j\omega R_l C_{\tilde{p}})(\omega_1^2 - \omega^2 + 2j\zeta_1 \omega_1 \omega) + j\omega R_l \theta_1^2}, \quad (3.60)$$

$$\frac{W_{\text{rel}(x,t)}}{\ddot{g}(t)} = \frac{(1 + j\omega R_l C_{\tilde{p}}) \sigma_r \phi_{1(x)}}{(1 + j\omega R_l C_{\tilde{p}})(\omega_1^2 - \omega^2 + 2j\zeta_1 \omega_1 \omega) + j\omega R_l \theta_1^2} \quad (3.61)$$

Capitolo 4

Le misurazioni

4.1 Introduzione

Lo scopo delle misurazioni è quello di caratterizzare la risposta dinamica del sistema elettromeccanico.

L'identificazione del comportamento dinamico mira alla determinazione del modello modale della struttura, cioè dei parametri che descrivono i modi di vibrare della struttura quali: frequenze di risonanza, forma dei modi di vibrare e smorzamenti.

Il modello modale sperimentale può essere utilizzato per numerosi scopi: simulazione della risposta forzata ad forzante generica, confronto con i risultati ottenuti dall'analisi FEM ed aggiornamento dei modelli FEM, studio dell'effetto di modifiche strutturali come variazioni di rigidità e masse sul comportamento dinamico[14].

È possibile fare questo con più tecniche di eccitazione, ma, i due metodi principali sono il metodo impulsivo e l'eccitazione continuativa.

Il metodo di eccitazione continuativa sfrutta l'ingresso di un'eccitazione sinusoidale di frequenza variabile, sweep (figura 4.1), che ha uno spettro di ampiezza circa costante in una banda di frequenza Δf .

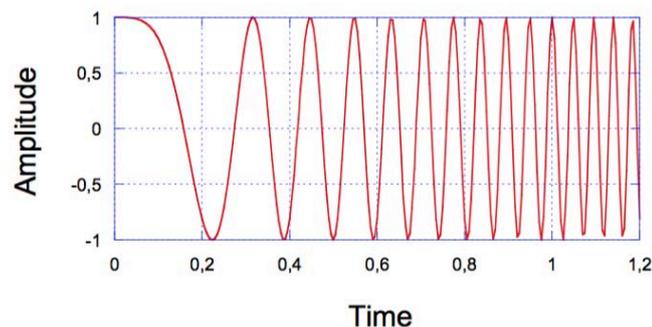


Figura 4.1: eccitazione sinusoidale con frequenza variabile, sweep

Il metodo utilizzato in questa trattazione, invece, è quello impulsivo, questo sfrutta la proprietà che un ingresso impulsivo ideale eccita tutte le frequenze del sistema. Questo metodo è piuttosto semplice e molto efficace, permette di valutare la funzione di trasferimento, misurando la risposta temporale, ed effettuando una trasformata numerica di Fourier, con algoritmi DFT, del segnale campionato acquisito. I limiti principali di

questo metodo sono due. Il primo è dovuto al fatto che non è possibile eccitare la struttura con un impulso unitario teorico, rappresentato dalla funzione delta di Dirac. Il secondo limite è legato allo smorzamento del sistema, le vibrazioni di un sistema troppo smorzato svaniscono dopo un breve intervallo di tempo e la risoluzione spettrale, pari all'inverso del tempo di acquisizione: $\Delta\nu = 1/T$, risulta poco accurata.

Questo capitolo presenterà una dettagliata descrizione delle misurazioni effettuate partendo dalla teoria dell'analisi modale impulsiva. Verranno poi descritti gli strumenti e la catena di misura, il sistema di acquisizione, gli harvester testati, le prove effettuate e la presentazione dei risultati sperimentali ottenuti.

I risultati sperimentali serviranno al confronto con il modello analitico e numerico per effettuare la validazione.

4.2 L'analisi modale sperimentale impulsiva e la catena di misura

Lo scopo della misurazione è quello di determinare la funzione di trasferimento tra l'accelerazione applicata alla base dell'harvester e la tensione ai capi di un carico esterno resistivo.

La misura della funzione di trasferimento viene fatta con la tecnica impulsiva. Questa tecnica sfrutta un ingresso impulsivo teoricamente rappresentato dalla funzione delta di Dirac che ha durata infinitesima e intensità infinita:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \neq 0 \\ \infty & \text{se } t = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Questa funzione ha la proprietà di avere lo spettro costante su tutte le frequenze:

$$\Delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{i\frac{f}{2\pi}t} dt = 1, \quad (4.2)$$

di conseguenza applicando un ingresso di questo tipo si eccita una banda infinita di frequenze (figura).

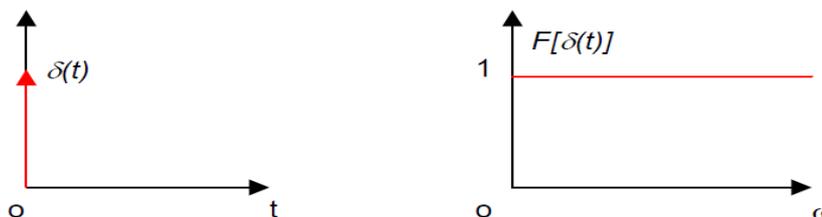


Figura 4.2: funzione delta di Dirac e la sua trasformata di Fourier [15]

Nella realtà non si riesce ad applicare un ingresso pari alla funzione di Dirac, ma tramite un martelletto strumentato si ottiene un impulso di accelerazione della durata T_c , che nel nostro caso è pari a circa 3ms e valore dell'intensità che può variare tra 10 e 150 m/s^2 ($1 \div 15$ [g]) a seconda del colpo che viene dato dall'operatore.

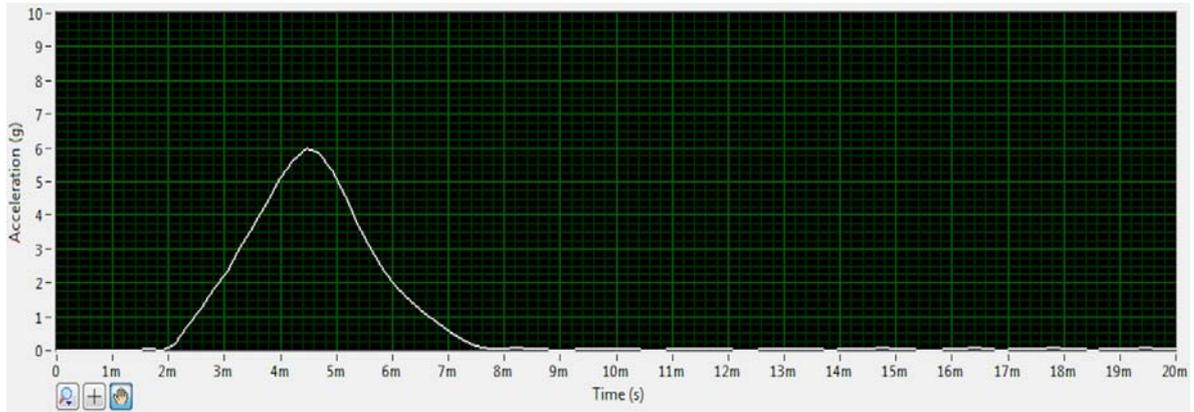


Gráfico 4.1: accelerazione del martelletto strumentato durante l'impatto

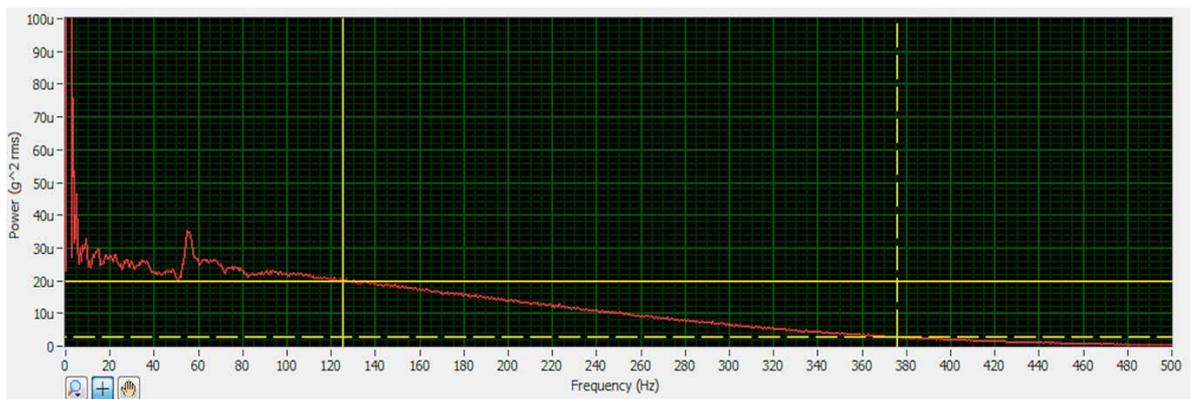


Gráfico 4.2: Spettro di potenza dell'accelerazione del martelletto strumentato, si osserva che a 500 Hz il valore del segnale è quasi nullo

Come si può vedere il segnale presenta un valore quasi nullo dopo una a una frequenza di taglio f_c di circa 500 Hz.

Con questa tecnica si riesce ad eccitare l'harvester in una banda di frequenze comprese tra 0 ed f_c .

L'ampiezza di questa banda dipende della durata dell'impulso T_c : quanto più è breve, tanto più elevata la frequenza massima.

È possibile controllare la durata dell'impulso T_c , che dipende dalle rigidità dei materiali che vanno ad impattare, sostituendo la punta del martelletto che è disponibile in materiali con rigidità che varia. Modificando la punta è quindi possibile variare lo spettro di frequenze di eccitazione dell'harvester secondo un andamento simile a quello riportato in figura.

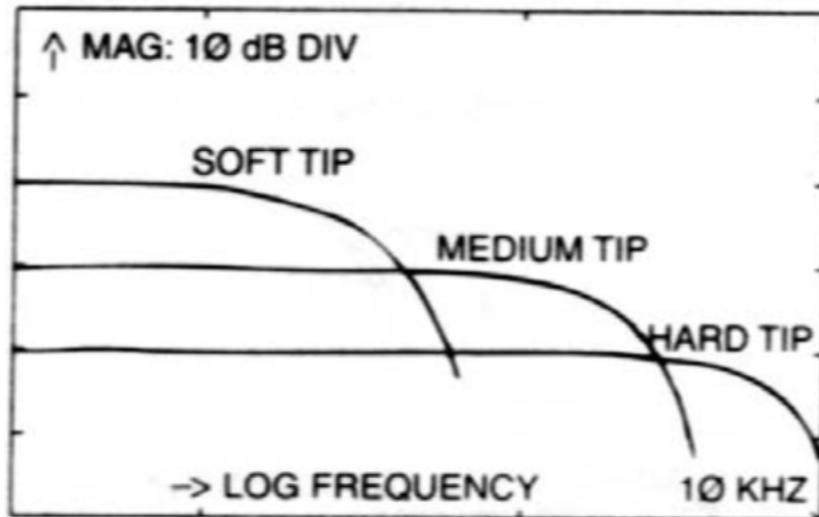


Figura 4.3: banda di eccitazione per punte con rigidzze diverse [14]

Per effettuare le misure sperimentali che determinano la funzione di trasferimento del sistema è stata progettata un'opposita catena di misura fig.(4.4) composta da:

- 1) Martelletto strumentato PCB
- 2) Barra di alluminio
- 3) Sistema di afferraggio della lamina piezoelettrica
- 4) Accelerometro PCB
- 5) Sistema di acquisizione NI 9234
- 6) Pc per elaborazione dati tramite software Labview Signal Express

La lamina piezoelettrica che si vuole testare è collegata alla barra di alluminio tramite un sistema di afferraggio. La barra di alluminio ha la funzione di supporto del sistema ed è mantenuta in posizione con due corde legate ad un telaio in modo che la barra sia libera di vibrare. Il sistema di afferraggio, composto da due piastrine di alluminio collegate alla barra tramite due viti, ha lo scopo di emulare la condizione di incastro perfetto con la lamina piezoelettrica posta a sbalzo.

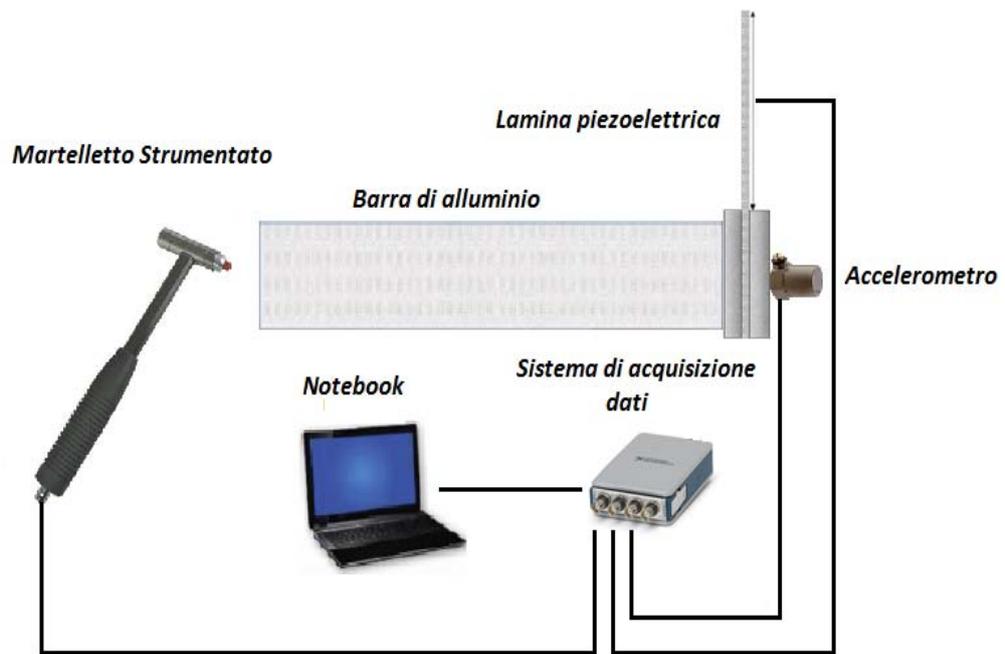


Figura 4.4: catena di misura

Si usa la tecnica con eccitazione ad impulso dando una martellata con il martelletto strumentato alla barra di alluminio nell'estremità opposta a quella in cui è vincolata la lamina.

L'impulso della martellata genera nella barra delle vibrazioni longitudinali che vengono trasmesse in modo diretto al sistema di afferraggio dell'harvester generando così l'eccitazione armonica alla base.

Tramite il sistema di acquisizione NI 9234 si acquisiscono 3 segnali:

- 1) la misura dello spostamento alla base tramite l'accelerometro posto sul sistema di afferraggio barra/harvester,
- 2) l'accelerazione del martelletto strumentato,
- 3) la tensione generata ai capi degli elettrodi della lamina collegati in serie.

Un parametro importante che verrà successivamente discusso è l'impedenza del sistema di acquisizione pari $305\text{ k}\Omega$ che avrà un effetto di carico non trascurabile sulle misurazioni delle tensioni.

Verranno ora descritti gli strumenti di misurazione in modo dettagliato.

4.2.1 Il martelletto strumentato



Figura 4.5: Martelletto strumentato PCB

Per le attività sperimentali attuate durante questo lavoro si è scelto, come spiegato in precedenza, l'eccitazione impulsiva mediante l'uso del martello strumentato PCB (figura 4.5) con l'obiettivo di avvicinare il più possibile una eccitazione ideale di Dirac.

Il martello strumentato è dotato di un sensore di forza integrato nella superficie battente del martello. Questo è realizzato in modo tale che le caratteristiche strutturali non incidano sui risultati della misura, il martello infatti non presenta risonanze nella gamma di frequenza di interesse, evitando disturbi sui dati sperimentali ottenuti.

Il martello è dotato di una serie di punte intercambiabili che servono a regolare la durata dell'impulso a seconda del materiale di cui è costituito il sistema meccanico che si vuole eccitare. Tanto più è alta la rigidità di contatto tra martello ed oggetto colpito (barra di alluminio), tanto minore sarà la durata del contatto, e tanto più l'eccitazione si avvicinerà al caso di impulso ideale. Si dovrà quindi scegliere la punta del martello più consona, in maniera tale da dirigersi verso una situazione ideale, anche se un'eccessiva rigidità di contatto crea un fenomeno altrettanto indesiderato e noto come "doppio colpo", che invalida le misure. Il fenomeno del "doppio colpo" si ha quando a causa dell'elevata rigidità di contatto il corpo oscilla così rapidamente e ampiamente da colpire il martello strumentato una seconda volta prima che l'operatore riesca ad allontanarlo dalla zona di eccitazione, e prima che termini la fase di acquisizione dei dati, alterando irrimediabilmente la misura.

Dal punto di vista pratico è molto importante cercare di eccitare la struttura con dei colpi di martello di eguale intensità: infatti sebbene in linea teorica la funzione di trasferimento sia indipendente dalla forza esterna, c'è anche da ricordare come la linearità del sistema sia soltanto un'ipotesi. Un colpo eccessivamente forte potrebbe esaltare le non linearità

del sistema studiato, e presentare delle FRF non in linea con quelle che si otterrebbero colpendo il sistema con meno veemenza.

4.2.2 La barra di alluminio



Figura 4.6: barra di alluminio mantenuta in posizione da due corde in modo da essere libera di vibrare. La barra di alluminio con dimensioni 400mm x 50mm x 20mm, ha la funzione di supportare il sistema di misura e di ricevere la martellata che eccita la lamina piezoelettrica.

Le dimensioni sono state appositamente progettate in modo che la frequenza di risonanza della barra non influiscano nella misurazione. Il suo primo modo di vibrare è a 625.0 Hz ed è superiore alla frequenza di risonanza più alta della lamina che si andrà a misurare pari a circa 490.0 Hz.

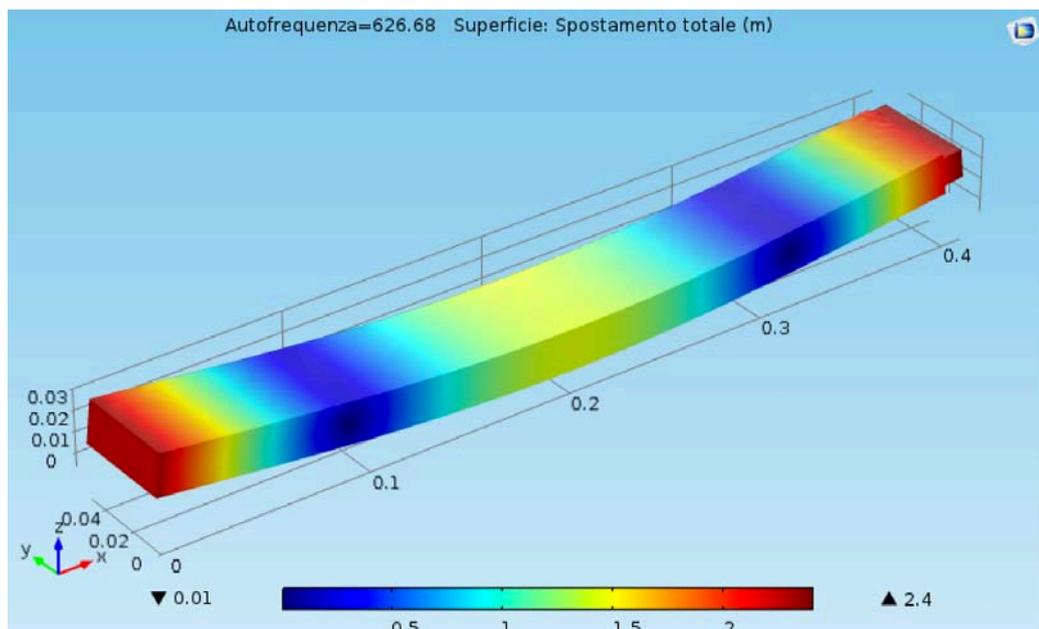


Figura 4.7: Primo modo di vibrare della barra di alluminio a 626,68 Hz calcolato con un software FEM

Nella grafico, che riporta una FRF misurata sperimentalmente tra l'accelerazione alla base e la tensione tra gli strati piezoelettrici, si può osservare l'effetto della frequenza di risonanza della barra a 625 Hz. Questo picco può essere considerato come un disturbo nella misurazione e non è caratteristico dell'harvester ma della risonanza della barra.

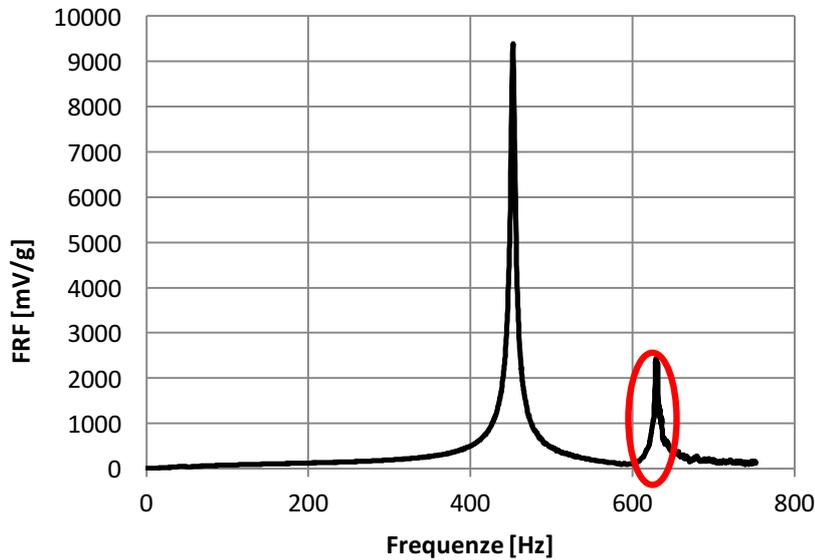


Grafico 4.3: funzione di trasferimento misurata con evidenziato il disturbo a 625 Hz dovuto alla barra

4.2.3 Il sistema di afferraggio

Per poter fissare le travi piezoelettriche alla barra ed allocare in maniera agevole l'accelerometro per misurare l'eccitazione alla base dell'harvester, è stato progettato uno speciale sistema di afferraggio (figura 4.8) realizzato in alluminio. È scomponibile in due pezzi distinti: la base inferiore appoggiata direttamente alla barra e la base superiore che serra l'harvester tramite due viti M5. Esso è stato ottenuto mediante lavorazione con fresa CNC e trapano a colonna, è stato inizialmente costruito in acciaio strutturale, successivamente sostituito con alluminio.

L'alluminio avendo un modulo di Young inferiore rispetto all'acciaio permette alla base superiore maggiori deformandosi a parità di forza di serraggio, questo comporta un miglior contatto tra la base di afferraggio e l'harvester e si realizza così un miglior incastro rispetto al sistema costruito in acciaio.

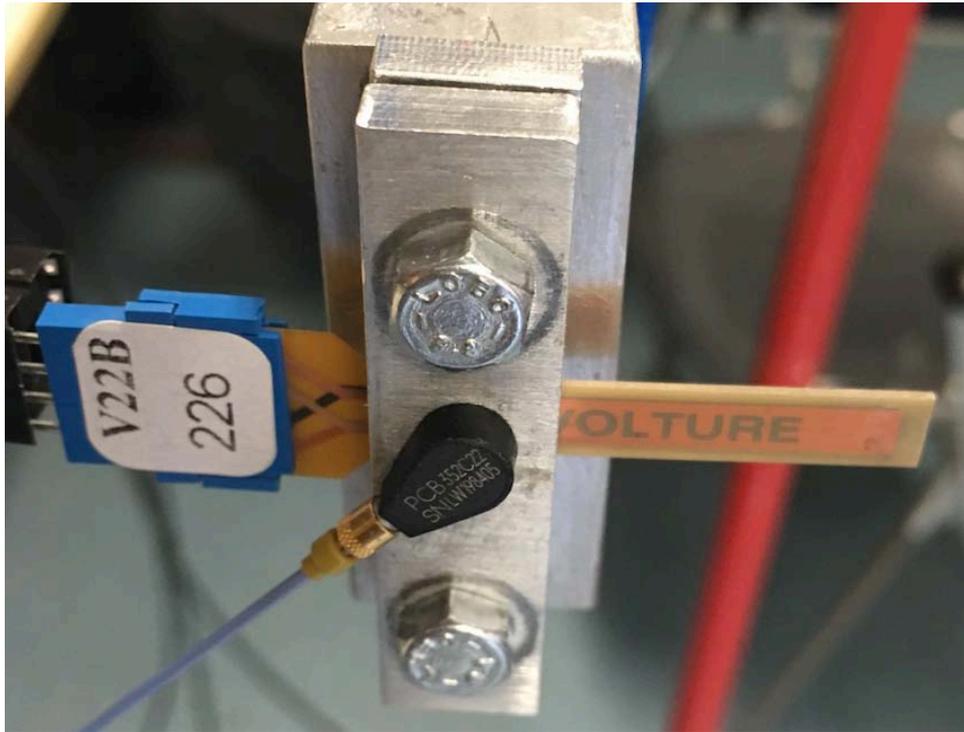


Figura 4.8: Sistema di incastro della V22B alla 'Clamping Line' con accelerometro PCB

L'incastro viene realizzato comprimendo l'harvester tra le due basi tramite le due viti M5.

Per avere delle condizioni ripetibili di incastro e per verificare che le due basi di serraggio siano perfettamente parallele è misurata la luce tra le basi con interposto l'harvester utilizzando uno spessimetro.



Figura 4.9: spessimetro

4.2.4 L'accelerometro

Per la misura dell'accelerazione alla base è utilizzato un accelerometro monoassiale PCB 352 C 22 [16] (figura 4.9) che ha le seguenti caratteristiche:

Dimensioni	3.6mm x 11.4mm x 6,4mm
Peso	0,5 g
Sensibilità	10.48 mV/g (1,068 [mV/ms ²])
Range di Frequenza	1 ÷ 10000 Hz
Frequenza di risonanza	50 kHz
Temperatura di esercizio	-54 ÷ 121 °C

Tabella 4.1: caratteristiche dell'accelerometro PCB 352 C 22

L'accelerometro viene applicato al sistema meccanico da studiare nella base superiore del sistema di afferraggio per mezzo di cera d'api. È importante che sia applicato correttamente e solidamente alla struttura da analizzare e che la cera non generi inclinazioni dell'oggetto alterando le direzioni in cui vengono misurati gli spostamenti.

4.2.5 Il sistema di acquisizione NI 9234



Figura 4.10: sistema di acquisizione NI 9234

NI 9234 è un modulo di acquisizione del segnale dinamico a 4-canali per le misure di frequenza audio ad accuratezza elevata da sensori IEPE (Integrated Electronic

Piezoelectric) [17]. I canali di input eseguono la digitalizzazione simultanea dei segnali a frequenze fino a 51.2 kHz per canale e includono filtri antialias in grado di regolare automaticamente la frequenza di campionamento.

Nella misurazione vengono utilizzati 3 canali con i seguenti ingressi:

- canale 0: martelletto strumentato, misura l'accelerazione dell'impatto
- canale 1: accelerometro, misura l'accelerazione alla base dell'harvester
- canale 2: voltmetro, misura tensione ai capi degli elettrodi dell'harvester

Nella tabella sono riassunte le caratteristiche tecniche del sistema di acquisizione:

Numero di canali	4
Range di segnale	± 5 V
Impedenza di ingresso Z_{in}	305 k Ω (Resistiva)
Range di Frequenza	0 ÷ 51.2 kHz

Tabella 4.2: caratteristiche tecniche del sistema di acquisizione [17]

4.2.6 Il software Labview Signal express

LabView SignalExpress è un software fornito dalla National Instruments Corporate (US) che consente di registrare e analizzare i segnali acquisiti.



Figura 4.11: software LabView SignalExpress [18]

Questo software offre un ambiente interattivo di misura per effettuare operazioni veloci di acquisizione, analisi e presentazione dei dati. Nel nostro caso permette di registrare i dati acquisiti dei tre canali ed effettuare le successive operazioni di analisi dei dati nel dominio delle frequenze, ricavando lo spettro degli ingressi con trasformate numeriche di Fourier tramite algoritmi DFT, e di calcolare le funzioni di trasferimento.

Il settaggio prevede che l'inizio della registrazione sia sintonizzato tramite trigger al segnale del martelletto strumentato, una frequenza di campionamento di $f_c = 4 \text{ kHz}$, ed un numero di campioni $n_c = 12000$ per ogni misura, che corrispondono ad un tempo di acquisizione $T_c = 3,0 \text{ s}$. Di conseguenza la risoluzione spettrale, ovvero la distanza tra due punti nel dominio delle frequenze, che è data dall'inverso del tempo di acquisizione è pari a:

$$\Delta\nu = 1/T_c = 0,33 \text{ Hz}$$

Le sensibilità degli strumenti sono le seguenti:

Canale	Strumento	Sensibilità
0 #	Martelletto PCB	2,50 [mV/g]
1 #	Accelerometro	10,48 [mV/g]
2 #	Voltmetro	1[V/V]

Tabella 4.3: sensibilità degli strumenti di misura

4.3 Tipi di lamine piezoelettriche testate

In questo lavoro di sperimentazione sono state caratterizzate elettromeccanicamente tre diverse geometrie di cantilever piezoelettrici prodotti dall'azienda Mide's VoltureTM, il cui nome commerciale è il seguente:

- Mide's VoltureTM V22B
- Mide's VoltureTM V22BL
- PPA 1001

I modelli Mide's VoltureTM V22B (fig. 4.12) e Mide's VoltureTM V22BL (fig. 4.13) sono degli energy harvester bimorfi composti da due strati piezoelettrici di PZT-5A mantenuti isolati da strati di FR4 ed Espanex [19]. Gli strati piezoelettrici come si vede nella figure 4.12 e 4.13 sono nella zona centrale della lunghezza dell'harvester e sono circondati da dei bordi in FR4. Ciò che differenzia i due modelli è la lunghezza della parte terminale della trave composta da FR4, che per il V22B è di 2.3 mm e per il V22BL è di 28.3 mm.

Le piastre hanno una larghezza di 6 mm e uno spessore totale di 0.81 mm costante su tutta la lunghezza.

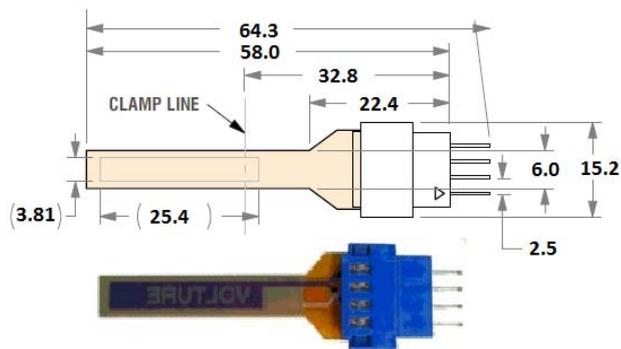


Figura 4.12: Cantilever V22B (unità di misura mm) [20]

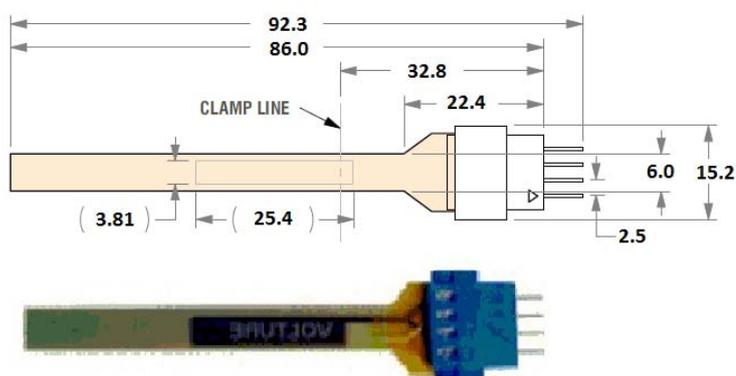


Figura 4.13: Cantilever V22BL (unità di misura mm) [20]

La successione dei vari strati è rappresentata nella figura fornita nel datasheet del prodotto (figura 4.14).

Ogni strato è collegato a quello adiacente tramite una colla epossidica, questa possiede caratteristiche meccaniche che non influenzano il comportamento durante le prove, pertanto nelle analisi agli elementi finiti non verrà modellata.

Gli strati esterni sono di FR4, un materiale composito, chiamato anche vetronite, formato da un tessuto di fibre di vetro intrecciato in una matrice di resina epossidica ritardante di fiamma, è comunemente usato nel mondo dell'elettronica come base dei circuiti stampati per le buone proprietà di resistenza e rigidità meccanica e di isolante elettrico.

L'espandex è il materiale che compone lo strato centrale in corrispondenza dell'asse neutro della trave, è molto flessibile ed isolante.

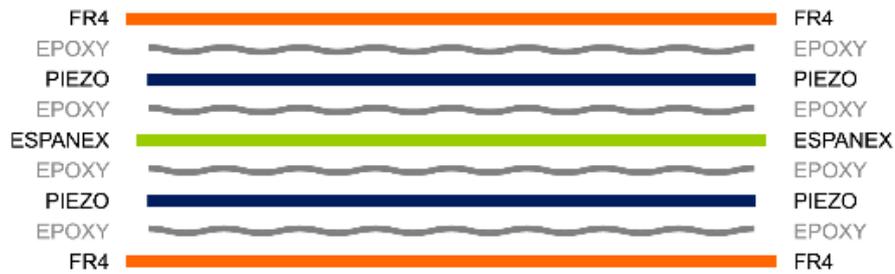


Figura 4.14: Strati di materiale di V22B e V22BL[21]

Gli spessori dei vari strati sono i seguenti:

Materiale	Spessore [mm]
PZT 5A	0.18
FR4	0.18
Espanex	0.09

Tabella 4.4: spessore degli strati nei cantilever V22B e V22BL [22]

I dati delle proprietà dei materiali forniti dalla Mide's VolturesTM sono riassunti nella seguente Tabella:

Materiali	Modulo Young E	Coeff. Poisson ν	Densità ρ
FR4	22 GPa	0.3	1920 Kg/m ³
Espanex	3.2 GPa	0.34	1300 Kg/m ³

Tabella 4.5: proprietà di materiali cantilever V22B e V22BL [21]

Per quanto riguarda gli strati piezoelettrici essi sono polarizzati nella direzione dello spessore e con verso di polarizzazione opposto. Il materiale che li compone è il PZT 5A, questo ha un comportamento ortotropo trasversalmente isotropo e la Mide's VolturesTM fornisce le seguenti proprietà [21]:

- Permittività relativa: $\epsilon_{33}^T = 1900$
- Coefficienti di accoppiamento piezoelettrico:

$$d_{31} = -190 \cdot 10^{-12} \text{ [C/N]}$$

$$d_{33} = 390 \cdot 10^{-12} \text{ [C/N]}$$
- Matrice di cedevolezza del materiale, S_E [1/Pa]:

$$\begin{bmatrix} 1.64 \times 10^{-11} & 5.74 \times 10^{-12} & -7.22 \times 10^{-12} & 0 & 0 & 0 \\ 5.74 \times 10^{-12} & 1.88 \times 10^{-11} & -7.22 \times 10^{-12} & 0 & 0 & 0 \\ -7.22 \times 10^{-12} & -7.22 \times 10^{-12} & 1.88 \times 10^{-11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4.75 \times 10^{-11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.75 \times 10^{-11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4.43 \times 10^{-11} \end{bmatrix}$$

- Densità $\rho = 7800 \text{ Kg}/\text{m}^3$

Il modello PPA 1001 è una lamina unimorfa, composta da un unico strato di materiale piezoelettrico di PZT 5H circondata da altri quattro strati di materiale strutturale nella successione: polyimide, rame, PZT 5H, acciaio AISI 304 e polyester.

A differenza dei modelli V22B e V22BL questa può essere usata sia come harvester sia come sensore e attuatore.

Lo spessore totale della piastra è di 0.46 mm e larghezza di 23.3 mm. Il produttore consiglia due linee ottimali di vincolo: clamp 6 e clamp 0 con lunghezza libera di vibrare rispettivamente di: 34.8 mm e 40.8mm (figura).

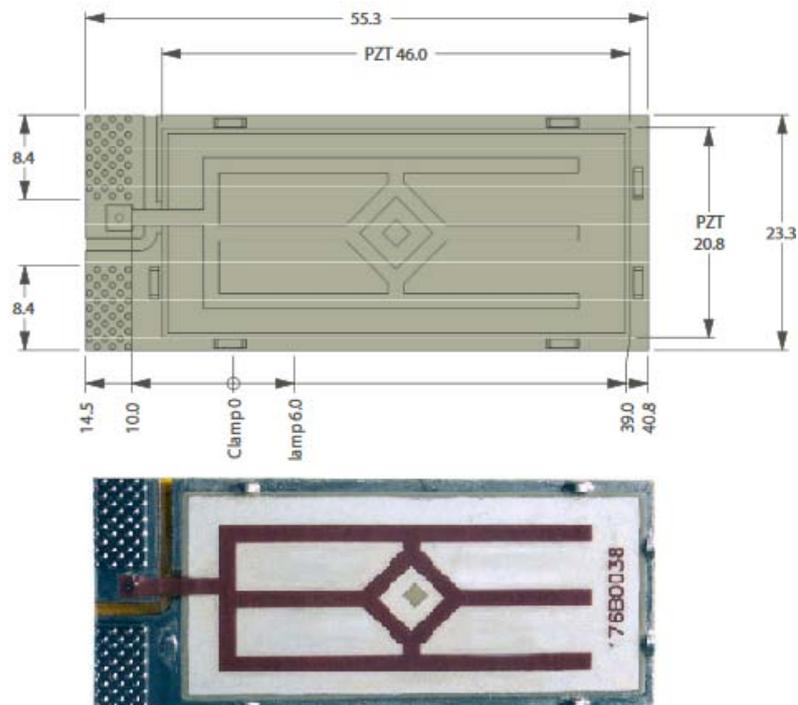


Figura 4.15: Cantilever PPA 1001 [20]

La successione dei vari strati che compongono la lamina è riassunta nella seguente tabella:

Strati	Spessore [mm]
Polyester	0.05
Rame	0.03
PZT 5H	0.15
Acciaio AISI 304	0.15
Polymide	0.03
Totale	0.46

Tabella 4.6: strati PPA 1001 [20]

Il datasheet di prodotto fornisce la capacità elettrica dello strato piezoelettrico $C_p = 100nF$, la massa totale $m = 2.8g$ e la frequenza di risonanza alla clamp 0 nell'uso come harvester $f_c = 131.0Hz$.

I materiali strutturali di questa lamina presentano le seguenti proprietà:

Materiali	Modulo Young E	Coeff. Poisson ν	Densità ρ
Polyester	3.65 GPa	0.48	1380 Kg/m ³
Rame	110 GPa	0.34	1300 Kg/m ³
Acciaio AISI 304	193 GPa	0.29	8000 Kg/m ³
Polymide	4.1 GPa	0.34	1410 Kg/m ³

Tabella 4.7: proprietà materiali PPA 1001 [20]

Lo strato piezoelettrico è composta da invece da PZT 5H con le seguenti caratteristiche:

- Permittività relativa: $\epsilon_{33}^T = 3800$
- Coefficienti di accoppiamento piezoelettrico: $d_{31} = -320 \cdot 10^{-12} [C/N]$
 $d_{33} = 650 \cdot 10^{-12} [C/N]$
- Moduli elastici: $Y_{11}^E = 6.3 \cdot 10^{10} [Pa]$
 $Y_{33}^E = 5.0 \cdot 10^{10} [Pa]$
- Densità $\rho = 7800 [Kg/m^3]$.

4.4 L'effetto di carico legato all'impedenza di ingresso, Z_{in} , del sistema di acquisizione

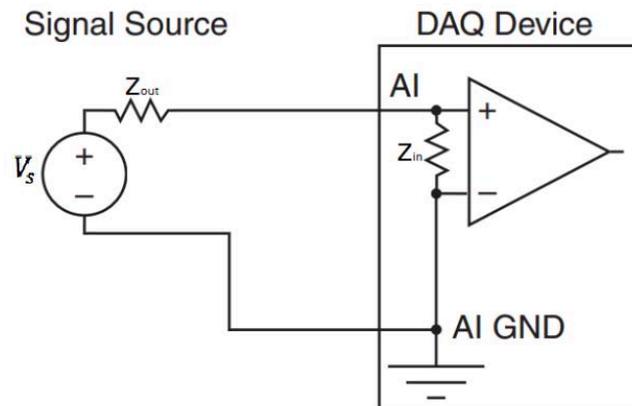


Figura 4.16: schema circuitale del sistema di acquisizione collegato alla sorgente da misurare[23]

La presenza di un'impedenza di ingresso, Z_{in} , causa un effetto di carico variabile con la frequenza di vibrazione dell'harvester [24]. Per quantificare questo effetto si fa riferimento al circuito in figura 4.13, dove il Signal Source rappresenta l'harvester che ha caratteristiche di impedenza, Z_{out} , capacitive, e possono essere valutate, per la configurazione bimorfa (lamine V22B e V22BL) con collegamento in serie degli strati, considerando il seguente circuito di figura 4.14.

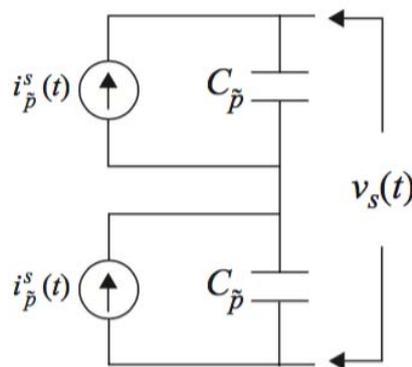


Figura 4.17: schema circuitale dell'harvester bimorfo con gli strati piezoelettrici collegati in serie [5]

I valori della capacità sono pari a $C_{\tilde{p}} = \bar{\epsilon}_{33}^S bL/h_{\tilde{p}}$ dove: b , L e $h_{\tilde{p}}$ sono rispettivamente la larghezza, la lunghezza e lo spessore dello strato piezoelettrico, e $\bar{\epsilon}_{33}^S$ è la permittività dielettrica misurata a deformazione costante (vedi Appendice A).

Questo circuito può essere trasformato nel circuito del Signal Source (figura 4.13) composto da un generatore di tensione equivalente, V_s , e una impedenza equivalente, Z_{out} , con il teorema di Thèvenin[25].

Il valore dell'impedenza equivalente è pari a:

$$Z_{out} = 2 Z_{\bar{p}} = -2i / \omega C_{\bar{p}}, \quad (4.1)$$

mentre la tensione generata, V_s , è la tensione che si vuole ricavare ed è pari a quella misura con uno strumento ideale ($Z_{in} \rightarrow \infty \Omega$).

Per bassi valori della frequenza di vibrazione dell'harvester e quindi di pulsazione, ω , il valore di Z_{out} diventa elevato, determinando un effetto di carico non trascurabile.

Il valore della tensione generata, V_s , si ricava dalla tensione misurata, V_m , tramite la formula del partitore di tensione:

$$V_s = \frac{\sqrt{Z_{in}^2 + Z_{out}^2}}{Z_{in}} V_m = K_{(\omega)} \cdot V_m \quad (4.2)$$

Con Z_{in} che per il sistema di acquisizione NI 9234 è pari a $305 \text{ k}\Omega$ con comportamento resistivo al variare della frequenza.

Il valore del coefficiente di moltiplicazione, $K_{(\omega)}$, che quantifica l'effetto di carico dovuto all'impedenza di ingresso, nel caso di harvester bimorfo con collegamento in serie degli strati ha un valore pari a:

$$K_{(\omega)}^b = \frac{\sqrt{Z_{in}^2 + Z_{out}^2}}{Z_{in}} = \frac{\sqrt{Z_{in}^2 + (2/\omega C_{\bar{p}})^2}}{Z_{in}} \quad (4.3)$$

Per le piastre V22B e V22BL considerando una capacità dello strato piezoelettrico pari a: $C_{\bar{p}} = \bar{\epsilon}_{33}^S bL/h_{\bar{p}} = 7,2 \text{ nF}$ si ottiene un valore del coefficiente $K_{(\omega)}^b$ al variare di ω rappresentato nel seguente grafico:

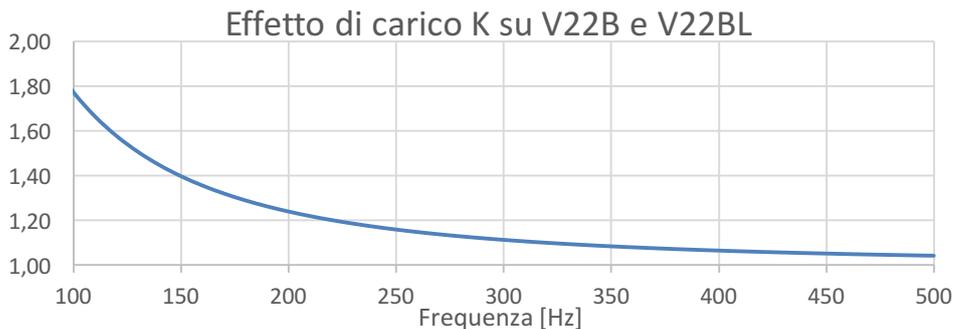


Grafico 4.4: effetto di carico su V22B e V22BL

Ed in termini di errore di misurazione percentuale:

$$errore \% = \frac{V_s - V_m}{V_s} \cdot 100 \quad (4.4)$$

abbiamo:

Effetto di carico su V22B e V22BL

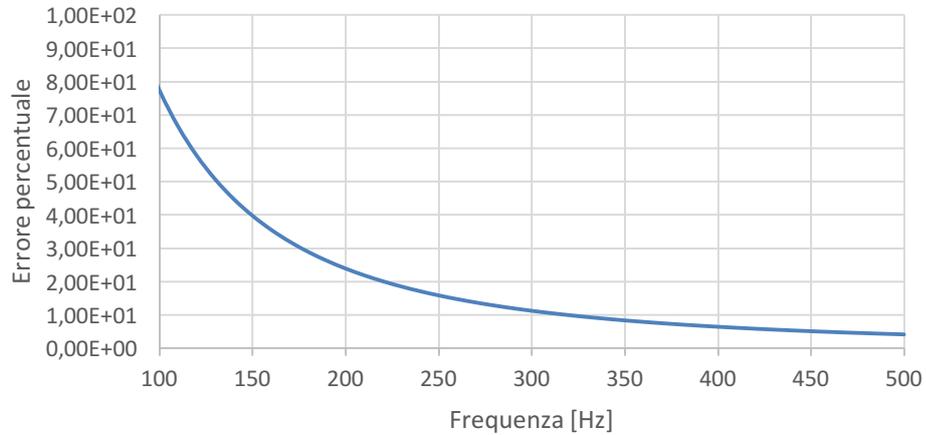


Grafico 4.5: effetto di carico su V22B e V22BL, errore percentuale di misurazione

Dai grafici si osserva che il valore di $K_{(\omega)}^b$ produce un'elevata alterazione tra la tensione misurata e quella effettivamente generata per una banda di frequenza compresa tra 100 e 200 Hz che, come si vedrà in seguito, contiene i valori della prima frequenza di risonanza della lamina V22BL. Sopra i 300 Hz l'effetto di carico invece produce un errore di misurazione inferiore al 10%.

Nel caso della piastra unimorfa PPA 1001, avendo un unico strato piezoelettrico, il coefficiente si riduce a:

$$K_{(\omega)}^u = \frac{\sqrt{Z_{in}^2 + Z_{out}^2}}{Z_{in}} = \frac{\sqrt{Z_{in}^2 + (1/\omega C_{\tilde{p}})^2}}{Z_{in}} \quad (4.5)$$

Considerando una capacità $C_{\tilde{p}} = 100$ nF, molto maggiore rispetto alle lamine bimorfe, il valore del coefficiente di carico risulta pari a 1 per la banda di frequenza di interesse (≥ 100 Hz) come dimostrato nel seguente grafico:

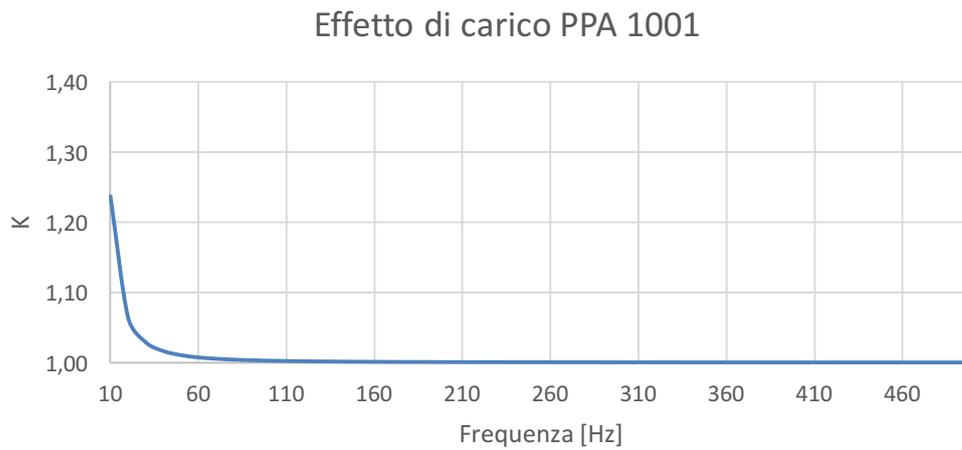


Grafico 4.6: effetto di carico su PPA 1001

E in termini di errore percentuale:

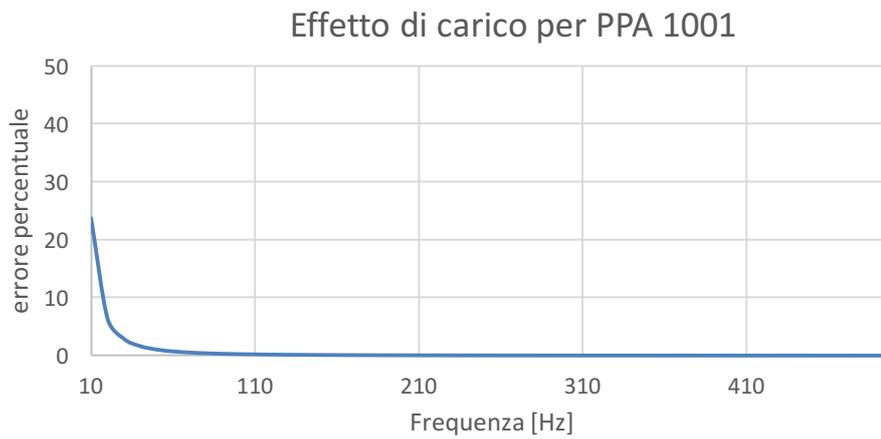


Grafico 4.7: effetto di carico su PPA 1001, errore di misurazione percentuale

Come si può vedere nei grafici l'effetto di carico in questa piastra non è rilevante pertanto non verrà preso in considerazione

4.5 Le misurazioni

Ogni modello di lamina piezoelettrica è stato testato a due diverse lunghezze di vincolo. Per gli harvester V22B e V22BL si sono assunte la 'Clamp Line' e la lunghezza massima della piastra. La 'Clamp Line' è quella lunghezza libera di vibrare consigliata dal produttore che ottimizza le prestazioni dell'harvester, è pari a 27.50 mm per la lamina corta e 57.00 mm per la lamina più lunga. La 'Clamp Line' prevede che l'incastro sia nella zona in cui è presente il materiale piezoelettrico (fig. 4.12 e fig. 4.13).

Visto che la tensione flessionale è massima proprio nel punto di incastro si raggiunge nel materiale piezoelettrico la condizione di maggiore stress meccanico. Un aspetto critico di questa configurazione è l'attenzione da porre nel serraggio, il materiale piezoelettrico presenta un comportamento fragile e se lo si comprime eccessivamente si rischia di rompere il prodotto.

Nelle misure alla lunghezza totale l'incastro è posto nel punto in cui la larghezza delle piastre diventa costante pari 6 mm (fig. 4.12 e fig. 4.13). Il materiale della zona di incastro in questo caso è FR4. La lunghezza a sbalzo è la massima possibile, e corrisponde alla lunghezza in cui la lamina possiede una larghezza di 6mm, ed è pari a 35.00 mm per la V22B e 63.50 mm per la V22BL.

La PPA 1001 è stata testata alle Clamp 0 e alla Clamp 6 con rispettivamente lunghezza libera di vibrare di 40.8 mm e 34.8 mm.

Tutte le misure sono state effettuate senza utilizzare una massa aggiunta nella punta dell'harvester.

Per ogni configurazione è stata effettuata una serie di misurazioni applicando impulsi dell'accelerazione di intensità compresa tra 2 g e 12 g e variabile in modo random a seconda della manualità dell'operatore.

Le principali grandezze direttamente misurate sono:

- Accelerazione del martelletto strumentato
- Accelerazione alla base dell'harvester
- Tensione ai capi dell'harvester

Queste grandezze sono state successivamente elaborate ottenendo il loro valore spettrale con algoritmi FFT(Fast Fourier Transform) e la funzione di trasferimento FRF (Frequencies Response Function) tra la tensione ai capi dell'harvester e l'accelerazione

alla base. Ottenuta dividendo i valori spettrali della tensione generata con l'accelerazione alla base.

Altri valori importanti ricavati dalle misurazioni sono:

- Tensione Picco-Picco V_{pp} : pari alla differenza tra il valore massimo e il valore minimo assunto dalla tensione durante l'acquisizione.
- Rapporto di smorzamento viscoso ζ : che può essere ricavato con due alternative dai dati misurati. La prima è il metodo del decremento logaritmico che per definizione è pari a:

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{x_1}{x_{n+1}} \quad (4.5)$$

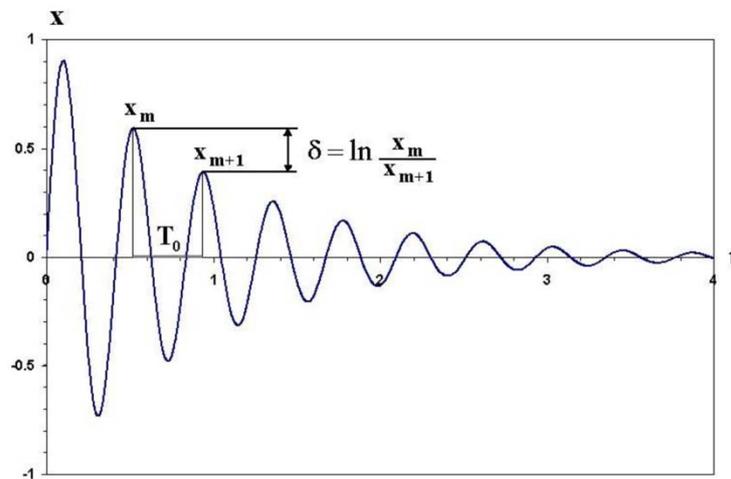


Figura 4.18: decadimento di un oscillazione libera smorzata e misura dello smorzamento con il metodo del decremento logaritmico [14]

Per valori piccoli del rapporto di smorzamento viscoso, ζ , vale la seguente formula:

$$\zeta = \frac{\delta}{2\pi} \quad (4.6)$$

Un altro metodo è quello della larghezza di banda in cui il rapporto di smorzamento si ottiene dalla misura della pulsazione di risonanza ω_n e dalla larghezza di banda $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$, con ω_1 e ω_2 pari alle pulsazioni a cui corrisponde metà della potenza di risonanza. In questo caso il rapporto di smorzamento viscoso è pari a:

$$\zeta = \frac{\Delta\omega}{2\omega_n} \quad (4.7)$$

Si riassumono le configurazioni di cantilever piezoelettrici testati nella seguente tabella:

Modello di lamina testa	Lunghezza in cui è vincolata la lamina	Lunghezza libera di vibrare
V22B	Clamping Line	27.50 mm
V22B	Lunghezza Massima	35.00 mm
V22BL	Clamping Line	57.00 mm
V22BL	Lunghezza Massima	63.00 mm
PPA1001	Clamp0	40.80 mm
PPA1001	Clamp6	34.80 mm

Tabella 4.8: configurazioni dei cantilever piezoelettrici testati

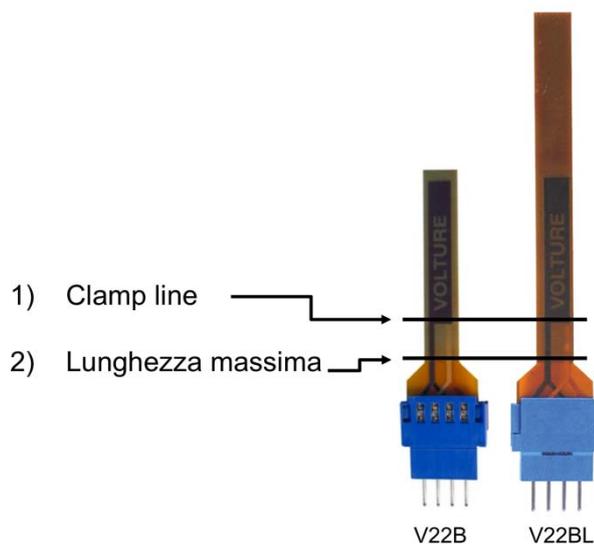


Figura 4.18: Configurazioni di vincolo per V22B e V22BL

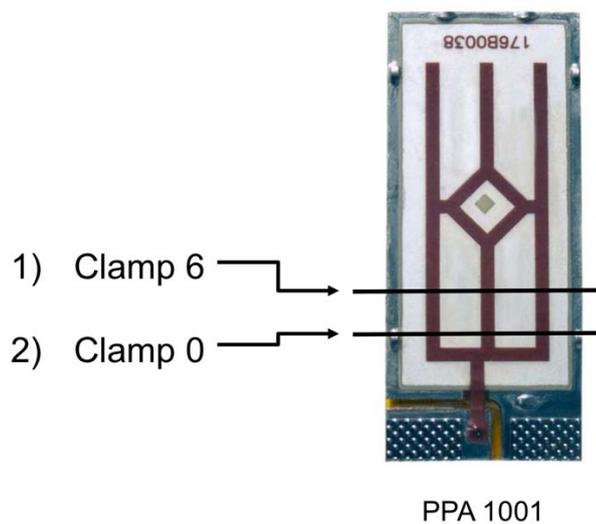


Figura 4.19: Configurazioni di vincolo per PPA 1001

4.6 I risultati sperimentali

Verranno presentati i risultati sperimentali ottenuti per ogni serie di misura, questi risultati tengono conto dell'effetto di carico della misurazione:

1. Lamina V22B Clamp Line

Misure	Accelerazione [g]	Vpp [V]	$V_{pp}/acc.$ [V/g]	Picco FRF [V/g]	Frequenza Risonanza [Hz]	Rapporto di smorzamento ζ
1	4,5	1	0,222	11,50	496,0	0,0050
2	5	1,17	0,234	11,40	496,0	0,0052
3	6	1,44	0,24	12,04	496,4	0,0056
4	3	0,64	0,213	9,61	496,4	0,0050
5	2	0,36	0,180	10,14	495,6	0,0050
6	5,5	1,22	0,222	12,88	496,0	0,0050
7	8	1,95	0,243	12,13	496,0	0,0050
8	8	2,1	0,262	10,33	496,0	0,0050
9	6	1,56	0,260	12,12	496,0	0,0053
10	11	3,25	0,295	10,14	494,9	0,0059

Tabella 4.9: misure effettuate V22B Clamp line

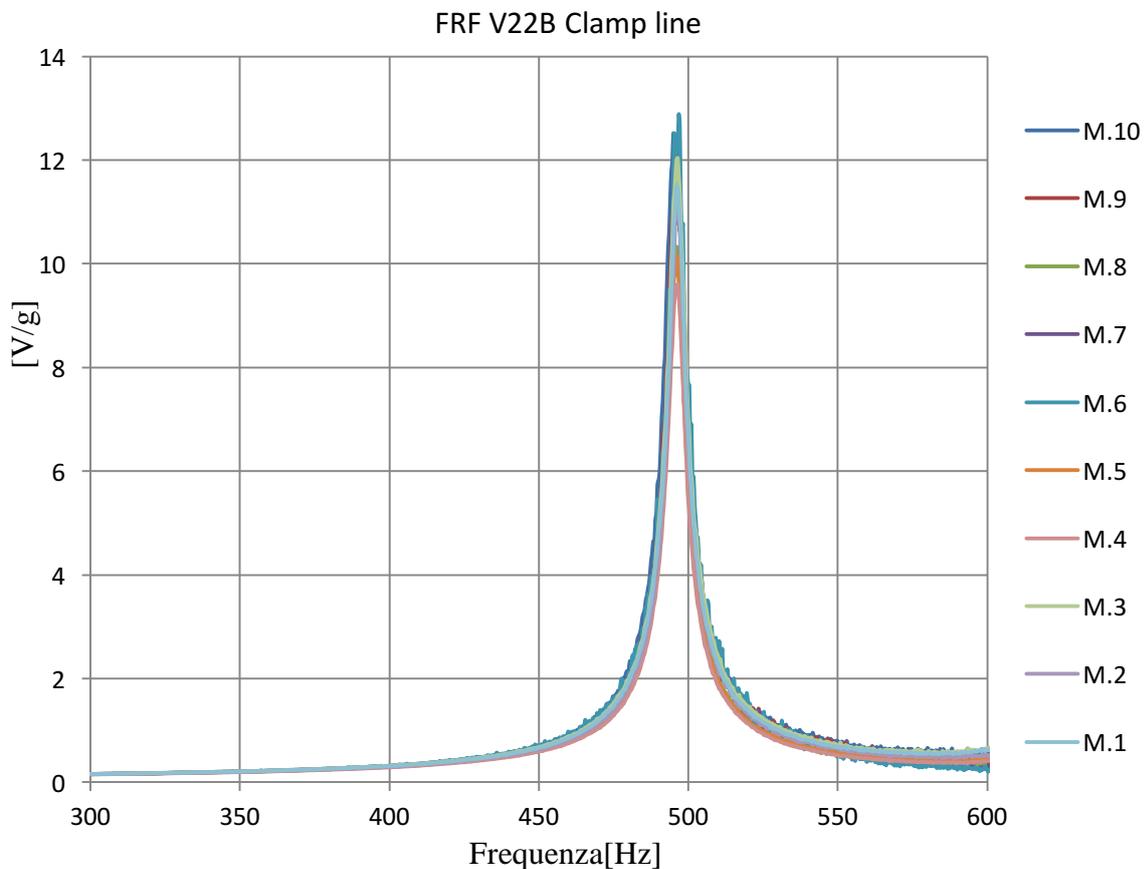


Grafico 4.8: funzione di trasferimento misurata V22B clamp line

2. Lamina V22B Lunghezza Massima

Misure	Accelerazione [g]	Vpp [V]	$V_{pp}/acc.$ [V/g]	Picco FRF [V/g]	Frequenza Risonanza [Hz]	Rapporto di smorzamento ζ
1	5,5	2,28	0,414	11,32	270,6	0.0057
2	5,6	2,34	0,418	11,37	270,6	0.0057
3	5,68	2,40	0,422	11,49	270,6	0.0056
4	5,7	2,41	0,423	11,57	270,6	0.0057
5	6,1	2,54	0,416	11,63	270,6	0.0058
6	6,2	2,59	0,418	11,57	270,6	0.0058
7	6,4	2,70	0,422	11,49	270,6	0.0057
8	6,5	2,88	0,442	11,61	270,6	0.0058
9	6,6	2,83	0,429	11,68	270,6	0.0057
10	6,7	2,84	0,424	11,48	270,6	0.0057

Tabella 4.10: misure effettuate V22B Lunghezza massima

FRF V22B lunghezza massima

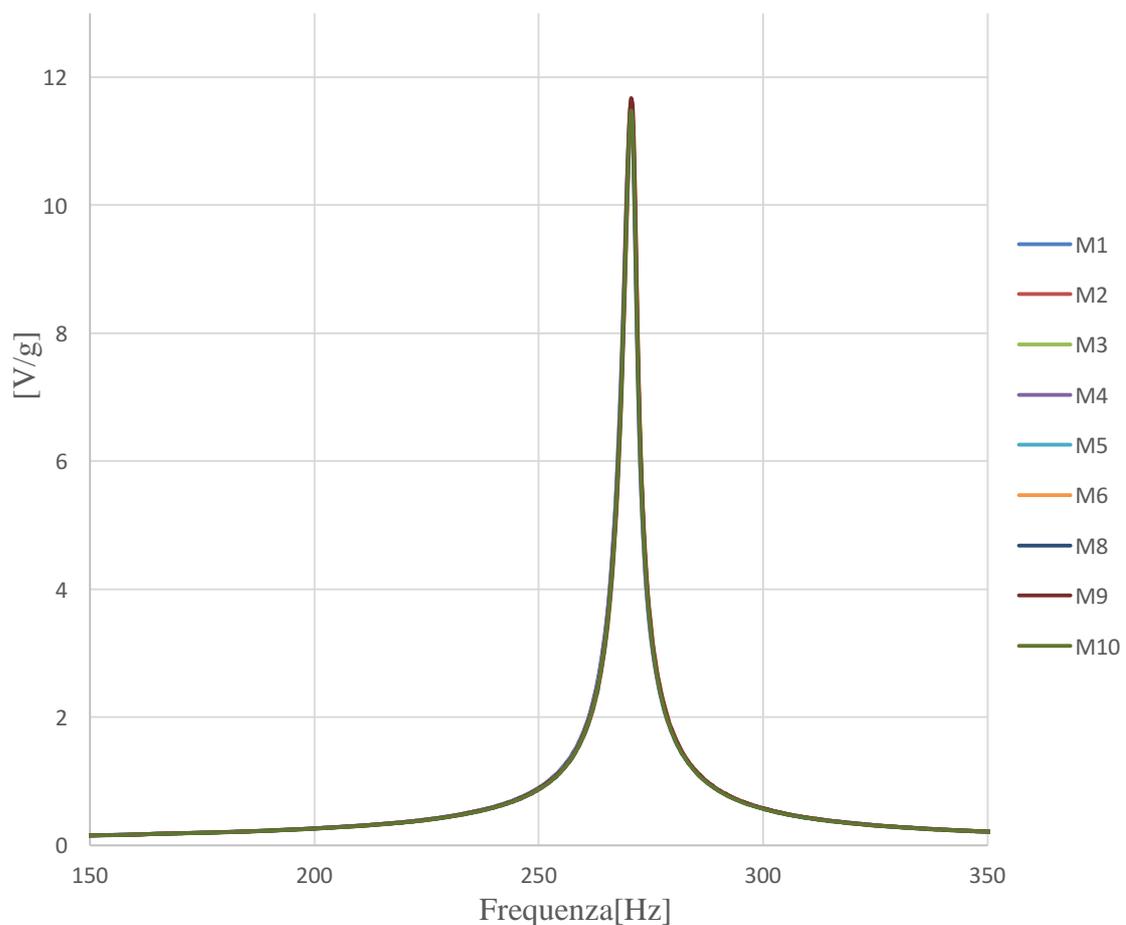


Grafico 4.9: funzione di trasferimento misurata V22B Lunghezza massima

3. Lamina V22BL Clamp Line

Misura	Accelerazione [g]	V _{pp} [V]	V _{pp} /acc. [V/g]	Picco FRF [V/g]	Frequenza Risonanza [Hz]	Rapporto di smorzamento ζ
1	14,7	9,64	0,66	25,45	151,1	0,0089
2	9,2	6,43	0,70	25,75	150,8	0,0091
3	5,7	4,61	0,80	25,42	151,1	0,0089
4	7,4	5,69	0,77	26,00	151,1	0,0093
5	7,7	5,91	0,77	25,69	151,1	0,0093
6	7,8	6,01	0,77	25,57	151,1	0,0091
7	7,6	6,10	0,80	25,34	151,1	0,0089
8	9,0	6,50	0,72	26,08	151,1	0,0086
9	8,5	6,28	0,74	23,19	150,8	0,0094
10	10,0	7,32	0,73	22,68	150,8	0,0094

Tabella 4.11: misure effettuate V22BL Clamp line

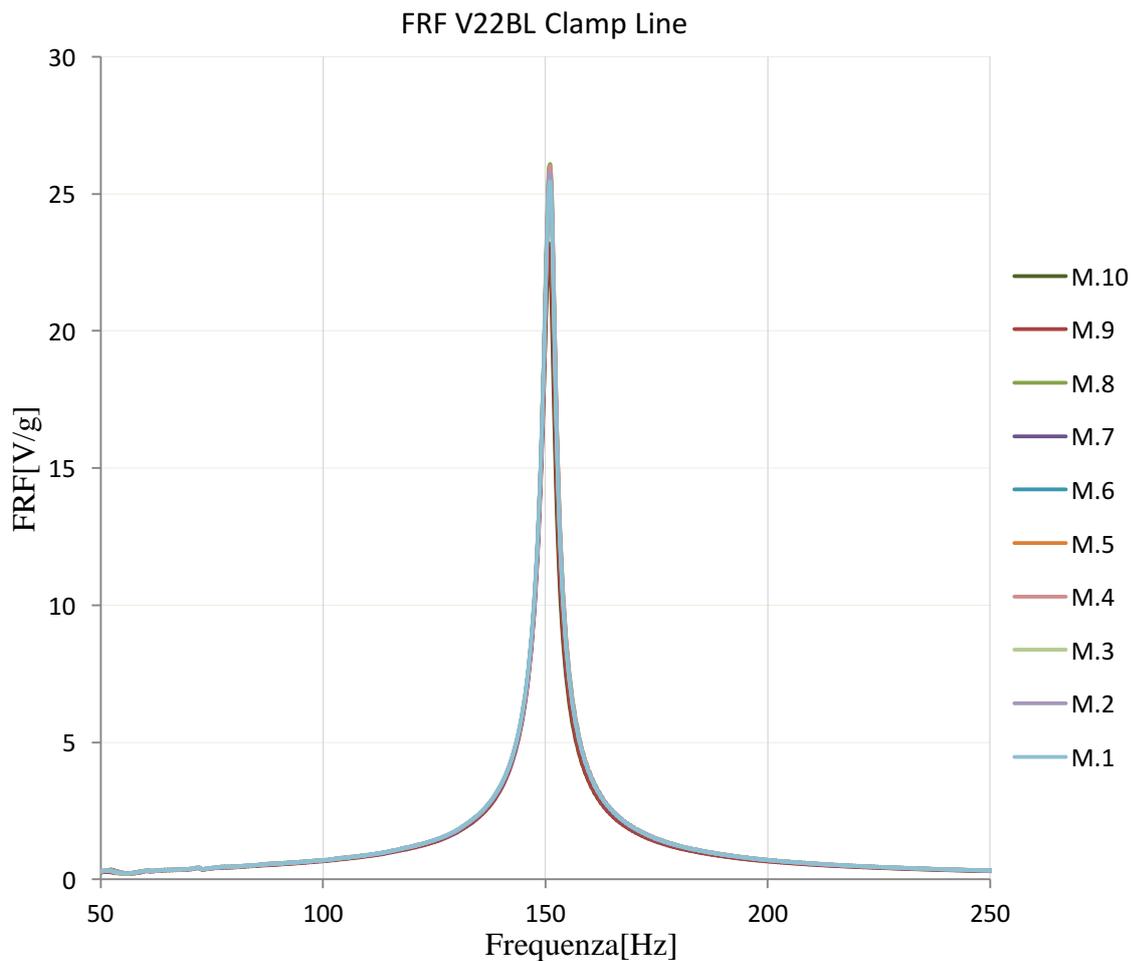


Grafico 4.10: funzione di trasferimento misurata V22BL Clamp line

4. Lamina V22BL Lunghezza Massima

Misura	Accelerazione [g]	Vpp [V]	$V_{pp}/acc.$ [V/g]	Picco FRF [V/g]	Frequenza Risonanza [Hz]	Rapporto di smorzamento ζ
1	5,60	3,75	0,670	35,47	116,7	0.0077
2	5,75	3,97	0,690	37,70	116,8	0.0074
3	6,15	4,03	0,655	37,22	116,7	0.0075
4	6,18	4,15	0,672	36,52	116,7	0.0076
5	6,25	4,27	0,684	35,83	116,7	0.0076
6	6,30	4,30	0,683	36,60	116,8	0.0076
7	6,85	4,34	0,634	36,36	116,8	0.0077
8	6,95	4,50	0,647	36,85	116,6	0.0075
9	7,10	4,69	0,661	36,17	116,8	0.0075
10	7,25	4,90	0,676	35,51	116,7	0.0074

Tabella 4.12: misure effettuate V22BL Lunghezza massima

FRF V22BL Lunghezza Massima

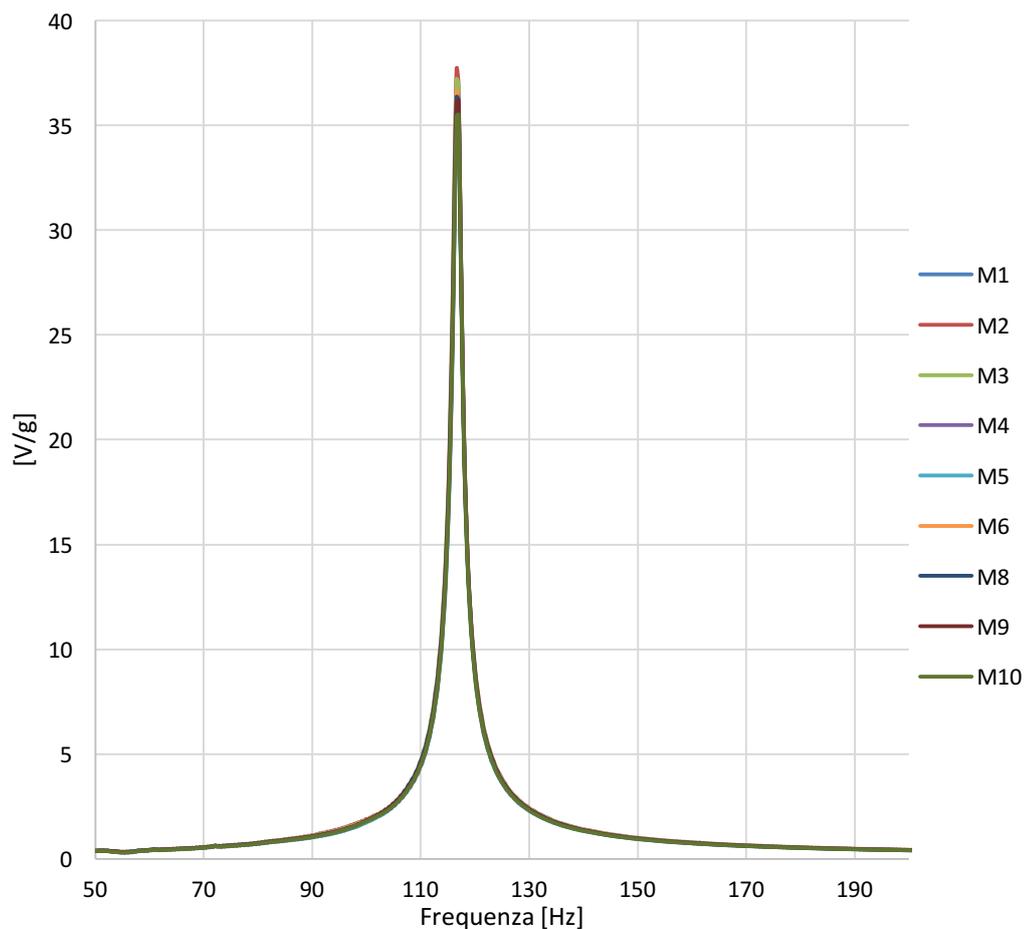


Grafico 4.11: funzione di trasferimento misurata V22BL Lunghezza massima

5. Lamina PPA 1001 Clamp 0

Misura	Accelerazione [g]	Vpp [V]	$V_{pp}/acc.$ [V/g]	Picco FRF [V/g]	Frequenza Risonanza [Hz]	Rapporto di smorzamento ζ
1	8,0	3,93	0,491	17,96	125,5	0,0082
2	7,0	3,80	0,543	17,94	125,5	0,0080
3	5,0	3,04	0,608	17,13	125,5	0,0082
4	4,0	2,53	0,633	17,82	125,5	0,0077
5	5,2	3,19	0,613	18,31	125,5	0,0074
6	5,5	3,32	0,604	18,06	125,5	0,0076
7	6,0	3,50	0,583	18,53	125,5	0,0072
8	5,9	3,34	0,566	16,60	125,5	0,0080
9	4,7	2,81	0,598	16,06	125,5	0,0081
10	5,3	3,25	0,613	15,32	125,5	0,0082

Tabella 4.13: misure effettuate PPA 1001 Clamp 0

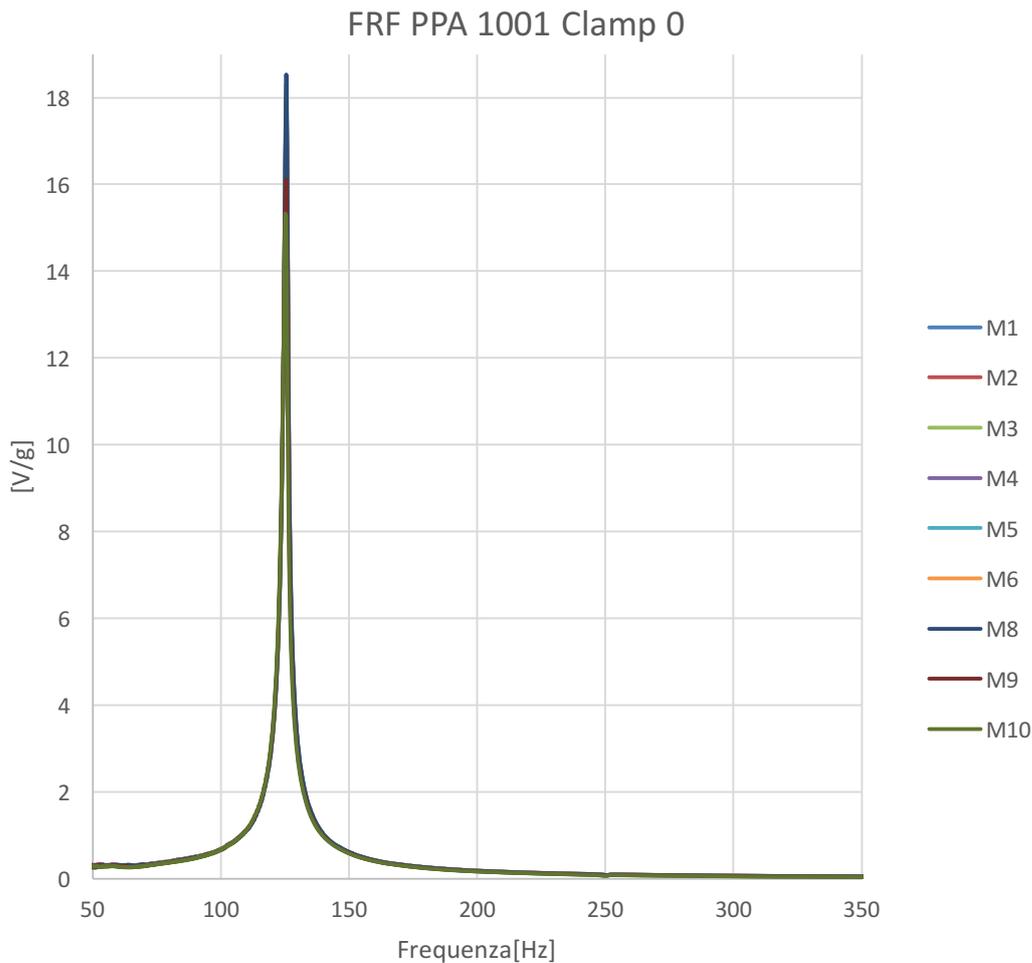


Grafico 4.12: funzione di trasferimento misurata PPA 1001 Clamp 0

Lamina PPA 1001 Clamp 6

Misura	Accelerazione [g]	V _{pp} [V]	V _{pp} /acc. [V/g]	Picco FRF [V/g]	Frequenza Risonanza [Hz]	Rapporto di smorzamento ζ
1	6,2	3,33	0,537	13,45	159,64	0,0069
2	5,6	2,95	0,527	12,92	159,64	0,0070
3	4,8	2,75	0,573	12,96	159,64	0,0070
4	6	3,20	0,533	13,98	159,64	0,0065
5	4	2,26	0,565	13,49	159,64	0,0067
6	4,5	2,59	0,576	13,44	159,64	0,0068
7	6,4	3,64	0,569	14,02	159,64	0,0067
8	8,2	4,24	0,517	12,99	159,64	0,0070
9	5,8	3,01	0,519	13,40	159,64	0,0069
10	5,9	3,10	0,525	13,40	159,64	0,0069

Tabella 4.14: misure effettuate PPA 1001 Clamp 6

FRF PPA1001 Clamp 6

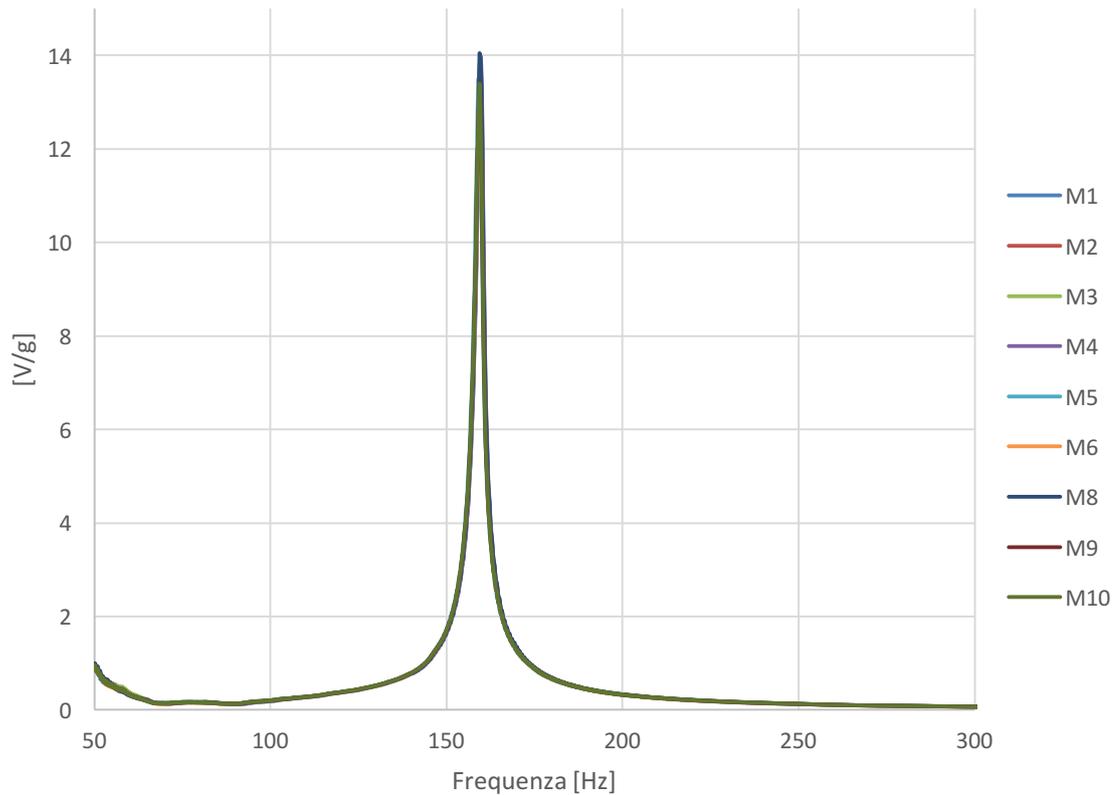


Grafico 4.13: funzione di trasferimento misurata PPA 1001 Clamp 6

Capitolo 5

Il modello numerico

5.1 Introduzione

In questo capitolo verrà presentata la modellazione agli elementi finiti degli energy harvester testati. Lo scopo di queste analisi è quello di validare un modello numerico che riesca a predire il comportamento elettro-meccanico, in modo da riuscire a determinare, date le caratteristiche geometriche delle lamine e le proprietà meccaniche dei materiali, i parametri modali, quali: frequenze di risonanza, forma delle deformate e funzioni di trasferimento.

Il software utilizzato per effettuare questo lavoro è Comsol Multiphysics 5.0, sviluppato appositamente per effettuare simulazioni multifisiche che sono richieste dal sistema sotto studio con il comportamento accoppiato elettro-meccanico.

L'analisi numerica multifisica ad elementi finiti delle travi a mensola piezoelettriche sottoposte ad una forza con variazione sinusoidale nel tempo, e aventi diversa geometria, consente di poter valutare oltre che lo stato tensionale e di deformazione della trave bimorfa anche la distribuzione della differenza di potenziale tra gli elettrodi.

Verranno effettuate tre tipologie differenti di analisi FEM per le piastre:

- Analisi delle autofrequenze
- Analisi armonica
- Analisi del transitorio

L'analisi delle autofrequenze ha lo scopo di determinare le frequenze di risonanza delle lamine piezoelettriche, una volta determinate, si effettua l'analisi armonica applicando la forzante con frequenza variabile in un range di valori intorno alla prima frequenza di risonanza. Il risultato di quest'analisi è la risposta in frequenza del sistema che sarà confrontata con quella sperimentale.

Nell'analisi del transitorio viene applicata una forza impulsiva e viene valutata la risposta al variare del tempo.

Tutte queste analisi, a parte la valutazione delle autofrequenze che per definizione calcola le frequenze naturali e i modi di vibrare considerando solo i vincoli e le proprietà

meccaniche, richiedono l'accoppiamento completo tra la fisica meccanica e la fisica elettrica del problema. Nonostante la geometria semplice, i gradi di libertà per ogni nodo del sistema agli elementi finiti sono sia meccanici che elettrici, questo comporta un aumento del carico computazionale per arrivare a soluzione del problema. Nei paragrafi che seguono verranno presentate le caratteristiche ed i risultati delle simulazioni effettuate.

5.2 I modelli FEM e la geometria delle piastre

Per ogni piastra sotto oggetto di studio sono stati costruiti dei modelli FEM con il software Comsol Multiphysics 5.0. Le piastre sono state modellate geometricamente in 3 dimensioni, sono state applicate le condizioni al contorno meccaniche ed elettriche e successivamente è stata eseguita una discretizzazione ad elementi finiti dei costituenti, dove sono stati introdotti sia gli accoppiamenti elettrici che la resistenza esterna.

Inoltre solo per le lamine V22B e V22BL sono stati costruiti anche i modelli in 2 dimensioni. Questi rappresentano una semplificazione del problema visto che non tengono conto degli effetti di bordo e dei modi di vibrare torsionale e flessionale laterale. Si è pensato di costruire i modelli 2D solo per queste due lamine dopo aver osservato che il modo torsionale di queste ha una frequenza propria elevata rispetto al primo modo di vibrare e è quindi trascurabile. Per le lamine PPA 1001 avendo una larghezza maggiore e un modo torsionale con frequenza propria molto più bassa costruire il modello 2D appare come una semplificazione non giustificata.

Verranno presentate le diverse configurazioni geometriche delle piastre modellate.

5.2.1 Modellazione e geometria della piastra V22B

È stata effettuata la modellazione della piastra V22B per le due configurazioni testate nelle prove sperimentali: la clamp line e la lunghezza massima.

Per la condizione Clamp Line il sistema di afferraggio, è posto nella zona in cui è presente il materiale piezoelettrico, la geometria di questa condizione a differenza della Lunghezza Massima non presenta il tratto iniziale di FR4 (figura 5.1 e figura 5.2).

La modellazione della V22B alla clam Line e alla lunghezza massima hanno i seguenti parametri sia per il modello 2D che per il 3D:

Grandezze	Clamp Line	Lunghezza Massima
lunghezza totale	27,5 mm	35,0 mm
lunghezza 5 strati	25,2 mm	25,4 mm
lunghezza FR4 iniziale	-	7,3 mm
lunghezza FR4 finale	2,3 mm	2,3 mm
Larghezza b	6,0 mm	6,0 mm
Larghezza bordo	1,1 mm	1,1 mm
hTot	0,81 mm	0,81 mm
Altezza strato FR4	0,18 mm	0,18 mm
Altezza strato PZT	0,18 mm	0,18 mm
Altezza Espanex	0,09 mm	0,09 mm
Load resistance	1,00E+15 Ohm	1,00E+15 Ohm
Pulse amplitude	9.81 m/s ²	9.81 m/s ²
Fattore di smorzamento isteretico	0.011	0.011

Tabella 5.1: Parametri piastra V22B

I modelli 3D delle piastre sono rappresentati in figura 5.1 2 figura 5.2:

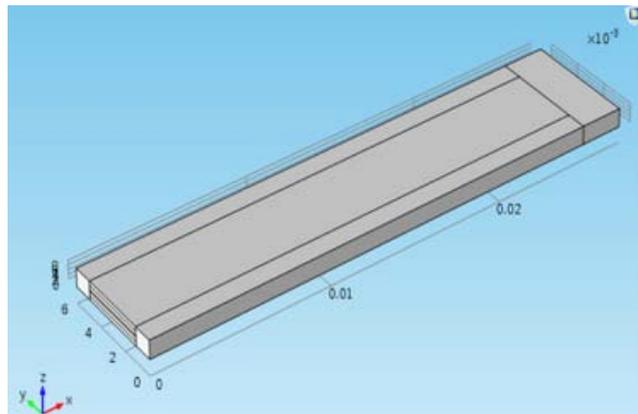


Figura 5.1: Modello 3D della V22B Clamp Line

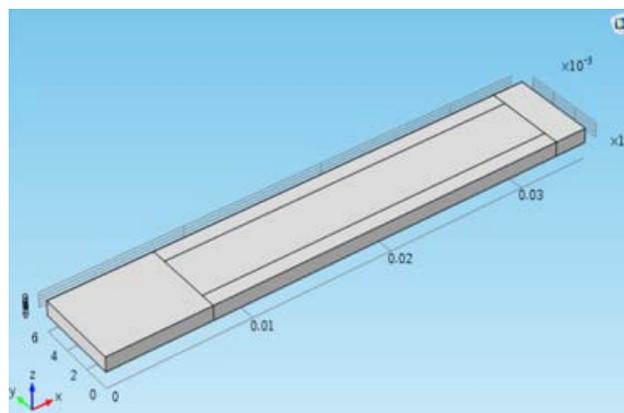


Figura 5.2: Modello 3D della V22B Lunghezza massima

5.2.2 Modellazione della piastra V22BL

Anche per la configurazione V22BL è stata effettuata la modellazione per le due configurazioni testate nelle prove sperimentali: la clamp line e la lunghezza massima.

Anche in questo caso la Clam Line non presenta il tratto iniziale di FR4.

I modelli dal punto di vista geometrico differiscono da quelli della piastra V22B solo per la lunghezza del tratto finale di FR4 che in questa piastra ha una lunghezza di 31,6 mm contro i 2,3 mm della piastra precedente.

I parametri sono i seguenti per i modelli 3D e 2D:

Grandezze	Clamp Line	Lunghezza Massima
lunghezza totale	56,8 mm	64,3 mm
lunghezza 5 strati	25,2 mm	25,4 mm
lunghezza FR4 iniziale	-	7,3 mm
lunghezza FR4 finale	31,6 mm	31,6 mm
Larghezza b	6,0 mm	6,0 mm
Larghezza bordo	1,1 mm	1,1 mm
hTot	0,81 mm	0,81 mm
Altezza strato FR4	0,18 mm	0,18 mm
Altezza strato PZT	0,18 mm	0,18 mm
Altezza Espanex	0,09 mm	0,09 mm
Load resistance	1,00E+15 Ohm	1,00E+15 Ohm
Pulse amplitude	9.81 m/s ²	9.81 m/s ²
Fattore di smorzamento isteretico	0.018	0.018

Tabella 5.2: Parametri piastra V22BL

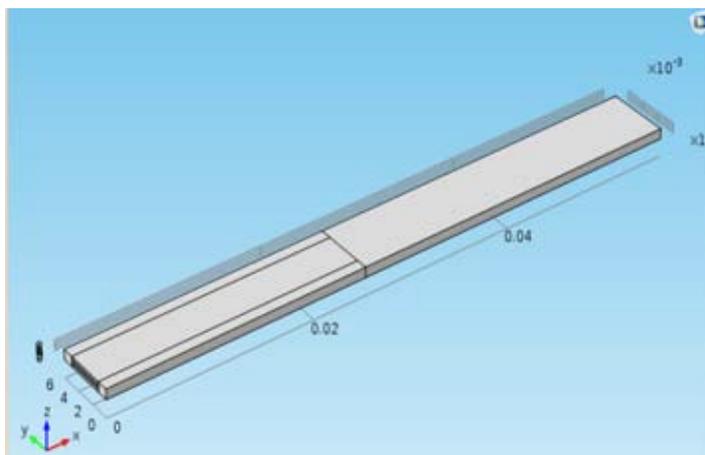


Figura 5.3: Modello 3D della V22BL Clamp Line

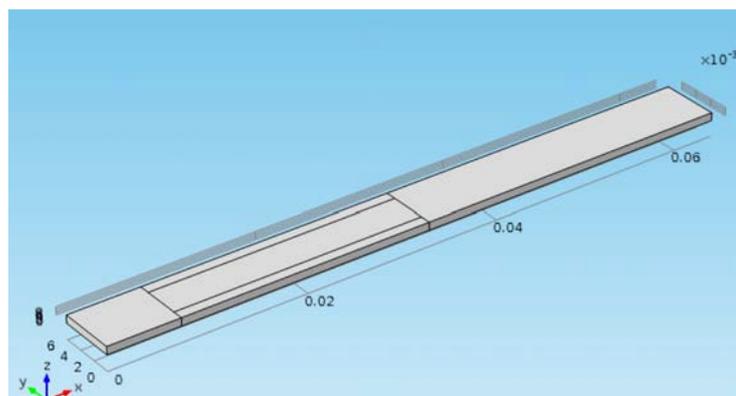


Figura 5.4: Modello 3D della V22BL Lunghezza massima

5.2.3 Modellazione della piastra PPA 1001

La piastra PPA 1001, rispetto alle altre due presenta una larghezza maggiore, questo comporta una diminuzione della frequenza di vibrare del modo torsionale, inoltre questa piastra avendo meno strati ha uno spessore minore.

Questa piastra è stata simulato solamente con il modello 3D e i parametri utilizzati sono i seguenti:

Grandezze	Clamp 0	Clamp 6
lunghezza totale	56,8 mm	64,3 mm
lunghezza 5 strati	25,2 mm	25,4 mm
lunghezza FR4 iniziale	-	7,3 mm
lunghezza FR4 finale	31,6 mm	31,6 mm
Larghezza b	6,0 mm	6,0 mm
Larghezza bordo	1,1 mm	1,1 mm
hTot	0,81 mm	0,81mm
Altezza strato FR4	0,18 mm	0,18 mm
Altezza strato PZT	0,18 mm	0,18 mm
Altezza Espanex	0,09 mm	0,09 mm
Load resistance	1,00E+15 Ohm	1,00E+15 Ohm
Pulse amplitude	9.81 m/s ²	9.81 m/s ²
Rapporto di smorzamento isteretico	0.018	0.018

Tabella 5.3: Parametri piastra PPA 1001

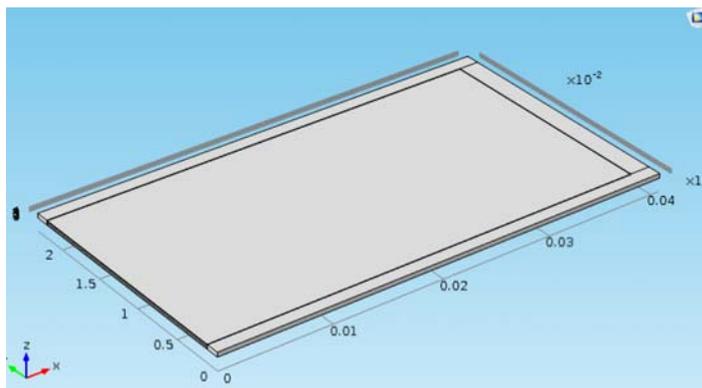


Figura 5.5: Modello 3D della PPA 1001 Clamp 0

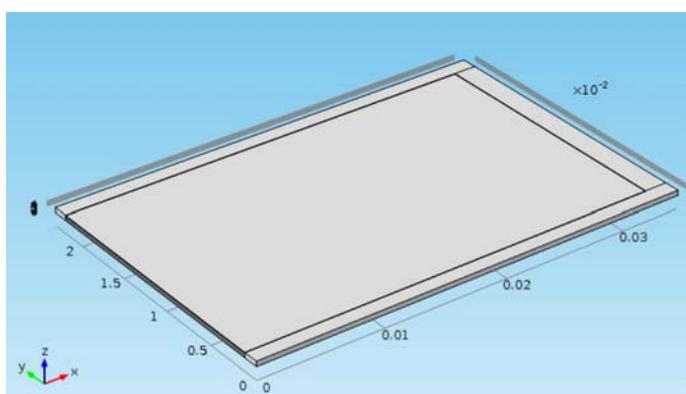


Figura 5.6: Modello 3D della PPA 1001 Clamp 6

5.3 Le condizioni al contorno elettriche e meccaniche dei modelli numerici

Dopo aver costruito la geometria per ogni piastra si sono applicate le condizioni al contorno. Queste condizioni sono sostanzialmente identiche per i tre tipi di analisi effettuate: analisi delle autofrequenze, analisi armonica, e simulazione del transitorio con ingresso impulsivo.

Per questo tipo di problema elettromeccanico il software permette di applicare le condizioni al contorno su due diverse fisiche, la fisica meccanica dei solidi, in cui si inseriscono le condizioni di vincolo e le forze applicate, e la fisica elettrostatica, in cui sono inserite le condizioni elettriche da applicare agli strati di materiale piezoelettrico.

Come condizione al contorno meccanica è stato applicato un vincolamento della base impostando lo spostamento dei nodi della base nullo. Questa condizione rispecchia quella di un incastro perfetto.

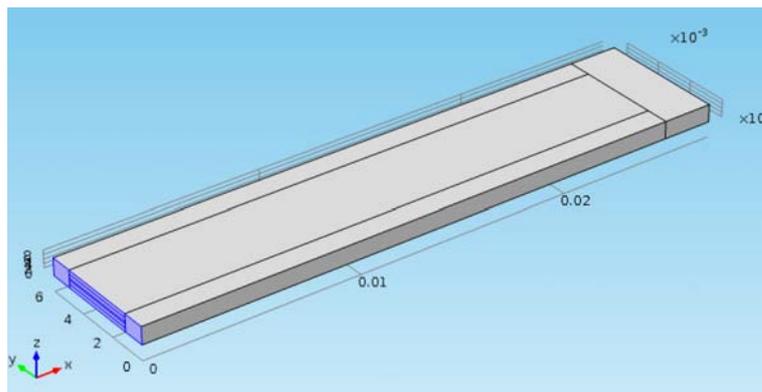


Figura 5.7: modellazione 3D della piastra V22B Clamping Line con evidenziate le superfici sulle quali è applicato il vincolo.

I vari strati del materiale si sono modellati come perfettamente aderenti.

Nell'analisi armonica è applicata una forza distribuita su tutto il volume sinusoidale pari all'accelerazione alla base moltiplicata per la densità dei materiali che compongono la piastra. L'utilizzo di questo metodo di eccitazione, tenendo la base fissa, è dovuto al fatto che il programma impiegato non supporta l'immissione diretta di un'accelerazione sinusoidale alla base. È stato necessario, quindi, applicare il vincolo di incastro alla base ed applicare una forza armonica distribuita sul volume pari alla forza d'inerzia che si avrebbe eccitando sinusoidalmente la base.

Nell'analisi armonica è stato utilizzato un modello di smorzamento isteretico con valore del fattore di smorzamento isteretico η costante per tutti i materiali e pari allo smorzamento complessivo misurato nelle prove sperimentali.

Nell'Appendice C è spiegato che il valore di η è pari a due volte il rapporto di smorzamento ζ viscoso ricavato dalle misure sperimentali.

Nell'analisi del transitorio invece si è voluto replicare le condizioni a cui sono sottoposte le piastre durante la misura sperimentale. Queste vengono eccitate con una forza di volume impulsiva della durata di 3 ms e di ampiezza unitaria. L'analisi ha una durata pari a 10 volte l'eccitazione quindi di 30 ms e il time stepping impostato tra una simulazione e la successiva è di 0,05ms.

Le condizioni elettrostatiche, valide sia per l'analisi armonica che per il transitorio, applicate ai materiali piezoelettrici per le piastre bimorfe V22B e V22BL sono elencate nel seguito. Alla superficie inferiore dello strato piezoelettrico inferiore è assegnata la condizione di messa a terra. I due strati piezoelettrici sono collegati in serie tramite la

condizione di potenziale fluttuante, questa è applicata nella superficie superiore dello strato inferiore e nella superficie inferiore dello strato superiore (figura), la condizione di potenziale fluttuante impone che le due superfici siano equipotenziali ed è esattamente come se fossero collegate da un cortocircuito.

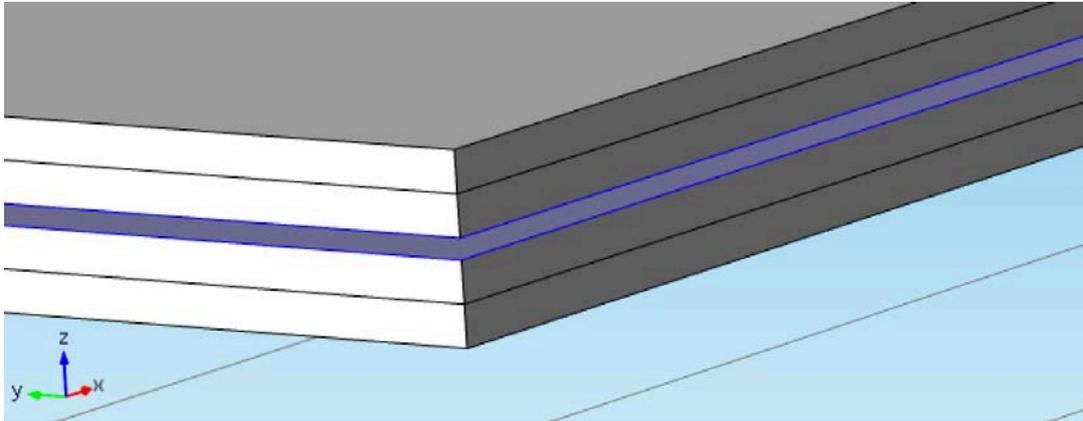


Figura 5.8: Superfici su cui è applicata la condizione di potenziale fluttuante

Nella superficie superiore dello strato piezoelettrico superiore è applicata la condizione di terminale che permette di collegare lo strato alla resistenza esterna modellata nella fisica circuito elettrico.

Alla resistenza esterna è assegnato per tutte le simulazioni un valore molto elevato pari a $1 \times 10^{15} \Omega$, questo valore vuole rispecchiare la condizione di circuito aperto che si raggiunge con una resistenza tendente all'infinito.

Al materiale dei due strati è assegnata una direzione di polarizzazione con verso opposto applicando al materiale dello strato inferiore come riferimento un sistema di assi cartesiani ruotato di 180° attorno all'asse y rispetto al sistema generale.

Per la piastra unimorfa le condizioni al contorno elettrostatiche sono molto più semplici visto che è presente un unico strato di materiale piezoelettrico. A questo strato è applicata nella superficie inferiore la condizione di terra e nella superficie superiore la condizione di terminale che la collega alla resistenza esterna come nelle piastre bimorfe.

5.4 I materiali

I materiali utilizzati per le piastre V22B e V22BL sono i seguenti:

- FR4: parte iniziale e finale della piastra, nei bordi e per gli strati esterni della parte centrale
- PZT 5A: strati intermedi della parte centrale
- Espanex: strato in mezzeria della parte centrale in corrispondenza dell'asse neutro

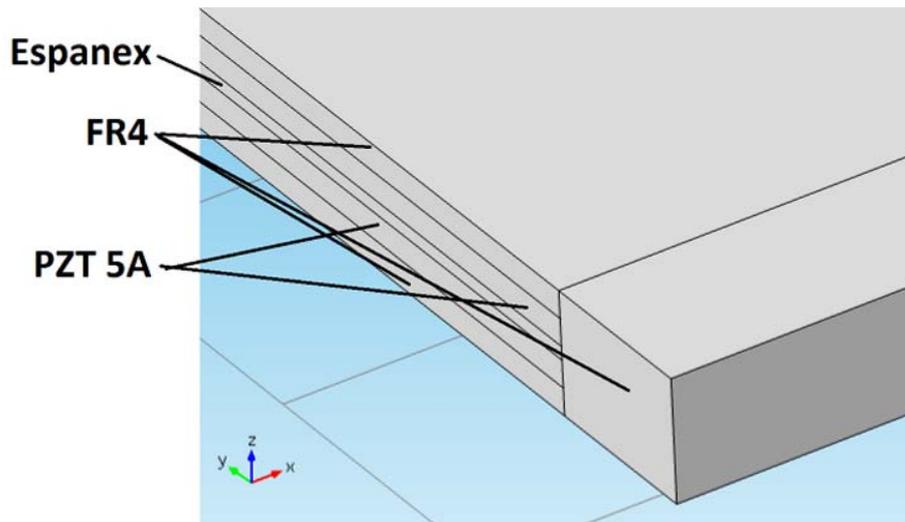


Figura 5.9: rappresentazione dei vari materiali assegnati ai rispettivi domini nella V22B e V22BL

Per l'FR4 e l'espanex è stato utilizzato un modello di materiale lineare isotropo con le seguenti proprietà:

Materiali	Modulo Young E	Coeff. Poisson ν	Densità ρ
<i>FR4</i>	22 GPa	0.3	1920 Kg/m ³
<i>Espanex</i>	3.2 GPa	0.34	1300 Kg/m ³

Tabella 5.4: proprietà materiali cantilever V22B e V22BL

Il PZT 5A invece è modellato come ortotropo trasversalmente isotropo, le sue proprietà presentano una simmetria rispetto all'asse di polarizzazione.

Le costanti inserite nel modello sono in accordo con quelle fornite nel datasheet del prodotto e sono:

- Permittività relativa, $\epsilon^T = \begin{bmatrix} 1730 & 0 & 0 \\ 0 & 1730 & 0 \\ 0 & 0 & 1900 \end{bmatrix}$

- Coefficiente di accoppiamento piezoelettrico, d^{ET} [C/N]:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5,84 \times 10^{-10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5,84 \times 10^{-10} & 0 & 0 \\ -1,71 \times 10^{-10} & -1,71 \times 10^{-10} & 3,74 \times 10^{-10} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matrice di cedevolezza del materiale, S_E [1/Pa]:

$$\begin{bmatrix} 1,64 \times 10^{-11} & 5,74 \times 10^{-12} & -7,22 \times 10^{-12} & 0 & 0 & 0 \\ 5,74 \times 10^{-12} & 1,88 \times 10^{-11} & -7,22 \times 10^{-12} & 0 & 0 & 0 \\ -7,22 \times 10^{-12} & -7,22 \times 10^{-12} & 1,88 \times 10^{-11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4,75 \times 10^{-11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4,75 \times 10^{-11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4,43 \times 10^{-11} \end{bmatrix}$$

- Densità $\rho = 7800 \text{ Kg}/\text{m}^3$

I materiali utilizzati per la PPA 1001 sono i seguenti:

- Polyester: strato superiore e bordo
- Rame: secondo strato partendo dall'alto
- PZT 5H: strato centale
- Acciaio AISI 304: secondo strato dal basso
- Polymide: strato inferiore

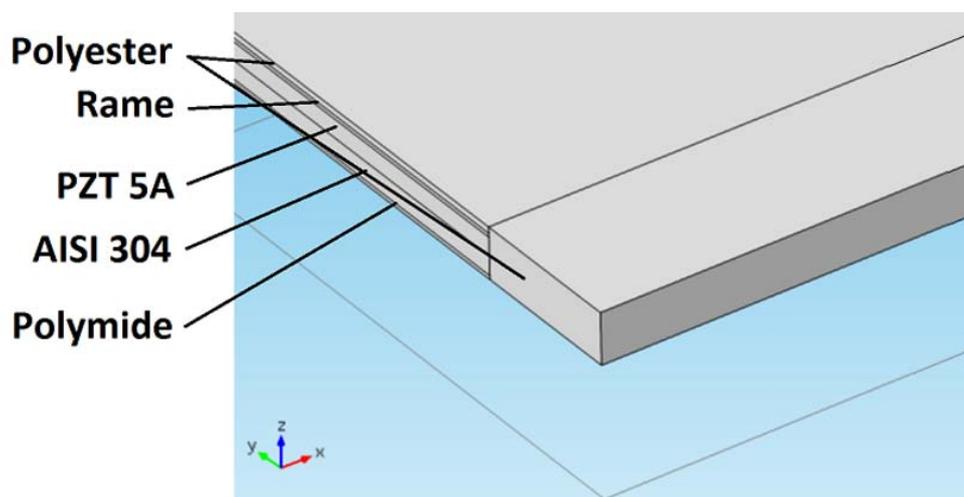


Figura 5.10: rappresentazione dei vari materiali assegnati ai rispettivi domini nella PPA 1001

Per il polyester, il rame, l'acciaio AISI 304 e il polymide è stato utilizzato un modello di materiale lineare isotropo con le seguenti proprietà:

Materiali	Modulo Young E	Coeff. Poisson ν	Densità ρ
Polyester	3.65 GPa	0.48	1380 Kg/m ³
Rame	110 GPa	0.34	1300 Kg/m ³
Acciaio AISI 304	193 GPa	0.29	8000 Kg/m ³
Polymide	4.1 GPa	0.34	1410 Kg/m ³

Tabella 5.5: proprietà materiali cantilever PPA 1001

Il PZT 5H invece è modellato come ortotropo trasversalmente isotropo:

Le costanti inserite nel modello sono in accordo con quelle fornite nel datasheet del prodotto e sono:

- Permittività relativa, $\varepsilon^T = \begin{bmatrix} 3130 & 0 & 0 \\ 0 & 3130 & 0 \\ 0 & 0 & 3800 \end{bmatrix}$

- Coefficiente di accoppiamento piezoelettrico, d^{ET} [C/N]:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 7.41 \times 10^{-10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7.41 \times 10^{-10} & 0 & 0 \\ -2.74 \times 10^{-10} & -2.74 \times 10^{-10} & 5.93 \times 10^{-10} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Matrice di cedevolezza del materiale, S_E [1/Pa]:

$$\begin{bmatrix} 1.65 \times 10^{-11} & -4.78 \times 10^{-12} & 8.45 \times 10^{-12} & 0 & 0 & 0 \\ -4.78 \times 10^{-12} & 1.65 \times 10^{-11} & -8.45 \times 10^{-12} & 0 & 0 & 0 \\ -8.45 \times 10^{-12} & -8.45 \times 10^{-12} & 2.07 \times 10^{-11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4.35 \times 10^{-11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.35 \times 10^{-11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4.26 \times 10^{-11} \end{bmatrix}$$

- Densità $\rho = 7800 \text{ Kg/m}^3$

5.5 La mesh

Per tutte le tipologie di modelli, è stata costruita una mesh con il comando ‘mapped’ in modo da avere elementi con forma di parallelepipedo. Le dimensioni sono controllate tramite il comando ‘distribuzione’, e sono state scelte imponendo almeno cinque elementi sullo spessore di ciascuno degli strati piezoelettrici.

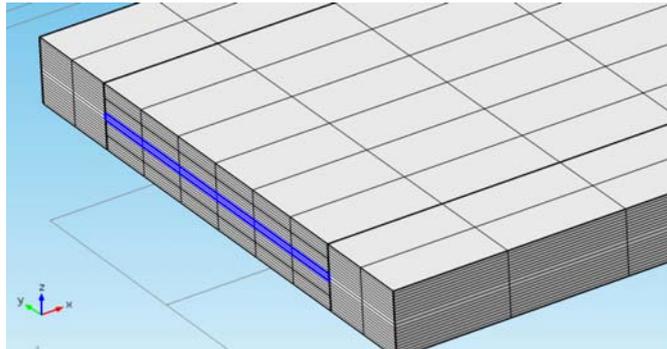


Figura 5.11: Particolare della mesh, l’elevata discretizzazione nello spessore degli strati piezoelettrici. È importante, infatti, avere un elevato numero di elementi sullo spessore poiché il gradiente del campo elettrico è rivolto nella direzione perpendicolare agli elettrodi, quindi nella direzione dello spessore.

Nella direzione della lunghezza si è discretizzato con 25÷30 elementi a seconda del tipo di piastra, questi sono sufficienti a individuare i primi cinque modi di vibrare della trave con una buona accuratezza.

Il numero di elementi è stato verificato eseguendo un miglioramento della mesh e verificando che i risultati andassero a convergere in modo da avere un’ottimizzazione tra la necessità di ottenere la convergenza della soluzione e l’obiettivo di contenere il tempo complessivo del calcolo.

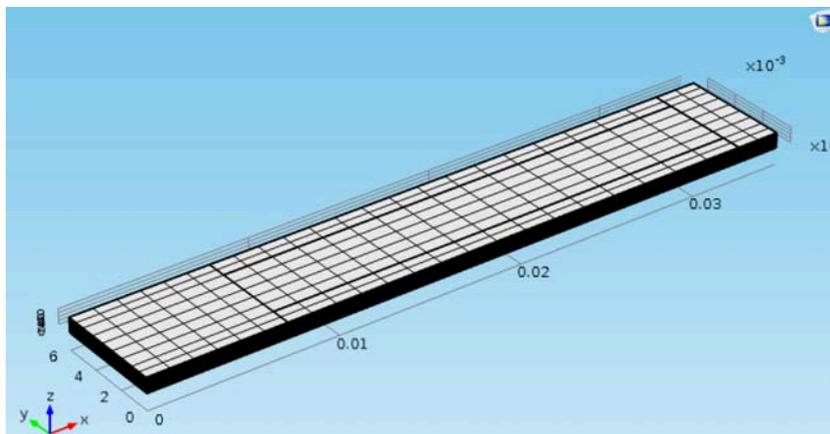


Figura 5.12: discretizzazione di 25 elementi sulla lunghezza

Capitolo 6

I risultati della simulazione FEM e la validazione sperimentale

6.1 Introduzione

Questo capitolo è dedicato ai risultati delle simulazione FEM effettuate. In particolare sono proposti:

- i modi di vibrare delle lamine ricavate dall'analisi delle autofrequenze,
- i confronti tra le funzioni di trasferimento, FRF, ricavate dall'analisi FEM armonica nel dominio delle frequenze con le FRF misurate sperimentalmente,
- i confronti tra l'andamento temporale della tensione ai capi degli elettrodi ottenuta dall'analisi FEM del transitorio con la tensione misurata sperimentalmente.

Sono inoltre descritti degli studi effettuati per valutare l'effetto della rigidità del vincolo e l'effetto della lunghezza libera di vibrare sul primo modo di vibrare.

6.2 I risultati dell'analisi delle autofrequenze

L'analisi delle autofrequenze consente di ricavare informazioni utili sul comportamento dinamico della struttura, come i modi propri e le forme modali. Nel caso dello studio delle travi piezoelettriche, il primo modo di vibrare è detto fondamentale in quanto è quello che viene eccitato alla frequenza più bassa caratteristica del sistema. Esso genera spostamenti maggiori della struttura rispetto ai modi propri superiori e quindi anche deformazioni interne maggiori del materiale. Nel primo modo di vibrare, che è quello flessionale, la deformata della trave è senza nodi e gli strati di materiale piezoelettrico si deformano nella stessa direzione per tutta la loro lunghezza. Quindi ogni strato di materiale piezoelettrico genera tensione con lo stesso segno per tutta la sua lunghezza e nel modo 31, che è quella ottimale per il tipo di polarizzazione utilizzato.

Per l'analisi delle autofrequenze è stato preso in considerazione solamente il puro comportamento meccanico della struttura, non considerando i gradi di libertà elettrici. I risultati ottenuti per il primo modo sono un riferimento per la successiva analisi armonica, che presenterà una frequenza di risonanza leggermente maggiore, poiché calcolata con la condizione di circuito aperto ($R_{ext} = +\infty$). Nell'analisi delle autofrequenze non considerare i g.d.l. elettrostatici equivale ad avere una condizione di cortocircuito ($R_{ext} = 0$) e quindi $E = 0$ nella (2.6) che implica una minor rigidità del materiale.

I risultati dell'analisi delle autofrequenze sono riassunti nelle seguenti tabelle.

Tabella 6.1: modi propri di vibrare della V22B vincolata alla clamping line

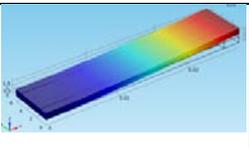
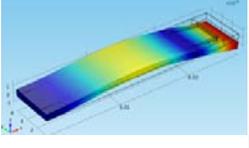
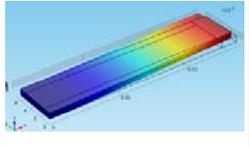
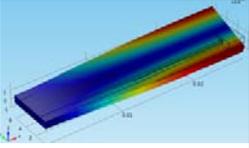
Tipo di lamina e configurazione	modo di vibrare	2D	3D	
		Frequenza	Frequenza	Forma
V22B Clamp Line L=27.5 mm	1° Flessionale	479.7 [Hz]	513.9 [Hz]	
	2° Flessionale	2937 [Hz]	3160 [Hz]	
	Flessione laterale	- [Hz]	3643 [Hz]	
	Torsionale	- [Hz]	4949 [Hz]	

Tabella 6.2: modi propri di vibrare della V22B vincolata alla lunghezza massima

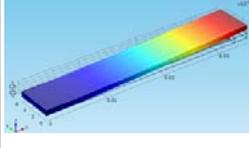
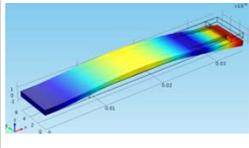
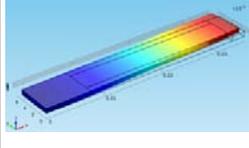
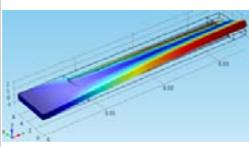
Tipo di lamina e configurazione	modo di vibrare	2D	3D	
		Frequenza	Frequenza	Forma
V22B Lunghezza massima L= 35.0 mm	1° Flessionale	267.6 [Hz]	294.4 [Hz]	
	2° Flessionale	1758 [Hz]	1897 [Hz]	
	Flessione laterale	- [Hz]	2120 [Hz]	
	Torsionale	- [Hz]	3728 [Hz]	

Tabella 6.3: modi propri di vibrare della V22BL vincolata alla clamping line

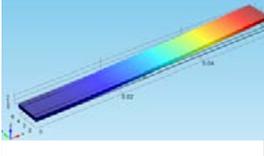
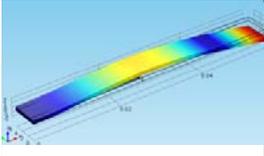
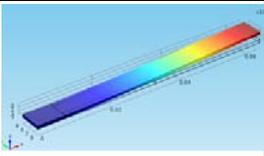
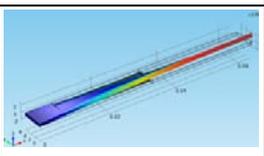
Tipo di lamina e configurazione	modo di vibrare	2D	3D	
		Frequenza	Frequenza	Forma
V22BL Clamp line L= 56.8 mm	1° Flessionale	151.8 [Hz]	148.1 [Hz]	
	2° Flessionale	766.9 [Hz]	803.8 [Hz]	
	Flessione laterale	- [Hz]	1076 [Hz]	
	Torsionale	- [Hz]	2530 [Hz]	

Tabella 6.4: modi propri di vibrare della V22B vincolata alla lunghezza massima

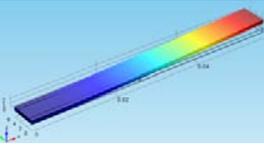
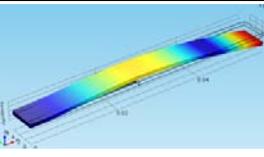
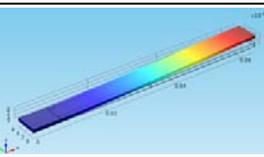
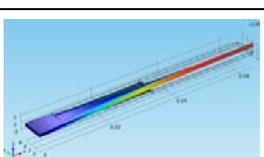
Tipo di lamina e configurazione	modo di vibrare	2D	3D	
		Frequenza	Frequenza	Forma
V22BL Lunghezza massima L= 64.3 mm	1° Flessionale	111.2 [Hz]	110.5 [Hz]	
	2° Flessionale	560.7 [Hz]	594.6 [Hz]	
	Flessione laterale	- [Hz]	806,6 [Hz]	
	Torsionale	- [Hz]	2188 [Hz]	

Tabella 6.5: modi propri di vibrare della PPA 1001 vincolata alla clamp 0

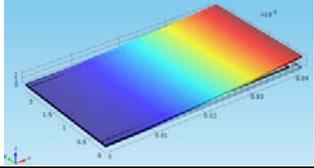
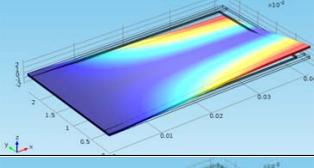
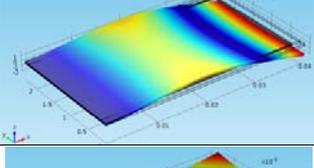
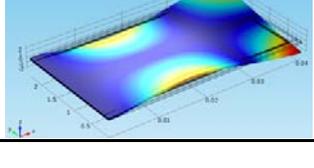
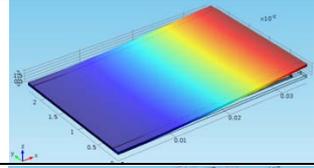
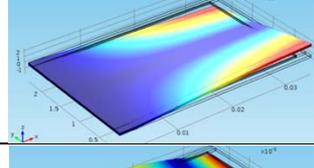
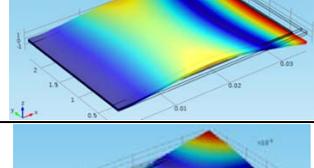
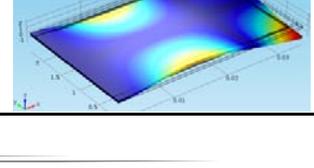
Tipo di lamina	Configurazione	Modo di vibrare	3D	
			FREQUENZA	FORMA
PPA 1001	Clamp 0 L=40.8 mm	1° Flessionale	124.5 [Hz]	
		Torsionale	508.6 [Hz]	
		2° Flessionale	774.2 [Hz]	
		Modo misto	1658 [Hz]	

Tabella 6.6: modi propri di vibrare della PPA 1001 vincolata alla clamp 6

Tipo di lamina	Configurazione	modo di vibrare	3D	
			FREQUENZA	FORMA
PPA 1001	Clamp 6 L=34.8 mm	1° Flessionale	160.1 [Hz]	
		Torsionale	587.1 [Hz]	
		2° Flessionale	992.9 [Hz]	
		Modo misto	1939 [Hz]	

6.3 I risultati dell'analisi armonica e del transitorio

La simulazione armonica, effettuata su una banda di frequenza intorno alla prima frequenza di risonanza per ciascuna configurazione di piastra, è importante poiché permette di dare un giudizio al modello numerico elettro-meccanico.

Le frequenze di riferimento per analisi armonica ricavate dall'analisi delle autofrequenze sono riassunte nella tabella 6.7:

Configurazione	Frequenza del 1° modo 2D [Hz]	Frequenza del 1° modo 3D [Hz]
V22B Clamp line	479.7	513.9
V22B lunghezza massima	267.6	294.4
V22BL Clamp line	151.8	148.1
V22BL lunghezza massima	111.2	110.5
PPA 1001 Clamp 0	-	124.5
PPA 1001 Clamp 6	-	160.1

Tabella 6.7: frequenze del 1° modo di vibrare dall'analisi delle autofrequenze

Il confronto tra i risultati della simulazione e i dati misurati viene fatto sulla funzione di trasferimento della tensione generata dall'harvester sull'accelerazione alla base. Questa funzione di trasferimento permette di valutare più parametri di confronto come la frequenza del primo modo di vibrare, che è individuata dal punto in cui c'è il picco, lo smorzamento, legato alla forma della FRF e al valore picco stesso, e il comportamento elettro-meccanico.

Un altro confronto che permette di valutare le analisi FEM è quello tra l'andamento della tensione temporale calcolato con la simulazione del transitorio e l'andamento misurato sperimentalmente. Solo per la piastra V22B Clamp line sono riportati anche i risultati del modello analitico. Per le ipotesi a cui deve sottostare, il modello analitico è applicabile solamente a questa configurazione di lamina, infatti nella V22B Clamp line tutta la lunghezza libera di vibrare è composta dalla parte bimorfa ad eccezione di un piccolo bordo finale. Non è applicabile alla V22B lunghezza massima e V22BL poiché il modello non tiene in considerazione il tratto iniziale e finale di FR4, mentre non è applicabile alla PPA 1001 poiché è unimorfa. Verranno ora presentati i risultati della simulazione armonica e del transitorio confrontati con i dati delle misure effettuate per tutte le configurazioni di lamine prese in esame.

1. V22B Clamp Line

	Freq. Ris. [Hz]	Errore Freq.[Hz]	Errore Freq. %	Picco FRF [V/g]	Errore P.FRF [V/g]	Errore %
Misura media	496,0			11,14		
Modello Analitico	496,6	0,6	0,1	10,88	0,26	2,3
FEM 3D	521,7	25,7	5,2	12,08	0,94	8,4
FEM 2D	488,5	7,5	1,5	10,36	0,79	7,2

Tabella 6.8: confronto dei risultati V22B Clamp line

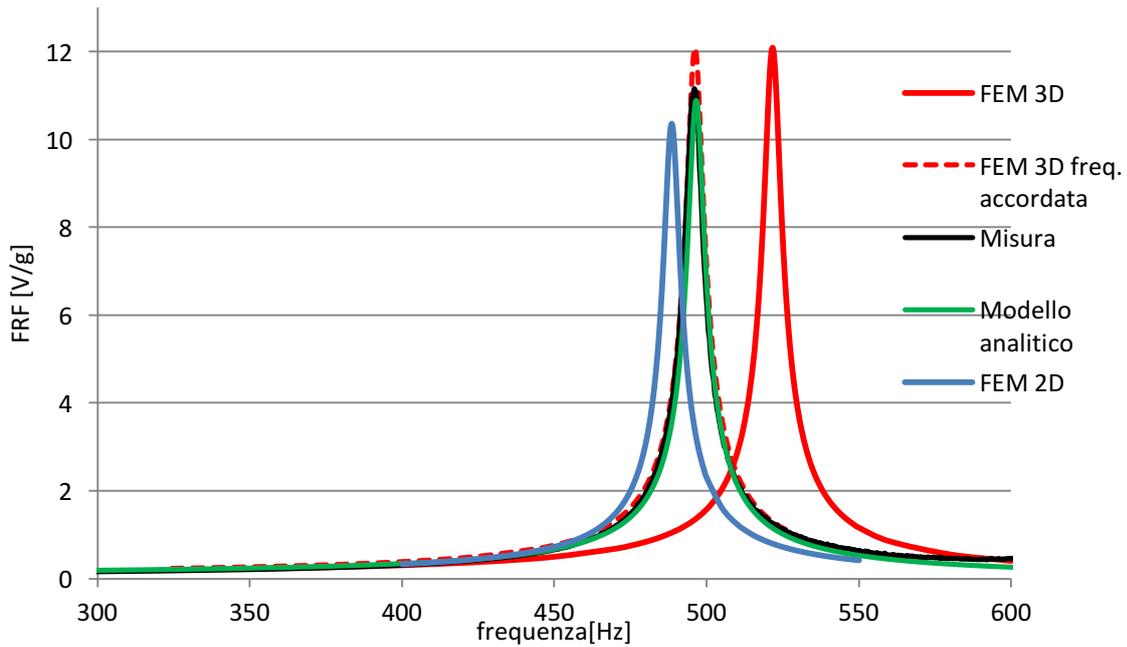


Grafico 6.1: funzione di trasferimento V22B Clamp line

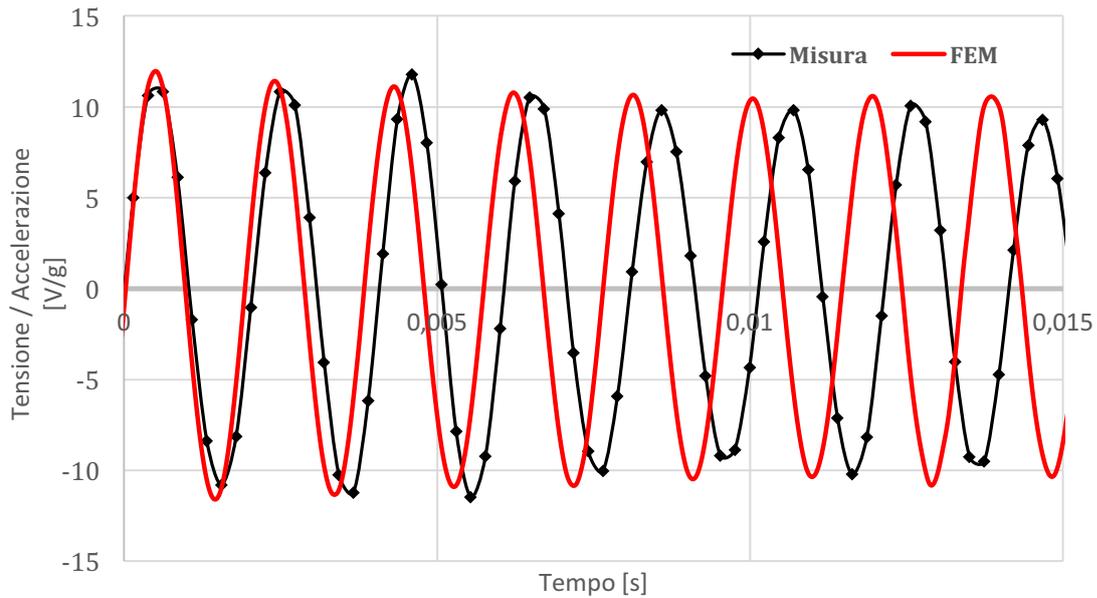


Grafico 6.2: andamento della tensione V22B Clamp line

2. V22B Lunghezza massima

	Freq. Ris.[Hz]	Errore Freq. [Hz]	Errore Freq. %	Picco FRF [V/g]	Errore P.FRF [V/g]	Errore %
Misura media	270,58			11,52		
FEM 3D	295,70	25,12	9,28	12,33	0,81	7,03
FEM 2D	269,00	1,58	0,58	11,79	0,54	4,67

Tabella 6.9 confronto dei risultati V22B lunghezza massima

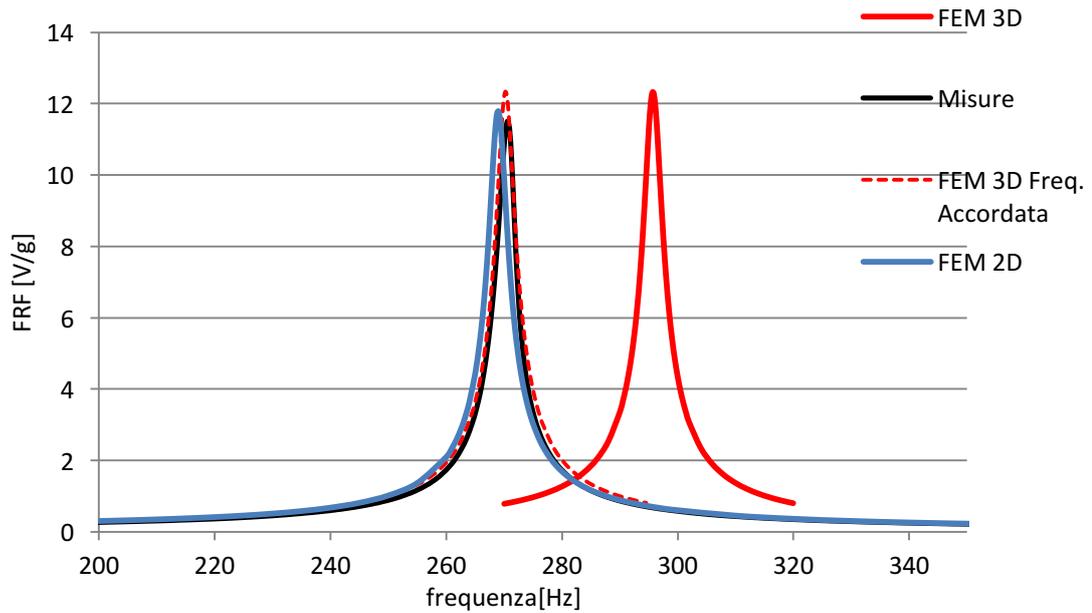


Grafico 6.3: funzione di trasferimento V22B lunghezza massima

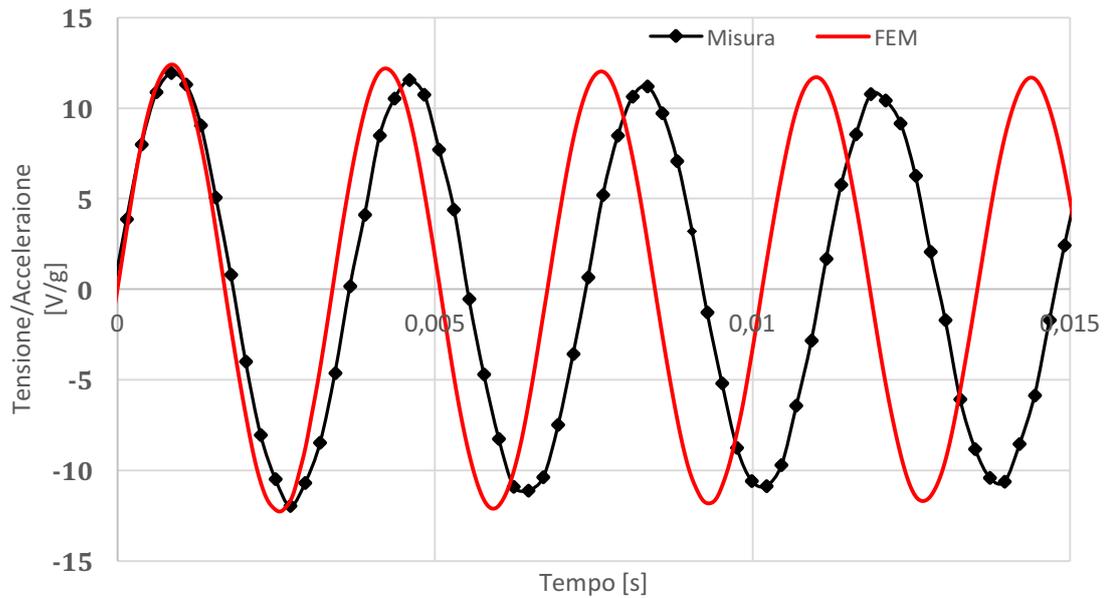


Grafico 6.4: andamento della tensione V22B lunghezza massima

3. V22BL Clamp line

	Freq. Ris.[Hz]	Errore Freq. [Hz]	Errore Freq. %	Picco FRF[V/g]	Errore P.FRF [V/g]	Errore%
Misura Media	151,10			25,06		
FEM 3D	150,70	0,40	0,26	31,83	6,77	21,28
FEM 2D	155,30	4,2	2,78	24,94	0,12	0,48

Tabella 6.10: confronto dei risultati V22BL Clamp line

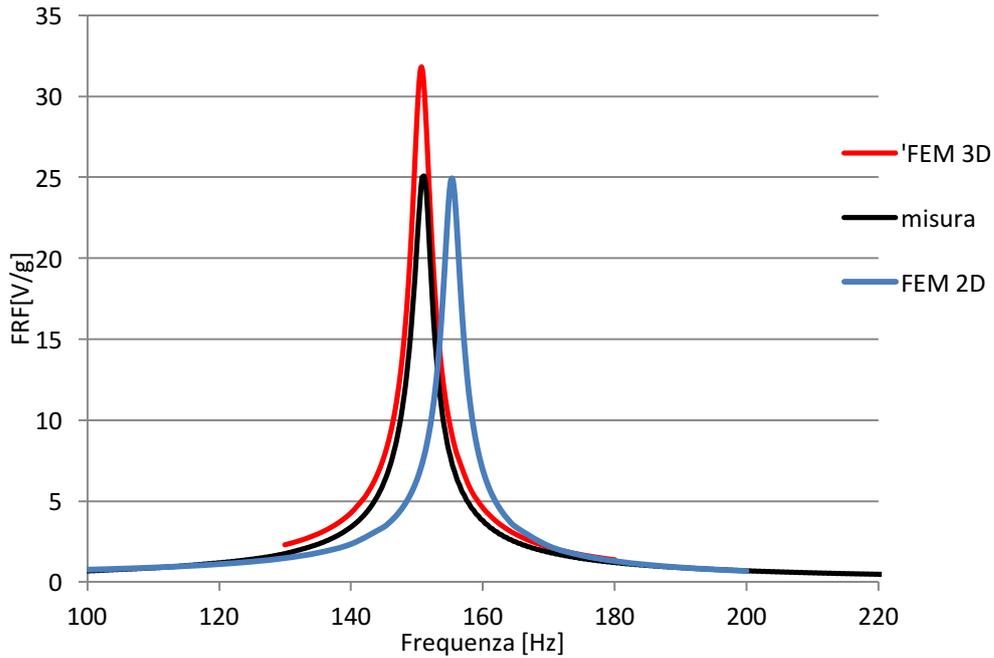


Grafico 6.5: funzione di trasferimento V22BL Clamp line

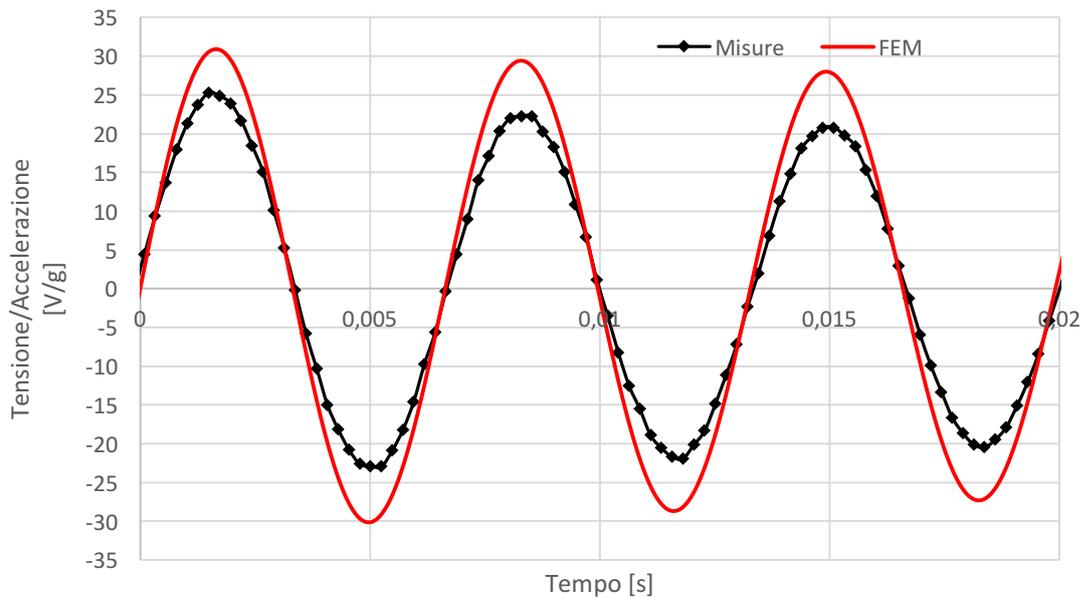


Grafico 6.6: andamento della tensione V22BL Clamp line

4. V22BL Lunghezza massima

	Freq. Ris. [Hz]	Errore Freq. [Hz]	Errore Freq. %	Picco FRF [V/g]	Errore P.FRF [V/g]	Errore %
Misura Media	116,6			36,32		
FEM 3D	111,4	5,2	4,5	35,19	1,1	3,2
FEM 2D	119,3	2,7	2,3	30,013403	6,3	17,4

Tabella 6.11 confronto risultati V22BL Lunghezza massima

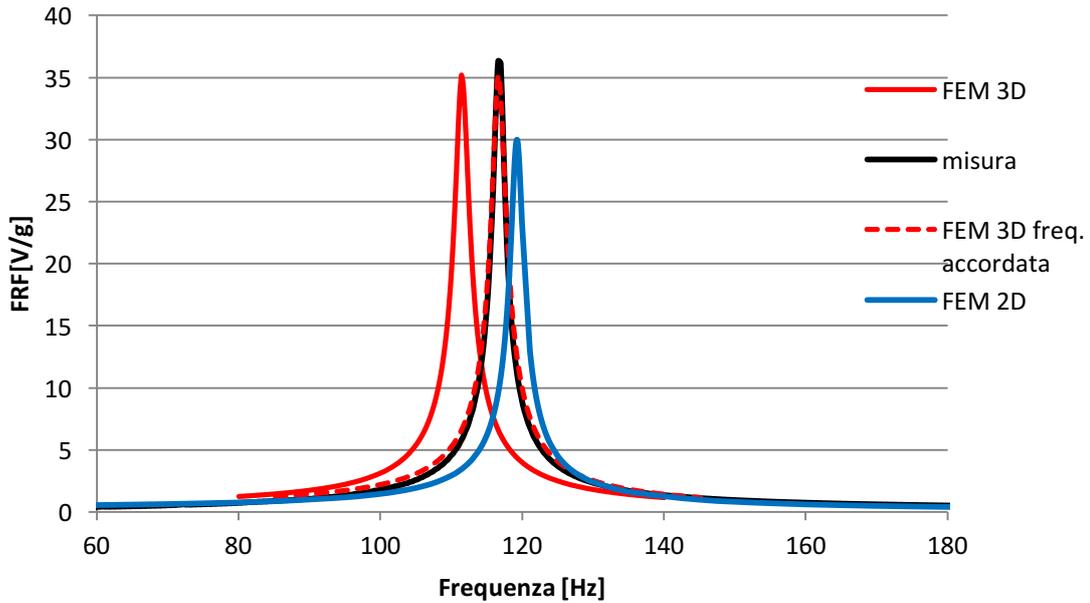


Grafico 6.7: funzione di trasferimento V22BL Lunghezza massima

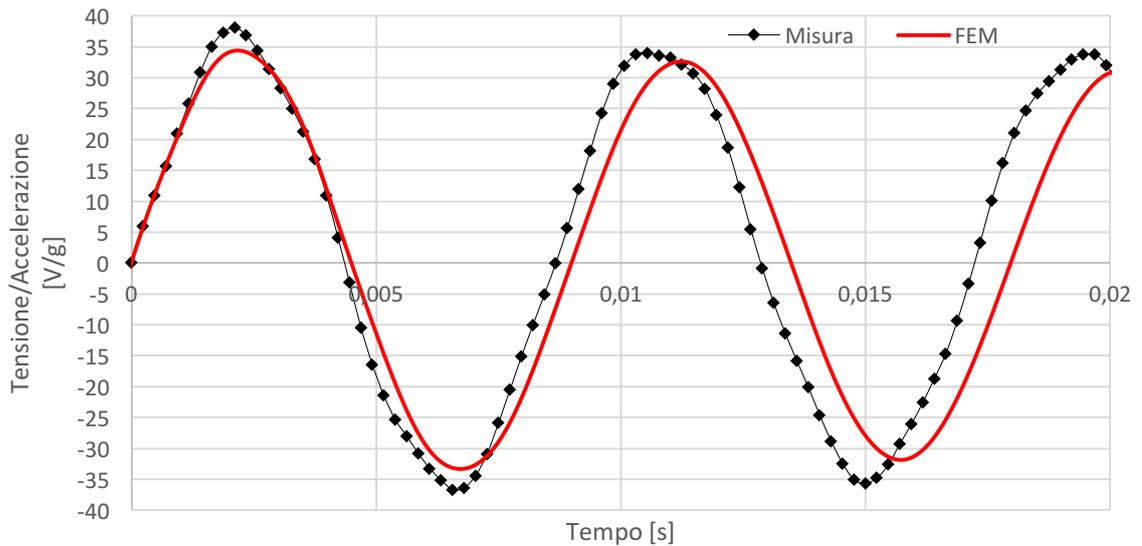
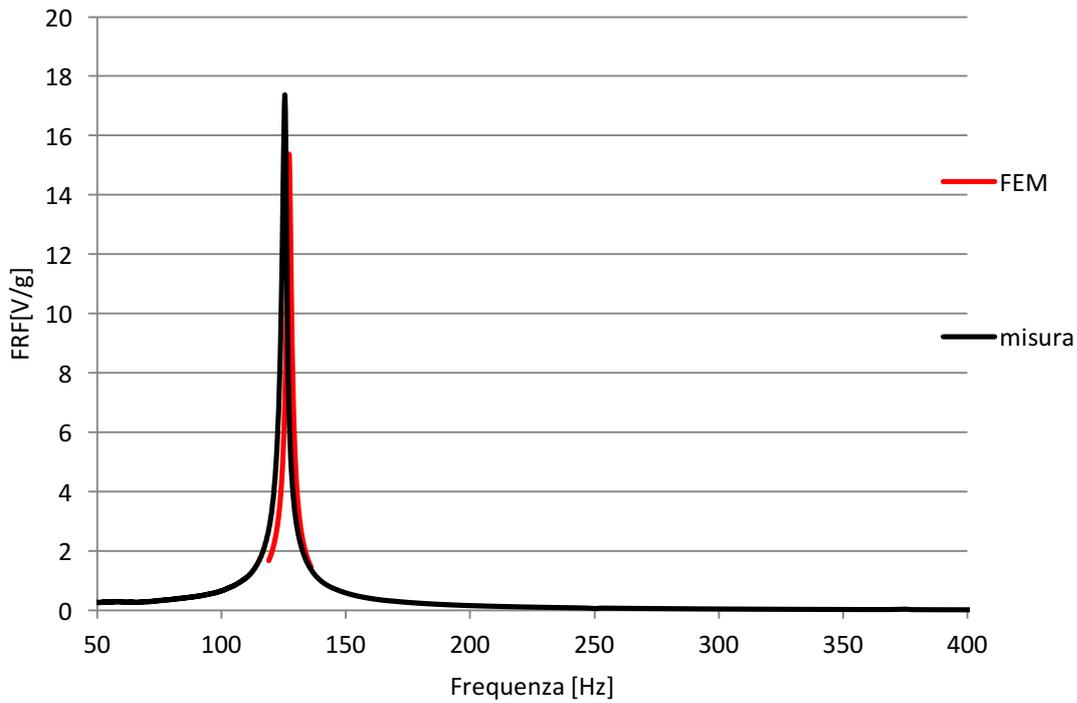


Grafico 6.8: andamento tensione V22BL Lunghezza massima

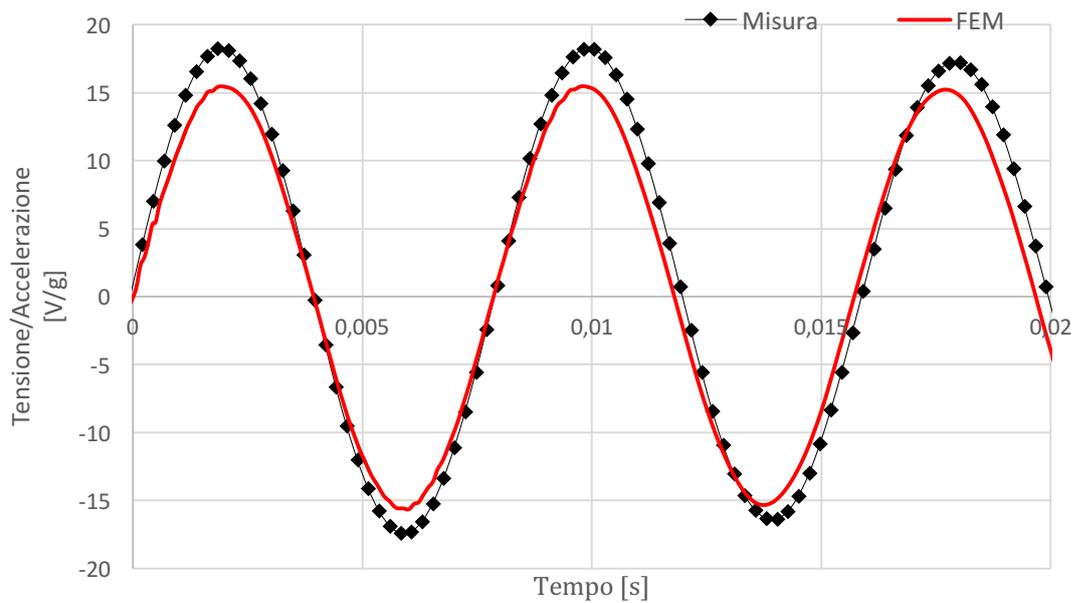
5. PPA 1001 Clamp 0

	Freq. Ris. [Hz]	Errore Freq. [Hz]	Errore Freq. %	Picco FRF [V/g]	Errore P.FRF [V/g]	Errore%
Misura media	125,5	1,6	1,3	17,4	2,0	12,9
FEM 3D	127,1			15,4		

Tabella 6.12: confronto risultati PPA 1001 Clamp 0



Grapho 6.9: funzione di trasferimento PPA 1001 Clamp 0



Grapho 6.10: andamento tensione PPA 1001 Clamp 0

6. PPA 1001 Clamp 6

	Freq. Ris. [Hz]	Errore Freq. [Hz]	Errore Freq. %	Picco FRF [V/g]	Errore P.FRf [V/g]	Errore%
Misura media	159,3	3,8	2,4	13,3	0,5	3,9
FEM 3D	163,0			31,8		

Tabella 6.13: confronto risultati PPA 1001 Clamp 6

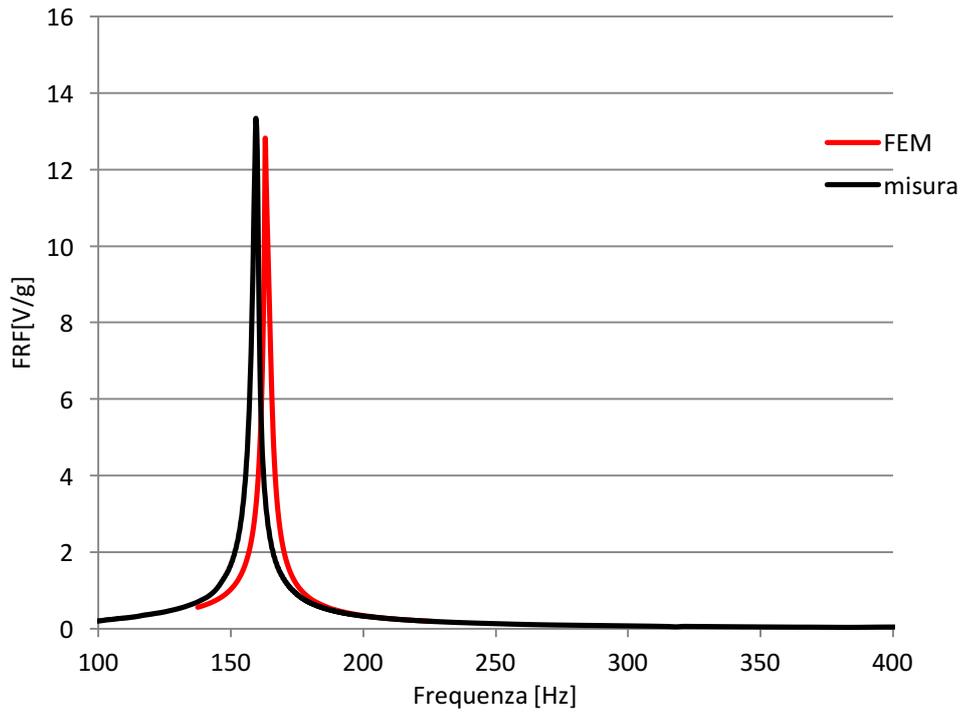


Grafico 6.11: funzione di trasferimento PPA 1001 Clamp 6

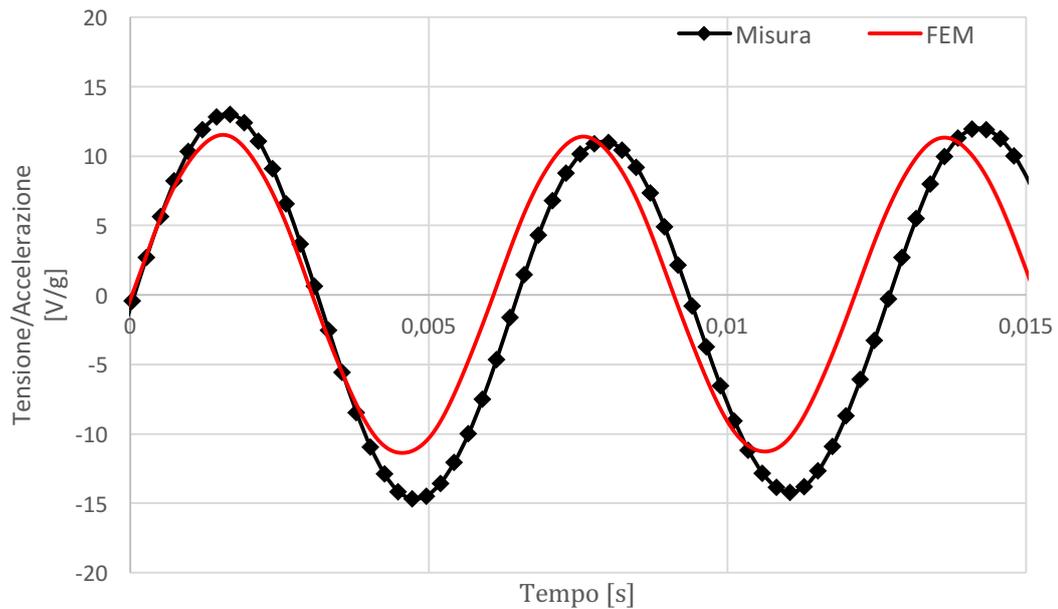


Grafico 6.12: andamento tensione PPA 1001 Clamp 6

I risultati riportati nelle pagine precedenti mostrano che tra i modelli FEM e le misure sperimentali è presente un buon accordo.

Per la lamina V22B si osservano delle differenze nel valore della frequenza di risonanza tra i risultati dell'analisi FEM 3D e delle misure sia per la configurazione clamp line che per lunghezza massima (grafico 6.1 e grafico 6.3). Infatti il modello FEM 3D sovrastima la frequenza del primo modo di vibrare rispettivamente di 25,7 Hz e di 25,1 Hz. Questo risultato anomalo sarà approfondito nel seguente paragrafo. Si sottolinea però che il picco delle FRF e la forma delle FRF nelle due configurazioni (V22B Clamp line e V22B lunghezza massima) risultano in perfetto accordo tra sperimentale e numerico 3D, e che l'errore percentuale nelle frequenze è comunque inferiore del 10%.

Per la lamina V22BL si osservano dei buoni risultati per la frequenza di risonanza tra numerico 3D e sperimentale sia alla clamp line che alla lunghezza massima. Tuttavia il picco della FRF risulta leggermente sottostimato nel modello FEM 3D per la configurazione clamp line. Nella V22BL clamping line risulta 25,06 [V/g] per la misurazione e 31,83 [V/g] nel FEM.

Il FEM 2D modella bene il comportamento delle lamine V22B e V22BL sia per la frequenza di risonanza che per il picco della FRF, l'unica differenza nei risultati è presente nella valutazione del picco della FRF per la V22BL lunghezza massima con un errore percentuale del 17,4%.

Per la lamina PPA 1001 i risultati tra FEM e sperimentale sono in buon accordo sia per la configurazione Clamp 0 che per la Clamp 6.

In questo paragrafo è presente anche l'andamento della tensione al variare del tempo, si osserva anche in questo caso che il confronto tra FEM 3D e sperimentale dell'andamento temporale della tensione riproduce fedelmente il confronto tra FEM 3D e sperimentale della FRF, cioè laddove la FRF calcolata con l'analisi armonica sovrastima la frequenza di risonanza (per esempio nella V22B) si può osservare che anche l'andamento della tensione calcolata con il software ha una frequenza maggiore rispetto a quella misurata (grafico 6.2 e grafico 6.4). Viceversa nella V22BL Lunghezza massima in cui l'analisi armonica sottostima leggermente la frequenza di risonanza anche nell'analisi del transitorio si può osservare che l'andamento della tensione è in leggero ritardo rispetto al valore misurato (grafico 6.7).

Visto che le simulazioni hanno una durata di soli 0.030 s per problemi legati alla memoria del calcolatore, nei grafici non è apprezzabile il decadimento dell'oscillazione libera dopo l'ingresso impulsivo.

6.4 Analisi FEM per valutare l'influenza del vincolo sul primo modo di vibrare

Sono stati effettuati degli studi per indagare il disaccordo che si verifica tra la frequenza di risonanza calcolata con l'analisi FEM e quella misurata sperimentalmente per la piastra V22B.

L'obiettivo delle analisi FEM esposte in questo paragrafo è di verificare l'influenza che ha il vincolo nel primo modo di vibrare.

L'idea di analizzare il vincolo deriva dal fatto che per la piastra V22B nelle due configurazioni di vincolo (Clamp Line e Lunghezza massima) si trova una differenza tra i risultati FEM e le misure effettuate nella frequenza di vibrare rispettivamente di 25,7 Hz e 25,1 Hz

Si è posta l'attenzione sull'effetto del vincolo, poiché l'ipotesi di incastro perfetto nelle simulazioni potrebbe essere non verificata nella realtà.

Le cause che portano ad essere non verificata questa ipotesi vanno ricercate nel sistema di afferraggio della piastra. Una causa potrebbe essere la non perfetta planarità delle basi di afferraggio, questa condizione porterebbe la linea di vincolo in una zona diversa da quella considerata. Infatti, se gli spigoli delle basi non toccano perfettamente la lamina piezoelettrica nella linea di vincolo la lunghezza libera di vibrare è maggiore di quella considerata nell'analisi FEM. Si avrebbe quindi una minore rigidità della piastra e di conseguenza una riduzione della frequenza di risonanza.

Un'altra causa potrebbe essere la rigidità del sistema di afferraggio: se l'impulso generato dal colpo del martelletto strumentato sulla barra di alluminio non venisse trasferito in maniera diretta alla lamina piezoelettrica, ma, il sistema di afferraggio interposto avesse una rigidità dell'ordine di grandezza pari a quella dell'harvester si avrebbe una diminuzione della frequenza di risonanza, poiché la rigidità complessiva del sistema diminuirebbe.

Per indagare queste due cause ed il loro effetto sono stati effettuati i seguenti studi parametrici:

1. **Analisi della prima frequenza propria con lunghezza parametrica:** questo studio ha lo scopo di verificare l'influenza della linea di vincolo sul primo modo di vibrare. Sono state modellate le piastra V22B e V22BL parametrizzando l'intera geometria e si sono calcolate le frequenze del primo modo di vibrare al variare della lunghezza, L , delle piastre.

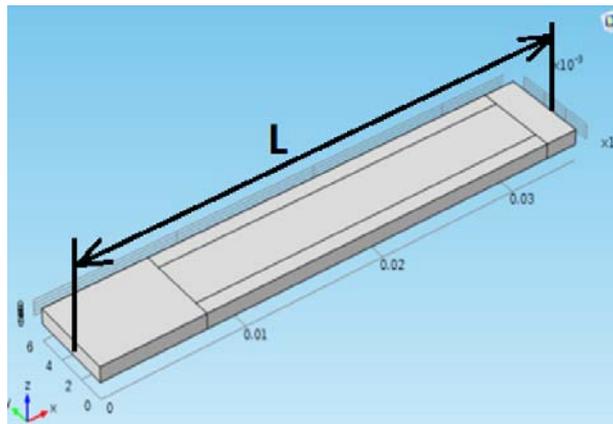


Figura 6.1: Piastra V22B con il parametro lunghezza, L , oggetto dello studio

I risultati ottenuti sono i seguenti:

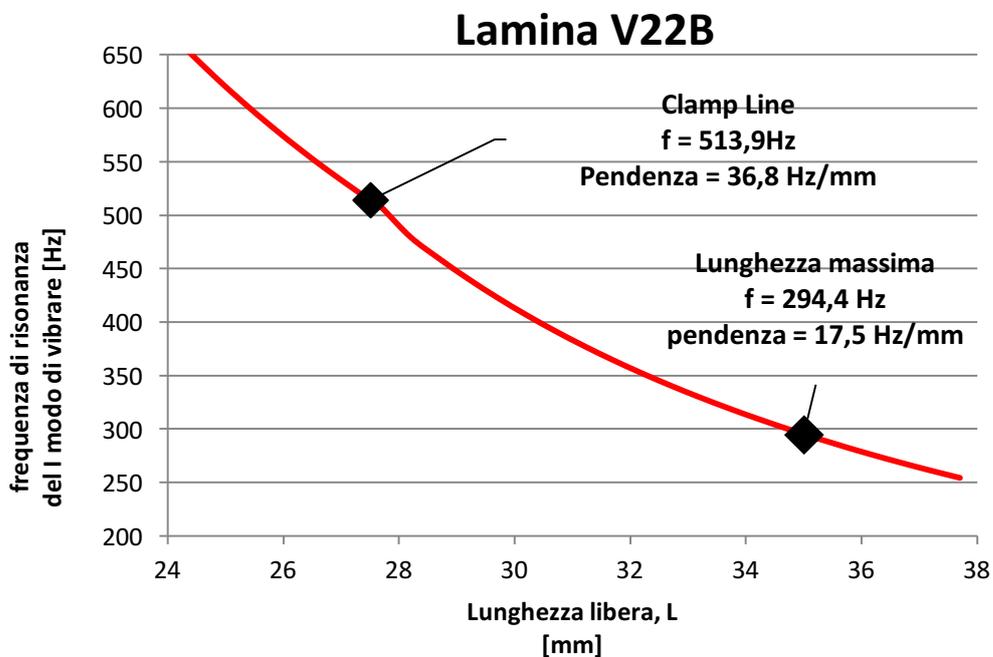
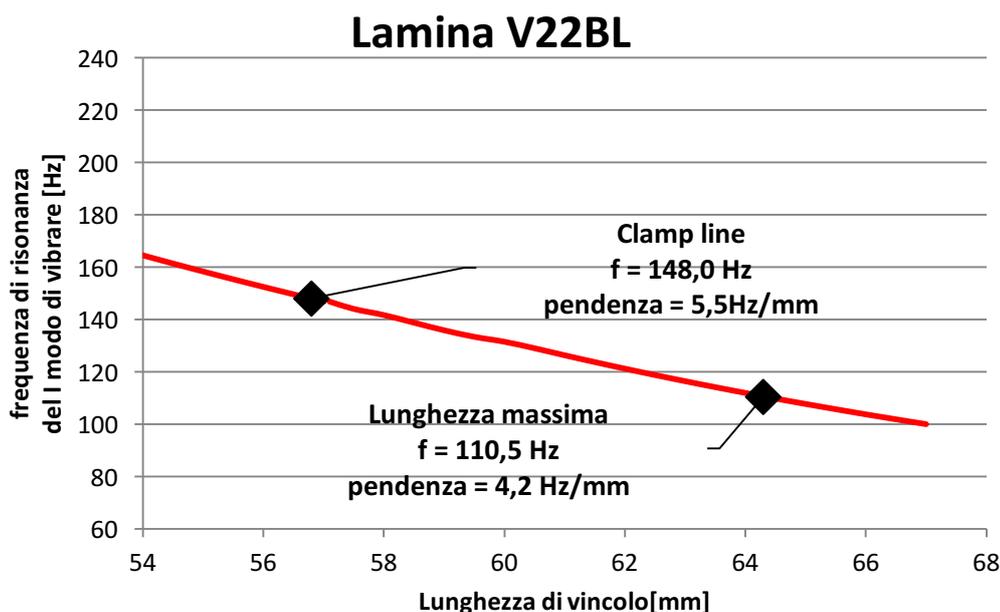


Grafico 6.13: frequenza del 1° modo di vibrare della V22B al variare della lunghezza libera di vibrare della lamina



Gráficoo 6.14: frequenza del 1° modo di vibrare della V22BL al variare della lunghezza libera di vibrare della lamina

Il parametro di maggiore interesse che è sottolineato in questi grafici è la pendenza della curva. La pendenza del gráfico ci dice quanto varia la frequenza di risonanza del primo modo al variare della lunghezza di vincolo. Visto che la variazione della lunghezza di vincolo può essere causata dalla non perfetta planarità delle basi del sistema di afferraggio o da altre cause di incastro non perfetto, la pendenza del gráfico ci da un valore di quanto è ‘robusto’ il risultato della frequenza di risonanza rispetto all’ipotesi di incastro perfetto. La piastra V22B vincolata alla clamp line e alla lunghezza massima ha una pendenza rispettivamente di $36,8 \text{ Hz/mm}$ e $17,5 \text{ Hz/mm}$ questo indica che il disaccordo tra le misure e le simulazioni potrebbe essere causato dalla sbagliata valutazione della lunghezza libera di vibrare utilizzata nell’analisi FEM, con uno scarto tra lunghezza effettiva e quella della analisi FEM, ΔL , che è pari a:

$$\Delta L = \frac{\text{Errore Frequenza}}{\text{Pendenza}}$$

E vale rispettivamente $\Delta L = 0,65 \text{ mm}$ per la configurazione clamp line e $\Delta L = 1,12 \text{ mm}$ per la lunghezza massima.

Il gráfico della V22BL invece mostra che la pendenza è molto minore rispetto alla V22B, in questo caso abbiamo $5,5 \text{ Hz/mm}$ e $4,2 \text{ Hz/mm}$. Questi risultati sono indice che per la piastra V22BL i risultati della frequenza del primo modo di vibrare sono ‘robusti’ rispetto all’ipotesi di incastro perfetto, cioè, anche se sono presenti delle condizioni che

portano ad avere un incastro non perfetto la frequenza di risonanza varia di poco rispetto alle condizioni ideali. Per la piastra V22BL si può osservare accordo quasi perfetto della frequenza di risonanza tra le misurazioni e le simulazioni.

2. Analisi della prima frequenza propria con rigidità del vincolo parametrica: lo scopo è di valutare l'effetto della rigidità del sistema di afferraggio.

Con la condizione di l'incastro ideale nell'analisi FEM non si considerano gli effetti di rigidità dell'afferraggio, presenti nel sistema di misura, che potrebbero alterare i modi propri di vibrare delle piastre.

Se il sistema di afferraggio avesse una rigidità dell'ordine di grandezza di quella dell'harvester, o comunque di un valore che non tendesse all'infinito, renderebbe la rigidità complessiva del sistema harvester più afferraggio minore di quella considerata nell'analisi FEM con vincolo ideale e lo spostamento alla base generato dalla martellata sulla barra di alluminio verrebbe filtrato attraverso di esso.

Uno schema concettuale a parametri concentrati per capire l'effetto della rigidità del sistema di afferraggio sul primo modo di vibrare dell'harvester è il seguente:

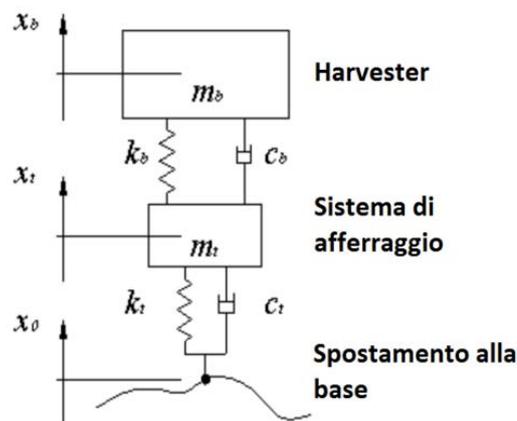


Figura 6.2: schema a parametri concentrati dell'harvester e del sistema di afferraggio

Se la rigidità del sistema di afferraggio, K_t , tende all'infinito, oppure, è molto maggiore della rigidità dell'harvester, K_b , il sistema harvester-afferraggio si comporta come un sistema ad un grado di libertà e lo spostamento alla base viene trasferito in modo diretto all'harvester.

Al contrario se K_t diventa dell'ordine di grandezza di K_b il sistema diventa a due g.d.l. e la prima frequenza di risonanza del si abbassa come conseguenza di una riduzione della rigidità complessiva[].

Per quantificare il valore di K_t si è fatto riferimento al sistema di afferraggio dell'harvester di figura.



Figura 6.3: sistema di afferraggio dell'harvester

Il vincolo è attuato dalla compressione esercitata dalla piastrina superiore del sistema di afferraggio sull'harvester. È un vincolo di contatto pretensionato, e la sua rigidezza è data dalla somma della rigidezza della base superiore, che lavora a flessione, e della rigidezza del tratto di harvester che viene compresso [vedi appendice C].

Se si schematizza l'azione della base di alluminio ($E=70\text{GPa}$) con un modello di trave su due appoggi con carico in mezzzeria (figura).

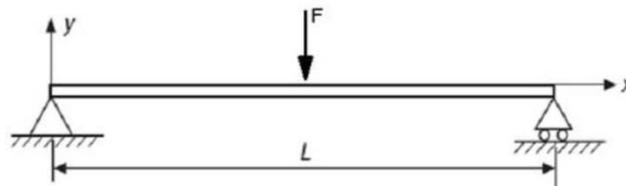


Figura 6.4: trave su due appoggi

Con lunghezza, L , pari all'interasse tra le due viti di 30,0 mm, e sezione rettangolare di altezza 5 mm e larghezza 12,0 mm.

La rigidezza di questa trave è pari a:

$$K_t^1 = 48 \frac{EJ}{L^3} = 5,2 \cdot 10^7 \text{ N/m.}$$

Alla pari se si considera la porzione di FR4 ($E_{FR4} = 22 \text{ GPa}$) dell'harvester compressa, la rigidezza a compressione di questa è pari a:

$$K_t^2 = \frac{A \cdot E_{FR4}}{s}$$

con, A, area su cui poggia la piastrina di alluminio di vincolo, pari ad un rettangolo di dimensioni 12mm x 6mm, e, s spessore dell'harvester pari a 0,81mm.

Da cui risulta $K_t^2 = 1,95 \cdot 10^9 N/m$.

La rigidezza del vincolo è quindi pari a:

$$K_t = K_t^1 + K_t^2 = 5,2 \cdot 10^7 + 1,95 \cdot 10^9 = 2,0 \cdot 10^9 N/m.$$

È ovvio osservare che questa rigidezza calcolata rappresenta solamente una stima di quella reale del vincolo, è comunque un valore utile da utilizzare nelle analisi FEM per giudicare se l'incastro ideale dal punto di vista della rigidezza rappresenti un'ipotesi verificata.

Sono stati costruiti dei modelli FEM per le piastre V22B e V22BL modellando anche il tratto iniziale di FR4 su cui agisce la compressione della base del sistema di afferraggio di alluminio. Su questi modelli non è applicato il vincolo di incastro ma sono vincolati alla base con la condizione 'letto di molle' sulle superfici compresse (vedi figura).

Alla condizione letto di molle è applicata una rigidezza complessiva, K_t , che sarà il parametro dell'analisi per verificare la sua influenza sul primo modo di vibrare.

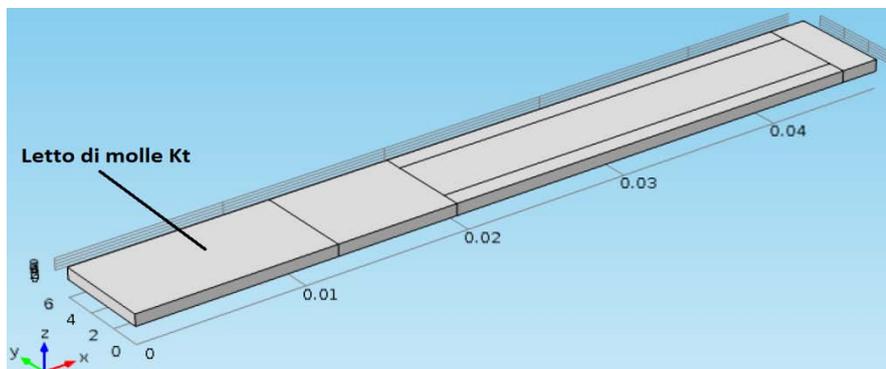


Figura 6.5: piastra V22B lunghezza massima con vincolo modellato con la condizione al contorno letto di molle con rigidezza complessiva, K_t , che è il parametro dell'analisi

I risultati delle analisi con rigidezza parametrica effettuati per le due piastre sono rappresentati nel grafico

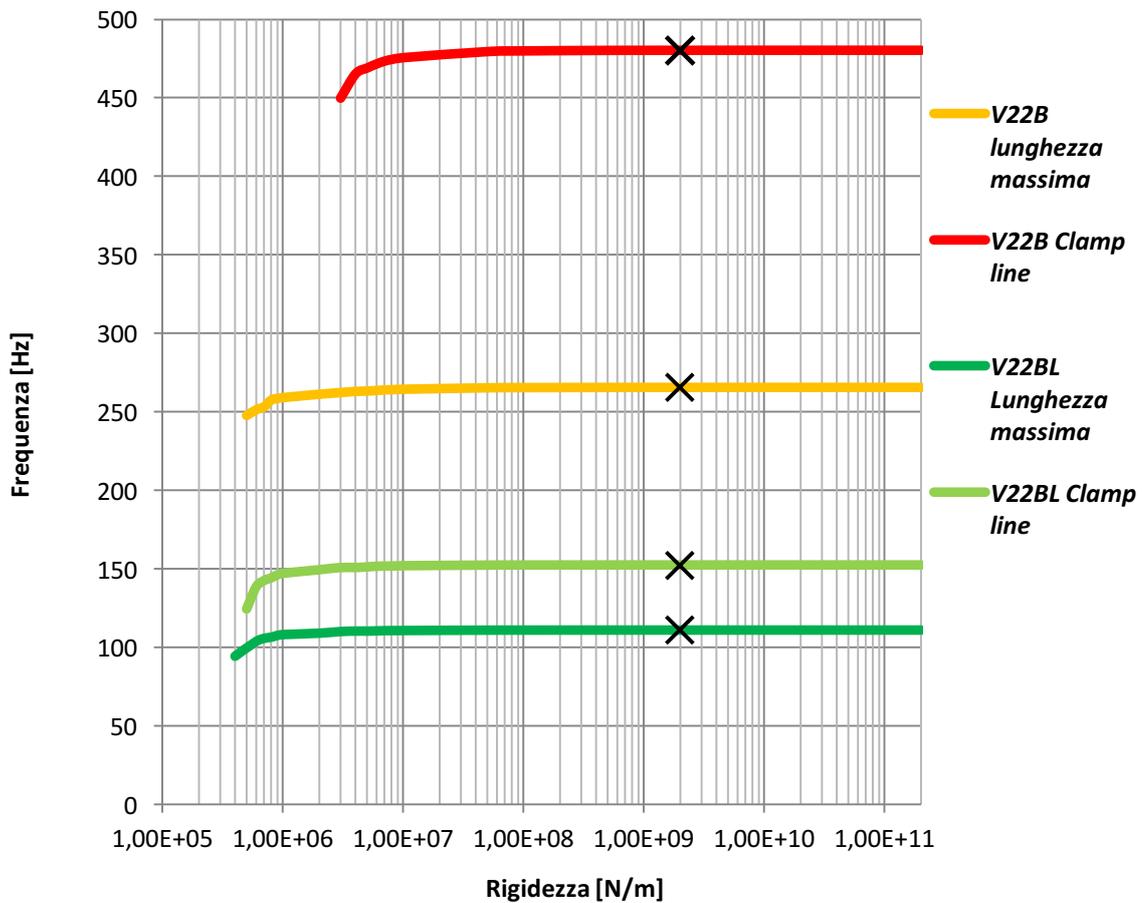


Grafico 6.15: risultati analisi rigidezza parametrica

Si osserva che la rigidezza del vincolo per vedere degli effetti evidenti sulla prima frequenza di risonanza è pari a circa $1,0 \cdot 10^7 \text{ N/m}$. Questo valore è di due ordini di grandezza inferiore alla rigidezza stimata del vincolo, pari a $2,0 \cdot 10^9 \text{ N/m}$, quindi si può concludere che l'effetto della rigidezza del vincolo non influisce sul primo modo di vibrare.

Capitolo 7

Conclusioni

L'obiettivo di questa tesi è di validare un modello elettromeccanico a elementi finiti applicabile ad energy harvester per il recupero di energia da vibrazioni meccaniche che sfruttano il comportamento dei materiali piezoelettrici.

Un modello ad elementi finiti permette la simulazione del comportamento di questi dispositivi e può fornire informazioni utili che riguardano gli aspetti meccanici come l'analisi modale con le frequenze di risonanza, le forme modali, e gli smorzamenti e informazioni che riguardano aspetti elettro-meccanici come l'andamento della tensione elettrica generata al variare dell'eccitazione alla base.

Le simulazioni, se validate sperimentalmente, trovano un'importante applicazione nella progettazione di questi dispositivi e nell'ottimizzazione del loro comportamento funzionale.

Per raggiungere tale obiettivo si è inizialmente effettuata una ricerca bibliografica in modo da avere un'idea chiara sul principio di funzionamento e sulle principali applicazioni delle lamine piezoelettriche (Capitolo 1). Successivamente per comprendere il comportamento e le peculiarità dei materiali piezoelettrici si è studiato la teoria alla base della piezoelettricità lineare, riportata nel capitolo 2.

Nel capitolo 3 è presentato un modello analitico a parametri distribuiti del comportamento elettromeccanico degli harvester. Questo modello, trovato nella letteratura scientifica, è utile perché sottolinea le principali grandezze che influenzano le prestazioni, e fornisce un valore analitico della funzione di trasferimento tra tensione generata ed eccitazione alla base. Il modello, applicabile solamente sugli harvester bimorfi, nonostante le ipotesi semplificative, fornisce risultati in accordo con le misure sperimentali descritte nel capitolo 4.

Nel capitolo 4 è presentato il lavoro svolto in laboratorio per misurare sperimentalmente le grandezze utilizzate per la validazione del modello numerico. In questo capitolo è presentata la teoria dell'analisi modale sperimentale con eccitazione impulsiva, è descritta in modo dettagliato la catena di misura, con la progettazione delle varie parti che la compongono, e sono stimati gli effetti di carico nella misurazione della tensione generata

dagli harvester. Il capitolo si conclude con i risultati delle misure ottenuti nelle varie prove.

Nel capitolo 5 sono descritti i modelli ad elementi finiti costruiti con il software Comsol 5.0 e sono riportati in modo dettagliato i parametri geometrici utilizzati per le varie piastre, le proprietà dei materiali utilizzate, le condizioni al contorno applicate e le mesh della geometria per discretizzare il problema nei tre studi effettuati:

- studio delle autofrequenze,
- analisi armonica
- studio del transitorio

Nel capitolo 6 sono riportati i risultati ottenuti dai modelli numerici e il loro confronto con le misure sperimentali e con i risultati del modello analitico, dove applicabile.

Il primo paragrafo di questo capitolo è dedicato ai risultati della simulazione delle autofrequenze. Per ogni configurazione di piastra è riportata una tabella con elencati i primi 4 modi di vibrare con le frequenze di risonanza e le forme modali per i modelli 2D e 3D costruiti.

Nel secondo paragrafo sono presentati i confronti tra la FRF misurata e la FRF calcolata agli elementi finiti, e ove calcolabile è presente anche la FRF analitica. Questo paragrafo mostra che tra i modelli FEM e le misure sperimentali è presente un buon accordo. Si osservano delle differenze per quanto riguarda la frequenza di risonanza per la piastra V22B nelle due configurazioni: clamp line e lunghezza massima. Infatti il modello FEM 3D sovrastima la frequenza del primo modo di vibrare rispettivamente di 25,7 Hz e di 25,1 Hz.

Nei grafici delle FRF per la piastra V22B però si sottolinea che il picco e la loro forma risulta in perfetto accordo tra sperimentale e numerico.

Per quanto riguarda la piastra V22BL si osserva un perfetto accordo per la frequenza di risonanza tra numerico e sperimentale sia alla clamp line che alla lunghezza massima. Tuttavia il picco risulta leggermente sottostimato sia nel modello FEM 3D, per la configurazione clamp line, sia nel modello 2D, per la configurazione lunghezza massima. In questo paragrafo è presente anche il confronto dell'andamento della tensione al variare del tempo tra misura sperimentale e risultato dell'analisi del transitorio.

Come conclusione si può affermare che questa tesi ha portato alla costruzione di un modello agli elementi finiti per la simulazione del funzionamento di lamine piezoelettriche ad uso di harvester e di attuatore.

Il lavoro effettuato dimostra che per simulare il cantilever piezoelettrici è necessario costruire dei modello FEM ad elevato dettaglio.

I risultati di questo modello presentano dei buoni accordi con le misure sperimentali effettuate, tuttavia sono ancora presenti delle discrepanze tra numerico e risultati sperimentali per quanto riguarda la frequenza di risonanza della piastra V22B.

Per migliorare il modello sarebbe consigliato di approfondire i dati dei materiali inseriti nel software di simulazione, focalizzando l'attenzione sulle proprietà dei materiali piezoelettrici. Questi materiali infatti sono soggetti ad invecchiamento e i risultati delle analisi potrebbero essere affetti da un errore nelle proprietà che caratterizzano il materiale. Inoltre, gli spessori dei vari strati delle lamine meriterebbero di essere misurati poiché nelle simulazioni sono utilizzati i dati forniti dal datasheet di prodotto, il quale non fornisce l'accuratezza della misura.

Si potrebbe migliorare anche il sistema di misura utilizzando un voltmetro con impedenza di ingresso maggiore in modo da eliminare l'effetto di carico.

Appendice A

Riduzione delle equazioni piezoelettriche per il modello di trave di Eulero-Bernoulli

A.1 Equazioni costitutive 3D della piezoelettricità lineare

In generale, i materiali piezoceramici come il PZT-5A e il PZT-5H sono ortotropi trasversalmente isotropi. In accordo le norme di standardizzazione della IEEE sulla piezoelettricità si assume come piano di isotropia del materiale il piano xy (o piano 12) mentre l'asse z (asse 3) rappresenta l'asse di polarizzazione [5].

Come già visto nel capitolo 2 sulla piezoelettricità le equazioni costitutive lineari per questi materiali possono essere scritte in più forme, ma, quella più usata considera come variabili indipendenti lo stress meccanico T_{ij} e il campo elettrico E_i , in forma matriciale è rappresentata da:

$$\begin{bmatrix} S \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^E & d^t \\ d & \varepsilon^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ E \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

dove gli apici E e T indicano che le rispettive grandezze: la matrice di cedevolezza s e la matrice della permittività dielettrica ε , sono valutate a campo elettrico E e tensione meccanica T costante.

La forma matriciale A.1 può essere scritta in forma completa secondo la notazione di Voigt:

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^E & s_{12}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\ s_{12}^E & s_{11}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\ s_{13}^E & s_{13}^E & s_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & 0 & 0 & s_{11}^E & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{11}^E & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{11}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & \varepsilon_{11}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{11}^T & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

A.2 Equazioni costitutive ridotte per la trave di Eulero-Bernoulli

Se il materiale piezoelettrico è il componente di una trave la quale può essere modellata secondo la teoria di Eulero-Bernoulli, o la teoria di Rayleigh della trave, è possibile fare delle semplificazioni considerando che l'unico componente di stress meccanico non trascurabile è il termine T_1 , quindi:

$$T_2 = T_3 = T_4 = T_5 = T_6 = 0 \quad (\text{A.3})$$

Le equazioni costitutive, considerando questi componenti di stress nulli si semplificano nella seguente forma:

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^E & d_{31} \\ d_{31} & \varepsilon_{33}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

che può essere riscritta come:

$$\begin{bmatrix} s_{11}^E & 0 \\ -d_{31} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -d_{31} \\ 0 & \varepsilon_{33}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Mentre l'equazione costitutiva del materiale piezoelettrico sotto le ipotesi di Eulero-Bernoulli scritta tenendo come variabili indipendenti la deformazione S e il campo elettrico E , è pari a:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & -e_{31} \\ e_{31} & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Confrontando la (A.5) e la (A.6) si osserva che la matrice delle proprietà elastiche e piezoelettriche è pari a:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11}^E & -e_{31} \\ e_{31} & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^E & 0 \\ -d_{31} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -d_{31} \\ 0 & \varepsilon_{33}^T \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Quindi le relazioni tra le costanti delle equazioni costitutive per una trave di Eulero-Bernoulli sono le seguenti [5]:

$$c_{11}^E = \frac{1}{s_{11}^E}, \quad e_{31} = \frac{d_{31}}{s_{11}^E}, \quad \varepsilon_{33}^S = \varepsilon_{33}^T - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E} \quad (\text{A.8})$$

Appendice B

Script MATLAB del modello Analitico

```

clc
clear all
close all

f_max=1000;
f=[0:f_max/5000:f_max];
m=0.0165; %paper Sweden
L=0.0275; %harvester length
Lpzt=0.0254-0.0002; %piezo length
abo=1; %accelerazione della base 1m/s^2
om_n=485.39*2*pi; %natural frequency
zeta_n=0.0055; %damping
b_n=1.875/L;
s_n=0.7341;

ma_p=[0]*10^-3;

x=sym('x');
phi=(cosh(b_n*x)-cos(b_n*x)-s_n*(sinh(b_n*x)-
sin(b_n*x)))/sqrt(m*L);
phiint=double(int(phi,0,L));
phia=double(subs(phi,xa));
phiah=double(subs(phi,xa-h));
dphi=diff(phi,x);
dphir=double(subs(dphi,Lpzt));

% Electromechanical model

% Material properities

d31 = -171e-12; % strain constant [m/V] Comsol (Mide 190)
sE11 = 16.4e-12; % elastic compliance [m^2/N] PZT-5A Comsol e
% Mide
e31 = d31/sE11; % piezoelectric constant [C/m^2]
e33 = 1698*8.854e-12; % permittivity [F/m] Comsol e Mide

% Geometrical data

b = 3.81e-3; % Piezo width [m]
h_w = 0.81e-3; % wafer thickness [m]
h_pb = 0.18e-3; % piezo-layer thickness [m] (Mide)
h_sb=0.00009; % substrate thickness [m] (Mide)

R = 1e+15 % external resistance [Ohm]
Cpb=e33*b*Lpzt/h_pb; % piezoelectric layer's capacitance

theta_bs=e31*b/2/h_pb*((h_sb^2)/4-(h_pb+h_sb/2)^2);
chi=theta_bs*dphir;
phir_b=-(h_pb+h_sb)*b*e31/2*dphir;

```

```

om_eq=sqrt(om_n^2+2*chi*phir_b/Cpb);
f_eq=om_eq/(2*pi)

%% calcolo e plot di eta
for i_p=1:size(La_p,2)
    La=La_p(i_p);
    ma=ma_p(i_p);
    ka=ka_p(i_p);
    %ftun=(1/(2*pi))*(ka/ma)^0.5;

for j=1:size(f,2)

Num=abo*(ma*(phiah*La*(-ma*(2*pi*f(j))^2+2*pi*ca*i*f(j)+ka)-
phia*La*(-ma*(2*pi*f(j))^2+2*pi*ca*i*f(j)+ka)-phia*h*(-
ma*((2*pi*f(j))^2+2*pi*ca*i*f(j)+ka))+...
    ma^2*(-phia*La*(2*pi*f(j))^2+phiah*La*(2*pi*f(j))^2-
phia*h*(2*pi*f(j))^2)-phiint*m*h*(-
ma*(2*pi*f(j))^2+2*pi*ca*i*f(j)+ka));

Den=4*om_eq*pi*zeta_n*i*f(j)*h*(-
ma*(2*pi*f(j))^2+2*pi*ca*i*f(j)+ka)+om_eq^2*h*(-
ma*(2*pi*f(j))^2+2*pi*ca*i*f(j)+ka)-phia^2*ma^2*h*(2*pi*f(j))^4-...
    phia^2*La*ma^2*(2*pi*f(j))^4+phia*phiah*La*ma^2*(2*pi*f(j))^4-
phia^2*La*ma*(-
ma*(2*pi*f(j))^2+2*pi*ca*i*f(j)+ka)*((2*pi*f(j))^2)+phia*phiah*La*m
a*(-ma*(2*pi*f(j))^2+2*pi*ca*i*f(j)+ka)*((2*pi*f(j))^2)-
phia^2*ma*h*(-ma*(2*pi*f(j))^2+2*pi*ca*i*f(j)+ka)*((2*pi*f(j))^2)-
h*(-ma*(2*pi*f(j))^2+2*pi*ca*i*f(j)+ka)*((2*pi*f(j))^2);

eta(i_p,j)=(Num./Den);

v(i_p,j)=i*(2*pi*f(j))*phir_b*eta(i_p,j)*9.81/(1/R+(Cpb*2*pi*f(j)*i
)/2);

end

figure(1)
hold on
plot(f,sqrt(real(eta(i_p,:)).^2+imag(eta(i_p,:)).^2),'color',[i_p/s
ize(La_p,2) 0.5 0])
grid on
xlabel('f (Hz)')
ylabel('Modulus')
title('\eta_0')

figure(2)
hold on
plot(f,atan(real(eta(i_p,:))./imag(eta(i_p,:)))*180/pi,'color',[i_p
/size(La_p,2) 0.5 0])

```

```

grid on
xlabel('f (Hz)')
ylabel('Phase')
title('\eta_0')

end

%% calcolo e plot di v

% v=2*phir_b*eta*9.81/Cpb;

for i_p=1:size(La_p,2)

figure(3)
hold on
plot(f,sqrt(real(v(i_p,:)).^2+imag(v(i_p,:)).^2),'color',[i_p/size(
La_p,2) 0.5 0])
grid on
xlabel('f (Hz)')
ylabel('Modulus (V/g)')
title('v')

%
plot(f,atan(real(v(i_p,:))./imag(v(i_p,:)))*180/pi,'color',[i_p/siz
e(La_p,2) 0.5 0])

end

```


Appendice C

Lo smorzamento isteretico e lo smorzamento viscoso di Rayleigh

Nel software Comsol 5.0 sono implementati due differenti modelli di smorzamento a seconda della simulazione effettuata. Per l'analisi armonica nel dominio delle frequenze è implementato il modello di smorzamento isteretico, mentre per l'analisi del transitorio lo smorzamento viscoso di Rayleigh.

In questa appendice si vuole trattare questi due modelli di smorzamento per correlare il valore del rispettivo parametro di smorzamento al rapporto di smorzamento viscoso ξ ricavato dalle misure sperimentali.

Per quanto riguarda lo smorzamento per isteresi, se si sottopone un materiale, ovvero un elemento strutturale, ad una sollecitazione armonica e si esce dal campo strettamente lineare, si ottiene nel piano sforzo-deformazione una curva chiusa detta ciclo di isteresi del materiale come mostrato nella figura[14].

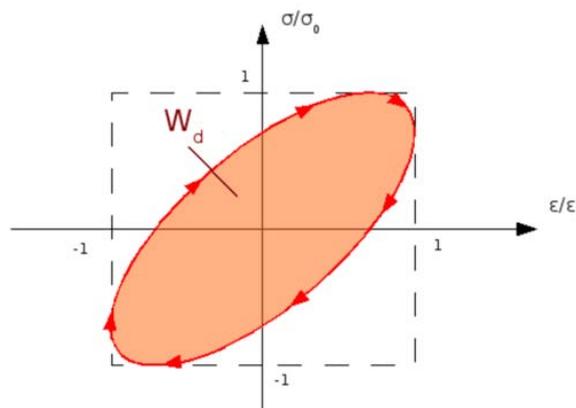


Figura C.1: ciclo di isteresi

L'area racchiusa dalla curva rappresenta l'energia dissipata durante il ciclo; la dissipazione poco o per nulla dipende dalla frequenza delle oscillazioni ed è approssimativamente proporzionale al quadrato dell'ampiezza. Si può scrivere:

$$W_D = \alpha x_0^2 \quad (\text{C.1})$$

dove la costante α dipende dal materiale. Uguagliando questa espressione con l'energia dissipata da uno smorzatore viscoso, che è pari a:

$$E_D = \pi \omega c x_0^2 \quad (\text{C.2})$$

si ottiene :

$$c_{eq} = \frac{\alpha}{\pi \omega} \quad (C.3)$$

si osserva che l'ampiezza è scomparsa, e lo smorzamento lineare equivalente è semplicemente legato alla frequenza.

L'equazione differenziale del moto per un sistema caratterizzato da smorzamento per isteresi può essere scritta:

$$m\ddot{x} + \frac{\alpha}{\pi \omega} \dot{x} + kx = F_0 e^{i\omega t} \quad (C.4)$$

Introduciamo ora il concetto di rigidità complessa, nell'ipotesi di forzante armonica abbiamo $\dot{x} = i\omega x$, quindi l'equazione () può essere scritta:

$$m\ddot{x} + \left(k + i\frac{\alpha}{\pi}\right)x = F_0 e^{i\omega t} \quad (C.5)$$

ovvero:

$$m\ddot{x} + k(1 + i\eta)x = F_0 e^{i\omega t} \quad (C.6)$$

dove il parametro adimensionale

$$\eta = \frac{\alpha}{\pi k} \quad (C.7)$$

prende il nome di fattore di smorzamento strutturale e il termine $k(1 + i\eta)$ viene chiamato rigidità complessa.

L'uso della rigidità complessa è limitato al caso di eccitazioni armoniche. La soluzione a regime della () sarà del tipo: $x = x_0 e^{i\omega t}$. Sostituendo si ottiene:

$$x(t) = \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + i\eta} e^{i\omega t} \quad (C.8)$$

Se ci poniamo in condizioni di risonanza l'ampiezza risulta:

$$x_0 = \frac{F_0}{\eta k} \quad (C.9)$$

Se si confronta questo risultato con il valore massimo del fattore di amplificazione x_0 del caso con smorzamento viscoso:

$$x_0 = \frac{F_0}{2\xi k} \quad (C.10)$$

possiamo concludere che il fattore di smorzamento strutturale o isteretico è il doppio del rapporto di smorzamento viscoso:

$$\eta = 2\xi \quad (C.11)$$

Lo smorzamento delle strutture è dovuto principalmente a fenomeni di isteresi e di attrito negli elementi di collegamento. Questi fenomeni sono difficili da modellare e inserire nelle equazioni di dinamica strutturale, per cui il fenomeno dello smorzamento è approssimato a quello dello smorzamento viscoso, attraverso il rapporto di smorzamento viscoso ξ . Il valore di ξ dipende dal materiale, e dalla geometria, per gli acciai può variare da circa lo 0,5% a circa il 5,0%. Per strutture imbullonate o rivettate può variare dal 2% al 15%. Uno di modelli di smorzamento viscoso utilizzati è lo smorzamento proporzionale, o di Rayleigh, secondo il quale la matrice di smorzamento $[C]$ è una combinazione lineare della matrice di rigidezza e della matrice di massa[26]:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (C.12)$$

con α e β costanti di smorzamento di Rayleigh. La matrice di smorzamento $[C]$ così ottenuta è ortogonale e permette di semplificare notevolmente l'analisi.

In termini modali, indicando con $[\Phi]$ la matrice degli autovalori, si ha:

$$\{\Phi_i\}^T [M] \{\Phi_j\} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad (C.13)$$

$$\{\Phi_i\}^T [K] \{\Phi_j\} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \omega_i^2 & i = j \end{cases} \quad (C.14)$$

e quindi:

$$\{\Phi\}^T [C] \{\Phi\} = \alpha \{\Phi\}^T [M] \{\Phi\} + \beta \{\Phi\}^T [K] \{\Phi\} = \alpha[I] + \beta[\omega^2] \quad (C.15)$$

La relazione tra α , β ed il fattore di smorzamento ξ è:

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\omega_i} + \beta \omega_i \right) \quad (C.16)$$

Quindi le costanti α e β possono essere ricavate a partire dalla conoscenza sperimentale di due coppie di valori $\omega_i, \xi_i(\omega_1, \xi_1, \omega_2, \xi_2)$.

Nella pratica lo smorzamento M-proporzionale rappresenta lo smorzamento dovuto all'attrito, mentre lo smorzamento K-proporzionale rappresenta lo smorzamento interno del materiale.

La figura illustra l'andamento tipico dello smorzamento proporzionale in funzione della pulsazione.

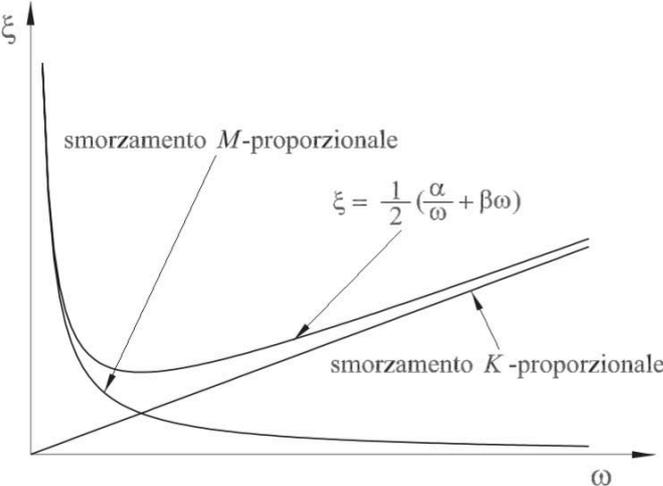


Figura C.2: andamento dello smorzamento proporzionale in funzione della pulsazione ω [26]

Appendice D

Rigidezza di un contatto pretensionato

La figura rappresenta un accoppiamento flangiato ottenuto mediante pretensionamento di una vite passante.

Si immagini in prima approssimazione che la pressione nella flangia interessi un'area crescente secondo un tronco di cono di semi apertura di 45° . Indicando con A_f l'area di un cilindro avente diametro esterno pari al diametro medio del cono e diametro interno pari al diametro del foro d_l .

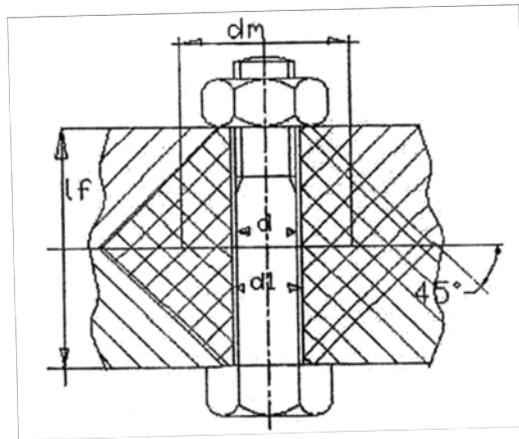


Figura D.1: collegamento pretensionato [27]

Diagrammando gli allungamenti rispettivamente della flangia e della vite si ottiene il diagramma della figura seguente.

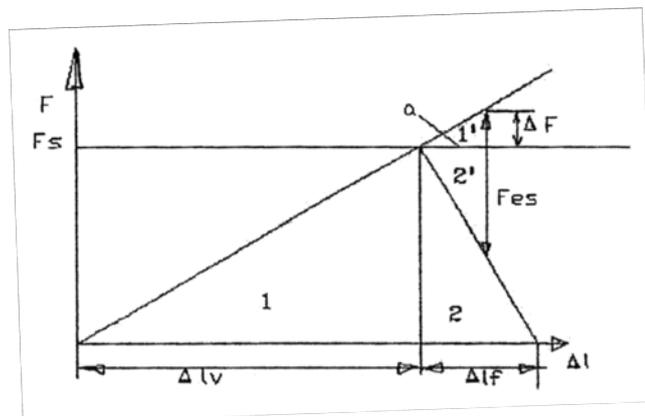


Figura D.2: diagramma degli allungamenti della flangia e della vite [27]

Indicando con Δl_f e con Δl_v gli allungamenti della flangi e del bullone, con F_s la forza di serraggio applicata e con F_{es} la forza che si manifesta in esercizio, dalla similitudine de triangoli 1-1' e 2-2' si ricava:

$$\Delta F = \frac{F_{es}}{1 + \frac{\Delta l_v}{\Delta l_f}}$$

Ciò significa che l'incremento della forza sulla vite è tanto minore quanto è maggiore il rapporto tra l'allungamento della vite rispetto a quello della flangia.

Per la resistenza della vite è opportuno avere una flangia molto rigida, tuttavia dal diagramma si può anche osservare che con la rigidezza della flangia, a parità di rigidezza della vite e di F_{es} , diminuisce la compressione residua sulla flangia.

Il diagramma permette di osservare che in un collegamento pretensionato aumenta la rigidezza. Infatti, la deformazione del sistema, per l'applicazione della forza di esercizio è rappresentata da segmento (a) di figura D2.

Indicando con K la rigidezza del sistema, si ha [28]:

$$K = \frac{F_{es}}{a} = \frac{\Delta F}{a} + \frac{F_{es} - \Delta F}{a} = K_v + K_f,$$

con K_v rigidezza della vite e K_f rigidezza della flangia.

Il pretensionamento, oltre che nel caso preso ad esempio, è largamente impiegato per conferire rigidezza a sistemi di elementi assemblati, consentendo forti alleggerimenti della struttura.

Bibliografia

- [1] https://it.wikipedia.org/wiki/Energy_harvesting
- [2] www.cnr.it
- [3] ENERGY HARVESTING IN NON-LINEAR SYSTEMS, Tesi di dottorato, I. De Vincenzo, DMMM-Politecnico di Bari, 2014
- [4] Sistemi di Energy Harvesting e tele alimentazione da radiazione elettromagnetica a RF per wireless sensor network, Alessandro Bertacchini
- [5] PIEZOELECTRIC ENERGY HARVESTING. Alper Erturk, D. J. Inman, WILEY, 2011
- [6] Piezoceramici: guida introduttiva al loro utilizzo. F. Lionetto, A. Licciulli, F. Montagna, A. Maffezzoli. Dipartimento di Ingegneria dell’Innovazione, Università di Lecce, Lecce
- [7] https://it.wikipedia.org/wiki/Piombo-zirconato_di_titanio
- [8] MODELLAZIONE E SPERIMENTAZIONE DI ELEMENTI STRUTTURALI COMPOSITI PIEZO ELETTRICI. Tesi di laurea magistrale. A. Morbio, A. Pepe. Politecnico di Milano, Milano
- [9] IEEE Standard on Piezoelectricity, ANSI/IEEE Standard 176-1978, IEEE, New York, 1978
- [10] On Mechanical Modeling of Cantilevered Piezoelectric Vibration Energy Harvesters. Alper Erturk and Daniel J. Inman, 2008
- [11] Energy Harvesting Technologies. Priya, Shashank e Daniel J. Inman. New York: Springer. 2009
- [12] https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_gradino_di_Heaviside
- [13] CARATTERIZZAZIONE SPERIMENTALE DI “ENERGY SCAVENGERS” PIEZOELETTRICI OTTIMIZZATI. L. Moroa, D. Benasciutti, E. Brusa, S. Zelenika. AIAS 2009
- [14] Meccanica delle vibrazioni. Dispense del corso. Alberto Doria, Vittore Cossalter. Università degli studi di Padova. Padova
- [15] https://it.wikipedia.org/wiki/Delta_di_Dirac
- [16] www.pcbpiezotronics.it/

- [17] www.ni.com/datasheet/pdf/en/ds-316
- [18] <https://www.ni.com/labview/signalexpress/>
- [19] www.mide.com/
- [20] MIDE Engineering Smart Technology Products, Product datasheet available at: www.mide.com/pdfs/Vulture_Datasheet_001.pdf/
- [21] MIDE Engineering Smart Technology Products, Material datasheet available at: www.mide.com/pdfs/vulture_specs_piezo_properties.pdf/
- [22] Modelling and experimental verification of more efficient power harvesting by coupled piezoelectric cantilevers. L. G. H. Staaf1, E. Köhler, D. Parthasarathy, P. Lundgren and P. Enoksson. Department of Microtechnology and Nanoscience, Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden
- [23] Specifications explained: NI Multifunction I/O (MIO) DAQ <http://www.ni.com/product-documentation/53090/en/>
- [24] Appunti di misure meccaniche e termiche. Terza edizione ampliata e corretta. Giulio Fanti. Edizioni Libreria Progetto. Padova
- [25] Principi ed applicazioni di elettrotecnica. Volume primo. Massimo Guarnieri, Andrea Stella.
Edizioni Progetto. Padova
- [26] Elementi finiti parte IV. A. Gugliotta. Politecnico di Torino, Dipartimento di Matematica.
Otto Editore. 2012
- [27] Caratteristiche costruttive dei circuiti oleodinamici per le macchine automatiche. Appunti delle lezioni del prof. L. Villani.
Corso di Calcolo e Progetto dei Sistemi Meccanici. Prof.sso G. Meneghetti
- [28] Fundamentals of Machine Component Design. R. C. Juvinall, K. M. Marshek. John Wiley & Sons Inc. Edizione. Ottobre 2011