



# **UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA**

**DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE, EDILE E AMBIENTALE - ICEA**

**TESI DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA CIVILE**

**SISTEMA DI IDENTIFICAZIONE DINAMICA PER PONTI:  
SVILUPPO DI ALGORITMI AUTOMATICI  
NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA PER MONITORAGGI CONTINUI**

**Relatore: Ch.mo Prof. Ing. CLAUDIO MODENA**

**Correlatore: Ing. KLEIDI ISLAMI**

**Laureando: DAMIANO PIOVESAN**

**Anno accademico 2012-2013**



Ai miei genitori

---

## Indice

<b>1.....</b>	<b>7</b>
<b>SISTEMI STOCASTICI PER L'IDENTIFICAZIONE DINAMICA .....</b>	<b>7</b>
1.1 IDENTIFICAZIONE DINAMICA .....	7
1.1.1 Sistemi a più gradi di libertà.....	7
1.1.2 Introduzione ai sistemi stocastici .....	8
1.2 CLASSIFICAZIONI: METODI E MODELLI.....	11
1.2.1 Tipi di metodi ed analisi.....	11
1.2.2 Identificazione modale input-output .....	13
1.2.3 Identificazione modale solo output .....	14
1.2.3.1 Dati casuali .....	15
1.2.4 Analisi dei segnali.....	15
1.2.5 Modello di stato e modello di osservabilità.....	19
1.2.5.1 Modello di stato in forma discreta.....	21
1.2.6 Risoluzione del modello di stato con metodi a sottospazi.....	22
1.2.6.1 Introduzione .....	22
1.3 SUBSPACE SYSTEM IDENTIFICATION .....	25
1.3.1 Introduction.....	25
1.3.1.1 System identification.....	25
1.3.1.2 Subspace method of System Identification (SSI).....	25
1.3.2 Stochastic process .....	30
1.3.2.1 Stochastic linear system .....	30
1.3.2.2 Stochastic linear time-invariant system (LTI) .....	32
1.3.3 Subspace system identification – innovation model.....	33
1.3.3.1 State estimation problem.....	33
1.3.3.2 Kalman filter .....	34

---

1.3.4	Realization of stochastic system .....	39
1.3.4.1	Data matrices of stochastic system .....	39
1.3.5	Stochastic realization algorithm .....	48
1.3.5.1	Subspace Identification method – ORT method .....	50
1.4	FREQUENCY DOMAIN DECOMPOSITION.....	53
1.4.1	Introduzione .....	53
1.4.2	Funzioni alla base del metodo FDD .....	54
1.4.2.1	Trasformata Discreta di Fourier (TDF).....	54
1.4.2.2	Calcolo Veloce della Trasformata discreta di Fourier (FFT) .....	55
1.4.2.3	Trasformata di Fourier VS Trasformata Discreta di Fourier .....	57
1.4.2.4	Convoluzione e correlazione .....	58
1.4.2.5	Correlazione temporale.....	59
1.4.2.6	Funzione d'autocorrelazione .....	59
1.4.2.7	Funzione di densità spettrale di potenza (PSD) .....	60
1.4.3	Analisi degli output .....	63
1.4.3.1	Analisi nel dominio delle frequenze .....	63
1.4.3.2	Assemblaggio delle matrici di densità spettrale di potenza delle risposte .....	65
1.4.3.3	Decomposizione ai valori singolari (SVD) della PSD.....	66
1.4.3.4	Identificazione delle forme modali .....	70
1.4.4	Enhanced Frequency Domain Decomposition (EFDD) .....	73
1.4.4.1	Identificazione delle frequenze e degli smorzamenti .....	73
<b>2</b>	.....	<b>75</b>
	<b>STUDIO DEL COMPORTAMENTO DINAMICO .....</b>	<b>75</b>
2.1	ACQUISIZIONE STRUMENTALE .....	75
2.2	PRESENTAZIONE DEI PONTI ESAMINATI .....	79

---

---

2.2.1	Ponte Nuovo del Popolo .....	79
2.2.2	Ponte di Musile di Piave .....	81
2.2.2.1	Modellazione agli elementi finiti .....	83
2.2.2.2	Modi di vibrare ottenuti.....	85
2.2.3	Ponte autostradale sul fiume Mincio .....	87
<b>3.</b>	.....	<b>89</b>
<b>PRESENTAZIONE DELL'ALGORITMO ED APPLICAZIONI</b>	.....	<b>89</b>
3.1	ANALISI DEI DATI ACQUISITI.....	90
3.1.1.1	Introduzione .....	90
3.1.1.2	Inserimento dati e FDD .....	91
3.1.1.3	Definizione di MAC (Modal Assurance Criterion) .....	94
3.1.2	Analisi post FDD con riferimento al ponte Nuovo del Popolo .....	95
3.1.2.1	Analisi di un sottogruppo .....	95
3.1.2.2	Individuazione dei modi di vibrare di un sottogruppo .....	99
3.1.2.3	Analisi globale .....	108
3.1.3	Analisi post FDD con riferimento al ponte di Musile di Piave .....	120
3.1.3.1	Scissione dei domini modali in un sottogruppo .....	120
3.1.3.2	Confronto tra modello ed algoritmo.....	124
3.1.4	Analisi post FDD con riferimento ad un ponte autostradale .....	126
<b>4.</b>	.....	<b>129</b>
<b>CONCLUSIONI</b>	.....	<b>129</b>
<b>5.</b>	.....	<b>131</b>
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	.....	<b>131</b>

---

---

---

---

## **PREMESSA**

Una vera stagione di diffusione degli apparecchi commerciali parte solo nel 1977 con l'avvento dell'era del digitale.

Da quel momento molte tecniche e molti metodi si sono sviluppati velocemente consentendo oggi operazioni impensabili fino a qualche decennio fa.

Oggi è possibile scomporre le grandezze in gioco, analizzarle e visualizzarle con grande facilità e velocità.

In questo lavoro si studieranno tecniche per l'analisi dei dati ottenuti da un'identificazione dinamica di soli output col fine di determinare con precisione i modi di vibrare propri delle strutture, e nello specifico, dei ponti.

Trattasi di una questione di gran attualità per studiare l'evolvere del comportamento dinamico di una struttura nel tempo.



---

# SISTEMI STOCASTICI PER L'IDENTIFICAZIONE DINAMICA

## 1.1 IDENTIFICAZIONE DINAMICA

Nell'ingegneria civile tale metodo viene utilizzato per strutture come ponti o torri. La struttura viene eccitata da forze in ingresso non misurabili e le misure di uscita sono ad esempio solo accelerazioni. L'obiettivo è la stima dei parametri modali che caratterizzano la struttura.

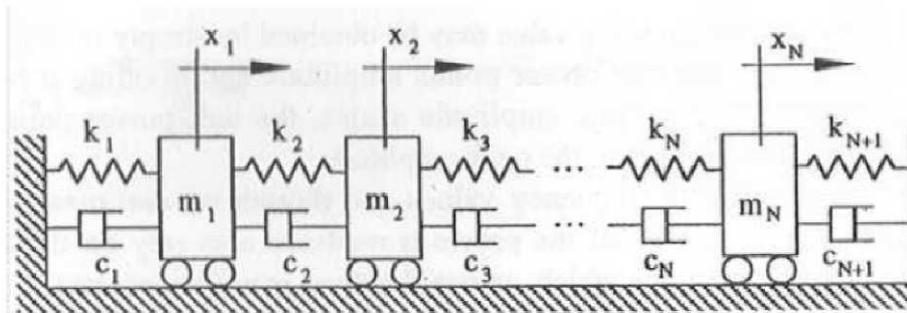
In questi metodi l'input non è noto e consiste in una realizzazione di un processo stocastico. Questi metodi possono essere suddivisi in base al tipo di dati che essi richiedono: *dati temporali grezzi, covarianze o spettri*.

### 1.1.1 Sistemi a più gradi di libertà

Le strutture sono composte da un infinito numero di gradi di libertà che ne descrivono il comportamento. Il primo passo che si deve compiere per condurre un'analisi dinamica è quello di rendere finito questo numero e di scegliere i gradi di libertà necessari per rappresentare con completezza il comportamento della struttura.

Per semplificare il sistema e renderlo facilmente computabile, si può ipotizzare che la struttura venga descritta con "*lumped-mass*", cioè masse discrete concentrate.

Nella Figura sottostante si riporta uno schema di N gradi di libertà, in cui gli  $x_i$  sono gli spostamenti,  $k_i$  le rigidezze,  $m_i$  le masse,  $c_i$  gli smorzamenti.



**Figura 1** – Schema ad N gradi di libertà

### 1.1.2 Introduzione ai sistemi stocastici

Il progetto e la costruzione di strutture civili sempre più complesse ed ambiziose, hanno portato allo sviluppo di nuovi strumenti sperimentali per permettere l'identificazione precisa delle proprietà più importanti statiche e dinamiche. Lo scopo è quello di fornire dati affidabili a sostegno della calibrazione, dell'aggiornamento e della validazione dei modelli numerici utilizzati in fase di progettazione.

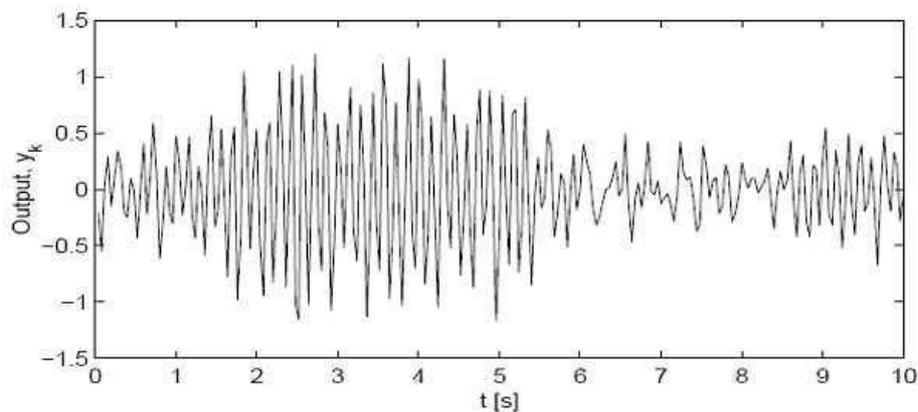
Inoltre, il continuo invecchiamento e il conseguente deterioramento di un gran numero di opere esistenti ha incoraggiato lo sviluppo di efficienti tecniche di rilevamento dei danni, per garantire un monitoraggio della salute strutturale delle opere.

La tendenza dei ricercatori, in principio, era di utilizzare le ben consolidate tecniche di identificazione modale input-output. La difficoltà di eccitare grandi strutture civili in un ambiente controllato portò a valutare altre possibili soluzioni. Un notevole progresso tecnologico nel campo dei trasduttori e dei convertitori da analogico a digitale ha sostenuto le analisi modali delle grandi strutture basate esclusivamente sulla misurazione della risposta ad eccitazioni ambientali e sull'applicazione di metodi stocastici.

I metodi di identificazione stocastica possono essere suddivisi in base al tipo di dati che essi richiedono: *dati temporali grezzi*, *covarianze* o *spettri*.

Nel metodo dei *dati temporali* (*time data*), le misure per applicazioni di analisi modale in genere contengono una certa ridondanza. Dato che la risoluzione spaziale delle forme modali sperimentali è determinata dalla posizione e dal numero dei sensori, solitamente si impiegano molti sensori (per lo più accelerometri).

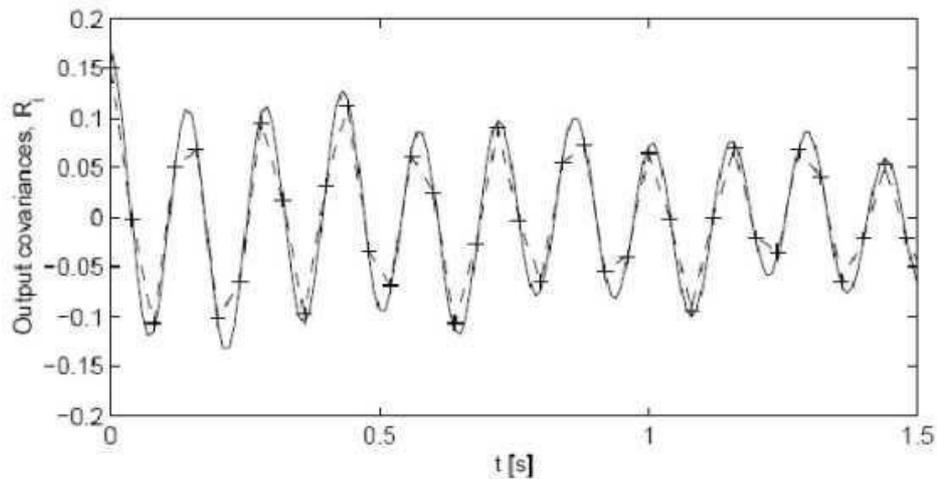
Per diminuire questa ridondanza, alcuni segnali sono parzialmente omessi nel processo di identificazione, portando ad algoritmi che sono più veloci e richiedono meno memoria senza perdere in precisione. Alla fine, i sensori che sono stati omessi vengono nuovamente inclusi per ottenere le forme modali complete. Ecco un esempio di output del segnale.



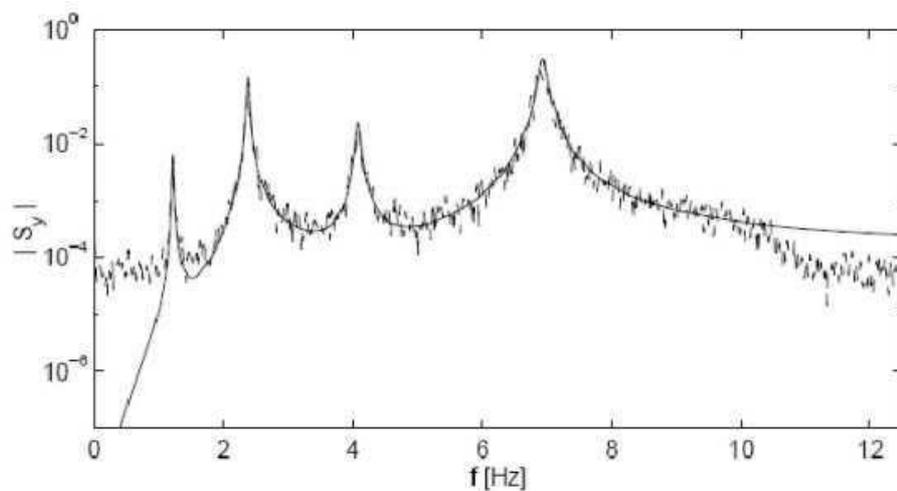
**Figura 2** - Part of the first output signal.

Vengono riportati ora gli output dei due metodi rimanenti, rispettivamente il metodo delle covarianze e degli spettri.

Il metodo degli spettri è quello che verrà utilizzato per la decomposizione nel dominio della frequenza (FDD).



**Figura 3** - The full line represents the true output covariance sequence. The dashed line with the '+' markers is the estimated output covariance sequence. The sampling frequency of the true covariance sequence is 4 times higher, but otherwise both sequence correspond very well.



**Figura 4** - The full line represents the true spectrum and the dashed line the estimated spectrum using Welch's averaged periodogram method: the 16384 data samples are divided in 8 segments of 2048 points; after multiplication with a Hanning window, an FFT was applied to every segments; finally the 8 FFTs are averaged to yield the spectrum estimate. The influence of the lowpass filter at 10Hz and the added measurement noise are clearly visible.

## 1.2 CLASSIFICAZIONI: METODI E MODELLI

### 1.2.1 Tipi di metodi ed analisi

Esistono **due principali gruppi** di metodi:

- 1) Metodi parametrici
- 2) Metodi non parametrici

I **modelli parametrici** sono caratterizzati dall'assunzione di un modello matematico costruito su un set di parametri; questi parametri sono stimati durante l'identificazione.

Il modello matematico di un sistema invariabile nel tempo e continuo nel tempo è usualmente posto nella forma di un sistema di equazioni differenziali; per un modello parametrico discreto nel tempo, si ha un sistema di equazioni alle differenze.

Dato un sistema del tipo input/output, affetto da rumore, il modello parametrico che lo descrive è differente a seconda che l'input sia misurato o non misurato. Se l'input viene misurato, allora il modello parametrico associato avrà un termine noto deterministico a cui si somma un termine stocastico che descrive il disturbo generalmente sconosciuto. Se l'input non è noto, la descrizione è fornita da un solo termine stocastico.

- *Modelli basati su input deterministici*: i modelli utilizzati per i sistemi input/output vengono definiti modelli ARMAX (Auto-Regressive Moving Average with eXternal input) e sono descritti dalla relazione:

$$y(t) = G(q) u(t) + H(q) e(t)$$

dove  $G(q)$  e  $H(q)$  sono rispettivamente le funzioni di trasferimento della parte deterministica e della parte stocastica;  $u(t)$  è l'input deterministico,  $e(t)$  è l'input stocastico.

- Modelli basati su input stocastici: i modelli utilizzati in questo caso sono definiti ARMA (Auto-Regressive Moving Average) e sono descritti dalla relazione:

$$y(t) = H(q) e(t)$$

dove  $H(q)$  rappresenta la funzione di trasferimento sia delle proprietà dinamiche, sia del rumore.

Esso è caratterizzato dal fatto che si descrive l'uscita del modello (ovvero il segnale acquisito) tramite la combinazione lineare dei suoi valori assunti in istanti precedenti (parte Auto-Regressiva) e la combinazione lineare dei valori assunti dalla forzante nei medesimi istanti (parte a Media Mobile). Se la forzante non è nota, essa viene assunta quale rumore bianco.

Le tecniche d'identificazione tradizionali per modelli **non parametrici** sono basate essenzialmente sulle tecniche che sfruttano le trasformate di Fourier; esse rappresentano degli ottimi strumenti matematici, ideali per le analisi teoriche dei sistemi dinamici.

I modelli non parametrici individuano diversi metodi di analisi:

*analisi di frequenza:* applicata quando l'eccitazione è deterministica e periodica o pseudo- casuale e periodica. La misura dell'eccitazione e corrispondentemente la risposta del sistema sono trasformati nel dominio delle frequenze e la funzione di risposta in frequenza è ottenuta dal rapporto tra la trasformata delle risposte e la trasformata dell'eccitazione.

*analisi transitoria*: è applicata quando la risposta del sistema è generata da un impulso in risposta.

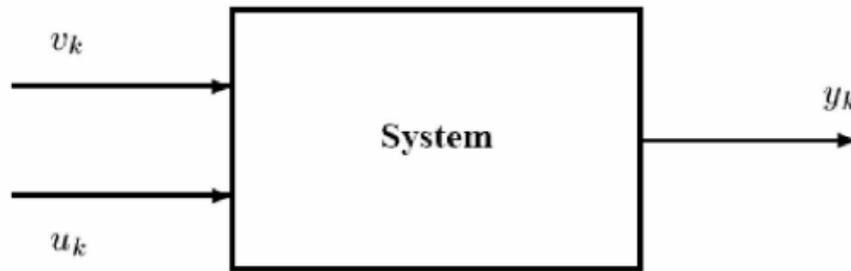
*analisi di correlazione e spettrali*: sono applicate a sistemi stazionari eccitati stocasticamente. In questi casi l'eccitazione e la risposta del sistema sono caratterizzate dalla funzione di correlazione nel dominio del tempo e dalla densità spettrale nel dominio delle frequenze.

## **1.2.2 Identificazione modale input-output**

Le prove modali convenzionali si basano sulla stima delle *funzioni di risposta in frequenza* collegate alla forza applicata e alla risposta registrata, con una risoluzione spaziale e di frequenza abbastanza elevate.

La strumentazione necessaria per eccitare la struttura può essere composta dal *martello ad impulsi*.

Questo dispositivo ha il vantaggio di fornire un input a banda larga che è in grado di stimolare differenti modi di vibrazione. Gli svantaggi sono la risoluzione della frequenza relativamente bassa delle stime spettrali, che può precludere la stima accurata dei fattori di smorzamento, e la possibile mancanza di energia sufficiente ad eccitare alcuni importanti modi di vibrazione. La risposta dinamica della struttura è solitamente misurata con accelerometri. L'acquisizione dei dati e la loro archiviazione richiedono l'uso di un convertitore da analogico a digitale. I dati grezzi devono essere inizialmente analizzati ed elaborati. Successivamente si possono ottenere le funzioni di risposta in frequenza (*FRF*).



**Figura 5** - A dynamic system with deterministic inputs  $v_k$ , output  $y_k$  and disturbances  $v_k$

### 1.2.3 Identificazione modale solo output

Per ovviare alle difficoltà riscontrate con il caso input-output, si è implementato il metodo a solo output. In questo modo, si registrano le vibrazioni indotte dall'ambiente esterno, come il vento o il traffico veicolare, senza dover chiudere al traffico la struttura e misurando il suo comportamento in fase d'esercizio.

L'identificazione del sottospazio di sistemi puramente stocastici prevede quindi  $\mathbf{u}_k = 0$  (vedi figura soprastante).

I moderni accelerometri sono particolarmente adatti alle misurazioni nei campi compresi tra 0 e 50Hz, mentre sono praticamente insensibili alle vibrazioni ad alte frequenze. Questo ha contribuito al successo delle prove a vibrazioni ambientali. La risposta strutturale alle vibrazioni ambientali è catturata da uno o più sensori di riferimento disposti in posizioni fisse e da una serie di sensori itineranti posizionati in differenti punti lungo la struttura e in diverse configurazioni.

Il numero di punti da utilizzare è condizionato dalla risoluzione spaziale necessaria per caratterizzare adeguatamente la forma dei principali modi di vibrazione.

I segnali analogici degli accelerometri sono trasmessi ad un sistema di acquisizione di dati con un convertitore da analogico a digitale.

I metodi di identificazione modale solo output assumono che l'eccitazione di input sia una Gaussiana con media zero di "rumore bianco". Il rumore bianco un

tipo di rumore caratterizzato dall'assenza di periodicità nel tempo e da ampiezza costante su tutto lo spettro di frequenze.

### **1.2.3.1 Dati casuali**

Si dà ora uno scorcio ai tipi di dati casuali. Una singola time-history che rappresenti un fenomeno casuale è chiamata funzione campione; l'insieme di ogni possibile funzione campione che un fenomeno casuale può produrre è chiamato processo casuale o stocastico. I processi casuali sono classificati al modo seguente:

*processi stazionari*: quando le proprietà del fenomeno possono essere ipoteticamente descritte, in ogni istante di tempo, computando il valore medio tra l'insieme delle funzioni campione che descrivono il processo; inoltre le proprietà calcolate in un breve intervallo di tempo non variano significativamente da un intervallo all'altro;

*processi stazionari ergodici*: quando le proprietà del fenomeno possono essere descritte calcolando le medie nel tempo su specifiche funzioni campione dell'insieme. Quindi in questi casi le proprietà dei fenomeni casuali possono essere determinati da una singola time-history;

*processi non stazionari*: quando le proprietà del fenomeno, descritte ad esempio dal valor medio, variano al variare dell'intervallo di tempo considerato.

## **1.2.4 Analisi dei segnali**

Le analisi dei segnali possono essere eseguite nel *dominio delle frequenze* o nel *dominio del tempo*.

Gli algoritmi nel **dominio delle frequenze** prevedono l'acquisizione di accelerazioni dalle prove sperimentali solitamente fornendo alla struttura una eccitazione forzata. I metodi definiti nel dominio delle frequenze operano

ricavando le *funzioni di risposta in frequenza (FRF)* dalle quali è possibile individuare i periodi propri, gli smorzamenti e le deformate modali della struttura. Le *FRF* sono tipicamente ottenute per mezzo di analisi mediante la *Fast Fourier Transform (FFT)*.

Il metodo più semplice per la determinazione delle caratteristiche modali delle strutture nel dominio delle frequenze è il metodo *Peak-Picking (PP)*. Il metodo prende nome dal fatto che la determinazione delle frequenze proprie è ottenuta dalla frequenza corrispondente ai picchi del modulo della *FRF*. Data la sua semplicità, nel passato è stato il metodo più diffuso per la determinazione delle caratteristiche modali di strutture civili. Il metodo assume che lo smorzamento sia modesto e che i modi siano ben separati tra loro, in modo tale che le frequenze proprie non interagiscono.

Nel caso in cui questo non accada, l'applicazione del metodo risulta essere affetto da errori importanti. Questo è dovuto al fatto che il metodo, in realtà, identifica gli *operating deflection shape* invece dei modi propri, ottenuti per somma di contributi di diversi modi propri. Un altro svantaggio dovuto all'applicazione di tale metodologia è dovuto alla "soggettività" necessaria nella scelta delle frequenze proprie quando la *FRF* è definita con scarsa risoluzione o quando nella *FRF* è presente un elevato livello di rumore nelle misure.

Il metodo denominato *Complex Mode Indication Function (CMIF)* è considerato un'estensione del metodo *PP*, nel quale è stata introdotta una scomposizione ai valori singolari (*Singular Value Decomposition, SVD*) allo scopo di separare il contributo dei singoli modi. Come suggerisce il nome, il *CMIF* è stato sviluppato originariamente per individuare ed enumerare il numero di modi presenti nelle misure effettuate. Il metodo è caratterizzato da una procedura di diagonalizzazione della matrice di densità spettrale tramite la tecnica del *SVD*, in modo da separare i modi accoppiati e ottenere da un sistema a  $N$  gradi di libertà (*GDL*),  $N$  sistemi ognuno ad un singolo *GDL*. Il metodo consente di ottenere i parametri modali delle strutture soggette sia a vibrazioni forzate che per forzanti di tipo ambientale. Un'estensione del *CMIF* può essere ottenuta sostituendo al metodo *PP*, metodi più evoluti per la determinazione delle caratteristiche modali,

una volta ottenuta la decomposizione della matrice spettrale in singoli gradi di libertà (PSD).

Il Circle-fit method è tra i metodi più diffusi operanti nel dominio delle frequenze. Esso si basa sull'osservazione che, nell'intorno di una frequenza propria del sistema, i punti della FRF, se rappresentati nel piano complesso di Nyquist, descrivono una circonferenza. Tale metodologia, semplice ma affidabile, è descritta ed utilizzata nei capitoli successivi per ottenere le caratteristiche dinamiche di strutture oggetto di sperimentazione.

I modelli nel **dominio del tempo** costituiscono un potente strumento analitico per la descrizione e l'interpretazione di processi stocastici derivante dall'osservazione di fenomeni dinamici. Essi sono stati inizialmente sviluppati in discipline quali l'ingegneria del controllo e la teoria dei sistemi. Le basi teoriche e le caratteristiche fondamentali sono descritte da Ljung, Soderstrom & Stoica e da Van Overschee & De Moor. Negli ultimi anni tali modelli sono stati utilizzati per la descrizione e l'identificazione di sistemi strutturali di strutture ad uso civile (ponti, edifici...) soggetti a eccitazione ambientale. Le risposte dinamiche, acquisite durante le prove sperimentali effettuate su strutture, possono essere considerate come serie temporali discrete (ovvero i valori della risposta dinamica sono rilevati ad intervalli di tempo costante) e possono essere considerate in modo statistico mediante processi stocastici descriventi il fenomeno fisico in esame.

I modelli matematici utilizzati sono costituiti da equazioni alle differenze nella variabile tempo al discreto, cui corrispondono equazioni differenziali che governano il moto dei sistemi vibranti a tempo continuo. Tali modelli possono essere suddivisi in due grandi famiglie: i modelli *a rappresentazione esterna* (o modelli ingresso-uscita) ed i modelli *a rappresentazione interna* (o modelli di stato).

I modelli a rappresentazione esterna sono modelli che considerano solo le variabili osservate, solitamente suddivise in variabili di ingresso e variabili di uscita. I modelli a rappresentazione interna ricorrono a variabili ausiliarie, dette appunto variabili di stato.

Per valutare le proprietà modali della struttura occorre risolvere i modelli ricercando i coefficienti propri del modello. Il metodo di identificazione parametrica conosciuto come Prediction Error Method (PEM) consente di stimare tali parametri, individuando una funzione "predittore" che fornisca, nota la storia temporale fino al tempo  $t$ , una valutazione il più possibile accurata del valore del segnale al tempo  $t+1$ . È possibile quindi risalire ai coefficienti attraverso una procedura iterativa di ottimizzazione non lineare. La funzione "errore di predizione" è definita come la differenza tra il valore del segnale in uscita (ad esempio le accelerazioni misurate sulla struttura) rispetto al valore del segnale predetto attraverso il modello.

I modelli di stato, invece, possono essere convenientemente risolti mediante algoritmi a sottospazi. L'identificazione con metodi a sottospazi è usualmente basata sulla manipolazione di matrici mediante operazioni di algebra lineare. Il nome "metodi a sottospazi" riflette il fatto che le matrici contenenti il segnale misurato possono essere interpretate come uno spazio vettoriale dove le colonne di tale matrice rappresentano una base di vettori. Tali matrici possono essere determinate direttamente dalla sola conoscenza dei segnali di uscita, senza la conoscenza a priori delle matrici caratterizzanti il modello.

La predizione del segnale, necessaria per la determinazione delle matrici del sistema, è accompagnata dalla costruzione dell'associato filtro di Kalman .

Le ipotesi che si formulano alla base di tali metodi sono solamente la linearità del comportamento dinamico della struttura, l'invarianza del comportamento della struttura nel tempo e la schematizzazione delle forze eccitanti incognite nella forma di un rumore bianco. Tali metodologie permettono inoltre la stima delle incertezze dei parametri modali attraverso la matrice di covarianza, fornendo un intervallo di confidenza dei parametri ricercati.

L'ultima fase del processo identificativo è la validazione del modello identificato: si valuta cioè se il modello trovato abbia un'accuratezza sufficiente e soddisfacente o meno.

### 1.2.5 Modello di stato e modello di osservabilità

Come esposto nel paragrafo 1.2.4, il modello di stato è anche detto modello a rappresentazione interna e si sviluppa nel dominio del tempo.

Consideriamo la risposta stocastica come un sistema in funzione del tempo

$$y(t) = (y_1(t); y_2(t); \dots; y_m(t))$$

Il sistema può essere visto anche nella classica formulazione di un'equazione di moto a più gradi di libertà

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (1)$$

Dove  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{K}$  sono rispettivamente la matrice delle masse, matrice di smorzamento e matrice di rigidità,  $\mathbf{f}(t)$  è il vettore delle forze. La soluzione dell'equazione omogenea associata è di tipo armonico  $\mathbf{y} = \boldsymbol{\psi} e^{\lambda t}$ . Sostituendo nella prima equazione la soluzione dell'omogenea associata si ottiene un problema ogni auto valori

$$(\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{D}\lambda + \mathbf{K}) \boldsymbol{\psi} = 0$$

Viene introdotta ora la *formulazione di stato*:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) \end{Bmatrix}$$

dove  $\mathbf{x}(t)$  rappresenta gli stati, mentre gli input sono ancora dati dalla variabile  $\mathbf{f}(t)$ .

Introducendo la formulazione di stato, l'equazione del moto del secondo ordine si semplifica in un'equazione di primo ordine detta *equazione di stato*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{f}(t) \quad \text{con} \quad \mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$A_c$  è la matrice dinamica nel continuo del tempo.

Ponendo uguale a zero le forze esterne  $\mathbf{f}(t)$  e quindi il secondo termine dell'equazione, siamo in presenza di moto libero

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t)$$

da cui si ricava la soluzione armonica

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\psi} e^{\lambda t}$$

e sostituendo

$$\boldsymbol{\psi} \mathbf{A}_c = \lambda \boldsymbol{\psi}$$

Quando si effettuano registrazioni sperimentali su una struttura, le rilevazioni  $\mathbf{y}(t)$  che si eseguono con gli opportuni sensori riguardano solo alcuni gradi di libertà. Se si assume che le misurazioni siano effettuate da un singolo sensore, all'equazione del moto può essere associata **l'equazione di osservabilità**

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_a \ddot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{C}_v \dot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{C}_d \mathbf{v}(t) \quad (3)$$

Le matrici  $\mathbf{C}_a$   $\mathbf{C}_v$   $\mathbf{C}_d$  servono a contenere i gradi di libertà registrati, infatti le loro componenti sono tutte uguali a zero ad eccezione di quelle in corrispondenza delle quali abbiamo i gradi di libertà determinati dallo strumento misuratore.

Creando sistema tra l'equazione di moto (1) e quella di osservabilità (3) ed introducendo le seguenti definizioni

$$\mathbf{C} = [\mathbf{C}_d - \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}; \mathbf{C}_v - \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D}]$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1}$$

si ottiene un'equazione di osservabilità in questa forma

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{E} \mathbf{f}(t) \quad (4)$$

Associando alla (2) l'equazione (4), si ottiene la rappresentazione di stato di un sistema ad  $N$  gradi di libertà

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{f}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{E} \mathbf{f}(t)$$

### 1.2.5.1 Modello di stato in forma discreta

Il vantaggio dell'aver una formulazione di stato come la (2) è che la soluzione generale è direttamente disponibile

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}_c(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}_c(t-\tau)} \mathbf{B}_c \mathbf{f}(\tau) d\tau$$

il primo termine è la soluzione dell'equazione omogenea, il secondo è la soluzione particolare.

Poiché le grandezze fisiche fornite dalle misurazioni sono in termini discreti, è necessario passare dalla formulazione continua del tempo a quella discreta e per farlo poniamo  $t_0 = k \Delta t$  e  $t = (k+1) \Delta t$ . Adottando la nozione semplificata  $y_k = y(k\Delta t)$  con  $\Delta t$  posto pari all'intervallo di tempo di acquisizione. Le equazioni riscritte in termini discreti si presentano così

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{f}_k$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k + \mathbf{E} \mathbf{f}_k$$

dove  $\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}_c \Delta t}$  è la matrice dinamica a tempo discreto;  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_c \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}_c \tau} d\tau = [\mathbf{A} - \mathbf{I}] \mathbf{A}_c^{-1} \mathbf{B}_c$

La formulazione può anche essere espressa come

$$\mathbf{x}_k = e^{Ac k\Delta t} \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}_d^k \mathbf{x}_0 \quad \text{con} \quad \mathbf{A}_d = e^{Ac \Delta t}$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{A}_d^k \mathbf{x}_0 \quad (5)$$

## 1.2.6 Risoluzione del modello di stato con metodi a sottospazi

### 1.2.6.1 Introduzione

Ci prestiamo ad affrontare un'identificazione parametrica di solo output nel dominio del tempo. Trattasi di un metodo noto come **Identificazione del Sottospazio Stocastico** (*Stochastic Subspace Identification - SSI*)

Il nome "metodi a sottospazi" riflette il fatto che le matrici contenenti il segnale misurato possono essere interpretate come uno spazio vettoriale dove le colonne di tale matrice rappresentano una base di vettori, mentre le righe permettono di ottenere una sequenza di stime valutate mediante una batteria di filtri di Kalman. Il filtro di Kalman è applicabile a sistemi a più variabili e serve per affrontare il problema della valutazione di una grandezza incerta, come un parametro ignoto o un segnale remoto.

Tale valutazione viene effettuata sulla base di osservazioni e misure sperimentali sul fenomeno.

Questo metodo si basa sul fitting parametrico di un modello matematico sulle funzioni di correlazione tra i segnali o direttamente sui dati acquisiti dai sensori. Tale calibrazione si ottiene dalla minimizzazione della deviazione standard tra la risposta prevista dal modello e quella misurata sperimentalmente. Tale metodo consente una più precisa stima dei parametri modali rispetto ai primi, sebbene richieda un maggiore onere computazionale.

Le **assunzioni** alla base dell'identificazione stocastica sono:

- Il rumore di processo ed il rumore di misura non sono identicamente zero
- Il numero delle misure tende ad infinito

I metodi ai sottospazi identificano modelli di stato spazio dai dati di output applicando robuste tecniche numeriche come ad esempio la fattorizzazione QR, SVD e minimi quadrati.

Ecco la classe degli algoritmi che operano nei sottospazi

Year	Name	Contribution	Discipline	Refs.
1809	Gauss	Least Squares	Statistics	[Gau 1857]
1873	Beltrami	SVD	Algebra	[Bel 1873]
1874	Jordan	SVD	Algebra	[Jor 1874]
1875	Jordan	Angles between subspaces	Algebra	[Jor 1875]
1883	Gram	QR	Algebra	[Gra 1883]
1885	Sylvester	SVD	Algebra	[Syl 1889]
1907	Schmidt	QR	Algebra	[Sch 07]
1913	Autonne	SVD	Algebra	[Aut 13]
1936	Eckart	SVD	Physics (!)	[EY 36]
1936	Hotelling	Canonical correlations	Statistics	[Hot 36]
1960	Kalman	Kalman Filter	System Theory	[Kal 60]
1965	Golub/Kahan	SVD-algorithms	Numerical lin.alg.	[GVL 89]
1966	Ho/Kalman	Realization	System Theory	[HK 66]
1974	Zeiger/McEwen	SVD & Realization	System Theory	[ZM 74]
1974	Akaike	Stochastic Realization	Statistics	[Aka 74,75]
1976	Box-Jenkins	Box-Jenkins models	Statistics	[BJ 76]
1976	Faure	Stochastic linear systems	System Theory	[Fau 76]
1978	Kung	Realization theory	System theory	[Kun 78]
1986	Willems	Behavioral framework	System Theory	[Wil 86]
1987	Ljung	Prediction Error	System Theory	[Lju 87]

Gli algoritmi di identificazione sub-spaziali sono basati su concetti di teoria dei sistemi, algebra lineare e metodi statistici. La seguente tabella ne sintetizza gli elementi principali

System	Geometry	Algorithm
High order state sequence	Projection (orthogonal or oblique)	QR-decomposition
Low order state sequence	Determine finite dimensional subspace	(Generalized) singular value decomposition
System matrices	Linear relations	Least squares

Il metodo applicato al caso di studio sarà *SSI*, per cui si ipotizza che le risposte, continue nel tempo, di un sistema a più gradi di libertà  $\mathbf{y}(t)$  siano gli output del modello di stato spaziale.

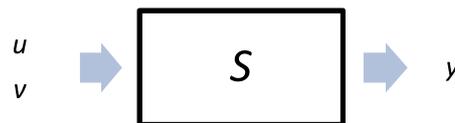
Le equazioni che seguono hanno valenza generale in quanto sono alla base della dinamica delle strutture seppur riscritte in diversa notazione. Verranno poi introdotte operazioni geometriche e metodi statistici per ricondursi ai modi di vibrare della strutture.

## 1.3 SUBSPACE SYSTEM IDENTIFICATION

### 1.3.1 Introduction

#### 1.3.1.1 System identification

This is a schematic diagram of a dynamic system with input  $u$ , output  $y$  and disturbance  $v$ . We can observe  $u$  and  $y$  but not  $v$ . We can manipulate the input but not output. Even if we do not know the inside structure of the system, the measured input and output data provide useful information about the system behavior.



#### 1.3.1.2 Subspace method of System Identification (SSI)

Consider an innovation representation of a discrete-time *LTI* (linear time-invariant) system of the form

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{K}\mathbf{e}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{e}(t)$$

where  $\mathbf{x} \in R^n$  is the state vector,  $\mathbf{u} \in R^m$  the input vector,  $\mathbf{y} \in R^p$  the output vector,  $\mathbf{e} \in R^p$  is the innovation vector with mean zero and covariance matrix  $R > 0$ , and  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{K}$  are matrices with appropriate dimensions.

The first is the state space equation, the second is the observability equation. In this case we have a deterministic system because equations contain not only stochastic terms, but also the input  $u$ .

So a stochastic system can be written as

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}\mathbf{e}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{e}(t)\end{aligned}$$

Following we will discuss the general case of Subspace method of System Identification applied to deterministic system, then to particular case of stochastic system that is our interest.

Basic idea of subspace method

Subspace identification methods are based on the following idea. Suppose that an estimate of a sequence of state vectors of the state space model constructed from the observed input-output data. Then for  $t = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , where  $N$  is the number of data, we have

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t+1) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}(t) \\ \mathbf{v}(t) \end{bmatrix} \quad (7)$$

where  $\bar{\mathbf{x}} \in R^n$  is the estimate of state vector,  $\mathbf{u} \in R^m$  the input,  $\mathbf{y} \in R^p$  the output, and  $\boldsymbol{\eta}, \mathbf{v}$  are the residuals. It may be noted that since all the variables are given, (7) is a regression model for system parameters  $\boldsymbol{\Theta} := \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \in R^{(n+p) \times (n+m)}$ . This class of approaches are called the *direct N4SID* methods. This estimate uniquely exists if the rank condition

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(0), \bar{\mathbf{x}}(1), \dots, \bar{\mathbf{x}}(N-1) \\ \mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(N-1) \end{bmatrix}$$

is satisfied.

Moreover, the covariance matrices of the residual are given by

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{T} \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}(t) \\ \mathbf{v}(t) \end{bmatrix} [\boldsymbol{\eta}^T(t), \mathbf{v}^T(t)]$$

Thus, by solving a certain algebraic Riccati equation, we can derive a steady state Kalman filter (or an innovation model) of the form

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t+1) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} \\ \mathbf{I}_p \end{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}(t)$$

where  $\mathbf{K}$  is the steady state Kalman gain,  $\hat{\mathbf{x}}$  is the estimate of state vector and  $\hat{\mathbf{e}}$  is the estimate of innovation process.

#### Computation of state vectors

We explain how we compute the estimate of state vector by the LQ decomposition; this is a basic technique in subspace identification methods. Suppose that we have an input-output data from an LTI system. Let the block Hankel matrices be defined by

$$\mathbf{U}_{0|k-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) & \mathbf{u}(1) & \cdots & \mathbf{u}(N-1) \\ \mathbf{u}(1) & \mathbf{u}(2) & \cdots & \mathbf{u}(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}(k-1) & \mathbf{u}(k) & \cdots & \mathbf{u}(k+N-2) \end{bmatrix} \in R^{km \cdot N}$$

and

$$\mathbf{Y}_{0|k-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(0) & \mathbf{y}(1) & \cdots & \mathbf{y}(N-1) \\ \mathbf{y}(1) & \mathbf{y}(2) & \cdots & \mathbf{y}(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}(k-1) & \mathbf{y}(k) & \cdots & \mathbf{y}(k+N-2) \end{bmatrix} \in R^{kp \cdot N}$$

Where  $k > n$  and  $N$  sufficiently large.

For notation convenience, let  $p$  and  $f$  denote the past and the future, respectively.

Then we define the past as  $\mathbf{U}_p := \mathbf{U}_{0|k-1}$  and  $\mathbf{Y}_p := \mathbf{Y}_{0|k-1}$ . Similarly we define the future data as

$$\mathbf{U}_{k|2k-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k) & \mathbf{u}(k+1) & \cdots & \mathbf{u}(k+N-1) \\ \mathbf{u}(k+1) & \mathbf{u}(k+2) & \cdots & \mathbf{u}(k+N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}(2k-1) & \mathbf{u}(2k) & \cdots & \mathbf{u}(2k+N-2) \end{bmatrix} \in R^{km \cdot N}$$

and

$$\mathbf{Y}_{k|2k-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(k) & \mathbf{y}(k+1) & \cdots & \mathbf{y}(k+N-1) \\ \mathbf{y}(k+1) & \mathbf{y}(k+2) & \cdots & \mathbf{y}(k+N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}(2k-1) & \mathbf{y}(2k) & \cdots & \mathbf{y}(2k+N-2) \end{bmatrix} \in R^{km \cdot N}$$

so we have  $\mathbf{U}_f := \mathbf{U}_{k|2k-1}$  and  $\mathbf{Y}_f := \mathbf{Y}_{k|2k-1}$ .

Let the LQ decomposition be given by

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_f \\ \mathbf{W}_p \\ \mathbf{Y}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & 0 & 0 \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} & 0 \\ \mathbf{R}_{31} & \mathbf{R}_{32} & \mathbf{R}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^T \\ \mathbf{Q}_2^T \\ \mathbf{Q}_3^T \end{bmatrix}$$

where  $\mathbf{R}_{11} \in R^{km \cdot km}$ ,  $\mathbf{R}_{22} \in R^{k(m+p) \cdot k(m+p)}$ , and  $\mathbf{R}_{33} \in R^{kp \cdot kp}$  are upper triangular and  $\mathbf{Q}_i$   $i = 1, 2, 3$  are orthogonal matrices. Then, from Theorem 6.3 we see that the oblique projection of the future  $\mathbf{Y}_f$  onto the join past  $\mathbf{W}_p := \begin{bmatrix} \mathbf{U}_p \\ \mathbf{Y}_p \end{bmatrix}$  along the future  $\mathbf{U}_f$  is given by

$$\xi := \hat{\mathbf{E}}_{\|\mathbf{U}_f\|} \{ \mathbf{Y}_f | \mathbf{W}_p \} = \mathbf{R}_{32} \mathbf{R}_{22}^* \mathbf{W}_p$$

where  $(\cdot)^*$  denotes the pseudo-inverse. We can show that  $\xi$  can be factored as a product of the extended observability matrix  $\mathbf{O}_k$  and the future state vector  $\mathbf{X}_f := [\mathbf{x}(k), \dots, \mathbf{x}(k + N - 1)] \in R^{nN}$  it follows that

$$\xi = \mathbf{O}_k \mathbf{X}_f = \mathbf{R}_{32} \mathbf{R}_{22}^* \mathbf{W}_p$$

Suppose that the SVD of  $\xi$  be given by  $\xi = U \Sigma V^T$  with  $\text{rank}(\Sigma) = n$ . Thus we can take the extended observability matrix as

$$\mathbf{O}_k = U \Sigma^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

It follows that the state vector is given by  $\mathbf{X}_f = \mathbf{O}_k^* \xi = \Sigma^{1/2} V^T$ .

Alternatively, by using a so-called shift invariant property of the extended observability matrix of (8), we can respectively compute matrices  $\mathbf{A}$  and  $\mathbf{C}$  as

$$\mathbf{A} = \mathbf{O}_{k-1}^* \mathbf{O}_k(p + 1 : pk, 1 : n), \quad \mathbf{C} = \mathbf{O}_k(1 : p, 1 : n)$$

This class of approaches are called the *realization-based N4SID methods*. For details see the MOESP method [1].

The approaches used in the stochastic identification are the **classical method** or **subspace method**. In the classical method, a transfer function model is first identified, and then a state space model is obtained by using some realization technique. In the subspace methods, we first construct the state estimates from given input-output data by using a simple procedure based on tools of numerical linear algebra, and a state space model is obtained by solving a least square problem. An important point of the study of subspace methods is to understand the key point of how the Kalman filter state vectors and the extended observability matrix are obtained by using tools of linear algebra.

## 1.3.2 Stochastic process

### 1.3.2.1 Stochastic linear system

We consider a stochastic linear system described by the state space model

$$\mathbf{x}(t + 1) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t) \quad (9a)$$

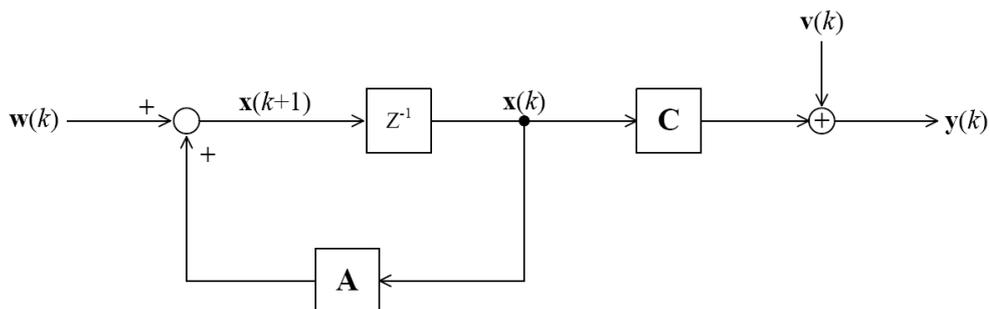
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t), \quad t = 0, 1, \dots \quad (9b)$$

where  $\mathbf{x} \in R^n$  is the state vector  $\mathbf{y} \in R^p$  the observation vector,  $\mathbf{w}(t) \in R^n$  is the “white noise inputs + process noises” (plant noise vector), and  $\mathbf{v}(t) \in R^p$  is the “white noise inputs + measurement noises” (observation noise vector). Also  $\mathbf{A}(t) \in R^{n \times n}$ ,  $\mathbf{C}(t) \in R^{p \times n}$  are deterministic function of time  $t$ . Moreover,  $\mathbf{w}$  and  $\mathbf{v}$  are zero mean Gaussian white noise vectors with covariance matrices

$$\mathbf{E} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{v}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}^T(s) & \mathbf{v}^T(s) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(t) & \mathbf{S}(t) \\ \mathbf{S}^T(t) & \mathbf{R}(t) \end{bmatrix} \delta(k - s) \quad (10)$$

where  $\mathbf{Q}(t) \in R^{n \times n}$  is nonnegative definite, and  $\mathbf{R}(t) \in R^{p \times p}$  is positive definite for all  $t = 0, 1, \dots$

where  $\delta(k - s) = 1$  when  $k = s$ , otherwise  $\delta(k - s) = 0$ .



**Figura 6** - Block diagram of the stochastic state space model

The initial state  $\mathbf{x}(0)$  is Gaussian with mean  $E\{\mathbf{x}(0)\} = \mu_x(0)$  and covariance matrix

$$E\{[\mathbf{x}(0) - \mu_x(0)][\mathbf{x}(0) - \mu_x(0)]^T\} = \mathbf{\Pi}(0)$$

and is uncorrelated with the noise  $w(t)$ ,  $v(t)$ ,  $t = 0, 1, \dots$ . This model is also called Markov model for a process  $y$ .

We defined the state transition matrix

$$\Phi(t, s) = \begin{cases} A(t-1), A(t-2), \dots, A(s), & t > s \\ I, & t = s \end{cases} \quad (11)$$

For any  $k \leq s \leq t$ , it follows that

$$\Phi(t, k) = \Phi(t, s) \Phi(s, k)$$

In terms of the transition matrix, the first equation of the state space model (9a) can be written as

$$x(t) = \Phi(t, s) x(s) + \sum_{k=s}^{t-1} \Phi(t, k+1) w(k) \quad (12)$$

Lemma 4.7

The process  $x$  of (9a) is a Gauss-Markov process  $x(t)$ . (See [1])

Lemma 4.8

The mean vector and the covariance matrix of the state process  $x$  of (9a) are respectively given by

$$\mu_x(t) = \Phi(t, 0) \mu_x(0) \quad (13)$$

and

$$\Lambda_{xx}(t, s) = \begin{cases} \Phi(t, s) \Pi(s), & t \geq s \\ \Pi(t) \Phi^T(s, t), & t < s \end{cases}$$

where  $\Pi(t) := \Lambda_{xx}(t, t) = \text{cov}\{x(t) - \mu_x(t)\}$  is the covariance matrix that satisfies

$$\Pi(t) = \Phi(t, 0) \Pi(0) \Phi^T(t, 0) + \sum_{k=0}^{t-1} \Phi(t, k+1) Q \Phi^T(t, k+1) \quad (14)$$

### 1.3.2.2 Stochastic linear time-invariant system (LTI)

In this section, we consider a stochastic LTI system, where  $\mathbf{A}(t)$ ,  $\mathbf{C}(t)$ ,  $\mathbf{Q}(t)$ ,  $\mathbf{R}(t)$ ,  $\mathbf{S}(t)$  in (9) and (10) are independent of time  $t$ .

Consider a stochastic LTI system described by

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t) \quad (15a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t), \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots \quad (15b)$$

Where  $t_0$  is the initial time, and  $\mathbf{x}(t_0)$  is a Gaussian random vector with mean  $\mu_x(t_0)$ , the covariance matrix is  $\Pi(t_0)$ .

We see, from (11), that the state transition matrix becomes  $\Phi(t, s) = A^{t-s}$ ,  $t \geq s$ . It thus follows from (13) and (14) that the mean vector is given by

$$\mu_x(t) = A^{t-t_0} \mu_x(t_0)$$

and the state covariance matrix become

$$\begin{aligned} \Pi(t) &= A^{t-t_0} \Pi(t_0) (A^T)^{t-t_0} + \sum_{k=t_0}^{t-1} A^{t-k-1} Q (A^T)^{t-k-1} \\ &= A^{t-t_0} \Pi(t_0) (A^T)^{t-t_0} + \sum_{k=0}^{t-t_0-1} A^k Q (A^T)^k \end{aligned}$$

and also  $\Pi(t)$  satisfies

$$\Pi(t+1) = A \Pi(t) A^T + Q$$

#### Lemma 4.10

Suppose that  $A$  in (15a) is stable. Letting  $t_0 \rightarrow -\infty$ , the process  $x$  becomes a stationary Gauss-Markov process with mean zero and covariance matrix

$$\Lambda_{xx}(l) = \begin{cases} A^l \Pi, & l \geq 0 \\ \Pi (A^T)^{-l}, & l < 0 \end{cases}; \quad \Lambda_{xx}(l) = \begin{cases} CA^{l-1} \bar{C}^T, & l > 0 \\ C \Pi C^T + R, & l = 0 \\ \bar{C} (A^T)^{-l-1} C^T, & l < 0 \end{cases}$$

where  $\bar{C}^T = A\Pi C^T + S$  and  $\Pi$  is a unique solution of Lyapunov equation

$$\Pi = A \Pi A^T + Q$$

### 1.3.3 Subspace system identification – innovation model

#### 1.3.3.1 State estimation problem

Let  $F_t = \sigma\{y(0), y(1), \dots, y(t)\}$  be the  $\sigma$ -algebra generated by the observations up to the present time  $t$ . We now formulate the state estimation problem.

The problem is to find the minimum variance estimate  $\hat{x}(t+m|t)$  of the state vector  $x(t+m)$  based on the observations up to time  $t$ . This equivalent to designing a filter that produces  $\hat{x}(t+m|t)$  minimizing the performance index

$$J = E\{ \|x(t+m) - \hat{x}(t+m|t)\|^2 \}$$

where  $\hat{x}(t+m|t)$  is  $F_t$ -measurable. The estimation problem is called the prediction, filtering or smoothing according as  $m > 0$ ,  $m = 0$  or  $m < 0$ .

The optimal estimate is expressed in terms of the conditional expectation of  $x(t+m)$  given  $F_t$  as

$$\hat{x}(t+m|t) = E\{x(t+m)|F_t\}$$

Let the estimation error be defined by  $\hat{x}(t+m|t) := x(t+m) - \hat{x}(t+m|t)$  and the error covariance matrix be

$$P(t+m|t) := E\{[x(t+m) - \hat{x}(t+m|t)][x(t+m) - \hat{x}(t+m|t)]^T\}$$

For Gaussian process, the conditional expectation  $\hat{x}(t+m|t)$  is a linear function of observations  $y(0), y(1), \dots, y(t)$ , so that the optimal estimate coincides with the linear minimum variance estimate of  $x(t+m)$  given observations up to time  $t$ . More precisely, we define a linear space generated by the observations as

$$\mathbf{y}_t = \left\{ c + \sum_{i=0}^t \mathbf{A}_i \mathbf{y}(i) \mid c \in \mathbb{R}^n; \mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n \times p} \right\}$$

The space  $\mathbf{y}_t$  is called the data space at time  $t$ .

### 1.3.3.2 Kalman filter

Now we derive the Kalman filter algorithm for discrete-time stochastic linear system by using the orthogonal projection. The filter algorithm is extended so that it can be applied to stochastic system with exogenous input.

The algorithm of Kalman filter for the discrete-time stochastic system described by (4.58) and (4.59) is given by the following

(i) Filter equations

$$\hat{\mathbf{x}}(t+1) = \mathbf{A}(t)\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}(t)[\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}(t)\hat{\mathbf{x}}(t)] \quad (16a)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(t|t) = \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}_f(t)[\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}(t)\hat{\mathbf{x}}(t)] \quad (16b)$$

(ii) The innovation process

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{C}(t)\hat{\mathbf{x}}(t)$$

(iii) Kalman gains

$$\mathbf{K}(t) = [\mathbf{A}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{C}^T(t) + \mathbf{S}(t)][\mathbf{C}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{C}^T(t) + \mathbf{R}(t)]^{-1}$$

$$\mathbf{K}_f = \mathbf{P}(t)\mathbf{C}^T[\mathbf{C}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{C}^T(t) + \mathbf{R}(t)]^{-1}$$

(iv) Error covariance matrices

$$P(t+1) = A(t)P(t)A^T(t) - K(t)[C(t)P(t)C^T(t) + R(t)]K^T(t) + Q(t)$$

$$P(t|t) = P(t) - P(t)C^T(t)[C(t)P(t)C^T(t) + R(t)]^{-1}C(t)P(t)$$

(v) *Initial condition*

$$\hat{x}(0) = \mu_x(0), \quad P(0) = \Pi(0)$$

We see that the Kalman filter is a dynamic system that recursively produces the estimates  $\hat{x}(t+1)$  and  $\hat{x}(t|t)$  by updating the old estimates based on the received output data  $y(t)$ . The Kalman filter is, therefore, an algorithm suitable for the on-line state estimation. The first equation of (iv) is a discrete-time Riccati equation satisfied by  $P(t) \in R^{n \cdot n}$ .

It follows from the definition of the innovation process  $e$ , that the Kalman filter equation is also written as

$$\hat{x}(t+1) = A(t)\hat{x}(t) + K(t)e(t)$$

$$y(t) = C(t)\hat{x}(t) + e(t)$$

These equations are called **innovation model**. These equations as a model of the process  $y$  has a different state vector and a noise process than those of the state space model of (9), but the two models are equivalent state space representations that simulate the same output process  $y$ .

The *innovation model* is less redundant in the noise model, and is often used in stochastic realization, or the state space system realization.

### Stationary Kalman filter

Consider the Kalman filter for the stochastic LTI system of (15). Since all the system parameters are *time-invariant*, it follows from (16) that the Kalman filter is expressed as

$$\hat{x}(t+1) = A\hat{x}(t) + K(t)[y(t) - C\hat{x}(t)] \quad (17)$$

where  $\hat{x}(t) := \hat{x}(t|t-1)$  with the initial condition  $\hat{x}(0) = \mu_x(0)$ .

The Kalman filter is given by

$$K(t) = [AP(t)C^T + S][CP(t)C^T + R]^{-1}$$

The error covariance matrix (Riccati equation) becomes

$$P(t+1) = AP(t)A^T - K(t)[CP(t)C^T + R]K^T(t) + Q$$

where  $P(t) := P(t|t-1)$  and the initial condition is  $P(0) = \Pi(0)$

Suppose that a solution  $P(t)$  of the Riccati equation converges to a constant matrix as  $t \rightarrow \infty$ . Put  $P(t) = P(t+1) = P$  in Riccati equation to get an algebraic Riccati equation (ARE).

$$P = APA^T - (APC^T + S)(CPC^T + R)^{-1}(APC^T + S)^T + Q$$

In the following, we define  $\Phi := A - SR^{-1}C$  and  $M := Q - SR^{-1}S^T$ . So we can write ARE equation in this new way

$$P = \Phi(P - PC^T[CP^T + R]^{-1}CP)\Phi^T + M$$

In this case  $K(t)$  converge to a stationary Kalman gain

$$K = [APC^T + S][CPC^T + R]^{-1}$$

Hence, the filter equation (17) becomes

$$\hat{x}(t+1) = [A - KC]\hat{x}(t) + K y(t)$$

This Kalman filter model plays a crucial role in the implementation of system identification using only output information because the Kalman state vector  $\hat{x}(k)$  at the  $k$ -th time step can be represented in terms of the initial state vector  $\hat{x}(0)$  and the *past output* observations  $y(t)$  for  $t < k$  as follows

$$\hat{x}(t) = (A - KC)^t \hat{x}(0) + \sum_{i=0}^{t-1} (A - KC)^i K y(t - i - 1)$$

For convenience of representation, it is assumed that the estimate of the Kalman state vector  $\hat{x}(t)$  at the  $t$ -th time step is influenced by the infinite number of its past output vectors (i.e.  $y(t)$  for  $-\infty < t < k - 1$ ). Under this assumption, the Kalman state vector  $\hat{x}(t)$  can be represented in a matrix form as

$$\hat{x}(t) = \Psi_k \mathbf{y}_k^-$$

$$\Psi_k = [K, (A - KC)K, (A - KC)^2 K, \dots] \in R^{n(p \cdot \infty)}, \quad \mathbf{y}_k^- = \begin{bmatrix} y(t-1) \\ y(t-2) \\ y(t-3) \\ \dots \end{bmatrix} \in R^{m \cdot \infty}$$

The Kalman state vector sequence consisting of  $N$  Kalman state vectors from the  $k$ -th time step to the  $(k + N - 1)$ -th time step.

The Kalman state vector  $\hat{x}(t)$  at the  $t$ -th time step is the minimum variance estimates of the state vector  $\mathbf{x}(t)$  at the  $t$ -th time step. Such minimum variance properties make it easy to represent the relationships between  $\hat{x}(t)$  and  $\mathbf{x}(t)$  in vector spaces.

In order to make this clear, let us define an inner product space with the past output vectors, i.e.  $\mathbf{y}(t); t = 0; 1; \dots; k - 1$ , as follows:

$$\mathbf{y}_k^- = \left\{ \alpha + \sum_{i=0}^{k-1} D_i y(i) \mid \alpha \in R^{n \cdot l}, D \in R^{n \cdot m} \right\}$$

As  $\mathbf{y}_k^-$  is defined by past output vectors, it is called the *past output vector space*. The vector  $\mathbf{a}$  is associated with the initial state  $\mathbf{x}(0)$  while the matrix  $\mathbf{D}_i$  is a linear coefficient matrix. It can be seen that  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  is on the space  $\mathbf{y}_k^-$  and, indeed,  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$  is orthogonal to  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  and so to any vector in  $\mathbf{y}_k^-$ . Therefore, the orthogonal projection of the state vector  $\mathbf{x}(t)$  on  $\mathbf{y}_k^-$  results in the Kalman state vector  $\hat{\mathbf{x}}(t)$ .

This is the most important property of the Kalman filter model in the implementation of the stochastic subspace identification. In fact, the output vector  $\mathbf{y}(t+k)$  at the  $(t+k)$ -th time step for  $k \geq 0$  can be represented by

$$\mathbf{y}(t+k) = \mathbf{CA}^k \mathbf{x}(t) + \sum_{s=1}^k \mathbf{CA}^{s-1} \mathbf{w}(t+k-s) + \mathbf{v}(t+k) \quad (18)$$

Thus, orthogonally projecting the vector  $\mathbf{y}(t+k)$  on the space  $\mathbf{y}_k^-$  leads to

$$\mathbf{y}(t+k)/\mathbf{y}_k^- = \mathbf{CA}^k \hat{\mathbf{x}}(t)$$

The last equality comes from the fact that the current and future process and measurement noises are uncorrelated with the past output, i.e.  $\{\sum_{s=1}^k \mathbf{CA}^{s-1} \mathbf{w}(t+k-s)\}/\mathbf{y}_k^- = \mathbf{0}$  and  $\{\mathbf{v}(t+k)\}/\mathbf{y}_k^- = \mathbf{0}$ , respectively. This allows us to estimate the Kalman state vectors using only output observations.

## 1.3.4 Realization of stochastic system

### 1.3.4.1 Data matrices of stochastic system

Consider a discrete-time LTI system described by

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(t+1) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}(t) \mathbf{e}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{e}(t)\end{aligned}$$

With regard to the output representation, the output vectors  $\mathbf{y}(t)$  for  $t \geq k$ , which can be predicted using  $\hat{\mathbf{x}}(t)$ , can be represented as

$$\begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ \vdots \\ y(2k-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k) + \begin{bmatrix} I & & & & \\ CK & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & & I & \\ CA^{k-2}K & \cdots & CK & I & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(k) \\ e(k+1) \\ \vdots \\ e(2k-1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_k^+ = \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ \vdots \\ y(2k-1) \end{bmatrix} \in R^{kp}, \quad \mathbf{e}_k^+ = \begin{bmatrix} e(k) \\ e(k+1) \\ \vdots \\ e(2k-1) \end{bmatrix} \in R^{km}, \quad \mathbf{o}_k = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix}$$

and the Toeplitz matrix

$$\boldsymbol{\psi}_k = \begin{bmatrix} I & & & & \\ CK & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & & I & \\ CA^{k-2}K & \cdots & CK & I & \end{bmatrix} \in R^{kp \cdot km}$$

the terms of the block of Toeplitz matrix are called Markov parameters.

So we have

$$\mathbf{y}_k^+ = \mathbf{o}_k \hat{\mathbf{x}}(k) + \boldsymbol{\psi}_k \mathbf{e}_k^+, \quad (19)$$

Remembering that

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \boldsymbol{\Psi}_k \mathbf{y}_k^-$$

we have

$$\mathbf{y}_k^+ = \mathbf{O}_k \boldsymbol{\Psi}_k \mathbf{y}_k^- + \boldsymbol{\psi}_k \mathbf{e}_k^+,$$

where  $\mathbf{O}_k$  is the extended observability matrix.

In this equation, as the *output residual vector*  $\mathbf{e}_k^+(k)$  at the  $k$ -th time step is uncorrelated with the *past output vector*  $\mathbf{y}(t)$  for  $t < k$ , the vector  $\mathbf{y}_k^-$  of the past output vectors is totally independent of the vector  $\mathbf{e}_k^+$  of the *future residual vectors*;

As the estimate of the *Kalman state vector*  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  at the  $k$ -th time step is represented in terms of its past output vectors in the form of  $\hat{\mathbf{x}}(k) = \boldsymbol{\Psi}_k \mathbf{y}_k^-$ , the *Kalman state vector sequence* consisting of  $k$  Kalman state vectors and it can be represented as follows

$$\hat{\mathbf{X}}_{0|k-1} = \boldsymbol{\Psi}_k \mathbf{Y}_{0|k-1}^-$$

The subscript  $0|k-1$  of the matrix  $\mathbf{Y}_{0|k-1}^-$  follows the one of  $\hat{\mathbf{X}}_{0|k-1}$ , while the superscript (-) denotes past output.

$\boldsymbol{\Psi}_k$ ,  $\hat{\mathbf{X}}_{0|k-1}$  and  $\mathbf{Y}_{0|k-1}^-$  are denote as

$$\mathbf{Y}_{0|k-1}^- = \begin{bmatrix} y(0) & y(1) & \cdots & y(N-1) \\ y(1) & y(2) & \cdots & y(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(k-1) & y(k) & \cdots & y(k+N) \end{bmatrix} = [\mathbf{y}_0^-, \mathbf{y}_1^-, \dots, \mathbf{y}_s^-, \dots, \mathbf{y}_{N-1}^-]$$

$$\hat{\mathbf{X}}_{0|k-1} = [\hat{\mathbf{x}}(0), \hat{\mathbf{x}}(1), \dots, \hat{\mathbf{x}}(N-1)]$$

$$\boldsymbol{\psi}_k = \begin{bmatrix} I & & & & & \\ CK & \ddots & & & & \\ \vdots & \ddots & & & I & \\ CA^{k-2}K & \cdots & CK & I & & \end{bmatrix}$$

$\mathbf{y}_k^-$  represented the past output vectors and the block data matrix  $\mathbf{Y}_{0|k-1}^-$  is called the “*past output data matrix*” in the sense that the output vectors in each column of the matrix are the past output vectors with respect to the time step of the state vector in the corresponding column of  $\hat{\mathbf{X}}_{0|k-1}$ .

For the determination of the Kalman state vector sequence  $\hat{\mathbf{X}}_{0|k-1}$ , one can display the output vector  $\mathbf{y}(t+k)$ , for  $k \leq 0$ , at the  $(t+k)$ -th time step in terms of the state vector  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  at the  $k$ -th time step.

$\mathbf{y}(t+k)$ , for  $k = 1, 2, \dots$ , we can write

$$\mathbf{y}(t+k) = \mathbf{CA}^k \hat{\mathbf{x}}(t) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{CA}^i \mathbf{K} \mathbf{e}(t+k-i-1) + \mathbf{e}(t+k) \quad (20)$$

Then, from Equation (20), the “*future output data matrix*”  $\mathbf{Y}_{k|2k-1}^+$  can be formulated in terms of the Kalman state vector sequence  $\hat{\mathbf{X}}_{0|k-1}$ , as well as the output residual vectors as follows

$$\mathbf{Y}_{k|2k-1}^+ = \mathbf{O}_k \hat{\mathbf{X}}_{0|k-1} + \boldsymbol{\psi}_k \mathbf{e}_{k|2k-1}^+$$

but  $\hat{\mathbf{X}}_{0|k-1} = \boldsymbol{\Psi}_k \mathbf{Y}_{0|k-1}^-$  so we have

$$\mathbf{Y}_{k|2k-1}^+ = \mathbf{O}_k \boldsymbol{\Psi}_k \mathbf{Y}_{0|k-1}^- + \boldsymbol{\psi}_k \mathbf{e}_{k|2k-1}^+ \quad (21)$$

where

$$\mathbf{Y}_{k|2k-1}^+ = \begin{bmatrix} y(k) & y(k+1) & \cdots & y(k+N-1) \\ y(k+1) & y(k-1) & \cdots & y(k+N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(2k-1) & y(2k) & \cdots & y(2k+N-1) \end{bmatrix} = [\mathbf{y}_k^+, \mathbf{y}_{k+1}^+, \dots, \mathbf{y}_{k+s}^+, \dots, \mathbf{y}_{k+N-1}^+]$$

$$\boldsymbol{\psi}_k = \begin{bmatrix} I & & & \\ CK & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & I & \\ CA^{k-2}K & \cdots & CK & I \end{bmatrix}; \quad \mathbf{o}_k = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_{k|2k-1}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{e}(k) & \mathbf{e}(k+1) & \cdots & \mathbf{e}(k-1+N) \\ \mathbf{e}(k+1) & \mathbf{e}(k-1) & \cdots & \mathbf{e}(k+N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{e}(2k-1) & \mathbf{e}(2k) & \cdots & \mathbf{e}(2k-1+N) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{y}_i^+$  represents the *future output vectors* and the output data matrix  $\mathbf{Y}_{k|2k-1}^+$  is called the *future output data matrix*, where the output vectors of each column of the matrix correspond to the present and future time steps, with respect to the current time step, of the *state vector* in the corresponding column of  $\widehat{\mathbf{X}}_{0|k-1}$ .

$\mathbf{o}_k$  is the *observability matrix* with the subscript  $k$  that denoted the number of the block rows of the observability matrix.

$\boldsymbol{\psi}_k \mathbf{e}_{k|2k-1}^+$  representing the *influence of the output residual vectors* on  $\mathbf{Y}_{k|2k-1}^+$ ,  $\mathbf{e}_{k|2k-1}^+$  each column of which consist of the future output residual vectors, is called the "*future output residual matrix*", while the  $\boldsymbol{\psi}_k$  matrix is the *coefficient matrix of the output residual vectors*.

The problem of finding the principal directions,  $\boldsymbol{\Psi}_k$ , of  $\mathbf{Y}_{k|2k-1}^-$  that maximize the covariance between the past and future outputs;

- An estimation of  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  through the CCA, which is denoted by  $\hat{\mathbf{x}}^{CCA}(t)$ , can be associated with the problem of finding the principal direction vectors,  $\boldsymbol{\Psi}_k$ , of  $\mathbf{y}_k^-$  that maximize the correlation between the past and future outputs; and
- An estimation of  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  through the MLR, which is denoted by  $\hat{\mathbf{x}}^{MLR}(t)$ , can be associated with the problem of finding the principal direction vectors,  $\boldsymbol{\Psi}_k$ , of  $\mathbf{y}_k^-$  that provide the best prediction of future output  $\mathbf{y}_k^+$ .

One can define the matrices used for the determination of  $\boldsymbol{\Psi}_k$  and their Singular Value Decompositions.

$$\underline{\text{CCA}}: \mathbf{T}_+^{1/2} \mathbf{H} (\mathbf{T}_-^{1/2})^T \quad \underline{\text{MLR}}: \mathbf{H} (\mathbf{T}_-^{-1/2})^T$$

$$\text{whit } \mathbf{H} = \mathbf{Y}_{k|2k-1}^+ (\mathbf{Y}_{0|k-1}^-)^T \quad \mathbf{T}_- = \mathbf{Y}_{0|k-1}^- (\mathbf{Y}_{0|k-1}^-)^T \quad \mathbf{T}_+ = \mathbf{Y}_{k|2k-1}^+ (\mathbf{Y}_{k|2k-1}^+)^T$$

The matrix  $\mathbf{H}$  appears to be in the form of a *Hankel matrix* and  $\mathbf{T}$  in the form of *Toeplitz matrix* such as

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \Lambda(1) & \Lambda(2) & \cdots & \Lambda(k) \\ \Lambda(2) & \Lambda(3) & \cdots & \Lambda(k+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda(k) & \Lambda(k+1) & \cdots & \Lambda(2k-1) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{T}_- = \begin{bmatrix} \Lambda(0) & \Lambda(1) & \cdots & \Lambda(N-1) \\ \Lambda^T(1) & \Lambda(0) & \cdots & \Lambda(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda^T(N-1) & \Lambda^T(k) & \cdots & \Lambda(0) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{T}_+ = \begin{bmatrix} \Lambda(0) & \Lambda^T(1) & \cdots & \Lambda^T(k-1) \\ \Lambda(1) & \Lambda(0) & \cdots & \Lambda^T(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda(k-1) & \Lambda(k) & \cdots & \Lambda(0) \end{bmatrix};$$

Now to proceed, we introduce the *LQ decomposition*.

We usually consider rectangular data matrices with a large number  $N$  of columns. Thus if we apply the *LQ decomposition* to rectangular matrices, then we get block lower triangular matrices with zero block at the upper-right corner.

In the numerical implementation, the estimate of  $\hat{\mathbf{X}}_{0|k-1}$  can be obtained through a *LQ decomposition* of the output data matrix, denoted by  $\mathbf{Y}^{-+}$ , which can be decomposed into  $\mathbf{Y}_{0|k-1}^-$  and  $\mathbf{Y}_{k|2k-1}^+$  as follows

$$\mathbf{Y}^{-+} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{0|k-1}^- \\ \mathbf{Y}_{k|2k-1}^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & 0 \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^T \\ \mathbf{Q}_2^T \end{bmatrix} \quad (22)$$

where  $\mathbf{L}$  is a lower triangular matrix and  $\mathbf{Q}$  is the orthogonal matrix (i.e.  $\mathbf{Q}_2^T \mathbf{Q}_2 = \mathbf{I}_{kp}$  and  $\mathbf{Q}_1^T \mathbf{Q}_2 = \mathbf{0}$ )

This allow us to represent  $\mathbf{Y}_{0|k-1}^-$  and  $\mathbf{Y}_{k|2k-1}^+$  as follows

$$\mathbf{Y}_{0|k-1}^- = \mathbf{L}_{11} \mathbf{Q}_1^T \quad (23)$$

$$\mathbf{Y}_{k|2k-1}^+ = \mathbf{L}_{21} \mathbf{Q}_1^T + \mathbf{L}_{22} \mathbf{Q}_2^T \quad (24)$$

so the matrices of Hankel and Toeplitz seen before become

$$\mathbf{H} = \mathbf{Y}_{k|2k-1}^+ (\mathbf{Y}_{0|k-1}^-)^T = \mathbf{L}_{21} \mathbf{L}_{11}^T$$

$$\mathbf{T}_- = \mathbf{Y}_{0|k-1}^- (\mathbf{Y}_{0|k-1}^-)^T = \mathbf{L}_{11} \mathbf{L}_{11}^T$$

$$\mathbf{T}_+ = \mathbf{Y}_{k|2k-1}^+ (\mathbf{Y}_{k|2k-1}^+)^T = \mathbf{L}_{21} \mathbf{L}_{21}^T + \mathbf{L}_{22} \mathbf{L}_{22}^T$$

Moreover, the *LQ components* that represent the future output matrix  $\mathbf{Y}_{k|2k-1}^+$  can be further decomposed, in order to distinguish the representation of the present output vector from those of the future output vectors, as follows

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{0|k-1}^- \\ \mathbf{Y}_{k|2k-1}^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & 0 \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^T \\ \mathbf{Q}_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & 0 & 0 \\ \mathbf{L}'_{21} & \mathbf{L}'_{22} & 0 \\ \mathbf{L}'_{31} & \mathbf{L}'_{32} & \mathbf{L}'_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^T \\ \mathbf{Q}_2^T \\ \mathbf{Q}_3^T \end{bmatrix}$$

where

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}'_{21} & \mathbf{L}'_{22} & 0 \\ \mathbf{L}'_{31} & \mathbf{L}'_{32} & \mathbf{L}'_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_2^T = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_2'^T \\ \mathbf{Q}_3'^T \end{bmatrix}$$

By using  $\mathbf{E}_k\{\cdot | \cdot\}$  to denote the projection of the row space of  $\mathbf{Y}_{k|2k-1}^+$  onto the row space of  $\mathbf{Y}_{0|k-1}^-$ .

$\mathbf{E}_k$  can be represented in terms of the *future state vector*

$$\hat{\mathbf{X}}_{k|2k-1}(k: 2k-1, 0: N-1) = \{\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(N-1)\}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_k &= \{\mathbf{Y}_{k|2k-1}^+ | \mathbf{Y}_{0|k-1}^-\} = \mathbf{Y}_{k|2k-1}^+ (\mathbf{Y}_{0|k-1}^-)^T [\mathbf{Y}_{0|k-1}^- (\mathbf{Y}_{0|k-1}^-)^T]^{-1} \mathbf{Y}_{0|k-1}^- = \begin{bmatrix} \mathbf{L}'_{21} \\ \mathbf{L}'_{31} \end{bmatrix} \mathbf{Q}_1'^T \\ &= \mathbf{O}_k \hat{\mathbf{X}}_{k|2k-1} \end{aligned}$$

A way to make the coordinates of the estimated  $\hat{\mathbf{X}}_{k|2k-1}$  consistent is to use the same observability matrix estimate. In fact  $\hat{\mathbf{X}}_{k|2k-1}$  can be estimated such as

$$\hat{\mathbf{X}}_{k|2k-1} = [\mathbf{V}_1^T \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^T \\ \mathbf{Q}_2^T \end{bmatrix} = \mathbf{V}_1^T \mathbf{Q}_1^T$$

where the matrix  $\mathbf{V}$  denotes the right singular vector matrix of the matrix  $[\mathbf{L}'_{21}, \mathbf{L}'_{31}]^T$ .

From such estimation, the observability matrix  $\mathbf{O}_k$  can be written as

$$\mathbf{O}_k = \mathbf{E}_k \hat{\mathbf{X}}_{k|2k-1}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{L}'_{21} \\ \mathbf{L}'_{31} \end{bmatrix} \mathbf{V}_1 \quad (\text{MLR or CCA method})$$

Then, by taking the first  $k-1$  block rows of  $\mathbf{O}_k$  for  $\mathbf{O}_{k-1}$ ,  $\hat{\mathbf{X}}_{1|k-1}$  can be estimated as follows

$$\hat{\mathbf{X}}_{k+1|2k-1} = \mathbf{O}_{k-1}^* \mathbf{E}_{k+1} = \mathbf{O}_{k-1}^* [\mathbf{L}'_{31} \quad \mathbf{L}'_{32}] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^T \\ \mathbf{Q}_2^T \end{bmatrix}$$

Finally we have

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{X}}_{k+1|2k-1} \\ \mathbf{Y}_{k|2k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{k-1}^* \mathbf{L}'_{31} & \mathbf{O}_{k-1}^* \mathbf{L}'_{32} \\ \mathbf{L}'_{21} & \mathbf{L}'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^T \\ \mathbf{Q}_2^T \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{X}}_{k|2k-1} = [\mathbf{V}_1^T \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^T \\ \mathbf{Q}_2^T \end{bmatrix}$$

Therefore, the matrices  $\mathbf{A}$  and  $\mathbf{C}$  can be obtained from the following least-square problem

$$\min_{\mathbf{A}, \mathbf{C}} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{k-1}^* \mathbf{L}'_{31} & \mathbf{O}_{k-1}^* \mathbf{L}'_{32} \\ \mathbf{L}'_{21} & \mathbf{L}'_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} [\mathbf{V}_1^T \quad \mathbf{0}] \right\|_F^2$$

so we have

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{k-1}^* \mathbf{L}'_{31} & \mathbf{O}_{k-1}^* \mathbf{L}'_{32} \\ \mathbf{L}'_{21} & \mathbf{L}'_{22} \end{bmatrix} [\mathbf{V}_1^T \quad \mathbf{0}]^*$$

without the matrices  $\mathbf{Q}_1$  and  $\mathbf{Q}_2$ . This indicates that the basis matrix is not needed in the entire process for the stochastic system realization.

In general, the same number of block rows are considered for both the past and future output data matrices in the SSI implementation.

The matrices  $\mathbf{A}$  and  $\mathbf{C}$  can also be obtained from the observability matrix  $\mathbf{O}_k$  as follows

$$\mathbf{A} = \mathbf{O}_k(p+1 : kp, 1 : n)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{O}_k(1 : p, 1 : n)$$

This result can be obtained from the MOESP method.

Ora il passo l'ultimo da fare è quello di ricavarsi i *parametri modali* tramite la decomposizione agli autovalori della matrice  $A$ .

$$A = \Psi[\mu_i]\Psi^{-1}$$

dove  $\Psi$  rappresenta gli autovettori della matrice nel sistema discreto.

I poli in tempo continuo  $\lambda_i$  vengono ricavati da poli in tempo discreto  $\mu_i$  tramite

$$\mu_i = e^{\lambda_i}$$

che permettono di ricondursi alle formule note

$$\lambda_i = \frac{\ln(\mu_i)}{\Delta T} \quad \omega_i = |\lambda_i| \quad f_i = \frac{\omega_i}{2\pi} \quad \zeta_i = \frac{\text{Re}(\lambda_i)}{|\lambda_i|}$$

La matrice delle forme modali si ricava quindi così

$$\Phi = C \psi$$

Con  $\Phi$  autovettori tratti da equazione differenziali del secondo ordine e  $C$  è la nostra matrice tratta dal modello di stato spazio.

Come abbiamo visto in precedenza, il numero di misurazioni  $s$  definisce la dimensione della matrice a blocchi Hankel, e quindi anche la dimensione della matrice di proiezione  $E$ . Tuttavia, il

numero  $k \cdot p$  definisce il numero di autovalori nel nostro modello, così  $k \cdot p$  definisce l'ordine del modello.

Normalmente vorremmo variare l'ordine del modello per creare un diagramma di stabilizzazione. Ciò può naturalmente essere fatto determinando una serie di matrici a blocchi di Hankel di dimensioni diverse, ma è più semplice, invece di variare la dimensione della matrice a blocchi di Hankel, di variare il numero dei

valori singolari utilizzati in equazione (6). Quindi in pratica le dimensioni della matrice a blocchi di Hankel definisce l'ordine massimo del modello, e il modello di ordine effettivo viene variato variando il numero dei valori singolari presi in considerazione quando si esegue la decomposizione in valori singolari della matrice di proiezione. Il numero massimo di autovalori  $k \cdot p$  deve essere regolato ad un livello ragionevole da incorporare un numero di modi di vibrare necessario al modello in esame.

Il problema di base è che non si conosce il numero giusto di modi da scegliere, perciò si devono provare modelli con diversi ordini e trovare il migliore tra essi. Se si utilizzano modelli troppo grandi esiste la possibilità di ricavare modi che non sono fisici (*noise modes*). Per ricavare i modi effettivi si creano i diagrammi di stabilizzazione.

### 1.3.5 Stochastic realization algorithm

- For given covariance matrices  $\{\Lambda(l), l = 0, 1, \dots, L\}$ , we form the block Hankel matrix

$$\mathbf{H}_{k,k} = \begin{bmatrix} \Lambda(1) & \Lambda(2) & \dots & \Lambda(k) \\ \Lambda(2) & \Lambda(3) & \dots & \Lambda(k+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda(k) & \Lambda(k+1) & \dots & \Lambda(2k-1) \end{bmatrix} \in R^{kp \cdot kp}$$

where  $2k - 1 \leq L$  and  $K > n$ .

- Compute SVD of  $\mathbf{H}_{k,k}$  such that

$$[\mathbf{U}_s \quad \mathbf{U}_n] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_s & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Sigma}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_s^T \\ \mathbf{V}_n^T \end{bmatrix} \cong \mathbf{U}_s \boldsymbol{\Sigma}_s \mathbf{V}_s^T \quad (7.81)$$

where  $\boldsymbol{\Sigma}_s$  contains the largest  $n$  singular values of  $\mathbf{H}_{k,k}$ .

- Based on the SVD of (7.81), the extended observability and reachability matrices are defined by

$$\mathbf{O}_k = \mathbf{U}_s \boldsymbol{\Sigma}_s^{1/2}, \quad \mathbf{C}_k = \boldsymbol{\Sigma}_s^{1/2} \mathbf{V}_s^T$$

- Compute the matrices  $\mathbf{A}, \mathbf{C}, \bar{\mathbf{C}}^T$  by

$$\mathbf{A} = \mathbf{O}_{k-1}^* \bar{\mathbf{O}}_k, \quad \mathbf{C} = \mathbf{O}_k(1:p, 1:n), \quad \bar{\mathbf{C}}^T = \mathbf{C}_k(1:n, 1:p)$$

where  $\bar{\mathbf{O}}_k = \mathbf{O}_k(p+1:kp, 1:n)$ .

- By using  $(\mathbf{A}, \mathbf{C}, \bar{\mathbf{C}}^T, \Lambda(0))$  so obtained, we define the ARE

$$\Pi = \mathbf{A} \Pi \mathbf{A}^T + (\bar{\mathbf{C}}^T - \mathbf{A} \Pi \mathbf{C}^T) (\Lambda(0) - \mathbf{C} \Pi \mathbf{C}^T)^{-1} (\bar{\mathbf{C}} - \mathbf{C} \Pi \mathbf{A}^T)$$

The Kalman gain  $\mathbf{K}$  is given by

$$\mathbf{K} = (\bar{\mathbf{C}}^T - \mathbf{A} \Pi_* \mathbf{C}^T) (\Lambda(0) - \mathbf{C} \Pi_* \mathbf{C}^T)^{-1}$$

Then we have an innovation model

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{K} \mathbf{e}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{e}(t) \end{aligned}$$

where  $\text{cov}\{\mathbf{e}(t)\} = \Lambda(0) - \mathbf{C} \Pi_* \mathbf{C}^T$ .

### 1.3.5.1 Subspace Identification method – ORT method

In this section we develop subspace method for identifying state space models based on finite input-output data. In the sequel, the subspace method is called the ORT method, since the identification methods developed in this section are based on the orthogonal decomposition technique.

Suppose that the input-output data  $\{\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t), t = 0, 1, \dots, N + 2k - 2\}$  are given with  $N$  sufficiently large and  $k > n$ .

We define as usual block Hankel matrices as

$$\mathbf{U}_{0|k-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) & \mathbf{u}(1) & \cdots & \mathbf{u}(N-1) \\ \mathbf{u}(1) & \mathbf{u}(2) & \cdots & \mathbf{u}(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}(k-1) & \mathbf{u}(k) & \cdots & \mathbf{u}(N+k-2) \end{bmatrix} \in R^{km \cdot N}$$

and

$$\mathbf{U}_{k|2k-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k) & \mathbf{u}(k+1) & \cdots & \mathbf{u}(k+N-1) \\ \mathbf{u}(k+1) & \mathbf{u}(k+2) & \cdots & \mathbf{u}(k+N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}(2k-1) & \mathbf{u}(2k) & \cdots & \mathbf{u}(2k+N-2) \end{bmatrix} \in R^{km \cdot N}$$

Similarly we define  $\mathbf{Y}_{0|k-1}$  and  $\mathbf{Y}_{k|2k-1} \in R^{kp \cdot N}$  and also

$$\mathbf{U}_{0|2k-1} := \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{0|k-1} \\ \mathbf{U}_{k|2k-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_{0|2k-1} := \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{0|k-1} \\ \mathbf{Y}_{k|2k-1} \end{bmatrix}$$

There are deterministic subsystem and stochastic subsystem. In the next paragraph we talk about Subspace Identification of Stochastic Subsystem.

#### Subspace identification of stochastic system

We derive a subspace identification algorithm for the stochastic subsystem. The stochastic component is given by

$$\hat{\mathbf{Y}}_{0|2k-1}^s := \mathbf{Y}_{0|2k-1} - \hat{\mathbf{Y}}_{0|2k-1}^d$$

We consider a related LQ decomposition

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{k|2k-1} \\ \mathbf{U}_{0|k-1} \\ \mathbf{Y}_{0|k-1} \\ \mathbf{Y}_{k|2k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} & 0 & 0 \\ \mathbf{L}_{31} & \mathbf{L}_{32} & \mathbf{L}_{33} & 0 \\ \mathbf{L}_{41} & \mathbf{L}_{42} & \mathbf{L}_{43} & \mathbf{L}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^T \\ \mathbf{Q}_2^T \\ \mathbf{Q}_3^T \\ \mathbf{Q}_4^T \end{bmatrix}$$

so we have

$$\hat{\mathbf{Y}}_{0|2k-1}^s = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{33} & 0 \\ \mathbf{L}_{43} & \mathbf{L}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_3^T \\ \mathbf{Q}_4^T \end{bmatrix}$$

now we define

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{0|k-1} = \mathbf{L}_{33} \mathbf{Q}_3^T, \quad \tilde{\mathbf{Y}}_{k|2k-1} = \mathbf{L}_{43} \mathbf{Q}_3^T + \mathbf{L}_{44} \mathbf{Q}_4^T$$

The sample covariance matrices of the residual of stochastic components are then given by

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{pp} & \boldsymbol{\Sigma}_{pf} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{fp} & \boldsymbol{\Sigma}_{ff} \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_{0|k-1} \\ \tilde{\mathbf{Y}}_{k|2k-1} \end{bmatrix} [(\tilde{\mathbf{Y}}_{0|k-1})^T \quad (\tilde{\mathbf{Y}}_{k|2k-1})]$$

thus we have

$$\boldsymbol{\Sigma}_{pp} = \frac{1}{N} \mathbf{L}_{33} \mathbf{L}_{33}^T, \quad \boldsymbol{\Sigma}_{pf} = \frac{1}{N} \mathbf{L}_{43} \mathbf{L}_{33}^T, \quad \boldsymbol{\Sigma}_{ff} = \frac{1}{N} (\mathbf{L}_{43} \mathbf{L}_{43}^T + \mathbf{L}_{44} \mathbf{L}_{44}^T)$$

### Subspace identification of stochastic subsystem – ORT method

Algorithm A

- (i) Compute square roots of covariance matrices  $\boldsymbol{\Sigma}_{ff}$  and  $\boldsymbol{\Sigma}_{pp}$  satisfying

$$\boldsymbol{\Sigma}_{ff} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T, \quad \boldsymbol{\Sigma}_{pp} = \mathbf{M}\mathbf{M}^T$$

- (ii) Compute the SVD of the normalized covariance matrix

$$L^{-1}\Sigma_{pf}M^{-T} = U\Sigma V^T \cong \tilde{U}\tilde{\Sigma}\tilde{V}^T$$

where  $\tilde{\Sigma}$  is obtained by deleting sufficiently small singular values of  $\Sigma$ , so the dimension of the state vector becomes  $\tilde{n} = \dim \tilde{\Sigma}$ .

- (iii) Compute the extended observability and reachability matrices by

$$\tilde{\mathbf{O}}_k = L\tilde{U}\tilde{\Sigma}^{1/2}, \quad \tilde{\mathbf{C}}_k = \tilde{\Sigma}^{1/2}\tilde{V}^T M^T$$

- (iv) Compute the estimates of  $\mathbf{A}_s, \mathbf{C}_s, \bar{\mathbf{C}}_s$  by

$$(v) \quad \mathbf{A}_s = \tilde{\mathbf{O}}_{k-1}^* \bar{\mathbf{O}}_k, \quad \mathbf{C}_s = \tilde{\mathbf{O}}_k (1:p, :), \quad \bar{\mathbf{C}}_s = \tilde{\mathbf{C}}_k (:, 1:p)$$

$$\text{where } \bar{\mathbf{O}}_k = \tilde{\mathbf{O}}_k (p+1:kp, :).$$

The covariance matrix of  $y_s$  is given by  $\Lambda_s(0) := \Sigma_{ff} (1:p, 1:p)$ . So the Kalman gain is given by

$$\mathbf{K}_s = (\bar{\mathbf{C}}_s^T - \mathbf{A}_s \bar{\Sigma} \mathbf{C}_s^T) (\Lambda_s(0) - \mathbf{C}_s \tilde{\Sigma} \mathbf{C}_s^T)^{-1}$$

so that the innovation model becomes

$$\mathbf{x}_s(t+1) = \mathbf{A}_s \mathbf{x}_s(t) + \mathbf{K}_s(t) \mathbf{e}(t)$$

$$\mathbf{y}_s(t) = \mathbf{C}_s \mathbf{x}_s(t) + \mathbf{e}(t)$$

where  $\text{var}\{\mathbf{e}(t)\} = \Lambda_s(0) - \mathbf{C}_s \tilde{\Sigma} \mathbf{C}_s^T$ .

## 1.4 FREQUENCY DOMAIN DECOMPOSITION

### 1.4.1 Introduzione

La trasformata di Fourier permette di trattare i segnali a tempo continuo dal punto di vista delle loro componenti armoniche (analisi in frequenza). In modo analogo la trasformata di Fourier a tempo discreto permette l'analisi in frequenza dei segnali a tempo discreto.

Trattasi di un metodo non parametrico di soli output sviluppato nel dominio delle frequenze.

I segnali a tempo discreto possono essere approssimati con segnali digitali. L'analisi in frequenza di tali segnali può essere ottenuta mediante la Trasformata Discreta di Fourier (DFT). La DFT è diventata popolare negli anni 50, proprio in relazione alla crescente importanza dei sistemi di elaborazione digitali. Un salto di qualità nell'utilizzo della DFT è stata la scoperta di una classe di algoritmi veloci, genericamente chiamata FFT (Fast Fourier Transform), che permette di calcolare la DFT in tempo quasi lineare nella dimensione dei dati.

Il calcolo diretto della DFT è piuttosto costoso, richiedendo  $O(N^2)$  operazioni di prodotto, dove  $N$  è la dimensione dello spazio su cui si applica la trasformata. Utilizzando essenzialmente tecniche "divide et impera", si ottengono algoritmi FFT che calcolano la DFT riducendo a  $O(N \log N)$  il numero di costose operazioni di moltiplicazione. La drastica riduzione del tempo di calcolo porta a significativi vantaggi ampliando il campo delle possibili applicazioni.

Nell'elaborazione dei segnali la FFT ha tre principali settori di utilizzo:

1. analisi spettrale per segnali digitali, con applicazioni alla sintesi di filtri digitali;
2. calcolo veloce della convoluzione e della correlazione;
3. compressione di dati per la memorizzazione e la trasmissione efficiente degli stessi.

La FDD sfrutta questi algoritmi per l'analisi spettro del segnale.

Si tratta di un metodo in grado di tener conto della molteplicità dei modi cioè più modi alla stessa frequenza. Questo perché, a differenza della tecnica classica BSD o PP, si è introdotta una scomposizione ai valori singolari della matrice dei cross-spettri allo scopo di separare il contributo dei singoli modi.

Come già accennato, alla base di tutto vi è la trasformata discreta di Fourier ma anche la proprietà per cui è possibile distinguere i picchi di frequenza direttamente dalla matrice delle densità spettrali, previa decomposizione ai valori singolari delle matrici spettrali associate ad ogni frequenza di interesse voluta.

## **1.4.2 Funzioni alla base del metodo FDD**

### ***1.4.2.1 Trasformata Discreta di Fourier (TDF)***

La trasformata di Fourier a tempo discreto è applicabile a segnali campionati; tali segnali sono a tempo discreto e con frequenza normalizzata nel continuo  $[0, 2\pi)$ . Per poter trattare opportune approssimazioni di tali segnali con tecniche digitali, dobbiamo ulteriormente:

1. considerare solo un numero finito di campioni nel tempo;
2. effettuare un campionamento anche in frequenza, così da considerare solo un numero finito di frequenze anziché l'intervallo continuo  $[0, 2\pi)$ .

Per quanto riguarda il primo punto, l'obiettivo che ci si è posto può essere raggiunto approssimando l'informazione contenuta in un segnale  $f(t)$  con quella ottenuta dal vettore  $x$  formato da  $N$  campioni del segnale campionato con passo  $\tau$ :  $x = [x(0), \dots, x(N-1)]$ , con  $x(n) = f(n\tau)$ ,  $n = 0, \dots, N-1$ .

Il vettore  $x$  "cattura" quindi l'informazione del segnale contenuta nell'intervallo temporale  $[0, (N-1)\tau]$ ;

Il secondo punto prevede di considerare il vettore  $X$  formato da  $N$  campioni della trasformata a tempo discreto  $X(\Omega)$ , campionata a intervalli di ampiezza  $\Delta\omega$  dove, con abuso di notazione, abbiamo denotato con la stessa variabile il vettore  $X(k)$  che rappresenta la TDF e la funzione complessa che rappresenta la trasformata di Fourier a tempo discreto  $X(\Omega)$ .

Sotto l'ipotesi che l'energia del segnale sia essenzialmente contenuta negli  $N$  campioni  $x(0), \dots, x(N-1)$  vale che:

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} \approx \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} = X(k)$$

Tale trasformata

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} \quad \text{con } k = 1, \dots, N-1$$

è detta Trasformata Discreta di Fourier.

#### **1.4.2.2 Calcolo Veloce della Trasformata discreta di Fourier (FFT)**

La principale ragione che rende importante la TDF è l'esistenza di algoritmi veloci per il suo calcolo; essi adottano la tecnica divide-et-impera che consiste nella decomposizione ricorsiva della TDF in trasformate di dimensioni ridotte ogni volta della metà. Presentiamo qui l'idea base quando la dimensione della TDF  $N$  è una potenza di 2.

La TDF richiede di moltiplicare un vettore a N componenti [ x(0), . . . , x( N - 1)] per la matrice N × N la cui componente alla riga n e colonna k è:

$$W_N^{kn} = e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$$

Tale calcolo può essere ovviamente effettuato con O( N<sup>2</sup>) operazioni di somma e prodotto, poichè il calcolo di ognuna delle N componenti X(k) richiede O( N) operazioni.

Algoritmi più efficienti per il calcolo della trasformata sono stati proposti tra gli altri da Runge e König nel 1924 e da Cooley e Tukey nel 1965. Questi algoritmi richiedono O( N log N) invece di O( N<sup>2</sup>) operazioni e per tal motivo sono chiamati algoritmi FFT (Fast Fourier Transform).

Secondo la notazione qui introdotta, la trasformata discreta può essere scritta come:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} \quad \text{con } k = 0, \dots, N - 1 \quad (1.4.1)$$

Separando nella sommatoria i termini di indice pari da quelli di indice dispari, si ottiene

$$X(k) = \sum_{n \text{ pari}} x(n)W_N^{kn} + \sum_{n \text{ dispari}} x(n)W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n)W_N^{k2n} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1)W_N^{k(2n+1)}$$

Poiché vale  $W_N^2 = W_{N/2}$  si ha

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n)W_{N/2}^{kn} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1)W_{N/2}^{kn} = X_1(k) + W_N^k X_2(k) \quad \text{per } k \\ &= 0, \dots, N - 1 \end{aligned}$$

Dato che le sequenze  $X_1(k)$  e  $X_2(k)$  sono periodiche di periodo  $N/2$  cioè  $X_1(k) = X_1(k + N/2)$  e  $X_2(k) = X_2(k + N/2)$  e siccome vale che  $W_N^{k+N/2} = -W_N^k$  possiamo riscrivere la  $X(k)$  come

$$\begin{aligned} X(k) &= X_1(k) + W_N^k X_2(k) && \text{con } k = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1 \\ X(k + N/2) &= X_1(k) - W_N^k X_2(k) && \text{con } k = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1 \end{aligned}$$

Osserviamo che il calcolo di  $X_1(k)$  e di  $X_2(k)$  richiede  $(N/2)^2$  moltiplicazioni di due numeri complessi; il numero di moltiplicazioni richieste per  $W_N^k X_2(k)$  è invece  $N/2$ .

Complessivamente, per calcolare  $X(k)$ , servono  $2(N/2)^2 + N/2 = N^2/2 + N/2$  moltiplicazioni, che rappresenta una riduzione di un fattore 2 circa (per  $N$  grande) rispetto alle  $N^2$  operazioni richieste della (1.4.1).

Si va così a dimezzare la complessità di ogni passo di ricorsione e la lunghezza numerica su cui si opera.

Così facendo, se  $N = 2^l$ , quando la sequenza di ingresso si riduce ad un solo campione la procedura ricorsiva è stata invocata  $l = \log_2 N$  volte.

### **1.4.2.3 Trasformata di Fourier VS Trasformata Discreta di Fourier**

Per quanto riguarda la relazione tra la trasformata di Fourier  $F(\omega)$  e la trasformata discreta di Fourier, se le varie approssimazioni fatte (passo di campionamento  $\tau$ , numero  $N$  di campioni) risultano ragionevolmente buone, allora:

$$x(n) = f(n\tau) \quad \text{con } n = 0, \dots, N - 1$$

Queste approssimazioni risultano accettabili quando l'intervallo di campionamento in un dominio (per esempio il tempo) consente di avere un aliasing trascurabile nell'altro dominio (frequenza).

Si hanno essenzialmente tre situazioni distinte:

1. segnali periodici (tempo) a banda limitata (frequenza): questa è l'unica classe di segnali per cui la trasformata discreta e quella continua coincidono (a meno di un fattore di scala);
2. segnali di durata limitata (tempo), cioè non nulli in un intervallo temporale finito: tali segnali non sono banda limitata (frequenza), per cui il campionamento produce aliasing che si può solamente ridurre ad un valore accettabile ma non eliminare. La trasformata discreta differisce pertanto da quella continua a causa di errori introdotti dall'aliasing.
3. segnali di durata non limitata, cioè a supporto temporale di dimensione infinita e non a banda limitata (frequenza): la trasformata discreta differisce da quella continua a causa di errori sia di aliasing che di troncamento.

Altre applicazioni della DFT sono legate alla simulazione di sistemi LTI mediante una tecnica di calcolo veloce della convoluzione basata sulla FFT, e all'uso della trasformata coseno, che consiste essenzialmente nella parte reale della DFT, per la compressione di segnali.

#### **1.4.2.4 Convoluzione e correlazione**

Sia  $S$  un sistema LTI per segnali a tempo discreto. Sappiamo che  $S$  è individuato dalla sua risposta  $h(n)$  all'impulso, ed in particolare che la risposta  $y(n)$  al segnale  $x(n)$  è data dalla convoluzione  $h * x$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$

La convoluzione è dunque centrale nello studio dei sistemi LTI; tra le operazioni ad essa riferite ricordiamo ad esempio la identificazione di sistema (dati un segnale-test  $x$  e la risposta  $y$ , determinare la risposta all'impulso  $h$ ), di deconvoluzione (data l'uscita  $y$  e la risposta  $h$  all'impulso, determinare l'ingresso  $x$ ), la deconvoluzione cieca (stimare l'ingresso  $x$  conoscendo solo l'uscita  $y$ ).

Consideriamo ora segnali a tempo discreto  $x(n)$  in un arco temporale finito, per esempio nulli prima di 0 e dopo  $N - 1$ ; essi possono quindi essere descritti da un vettore  $[x(0), \dots, x(N - 1)]$ . La convoluzione tra  $x$  e  $h$  è data dal vettore  $y$  a  $2N$  componenti dove

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k) \quad \text{con } 0 \leq n \leq 2N - 1$$

#### **1.4.2.5 Correlazione temporale**

Un'altra operazione tra segnali di grande interesse è la correlazione temporale limitatamente a segnali  $x(n)$  e  $y(n)$  nulli prima di 0 e dopo  $N - 1$ .

La loro cross-correlazione temporale  $R_{xy}(j)$  è

$$R_{xy}(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)y(k+j) \quad \text{con } -N + 1 \leq j \leq N - 1$$

#### **1.4.2.6 Funzione d'autocorrelazione**

La funzione di autocorrelazione per un segnale  $x(t)$  indica quanto il segnale acquisito ad istanti successivi  $x(t + \tau)$  è correlato con se stesso. Consente di paragonare grandezze della stessa funzione in tempi differenti fornendo così una misura della regolarità del processo. Contiene l'informazione relativa alle variazioni del segnale sull'asse dei tempi. Le funzioni d'autocorrelazione rappresentano quindi uno strumento per l'individuazione di componenti deterministiche in un segnale macchiato da un disturbo causale. L'autocorrelazione di una funzione periodica è periodica, mentre l'autocorrelazione di un segnale casuale tende a zero per  $\tau$  non nulli.

Data una time history  $x(t)$ , la funzione d'autocorrelazione è definita come:

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t + \tau) dt$$

Si definisce invece cross-correlazione di due segnali  $x(t)$  e  $y(t)$  la funzione  $R_{xy}(\tau)$  definita come:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t + \tau) dt$$

E descrive la dipendenza dei valori di un set di dati dall'altro. La funzione  $R_{xy}(\tau)$  è sempre reale, positiva o negativa.

#### **1.4.2.7 Funzione di densità spettrale di potenza (PSD)**

La funzione di densità spettrale di potenza di dati casuali descrive la composizione in frequenze del dato in termini di densità spettrale del suo valore quadratico medio, ovvero la composizione in frequenze dell'intensità del dato. Il valore quadratico medio di un processo casuale  $x(t)$ , in un intervallo di frequenze compreso tra  $\omega$  e  $\omega + \Delta\omega$  può essere ottenuto filtrando il processo  $x(t)$  con un filtro passa banda e computando la media dei quadrati delle uscite dal filtro. Una importante proprietà che lega la funzione d'autocorrelazione è fornita dalla relazione:

$$G_x(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)e^{-i2\pi\omega\tau} d\tau = 4 \int_0^{+\infty} R_x(\tau) \cos(2\pi\omega\tau) d\tau$$

Cioè le due funzioni, per dati stazionari sono legate dalla trasformata di Fourier. La funzione  $G_x(\omega)$  è sempre reale e positiva.

Le caratteristiche dinamiche di un sistema lineare a parametri costanti possono essere descritte dalla funzione peso  $h(t)$  che è definita come la risposta del sistema ad un impulso unitario applicato ad un istante precedente  $\tau$

Per ogni input arbitrario  $x(t)$  la risposta del sistema  $y(t)$  è data dall'integrale di convoluzione:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) x(t - \tau) d\tau$$

Indica che la risposta  $y(t)$  è data da una somma pesata sull'intera storia temporale dell'input  $x(t)$ . Si può quindi introdurre la funzione di risposta nel dominio delle frequenze, definita come la trasformata di Fourier:

$$H(\omega) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-i2\pi\omega t} dt$$

Nella quale  $h(t) = 0$  per  $t < 0$ .

Si ricava la funzione di risposta in frequenza (FRF) che è ottenibile per ogni coppia di registrazioni eccitazione-risposta mediante il rapporto tra la trasformata di Fourier della risposta  $Y(\omega)$  (output) e la trasformata di Fourier della forzante  $F(\omega)$  (input):

$$H(f) = \frac{Y(\omega)}{F(\omega)} = \frac{\text{output}}{\text{input}}$$

Con il prodotto tra la risposta  $y(t)$  e la stessa prodotta all'istante  $t+\tau$ , cioè  $y(t+\tau)$  si può determinare la funzione d'autocorrelazione al modo seguente:

$$y(t)y(t + \tau) = \iint_0^{\infty} h(\xi) h(\eta) x(t - \xi) x(t + \tau - \eta) d\xi d\eta$$

Ovvero:

$$R_y(\tau) = \iint_0^{\infty} h(\xi) h(\eta) R_x(t + \xi - \eta) d\xi d\eta$$

Facendone la trasformata di Fourier si ottiene l'importante relazione:

$$G_y(\omega) = |H(\omega)|^2 G_x(\omega)$$

Con passaggi analoghi riferiti alle funzioni incrociate, si ottiene l'altra importante relazione:

$$G_{xy}(\omega) = H(\omega)G_x(\omega)$$

È una funzione complessa contenente informazioni sia in frequenza che sulle fasi. Cioè la trasformata di Fourier delle funzioni di cross-correlazione  $R_{xy}(\tau)$  è detta cross-spettro (CSD) ed è indicata con  $G_{xy}(\omega)$ :

$$G_{xy}(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i2\pi\omega\tau} d\tau$$

Quindi come la funzione di densità spettrale di potenza di una singola time history è la trasformata di Fourier della funzione d'autocorrelazione, così la funzione di densità spettrale di potenza incrociata (cross-spettro) di una coppia di time history è la trasformata di Fourier della funzione di cross-correlazione, mentre le funzioni d'autocorrelazione sono le trasformate inverse degli spettri di potenza.

La PSD ha unità quadratica della frequenza. Quello che viene rappresentato non è più l'ampiezza del segnale ma una quantità quadrata che può essere assunta come energia del sistema.

Quello che interessa dal punto di vista computazionale è il prodotto tra la trasformata di Fourier del segnale ed il suo coniugato in quanto è quello che esegue il programma di calcolo per elaborare in righe e colonne la matrice di densità spettrale (PSD).

Le funzioni di cross-correlazione quindi andranno ad occupare i termini extra-diagonali della matrice PSD mentre le funzioni d'autocorrelazione sono i termini diagonali della stessa.

### 1.4.3 Analisi degli output

#### 1.4.3.1 Analisi nel dominio delle frequenze

Si consideri un sistema con  $r$  ingressi  $x_i(t)$   $i = 1, 2, \dots, r$  e una misura d'uscita  $y(t)$ , si può pensare che  $y(t)$  sia la somma di tanti  $y_i(t)$   $i = 1, 2, \dots, r$ :

$$y(t) = \sum_{i=1}^r y_i(t)$$

Cioè:

$$\begin{aligned} x_1(t) &\rightarrow h_1(\tau) \rightarrow y_1(t) \\ x_2(t) &\rightarrow h_2(\tau) \rightarrow y_2(t) \\ &\dots \\ x_r(t) &\rightarrow h_r(\tau) \rightarrow y_r(t) \end{aligned}$$

Applicando l'integrale di convoluzione:

$$y_i(t) = \int_0^\infty h_i(\tau) x_i(t - \tau) d\tau \Rightarrow \sum_{i=1}^r \int_0^\infty h_i(\tau) x_i(t - \tau) d\tau$$

Si dimostra che la funzione d'autocorrelazione può scriversi nella forma:

$$R_y(\tau) = \sum_{i=1}^r \iint_0^\infty h_i(\xi) h_i(\eta) R_i(\xi - \eta + \tau) d\xi d\eta$$

Facendone la trasformata di Fourier si ottiene la funzione spettrale di densità di potenza:

$$G_y(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-i2\pi\omega\tau} d\tau =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_i \sum_j \int_0^\infty h_i(\xi) e^{i2\pi\omega\xi} d\xi \cdot \int_0^\infty h_j(\eta) e^{i2\pi\omega\eta} d\eta \cdot \int_0^\infty R_{ij}(t) e^{-i2\pi\omega t} dt = \\
 &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \overline{H_i(\omega)} H_j(\omega) G_{ij}(\omega)
 \end{aligned}$$

Dove, con il simbolo “-” indica il complesso coniugato. In forma matriciale, definendo un vettore  $r$ -dimensionale degli ingressi  $x(t)$ :

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_r(t)]$$

un vettore  $r$ -dimensionale di funzioni di risposta in frequenza  $H(f)$ :

$$H(\omega) = [H_1(\omega), H_2(\omega), \dots, H_r(\omega)]$$

un vettore  $r$ -dimensionale degli spettri incrociati degli output  $y_i(t)$  con gli input  $x_i(t)$ :

$$G_{xy}(f) = [G_{x_1y}(\omega), G_{x_2y}(\omega), \dots, G_{x_r y}(\omega)]$$

ed infine una matrice  $r \times r$  per ogni ingresso  $x_i(t)$ :

$$G_{xx}(\omega) = \begin{pmatrix} G_{x_1x_1}(\omega) & G_{x_1x_2}(\omega) & \cdots & G_{x_1x_r}(\omega) \\ G_{x_2x_1}(\omega) & G_{x_2x_2}(\omega) & \cdots & G_{x_2x_r}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{x_1x_r}(\omega) & G_{x_rx_2}(\omega) & \cdots & G_{x_1x_1}(\omega) \end{pmatrix}$$

allora l'equazione:

$$G_y(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-i2\pi\omega\tau} d\tau = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \overline{H_i(\omega)} H_j(\omega) G_{ij}(\omega)$$

può essere riscritta nella forma matriciale seguente:

$$G_{yy}(\omega) = H(\omega)G_{xx}(\omega)H^H(\omega)$$

dove "H" è il complesso coniugato e trasposto.

Se sono a disposizione  $m$  misure di risposta del sistema, si può pensare alla relazione di sopra come costituita dalle grandezze seguenti:

- $G_{xx}(\omega)$ : matrice di densità spettrale degli ingressi ( $r \times r$ )
- $G_{yy}(\omega)$ : matrice di densità spettrale delle risposte ( $m \times m$ )
- $H(\omega)$ : matrice delle funzioni di risposta in frequenza ( $m \times r$ )

### **1.4.3.2 Assemblaggio delle matrici di densità spettrale di potenza delle risposte**

Alla base della tecnica FDD c'è la scomposizione della risposta del sistema misurata in set di semplici sistemi ad un solo grado di libertà, uno per ciascun modo da identificare. Questa scomposizione in SDOF avviene mediante l'individuazione di una campana spettrale nell'intorno del picco considerato, corrispondente al k-esimo modo in esame.

Per ogni set di misure registrate viene individuata una matrice di densità spettrale di potenza di dimensione  $m \times m$ , dove  $m$  è il numero di strumenti di misura a disposizione:

$$G_{yy}(\omega) = \begin{pmatrix} G_{y_1y_1} & G_{y_1y_2} & \cdots & G_{y_1y_m} \\ G_{y_2y_1} & G_{y_2y_2} & \cdots & G_{y_2y_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{y_my_1} & G_{y_my_2} & \cdots & G_{y_my_m} \end{pmatrix}$$

- $G_{y_iy_i}(\omega)$  : funzione di densità auto-spettrale;
- $G_{y_iy_j}(\omega)$  : funzione di densità spettrale incrociata.

Per la determinazione delle funzioni di densità spettrale si suddividono le time history misurate  $y_i(t)$  in più serie di assegnata lunghezza ( $s$  valori per ogni serie), selezionate con un'adeguata percentuale di sovrapposizione:

$$y_i(t) = y_1 \cup y_2 \dots \cup y_k \cup \dots \cup y_n$$

### **1.4.3.3 Decomposizione ai valori singolari (SVD) della PSD**

Come passo finale della FDD da un punto di vista analitico è necessario eseguire la decomposizione della matrice di densità spettrale (PSD).

Questa è la differenza tra la vecchia BFD e la recente FDD in quanto per quest'ultima è stato introdotto appunto una decomposizione ai valori singolari della matrice dei cross-spettri SVD allo scopo di separare il contributo dei singoli modi essendo possibile distinguere i picchi di frequenza direttamente dalla matrice delle densità spettrali.

È un procedimento in grado di tener conto della molteplicità dei modi, più modi alla stessa frequenza.

Quindi per la tecnica del BFD lo svantaggio è che quando venivano violate le ipotesi base di basso smorzamento e modi ben separati tra loro, poteva dar luogo a risultati del tutto erronei.

Sia l'FDD che la BFD quindi permettono di ricavare i modi strutturali ma la BFD tende ad andare in crisi proprio quando la struttura presenta modi di vibrare con frequenza simile. Questo è proprio dovuto al fatto che il grafico in frequenza viene costruito sulla base della sola matrice di densità spettrale PSD senza effettuare la decomposizione ai valori singolari.

La SVD può essere riassunta come:

- Metodo per trasformare le variabili correlate tra loro in sistemi liberi che meglio sappiano descrivere i dati di origine;
- Metodo per identificare ed ordinare le dimensioni lungo cui vanno a concentrare maggiormente i dati;

- Metodo per capire dove sia la maggiore variazione andando a ricavare la maggiore approssimazione dei dati originali utilizzando il minor numero di dimensioni.

Le basi della SVD sono di prendere una dimensione maggiore con i relativi dati e ridurla in uno spazio più basso in modo che evidenzi più chiaramente la sottostruttura dei dati originali.

Da un punto di vista analitico invece consiste nel ricavare i vettori e i valori singolari della matrice di densità spettrale ottenuta, processo che si può semplificare nella relazione:

$$G_{yy}(\omega) = USU^H$$

In forma matriciale vengono rappresentati in seguito:

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_m \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1m} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mm} \end{pmatrix}$$

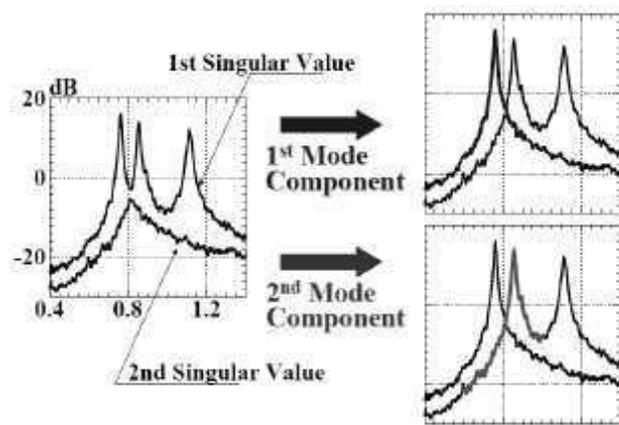
Con:

- $G_{yy}(\omega)$ : matrice di densità spettrale;
- $U$ : matrice delle componenti ortonormali dei vettori singolari calcolati in funzione di  $\omega$  dalla quale è possibile ricavare le curve per la costruzione del grafico dei valori singolari;
- $S$ : matrice diagonale contenente i valori singolari normalizzati, calcolati in funzione di  $\omega$
- $U^H$ : matrice destra delle componenti dei vettori.

Il numero di valori singolari della matrice  $S$  conferisce il numero complessivo delle linee dei valori singolari normalizzati della matrice di densità spettrale.

Da un punto di vista grafico i valori singolari vengono ottenuti attraverso l'involuppo delle componenti ortonormali dei vettori singolari.

Tale processo viene effettuato per tutti i setups eseguiti in loco andando poi a mediare il risultato per ciascun valore singolare. Ad esempio ipotizzando di aver eseguito due setups si eseguirà il calcolo della matrice di densità spettrale con relativa decomposizione e rappresentazione dei valori singolari, questo per ciascun setup. Una volta che è stato fatto tale procedimento, si mediano i grafici dei due setups andando a confrontare i valori singolari dello stesso ordine cioè il primo valore singolare del primo setup con il primo valore singolare della seconda prova e via dicendo. Nel seguito viene riportato un chiaro esempio grafico di ciò che viene fatto per ottenere la curva complessiva del primo valore singolare a partire dalle componenti:



**Figura 7** - Involuppo delle componenti ortonormali dei vettori singolari

È importante quindi avere un corretto posizionamento dei sensori dei setups. I sensori devono essere posizionati in quei punti dove la struttura subisce gli spostamenti maggiori. Se i sensori vengono posizionati scorrettamente può essere che alcuni picchi di alcune componenti non siano superiori all'involuppo di altre componenti impedendo così la loro individuazione.

L'involuppo ottenuto verrà poi normalizzato. Alcuni programmi di calcolo permettono di ottenere la matrice sinistra  $U$  già normalizzata e quindi si tratta soltanto di rappresentare le curve mentre altri necessitano di alcune operazioni

ulteriori facendo uso del fattore di normalizzazione che corrisponde all'area al di sotto della curva del primo valore singolare:

$$S_{V1norm} = \frac{S_{V1}}{A_{1TOT}} \quad S_{V2nom} = \frac{S_{V2}}{A_{1TOT}}$$

Dove  $A_{1TOT}$  rappresenta l'area racchiusa dalla prima curva e dall'asse delle ascisse.

Nel picco riguardante il k-esimo modo, il corrispondente valore singolare rappresenta una buona stima della forma modale:

$$\hat{\varphi} = u_1$$

Il valore singolare rappresenta la funzione di densità auto-spettrale del relativo sistema ad un grado di libertà riferita all'equazione:

$$G_{yy}(\omega) = \sum_{k=Sub(\omega)}^n \frac{d_k \varphi_k \varphi_k^T}{i\omega - \lambda_k} + \frac{\overline{d_k \varphi_k \varphi_k^T}}{i\omega - \overline{\lambda_k}}$$

Questa è la decomposizione modale della matrice spettrale.

L'espressione è simile al risultato che può essere ottenuto direttamente dall'equazione:

$$G_{yy}(\omega) = H(\omega)G_{xx}(\omega)H^H(\omega)$$

Sotto l'assunzione di ingresso come rumore bianco, ovvero come matrice diagonale degli ingressi.

Quanto è stato esposto a partire dall'analisi del segnale, alla costruzione della matrice di densità spettrale PSD fino alla creazione del grafico rappresentante i valori singolari prende il nome di "*Frequency Domain Decomposition*" (FDD).

### 1.4.3.4 Identificazione delle forme modali

La forma modale, di cui una buona stima è data dal vettore singolare corrispondente al valore di picco del valore singolare, viene identificata facendo una media di tutti i vettori singolari appartenenti alla campana selezionata; la media viene pesata moltiplicando i vettori singolari per i rispettivi valori singolari; questa operazione determina che abbiano peso maggiore i vettori singolari più vicini al picco rispetto a quelli più distanti.

Per ciascun set di dati si ha a disposizione un vettore singolare di dimensione  $m < d$  dove  $d$  rappresenta il numero di gradi di libertà del sistema. Per passare alla dimensione  $m$  alla dimensione  $d$  e assemblare il vettore che fornisce la forma modale è necessario effettuare una operazione di normalizzazione. Supponiamo di avere a disposizione  $r$  set di misure e dunque di conoscere  $r$  vettori singolari di dimensioni  $m$ :

$$u_1 = \begin{bmatrix} re_{11} + i \cdot im_{11} \\ re_{11} + i \cdot im_{11} \\ \dots \\ re_{1m} + i \cdot im_{1m} \end{bmatrix} \quad \dots \quad u_r = \begin{bmatrix} re_{r1} + i \cdot im_{r1} \\ re_{r2} + i \cdot im_{r2} \\ \dots \\ re_{rm} + i \cdot im_{rm} \end{bmatrix}$$

ciascun elemento complesso di ogni vettore viene scritto attraverso l'ampiezza e la fase:

$$a_{ij} = abs_{ij} = \sqrt{(re_{ij}^2 + im_{ij}^2)}$$

$$\phi_{ij} = angle_{ij} = \tanh^{-1} \left( -\frac{im_{ij}}{re_{ij}} \right)$$

e dunque:

$$u_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & \phi_{11} \\ a_{21} & \phi_{21} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & \phi_{m1} \end{bmatrix} \quad \dots \quad u_r = \begin{bmatrix} a_{1r} & \phi_{1r} \\ a_{2r} & \phi_{2r} \\ \dots & \dots \\ a_{mr} & \phi_{mr} \end{bmatrix}$$

Poiché le serie di misure sono effettuate tenendo fissa una rilevazione in un punto, ci sarà una componente denominata  $p$  presente in tutti i vettori singolari. La

normalizzazione avviene imponendo che la componente  $p$  abbia valore unitario in tutti i set di dati:

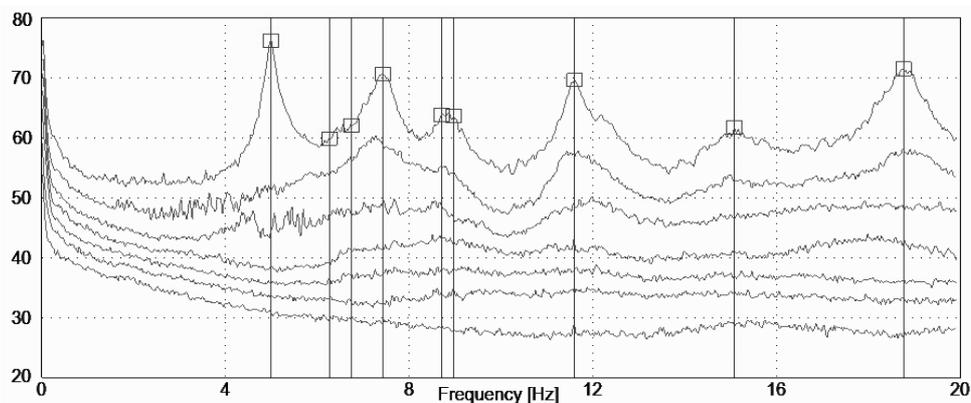
$$u_1 = \begin{bmatrix} a_{11}/a_{p1} & \phi_{11} - \phi_{p1} \\ a_{21}/a_{p1} & \phi_{21} - \phi_{p1} \\ \dots & \dots \\ 1 & 0 \\ \dots & \dots \\ a_{m1}/a_{p1} & \phi_{m1} - \phi_{p1} \end{bmatrix} \quad \dots \quad u_r = \begin{bmatrix} a_{1r}/a_{pr} & \phi_{1r} - \phi_{pr} \\ a_{2r}/a_{pr} & \phi_{2r} - \phi_{pr} \\ \dots & \dots \\ 1 & 0 \\ \dots & \dots \\ a_{mr}/a_{pr} & \phi_{mr} - \phi_{pr} \end{bmatrix}$$

A questo punto è possibile ricostruire la forma modale completa  $\varphi \in \mathbb{C}$  di dimensione  $d$  in cui in posizione  $p$  c'è il valore unitario e nelle altre posizioni c'è la media dei valori acquisiti per ogni singolo grado di libertà in ogni set di misure:

$$\varphi = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^r \frac{a_{1j}}{j} & \sum_{j=1}^r \frac{\phi_{1j} - \phi_{pj}}{j} \\ \sum_{j=1}^r \frac{a_{1j}}{j} & \sum_{j=1}^r \frac{\phi_{1j} - \phi_{pj}}{j} \\ \dots & \dots \\ 1 & 0 \\ \dots & \dots \\ \sum_{j=1}^r \frac{a_{dj}}{j} & \sum_{j=1}^r \frac{\phi_{dj} - \phi_{pj}}{j} \end{bmatrix}$$

Una ulteriore normalizzazione viene fatta su quest'ultimo vettore portando a valore unitario il valore massimo.

Da figura 7 capiamo che ogni matrice  $S$  ottenuta dalla SVD ha dimensioni  $7 \times 7$ . Se prendessimo tutte le matrici  $S$  ed andassimo a riordinarle mettendo nella prima colonna tutti i primi valori singolari, nella seconda colonna tutti i secondi valori singolari e così via fino alla settima colonna otterremo un grafico come quello di figura 7 in cui la curva superiore è l'andamento dei valori singolari della prima colonna della matrice  $S$  riordinata ed a scalare abbiamo le altre sei curve date dalle altre sei colonne della matrice  $S$  riordinata. Dalla prima curva è possibile ricavare graficamente i modi di vibrare individuando i picchi che essa forma.



**Figura 8** - Dai picchi formati dalla curva avente valori singolari più elevati possiamo ricavare le frequenze dei modi di vibrare della struttura. Questa individuazione non è sempre così facile ed intuitiva, per questa ragione nel capitolo 3 verrà spiegato come individuare i modi di vibrare sulla base dell'andamento del MAC medio

In questa fase vengono considerate tutte le curve dei valori singolari appartenenti ad ogni set di misura. Esse vengono mediate in modo da ottenere una rappresentazione che fornisca informazioni su tutti i possibili modi da identificare

## 1.4.4 Enhanced Frequency Domain Decomposition (EFDD)

### 1.4.4.1 Identificazione delle frequenze e degli smorzamenti

La differenza tra i metodi EFDD e FDD sta che nel primo si ha la ricerca degli smorzamenti strutturali.

Supponiamo di effettuare un peak-picking come in figura 8. Per ogni picco che si vuole identificare, la procedura prevede che la campata spettrale, sia trasformata nel dominio del tempo, mediante un algoritmo basato sulla DFT, per ottenere un sistema SDOF rappresentato dalla funzione d'autocorrelazione, normalizzata in modo tale da partire dal valore unitario. Operativamente viene ottenuta duplicando ciascuna campana selezionata, e quindi calcolando la trasformata inversa di Fourier.

$$R(\tau) = \int s_1(\omega) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

La funzione d'autocorrelazione ottenuta avrà un andamento decrescente nel tempo (come visto in figura). La funzione d'autocorrelazione viene generalmente calcolata per un numero di punti pari a  $2^n$ . Tuttavia la scelta del numero di punti non influenza i valori identificati.

Sulla funzione d'autocorrelazione si stabiliscono dei valori di correlazione minimi e massimi in modo da individuare una finestra all'interno della quale calcolare i rapporti di smorzamento e le frequenze.

Il rapporto di smorzamento viene calcolato effettuando il decremento logaritmico:

$$\delta = \frac{2}{k} \ln \frac{r_0}{|r_k|}$$

dove  $r_0$  è il valore iniziale della funzione d'autocorrelazione ed  $r_k$  è il k-esimo estremo. Si ottiene quindi il rapporto di smorzamento dalla relazione:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4\pi^2}}$$

La frequenza viene determinata mediante la regressione lineare tra gli intervalli misurati all'intersezione con l'asse dei tempi e gli intervalli corrispondenti agli estremi. Si osserva che l'intervallo di tempo tra l'incrocio della funzione con l'asse dei tempi e un picco corrisponde ad un quarto di periodo; di conseguenza la frequenza verrà identificata prendendo in considerazione due cicli nella curva d'autocorrelazione. Si usa inoltre la relazione che lega la frequenza smorzata  $f_d$  alla frequenza non smorzata  $f$  :

$$f = \frac{f_d}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Le frequenze e i rapporti di smorzamento calcolati per ogni set di dati vengono mediati per fornire il valore identificato.

## 2.

---

# STUDIO DEL COMPORTAMENTO DINAMICO

## 2.1 ACQUISIZIONE STRUMENTALE

Il monitoraggio si compone di vari sensori per rilevare la risposta strutturale alle sollecitazioni. Lo scopo di un simile sistema è anche il controllo della funzionalità della struttura nelle condizioni di esercizio. Questo rappresenta un aspetto di notevole interesse, sia per la protezione dalle vibrazioni, sia per l'adeguamento sismico o per il rinforzo di strutture critiche o strategiche.

Una tipica architettura dei sistemi di monitoraggio è basata su sensori periferici direttamente connessi tramite cavi a un sistema di acquisizione dati centralizzato. Il ruolo di tale sistema è quello di aggregare, immagazzinare ed elaborare questi dati.

Tuttavia, all'aumentare del numero di sensori, un gran numero di misure converge verso il sistema di acquisizione ed esso può, quindi, risultare sovraccaricato. I dati possono essere elaborati per individuare eventuali anomalie, di qui, il ruolo fondamentale svolto dall'analisi modale sperimentale nell'ambito del monitoraggio strutturale.

La campagna strumentale sarà necessaria a tracciare un corretto andamento della "time history".

Questa si avvale di alcuni elementi elettronici fondamentali:

- Accelerometri o estensimetri;
- convertitore ADC ad alta risoluzione (generalmente di 12-14 bit) atto alla conversione del segnale di partenza  $x(t)$  dalla forma analogica a quella digitale;
- un computer.

Nella maggior parte degli accelerometri, il principio di funzionamento è il medesimo: si basa sulla rilevazione dell'inerzia di una massa quando viene sottoposta ad un'accelerazione. La massa viene sospesa ad un elemento elastico, mentre un qualche tipo di sensore ne rileva lo spostamento rispetto alla struttura fissa del dispositivo. In presenza di un'accelerazione, la massa che è dotata di una propria inerzia si sposta dalla propria posizione di riposo in modo proporzionale all'accelerazione rilevata. Il sensore trasforma questo spostamento in un segnale elettrico acquisibile dai moderni sistemi di misura.



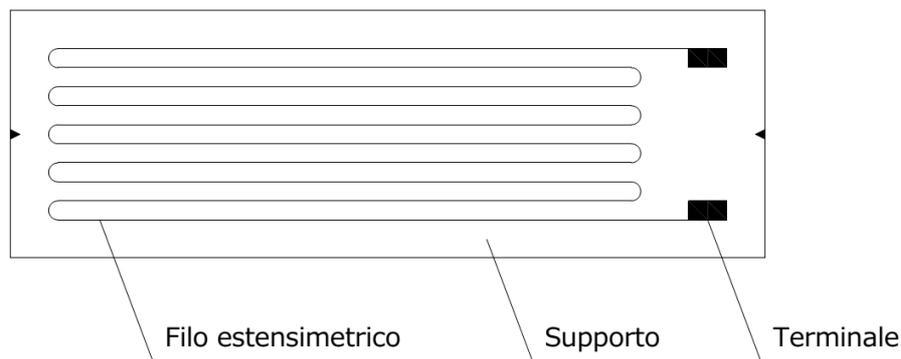
**Figura 9** - Tre accelerometri posizionati secondo le tre direzioni di sviluppo del ponte presso Musile di Piave

Gli estensimetri sono strumenti che misurano la deformazione meccanica normale e la trasformano in variazione di resistenza del conduttore elettrico. Gli estensimetri possono essere mono assiali, biassiali o triassiali.

Gli estensimetri elettrici, o ER, sono applicati, generalmente per incollaggio, sulla superficie dell'oggetto sottoposto a misura.

Essi sono costituiti da una griglia in materiale resistivo, che costituisce la parte sensibile dello strumento, da un supporto, che funge da interfaccia e da isolante elettrico nei confronti del materiale su cui effettuare le misure, e dai terminali elettrici, che collegano la griglia resistiva agli altri elementi che costituiscono il circuito di misura.

La deformazione del materiale sul quale è applicato un ER produce una deformazione della griglia che, essendo un conduttore elettrico, cambia di resistenza: la variazione di tale caratteristica costituisce il segnale di misura.



**Figura 10** - Schema di un estensimetro elettrico (ER)

Il convertitore analogico-digitale, è un circuito elettronico in grado di convertire un segnale Analogico con andamento continuo in una serie di valori discreti.

Il computer è necessario alla raccolta delle informazioni e della loro elaborazione.



**Figura 11** – La foto in alto rappresenta la registrazione dei segnali digitali forniti da convertitore ADC.

La foto sotto riguarda la fase di sistemazione delle apparecchiature necessarie all'identificazione dinamica presso Musile di Piave

## 2.2 PRESENTAZIONE DEI PONTI ESAMINATI

### 2.2.1 Ponte Nuovo del Popolo



**Figura 12** - Vista del ponte Nuovo del Popolo (VR)

Il Ponte Nuovo del Popolo, spesso denominato in modo abbreviato come Ponte Nuovo, è situato nella città di Verona, sul fiume Adige. Si tratta di un ponte stradale in calcestruzzo armato, a tre campate ad arco ribassato, con un rivestimento esterno in pietra.

Il ponte ha una lunghezza totale di 90,5 metri. Per quanto riguarda le tre campate, quella centrale ha una lunghezza maggiore delle due laterali; in particolare, l'arcata centrale ha una luce di 33,42 metri, mentre le due arcate laterali presentano una luce di 25,23 metri.

La larghezza complessiva dell'impalcato è di 14,32 metri; la struttura sorregge la carreggiata stradale a due corsie, una per senso di marcia, più due marciapiedi alle due estremità della sezione trasversale. I marciapiedi hanno larghezza pari a 2,55 metri ognuno.

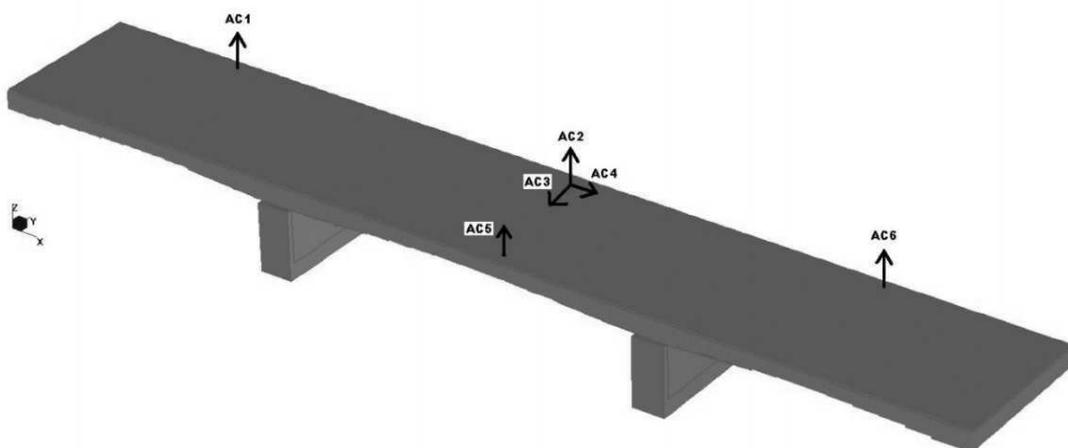
La soletta dell'impalcato superiore in calcestruzzo armato ha uno spessore di progetto pari a 18cm.

Lo schema statico si compone di sette travi principali, poste longitudinalmente per tutta la lunghezza del ponte, e di undici traversi di irrigidimento, che collegano in direzione trasversale tutte le travi principali.

In seguito ai sopralluoghi è stato constatato uno stato di ammaloramento generale del ponte.

L'amministrazione comunale ha pertanto ritenuto opportuno un monitoraggio continuo della struttura a partire dal mese di maggio 2012.

Gli accelerometri sono stati posizionati come mostrato in figura 13.



**Figura 13** - Modello FEM con indicate le posizioni degli accelerometri

## 2.2.2 Ponte di Musile di Piave

Il ponte ferroviario di Musile di Piave fu realizzato sulla tratta Venezia – Trieste nel 1937 ed era un ponte in acciaio a 3 campate uguali, ognuna avente lunghezza di 43,60m, larghezza di 5,42m ed altezza 5,80m. Le giunzioni sono state realizzate, come consuetudine dell'epoca, per mezzo di rivetti.

Delle tre campate è stata studiata la prima lato Trieste usufruendo della golena del fiume Piave.



**Figura 14** - Foto della campata di studio. Installazione degli accelerometri

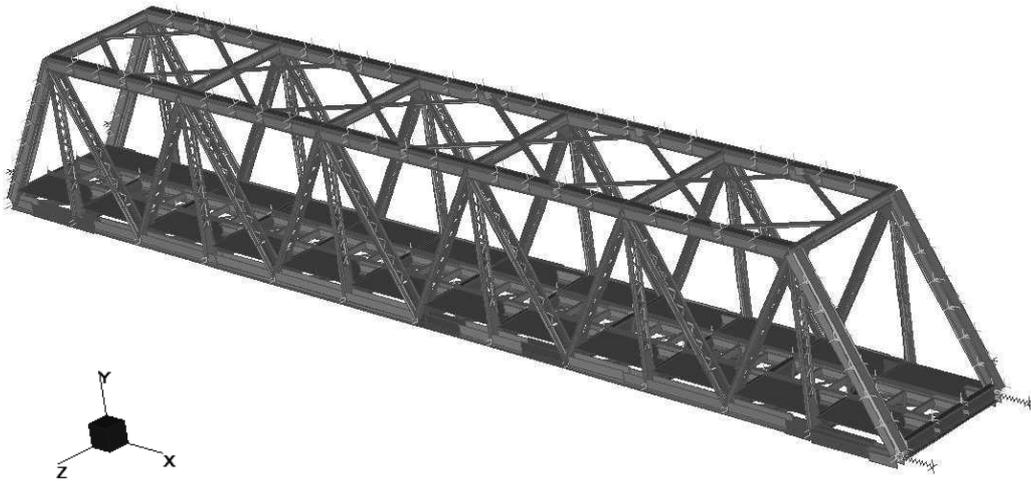
Mentre i monitoraggi sono avvenuti negli ultimi giorni di funzionamento del ponte, il sopralluogo destinato alla raccolta delle misure delle dimensioni degli elementi del ponte da modellare è stato condotto pochi giorni dopo la rimozione della campata per la sua sostituzione. La campata oggetto di misurazione è stata la stessa sottoposta a monitoraggio. Tutto questo è stato necessario in quanto non erano disponibili i progetti dettagliati per la realizzazione del ponte.



**Figura 15** – La foto in alto rappresenta la campata presa in esame per la raccolta misure. La foto in basso rappresenta il particolare del nodo successivamente testato a fatica in laboratorio

### 2.2.2.1 Modellazione agli elementi finiti

Sulla base delle misurazioni fatte, ci si è accorti che il ponte nel tempo è stato in più punti rinforzato. Soprattutto le ali dei correnti inferiori a metà campata sono state rinforzate con altre piastre per aumentare la resistenza a flessione del ponte.



**Figura 16** – Modello FEM del ponte di Musile di Piave

I vincoli impiegati prevedono su un lato una cerniera garantente la rotazione attorno all'asse Z e sull'altro lato un appoggio garantente lo spostamento lungo l'asse X.

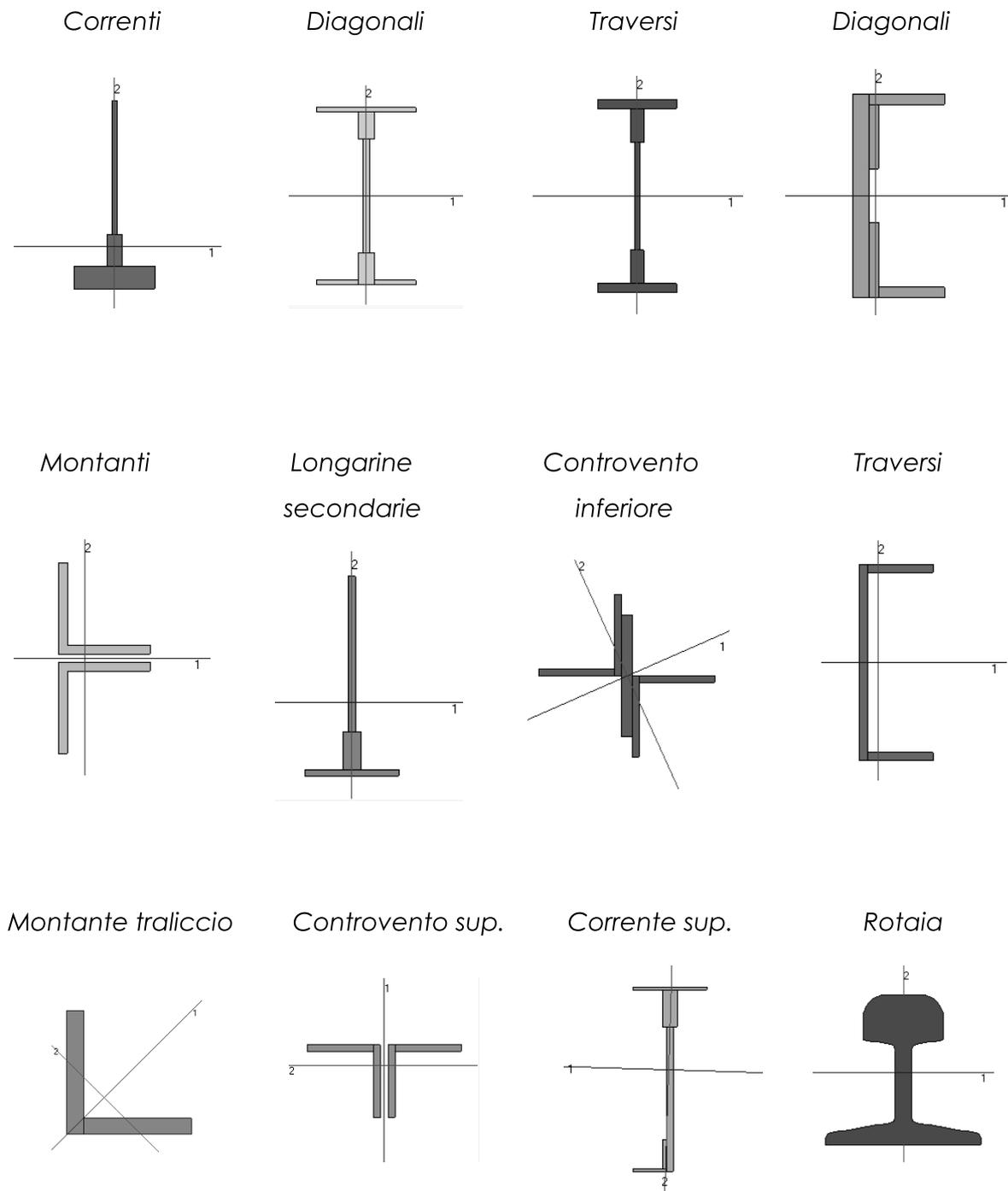


**Figura 18** - Appoggio scorrevole



**Figura 17** – Appoggio cerniera

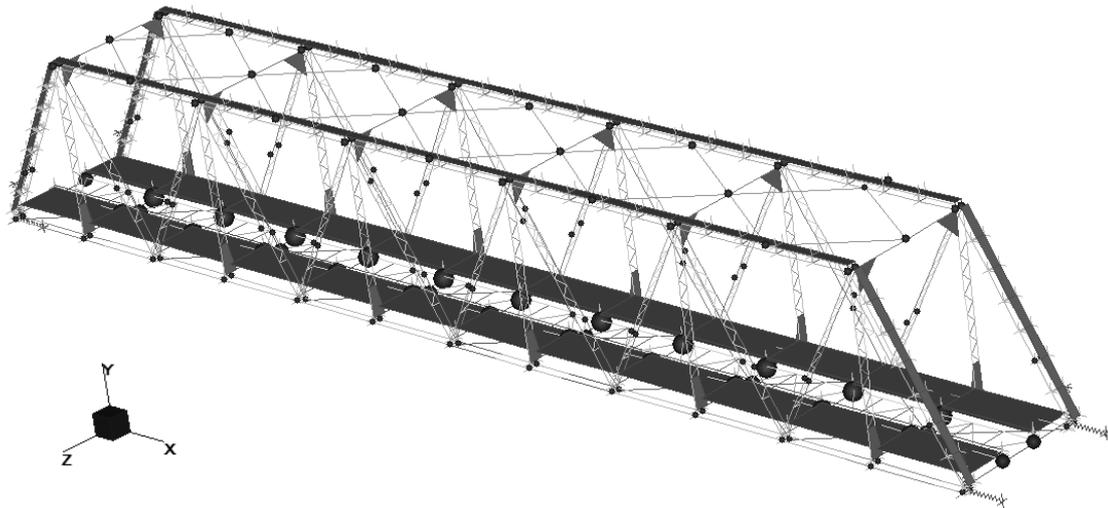
Vengono ora riportati alcuni dei profili tipo utilizzati nella modellazione dei vari elementi.



Le masse non strutturali adottate comprendono le masse dei parapetti, di alcune piastre e dei rivetti.

L'acciaio da modello presenta un modulo elastico  $E = 210000\text{MPa}$ , un coefficiente di Poisson  $\nu = 0,25$  ed una densità  $\rho = 7850\text{Kg/m}^3$ .

Note le dimensioni degli elementi e la densità dell'acciaio, le masse non strutturali traslazionali sono state così applicate.



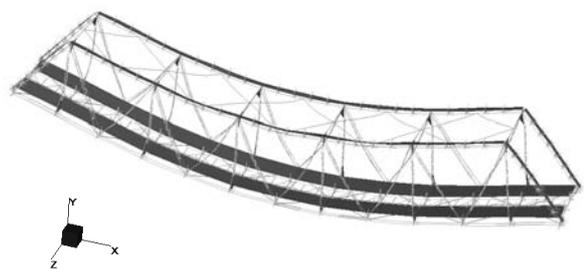
**Figura 19** – Disposizione delle masse non strutturali

### 2.2.2.2 Modi di vibrare ottenuti

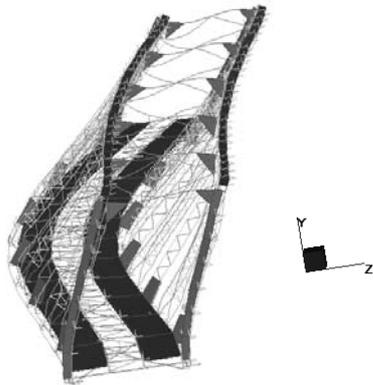
**Primo** modo di vibrare - 3,23Hz



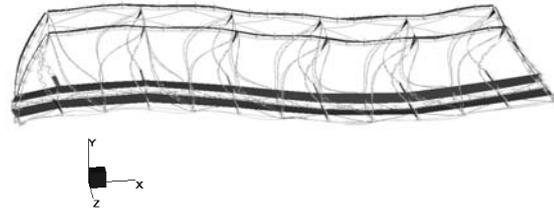
**Secondo** modo di vibrare - 5,61Hz



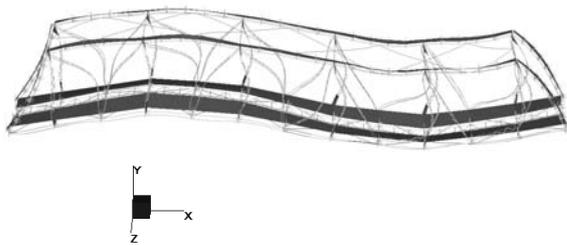
**Terzo** modo di vibrare – 5,69Hz



**Quarto** modo di vibrare - 12,56Hz



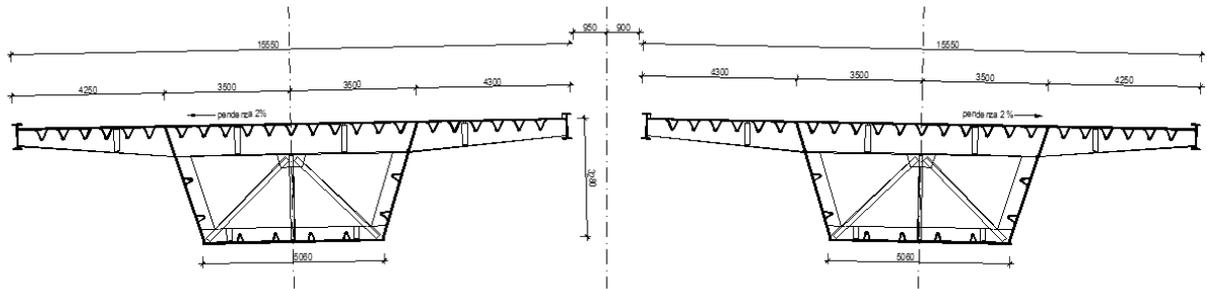
**Quinto** modo di vibrare - 14,41Hz



I modi di vibrare con percentuale di massa partecipante significativa sono i cinque appena esposti, ma come vedremo al paragrafo 3.1.3.2 il secondo modo di vibrare estratto da modello non trova una corrispondenza con l'algoritmo, mentre il primo ed il quarto modo proposti dall'algoritmo non trova riscontro nel modello.

### 2.2.3 Ponte autostradale sul fiume Mincio

La struttura in oggetto è un ponte a tre campate costituito da due travate continue affiancate, indipendenti, a struttura metallica a cassone, poggianti su pile e spalle di estremità in c.a..



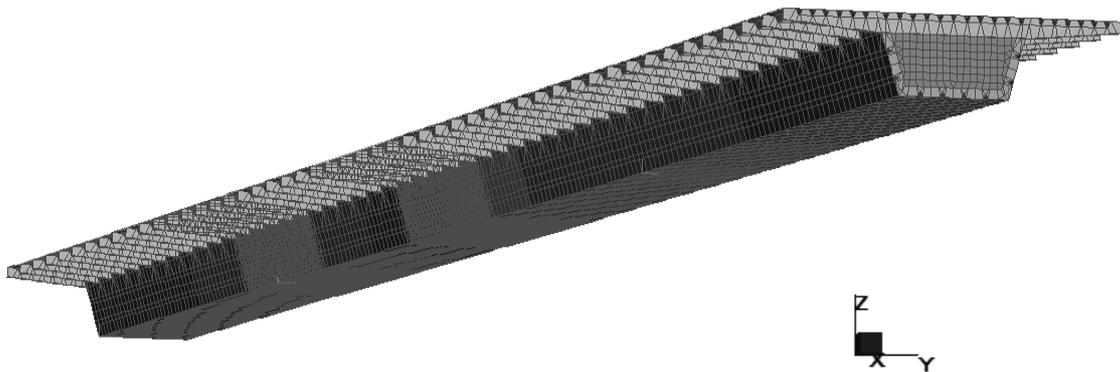
**Figura 20** - Sezione trasversale del ponte autostradale sul fiume Mincio (VR)

La luce delle campate laterali del viadotto è pari a 41 m, quella della campata centrale è pari a 70 m.: la lunghezza totale delle travate misurata fra gli assi degli appoggi sulle spalle è quindi pari a 152 m.

La larghezza totale dell'impalcato, per ciascuna delle due travate, è pari a 15.55 m. L'attuale configurazione è frutto dei lavori per l'allargamento della sede stradale, da 25.00 a 33.00 metri, svoltisi negli anni 1991-1992 nel corso dei quali le preesistenti travate in c.a.p. sono state sostituite dalle attuali travature metalliche mentre le pile e le spalle hanno subito interventi di rinforzo, sopraelevazione, e, per le sole spalle, ampliamento laterale.

La sezione trasversale del ponte è ad altezza costante, pari a circa 3.30 m, ed è costituita da un cassone monocellulare di forma trapezia avente la piattabanda inferiore di larghezza pari a 5 m e le fiancate divaricate simmetricamente verso l'alto a formare, con la lamiera dell'impalcato superiore, la base superiore del trapezio di larghezza pari a 7 m. La sezione trasversale dell'impalcato è quindi completata da due sbalzi laterali della piattabanda superiore, esterni quindi alla figura del trapezio, sostenuti da traversi continui su tre appoggi, facenti parte dei diaframmi trasversali di irrigidimento del cassone, i quali sono intervallati con interasse di circa 3 m.

Le ispezioni effettuate all'interno del cassone dei due impalcanti hanno messo in luce evidenti danneggiamenti della struttura legati a fenomeni di fatica;  
Del seguente ponte autostradale in acciaio è stato proposto il seguente modello agli elementi finiti



**Figura 21** - Modello FEM del ponteautostradale sul fiume Mincio (VR)

---

## PRESENTAZIONE DELL'ALGORITMO ED APPLICAZIONI

### 3.1 ANALISI DEI DATI ACQUISITI

L'obiettivo dell'analisi è ricavare un metodo certo per trovare i modi di vibrare della struttura di maggior interesse al fine di poter tarare correttamente il modello agli elementi finiti, per fare dei confronti tra algoritmo e modello FEM o semplicemente per monitorare nel tempo il comportamento dinamico di una struttura.

Che si sia in possesso di un gran numero di monitoraggi (monitoraggio continuo) o di un numero ristretto di monitoraggi (per esempio 2 o 3), l'algoritmo si dimostra in entrambi i casi valido con le dovute attenzioni.

Procediamo con ordine.

#### **3.1.1.1 Introduzione**

Ciò che si vuole ottenere è l'andamento delle frequenze dei modi di vibrare nel tempo.

Supponendo di avere due monitoraggi al giorno e di poter usufruire mensilmente dei dati, ci si trova ad avere gruppi di 60 monitoraggi da analizzare volta per volta.

Il metodo dà la possibilità di unire più gruppi di monitoraggi man mano che si è in possesso di dati da analizzare. Supponendo di trattare un monitoraggio continuo

si consiglia che il primo gruppo di monitoraggi analizzato con la procedura che vedremo tra poco sia numeroso e nel tempo più ristretto possibile per evitare di correre il rischio di non considerare alcuni modi di vibrare a causa di una scarsa correlazione dei vettori singolari dovuta a variazioni termiche stagionali. Quindi avere 50-60 monitoraggi nell'arco di un mese va più che bene per la prima analisi da condurre. Si preferisce che il primo gruppo sia numeroso per il fatto che una volta stabiliti i modi di vibrare del primo gruppo, quegli stessi modi di vibrare saranno individuati nei successivi gruppi senza più aver il bisogno di doverli nuovamente definire. Proprio per questa ragione i gruppi successivi al primo possono essere di un numero casuale di monitoraggi, addirittura può trattarsi di un singolo monitoraggio.

### 3.1.1.2 Inserimento dati e FDD

Una volta caricati i monitoraggi dalla cartella di interesse, ci si trova in possesso di files con le prime righe contenenti informazioni temporali ed informazioni relativi ai rilevatori di segnale (accelerometri o estensimetri). Nel caso in esame, ad ogni colonna corrispondono i segnali forniti dagli accelerometri ad eccezione della prima colonna che contiene la progressione temporale dei passi di registrazione.

t0	19/05/2012 13:42						
dt	0,01						
tempo	ACC_1	ACC_2	ACC_3	ACC_4	ACC_5	ACC_6	...
0	0,0007	0,0075	0,0010	0,0001	-0,0049	-0,0005	...
0,01	-0,0027	0,0057	-0,0003	0,0001	-0,0020	-0,0009	...
0,02	0,0001	0,0024	-0,0007	0,0001	-0,0024	-0,0003	...
0,03	0,0021	-0,0008	-0,0006	0,0001	0,0003	0,0018	...
0,04	0,0000	0,0003	0,0003	0,0001	0,0027	0,0015	...
0,05	0,0003	0,0017	0,0015	0,0001	0,0072	-0,0001	...
0,06	0,0000	-0,0024	0,0001	0,0001	0,0062	-0,0009	...
0,07	0,0004	-0,0028	0,0002	0,0001	0,0069	-0,0034	...
0,08	-0,0009	-0,0040	0,0001	0,0001	0,0047	-0,0018	...
0,09	0,0010	-0,0066	0,0012	0,0001	0,0021	0,0000	...
0,1	0,0016	-0,0041	0,0010	0,0001	-0,0009	0,0007	...
...	...	...	...	...	...	...	...

Quindi sarà sufficiente che l'operatore selezioni le righe iniziali da scartare (in questo caso saranno 4), le righe effettive da considerare (se la registrazione durasse 20 minuti con  $dt = 0,01s$  le righe da considerare sono al massimo pari a  $20 \times 60 \times 100$ ) e le colonne degli accelerometri che si ha intenzione di analizzare. Fatto questo, i files ripuliti verranno utilizzati per la FDD.

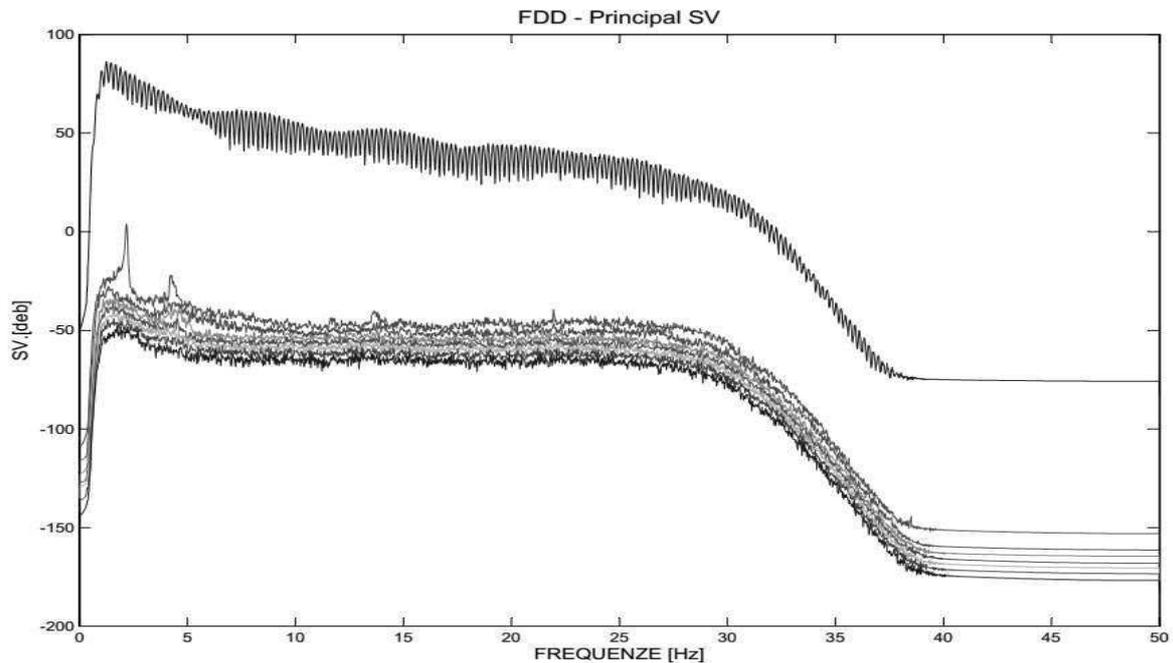
```
%%% Input
canale=1;
i=1;
while canale>0
    canale = input('Inserisci i canali buoni. Stop = -1 : ');
    if canale>0
        v(i) = canale;
    end
    i = i+1;
end
r = input('n° righe iniziali da RIMUOVERE per le analisi dei dataset: ')
L = input('n° righe dei dataset da CONSIDERARE: ')
fs = input('Frequenza del campionamento (Hz): ')
NFFT = input('Numero di parti in cui discretizzare il dominio
(consigliati: 2048, 4096 o 8192): ')
```

Svolta la FDD per il primo gruppo di monitoraggi ci si trova in possesso delle matrici  $U$ ,  $S$  e  $V$  ottenute dalla decomposizione ai valori singolari della PSD.

Le matrici di nostro interesse sono  $U$  e  $S$  in quanto  $V$  è la trasposta di  $U$ .

Durante la FDD viene garantito un grafico con in ascissa i valori singolari della matrice  $S$  riordinata ed in ascissa le frequenze. Tale grafico consente di non perdere di vista la qualità del segnale.

Può infatti accadere che uno o più sensori abbiano un mal funzionamento. Tale fenomeno è mostrato in figura 22.

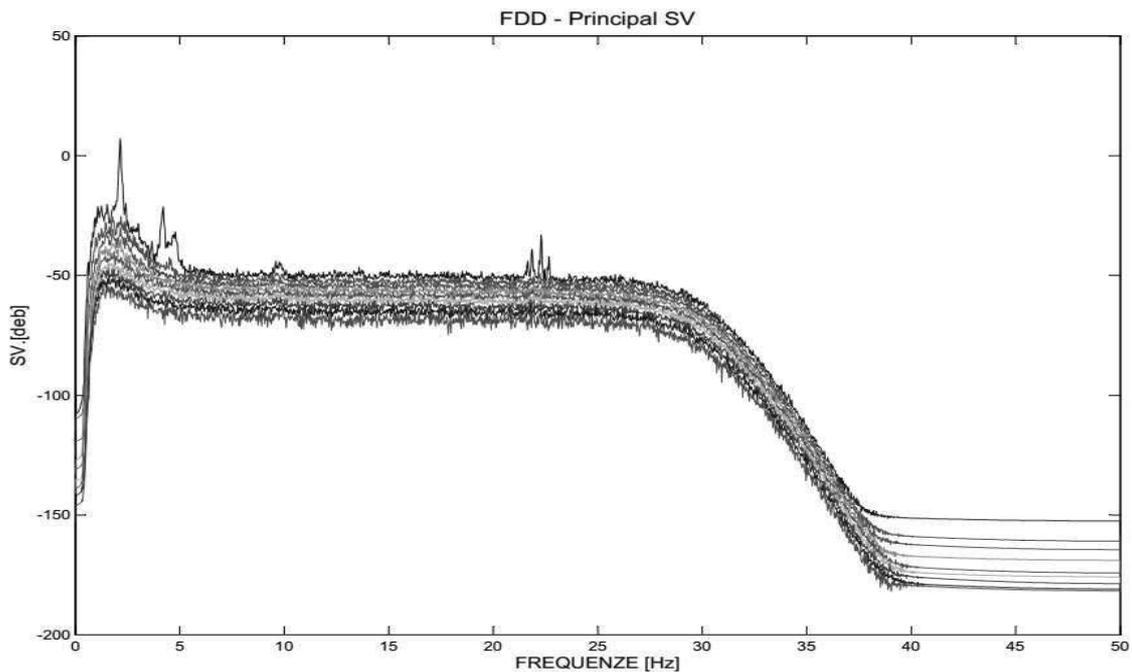


**Figura 22** – Andamento dei valori singolari con presenza di un segnale non corretto

Figura 22 presenta un segnale non corretto fornito probabilmente da un accelerometro non funzionante o scollegato. Tale segnale è quello che si discosta dagli altri. Potendo asserire ciò, l'operatore può immediatamente intervenire interrompendo l'analisi ed individuare per tentativi il canale non funzionante garantendo così una Frequency Domain Decomposition ed uno studio dei modi di vibrare corretti.

Certo è che se gli acquisitori di segnale sono in numero minimo per l'individuazione dei modi di vibrare della struttura, questo inconveniente può risultare fastidioso perché uno o più modi non verranno individuati.

Figura 23 mostra invece un grafico dei valori singolari corretto.



**Figura 23** – Andamento dei valori singolari in presenza di tutti i segnali corretti

### 3.1.1.3 Definizione di MAC (Modal Assurance Criterion)

Il MAC viene definito come

$$MAC(\varphi_r, \varphi_i) = \frac{[\varphi_r^H \varphi_i]^2}{[\varphi_r^H \varphi_r] \cdot [\varphi_i^H \varphi_i]}$$

dove:

$\varphi_r$  è il vettore singolare di riferimento

$\varphi_i$  rappresenta un vettore singolare generico

Il MAC serve per valutare la correlazione tra due vettori. Valori alti del MAC indicano una forte correlazione. Ora vedremo meglio a cosa serve l'uso del MAC.

### **3.1.2 Analisi post FDD con riferimento al ponte Nuovo del Popolo**

Nel caso in esame si è partiti ad analizzare i modi di vibrare sfruttando un primo gruppo di monitoraggi ottenuti nell'arco di circa una settimana ed ogni 20 minuti terminava una registrazione per iniziarne un'altra all'istante successivo. Si è quindi in possesso di 508 monitoraggi.

Tutti i 508 monitoraggi in esame vengono ora studiati in sottogruppi, per esempio da 20 monitoraggi, e tra questi 20 si eseguono i confronti per poi ricavare da ogni sottogruppo i modi di vibrare della struttura.

Tra i dati di input dell'analisi abbiamo quindi il monitoraggio iniziale di studio (per esempio il primo) ed il passo di studio (per esempio 20). Ciò vuol dire che avendo 508 monitoraggi i sottogruppi saranno 25. È importante che ci siano almeno 8-10 sottogruppi per le analisi. Se avessi imposto come monitoraggio iniziale il 65 e passo 20, avrei avuto 22 sottogruppi. Se l'ultimo sottogruppo si presenta con un numero di monitoraggi inferiore a quello del passo di studio, esso non verrà analizzato. Nel caso di un gruppo di 508 monitoraggi ed un passo di studio di 20, gli ultimi 8 monitoraggi non saranno sottoposti ad analisi. Qualora venisse inserito un numero non intero per esprimere il passo di studio, questo verrà arrotondato all'intero più vicino.

È chiaro che se l'obiettivo è considerare il maggior numero di monitoraggi possibili sia bene partire dal primo, ma può risultare utile iniziare l'analisi da un monitoraggio a piacere qualora si desideri studiare un particolare sottogruppo senza andare a coinvolgere ogni volta quelli precedenti.

Da ogni sottogruppo si estrarranno i modi di vibrare e non saranno necessariamente gli stessi tra un sottogruppo ed un altro.

#### **3.1.2.1 Analisi di un sottogruppo**

Il primo confronto avviene tramite il calcolo del MAC che si esegue sempre tra due vettori singolari estratti dalle matrici U. Il MAC viene calcolato tra il primo vettore singolare del primo monitoraggio (monitoraggio scelto come riferimento) ed il primo vettore singolare del secondo monitoraggio. Poi eseguo il MAC tra il

secondo vettore singolare del primo monitoraggio ed il secondo vettore singolare del secondo monitoraggio. Continuo estendendo questo procedimento a tutti i vettori singolari presenti. Fatto questo, ripropongo la stessa procedura tra il primo monitoraggio di riferimento ed il terzo monitoraggio e così via per tutti i monitoraggi del sottogruppo.

Il calcolo del MAC è stato così implementato

```

UUrif(:, :) = Umodi(:, :, ifast0);
for j=ifast0+1:ifast
    for i=1:NFFT/2
        UUrif2 = UUrif(i, :)*UUrif(i, :)' ;
        P = (UUrif(i, :)*Umodi(i, :, j)') .^2;
        ui = Umodi(i, :, j)*Umodi(i, :, j)';
        MACcu(j-ifast0, i) = P/(UUrif2*ui);
    end
end
end

```

La matrice Umodi contiene tutte le matrici U ottenute dalla SVD. Per lo studio del primo sottogruppo, con ifast0 è indicato il primo dei venti monitoraggi mentre con ifast il ventesimo. Se ci trovassimo ad analizzare il secondo sottogruppo, ifast0 indicherebbe il ventunesimo monitoraggio mentre ifast il quarantesimo.

Avendo scelto sottogruppi da 20 monitoraggi, alla fine di questa procedura avrò 19 MAC (il MAC del monitoraggio di riferimento con sé stesso non viene eseguito) e tra questi MAC eseguo la media.

```

for n=1:NFFT/2
    MACcuMEDIO(n) = sum(MACcu(:, n)') / (ifast-ifast0);
end

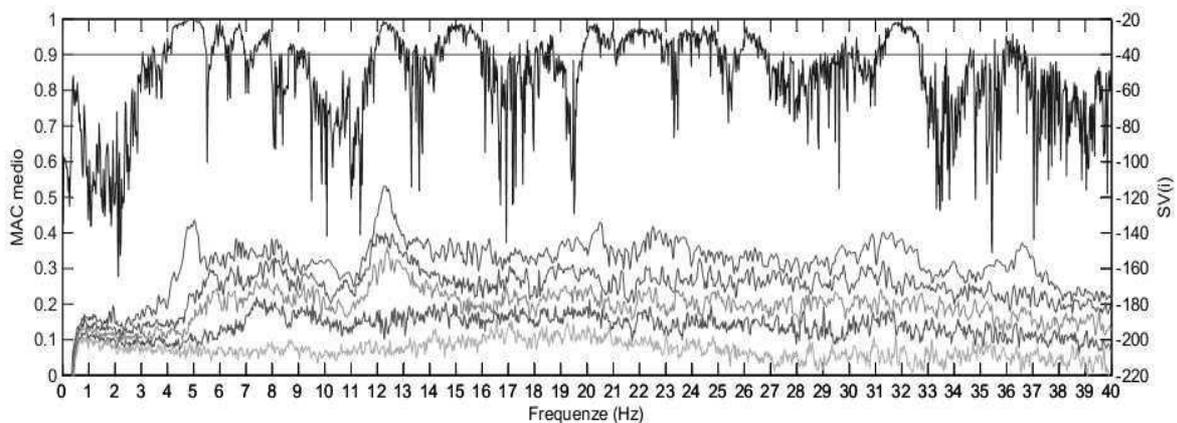
```

Ottingo così un MAC medio per ogni unità di frequenza. Il MAC medio esprime la corrispondenza tra i vettori singolari e contemporaneamente tiene conto, grazie ai diversi monitoraggi, delle variazioni nel dominio delle frequenze a causa dei diversi momenti di assunzione dei dati dai setup disposti sulla struttura.

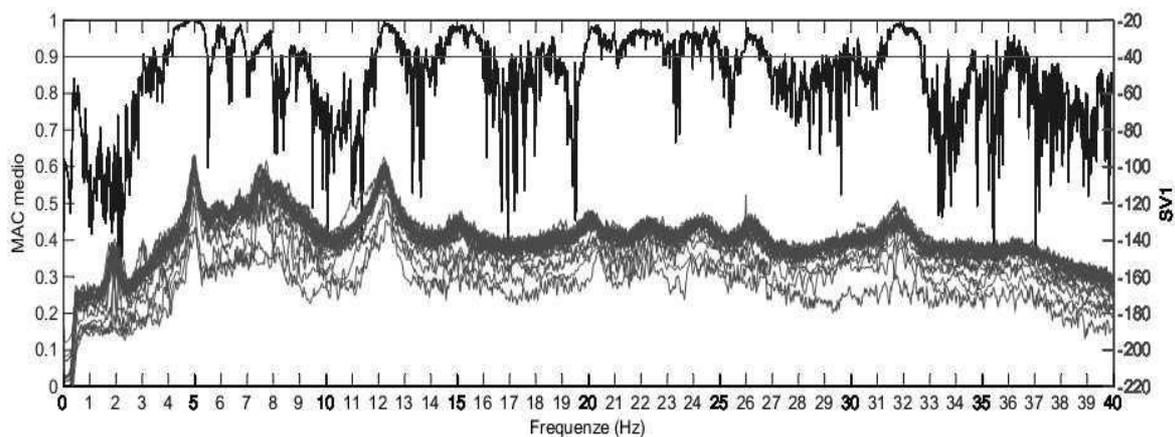
Per questa ultima ragione, più monitoraggi si confrontano tra la loro e più il MAC medio tende ad abbassarsi, mentre, meno monitoraggi si confrontano e più facilmente il MAC medio raggiungerà valori elevati.

Nella figura 24 sono diagrammati il MAC medio per i primi 40Hz e l'andamento dei valori singoli di tutti i canali appartenenti un monitoraggio scelto arbitrariamente.

Come si può notare in figura 24, gli accelerometri considerati sono solamente cinque in quanto ci sono cinque andamenti dei valori singoli.



**Figura 24** - Andamento del MAC e dei valori singoli SV(i).



**Figura 25** - Andamento del MAC medio e dei valori singoli SV1.

Nella figura 25 compaiono il MAC medio e gli andamenti dei valori singolari maggiori forniti da tutti i monitoraggi costituenti il sottogruppo (SV1).

La linea orizzontale presente a valore di MAC pari a 0,90 è indicativa e serve solamente per agevolare la lettura del grafico del MAC medio.

Il valore del MAC verrà richiesto dal programma ed inserito manualmente subito dopo aver preso visione delle figure 24 e 25.

Nel programma è possibile inserire un valore massimo e minimo per la soglia del MAC e può essere inserito il numero di parti in cui suddividere tale intervallo.

```
%Scelta della soglia dei MAC
MACmax = max(MACuuMEDIO);
macMIN = input('Scelta della soglia minima per i MAC: macMIN = ');
while macMIN > 1 | macMIN <= 0
    'SIA "mac minimo" maggiore di 0 e minore 1: '
    macMIN = input('Scelta della soglia minima per i MAC: ');
end
macMAX = input('Scelta della soglia massima per i MAC: ');
while macMAX < macMIN | macMAX > 1
    'SIA "mac massimo" COMPRESO TRA 1 ED IL DEL SEGUENTE VALORE: '
    valore = macMIN
    macMAX = input('Scelta della soglia massima per i MAC: ');
end
while qw == 1
    if macMIN == macMAX
        zm = 1;
        macPASSO = 0;
        qw = -1;
    else
        zm = round(input('Parti in cui suddividere macMAX-macMIN: '))
        if zm >= 1
            macPASSO = (macMAX - macMIN) / zm;
            qw = -1;
        else qw = 1;
            'Inserisci un valore >= 1 '
        end
    end
end
end
```

Per semplicità discorsiva, nel caso in esame si propone una soglia di MAC massimo uguale alla soglia del MAC minimo e pari a 0,90 e quindi coincidente con la linea vista nelle figure 24 e 25.

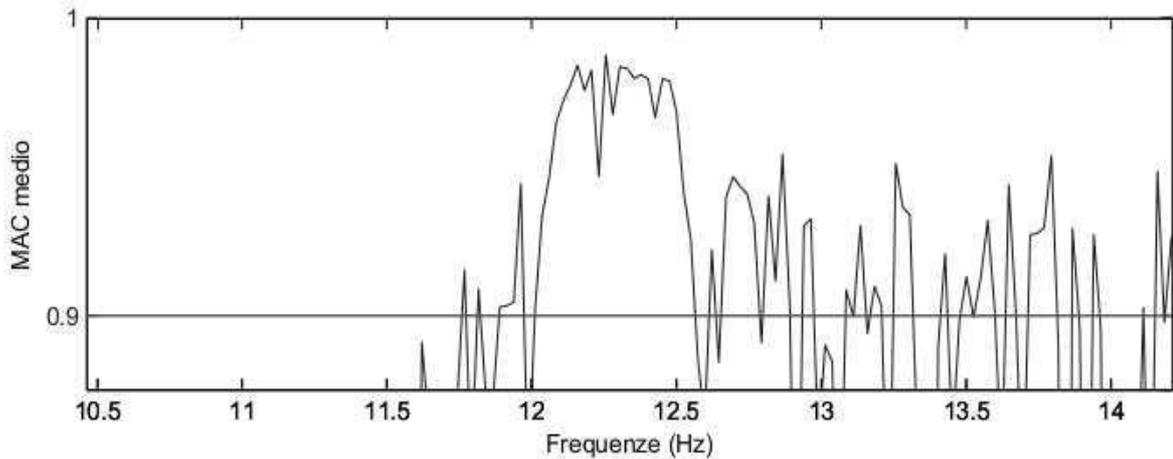
Quello che il programma si avvierà a svolgere è una'analisi dei picchi del MAC medio che superano la soglia imposta. È però chiaro che non possiamo considerare tutti i picchi che superano la soglia imposta ma solo quelli che raggiungono una certa ampiezza in termini di frequenza. Poiché il dominio durante la FDD è stato suddiviso in un certo numero di parti (nel seguente caso in 4096) e la frequenza di campionamento degli accelerometri è 100Hz, ci si trova a lavorare con l'unità di suddivisione del dominio della frequenza pari a  $100/4096 = 0,0244\text{Hz}$ . Quindi più che ragionare in termini di frequenza, si ragiona in termini di numero di unità di frequenza. Se decidessimo di considerare un numero N pari a 10 unità, vuol dire che N rappresenterà un intervallo di frequenza ampio  $0,0244 \cdot 10 = 0,244\text{Hz}$ .

### **3.1.2.2 Individuazione dei modi di vibrare di un sottogruppo**

Il procedimento per individuare i modi di vibrare di una struttura si basa innanzitutto sul scegliere i valori del MAC medio più alti, in quanto valori alti esprimono una buona correlazione tra i vettori. Si è pertanto deciso di considerare buoni tutti i MAC medi  $\geq \text{MAC} = 0,90$  (soglia scelta dall'utente).

Questo però non è sufficiente. Bisogna anche considerare l'ampiezza di questi intervalli con MAC medio  $\geq 0,90$ . E' chiaro che intervalli di frequenza di dimensioni maggiori hanno la possibilità di diventare dei domini modali, mentre intervalli di dimensioni ridotte potrebbero essere frutto di rumore nel segnale, quindi di qualcosa di accidentale. Quanto appena detto è messo in evidenza dalla figura sottostante, che mostra come solo l'intervallo che va da circa 12Hz a circa 12,5Hz ha la possibilità di diventare dominio modale. Tale ampiezza scelta dall'utente è espressa con il termine N presentato nel paragrafo precedente. Supponendo di voler considerare tutti gli intervalli di dimensioni maggiori di 0,3Hz, avremo da inserire  $N = 13$  in quanto, stando alla notazione adottata nell'algoritmo (vedi paragrafo 3.1.1.2), si ha

$$N = \frac{NFFT}{f_s} * 0,3 = \frac{4096}{100} * 0,3 = 12,29$$



**Figura 26** – Ingrandimento per mostrare l'elevato numero di picchi del MAC medio che superano la soglia imposta e pari a 0,90. Ma solo il picco tra la 12hz e 12,5Hz potrà diventare dominio modale.

Qualora venisse inserito un numero non intero, questo verrà arrotondato all'intero più vicino. Sono anche stati introdotti  $N_{min}$  pari a  $0,075/f_s * NFFT$  e  $N_{max} = NFFT/8$ .

Il limite inferiore per  $N$  è stato imposto affinché  $N$  sia sempre maggiore di due unità di frequenza. Come si vede,  $N$  è sempre in funzione della suddivisione adottata per il dominio della frequenza e della frequenza di campionamento.

Il limite superiore è stato imposto in modo ragionevole tenendo conto che se si è in presenza di un intervallo di frequenza così ampio non ci sono i requisiti per determinare i modi di vibrare in modo corretto e piuttosto conviene alzare la soglia di MAC. Inoltre sarebbe un inutile aggravio computazionale.

In modo simile alla scelta della soglia di MAC abbiamo la scelta di  $N$ .

```

% Scelta di N
Nmin = round(input('n° di NFFT consecutivi e con MAC maggiore di mac:
N minimo = '))
while Nmin < 0,075/fs*NFFT
    'SIA "N" > DEL SEGUENTE VALORE '
    valore = 0,075/fs*NFFT
    Nmin = round(input('n° di unità di frequenza con MAC maggiore
di mac: N minimo = '))
end
Nmax = round(input('n° di unità di frequenza consecutive con MAC
maggiore di mac: N massimo = '))
while Nmax<Nmin | Nmax>512
    'SIA "Nmax" > o = DEL SEGUENTE VALORE: '
    valore = Nmin
    Nmax = round(input('n° di NFFT consecutivi e con MAC maggiore
di mac: N massimo = '))
end
qw = 1;
while qw == 1
    if Nmin==Nmax
        zn = 1;
        Npasso = 0;
        qw = -1;
    else
        zn = round(input('Parti in cui suddividere Nmax-Nmin: '))
        if zn>=1
            Npasso = (Nmax-Nmin)/zn;
            qw = -1;
        else qw = 1;
            'Inserisci un valore >= 1 '
        end
    end
end
end
end

```

Qualche volta capita di avere dei modi di vibrare ravvicinati tra loro per cui al di sopra della soglia scelta del MAC potremmo avere l'intersezione di due domini modali. Come mostra l'andamento del MAC medio del Ponte Nuovo, questo problema qui non sussiste e non è pertanto necessario scindere domini modali. Per la soluzione di tale problema si rimanda al paragrafo 3.1.3.1.

Risulta chiaro che se invece di un ponte si volesse monitorare una torre a base quasi quadrata, si presenteranno coppie di modi flessionali così simili tra loro in

termini di frequenza che non sarà possibile effettuare la scissione dei domini modali. Starà quindi all'operatore considerare la particolarità di ogni singolo caso.

Fatta questa eventuale scissione, siamo in possesso di tutti i possibili domini modali, ma per essere veri domini modali verranno condotte ulteriori verifiche.

Le prime verifiche che ci appresteremo a fare chiamano in gioco la deviazione standard dei MAC contenuti nella matrice MAC<sub>CUU</sub> dell' algoritmo e la derivata del MAC medio i cui valori sono contenuti nel vettore MAC<sub>CUU</sub>MEDIO dell' algoritmo.

La deviazione standard è stata applicata agli stessi MAC che ci hanno permesso di calcolare il MAC medio. Fissata una unità di frequenza, e tale processo verrà eseguito per ognuna delle 4096 unità, la deviazione standard esprime la variabilità della popolazione di dati in esame attorno ad un valore medio, quindi esprime la variabilità dei MAC dovuta ai monitoraggi.

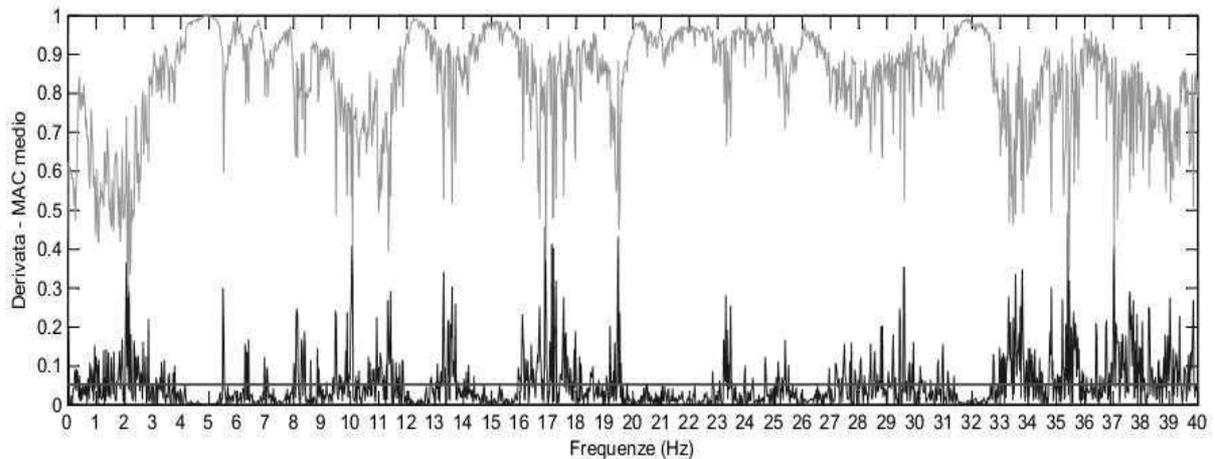
L'operazione di derivazione è invece applicata direttamente ai valori del MAC medio e ci serve per capire la variabilità del MAC medio all'interno dei possibili domini modali ricavati precedentemente.

Ciò che vogliamo è perciò che ci siano piccole variazioni della derivata e della deviazione standard all'interno dei possibili domini modali.

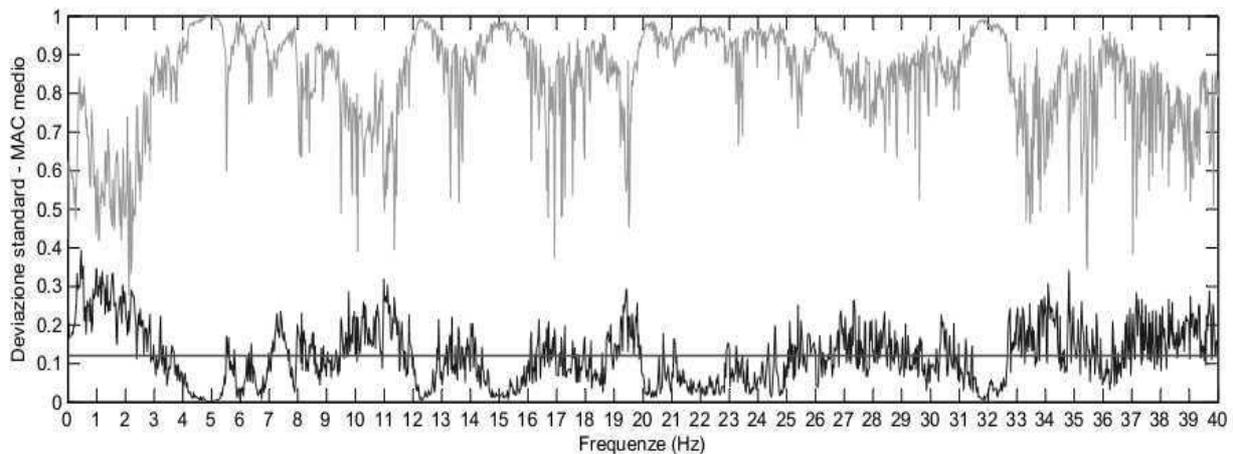
Essendo la frequenza di campionamento degli accelerometri pari a 100Hz, per questioni di pulizia del risultato, i valori di deviazione standard media e della derivata media espressa in termini assoluti sono stati calcolati fino ad un 40% della frequenza di campionamento.

```
STD      = std(MACuu);  
miniSTD  = STD(1:0.4*NFFT);  
mSTD     = sum(miniSTD)/(0.4*NFFT);  
  
DER      = abs(diff(MACuuMEDIO(:)));  
miniDER  = DER(1:0.4*NFFT);  
mDER     = sum(miniDER)/(0.4*NFFT);
```

Il valore limite scelto di accettabilità per la deviazione standard e per la derivata espressa in modulo è il loro valore medio rappresentato dalla linea orizzontale presente nelle figure 27 e 28.



**Figura 27** – Andamenti del MAC medio e della derivate



**Figura 28** – Andamenti del MAC medio e della deviazione standard

Se i requisiti imposti dalla derivata e dalla deviazione standard sono soddisfatti nell'intorno di un picco, allora la frequenza relativa a quel picco verrà raccolta nella matrice  $\mathcal{F}$  come riportato sotto, altrimenti al posto di quel picco, nella matrice  $\mathcal{F}$  comparirà il valore 0.

```

for j= ifast0:ifast
  for i= 1:max(find(appax(:,1)))
    [C,I] = max((SS1(YY(i,1,ss-2)+find(YY(i,:,ss-2))-1,1,j))');
    pos(j,i) = (YY(i,I,ss-2));
    std = mSTD; % scelta soglia limite della deviazione standard
    der = mDER; % scelta soglia limite della derivata
    k = round(N/5);
    if i>1
      if STD(pos(j,i)-k:pos(j,i)+k)'<std & DER(pos(j,i)-
        (k):pos(j,i)+(k))<der;
        uu0(i,:,j) = Umodi(pos(j,i),:,j);
        f(j,i) = f1(pos(j,i));
      else uu0(i,:,j) = zeros(1,length(channel));
        f(j,i) = 0;
      end
    else
      if STD(pos(j,i):pos(j,i)+k)'<std &
        DER(pos(j,i):pos(j,i)+(k))<der;
        uu0(i,:,j) = Umodi(pos(j,i),:,j);
        f(j,i) = f1(pos(j,i));
      else uu0(i,:,j) = zeros(1,length(channel));
        f(j,i) = 0;
      end
    end
  end
end
end
end

```

Dove:

appax	è la matrice contenente tutti gli intervalli che, fissato il MAC di soglia, uguagliano o superano il numero N.
SS1	è la matrice riordinata contenente i valori singolari di tutte le matrici S ottenute dalla SVD.
uu0	è la matrice contenente i vettori singolari delle forme modali accettate.
f	è la matrice delle frequenze dei modi di vibrare accettati.

Fatta questa scrematura, arriviamo all'ultimo passaggio. Per tutti i domini modali che hanno superato il vaglio della deviazione standard e della derivata si apre un'ultima selezione. Viene cioè ad essere effettuato un nuovo MAC, questa volta calcolato tra il vettore singolare di ogni picco precedentemente individuato ed un suo intorno. Quest'ultimo controllo lo possiamo vedere come una verifica o un accertamento più che una rigida selezione.

```
scarto=k+5;
for i=ifast0:ifast
    for j=1:max(find(appax(:,1)))
        UrifF = uu0(j, :, i);
        Urif2 = UrifF*UrifF';
        if pos(i,j)>NFFT/fs*1.2
            range(:,j,i) = pos(i,j)-scarto:pos(i,j)+scarto;
            UiF(:, :, j) = Umodi(range(:,j,i), :, i);
            for m=1:scarto*2+1
                P(m) = (UrifF*UiF(m, :, j)') .^2;
                ui(m) = UiF(m, :, j)*UiF(m, :, j)';
                if P(m)/(Urif2*ui(m))>= mac;
                    MAC(m,j,i) = P(m)/(Urif2*ui(m));
                else MAC(m,j,i) = 0;
            end
        end
        if MAC(scarto+1-k:scarto+1+k,j,i)>= mac;
            newf(i,j) = f(i,j);
        else newf(i,j) = 0;
        end
    else newf(i,j) = 0;
    end
end
segno = sign(newf);
conteggio = sum(segno);
for i=1:ntcluster
    if conteggio(i)~0
        newfm(i) = sum(newf(:,i))/conteggio(i);
    else newfm(i) = 0;
    end
end
end
```

La matrice `newf` contiene al suo interno tutte le frequenze dei picchi che hanno superato anche quest'ultima scrematura. La matrice `newfm` contiene invece le frequenze medie per ogni modo di vibrare. La matrice `pos` contiene tutti gli intervalli che presentano ampiezza superiore ad  $N$  per MAC fissato.

Imponendo `if pos(i,j)>NFFT/fs*1.20` si vuol impedire che frequenze minori di 1,20Hz possano diventare frequenze di un modo di vibrare. Varie volte capita infatti che ci sia una forte correlazione tra i vettori singolari all'inizio delle registrazioni dei segnali, ma questo non vuol dire che lì si trovino i modi di vibrare della struttura. E se la forte correlazione fosse nell'intorno dello zero ci si troverebbe ad avere valori negativi nell'intorno del picco nella matrice `appax` creando problemi nella gestione dei dati. Per evitare tutto ciò è stato imposto il fattore 1,20.

Fatto questo siamo in possesso di tutto ciò che ci serve per stabilire se i possibili domini modali fino ad ora analizzati possano essere considerati domini modali a tutti gli effetti. Per stabilire ciò, prendiamo la matrice delle frequenze e presa una colonna, cioè un dominio modale, contiamo quante volte sono presenti elementi diversi da zero.

Se il numero di elementi diversi da zero supera una soglia imposta, quello verrà considerato dominio modale. La soglia è stata imposta pari al 60% dei monitoraggi, quindi nel caso in esame la soglia è pari a 12.

Le frequenze che superano tale soglia vengono poi inserite in una nuova matrice chiamata `frequenze`.

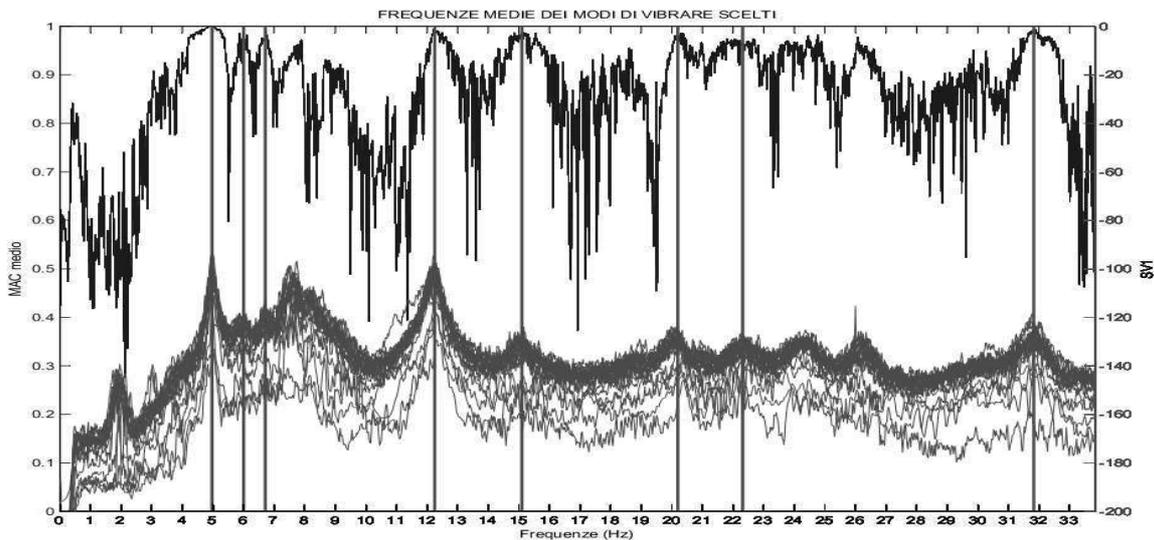
```

superamenti = 0.60*(ifast-ifast0+1);
indici=find(conteggio>=superamenti);
for i=1:size(indici,2)
    indiciTOT(ss-2,i)=indici(i);
end
if size(conteggio,2)==sum(sign(find(conteggio<superamenti)))
    for i=1:size(conteggio,2)
        frequenze(:,i) = 0;
    end
else
    for i=1:size(indici,2)
        frequenze(:,i) = newfm(:,indici(i));
    end
end
end

```

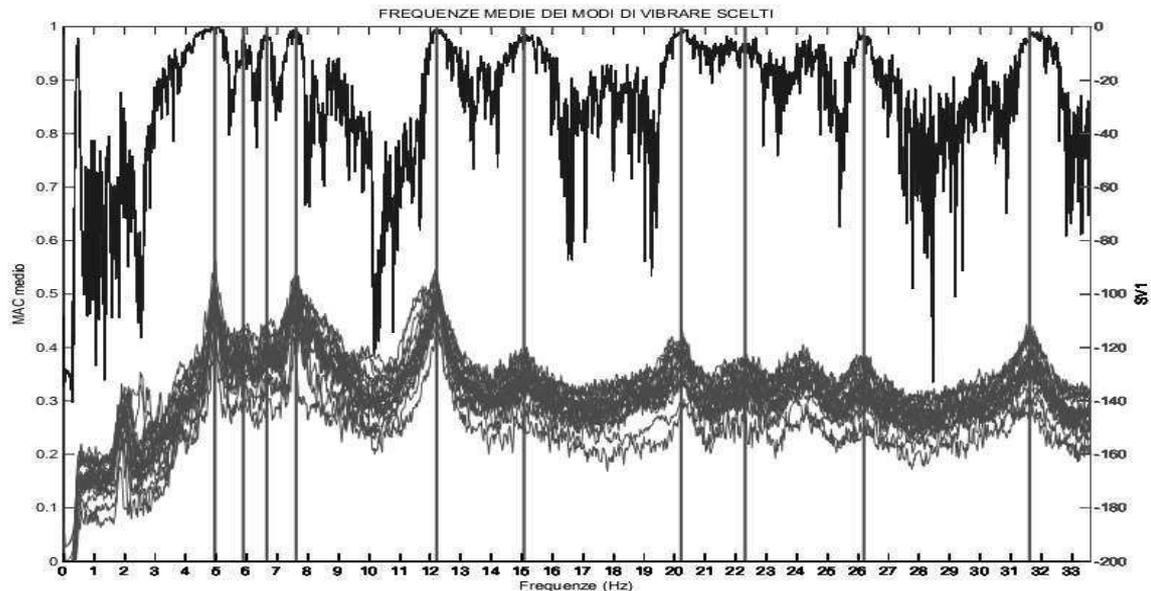
Il sottogruppo proposto in figura 29 presenta 13 domini modali candidati, ma solo 8 risultano domini modali cioè 8 sono i modi di vibrare della struttura.

La figura 29 mostra dove si posizionano gli 8 modi di vibrare sulla base della loro frequenza media.



**Figura 29** – Frequenze medie dei modi di vibrare di un sottogruppo

Ma lavorando con un altro sottogruppo avremmo potuto ottenere un grafico con 10 modi di vibrare come mostra figura 30.



**Figura 30** – Frequenze medie dei modi di vibrare di un altro sottogruppo

### 3.1.2.3 Analisi globale

Il motivo per cui è importante avere un primo gruppo analizzato con svariati sottogruppi è proprio per permettere ora una buona analisi di tutti i sottogruppi.

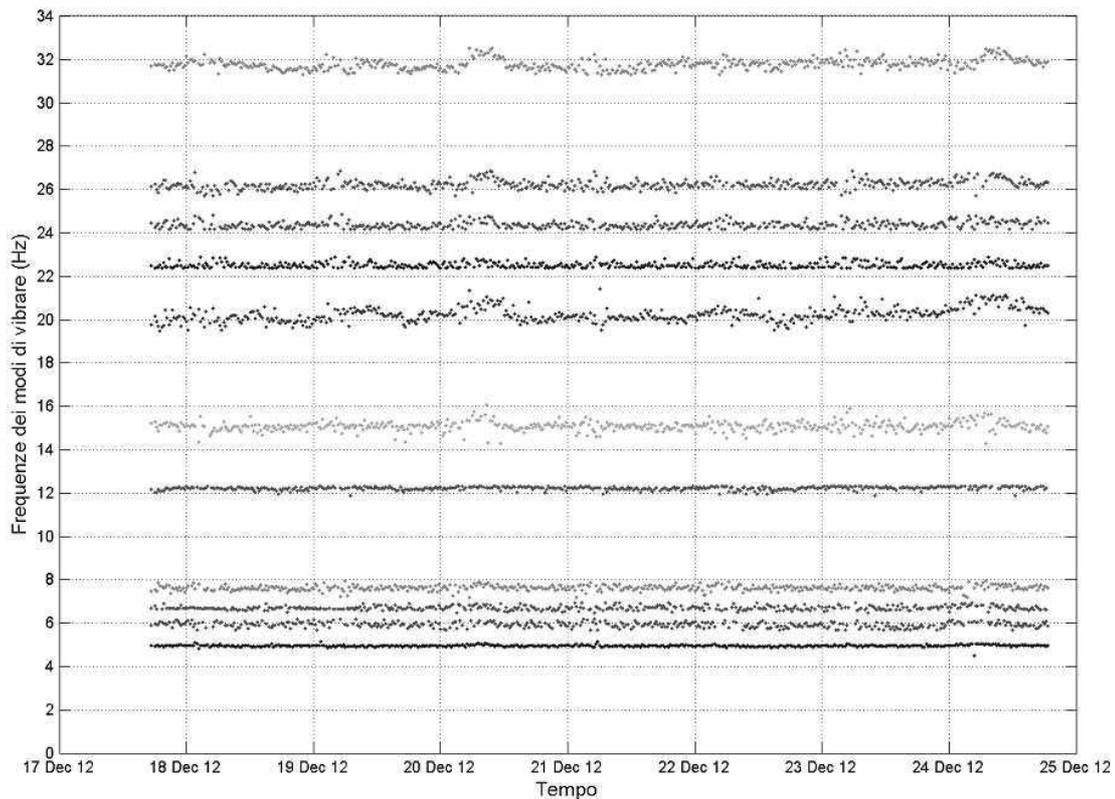
Nell'esempio riportato si è in possesso di 508 monitoraggi: 25 sottogruppi da 20 monitoraggi.

Una volta ordinate le frequenze medie dei modi di vibrare fornite da tutti i sottogruppi, si esegue il conteggio di quante volte un modo di vibrare compare. La soglia imposta affinché un dominio modale possa considerarsi tale è pari al 30% del numero di sottogruppi ed arrotondando all'intero più vicino si ha una soglia pari a 8. I modi di vibrare considerati definitivamente sono quindi 11 e sono riportati nella tabella a seguire.

	Frequenze (Hz)											
<b>Sottogruppi</b>	<b>1</b>	4,96	5,98	-	7,59	12,16	15,13	20,01	-	24,41	26,23	31,74
	<b>2</b>	4,97	-	-	7,61	-	15,03	-	-	-	-	-
	<b>3</b>	4,94	-	6,65	7,58	12,21	15,04	-	-	24,21	-	31,71
	<b>4</b>	4,95	-	6,71	7,60	12,18	14,99	20,03	-	24,23	26,10	31,57
	<b>5</b>	4,96	6,00	6,68	7,60	12,22	15,11	-	22,55	-	-	31,58
	<b>6</b>	4,94	5,95	-	-	-	15,12	-	-	-	-	-
	<b>7</b>	4,94	5,92	6,71	7,61	12,25	15,09	20,33	22,30	24,26	26,20	31,78
	<b>8</b>	4,95	5,90	6,68	7,61	12,18	15,02	20,13	-	24,34	26,12	31,57
	<b>9</b>	4,96	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	<b>10</b>	5,00	6,02	6,75	-	-	-	-	-	24,50	-	-
	<b>11</b>	4,94	5,90	-	7,63	12,33	15,04	-	-	-	26,19	31,64
	<b>12</b>	4,95	5,92	6,67	7,62	12,22	15,13	20,13	-	-	26,20	31,60
	<b>13</b>	4,97	-	6,65	-	12,30	14,74	-	-	-	26,22	-
	<b>14</b>	4,94	5,90	-	7,63	12,20	15,07	-	22,30	-	26,15	31,47
	<b>15</b>	4,96	5,91	-	7,64	-	15,02	20,12	22,33	24,31	26,17	31,77
	<b>16</b>	4,97	6,00	6,69	-	12,26	15,08	20,23	22,34	-	-	31,82
	<b>17</b>	4,94	-	-	7,60	12,31	-	-	-	-	-	-
	<b>18</b>	4,92	5,80	-	7,62	12,15	15,05	20,10	22,34	-	26,22	31,73
	<b>19</b>	4,94	5,90	-	7,62	12,23	15,08	20,12	-	24,37	26,20	31,87
	<b>20</b>	4,96	5,91	6,76	-	12,33	15,05	20,38	-	-	-	-
	<b>21</b>	4,95	-	6,68	7,64	12,27	15,10	20,28	-	-	26,33	-
	<b>22</b>	4,95	5,82	6,67	7,59	12,26	15,02	20,39	22,29	-	26,30	31,83
	<b>23</b>	4,96	-	6,75	7,62	12,32	-	20,40	22,40	-	26,35	31,80
	<b>24</b>	4,99	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	<b>25</b>	4,97	5,90	6,67	7,77	12,33	15,13	-	22,37	24,51	-	-
<b>Conteggio</b>	<b>25</b>	<b>16</b>	<b>14</b>	<b>18</b>	<b>19</b>	<b>20</b>	<b>13</b>	<b>9</b>	<b>9</b>	<b>14</b>	<b>15</b>	

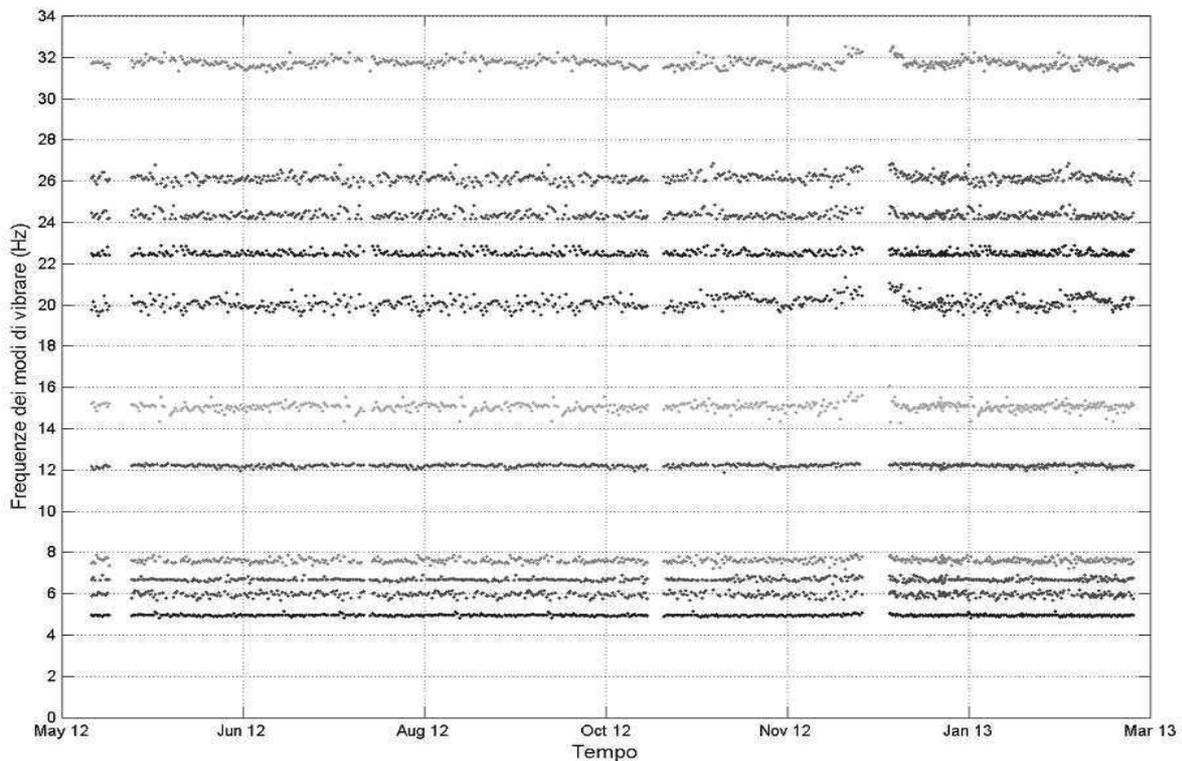
Si fa notare che le linee verticali di figura 29 sono le frequenze medie del sottogruppo n°16, mentre quelle di figura 30 sono le frequenze medie del sottogruppo n°22.

Stabiliti così gli 11 domini modali, per ogni monitoraggio vado a prendere i picchi forniti dalla PSD all'interno di questi domini modali per tutti i 508 monitoraggi e sempre per verifica, viene eseguito il MAC tra il vettore singolare del picco ed un suo intorno. Viene ora riportato il grafico che esprime l'andamento nel tempo degli undici modi di vibrare.



**Figura 31** - Andamento delle frequenze medie dei modi di vibrare nella settimana dal 17 al 24 dicembre 2012.

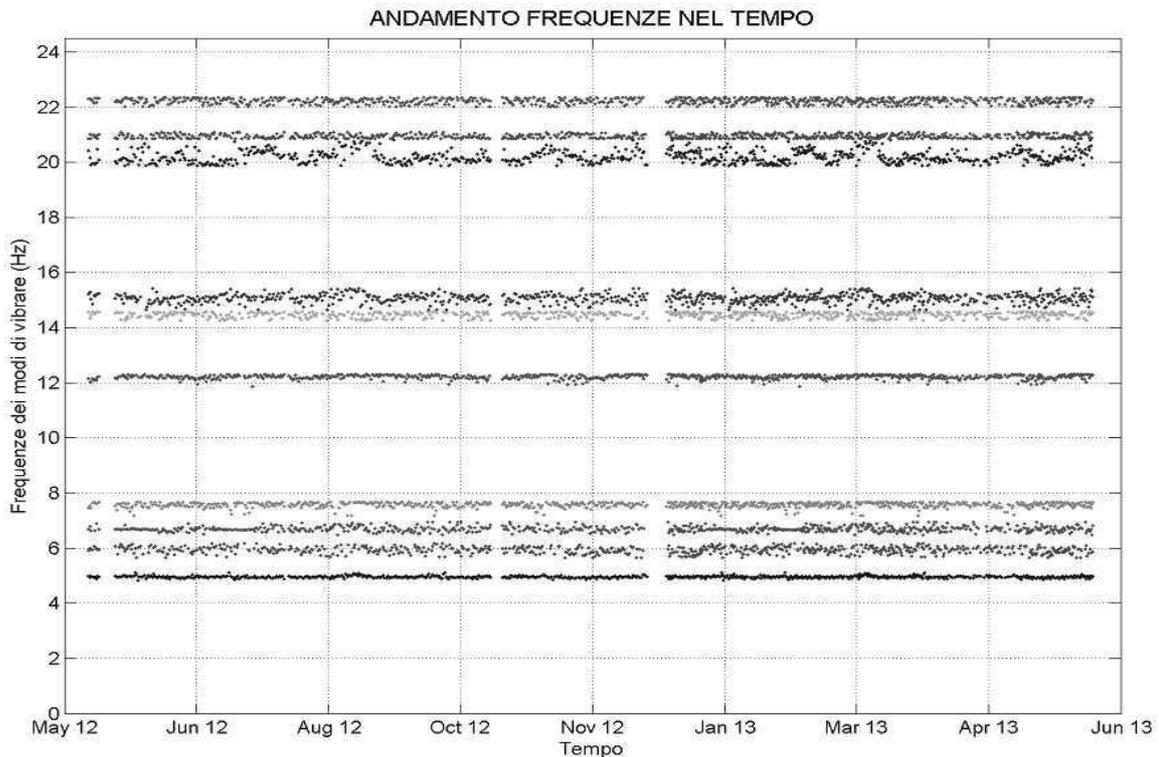
L'analisi dinamica del Ponte Nuovo a Verona è iniziata nel maggio 2012 ed è tutt'ora attiva. Vengono di seguito riportate le analisi fin qui condotte. Come si accennava prima, una volta calcolati i domini modali per il primo gruppo di monitoraggi, gli stessi domini modali verranno applicati a tutti gli altri gruppi di monitoraggi di cui si sarà in possesso in tempi successivi. Assemblati tutti i gruppi tra loro, essi forniranno l'andamento voluto delle frequenze come mostra figura 32. Nel grafico però non compaiono alcuni periodi: quello dei 508 monitoraggi (17-24 dicembre) e qualche altro per mancanza di dati.



**Figura 32** – Le frequenze medie dei modi di vibrare ricavati in figura 31 sono state estese ad un period più ampio che va da maggio 2012 a marzo 2013

Dal grafico notiamo una certa regolarità nelle frequenze di tutti i modi di vibrare. Le scosse sismiche con epicentro in Emilia Romagna avvenute nei mesi di maggio e giugno 2012 non hanno comportato alcun danno alla struttura.

Ma potrebbe sorgere spontanea la domanda su come essere certi che i modi che individuiamo siano veramente i modi di vibrare della struttura in quanto abbiamo ipotizzato un certo MAC ed un certo N. Per ulteriori approfondimenti si rimanda al paragrafo 3.1.4. Volendo cambiare i valori delle variabili MAC ed N che determinano la scelta dei modi, seppur entro certi limiti, ci si accorge che i primi 6 modi di vibrare compaiono tutti. Compaiono cioè i primi due modi flessionali, il primo torsionale, i secondi modi flessionali ed il secondo torsionale ovvero i 6 modi per cui sono stati disposti gli accelerometri. Con buoni risultati vengono colti anche i modi successivi.



**Figura 33-** Le frequenze medie dei modi di vibrare ricavati con altre combinazioni delle variabili (passo, soglia MAC ed N) consentono di ottenere altri modi di vibrare rispetto a figura 31. I risultati poi, come per figura 32, sono stati estesi ad un period più ampio, in questo caso da maggio 2012 a giugno 2013

Come infatti si può notare i modi calcolati sono quasi gli stessi: scompaiono quelli superiori ai 24Hz e se ne aggiungono uno intorno ai 15Hz ed intorno ai 21Hz.

Una cosa che può capitare è che vengano individuati due o più modi di vibrare ravvicinati tra loro. Supponiamo che i due modi di vibrare abbiamo il primo una frequenza media di 14,50 e d il secondo 14,70. In questi casi l'algoritmo elimina il secondo modo di vibrare. In generale l'algoritmo elimina il modo di vibrare successivo a quello analizzato.

La distanza minima tra le frequenze medie dei due modi confrontati affinché il secondo non venga eliminato deve essere superiore alla soglia in Hz data da

$$\max \left\{ \begin{array}{l} 0,35 \\ N * f_s / NFFT \end{array} \right. ;$$

Se  $N = 12$ , come per il caso del Ponte Nuovo del Popolo avremo che la soglia è 0,35hz perché  $12 \cdot 100 / 4096 = 0,293\text{Hz}$ .

Confrontando le frequenze dei modi di vibrare ottenuti da algoritmo e da modello FEM non tarato si ha

ALGORITMO

FEM

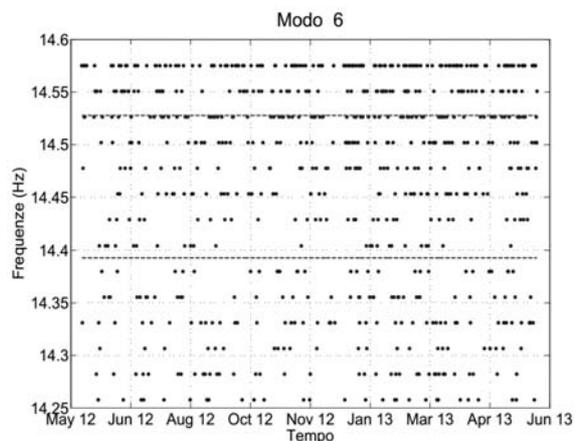
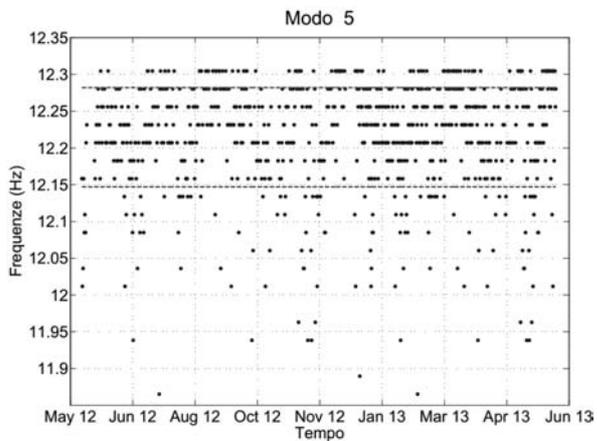
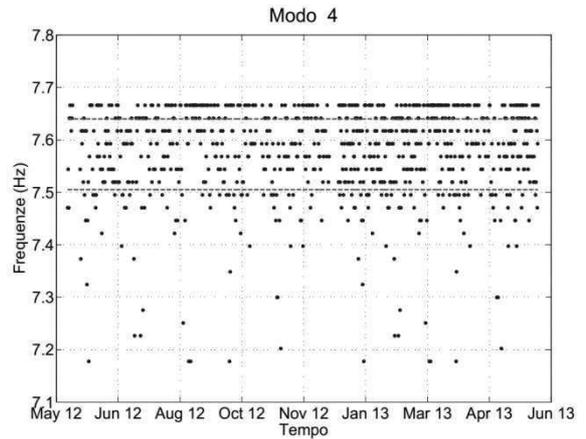
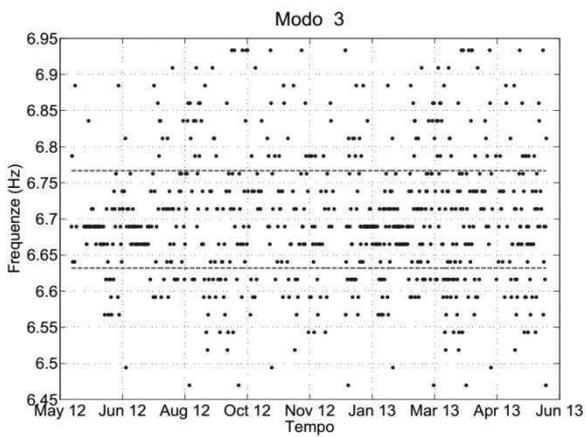
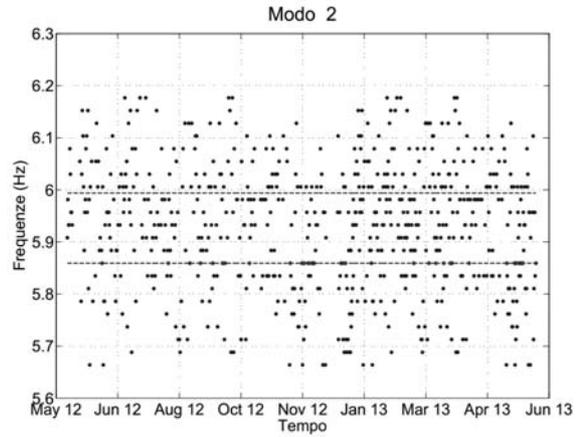
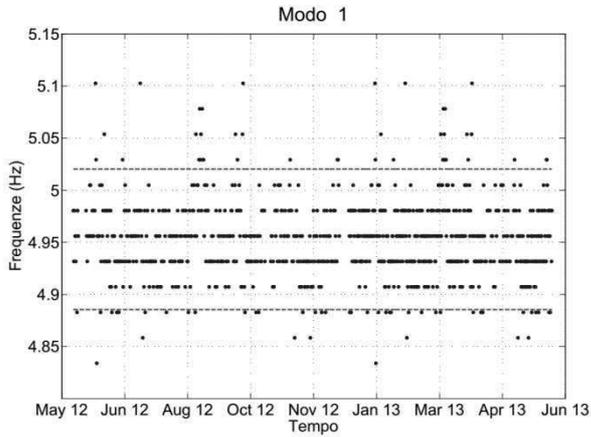
♦ Hz	MODE PARTICIPATION	Frequency (Hz)	Modal Mass (Engineering)	PF-X (%)	PF-Y (%)	PF-Z (%)
4.9528	1	2.718E+00	4.802E+05	0.000	0.000	0.000
5.9267	2	4.577E+00	5.016E+05	0.187	0.000	0.000
6.6994	3	6.443E+00	5.447E+05	0.000	0.000	36.737
7.5726	4	8.419E+00	1.481E+05	0.000	0.248	0.000
12.2146	5	8.422E+00	1.427E+05	0.000	0.000	0.000
14.4603	6	8.494E+00	7.861E+04	0.000	0.005	0.000
15.0681	7	1.065E+01	4.267E+05	1.246	0.000	0.000
20.2013	8	1.456E+01	1.325E+06	36.997	0.000	0.000
20.9387	9	1.540E+01	3.373E+05	0.000	6.678	0.000
22.2171	10	1.574E+01	3.256E+05	0.000	0.000	0.076
	11	1.613E+01	1.572E+05	0.014	0.000	0.000
	12	1.620E+01	1.477E+05	0.000	0.000	0.000
	13	1.635E+01	7.074E+04	0.000	0.000	0.034
	14	1.720E+01	1.269E+05	0.000	0.000	0.000
	15	1.904E+01	6.106E+05	15.371	0.000	0.000
	16	2.076E+01	3.686E+05	0.000	0.032	0.000
	17	2.109E+01	2.518E+05	0.000	16.461	0.000
	18	2.200E+01	3.263E+05	0.000	0.000	4.940
	19	2.249E+01	2.812E+05	0.000	0.002	0.000
	20	2.290E+01	4.198E+05	0.000	22.537	0.000
-----						
TOTAL MASS PARTICIPATION FACTORS				53.815	45.964	41.787

Modo	Frequenze (Hz)		$f_{\min}/f_{\max}$
	Algoritmo	FEM	
1	4,95	-	-
2	5,92	-	-
3	6,70	6,44	0,961
4	7,57	-	-
5	12,21	-	-
6	14,46	14,56	0,993
7	15,07	15,4	0,979
8	20,20	19,04	0,943
9	20,94	21,09	0,993
10	22,22	22,9	0,970

Come si può notare, tutti i modi di vibrare significativi forniti dal programma FEM hanno un riscontro con le frequenze date dall'algoritmo.

La colonna  $f_{\min}/f_{\max}$  esprime un rapporto e quindi la correlazione tra le frequenze dello stesso modo. Non essendo il modello tarato, il termine di correlazione va visto solo come un indicatore temporaneo.

Sui dati di quest'ultimo è stato creato un intervallo di confidenza al 95% ed è stato applicato ai primi sei modi di vibrare della struttura.

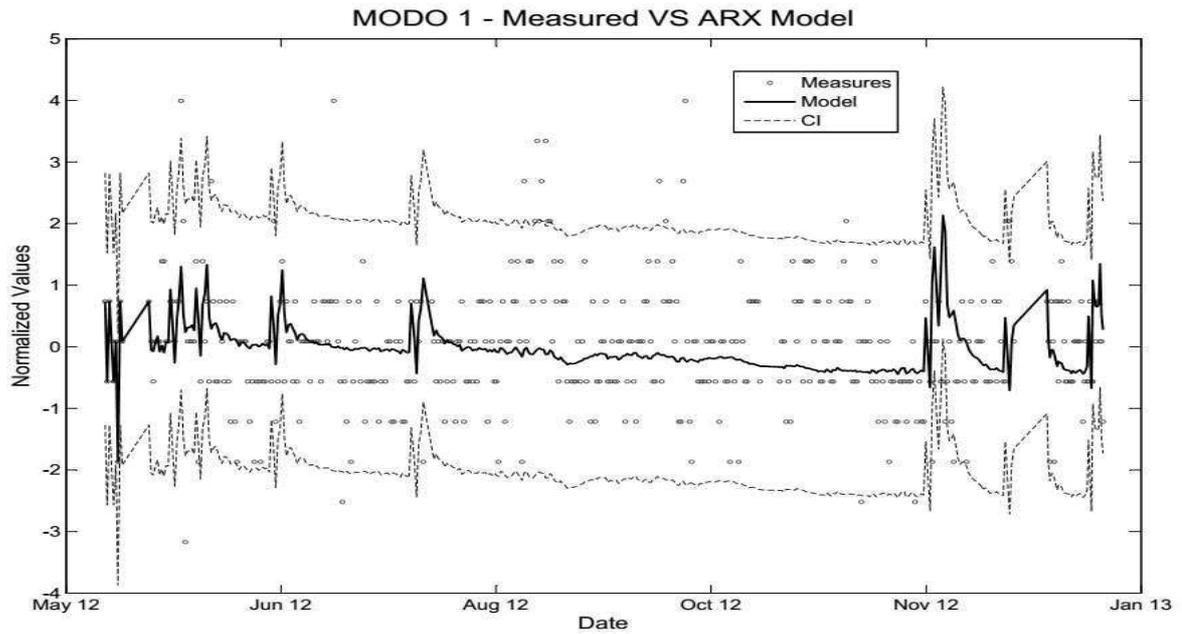


Come si può notare, la distribuzione delle frequenze che si ottiene non è una nuvola di punti, ma le frequenze mostrano una certa ripetitività, cioè sono influenzate dagli intervalli utilizzati per la discretizzazione del dominio delle frequenze adottato nella Frequency Domain Decomposition. Probabilmente infittendo la discretizzazione i punti risultano più diffusi, ma nel campo di strutture quali ponti o edifici tale infittimento non si dimostra vantaggioso al fine della determinazione dei modi di vibrare e ciò che si ha è solo un aggravio degli oneri computazionali.

Tale fenomeno non si verifica con metodi di analisi nel dominio del tempo. Inoltre le frequenze ricavate con algoritmi nel dominio del tempo presentano una distribuzione più chiaramente influenzata da fattori esterni come temperatura ed umidità. Ciò non vuol dire che le frequenze ricavate sulla base di un'analisi FDD siano sbagliate, semplicemente a causa della discretizzazione mostrano in modo meno evidente le variazioni.

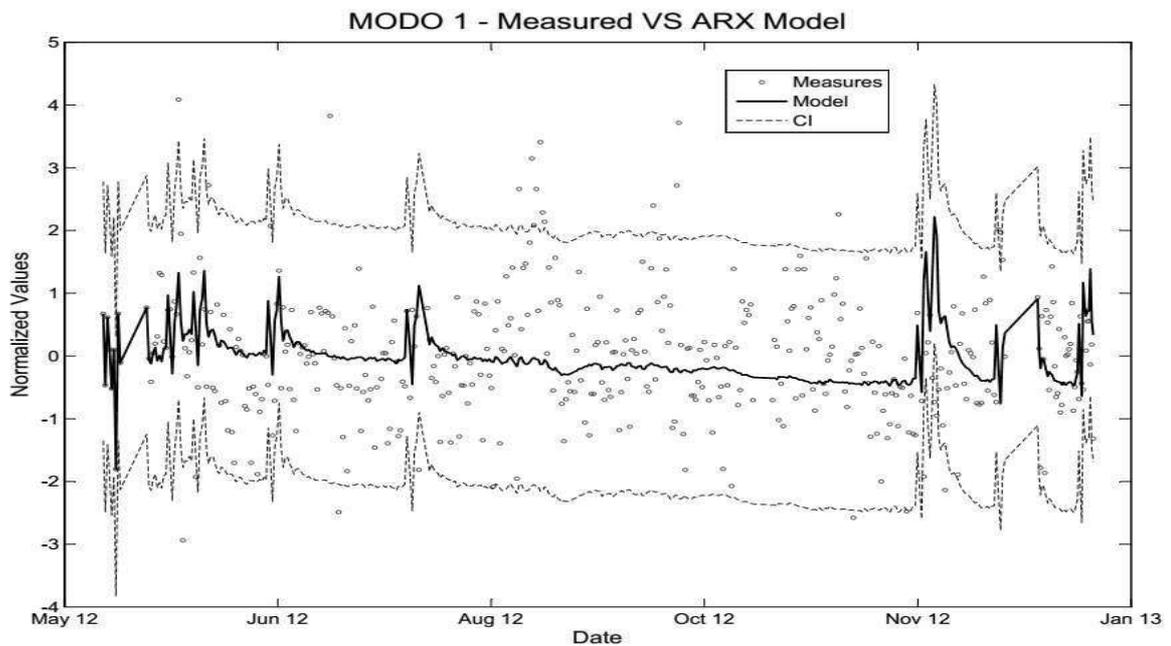
Alle frequenze ottenute tramite l'algoritmo esposto, si potrebbe applicare, ad ogni modo di vibrare, una distribuzione statistica normale, con media zero e variazione standard molto piccola (ad esempio 0,005), così siamo in grado di sfalsare le frequenze di una quantità trascurabile per ogni modo di vibrare. Ciò comunque non risolve il problema non si dimostra necessario in quanto i risultati da algoritmo non creano problemi per una previsione da modello ARX.

Prendiamo come esempio il primo modo di vibrare.



**Figura 34** - Confronto tra le frequenze e previsione da modello ARX

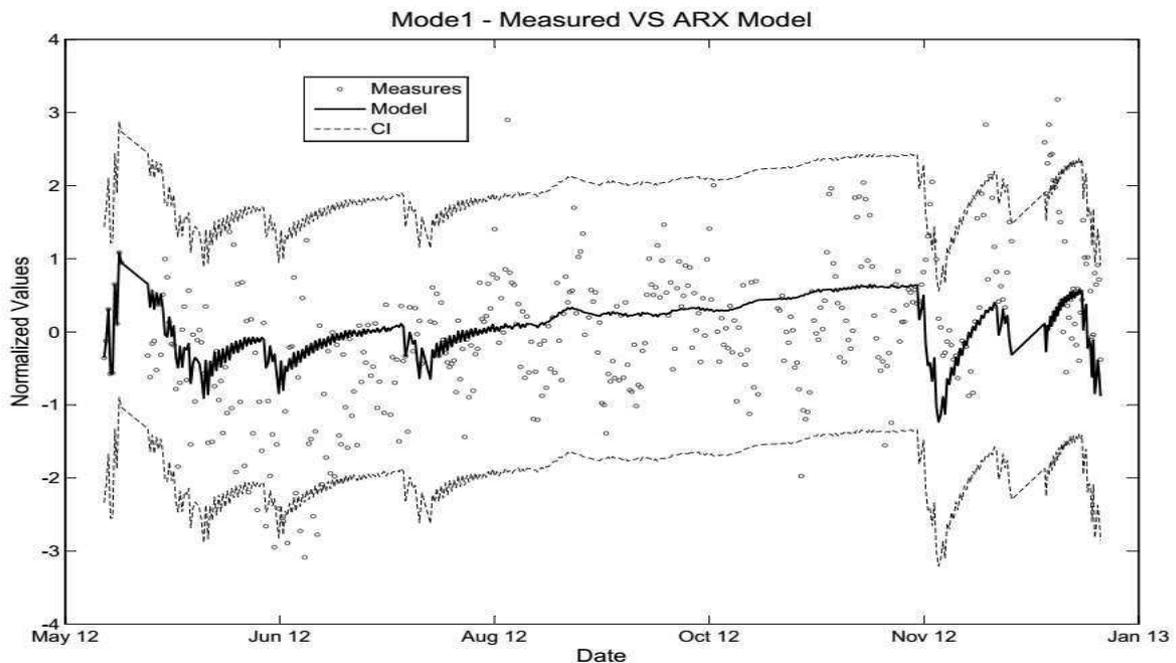
Applicando la distribuzione statistica normale con media zero e variazione standard pari a 0,005 alle frequenze, si ottiene quanto segue



**Figura 35** - Confronto tra le frequenze modificate e previsione da modello ARX

Dal confronto tra figura 34 e 35 si può notare che gli outlier non sono superiori in numero rispetto a quelli ottenuti da algoritmo.

Utilizzando il modello ARX per le frequenze del primo modo di vibrare attente da metodo SSI, si ottiene quanto mostra figura 36.

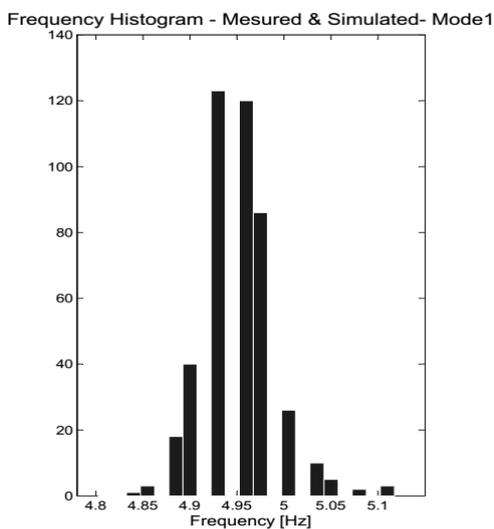


**Figura 36** - Confronto tra le frequenze (metodo SSI) e previsione da modello ARX.

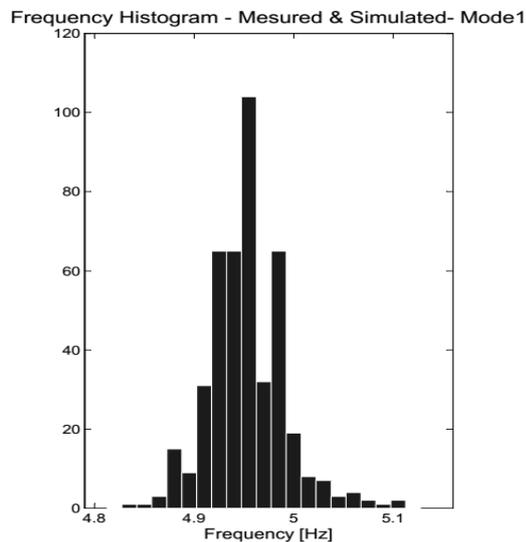
Sebbene apparentemente diversi, gli intervalli di confidenza tra figure 34, 35 e figura 36 mostrano somiglianze. Infatti entrambi gli algoritmi propongono delle frequenze che ripercuotono negli intervalli di confidenza delle forti variazioni e tutti coincidenti negli stessi archi temporali.

Andando a confrontare gli istogrammi di frequenza abbiamo

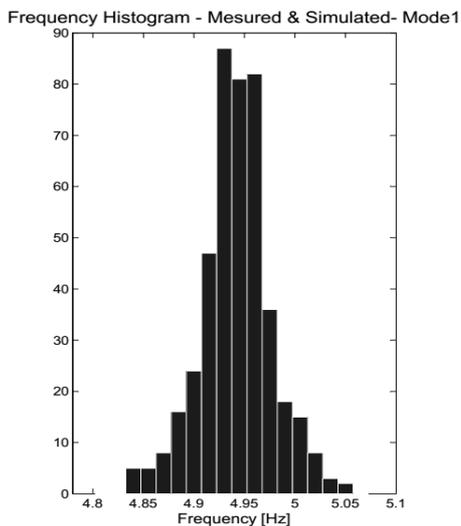
In termini di istogramma di frequenza, per il periodo che va da maggio a marzo abbiamo i seguenti risultati



**Figura 37** - Istogramma di frequenza relativo alle frequenze di figura 32



**Figura 38** - Istogramma di frequenza relativo alle frequenze di figura 33

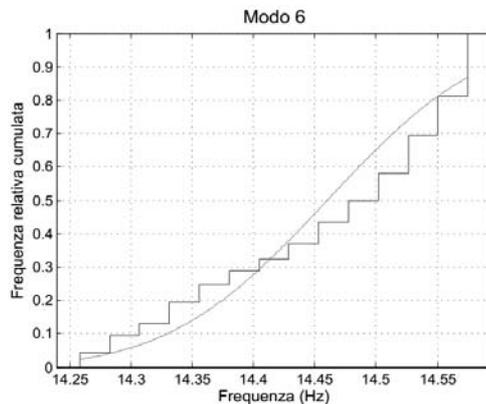
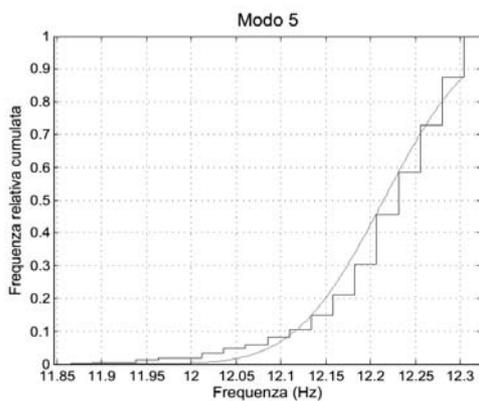
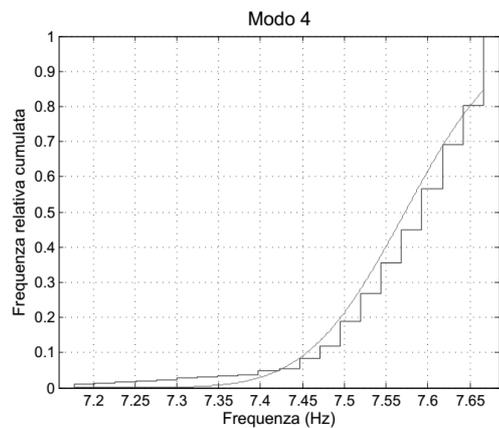
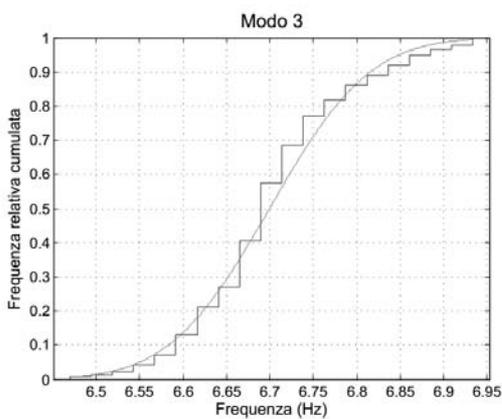
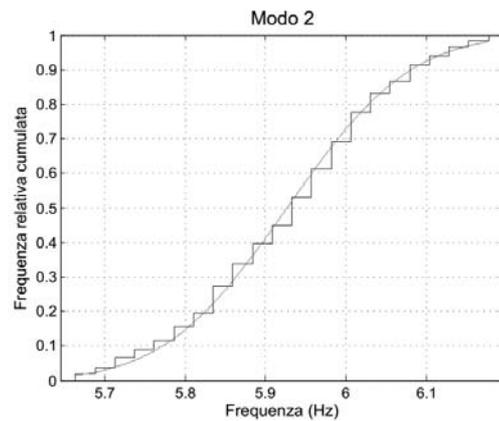
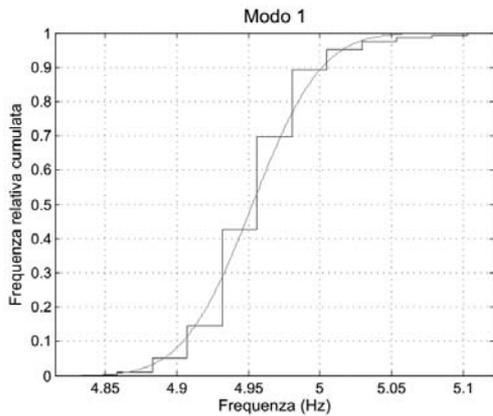


**Figura 39** - Istogramma di frequenza relativo alle frequenze di figura 36

Si può notare che l'istogramma di figura 37 presenta una distribuzione più simile a quella del modello SSI di figura 39.

Per controllare la qualità dei modi di vibrare si è utilizzato un poligono di frequenza cumulata.

Una buona distribuzione di frequenza relativa cumulata è percettibile a vista d'occhio in quanto l'andamento assume una forma simile ad una "S". Sono i primi tre modi di vibrare a presentare una ottima distribuzione.



### 3.1.3 Analisi post FDD con riferimento al ponte di Musile di Piave

Per il caso del ponte di Musile di Piave si era in possesso di 3 monitoraggi di diverse durate. Il procedimento per un numero ristretto di monitoraggi è uguale a quello appena visto per l'analisi di un gran numero di monitoraggi, vanno però prestate alcune attenzioni. Due dei tre monitoraggi avevano circa 65000 righe di dati, l'altro circa 131000. Si è pertanto deciso di frammentarli in sotto-monitoraggi e si è dimostrata buona una frammentazione che ha creato 12 sotto-monitoraggi ognuno da 20000 righe.

Il numero minimo di monitoraggi per ogni sottogruppo è stato posto pari a 3.

Avendo sempre come dati di input il monitoraggio iniziale ed il passo dei monitoraggi si sono fatte alcune prove. Imponendo sempre come monitoraggio iniziale il primo e facendo variare il passo (3, 4 e 6) si è visto che i risultati sono praticamente analoghi. Si è pertanto deciso di considerare un passo di studio di 3.

#### 3.1.3.1 Scissione dei domini modali in un sottogruppo

Una volta determinati i possibili domini modali si passa a controllare se questi sono scindibili. Infatti può verificarsi che al di sopra della soglia di MAC imposta ci siano due modi di vibrare della struttura che si intersecano come accade nella figura 40 attorno alla frequenza di 3Hz.

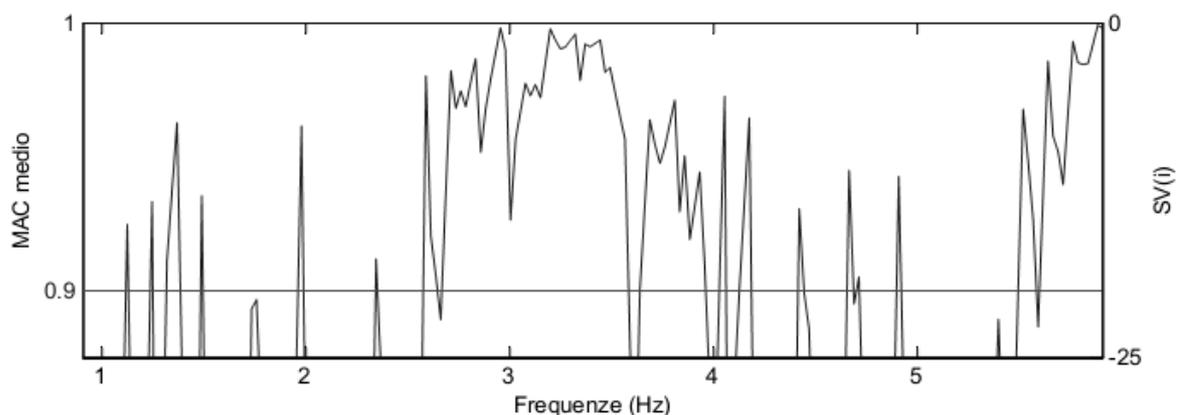


Figura 40 – Presenza di due modi di vibrare ravvicinati attorno ai 3Hz

La figura 40 è relativa all'analisi condotta sul ponte di Musile di Piave. Essa mostra come siamo in presenza di due possibili domini modali molto ravvicinati: uno attorno ai 2,8Hz e l'altro attorno ai 3,2Hz. Alzare la soglia del MAC per dividere i due modi ravvicinati non è una buona soluzione in quanto andrebbe a stringere troppo i domini modali e con probabilità andrebbe anche ad escluderne alcuni di buoni. Quindi la soglia del MAC non verrà alzata, anzi, piuttosto meglio leggermente abbassarla.

Essendo in possesso di 12 sotto-monitoraggi e supponendo di aver creato sottogruppi di 3 monitoraggi ciascuno, siamo in possesso di 4 sottogruppi.

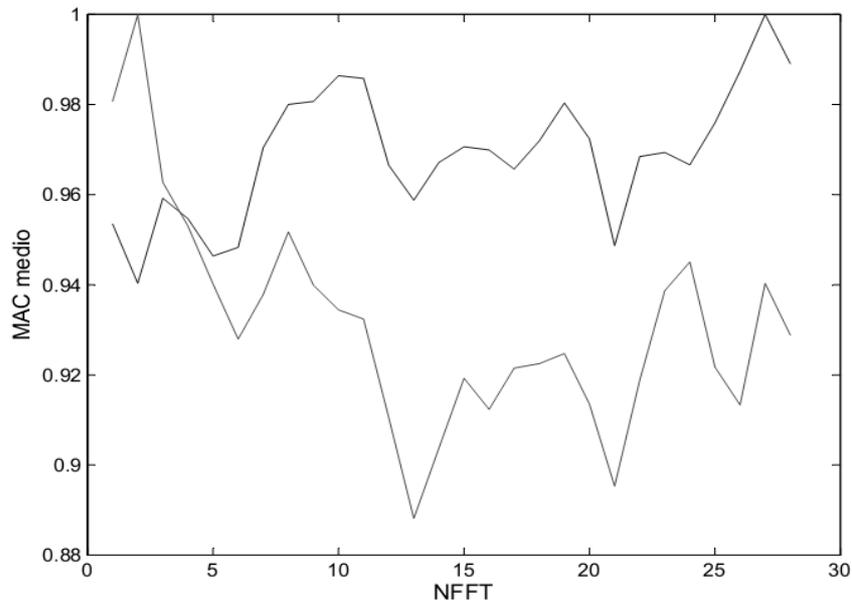
Avendo 4 sottogruppi siamo in possesso di soli 2 andamenti del MAC da cui otterremo un MAC medio (vedi paragrafo 3.1.2.1).

Sulla base di questo MAC medio ed imponendo la soglia del MAC pari a 0,90 e l'ampiezza minima degli intervalli, si viene in possesso dei possibili domini modali. Fatto questo, per scindere eventuali domini modali ravvicinati si è proceduti così.

In tutti i possibili domini modali è stato preso il secondo vettore singolare a partire dall'estremo sinistro ed il secondo a partire dall'estremo di destra. Praticamente ciò vorrebbe dire che se un dominio modale copre l'intervallo di unità di frequenza che va dall'unità 107 alla 152 (che corrisponde in termini di frequenza all'intervallo compreso tra  $107 \cdot 0,0244$  e  $152 \cdot 0,0244$ , cioè tra 2,61Hz e 3,71Hz), i due vettori singolari presi rispettivamente a sinistra e destra sono il numero 108 ed il 151. Entrambi i vettori singolari vengono confrontati con tutti gli altri vettori singolari del loro dominio (da 107 a 152). In questo caso l'operazione di confronto è un semplice prodotto tra vettori e vedrà valori prossimi all'unità se è presente una forte correlazione.

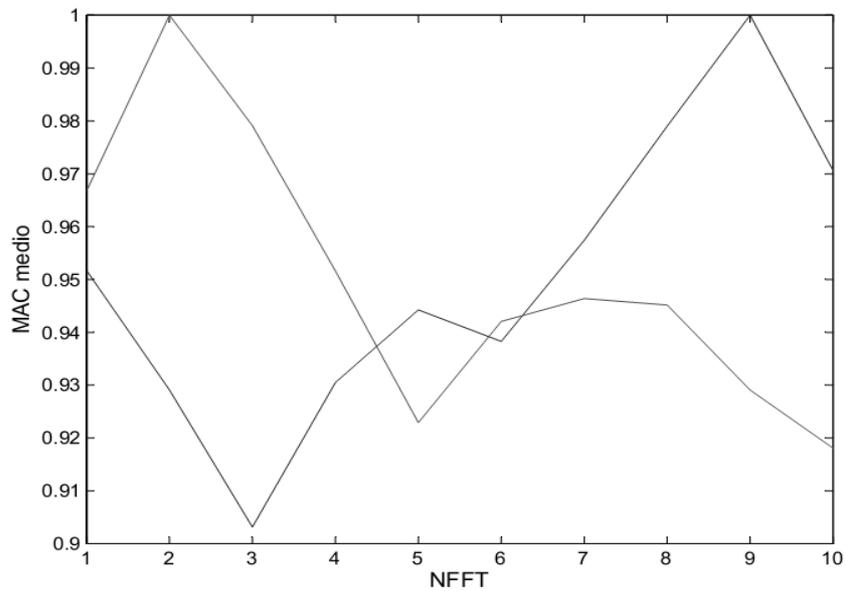
Andando a diagrammare il prodotto del vettore singolare di sinistra con tutti gli altri vettori e quello di destra con tutti gli altri vettori possiamo ottenere sostanzialmente due diversi comportamenti.

Il primo caso è quello in cui il dominio modale contiene un solo modo di vibrare della struttura, pertanto i due diagrammi si intersecheranno svariate volte o manterranno un comportamento quasi parallelo come in figura 41.



**Figura 41** – Andamento parallelo: il dominio non scindibile. Abbiamo un solo modo di vibrare all'interno dell'intervallo in esame

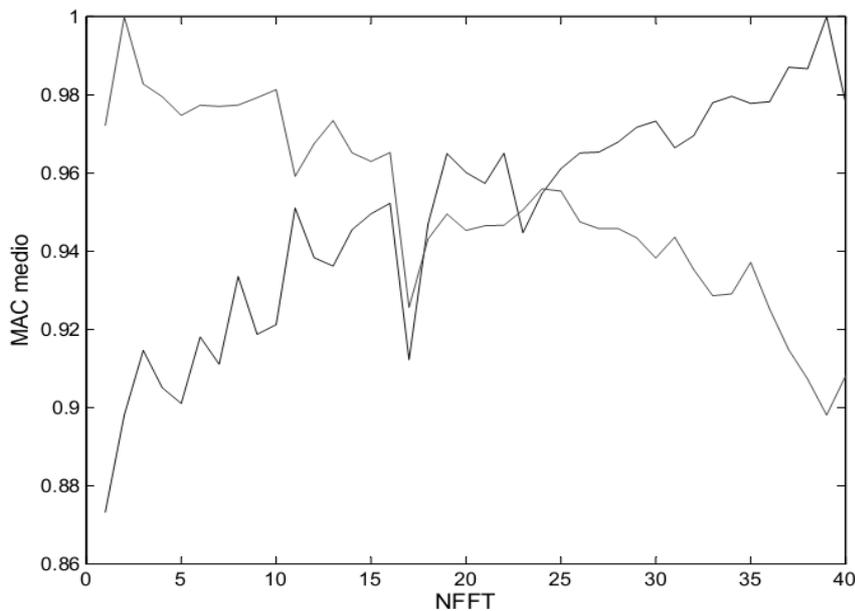
La figura 41 mostra come gli andamenti dei prodotti vettoriali siano quasi paralleli senza quindi individuare due distinti modi di vibrare della struttura.



**Figura 42** – Dimensioni esigue: dominio non scindibile. Abbiamo un solo modo di vibrare all'interno dell'intervallo in esame

La figura 42 mostra come non sia possibile scindere il possibile dominio modale in due possibili domini modali e questo per ragioni dovute alla dimensione: il dominio modale preso in considerazione presenta valori abbondantemente superiori alla soglia di partenza pari a 0,90 imposta al MAC ma non presenta un'estensione sufficientemente ampia affinché possano nascere due possibili domini modali distinti.

In quest'ultimo caso proposto in figura 43, il possibile dominio modale è frutto dell'unione di due modi di vibrare. Questo comporta, come è intuitivo pensare, un andamento di questo tipo



**Figura 43** – L'intervallo in esame è possibile scinderlo in due possibili domini modali.

L'andamento dei prodotti vettoriali riportati sono quelli ottenuti lavorando nell'intervallo di frequenza dato attorno ai 3Hz (vedi figura 40). Come si può notare da figura 43, la zona centrale del grafico vede l'intersezione delle due linee spezzate e quindi è una zona promiscua su cui non si possono trarre delle conclusioni. Le zone laterali invece vedono il distacco delle due curve in modo significativo mantenendo i valori dei prodotti vettoriali superiori del valore imposto. Per la scissione dei domini la soglia di MAC imposta è pari al 98% della soglia di

MAC scelta per creare i possibili domini modali e quindi  $0,98*0,90 = 0,88$ . Un altro importante requisito qui soddisfatto è l'ampiezza di tali zone laterali. Infatti per entrambe le zone le spezzate si mantengono distaccate per più di una quindicina di unità di frequenza, il che fa evidentemente pensare ad una presenza di due domini modali distinti. La quantità minima di N imposta per ritenere le zone laterali come possibili domini modali autonomi è pari al 70% della soglia scelta per la realizzazione precedente dei possibili domini modali e quindi essendo  $N = 8$ , avremo allora  $0,70*8 = 5,6$  che arrotondato diventa 6.

Poiché figura 40 mostra chiaramente il soddisfacimento di questi requisiti, si è proceduti alla scissione dei due domini modali tralasciando la zona promiscua.

La scissione dei domini modali non è fortemente vincolata dalle soglie di MAC ed N. Se abbassando le soglie di MAC ed N si fossero ricavati altri possibili domini modali, per diventarli avrebbero dovuto superare i passaggi di indagine successivi, per cui solo il dominio appena esposto avrebbe superato il vaglio in ogni caso.

### **3.1.3.2 Confronto tra modello ed algoritmo**

A ponte rimosso, ma non ancora smantellato, andammo a eseguire delle misurazioni degli elementi costituenti il ponte per poter eseguire un modello agli elementi finiti con l'obiettivo di poter eseguire un confronto con l'algoritmo appena esposto. I risultati ottenuti sono buoni.

I modi di vibrare ricavati dall'algoritmo e dal programma FEM vengono ora esposti e confrontati.

ALGORITMO

FEM

	MODE PARTICIPATION					
	Mode	Frequency (Hz)	Modal Mass (Engineering)	PF-X (%)	PF-Y (%)	PF-Z (%)
• Hz 2.793						
• Hz 3.243						
• Hz 5.9015	1	3.232E+00	4.312E+01	0.000	0.000	59.112
• Hz 7.1869	2	5.613E+00	9.484E+01	2.724	77.170	0.002
• Hz 12.7881	3	5.695E+00	6.670E+01	0.000	0.005	21.675
• Hz 13.7784	4	7.010E+00	2.062E+01	0.000	0.000	0.134
• Hz 17.5934	5	9.371E+00	5.951E+01	0.000	0.000	0.047
• Hz 18.6802	6	1.167E+01	3.375E+01	0.000	0.000	0.365
• Hz 19.2453	7	1.208E+01	1.266E+01	0.003	0.000	0.028
• Hz 22.3005	8	1.226E+01	1.705E+01	0.001	0.000	2.345
• Hz 22.7051	9	1.256E+01	3.924E+01	64.497	1.066	0.000
• Hz 26.7543	10	1.292E+01	1.588E+01	0.143	0.007	0.000
• Hz 28.2192	11	1.302E+01	1.321E+01	1.801	0.028	0.000
• Hz 30.4339	12	1.326E+01	1.270E+01	0.012	0.017	0.000
• Hz 30.9082	13	1.335E+01	1.709E+01	0.000	0.000	0.011
• Hz 31.8701	14	1.345E+01	1.439E+01	0.035	0.001	0.000
• Hz 33.6321	15	1.366E+01	1.110E+01	0.000	0.000	0.031
	16	1.399E+01	1.703E+01	0.000	0.001	0.001
	17	1.441E+01	5.014E+01	10.050	0.103	0.000
	18	1.458E+01	6.405E+00	0.001	0.000	0.191
	19	1.467E+01	6.244E+00	0.006	0.000	0.004
	20	1.476E+01	2.214E+01	0.006	0.000	0.000
	-----					
	TOTAL MASS PARTICIPATION FACTORS			79.278	78.398	83.947

I modi di vibrare proposti risultano numerosi e questo era prevedibile.

Tra le due diverse analisi abbiamo una certa corrispondenza in termini di frequenze. Non il primo modo di una analisi corrisponderà al primo modo dell'altra, ma ad esempio il primo modo di vibrare fornito dal programma agli elementi finiti corrisponde al secondo modo di vibrare fornito dall'algorithm. Ricordando che il modello proposto non è tarato, possiamo riassumere il tutto con una tabella come segue.

Modo	Frequenze (Hz)		f <sub>min</sub> /f <sub>max</sub>
	Algoritmo	FEM	
1	2,79	-	-
2	3,24	3,23	0,997
3	5,9	5,69	0,964
4	7,19	-	-
5	12,78	12,56	0,983
6	13,78	14,41	0,956

Come si può notare tutti i modi di vibrare forniti dal programma FEM che presentano una percentuale di massa partecipante significativa hanno un riscontro con le frequenze date dall'algorithm. Eccezione si ha per la frequenza pari a 5,61Hz.

Dei primi sei modi di vibrare calcolati con l'algoritmo, il primo con frequenza di 2,79Hz non trova riscontro con il modello FEM in ogni caso questa frequenza deve considerarsi come la frequenza media (rispetto al periodo di osservazione) del primo modo di vibrare.

Le prime sei frequenze fornite dall'algoritmo posso considerarsi le frequenze medie dei primi sei modi di vibrare del ponte esaminato.

### **3.1.4 Analisi post FDD con riferimento ad un ponte autostradale**

Per l'analisi del Ponte Nuovo del Popolo si era in possesso di un gran numero di monitoraggi, quindi il numero di sottogruppi era elevato così come pure i monitoraggi per ogni sottogruppo: si era certi che i modi di vibrare ottenuti sarebbero stati veritieri seguendo il buon senso.

Per il ponte di Musile di Piave le scelte erano pressoché obbligate: i sotto-monitoraggi erano dodici ed il numero di sottogruppi estremamente ridotto. Le ridotte combinazioni ci hanno permesso di notare una ristretta variazione tra le combinazioni date facendo variare il numero di sotto-monitoraggi ed i parametri MAC (intesa come soglia di MAC) ed N. I risultati sono stati comunque buoni.

Per il ponte autostradale sul fiume Mincio ci si è trovati in una situazione intermedia. Eravamo in possesso di 55 monitoraggi e sono stati creati 11 sottogruppi da 5 monitoraggi l'uno.

La differenza sostanziale tra questo ponte e gli altri due è l'uso degli strain gauges (misuratori di deformazioni) piuttosto che degli accelerometri.

Tenendo fisso il numero di monitoraggi per sottogruppo e facendo variare automaticamente i valori dei parametri MAC ed N come esposto ai paragrafi 3.1.2.1 e 3.1.2.2, si giunge alla seguente tabella riassuntiva.

Input			Frequenze medie dei modi di vibrare (Hz)						
Passo	MAC	N	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
5	0,68	4	2,13	4,19	4,64	6,06	-	-	13,37
5	0,68	5	2,13	4,23	4,64	6,06	9,81	-	13,37
5	0,68	6	2,13	4,23	4,64	6,06	9,81	-	13,37
5	0,70	4	2,13	3,97	4,64	6,05	9,81	-	13,37
5	0,70	5	2,13	4,19	4,64	6,08	9,81	-	13,37
5	0,70	6	2,13	4,19	4,64	6,08	9,81	-	13,37
5	0,72	4	2,13	3,97	4,62	6,26	9,87	-	13,57
5	0,72	5	2,13	4,19	4,54	6,26	9,82	12,53	13,57
5	0,72	6	2,13	4,19	4,54	6,08	9,82	12,53	-
5	0,74	4	2,13	4,03	4,62	6,26	9,82	12,56	13,57
5	0,74	5	2,13	4,03	4,54	6,26	9,82	12,53	-
5	0,74	6	2,13	4,03	4,54	6,08	9,82	-	-
5	0,76	4	2,13	4,03	4,60	6,26	9,82	12,56	13,54
5	0,76	5	2,13	4,03	4,96	6,26	9,82	12,53	13,54
5	0,76	6	2,13	4,03	4,96	6,08	9,82	12,53	13,54
5	0,78	4	2,13	4,03	4,62	6,08	9,84	12,50	13,54
5	0,78	5	2,13	4,03	4,62	6,08	9,84	12,50	13,54
5	0,78	6	2,13	4,03	4,62	6,08	9,84	12,50	13,54
5	0,80	4	2,13	3,97	4,62	6,08	9,84	12,52	13,48
5	0,80	5	2,13	4,19	-	6,08	9,84	-	13,48
5	0,80	6	2,13	4,19	-	6,08	9,84	-	13,48

L'algoritmo restituisce questa tabella che consente a colpo d'occhio l'individuazione della banda di maggior interesse per la considerazione dei modi di vibrare. Come si può vedere, il sesto modo viene stranamente non considerato per soglie di MAC basse, mentre compare per soglie più elevate. Questo si spiega col fatto che se avessimo eseguito l'analisi fermandoci alla soglia di MAC = 0,74 avremo avuto quest'altra tabella.

Input			Frequenze medie dei modi di vibrare (Hz)							
Passo	MAC	N	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7	Modo 8
5	0,68	4	2,13	4,19	4,64	6,06	-	-	13,37	22,42
5	0,68	5	2,13	4,23	4,64	6,06	9,81	-	13,37	22,42
5	0,68	6	2,13	4,23	4,64	6,06	9,81	-	13,37	-
5	0,70	4	2,13	3,97	4,64	6,05	9,81	-	13,37	22,42
5	0,70	5	2,13	4,19	4,64	6,08	9,81	-	13,37	22,42
5	0,70	6	2,13	4,19	4,64	6,08	9,81	-	13,37	-
5	0,72	4	2,13	3,97	4,62	6,26	9,87	-	13,57	-
5	0,72	5	2,13	4,19	4,54	6,26	9,82	12,53	13,57	-
5	0,72	6	2,13	4,19	4,54	6,08	9,82	12,53	-	-
5	0,74	4	2,13	4,03	4,62	6,26	9,82	12,56	13,57	-
5	0,74	5	2,13	4,03	4,54	6,26	9,82	12,53	-	-
5	0,74	6	2,13	4,03	4,54	6,08	9,82	-	-	-

Guardando questa tabella ci accorgiamo che in queste circostanze si è aggiunto un ulteriore modo di vibrare con frequenza circa pari a 22,50Hz. Questo ci fa capire che la presenza di un ulteriore modo di vibrare, senza considerare quelli che erano candidati ma non hanno superato il vaglio dei limiti imposti, influiscono sulla permanenza o meno anche degli altri modi di vibrare e se questi ultimi non si presentano in un numero sufficiente rispetto alle analisi condotte, rischiano di essere eliminati. Proprio per questa ragione si consiglia una analisi su ampia ed un paio di analisi mirate al fine di scegliere con esattezza la combinazione che fornirà i modi di vibrare opportuni.

Risulta quindi chiaro che una analisi con una data combinazione delle variabili Passo - MAC - N fornirà determinati modi di vibrare. Ma la stessa analisi inserita assieme ad altre analisi, come nel caso delle tabelle appena esposte, sarà oggetto di ulteriori confronti per cui alcuni modi di vibrare che prima comparivano per quella data combinazione potrebbero non comparire più.

L'algoritmo consente comunque di poter controllare tutti i risultati. Vengono infatti messi a disposizione i risultati di gruppo già "filtrati" come nel caso delle tabelle appena esposte oppure non filtrati con la possibilità di apprezzare tutti i modi di vibrare ricavati per ogni singola combinazione di Passo - MAC - N.

Il modello FEM fornisce i seguenti modi di vibrare

FINAL FREQUENCY RESULTS			
Mode	Eigenvalue	Frequency (rad/s)	Frequency (Hertz)
1	2.93731396E+02	1.71385938E+01	2.72769192E+00
2	1.15184766E+03	3.39388813E+01	5.40154071E+00
3	1.42631748E+03	3.77666186E+01	6.01074403E+00
4	1.50066778E+03	3.87384535E+01	6.16541637E+00
5	2.06144589E+03	4.54031484E+01	7.22613551E+00
6	2.42842729E+03	4.92790755E+01	7.84300846E+00
7	2.72664115E+03	5.22172495E+01	8.31063337E+00
8	3.00277694E+03	5.47975997E+01	8.72130887E+00
9	3.22194550E+03	5.67621838E+01	9.03398213E+00
10	4.81154163E+03	6.93652768E+01	1.10398267E+01
11	5.25626151E+03	7.25000794E+01	1.15387460E+01
12	5.76043713E+03	7.58975437E+01	1.20794692E+01 [Not Converged]
13	5.81228383E+03	7.62383357E+01	1.21337080E+01 [Not Converged]
14	6.02896625E+03	7.76464182E+01	1.23578113E+01 [Not Converged]
15	6.06711575E+03	7.78916924E+01	1.23968479E+01
16	6.43380496E+03	8.02110027E+01	1.27659776E+01
17	6.69251030E+03	8.18077643E+01	1.30201101E+01
18	6.95325814E+03	8.33861987E+01	1.32713257E+01
19	7.05314975E+03	8.39830325E+01	1.33663148E+01
20	7.28946547E+03	8.53783665E+01	1.35883891E+01

Confrontando il modello non tarato con l'algorithmo abbiamo la seguente tabella riassuntiva

Modo	Frequenze (Hz)		f <sub>min</sub> /f <sub>max</sub>
	Algorithmo	FEM	
1	2,13	2,73	0,780
2	4,19	-	-
3	4,54	5,4	0,841
4	6,26	6,16	0,984
5	9,82	9,03	0,920
6	12,53	12,76	0,982
7	13,57	13,58	0,999

A differenza dei due ponti esaminati precedentemente, sebbene pure in questo caso il modello non è tarato, esso presenta fin da subito frequenze più in linea con i risultati forniti dall'algorithmo.

---

## CONCLUSIONI

Le conclusioni che si possono trarre sono le seguenti:

- Utilizzare il metodo FDD piuttosto che il metodo SSI si dimostra più vantaggioso in termini di onere computazionale.
- Gli output da metodo FDD si presentano facilmente interpretabili anche da un punto di vista grafico.
- L'algoritmo proposto consente di ricavare correttamente i modi di vibrare. La discretizzazione del dominio della frequenza, sebbene possa sembrare vincolante, in realtà non lo è stato.
- L'algoritmo impiegato si dimostra efficiente per l'analisi dinamica di ponti e si sta riconfermando anche per l'analisi di edifici storici.  
È infatti in corso un monitoraggio continuo sull'arena di Verona ed in special modo all'ala dell'arena. L'algoritmo è capace di cogliere senza problemi i modi richiesti eccezione fatta per il modo torsionale in quanto di uno dei sei sensori dell'ala dell'arena è andato perso il segnale.

Si è notato che l'uso degli estensimetri per la raccolta dei segnali da analizzare ha portato buoni risultati sebbene sia necessaria una pulizia del segnale prima di affrontare le analisi, cosa invece non necessaria utilizzando gli accelerometri. Gli estensimetri hanno comunque il vantaggio di essere più a buon mercato degli accelerometri.



---

## BIBLIOGRAFIA

### Metodo SSI

- [1] Tohru Katayama, "*Subspace Methods for Sistem Identification*", 2005, Japan.
- [2] Ah Lum Hong & Raimondo Betti, "*Weighting Matrices and Model Order Determination in Stochastic System Identification for Civil Infrastructure Systems*", 2010, Columbia University, U.S.A.
- [3] Peter Van Overschee & Bart De Moor, "*Subspace Identification for linear systems*", Katolieke Universiteit Leuven, Belgium
- [4] Rune Brinker & Palle Andersen, "*Understuding Stochastic Subspace Identification*", Department of Structural and Environmental Engineering & Structural Vibration Solutions A/S, Denmark.
- [5] Mats Viberg, "*Subspace-Based Methods for the Identification of Linear Time-Invarint Systems*."

## Metodo FDD

- [6] Marcoandrea Marsura, tesi di laurea: "*Identificazione dinamica e monitoraggio strutturale di tre impalcati da ponte*", Dipartimento di ingegneria civile, edile ed ambientale, Università degli studi di Padova, Italia.
- [7] Islami K., Enhanced system identification and automatic SHM of bridge structures, Ph.D. Thesis, University of Padua, 2013, Italy.
- [8] Rune Brinker, Department of Civil Engineering, University of Aalborg, "*Automated Frequency Domain Decomposition for Operational Modal Analysis*", Denmark.
- [9] Alberto Bertoni & Giuliano Grossi, "*Elaborazione numerica dei segnali*", Università degli studi di Milano, Italia.
- [10] C.Gentile, Department of Structural Engineering, Politecnico di Milano, "*Modal and Structural identification of a R.C. arch bridge*", 2005, Italia.
- [11] R.Brinker, C.E.Ventura & P.Andersen, "*Damping estimation by Frequency Domain Decomposition*", 2001.
- [12] Vincenzo Gattulli & Marco Agnifili, Tesi di laurea: "*Identificazione di un modello sperimentale di un cavo sospeso in regime di piccole oscillazioni*", 2002, Italia.
- [13] Edwin Reynders, K.U.Leuven, Department of civil Engineering, "*Uncertainty quantification in Operational Modal Analysis: application to a damaged pre-stressed concrete bridge*", Belgium.

**FDD automatico ed analisi post-FDD**

- [14] CRainieri, G.Fabbricino e E.Cosenza, Structural and Geotechnical Dynamic Lab *StreGa* , University of Molise; Department of Structural Engineering, University of Naples Federico II, "*Fully automated OMA: an opportunità for smart SHM systems*", Italia.
- [15] CRainieri, G.Fabbricino e E.Cosenza, Structural and Geotechnical Dynamic Lab *StreGa* , University of Molise; Department of Structural Engineering, University of Naples Federico II, "*Identificazione dinamica autonoma, problemi e prospettive di applicazione al monitoraggio strutturale in zona sismica*", Italia.
- [16] Fulvio Busatta, Tesi di laurea: "*Dynamic monitoring and automated modal identification of large structures: methodological aspects and application to a historic iron bridge*", 2012.