

# Teoria della diffrazione ed antenne ad apertura

Alessandro Bordone  
Relatore Prof. A.D. Capobianco

12 febbraio 2010

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Ottica geometrica</b>	<b>4</b>
2.1	L'approssimazione scalare . . . . .	4
2.2	Le equazioni dell'ottica geometrica . . . . .	5
2.2.1	L'equazione iconale . . . . .	7
2.2.2	L'equazione dei raggi . . . . .	7
2.3	I limiti dell'ottica geometrica . . . . .	9
2.3.1	Significato elettromagnetico dell'ottica geometrica . . . . .	10
2.4	Fasci gaussiani . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Teoria della diffrazione</b>	<b>15</b>
3.1	Formulazione vettoriale . . . . .	15
3.1.1	L'integrale di diffrazione . . . . .	16
3.1.2	Condizioni di illuminazione . . . . .	19
3.2	La teoria scalare . . . . .	20
3.2.1	Formulazione di Helmholtz - Kirchhoff . . . . .	21
3.2.2	Formulazione di Rayleigh - Sommerfeld . . . . .	22
3.3	Formule di Fresnel-Kirchhoff e di Rayleigh-Sommerfeld . . . . .	23
3.4	La zona di Fresnel . . . . .	24
3.5	La zona di Fraunhofer . . . . .	25
3.6	Alcuni esempi . . . . .	25
3.6.1	Apertura rettangolare . . . . .	25
3.6.2	Apertura circolare . . . . .	27
3.7	Cenni sulla <i>teoria geometrica della diffrazione</i> (GTD) . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Antenne ad apertura</b>	<b>29</b>
4.1	Configurazioni ed utilizzo . . . . .	29
4.2	Modelli equivalenti per la determinazione del campo irradiato . . . . .	30
4.2.1	Esempio . . . . .	30
4.3	Dualità delle antenne a strutture complementari . . . . .	31
4.4	Antenne a paraboloide . . . . .	32
4.4.1	Meccanismo di radiazione . . . . .	32

4.4.2	Considerazioni sul campo illuminante . . . . .	33
4.4.3	Guadagno ed area efficace dell'antenna a paraboloide . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>36</b>
<b>A</b>	<b>Teoremi fondamentali</b>	<b>38</b>
A.1	Il principio di Huygens . . . . .	38
A.2	Teorema di equivalenza di Love . . . . .	38
A.3	Teorema delle immagini . . . . .	39
A.3.1	Osservazioni e corollari . . . . .	40
A.4	Teorema di dualità . . . . .	40
A.5	Il principio di Babinet . . . . .	40
	<b>Bibliografia</b>	<b>41</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

Il fenomeno fisico della diffrazione si presenta su onde di qualsivoglia natura qualora queste incontrassero degli ostacoli. Il caso elettromagnetico che si vuole esaminare, seppur valido per tutto lo spettro, non è quindi isolato: basti pensare all'esperienza quotidiana che si ha con la propagazione delle onde acustiche in un mezzo che raramente è privo di ostacoli.

Il lavoro si prefigge di affrontare in maniera analitica la teoria della diffrazione nella sua forma vettoriale e scalare. Il bisogno di questa teoria nasce dai limiti imposti da teorie più approssimate come l'*ottica geometrica*, di cui si è inizialmente inserito un capitolo introduttivo. Il modello di propagazione a raggi trascura infatti l'effetto di bordo che deve intuitivamente perturbare il campo che si propaga in prossimità di un ostacolo.

Chiariti questi aspetti, lo studio della teoria della diffrazione procederà necessariamente in termini approssimati e, qualora i risultati ottenuti non siano sufficientemente precisi, si potrà comunque ricorrere a procedimenti iterativi per ottenere una maggiore accuratezza nel calcolo del campo diffratto.

Il calcolo del campo irradiato da aperture rettangolari e circolari è fornito a titolo di esempio e riscontra un notevole interesse pratico poichè costituiscono una particolare configurazione di antenne dette "*ad apertura*".

Di qui si illustreranno le configurazioni possibili di questa tipologia di antenne, i loro legami quando le strutture sono complementari, prestando particolare attenzione all'antenna a paraboloide, oggi di notevole impiego.

## Capitolo 2

# Ottica geometrica

### 2.1 L'approssimazione scalare

Per ovvie ragioni di semplicità matematica la scalarizzazione dei problemi elettromagnetici è un obiettivo sempre perseguito ma raggiunto raramente in maniera esatta, più spesso invece solo in termini approssimati. In questa sede, la ragione di questo fatto è da ricercarsi nella *non omogeneità del mezzo* materiale in cui si vuole ora analizzare la propagazione elettromagnetica. Lo studio è di notevole interesse pratico perchè in qualsiasi problema reale ogni campo elettromagnetico interagisce necessariamente con oggetti materiali e questi, dal punto di vista teorico, si configurano come disomogeneità del mezzo materiale.

Con riferimento al caso delle equazioni di Maxwell nel dominio della rappresentazione complessa, indicando con  $\mathbf{r}$  il generico raggio vettore all'interno del volume di definizione del campo, si supponga il mezzo in cui avviene la propagazione privo di perdite e *variabile con continuità*: possiamo perciò considerare  $\epsilon(\mathbf{r})$  e  $\mu(\mathbf{r})$  funzioni di punto continue e derivabili (d'ora in avanti si ometterà di evidenziare la loro dipendenza da  $\mathbf{r}$ ).

Poichè valgono:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\mu \mathbf{H}) = 0$$

che riscritte secondo un'identità vettoriale danno

$$\begin{aligned} \nabla \epsilon \cdot \mathbf{E} + \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \mu \cdot \mathbf{H} + \mu \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0 \end{aligned}$$

in definitiva, le equazioni di Maxwell risultano:

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= -\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{E} - \nabla \left( \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \cdot \mathbf{E} \right) \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} &= -\nabla^2 \mathbf{H} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) = -\nabla^2 \mathbf{H} - \nabla \left( \frac{\nabla \mu}{\mu} \cdot \mathbf{H} \right) \end{aligned}$$

in generale quindi si ha che i termini  $\nabla \cdot \mathbf{E} \neq 0$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{H} \neq 0$  *non consentono la scalarizzazione* dell'equazione in maniera esatta poichè modificano l'equazione di Helmholtz con l'aggiunta di un termine che, attraverso il prodotto scalare con  $\nabla\epsilon$  (o con  $\nabla\mu$ ), è sensibile alla direzione in cui è rivolto il vettore  $\mathbf{E}$  (oppure  $\mathbf{H}$ ).

*Ipotesi necessaria* da formulare affinché siano accettabili gli errori dovuti all'approssimazione scalare è che il mezzo debba essere *lentamente variabile* ovvero deve valere:

$$\left| \frac{\nabla\epsilon}{\epsilon} \right| \ll \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{e/o} \quad \left| \frac{\nabla\mu}{\mu} \right| \ll \frac{2\pi}{\lambda} \quad [m^{-1}]$$

La grandezza fisica che discrimina tra i casi nei quali si può o non si può applicare l'approssimazione scalare alle equazioni di Maxwell è perciò la *lunghezza d'onda*  $\lambda$ . Un mezzo è detto *lentamente variabile* se la variazione spaziale del campo elettrico e del campo magnetico indotta dalle disomogeneità dei parametri materiali ha luogo su distanze caratteristiche che sono molto maggiori di quella intrinseca data dalla lunghezza d'onda, ed è evidente che quanto più ciò è vero tanto più la soluzione del caso non omogeneo sarà simile a quella del caso omogeneo, e potrà essere approssimata da questa.

La definizione di mezzo lentamente variabile tende ad essere tanto più valida quanto più è *corta* la lunghezza d'onda della radiazione in gioco, in accordo con il risultato generale che la forma scalare delle equazioni è la descrizione della propagazione nel limite di *campi ad alta frequenza*.

## 2.2 Le equazioni dell'ottica geometrica

Si consideri la propagazione di un'onda elettromagnetica in un mezzo lentamente variabile e *privo di perdite*.

Una conseguenza dell'approssimazione scalare è l'irrilevanza delle dimensioni fisiche: *ogni componente* del campo soddisfa all'equazione di Helmholtz

$$\nabla^2\psi - \sigma^2\psi = 0, \quad \sigma^2 = -\omega^2\mu\epsilon \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

dove la *funzione d'onda*  $\psi$  può essere di dimensioni fisiche arbitrarie, proporzionale alle componenti del campo elettrico e magnetico, ai potenziali vettori, nonché ai potenziali scalari. È stato posto  $\sigma^2 \in \mathbb{R}$  in accordo con l'ipotesi di mezzo privo di perdite.

Si ammetta che in un mezzo siffatto la soluzione generica della (2.1) possa scriversi nella forma:

$$\psi(\mathbf{r}) = P(\mathbf{r})e^{-jk_0S(\mathbf{r})}, \quad k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} \quad (2.2)$$

dove  $k_0$  è la costante di fase intrinseca nel vuoto,  $P(\mathbf{r})$  e  $S(\mathbf{r})$  sono funzioni *reali* di punto, dette rispettivamente *funzione d'ampiezza* e *funzione di fase*.

Questa soluzione si presta ad alcune osservazioni:

in corrispondenza del generico punto fisso  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ , la (2.2) appare come un'onda piana uniforme, si parla perciò di espansione in *onde localmente piane*, una dimostrazione di questo fatto verrà data nel paragrafo 2.3.1 .

La scelta di  $S$  reale limita inoltre lo studio alle sole onde piane uniformi, si trascura perciò il contributo delle onde evanescenti necessario ad ottenere la completezza delle onde piane. Si vedrà come questa approssimazione porterà inevitabilmente ad un assurdo fisico.

In ultima analisi, è necessario supporre  $P$  funzione lentamente variabile rispetto alla lunghezza d'onda, in accordo con l'ipotesi di mezzo lentamente variabile ovvero un mezzo nel quale le variazioni di ampiezza indotte dalle disomogeneità del mezzo materiale devono essere avvertibili su distanze molto maggiori della lunghezza d'onda.

Introducendo la soluzione (2.2) nella (2.1), si ottiene:

$$\nabla^2 \psi = \nabla \cdot (\nabla \psi) = \nabla \cdot [(\nabla P - j k_0 P \nabla S) e^{-j k_0 S}]$$

utilizzando l'identità vettoriale

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} f) = \mathbf{A} \cdot \nabla f + f \nabla \cdot \mathbf{A}$$

i due termini risultano

$$\begin{cases} \nabla \cdot [\nabla P e^{-j k_0 S}] = [-j k_0 \nabla P \cdot \nabla S + \nabla^2 P] e^{-j k_0 S} \\ \nabla \cdot [-j k_0 P \nabla S e^{-j k_0 S}] = [-k_0^2 (\nabla S)^2 P - j k_0 (\nabla P \cdot \nabla S + P \nabla^2 S)] e^{-j k_0 S} \end{cases}$$

in definitiva, dividendo per  $e^{-j k_0 S(\mathbf{r})} \neq 0$ , l'equazione di Helmholtz (2.1) diventa:

$$\nabla^2 P - j k_0 (2 \nabla P \cdot \nabla S + P \nabla^2 S) - [(\nabla S)^2 k_0^2 + \sigma^2] P = 0.$$

Tenendo conto che  $P, S \in \mathbb{R}$  possiamo uguagliare a zero il coefficiente dell'immaginario e di conseguenza anche i restanti due termini, ottenendo:

$$\nabla^2 P - k_0^2 P (\nabla S)^2 = \sigma^2 P, \quad (2.3)$$

$$2 \nabla P \cdot \nabla S + P \nabla^2 S = 0. \quad (2.4)$$

Dalla (2.3) siamo in grado di ricavare altre due equazioni dette rispettivamente *equazione iconale* ed *equazione dei raggi*, ove compaiono come incognite la forma dei fronti d'onda e le direzioni dei raggi. Dalla (2.4) si ricaverà l'*equazione del trasporto*. Queste tre costituiscono le equazioni basilari dell'ottica geometrica.

### 2.2.1 L'equazione iconale

L'equazione (2.3) può essere riscritta come

$$(\nabla S)^2 = -\frac{\sigma^2}{k_0^2} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\nabla^2 P}{P} = n^2 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\nabla^2 P}{P} \quad (2.5)$$

dove  $n = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} \geq 1$  è l'indice di rifrazione anch'esso funzione di punto. Il secondo termine al secondo membro della (2.5) sarebbe uguale all'unità se  $P$  variasse nello spazio con periodo uguale a  $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ , ma avendo supposto  $P$  funzione lentamente variabile rispetto a  $\lambda_0$  stessa, è lecito supporre

$$|\nabla^2 P| \ll k_0^2 |P|. \quad (2.6)$$

Per effetto di questa osservazione la (2.5) può essere semplificata come

$$(\nabla S)^2 = n^2. \quad (2.7)$$

Tale equazione è detta *equazione iconale* (o *delle immagini*), la risoluzione permette di individuare la famiglia delle *superfici equifase* dell'onda (2.2), si ottiene così una prima caratterizzazione figurativamente semplice della propagazione.

### 2.2.2 L'equazione dei raggi

Poichè si sta espandendo il campo in onde localmente piane, con le superfici equifase individuate dall'equazione iconale si possono considerare i vettori di propagazione  $\mathbf{k}$  ad esse perpendicolari. Le linee che inviluppano questi vettori, ovvero le linee normali alla famiglia delle superfici equifase sono dette *traiettorie dei raggi*.

Sebbene l'equazione iconale permetta di ricostruire le traiettorie dei raggi, si può tuttavia cercare di caratterizzare la propagazione del campo elettromagnetico trovando una equazione differenziale nella quale l'incognita sia legata in maniera più diretta ai raggi stessi.

A tal fine si introduca lungo la traiettoria del raggio una coordinata curvilinea  $u$  con coefficiente metrico unitario<sup>1</sup>. Il versore tangente alla traiettoria è

$$\hat{u} = \frac{d\mathbf{r}}{du}, \quad (2.8)$$

mentre l'operatore che dà la derivata direzionale lungo la normale alle superfici equifase è

$$\frac{d}{du} = \hat{u} \cdot \nabla. \quad (2.9)$$

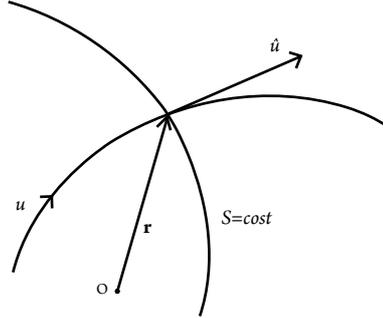
---

<sup>1</sup>Ciò significa che il rapporto tra la lunghezza di un tratto arbitrario percorso lungo l'asse individuato dalla coordinata curvilinea e la corrispondente variazione di  $u$  è 1.

Dall'equazione iconale si può allora scrivere:

$$\nabla S = n\hat{u} , \quad (2.10)$$

poichè, per definizione, il gradiente di  $S$  è ortogonale alle superfici equifase e quindi la sua direzione coincide con quella del raggio.



Valutando il gradiente ad entrambi i membri dell'equazione iconale si ottiene

$$\nabla(\nabla S \cdot \nabla S) = 2n\nabla n ,$$

dove l'operatore differenziale al primo membro può essere sviluppato secondo l'identità vettoriale

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

tenendo conto che  $\nabla \times \nabla S \equiv 0 \quad \forall S$ .

In definitiva si ha:

$$\begin{aligned} 2(\nabla S \cdot \nabla)\nabla S &= 2n\nabla n , \\ 2n(\hat{u} \cdot \nabla)(n\hat{u}) &= 2n\nabla n . \end{aligned}$$

che diviso per  $2n \neq 0$  ed utilizzando le definizioni (2.8),(2.9) porta a

$$\frac{d}{du} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{du} \right) = \nabla n \quad (2.11)$$

detta *equazione dei raggi*.

In questa equazione il secondo membro è il termine noto, mentre l'incognita è la posizione  $\mathbf{r}$  del punto corrente lungo il generico raggio. Questa equazione è piuttosto complessa poichè in essa appare una derivata di direzione dove la direzione è incognita, perciò è spesso risolta per via numerica da programmi detti di *ray tracing*.

In molti casi pratici tuttavia si può utilizzare un approccio analitico sulla base di ritenere nota a priori la direzione di propagazione dei raggi: l'*asse ottico*. Questa semplificazione permette di porre  $du \simeq dz$  una volta posti in

un sistema di riferimento cartesiano ortogonale dove l'asse ottico è allineato con l'asse  $z$ . La (2.11) può essere perciò riscritta nella forma:

$$\frac{d}{dz} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{dz} \right) = \nabla n$$

espressione più semplice della precedente per la presenza di una derivata ordinaria.

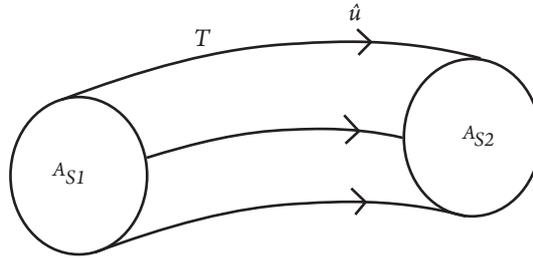
### 2.3 I limiti dell'ottica geometrica

Torniamo ad occuparci dell'equazione (2.4) precedentemente lasciata in sospeso. Secondo l'identità vettoriale (2.15), può essere riscritta come

$$\nabla \cdot (P^2 \nabla S) = \nabla \cdot (P^2 n \hat{u}) = 0, \quad (2.12)$$

detta *equazione del trasporto*.

Essendo questa una quantità con divergenza nulla, applicando il teorema di Gauss considerando un'opportuna superficie chiusa, si evince che il flusso attraverso questa è nullo. Si consideri dunque un *tronco di tubo di flusso*



della quantità  $P^2 n$ , di superficie laterale  $T$ . Indicando con  $A_S$  una *qualsiasi* superficie equifase, che taglia quindi ortogonalmente il tronco di tubo di flusso, la (2.12) equivale a scrivere:

$$\int_{A_S} P^2 n dA_S = \int_{A_S} |\psi|^2 n dA_S = \text{costante} \quad (2.13)$$

Dunque l'ottica geometrica predice che *si conserva il flusso* della quantità  $|\psi|^2 n$  e questo è il limite della teoria, basti pensare ai *fuochi*, ovvero i punti dove convergono infiniti raggi, dove per la (2.13) dovrebbe essere

$$|\psi|^2 n \rightarrow +\infty$$

risultato fisico inaccettabile poichè  $\psi$  è una componente del campo elettromagnetico che non può divergere.

### 2.3.1 Significato elettromagnetico dell'ottica geometrica

L'approccio scalare che è stato fin qui utilizzato, non è meno accurato di una teoria vettoriale dell'ottica geometrica che può essere impostata a partire dai vettori del campo elettromagnetico:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r}) e^{-jk_0 S(\mathbf{r})}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \vec{\mathcal{H}}(\mathbf{r}) e^{-jk_0 S(\mathbf{r})}, \quad (2.14)$$

con  $\vec{\mathcal{E}}$  ed  $\vec{\mathcal{H}}$  lentamente variabili.

Il motivo risiede nel fatto che pervenendo all'equazioni dell'ottica geometrica si effettua inevitabilmente una scalarizzazione del problema. Secondo l'identità vettoriale

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = f\nabla \times \mathbf{A} + \nabla f \times \mathbf{A}, \quad (2.15)$$

inserendo le (2.14) nelle equazioni di Maxwell si ha:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &\equiv (\nabla \times \vec{\mathcal{E}})e^{-jk_0 S} + (-jk_0 \nabla S) e^{-jk_0 S} \times \vec{\mathcal{E}} = -j\omega\mu \vec{\mathcal{H}} e^{-jk_0 S} \\ \nabla \times \mathbf{H} &\equiv (\nabla \times \vec{\mathcal{H}})e^{-jk_0 S} + (-jk_0 \nabla S) e^{-jk_0 S} \times \vec{\mathcal{H}} = j\omega\epsilon \vec{\mathcal{E}} e^{-jk_0 S}. \end{aligned}$$

Dividendo per  $k_0 e^{-jk_0 S} = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} e^{-jk_0 S}$  e trascurando quindi il primo addendo per effetto dell'approssimazione

$$|\nabla \times \vec{\mathcal{E}}| \ll |k_0 \vec{\mathcal{E}}|, \quad |\nabla \times \vec{\mathcal{H}}| \ll |k_0 \vec{\mathcal{H}}|$$

otteniamo:

$$\nabla S \times \vec{\mathcal{E}} \simeq n\eta\vec{\mathcal{H}}, \quad \nabla S \times \vec{\mathcal{H}} \simeq -n\frac{\vec{\mathcal{E}}}{\eta}$$

dove  $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$  è l'impedenza d'onda, anch'essa funzione di punto, mentre  $n = \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu_0\epsilon_0}}$  è ancora l'indice di rifrazione.

Tenuto conto della (2.10) si ha infine:

$$\hat{u} \times \vec{\mathcal{E}} \simeq \eta\vec{\mathcal{H}}, \quad \hat{u} \times \vec{\mathcal{H}} \simeq -\frac{\vec{\mathcal{E}}}{\eta}. \quad (2.16)$$

Quest'ultime equazioni permettono alcune osservazioni:

1. I vettori  $\vec{\mathcal{E}}$ ,  $\vec{\mathcal{H}}$  e  $\nabla S$  (oppure  $\hat{u}$ ) formano una *terna trirettangola*; perciò il campo è *trasverso elettromagnetico*, in ogni punto  $Q$ , rispetto alla direzione del raggio che passa per quel punto.
2. Essendo  $\eta$  reale, i vettori  $\vec{\mathcal{E}}$  ed  $\vec{\mathcal{H}}$ , e per conseguenza anche i vettori  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{H}$ , sono fra loro in *fase* in ogni punto  $Q$ .
3. Come conseguenza, il vettore di Poynting  $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*/2$  è dovunque *reale e tangente alla traiettoria del raggio*.

4. L'impedenza d'onda nella direzione del raggio  $\eta(\hat{u})$  è, in ogni punto  $Q$ , uguale a  $\eta(Q)$ , impedenza intrinseca del mezzo nel punto  $Q$ .

Queste proprietà evidenziano come l'approssimazione dell'ottica geometrica comporta l'attribuzione al campo elettromagnetico, punto per punto, di caratteristiche di *un' onda piana uniforme*, di qui si evince il significato elettromagnetico del modello d'*onda piana locale* precedentemente introdotto.

Il motivo per cui l'ottica geometrica fallisce, è che nel modello delle onde piane uniformi non si considerano le onde riflesse che devono necessariamente nascere in presenza di discontinuità dei parametri costitutivi. Questo fatto è messo in luce dalla conservazione dell'integrale del vettore di Poynting lungo un tronco di tubo di flusso delimitato da una famiglia di raggi: poichè  $\mathbf{P}$  è parallelo a  $\hat{u}$ , si ha

$$\int_{A_S} \mathbf{P} dA_S = \text{costante}$$

per ogni superficie  $A_S$  che tagli ortogonalmente il tubo di flusso. In prossimità di un punto dello spazio nel quale la sezione del tronco di tubo di flusso va a zero, dovrebbe quindi risultare  $|\mathbf{P}| \rightarrow +\infty$ , risultato fisico inaccettabile.

## 2.4 Fasci gaussiani

Si è dunque mostrato che non è il fatto di aver scelto una trattazione scalare a comportare una descrizione della propagazione che presenta dei casi critici. Scopo di questo paragrafo è ottenere dei risultati che superano i limiti sopra esposti. A tal fine, si vuole rimuovere l'ipotesi iniziale  $P \in \mathbb{R}$  ed  $S \in \mathbb{R}$ , includendo in tal modo le *onde evanescenti* precedentemente trascurate.

Si supponga che la propagazione di un campo elettromagnetico avvenga in un mezzo omogeneo, ad esempio il vuoto, e prevalentemente in direzioni al più inclinate rispetto all'asse  $z$  di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. La generica componente del campo, risolvendo *rigorosamente* l'equazione di Helmholtz scalare ed omogenea, può essere posta tale che

$$\psi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}) e^{-jk_0 z} \quad (2.17)$$

con  $\phi$  funzione lentamente variabile rispetto alla coordinata  $z$ . Inserendo tale soluzione nell'equazione di Helmholtz si ottiene

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2jk_0 \frac{\partial}{\partial z} - k_0^2 \right] \phi = \sigma^2 \phi . \quad (2.18)$$

Per definizione di lenta variabilità di  $\phi$  rispetto a  $z$  si ha tuttavia

$$\left| \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right| \ll 2k_0 \left| \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|$$

che utilizzata nella (2.18) assieme al fatto che nel vuoto vale  $\sigma^2 = -k_0^2$ , otteniamo

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 2jk_0 \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2.19)$$

versione bidimensionale dell'equazione di Schrödinger.

Tale equazione è piuttosto interessante perchè evidenzia come la distribuzione *spaziale* del campo presenti un involuppo non costante  $\phi(\mathbf{r})$ , ovvero si considera un campo costituito dalla sovrapposizione di onde piane *isofrequenziali*, ma aventi *vettori d'onda diversi*. Onde siffatte, hanno diverse direzioni di propagazione ed è per questo che la forma *spaziale* dell'involuppo del campo si modifica man mano che il campo si propaga. L'equazione di Schrödinger descrive questo fenomeno di *diffrazione* con la presenza di derivate seconde rispetto ai due gradi di libertà  $x$  ed  $y$ , componenti di ciascun vettore d'onda.

Limitiamo per semplicità lo studio ad un caso particolare. Si consideri un campo il cui involuppo spaziale  $\phi$  è una funzione la cui ampiezza nel generico piano trasverso  $z = \text{costante}$  è proporzionale ad una Gaussiana a simmetria di rivoluzione rispetto all'asse  $z$ :

$$\phi(x, y, z = 0) = A \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{w_0^2} \right\}$$

L'evoluzione del campo  $\psi$  è calcolabile utilizzando la trasformata di Fourier dell'involuppo definita come

$$\hat{\phi}(\kappa_x, \kappa_y, z) = \int d\kappa_x \int d\kappa_y \phi(x, y, z) e^{-j(\kappa_x x + \kappa_y y)} .$$

L'equazione (2.19) su tale dominio diventa

$$2jk_0 \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} = -(\kappa_x^2 + \kappa_y^2) \hat{\phi} , \quad (2.20)$$

la condizione iniziale mostra che lo spettro è costituito da un numero finito di onde piane:

$$\hat{\phi}(\kappa_x, \kappa_y, 0) = \frac{Aw_0^2}{2} \exp \left\{ -w_0^2 \frac{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}{4} \right\} \neq 0 \quad \forall \kappa_x, \kappa_y$$

La (2.20) ha perciò soluzione

$$\hat{\phi}(\kappa_x, \kappa_y, z) = \hat{\phi}(\kappa_x, \kappa_y, 0) \exp \left\{ -\frac{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}{2jk_0} z \right\} ,$$

omettendo per brevità il calcolo dell'antitrasformata lungo la generica coordinata  $z$  (si rimanda a [1]) e ricordando la (2.17) si ottiene il campo

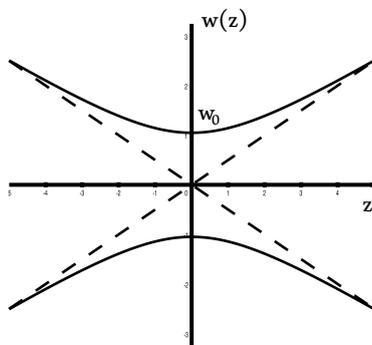
$$\psi(\mathbf{r}) = A \frac{w_0 e^{-j\chi(z)}}{w(z)} \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} - jk_0 \left( \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + z \right) \right\}$$

dove

$$w^2(z) = w_0^2 \left[ 1 + \left( \frac{z\lambda_0}{\pi w_0^2} \right)^2 \right] \quad \text{e} \quad R(z) = z \left[ 1 + \left( \frac{\pi w_0^2}{z\lambda_0} \right)^2 \right]. \quad (2.21)$$

Il primo termine all'esponente nell'espressione del campo mostra come l'inviluppo spaziale  $\phi$  mantenga la forma di una gaussiana bidimensionale la cui larghezza  $w(z)$  varia al variare della coordinata di propagazione secondo l'espressione in (2.21). Tale funzione rappresenta il raggio della circonferenza sulla quale il modulo di  $\phi$  è ridotto a  $1/e$  del suo valore sull'asse  $z$ .

Per convenzione, poniamo l'origine  $z = 0$  in corrispondenza del minimo  $w = w_0$ ; tale piano viene detto *piano della cintura*.



Il secondo termine all'esponente nell'espressione del campo, se costante, individua le superfici equifase dipendenti da  $R(z)$  raggio di curvatura del fronte d'onda nel punto  $(0, 0, z)$ .

La variabile da cui dipendono sia l'allargamento relativo del fascio, sia la curvatura dei fronti d'onda, è il rapporto fra l'area del fascio sul piano della cintura  $\pi w_0^2$ , e il prodotto  $\lambda_0 z$ : quanto più è stretta la cintura del fascio rispetto a  $\lambda_0$ , tanto più rapidi sono l'allargarsi del fascio stesso e l'incurvarsi dei fronti d'onda al crescere di  $|z|$ . Ciò è in accordo con i requisiti generali di base della teoria della diffrazione (Capitolo 3), i quali vengono invece violati dall'ottica geometrica; questo è un primo ed importante segno della migliore approssimazione insita nei fasci gaussiani rispetto all'ottica a raggio.

Osservando inoltre il comportamento del campo da lontano rispetto al piano della cintura, il fascio presenta un andamento convergente che sembra focalizzarsi in un punto di dimensione trasversa nulla (caustica). In questo caso però, a differenza dell'ottica geometrica, non arriviamo ad alcun assurdo fisico: la dimensione trasversa del fascio si riduce senza mai arrivare ad avere sezione nulla, così da presentare un'ampiezza non divergente.

Questo risultato è dovuto al fatto che il fascio gaussiano è composto da un numero finito di onde piane uniformi e di *onde evanescenti*, quest'ultime

che si attenuano in direzione di  $z$ . L'importanza del loro contributo sarà tanto maggiore quanto minore è  $w_0$ , evidenziando ancora una volta l'errore commesso in ottica geometrica avendo trascurato le onde evanescenti.

Un ultimo commento è speso a chiarire il significato del termine di ampiezza  $w_0/w(z)$ : discendendo dal principio di conservazione dell'energia, il termine mostra come l'ampiezza dell'involuppo diminuisce man mano che il fascio si allarga nella propagazione.

Infine il termine di fase

$$\chi(z) = \arctan\left(\frac{\lambda_0 z}{\pi w_0^2}\right)$$

è limitato tra  $\pm\pi/2 \forall z$ , trascurabile perciò rispetto a tutti gli altri termini di fase.

## Capitolo 3

# Teoria della diffrazione

Il comportamento delle onde elettromagnetiche in presenza di ostacoli dipende in maniera molto vistosa dal rapporto fra le dimensioni trasversali dell'ostacolo stesso e la lunghezza d'onda in gioco  $\lambda$ . Quando le dimensioni di un ostacolo sono paragonabili alla lunghezza d'onda, la propagazione non si presta ad essere descritta nè attraverso il formalismo delle onde piane, nè attraverso quello per mezzi variabili gradualmente, come l'ottica geometrica o i fasci gaussiani. È necessaria perciò la teoria della diffrazione, in grado di descrivere quei fenomeni che non si spiegano in termini di raggi riflessi o rifratti. Questa definizione venne data da Sommerfeld in relazione ai fenomeni ottici, tuttavia la teoria si estende con generalità a tutto lo spettro elettromagnetico, rivestendo un ruolo fondamentale in sede di analisi e progettazione delle moderne antenne a microonde.

### 3.1 Formulazione vettoriale

Si supponga che le sorgenti di un campo e le disomogeneità del mezzo siano localizzate tutte entro una regione delimitata da una superficie chiusa regolare  $S$ . Il teorema di equivalenza (Appendice A.2) permette di determinare il campo diffratto nella regione esterna a  $S$ , sede di mezzo omogeneo, conoscendo le componenti tangenti di  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{H}$  in ogni punto di  $S$ , di modo da poter considerare le densità di corrente superficiali

$$\mathbf{J}_S = \hat{n} \times \mathbf{H}, \quad \mathbf{M}_S = \mathbf{E} \times \hat{n},$$

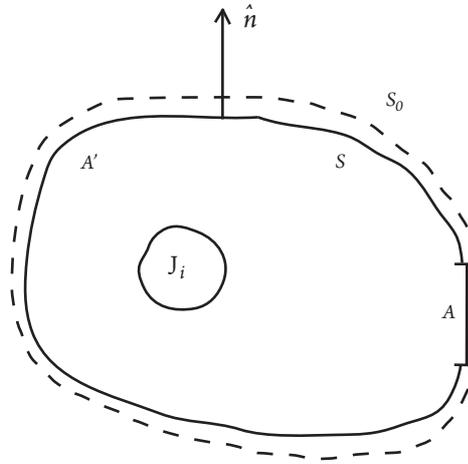
come le nuove sorgenti del campo.

I valori delle suddette componenti non si conoscono con esattezza, ma da un punto di vista operativo la superficie  $S$  può essere scelta tale da poter supporre noto il loro valore su di essa con un sufficiente grado di precisione, arrivando così ad una soluzione del campo approssimata accettabile all'esterno di  $S$ .

Si vogliono ora tradurre le considerazioni precedenti in relazioni quantitative.

### 3.1.1 L'integrale di diffrazione

Si supponga che le sorgenti siano circondate da una superficie chiusa  $S = A' \cup A$ , dove  $A'$  è una superficie aperta impermeabile all'energia elettromagnetica, ad esempio un conduttore elettrico perfetto, mentre  $A$  è un'apertura il cui intorno opportuno è supposto sede di un mezzo omogeneo come nella regione esterna ad  $S$ .



Sotto queste ipotesi, il teorema di equivalenza si può applicare ad una superficie chiusa  $S_0$ , della quale fa parte  $A$  e completata con una superficie posta a distanza arbitrariamente piccola dalla faccia esterna di  $A'$ . Considerando come di consueto  $\hat{n}$  vettore normale orientato verso l'esterno di  $S$ , nel generico punto  $P$  all'esterno di  $S_0$ , con la scelta di Lorentz, valgono le espressioni dei potenziali:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{S_0} \hat{n} \times \mathbf{H} \frac{e^{-\sigma\rho}}{\rho} dS, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{F} = \frac{\epsilon_c}{4\pi} \int_{S_0} \mathbf{E} \times \hat{n} \frac{e^{-\sigma\rho}}{\rho} dS, \quad (3.2)$$

soluzioni delle equazioni:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} - \sigma^2 \mathbf{A} &= \begin{cases} -\mu \mathbf{J}_S = -\mu(\hat{n} \times \mathbf{H}) & \text{su } S, \\ 0 & \text{in } P \notin S \end{cases} \\ \nabla^2 \mathbf{F} - \sigma^2 \mathbf{F} &= \begin{cases} -\epsilon_c \mathbf{M}_S = -\epsilon_c(\mathbf{E} \times \hat{n}) & \text{su } S, \\ 0 & \text{in } P \notin S \end{cases} \end{aligned}$$

Nelle espressioni dei potenziali,  $\rho$  è la distanza di  $P$  dal punto corrente su  $S_0$  e la quantità  $-(1/4\pi)(e^{-\sigma\rho}/\rho)$  è una funzione di Green a simmetria sferica arbitrariamente scelta.

Le espressioni (3.1) e (3.2) richiedono la conoscenza di  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{H}$  su tutta la superficie  $S_0$ , ovvero su punti che appartengono ad  $A$  e su punti comunque esterni ad  $A'$  in cui il valore del campo è incognito. È necessaria perciò una semplificazione: avendo supposto  $A'$  conduttore elettrico perfetto, in una valutazione approssimata *possiamo supporre sulla faccia esterna di  $A'$   $\mathbf{E}_{tan} = \mathbf{H}_{tan} \equiv 0$* . Gli integrali (3.1) e (3.2) si riducono perciò ai soli contributi dell'apertura  $A$ , e vengono detti *integrali di diffrazione*:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_A \hat{n} \times \mathbf{H} \frac{e^{-\sigma\rho}}{\rho} dS, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{F} = \frac{\epsilon_c}{4\pi} \int_A \mathbf{E} \times \hat{n} \frac{e^{-\sigma\rho}}{\rho} dS. \quad (3.4)$$

Dove ora  $\rho = \overline{PQ}$  con  $Q$  corrente sull'apertura  $A$ , e  $P$  generico punto esterno alla superficie  $S$ . Si può quindi calcolare il campo diffratto dall'apertura  $A$  come *somma dei contributi dovuti alle sorgenti equivalenti*:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\mu\epsilon_c} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - \frac{1}{\epsilon_c} \nabla \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} + \frac{1}{j\omega\mu\epsilon_c} \nabla \times \nabla \times \mathbf{F}$$

Sostituendo le espressioni dei potenziali vettori si ha

$$\mathbf{E}(P) = \frac{1}{j\omega\epsilon_c} \frac{1}{4\pi} \nabla_P \times \nabla_P \times \int_A \hat{n} \times \mathbf{H} \frac{e^{-\sigma\rho}}{\rho} dS - \frac{1}{4\pi} \nabla_P \times \int_A \mathbf{E} \times \hat{n} \frac{e^{-\sigma\rho}}{\rho} dS$$

$$\mathbf{H}(P) = \frac{1}{4\pi} \nabla_P \times \int_A \hat{n} \times \mathbf{H} \frac{e^{-\sigma\rho}}{\rho} dS + \frac{1}{j\omega\mu} \frac{1}{4\pi} \nabla_P \times \nabla_P \times \int_A \mathbf{E} \times \hat{n} \frac{e^{-\sigma\rho}}{\rho} dS$$

dove  $\nabla_P$  sottolinea che le operazioni indicate con il vettore simbolico  $\nabla$  vanno eseguite rispetto alle coordinate del punto potenziato  $P$ .

Dunque le intensità dei campi elettrico e magnetico sono determinate dai componenti tangenti dei campi sulle aperture e dalle derivate parziali della funzione  $e^{-\sigma\rho}/\rho$  rispetto alle coordinate del punto potenziato  $P$ .

Poichè  $P \notin A$  è possibile scambiare l'ordine delle operazioni di integrazione e derivazione, di modo che gli argomenti degli integrali possano essere sviluppati secondo le identità vettoriali

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \\ \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\nabla_P \times \left[ (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}) \frac{e^{-\sigma\rho}}{\rho} \right] &= \frac{e^{-\sigma\rho}}{\rho} \nabla_P \times (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}) + \nabla_P \frac{e^{-\sigma\rho}}{\rho} \times (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}) = \\
&= -(\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}) \times \left[ \nabla_P \frac{e^{-\sigma\rho}}{\rho} \right]. \\
\Rightarrow \nabla_P \times \nabla_P \times \left[ (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}) \frac{e^{-\sigma\rho}}{\rho} \right] &= \nabla_P \times \left\{ -(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}) \times \left[ \nabla_P \frac{e^{-\sigma\rho}}{\rho} \right] \right\} = \\
-(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}) \nabla_P^2 \frac{e^{-\sigma\rho}}{\rho} + \nabla_P \frac{e^{-\sigma\rho}}{\rho} [\nabla_P \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H})] - \nabla_P \frac{e^{-\sigma\rho}}{\rho} [\nabla_P \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H})] + [(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}) \cdot \nabla_P] \nabla_P \frac{e^{-\sigma\rho}}{\rho} &= \\
= -(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}) \nabla_P^2 \frac{e^{-\sigma\rho}}{\rho} + [(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}) \cdot \nabla_P] \nabla_P \frac{e^{-\sigma\rho}}{\rho} &= \\
= -(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}) \sigma^2 \frac{e^{-\sigma\rho}}{\rho} + [(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}) \cdot \nabla_P] \nabla_P \frac{e^{-\sigma\rho}}{\rho}. &
\end{aligned}$$

in ultimo si è usato il fatto che la funzione  $e^{-\sigma\rho}/\rho$  per  $\rho \neq 0$  risolve l'equazione di Helmholtz omogenea. Analogamente avviene per i termini che compaiono nell'espressione di  $\mathbf{H}(P)$ .

Ricordando che  $\rho = \overline{PQ}$ , le coordinate dei punti  $P$  e  $Q$ , al variare di  $Q$  su  $A$ , compaiono simmetricamente le une rispetto alle altre nella funzione  $e^{-\sigma\rho}/\rho$  per cui ora, e non prima, l'operatore  $\nabla_P$  può essere sostituito con  $\nabla_Q$ . Con tutto ciò, le espressioni dei campi divengono:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(P) &= \frac{1}{j\omega\epsilon_c} \frac{1}{4\pi} \int_A [(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}) \cdot \nabla_Q] \nabla_Q \left( \frac{e^{-\sigma\rho}}{\rho} \right) dS_Q - \\
&- j\omega\mu \frac{1}{4\pi} \int_A \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H} \frac{e^{-\sigma\rho}}{\rho} dS_Q + \\
&+ \frac{1}{4\pi} \int_A \mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}} \times \nabla_Q \left( \frac{e^{-\sigma\rho}}{\rho} \right) dS_Q, \tag{3.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(P) &= -\frac{1}{4\pi} \int_A \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H} \times \nabla_Q \left( \frac{e^{-\sigma\rho}}{\rho} \right) dS_Q + \\
&+ \frac{1}{j\omega\mu} \frac{1}{4\pi} \int_A [(\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \nabla_Q] \nabla_Q \left( \frac{e^{-\sigma\rho}}{\rho} \right) dS_Q - \\
&- j\omega\epsilon_c \frac{1}{4\pi} \int_A (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}) \frac{e^{-\sigma\rho}}{\rho} dS_Q. \tag{3.6}
\end{aligned}$$

La nuova formulazione degli integrali di diffrazione consente così di eseguire i calcoli sull'apertura  $A$ .

### 3.1.2 Condizioni di illuminazione

Per il calcolo degli integrali di diffrazione (3.5) e (3.6) sarebbe necessario che fossero note le sorgenti  $(\mathbf{E} \times \hat{n})$  e  $(\hat{n} \times \mathbf{H})$  disposte sull'apertura ma supposte inizialmente incognite. Per procedere nel calcolo è necessario quindi pervenire ad approssimazioni, le più semplici consistono nel dividere il problema in due passi: calcolo del campo in assenza dell'apertura (*campo illuminante*), e successivamente calcolo del campo diffratto tramite gli integrali di diffrazione, in cui per  $(\mathbf{E} \times \hat{n})$  e  $(\hat{n} \times \mathbf{H})$  vengono inseriti i valori del campo illuminante.

Si analizzano due casi di rispondenza sperimentale.

#### Approssimazione dell'ottica geometrica

Nel caso in cui lo schermo in cui viene praticata l'apertura  $A$  sia *perfettamente assorbente* (impedenza superficiale uguale all'impedenza intrinseca del mezzo,  $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ ), il campo illuminante  $\{\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i\}$  è equivalente a quello generato da sorgenti situate in un mezzo omogeneo indefinitamente esteso. Il modello risulta accettabile solo quando la distanza tra le sorgenti e lo schermo è molto maggiore sia di  $\lambda$ , sia della dimensione delle sorgenti stesse. La terna  $\{\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i, \hat{n}\}$  è trirettangola e si ha:

$$\mathbf{E}_i = \hat{n} \times \mathbf{E}_i \times \hat{n} = \eta \mathbf{H}_i \times \hat{n} .$$

Il nome dell'approssimazione deriva anche dalla facilità con cui si può disporre di uno schermo opaco alle frequenze ottiche.

#### Approssimazione dell'ottica fisica

Se viceversa si suppone che lo schermo sia un *conduttore elettrico perfetto*, avendo trascurato in un primo momento l'apertura, su di esso vale  $\mathbf{E} \times \hat{n} \equiv 0$ . Per quanto riguarda il campo magnetico invece, essendo il coefficiente di riflessione uguale a -1 su tale superficie, la sua componente tangente *raddoppia*:  $\hat{n} \times \mathbf{H} = 2\hat{n} \times \mathbf{H}_i$ .

Gli integrali di diffrazione si riducono perciò alle espressioni

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(P) &= \frac{1}{j\omega\epsilon_c} \frac{1}{2\pi} \int_A [(\hat{n} \times \mathbf{H}_i) \cdot \nabla_Q] \nabla_Q \left( \frac{e^{-\sigma\rho}}{\rho} \right) dS_Q - \\ &- j\omega\mu \frac{1}{2\pi} \int_A \hat{n} \times \mathbf{H}_i \frac{e^{-\sigma\rho}}{\rho} dS_Q ; \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{H}(P) = -\frac{1}{2\pi} \int_A \hat{n} \times \mathbf{H}_i \times \nabla_Q \left( \frac{e^{-\sigma\rho}}{\rho} \right) dS_Q . \quad (3.8)$$

Queste approssimazioni si adattano bene anche al caso in cui l'apertura diffrangente, anziché praticata su uno schermo, è costituita da un oggetto metallico utilizzato come riflettore. In questo caso la sorgente del campo

illuminante si troverebbe nella stessa regione in cui si vorrebbe calcolare il campo diffratto, in realtà si può dimostrare che il problema è equivalente, ovvero il cambiamento è insignificante.

L'applicazione degli integrali (3.7), (3.8) significa trattare la diffrazione come un *problema locale*, cioè supporre che:

- non si debba tener conto di eventuali riflessioni multiple tra sorgente primaria e riflettore;
- le parti dell'apertura (o del riflettore) non illuminate direttamente non contribuiscono al campo diffratto.

Queste approssimazioni sono invece valide nel caso in cui i raggi di curvatura e le dimensioni dell'apertura sono abbastanza grandi rispetto alla lunghezza d'onda.

L'antenna a paraboloidale è un esempio di notevole interesse applicativo, verrà trattato più avanti facendo ricorso a queste approssimazioni.

Il campo totale infine, nella regione dove sono presenti le sorgenti e in quella oltre l'apertura, risulta rispettivamente somma del campo illuminante e di quello diffratto, e il campo diffratto stesso.

## 3.2 La teoria scalare

In maniera analoga a quanto visto nel caso delle teoria sviluppata per mezzi lentamente variabili, una formulazione scalare della teoria della diffrazione risulta essere un'*approssimazione* di quella vettoriale; tuttavia, anche se non trattati in questa sede, esistono casi come la propagazione guidata in cui l'approccio scalare può descrivere la propagazione in maniera rigorosa.

La funzione scalare  $\psi$  che descrive la propagazione, soddisfacente in un mezzo omogeneo all'equazione di Helmholtz scalare, può essere ricavata mediante l'introduzione della *funzione di Green*, soluzione generica del problema cioè con condizioni al contorno che rimangono imprecisate. Omettendo i calcoli (si rimanda a [2]), una soluzione formale del problema può essere ottenuta combinando opportunamente tale problema con quello di soluzione la funzione di Green  $G$ , integrando in un opportuno volume delimitato da una superficie chiusa  $S$  ed avvalendosi infine del teorema di Green. Si ottiene perciò:

$$\psi(P) = \int_S \left[ \frac{\partial \psi(Q)}{\partial n} G - \psi(Q) \frac{\partial G}{\partial n} \right] dS_Q , \quad (3.9)$$

dove  $Q \in S$ , e  $P$  si suppone per semplicità appartenente alla regione esterna ad  $S$ , puntata dal versore normale rispetto al quale sono calcolate le derivate

direzionali. Tale regione è sede di un mezzo omogeneo che si estende all'infinito dando contributo nullo alla (3.9) poichè sono supposte soddisfatte le condizioni di radiazione di Sommerfeld:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left| \frac{\partial \psi}{\partial r} \right| = \lim_{r \rightarrow \infty} r |\psi| = 0$$

dove  $r$  è la distanza di  $P$  da un'arbitraria origine all'infinito.

### 3.2.1 Formulazione di Helmholtz - Kirchhoff

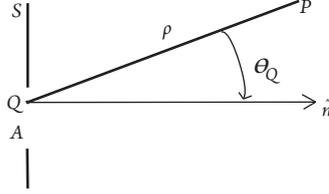
La formulazione più tradizionale della teoria scalare, simile a quella vettoriale, si ottiene scegliendo quale funzione di Green l'onda sferica elementare:

$$G = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-\sigma\rho}}{\rho}$$

con  $\vec{\rho}$  vettore congiungente  $P$  e  $Q$ . L'angolo  $\theta_Q$  compreso tra  $\hat{n}$  e  $\vec{\rho}$  discende dalla definizione di prodotto scalare:

$$\cos \theta_Q = \frac{\hat{n} \cdot \vec{\rho}}{|\vec{\rho}|}$$

e osservando che  $\nabla_\rho$  forma con  $\hat{n}$  un angolo  $\pi - \theta_Q$ , si ottiene:



$$\frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{\partial G}{\partial \rho} \cos \theta_Q = -\frac{1}{4\pi} \left( \sigma + \frac{1}{\rho} \right) \frac{e^{-\sigma\rho}}{\rho} \cos \theta_Q ;$$

quindi la (3.9) si riscrive come

$$\psi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{e^{-\sigma\rho}}{\rho} \left[ \psi(Q) \left( \sigma + \frac{1}{\rho} \right) \cos \theta_Q - \frac{\partial \psi(Q)}{\partial n} \right] dS_Q .$$

La trattazione fin qui descritta è rigorosa poichè  $S$  è una superficie chiusa. Considerando ora un'apertura  $A$  su uno schermo  $S$  introduciamo le *condizioni al contorno di Kirchhoff* analoghe a quelle introdotte nelle (3.3),(3.4):

$$\psi(Q) \equiv 0 , \quad \frac{\partial \psi(Q)}{\partial n} \equiv 0 \quad \text{per } Q \notin A . \quad (3.10)$$

Tale imposizione è evidentemente un'approssimazione e sarebbe inaccettabile poichè implicherebbe  $\psi \equiv 0$  ovunque (dimostrato in [2]), tuttavia l'approssimazione trova utile impiego in pratica poichè offre risultati in buon accordo

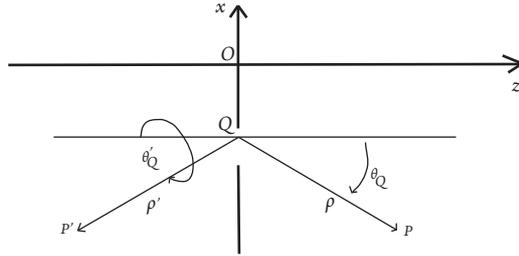
con quelli sperimentali. L'integrale di diffrazione nella formulazione scalare si scrive pertanto:

$$\psi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_A \frac{e^{-\sigma\rho}}{\rho} \left[ \psi(Q) \left( \sigma + \frac{1}{\rho} \right) \cos \theta_Q - \frac{\partial\psi(Q)}{\partial n} \right] dS_Q . \quad (3.11)$$

### 3.2.2 Formulazione di Rayleigh - Sommerfeld

L'approssimazione introdotta in (3.10), è connessa al fatto che si è voluto usare nella (3.9) la più semplice tra le funzioni di Green, corrispondente ad una sorgente puntiforme nello spazio libero. Da ciò è discesa la necessità di imporre *due* condizioni al contorno, corrispondenti ai gradi di libertà del problema. Quando le geometrie del problema lo consentono, è possibile evitare di intercorrere in questa difficoltà considerando una diversa funzione di Green, soddisfacente a condizioni al contorno che tengano conto delle *simmetrie* spaziali del problema.

La situazione più semplice è quella di un'apertura praticata in uno *schermo piano*, in tal caso infatti è immediato definire una funzione di Green a simmetria dispari oppure pari:



$$G^{(i)}(Q) = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{e^{-\sigma\rho}}{\rho} \mp \frac{e^{-\sigma\rho'}}{\rho'} \right) \quad (i = d, p) \quad (3.12)$$

dove d=dispari, p= pari.

Si può verificare che le funzioni (3.12) sono soluzioni dell'equazioni di Helmholtz in presenza di due sorgenti puntiformi poste nei punti  $P$  e  $P'$  speculari rispetto allo schermo, rispettivamente in opposizione di fase ( $i=d$ ) ed in fase ( $i=p$ ). Il punto  $P'$  viene a trovarsi però all'esterno del volume di integrazione su cui si applica il teorema di Green del procedimento precedente, giustificando perciò l'impiego delle (3.12) nella (3.9).

Tale operazione comporta evidentemente la scomparsa di uno dei due addendi sotto il segno di integrale, come conseguenza per procedere oltre bisogna imporre solo *una condizione al contorno*: l'annullarsi di  $\psi$  o  $\partial\psi/\partial n$ .

Scegliendo convenzionalmente la funzione  $G^{(d)}$ , l'integrale di diffrazione scalare prende la seguente espressione detta *di Rayleigh e Sommerfeld*:

$$\psi(P) = \frac{1}{2\pi} \int_A \psi(Q) \left( \sigma + \frac{1}{\rho} \right) \frac{e^{-\sigma\rho}}{\rho} \cos \theta_Q dS_Q . \quad (3.13)$$

### 3.3 Formule di Fresnel-Kirchhoff e di Rayleigh-Sommerfeld

Si vogliono ora discutere ulteriori approssimazioni utili al caso pratico.

Con riferimento dunque alla trattazione scalare fin qui esposta, poniamo l'attenzione al caso in cui la propagazione del campo diffratto avviene in un *mezzo privo di perdite*, si può allora porre

$$\sigma = jk = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} = j\frac{2\pi}{\lambda}.$$

In aggiunta, frequentemente il campo diffratto è di interesse pratico solo a *grande distanza dall'apertura*, si possono allora semplificare le (3.11) e (3.13) ritenendo valido che

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \gg \frac{1}{\rho}.$$

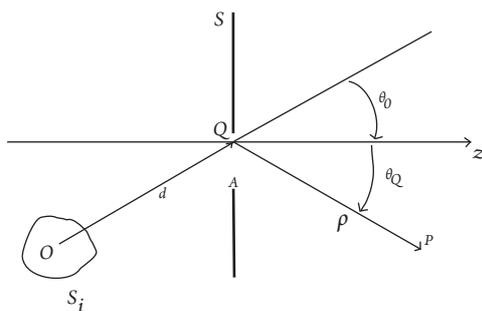
Un'ulteriore semplificazione consiste nel ritenere l'apertura  $A$  situata *nel campo a grande distanza rispetto alla sorgente del campo illuminante*. In tal caso, chiamata  $d$  la distanza tra sorgente ed apertura, l'approssimazione diviene

$$|\mathbf{d}| \gg \lambda \quad (3.14)$$

perciò il campo illuminante in  $A$  può scriversi come

$$\psi(Q) = F(\theta', \phi') \frac{e^{-jk d}}{d}$$

dove  $\theta'$  e  $\phi'$  sono le coordinate angolari del punto  $Q$  nel sistema di coordinate sferiche al quale viene riferita la sorgente del campo illuminante  $S_i$ , e la funzione  $F$  è ottenuta per integrazione sul volume di  $S_i$ . Dalla (3.14), chiamato



$\theta_0$  l'angolo compreso tra  $d$  e  $z$ , discende anche che

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_Q \cong \frac{\partial \psi}{\partial d} \cos \theta_0 \cong F'(\theta', \phi') (-jk) \cos \theta_0 \frac{e^{-jk d}}{d}.$$

Si possono così ricavare dalla (3.11) la *formula di Fresnel-Kirchhoff*:

$$\psi(P) = \frac{jk}{2\pi} \int_A F(\theta', \phi') \frac{e^{-jk(\rho+d)}}{\rho d} \left[ \frac{\cos \theta_0 + \cos \theta_Q}{2} \right] dA \quad (3.15)$$

e dalla (3.13) la *formula di Rayleigh-Sommerfeld*:

$$\psi(P) = \frac{jk}{2\pi} \int_A F(\theta', \phi') \frac{e^{-jk(\rho+d)}}{\rho d} \cos \theta_Q dA \quad (3.16)$$

che differisce dalla precedente per il *fattore di obliquità*, legato agli angoli  $\theta_0$  e  $\theta_Q$ . Nel caso in cui  $F(\theta', \phi') = F = \text{costante}$ , il campo diffratto dipenderà solamente *dalla forma dell'apertura* diffrangente.

### 3.4 La zona di Fresnel

Esaminate le approssimazioni che dipendono dalle ipotesi di grande distanza tra sorgente illuminante e apertura diffrangente, si discutono ora le semplificazioni discendenti quando la distanza fra il *punto di osservazione* o punto potenziato  $P$  e l'oggetto diffrangente è grande non solo rispetto a  $\lambda$ , ma anche rispetto a *tutte le altre dimensioni geometriche* in gioco.

In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con origine sull'apertura  $A$  e  $z$  ortogonale al piano tangente ad  $A$  nell'origine, si consideri  $P \equiv (x, y, z)$  generico, e  $Q \equiv (x', y', z' = 0)$  corrente su  $A$ . Poniamoci nella *regione parassiale*, ovvero nella regione tale che

$$z \gg |x|, \quad |x'|, \quad |y|, \quad |y'|$$

di modo che sia lecito supporre  $\cos \theta_Q \cong 1$ .

Essendo

$$\rho = \sqrt{z^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2}, \quad (3.17)$$

in forza di tali ipotesi possiamo porre al denominatore delle (3.15),(3.16)  $\rho \cong z$ . Nel paragonare il termine  $e^{-jk\rho}$  che compare al numeratore bisogna invece tener conto della lunghezza d'onda in esso implicita: se  $\forall Q \in A$  vale

$$\lambda z^3 \gg [(x - x')^2 + (y - y')^2]^2$$

allora è lecito troncare l'espansione binomiale della radice in (3.17) dopo il primo termine:

$$\rho \cong z \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{x - x'}{z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{y - y'}{z} \right)^2 \right].$$

La regione dove questa è valida viene detta *regione di Fresnel* e comporta un'ulteriore semplificazione della (3.15) che qui si riporta conglobando il fattore costante  $e^{-jkd}$  in  $F$ :

$$\psi(P) = \frac{j}{\lambda} \frac{e^{-jkz}}{z} \iint_A F \frac{1 + \cos \theta_0}{2d} e^{-j(k/2z)[(x-x')^2 + (y-y')^2]} dx' dy' = \quad (3.18)$$

$$= \frac{j e^{-jkz}}{\lambda z} e^{-j(k/2z)(x^2+y^2)} \iint_A F \frac{1 + \cos \theta_0}{2d} e^{-j(k/2z)(x'^2+y'^2)} e^{j(k/z)(xx'+yy')} dx' dy'$$

Quando si utilizza questa formula si parla diffrazione di Fresnel.

Si noti come questa espressione, tralasciando il fattore che moltiplica l'integrale che comporta solo un ritardo di fase, si presenta come *la trasformata di Fourier* bidimensionale della funzione

$$\Psi(Q) = F \frac{1 + \cos \theta_0}{2d} e^{-j(k/2z)(x'^2+y'^2)}$$

a condizione di interpretare come *frequenze spaziali* le quantità

$$f_x = \frac{kx}{2\pi z} = \frac{x}{\lambda z}, \quad f_y = \frac{ky}{2\pi z} = \frac{y}{\lambda z}.$$

### 3.5 La zona di Fraunhofer

Si supponga ora di considerare il campo in una regione sempre parassiale, ma supponendo verificata anche la condizione:

$$z \gg \frac{k}{2}(x'^2 + y'^2) \quad \forall Q \in A$$

in tale situazione si dice che il punto d'osservazione  $P$  appartiene alla *regione di Fraunhofer*, a rigore un sottoinsieme della regione di Fresnel ma per semplicità le si pensa come due regioni complementari.

Si può quindi porre  $\exp[\frac{-jk(x'^2+y'^2)}{2z}] \cong 1$ , la (3.18) così diventa:

$$\psi(P) = \frac{j e^{-jkz}}{\lambda z} e^{-j(k/2z)(x^2+y^2)} \iint_A F \frac{1 + \cos \theta_0}{2d} e^{j(k/z)(xx'+yy')} dx' dy' \quad (3.19)$$

A meno di fattori di proporzionalità, il campo diffratto nella regione di Fraunhofer è la *la trasformata di Fourier del campo illuminante sull'apertura*:

$$\Psi(Q) = F \frac{1 + \cos \theta_0}{2d}.$$

### 3.6 Alcuni esempi

Si vogliono analizzare ora due esempi di notevole interesse pratico ricorrendo alla teoria scalare.

#### 3.6.1 Apertura rettangolare

L'apertura rettangolare è l'insieme dei punti  $Q$  soddisfacenti alle disuguaglianze

$$|x'| \leq a/2, \quad |y'| \leq b/2.$$

Supponendo il campo illuminante costituito da un'onda piana uniforme che si propaga l'ungo l'asse  $z$ , comunque sia lo schermo assorbente o conduttore, il campo è costante sull'apertura:

$$\begin{cases} \Psi(Q) = F \frac{1+\cos\theta_0}{2d} = U = \text{cost} & \text{per } |x'| \leq a/2, |y'| \leq b/2. \\ \Psi(Q) = 0 & \text{altrove.} \end{cases} \quad (3.20)$$

La (3.19) fornisce nella regione di Fraunhofer il campo diffratto

$$\begin{aligned} \psi(P) &= U \frac{j e^{-jkz}}{\lambda z} e^{-j(k/2z)(x^2+y^2)} \int_{-a/2}^{a/2} dx' \int_{-b/2}^{b/2} dy' e^{j(k/z)(xx'+yy')} = \\ &= U \frac{j e^{-jkz}}{\lambda z} e^{-j(k/2z)(x^2+y^2)} 4ab \frac{\sin \bar{x}}{\bar{x}} \frac{\sin \bar{y}}{\bar{y}}; \end{aligned} \quad (3.21)$$

avendo introdotto le coordinate *normalizzate*

$$\bar{x} = \frac{\pi a x}{\lambda z}, \quad \bar{y} = \frac{\pi b y}{\lambda z}.$$

Definendo l'*intensità di radiazione normalizzata* come

$$i = \frac{\psi(P)\psi^*(P)}{\psi(M)\psi^*(M)} \leq 1,$$

con  $M$  punto fisso scelto nella direzione in cui  $|\psi|$  raggiunge il suo massimo assoluto e  $P$  descrivente tutta la sfera di raggio  $r = |M - 0|$ , la funzione risulta proporzionale al diagramma di direttività  $D(\theta, \varphi)$ . Sostituendovi la (3.21) quindi si ricava:

$$i = \frac{\sin^2 \bar{x}}{\bar{x}^2} \frac{\sin^2 \bar{y}}{\bar{y}^2},$$

si noti come l'ampiezza del lobo principale rispetto a quella dei secondari riveli un'elevata direttività.

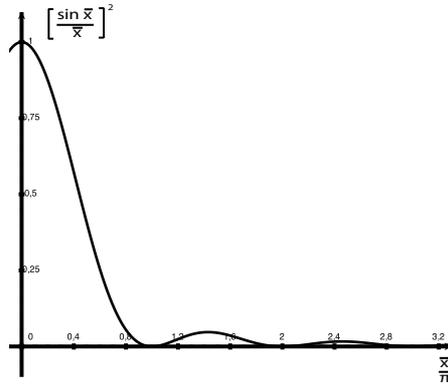


Figura 3.1: Intensità di radiazione normalizzata valutata per  $\bar{y} \equiv 0$

### 3.6.2 Apertura circolare

Un'apertura circolare di diametro  $2a$ , è definita come l'insieme dei punti  $Q$  soddisfacenti alla disequaglianza

$$R' \leq a;$$

se il campo illuminante è un'onda piana uniforme vale ancora la (3.20).  
Si passi alle coordinate cilindriche ponendo:

$$x = R \cos \phi, \quad y = R \sin \phi, \quad x' = R' \cos \phi', \quad y' = R' \sin \phi' .$$

Lasciando sotto il segno di integrale solo tutto ciò che dipende da  $Q$ , rimane da calcolare l'espressione

$$\int_0^a dR' R' \int_0^{2\pi} d\phi' e^{j(k/z)RR' \cos(\phi-\phi')}$$

Sfruttando le identità sulle funzioni di Bessel:

$$J_0(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ju \cos(\phi' - \phi_0)} d\phi', \quad \int_0^x \xi J_0(\xi) d\xi = x J_1(x),$$

$$\Rightarrow \quad \psi(P) = jU e^{-jkz} e^{-j(kR^2/2z)} \frac{a}{R} J_1\left(\frac{k}{z}Ra\right) .$$

Anche qui essendo  $D(\theta, \varphi) \propto i$  arriviamo alle stesse conclusioni: introducendo la quantità normalizzata  $\bar{R} = \frac{\pi 2aR}{\lambda z}$  l'intensità di radiazione normalizzata vale

$$i = 4 \left| \frac{J_1(\bar{R})}{\bar{R}} \right|^2 .$$

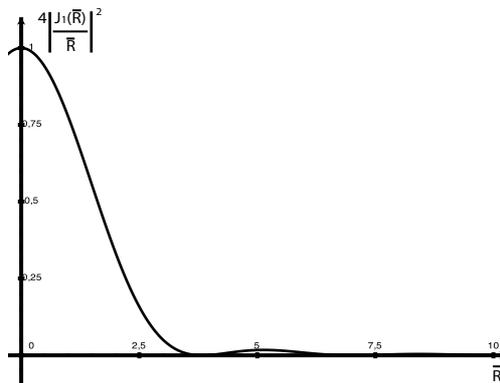


Figura 3.2: Diagramma di Airy

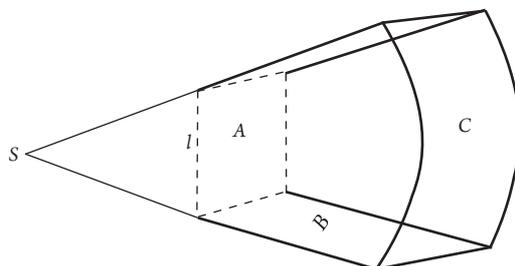
### 3.7 Cenni sulla *teoria geometrica della diffrazione* (GTD)

Un concetto che è stato più volte sottolineato è che il campo diffratto nelle approssimazioni classiche è il risultato di un integrale che è stato esteso ad una superficie aperta, mentre la teoria rigorosa richiederebbe di considerare una superficie chiusa.

La diffrazione appare come un processo *globale* poichè il campo dipende dall'*intero* oggetto diffrangente: basti pensare che nel generico punto di osservazione appartenente alla regione di Fraunhofer il campo è la trasformata di Fourier del campo sull'oggetto diffrangente.

A questo punto di vista si contrappone però una nozione intuitiva, secondo la quale, quando la lunghezza d'onda diventa piccola rispetto alle dimensioni geometriche in gioco, dalla diffrazione si passa con gradualità all'ottica geometrica: la diffrazione deve tendere a divenire un fenomeno *locale*.

Un fondamento rigoroso di questo concetto è dato dalla *teoria geometrica della diffrazione*: in linea di principio, il campo generato da una sorgente  $S$  in un punto generico  $P$  oltre uno schermo, può rigorosamente esprimersi a mezzo di integrali estesi alle superfici  $A, B$  e  $C$  di figura.



Su  $A$  il campo da integrare coincide con quello illuminante, la superficie  $C$  può essere mandata all'infinito in modo da poterne trascurare il contributo al campo. Quanto a  $B$ , si può dimostrare che l'integrale di superficie corrispondente coincide con l'integrale di linea esteso al contorno  $l$  dell'apertura  $A$ . Il campo totale è perciò la somma del campo transitante attraverso l'apertura e il *campo diffratto dal bordo*. Quest'ultimo contributo, essendo un integrale di linea, sotto certe ipotesi può essere ulteriormente scisso in contributi dovuti a sorgenti localizzate, puntiformi, ciascuna delle quali irradia raggi analogamente a quanto avviene per l'ottica geometrica, con la differenza che in questo caso i raggi si propagano anche nella regione d'ombra geometrica.

Si sottolinea nuovamente che tali condizioni si possono verificare solo per dimensioni dell'apertura abbastanza grandi rispetto alla lunghezza d'onda.

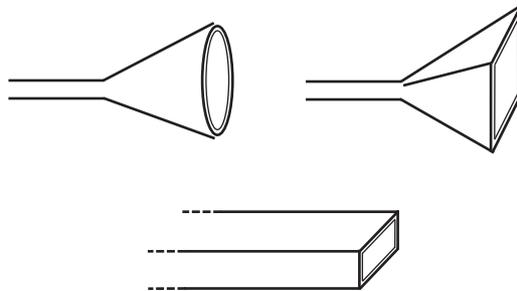
## Capitolo 4

# Antenne ad apertura

### 4.1 Configurazioni ed utilizzo

Le antenne ad apertura risultano essere più familiari oggi che nel passato a causa del crescente utilizzo delle alte frequenze, comportando lo sviluppo della ricerca nel progetto di antenne a forme sempre più sofisticate. Questo tipo di antenne è infatti di più comune utilizzo alle frequenze delle microonde.

Esistono molti tipi di configurazioni geometriche delle antenne ad apertura: possono prendere forma da una guida d'onda troncata o da una tromba, le aperture possono a loro volta differenziarsi in rettangolari, circolari ed ellittiche tra le più comuni.



Svariati tipi di configurazioni si possono ottenere inoltre nelle molteplici alternative offerte dal progetto dei riflettori metallici, si è già parlato infatti dell'equivalenza del problema ad un'apertura applicata in uno schermo. La configurazione più diffusa in questa famiglia di antenne è senz'altro l'antenna a paraboloidale.

Le antenne ad apertura trovano applicazione dalle comunicazioni a microonde e radio astronomiche, agli impieghi satellitari, ambiti che hanno reso necessario lo sviluppo di tecniche analitiche e sperimentali del progetto dei riflettori e delle condizioni di illuminazione in ordine di massimizzare il gua-

dagno. Nelle applicazioni aeree ed aerospaziali possono comodamente essere installate sulla superficie del mezzo senza intaccarne l' aerodinamicità; la loro apertura può essere eventualmente coperta da materiale dielettrico di modo da fornire una protezione dalle condizioni ambientali che possono risultare critiche.

## 4.2 Modelli equivalenti per la determinazione del campo irradiato

In maniera analoga a quanto illustrato nella teoria della diffrazione, per la determinazione del campo irradiato da un' antenna ad apertura si fa ricorso a problemi equivalenti, dividendo il problema nei passi:

1. Si considera la più conveniente superficie immaginaria che racchiuda le sorgenti affinché sia lecito supporre noti su di essa i valori delle componenti tangenziali del campo elettrico e/o magnetico. Spesso si fa quindi riferimento ad un' apertura  $A$  praticata su uno schermo  $S$  piano ed infinito.
2. Si considerano le densità fittizie  $\mathbf{J}_S$  ed  $\mathbf{M}_S$  disposte su  $S$ , le quali possono assumere una delle seguenti forme:
  - (a)  $\mathbf{J}_S, \mathbf{M}_S \neq 0$  con  $\mathbf{E}, \mathbf{H} \neq 0$  su  $S$ ;
  - (b)  $\mathbf{J}_S, \mathbf{M}_S \neq 0$  con  $\mathbf{E}, \mathbf{H} = 0$  su  $S$  (Teorema di Love);
  - (c)  $\mathbf{J}_S = 0, \mathbf{M}_S \neq 0$  assumendo  $S$  conduttore elettrico perfetto;
  - (d)  $\mathbf{J}_S \neq 0, \mathbf{M}_S = 0$  assumendo  $S$  conduttore magnetico perfetto;
3. Si risolve uno dei problemi equivalenti tenendo conto del fatto che nelle situazioni (a) e (b) valgono le espressioni dei potenziali  $\mathbf{A}$  ed  $\mathbf{F}$  trovate nella teoria della diffrazione, mentre in (c) e (d) si dovrà far uso della teoria delle immagini (A.3.1) per determinare il campo irradiato dalle singole sorgenti.

### 4.2.1 Esempio

Si consideri l' antenna costituita da una guida d' onda troncata montata su di uno schermo *conduttore piano ed infinito*. Si supponga nota la componente tangenziale del campo elettrico  $\mathbf{E}_a$  sull' apertura  $A$ ; ci si propone di trovare un modello equivalente al problema dato, che porti alla determinazione dello stesso campo irradiato dall' apertura  $A$  a destra dell' interfaccia, regione omogenea puntata dal versore normale  $\hat{n}$ .

1. Si scelga  $S$  superficie piana ed infinita (con  $A \in S$ ) in un mezzo omogeneo  $(\epsilon, \mu)$  e riportiamo su di essa i valori delle densità in accordo alle

condizioni al contorno imposte dallo schermo conduttore:

$$\mathbf{J}_S \neq 0 \quad \text{ovunque,} \quad \begin{cases} \mathbf{M}_S = \mathbf{E}_a \times \hat{n} & \text{su } A \\ \mathbf{M}_S \equiv 0 & \text{su } S \setminus A \end{cases}$$

In questa forma il problema è equivalente a quello dato, ma non è ancora risolvibile poichè  $\mathbf{J}_S$  rimane un'incognita.

2. Si supponga ora di sostituire al mezzo omogeneo a sinistra di  $S$ , apertura compresa, un conduttore elettrico perfetto ( $\sigma = \infty$ ); per la teoria delle immagini il problema equivale a rimuovere il conduttore e considerare ovunque un'ulteriore densità  $\mathbf{J}'_S$  uguale ed opposta a  $\mathbf{J}_S$ , ed  $\mathbf{M}'_S$  uguale e concorde a  $\mathbf{M}_S$ ; perciò risulta:

$$\mathbf{J}_S \equiv 0 \quad \text{ovunque.} \quad \begin{cases} \mathbf{M}_S = 2\mathbf{E}_a \times \hat{n} & \text{su } A \\ \mathbf{M}_S \equiv 0 & \text{su } S \setminus A \end{cases}$$

per cui essendoci posti in un mezzo omogeneo il campo irradiato può essere calcolato con semplicità.

### 4.3 Dualità delle antenne a strutture complementari

Scopo di questo paragrafo è mettere in relazione le antenne ad apertura con quelle filiformi, a tal fine ci serviamo del *principio di Babinet* (A.5) il quale mostra come il campo  $\{\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0\}$  prodotto da una sorgente  $\mathbf{J}$  che irradia in un mezzo di impedenza intrinseca  $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$  può essere ottenuto combinando i campi di:

1. una sorgente elettrica  $\mathbf{J}$  irradiante nello stesso mezzo ma in presenza di uno schermo conduttore elettrico perfetto che produce nel generico punto potenziato  $P$  il campo  $\{\mathbf{E}_e, \mathbf{H}_e\}$ ;
2. una sorgente magnetica  $\mathbf{M}$  irradiante nello stesso mezzo ma in presenza di uno schermo conduttore elettrico perfetto complementare del precedente, che produce nel generico punto potenziato  $P$  il campo  $\{\mathbf{E}_d, \mathbf{H}_d\}$  duale del precedente.

Il campo totale in  $P$  può essere infine espresso come

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \mathbf{E}_e + \mathbf{H}_d \\ \mathbf{H}_0 &= \mathbf{H}_e - \mathbf{E}_d \end{aligned}$$

Utilizzando questo principio si può dimostrare che in un mezzo di impedenza intrinseca  $\eta$ , se uno schermo conduttore con un'apertura è alimentato

da una linea di trasmissione di impedenza terminale  $Z_s$  e la struttura complementare a dipolo elettrico è alimentata ai morsetti di un opportuno *gap* da una linea di trasmissione di impedenza terminale  $Z_c$ , tali impedenze sono legate rispettivamente dall'espressione:

$$Z_s Z_c = \frac{\eta^2}{4}$$

In aggiunta, i rispettivi campi irradiati nella zona di campo lontano sono legati da

$$E_{\theta s} = H_{\theta c}, \quad E_{\phi s} = H_{\phi c}, \quad H_{\theta s} = -\frac{E_{\theta c}}{\eta_0^2}, \quad H_{\phi s} = -\frac{E_{\phi c}}{\eta_0^2}.$$

dove  $\theta$  e  $\phi$  sono le coordinate sferiche del sistema al quale viene riferita l'apertura.

Se le dimensioni dell'apertura sono grandi rispetto alla lunghezza d'onda, queste relazioni sono applicabili con buon grado di approssimazione. La dualità risulta essere uno strumento utile per ricondursi a problemi equivalenti, basti pensare al dipolo elettrico i cui parametri sono noti dalla teoria.

## 4.4 Antenne a paraboloidi

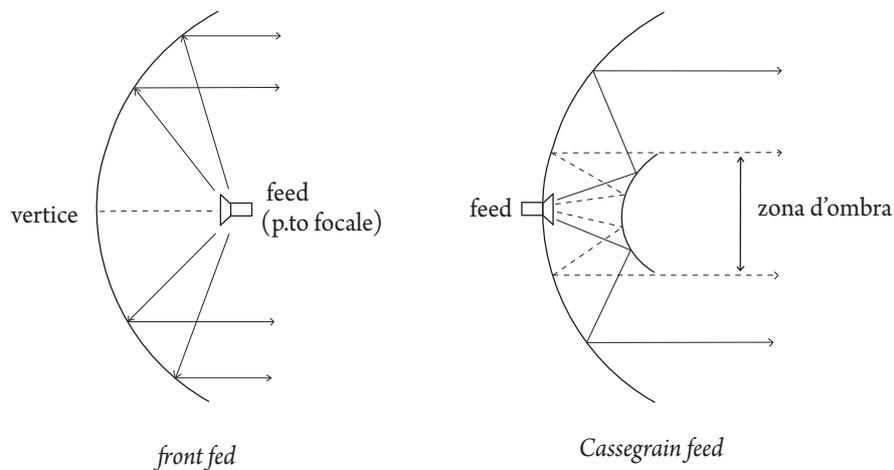
### 4.4.1 Meccanismo di radiazione

Le caratteristiche di radiazione di un riflettore possono essere ottimizzate da un opportuno progetto della sua geometria.

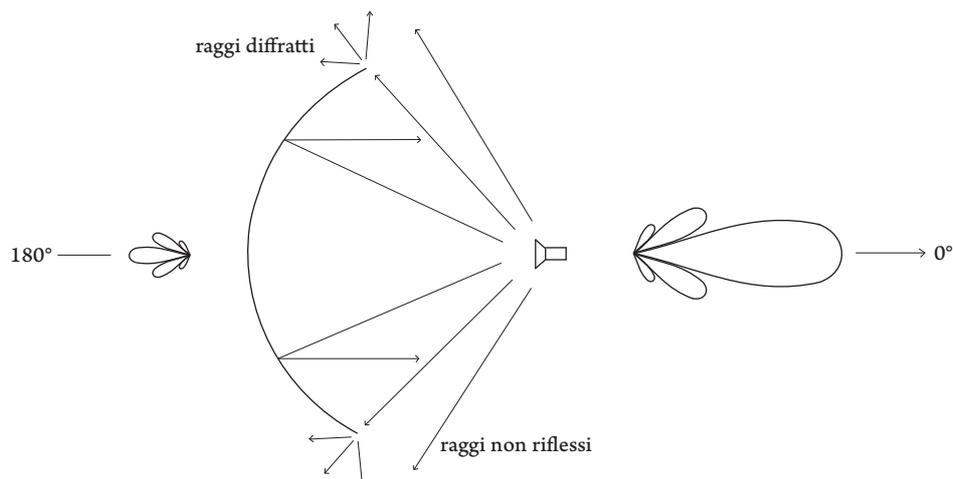
Attraverso un'analisi di ottica geometrica, un fascio di raggi paralleli incidenti su di un riflettore parabolico vengono riflessi convergendo in un punto detto *punto focale*. Allo stesso modo, se una sorgente puntiforme è localizzata nel punto focale i raggi riflessi risulteranno fra loro paralleli, si parla dunque di *fascio collimato*.

Questo tipo di configurazione che prevede l'illuminatore (feed) posto nel fuoco viene detta *front fed*. Questa può risultare inconveniente nei sistemi di ricezione come quelli per lo spazio profondo, dove è richiesto un elevato rapporto segnale rumore deteriorato dalle lunghe linee di trasmissione necessarie a raggiungere ed alimentare l'illuminatore.

Una seconda configurazione possibile è la *Cassegrain feed*, che prevede l'utilizzo di un riflettore secondario ad iperparabola e l'illuminatore posto sul vertice della parabola costituente il riflettore primario. Illuminando il riflettore secondario i raggi vengono prima riflessi in direzione del primario, poi vengono fatti emergere paralleli da una seconda riflessione, come se la sorgente fosse stata posta nel fuoco della parabola (riflettore primario).



In entrambe le configurazioni fenomeni di diffrazione prodotti dai bordi dei riflettori devono essere considerati al fine di un'accurata valutazione del campo irradiato sia in regione di Fraunhofer che di Fresnel.



#### 4.4.2 Considerazioni sul campo illuminante

L'affermazione secondo la quale, in presenza di una sorgente puntiforme localizzata nel fuoco di un riflettore parabolico, sulla bocca dello stesso si ha un'onda piana uniforme, è basata sull'ottica geometrica. I risultati ottenibili non possono che essere approssimati poichè essa trascura:

- le dimensioni finite dell'illuminatore;
- l'area finita del riflettore;
- la lunghezza d'onda che, per evidenti ragioni d'ingombro dell'antenna, spesso non è trascurabile rispetto alle dimensioni geometriche in gioco.

L'ottica geometrica inoltre non fornisce alcuna indicazione sulla progettazione dell'illuminatore.

Il problema di una determinazione più accurata del campo illuminante è affrontabile ad esempio attraverso gli sviluppi in fasci Gaussiani, argomento trattato nel Capitolo 2.

### 4.4.3 Guadagno ed area efficace dell'antenna a paraboloidale

Tra i parametri che descrivono le antenne in trasmissione sono definiti la direttività ed il guadagno, rispettivamente:

$$D_M = \frac{P_0}{P_{irr}} , \quad G = \frac{P_0}{P_{alim}} = \eta D_M$$

dove  $P_{irr}$  è la potenza irradiata dall'antenna,  $P_0$  la potenza che sarebbe irradiata da un'antenna isotropa che ecciti un campo uguale a quello eccitato dall'antenna sotto esame nella sua direzione di massimo, mentre  $P_{alim}$  è la potenza di alimentazione data dalla somma di quella irradiata e di quella dissipata. Il guadagno è legato proporzionalmente alla direttività attraverso il rendimento  $\eta$ .

Tra i parametri in ricezione compare l'area efficace di un'antenna, definita come il fattore di proporzionalità che esiste, *in condizioni di adattamento*, tra la potenza consegnata al carico e la densità di potenza che esiste nella regione dell'antenna:

$$A_{eff} = \frac{P_{att}}{W_i} = \frac{P_{att}}{|\mathbf{E}_i|^2/2Z_0} \in \mathbb{R} .$$

Per effetto del teorema di reciprocità, il comportamento delle antenne in ricezione non è indipendente da quello in trasmissione: i parametri sono legati dalla relazione

$$A_{eff} = \frac{\lambda^2}{4\pi} D_M , \quad \text{per un'antenna priva di perdite} \quad (4.1)$$

$$A_{eff} = \frac{\lambda^2}{4\pi} G , \quad \text{per un'antenna con perdite} \quad (4.2)$$

Si può dimostrare che se si considera un'antenna ad apertura circolare di raggio  $R$  e si calcola la sua direttività, si ottiene:

$$D_M = \frac{4\pi}{\lambda^2} (\pi R^2) ,$$

da cui segue

$$A_{eff} = \pi R^2 \equiv A_{geom} .$$

Quindi, in un'antenna ad apertura l'area efficace coincide con l'area geometrica e questo risultato pone in luce una differenza sostanziale tra le antenne

ad apertura e le antenne filiformi: nelle antenne filiformi la direttività (o il guadagno) è sostanzialmente indipendente dalla frequenza, mentre nelle antenne ad apertura è l'area efficace ad essere tale: dalle (4.1), (4.2) segue quindi che *il guadagno di un'antenna ad apertura cresce con il quadrato della frequenza.*

Questo aspetto offre evidentemente indicazioni precise in sede di progetto dei riflettori, ed evidenzia altresì il motivo per cui questi tipi di antenne utilizzate alle alte frequenze offrono elevati guadagni.

## Capitolo 5

# Conclusioni

La descrizione della propagazione elettromagnetica per mezzo dell'ottica geometrica risulta essere una buona approssimazione se la dimensione degli ostacoli che l'onda incontra è molto più grande rispetto alla lunghezza d'onda. Tipiche applicazioni sono l'impiego di lenti ottiche il cui spessore è di frazioni di centimetro con onde appartenenti allo spettro del visibile (frequenze dell'ordine dei THz), oppure la propagazione modellata a raggi nell'atmosfera dove l'indice di rifrazione cala lentamente e le frequenze in gioco sono tipiche delle microonde.

L'ottica geometrica porta a risultati approssimati proprio a causa delle ipotesi semplificative che essa introduce: tale descrizione della propagazione attribuisce puntualmente al campo la caratteristica di un'onda piana uniforme, trascurando in tal modo le riflessioni dovute alle disomogeneità del mezzo e le onde evanescenti. Si perviene così a degli assurdi fisici come il divergere di una componente del campo in corrispondenza dei fuochi, punti dove, a meno di perdite, convergono infiniti raggi.

Lo studio degli *sviluppi in fasci gaussiani* permette di superare tali limiti: il risultato emerso esplicitamente dalla descrizione della loro propagazione è il fenomeno della diffrazione, trascurato in ottica geometrica.

Con la teoria analitica si è dimostrato come una formulazione scalare della diffrazione non sia meno accurata di una vettoriale, risultato di notevole interesse pratico poichè permette la semplificazione dei calcoli senza l'introduzione di ulteriori approssimazioni in un teoria già di per sè approssimata.

Una teoria sviluppatasi negli ultimi anni, la *teoria geometrica della diffrazione*, prevede che nello studio della propagazione si passi con gradualità dall'ottica geometrica alla teoria della diffrazione man mano che la lunghezza d'onda si fa grande rispetto alle dimensioni dell'apertura considerata. Questa tecnica porta a risultati migliori di quelli ottenuti con la teoria classica, prossimi a quelli sperimentali.

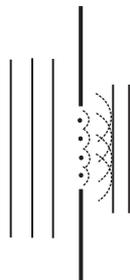
L'applicazione di questi risultati alle antenne ad apertura conduce al procedimento iterativo del calcolo del campo irradiato mediante valutazione di problemi equivalenti la cui analisi risulta via via più semplice man mano che si procede nelle semplificazioni, evidenziando così la caratteristica di un'elevata direttività ed un proporzionale elevato guadagno nelle moderne applicazioni ad alta frequenza.

# Appendice A

## Teoremi fondamentali

### A.1 Il principio di Huygens

Considerando sorgenti di un campo elettromagnetico in una determinata regione dello spazio, il principio di Huygens afferma che lo studio della propagazione di un'onda può essere condotto, anziché a partire dalle vere sorgenti del campo, considerando un fronte d'onda, ovvero una superficie chiusa che circonda le sorgenti, e supporre che da ogni elemento di questa superficie si irradia un'onda sferica con ampiezza e fasi opportune.



Il principio permette perciò di sostituire alle sorgenti reali delle *sorgenti fittizie* per ricostruire il campo totale dalla sovrapposizione delle singole onde dovute a queste sorgenti fittizie.

Il principio di Huygens, così com'è enunciato, non dà alcuna informazione operativa per la risoluzione delle equazioni di Maxwell perchè non specifica quale legame intercorra tra le sorgenti reali e quelle fittizie.

### A.2 Teorema di equivalenza di Love

Il teorema di equivalenza è la formulazione rigorosa del principio di Huygens sopra esposto, offre perciò una espressione esplicita per le sorgenti fittizie con una completa libertà sulla scelta della superficie su cui disporre.

Dal punto di vista pratico, ciò significa che in ogni problema di propagazione elettromagnetica è sempre possibile sostituire le sorgenti, per quanto complicate esse siano, con altre sorgenti definite su quella superficie che di volta in volta permette la massima semplificazione dei calcoli. Tuttavia, le soluzioni a cui si perviene tramite l'utilizzo di questo teorema sono *soluzioni approssimate* delle equazioni di Maxwell.

Con riferimento al caso delle equazioni nel dominio della rappresentazione complessa, si immagini un campo  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$  sorretto da un insieme di sorgenti  $\mathbf{J}_i, \mathbf{M}_i$  e definito in un dominio  $V$  tale da assicurare l'unicità delle soluzioni del problema di Maxwell. Si consideri inoltre una superficie chiusa  $S$  *arbitraria* che racchiuda le sorgenti del campo.

Il teorema di equivalenza afferma che, disponendo su  $S$  le densità di corrente superficiali:

$$\mathbf{J}_S = \hat{n} \times \mathbf{H}_{tan} , \quad \mathbf{M}_S = \mathbf{E}_{tan} \times \hat{n} ,$$

dove  $\hat{n}$  è la normale esterna alla superficie  $S$ , e spegnendo le vere sorgenti  $\mathbf{J}_i$  ed  $\mathbf{M}_i$ , si ottiene un campo

$$\{\mathbf{E}_{eq}, \mathbf{H}_{eq}\} = \begin{cases} \{0, 0\} & \text{nella regione } R_i \text{ interna a } S; \\ \{\mathbf{E}, \mathbf{H}\} & \text{nella regione } R_e \text{ esterna a } S; \end{cases}$$

perciò nulla cambia all'esterno di  $S$ .

### A.3 Teorema delle immagini

Si consideri un mezzo omogeneo ed isotropo, sede di un campo  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$  sostenuto dall'insieme di sorgenti  $\{\mathbf{J}_i, \mathbf{M}_i\}$ . Si introduca un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $\{x, y, z\}$  e si esegua la trasformazione di coordinate che rappresenta il piano  $z = 0$ , introducendo le nuove variabili

$$x' = x , \quad y' = y , \quad z' = -z .$$

È immediato vedere che il campo

$$\{\mathbf{E}' , \mathbf{H}'\} : \quad \begin{cases} E_{x'} = -E_x \\ E_{y'} = -E_y \\ E_{z'} = E_z \end{cases} , \quad \begin{cases} H_{x'} = H_x \\ H_{y'} = H_y \\ H_{z'} = -H_z \end{cases} ,$$

è soluzione delle equazioni di Maxwell con sorgenti

$$\{\mathbf{J}'_i , \mathbf{M}'_i\} : \quad \begin{cases} J_{ix'} = -J_{ix} \\ J_{iy'} = -J_{iy} \\ J_{iz'} = J_{iz} \end{cases} , \quad \begin{cases} M_{ix'} = M_{ix} \\ M_{iy'} = M_{iy} \\ M_{iz'} = -M_{iz} \end{cases} .$$

Questo fatto discende banalmente dalle equazioni di Maxwell scritte per esteso nel sistema di coordinate cartesiane, è evidente come queste risultino invarianti rispetto alla riflessione dal piano  $z$  purchè i campi e le sorgenti siano modificati come nelle ipotesi.

### A.3.1 Osservazioni e corollari

Il campo totale in questo caso è dato dalla somma

$$\{\mathbf{E}_{tot}, \mathbf{H}_{tot}\} = \{\mathbf{E}, \mathbf{H}\} + \{\mathbf{E}', \mathbf{H}'\},$$

se ne ricavano quindi le condizioni a cui deve soddisfare un campo per essere compatibile con la metallizzazione del piano  $z = 0$ :

$$E_{tot,x} = 0, \quad E_{tot,y} = 0, \quad H_{tot,z} = 0$$

Questi risultati sono di notevole interesse nel caso del calcolo del campo prodotto da sorgenti poste in un semispazio omogeneo limitato da un piano conduttore.

## A.4 Teorema di dualità

Già nel teorema di equivalenza è stata introdotta la grandezza "corrente magnetica", artificio matematico utile a rendere il problema simmetrico. Con l'introduzione di queste sorgenti fittizie le equazioni di Maxwell risultano infatti

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H} - \mathbf{M}_i, \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega\epsilon_c\mathbf{E} + \mathbf{J}_i. \quad (\text{A.2})$$

Il teorema di dualità non è altro che la seguente osservazione: se  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$  è una soluzione delle (A.1), (A.2) effettuando le trasformazioni formali

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' = -\mathbf{H}, \quad \mathbf{H}' = \mathbf{E}, \quad \mathbf{J}'_i = -\mathbf{M}_i, \quad \mathbf{M}'_i = \mathbf{J}_i; \\ \epsilon'_c = \mu, \quad \mu' = \epsilon_c. \end{aligned}$$

Il campo  $\{\mathbf{E}', \mathbf{H}'\}$  così ottenuto si dice il *duale* del campo  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ ; lo stesso aggettivo si usa per le sorgenti e per i mezzi. È ovvio che il duale del duale di un campo è il campo stesso.

## A.5 Il principio di Babinet

Applicando il teorema di dualità ed il teorema di unicità si perviene al seguente enunciato del *principio di Babinet*: due schermi complementari *conduttori perfetti*, illuminati da campi duali l'uno dell'altro, danno luogo a campi diffratti che sono anch'essi duali l'uno dell'altro;

Si noti che se il campo illuminante è un'onda piana uniforme polarizzata rettilinearmente, l'applicazione della dualità al campo illuminante si riduce ad un cambiamento di polarizzazione: da una polarizzazione rettilinea alla sua ortogonale.

In un enunciato equivalente, il campo diffratto da uno schermo è ottenibile dalla *differenza* fra il campo che si avrebbe in assenza dello schermo stesso e quello diffratto dallo schermo complementare.

# Bibliografia

- [1] Michele Midrio. *Campi elettromagnetici*. 1<sup>a</sup> ediz. 2003 Servizi Grafici Editoriali.
- [2] Carlo Giacomo Someda. *Onde elettromagnetiche*. UTET
- [3] Giorgio Franceschetti. *Campi elettromagnetici*. 2<sup>a</sup> ediz. 1988 Bollati Boringhieri Ed.
- [4] Constantine A. Balanis. *Antenna theory : analysis and design*. 3<sup>a</sup> ediz. Wiley, ©2005.