



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Anyoni non-abeliani e computazione quantistica

Relatore

Prof. Pieralberto Marchetti

Laureando

Arturo de Giorgi

Anno Accademico 2017/2018

Sommario

Un problema cruciale per la computazione quantistica è la protezione dal fenomeno della decoerenza che distrugge la natura vettoriale della sovrapposizione quantistica, che viene esplicitamente usata nel processo di calcolo. Un tentativo di protezione è quello di utilizzare una natura topologica delle operazioni di calcolo. Una implementazione concreta di tale idea si avvale di anyoni non-abeliani, eccitazioni particellari che soddisfano una statistica di treccia non-abeliana, impiegata nel definire le operazioni. Nella tesi si presentano brevemente i concetti fondamentali della computazione quantistica e della teoria degli anyoni non-abeliani, commentando poi l'utilizzo di quest'ultimi nella protezione dalla decoerenza nel calcolo quantistico.

Indice

1	Gli anyoni e le loro caratteristiche	2
1.1	Scambio di particelle identiche	2
1.1.1	Bosoni e Fermioni	2
1.1.2	Gli anyoni	3
1.2	Il gruppo delle trecce	4
1.2.1	Rappresentazione del gruppo delle trecce nel caso anyonico	6
1.3	Fusione fra anyoni	6
1.4	Gli anyoni di Fibonacci e le matrici F e R	8
1.4.1	Gli alberi di fusione	8
1.4.2	Cambi di base: la matrice F	9
1.4.3	La matrice R e la rotazione fra gli anyoni	11
1.4.4	Operazioni combinate di intreccio	13
1.5	Anyoni emergenti	15
2	Basi di computazione quantistica	18
2.1	Applicazioni della computazione quantistica	18
2.2	Processo di computazione quantistica	19
2.3	Il <i>qubit</i>	19
2.3.1	Porte logiche a qubit singolo e multiplo	20
2.4	Errori ed ostacoli per la computazione	21
2.4.1	Errori sistematici	22
2.4.2	Errori casuali: ambiente e decoerenza	22
3	Anyoni come base per la computazione quantistica	23
3.1	Processo di computazione con quasiparticelle	23
3.2	Stabilità e protezione dagli errori con l'uso di quasiparticelle	24
3.3	Errori e problemi per la computazione con quasiparticelle	25
3.4	Computazione con gli anyoni di Fibonacci	25
3.4.1	Introduzione dei qubit	25
3.4.2	Intreccio ed operazioni unitarie	26
3.4.3	Porte logiche a due qubit	26
3.4.4	Altri esempi di operazioni su qubit	27
4	Conclusioni	29
	Appendici	30
A	Calcolo della matrice F per gli anyoni di Fibonacci	31
B	Calcolo della matrice R per gli anyoni di Fibonacci	33

Capitolo 1

Gli anyoni e le loro caratteristiche

"Since interchange of two of these particles can give *any* phase, I will call them generically anyons."

— Frank Wilczek

Alla base della meccanica statistica quantistica vi è la distinzione delle particelle in due classi: bosoni e fermioni. Le particelle appartenenti a queste classi obbediscono a leggi statistiche diverse, che danno luogo a fenomeni fisici assai differenti. Tuttavia in opportune circostanze, possono esistere particelle che rientrano in classi diverse dalle due precedenti e che verranno introdotte in questa sezione: gli anyoni.

1.1 Scambio di particelle identiche

1.1.1 Bosoni e Fermioni

Cominciamo con l'esaminare da dove provenga la distinzione fra bosoni e fermioni. Il principio cardine per quello che seguirà è il *Principio di indistinguibilità*, secondo il quale due particelle quantistiche *identiche* (cioè che hanno le stesse proprietà indipendentemente dallo stato in cui si trovano) sono indistinguibili fra loro. Esaminiamone le conseguenze nel seguente caso: supponiamo di avere due particelle identiche *1* e *2* nello spazio 3-dimensionale; lo stato sarà descritto da una funzione d'onda dipendente da entrambe le particelle che chiameremo $\psi_0(1, 2)$. Supponiamo ora di voler effettuare uno scambio delle due particelle: in pratica idealmente si prendono le particelle e adiabaticamente (in modo da non perturbare il sistema) le si spostano (ad esempio facendole ruotare in senso antiorario) finché una non occupa il posto dell'altra (Figura 1.1(a)). Siccome le particelle sono indistinguibili, lo stato raggiunto e quello iniziale sono equivalenti e produrranno gli stessi effetti fisici; siccome uno stato puro matematicamente è espresso dalla funzione d'onda normalizzata a meno di una fase, la nuova funzione d'onda sarà uguale a quella di partenza a meno di una fase α :

$$\psi_0(1, 2) \rightarrow \psi_1(2, 1) = e^{i\alpha}\psi_0(1, 2) \quad (1.1)$$

A questo punto eseguiamo di nuovo l'operazione di scambio per ritornare alla configurazione di partenza (Figura 1.1(b)). Ancora una volta per lo stesso ragionamento di prima la funzione d'onda acquisirà una fase e, poichè viene eseguita la stessa operazione, la fase che verrà aggiunta sarà la stessa di prima.

$$\psi_1(2, 1) \rightarrow \psi_2(1, 2) = e^{i\alpha}\psi_1(2, 1) = e^{i(2\alpha)}\psi_0(1, 2) \quad (1.2)$$

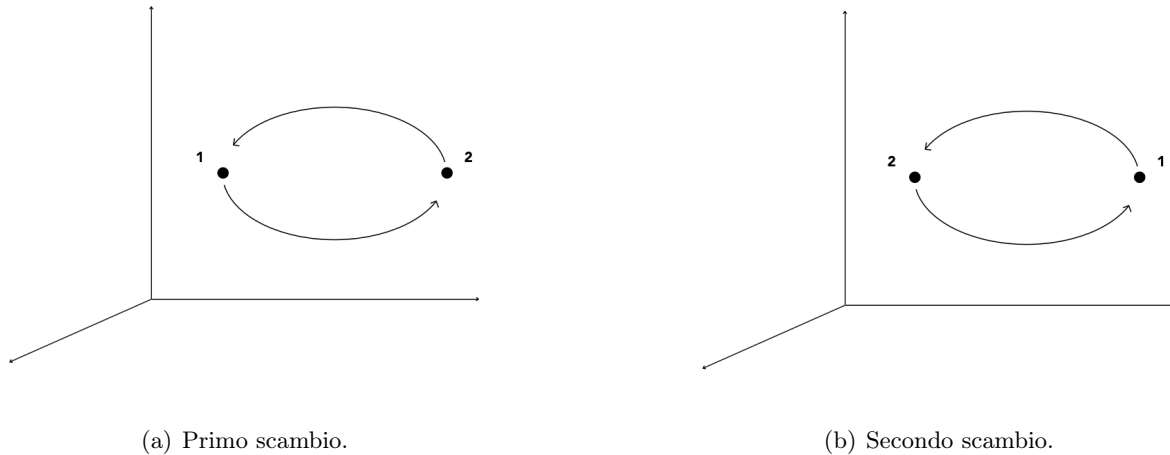


Figura 1.1: Rappresentazioni degli scambi fra particelle identiche.

Consideriamo ora le traiettorie chiuse che hanno compiuto le due particelle; in uno spazio tridimensionale queste possono essere contratte con continuità senza farle intersecare fino ai rispettivi punti di partenza: topologicamente parlando questa operazione riflette il fatto che dopo i due scambi è come se le particelle non si fossero mai mosse dal loro punto di partenza. Ne segue che la funzione d'onda iniziale e finale saranno identiche:

$$\psi_2(1, 2) = \psi_0(1, 2) \rightarrow e^{i(2\alpha)} = 1 \quad (1.3)$$

Quindi a meno di periodicità in α , i possibili valori sono $\alpha = 0$ o $\alpha = \pi$. Di conseguenza la funzione d'onda per scambio di particelle identiche può essere simmetrica o antisimmetrica: le particelle con tale caratteristica sono, rispettivamente, quelle che chiamiamo bosoni e fermioni.

Riprendiamo il discorso fatto, ma generalizziamolo per N particelle, esprimendo la cosa da un punto di vista topologico. Se le particelle che considero sono distinguibili allora una volta compiuto il ciclo completo di scambio posso considerare le loro traiettorie chiuse nello spazio 3-dimensionale; queste possono essere deformate nello spazio, contraendole fino al punto stesso in cui partono ed arrivano le particelle, ottenendo una traiettoria banale: la cosa è equivalente al dire che le particelle non si sono mai mosse ed il sistema è il medesimo di quello di partenza. Se invece (come nell'esempio di prima) sono indistinguibili, allora le varie traiettorie cadono in classi topologiche che corrispondono agli elementi del gruppo delle Permutazioni S_N , che rappresentano tutte le possibili permutazioni fra le N particelle che dalle posizioni iniziali passano alle posizioni finali. In questa visione, bosoni e fermioni sono il modo con cui questo gruppo agisce sullo spazio delle funzioni d'onda del sistema.

1.1.2 Gli anyoni

La derivazione della distinzione fra bosoni e fermioni è stata possibile anche senza soffermarsi troppo sulla questione topologica delle traiettorie. Tuttavia se ad esempio si passa da tre a due dimensioni, la questione diventa essenziale. Infatti se in uno spazio bidimensionale si scambia una particella con un'altra identica, le traiettorie che compiono non possono essere contratte fino a farle diventare banali (come nel caso precedente) senza che queste si intersechino (vedi Fig.1.2). Se le particelle non possono intersecarsi, ne segue che effettuando un giro completo la funzione d'onda finale potrebbe essere diversa (in termini di fase) rispetto a quella iniziale.



Figura 1.2: Scambio di due particelle identiche in due dimensioni.

Vediamo quali sono le conseguenze. Consideriamo come prima due particelle identiche con funzione d'onda iniziale $\psi_0(1, 2)$ ed effettuiamo un primo scambio: come nel caso tridimensionale l'indistinguibilità delle particelle porterà alla stesso stato a meno di una fase θ per la funzione d'onda che lo descrive.

$$\psi_0(1, 2) \rightarrow \psi_1(2, 1) = e^{i\theta} \psi_0(1, 2) \quad (1.4)$$

Adesso si esegue di nuovo l'operazione di scambio acquisendo un'altra fase θ , ma stavolta, per le considerazioni fatte sulla non contraibilità delle due traiettorie, la funzione d'onda finale non necessariamente sarà uguale a quella di partenza.

$$\psi_1(2, 1) \rightarrow \psi_2(1, 2) = e^{i(2\theta)} \psi_0(1, 2) \quad (1.5)$$

Il caso in cui $\theta = 0$ o $\theta = \pi$ corrisponde al caso dei bosoni e dei fermioni. Le particelle che invece acquisiscono una fase *qualunque* sono chiamate *anyoni*, dall'inglese **anyons** (da "any", *qualunque*) così battezzate da Frank Wilczek [1]); la fase θ è chiamata *angolo statistico* ed è il parametro che definisce il comportamento statistico dei corrispondenti anyoni. Le classi topologiche delle traiettorie che sono coinvolte in questo caso non sono più caratterizzati da elementi di S_N , ma sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi del *gruppo delle trecce* B_N , come discusso nel prossimo paragrafo.

1.2 Il gruppo delle trecce

Un elemento del gruppo delle trecce può essere rappresentato graficamente come l'insieme delle linee d'universo delle N particelle che partono dalle posizioni iniziali delle particelle e terminano in quelle finali in uno spazio a 2+1 dimensioni (spazio e tempo); ovviamente ci sono più traiettorie che possono partire ed arrivare negli stessi punti che tuttavia sono differenti per il percorso preso: per questo motivo un elemento del gruppo delle trecce è costituito da una classe di equivalenza di queste traiettorie; fissati i punti di partenza e di arrivo, tale classe racchiude quindi al suo interno tutte le traiettorie omeomorfe fra loro. Per rappresentare quindi un elemento del gruppo si possono disegnare delle linee dal basso verso l'alto (evoluzione nel tempo), corrispondenti alle traiettorie delle particelle. In questi disegni bisogna però fare attenzione alla sovrapposizione delle traiettorie quando si scambiano le particelle, specificando quale traiettoria passa "sopra" e quale "sotto": tale distinzione corrisponde ad uno scambio delle particelle in senso orario o antiorario.

Il gruppo delle trecce può essere definito algebricamente attraverso una famiglia di generatori σ_i ($1 \leq i \leq N - 1$). Nel nostro modello questi generatori rappresentano uno scambio in senso orario delle particelle i e $i + 1$, come mostrato in Figura 1.3; il loro inverso σ_i^{-1} rappresenta invece uno scambio in senso antiorario.

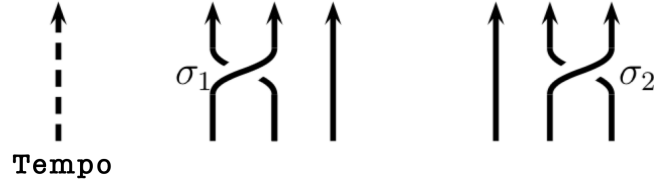


Figura 1.3: Esempio di rappresentazione di scambi che coinvolgono 3 particelle.

La moltiplicazione di due elementi del gruppo corrisponde all'esecuzione di scambi successivi nelle traiettorie delle particelle coinvolte. Come il gruppo delle permutazioni, il gruppo delle trecce è non abeliano (considerando $N \geq 3$); un esempio grafico di ciò è illustrato in Figura 1.4.

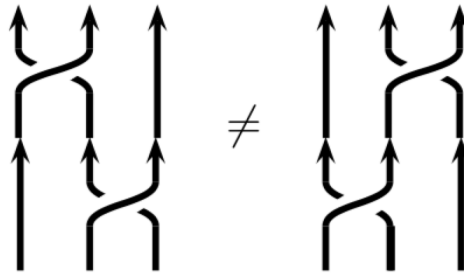


Figura 1.4: Esempio in cui si vede chiaramente che $\sigma_1\sigma_2 \neq \sigma_2\sigma_1$ e quindi che B_N non è abeliano.

Algebricamente il gruppo è definito dalle seguenti relazioni fra i generatori, $\forall i, j = 1, 2, \dots, (N - 1)$:

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \quad t.c. \quad |i - j| \geq 2 \tag{1.6}$$

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \tag{1.7}$$

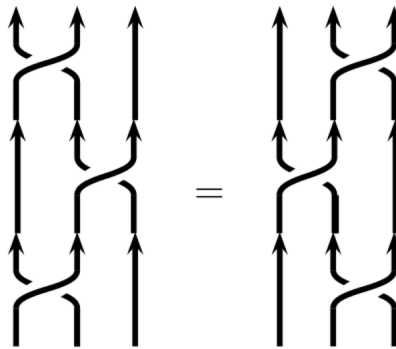


Figura 1.5: Esempificazione grafica della relazione in Equazione 1.7.

L'elemento che rende il gruppo delle trecce (B_N) estremamente diverso dal gruppo delle permutazioni (S_N) sta nel fatto che $\sigma_i^2 \neq 1$. S_N è un gruppo finito siccome il numero degli elementi del gruppo è pari a $|S_N| = N!$, corrispondenti a tutte le possibili permutazioni. Al contrario B_N è infinito anche solo con 2 particelle, proprio grazie al fatto che effettuare due volte uno scambio fra due particelle non è equivalente all'identità (mentre lo è in S_N).

1.2.1 Rappresentazione del gruppo delle trecce nel caso anyonico

Definito il gruppo bisogna anche specificare come effettivamente questo vada ad agire sugli stati del sistema nel corso dell'evoluzione.

Come detto nella Sezione 1.1.2, quando una particella è scambiata con un'altra la funzione d'onda acquista una fase $e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, fornendo la rappresentazione unidimensionale del gruppo⁽¹⁾ delle trecce. Generalizzando la cosa per N particelle, la rappresentazione di un elemento del gruppo sarà data da un fattore di fase $e^{in\theta}$, dove n corrisponde al numero di scambi (orari meno antiorari) che le due particelle compiono. Questo tipo di rappresentazione unidimensionale è chiaramente Abeliano, dal momento che non è rilevante l'ordine con cui le fasi vengono moltiplicate fra loro. Nonostante ciò è possibile avere una struttura abbastanza complessa avendo a disposizione n_p particelle distinte fra loro; avendo quindi una particella a ed una particella b , sarà definito un angolo statistico θ_{ab} differente a seconda del tipo di particelle coinvolte.

La questione diventa più interessante quando si passa ad una statistica non-Abeliana che corrisponde a rappresentazioni di dimensioni maggiori rispetto a quella unidimensionale trattata. In questo caso, fissate le coordinate, avremo uno spazio di Hilbert degenere che sarà descritto da una base ortonormale ψ_α , con $\alpha = 1, \dots, g$ e con g la degenerazione dello spazio che in generale dipenderà dal numero N di particelle coinvolte; lo scambio di due particelle non porterà più ad una semplice moltiplicazione della funzione d'onda per una fase; in generale le nuove funzioni d'onda deriveranno da combinazioni lineari delle precedenti funzioni d'onda tramite degli opportuni coefficienti. Se ad esempio scambiamo la particella 1 con la 2 (σ_1) avremo che:

$$\psi_\alpha \rightarrow [\rho(\sigma_1)]_{\alpha\beta} \psi_\beta \quad (1.8)$$

dove $\rho(\sigma_1)$ è la rappresentazione del gruppo, corrispondente ad una matrice unitaria $g \times g$ che definisce una trasformazione unitaria nello spazio degenere. Se consideriamo adesso lo scambio della particella 2 con la 3, questa sarà definita come in Equazione 1.8 tramite una matrice $\rho(\sigma_2)$. Se $\rho(\sigma_1)$ e $\rho(\sigma_2)$ non commutano (vedi Equazione 1.9) allora la statistica è non-Abeliana.

$$[\rho(\sigma_1)]_{\alpha\beta} [\rho(\sigma_2)]_{\beta\gamma} \neq [\rho(\sigma_2)]_{\alpha\beta} [\rho(\sigma_1)]_{\beta\gamma} \quad (1.9)$$

1.3 Fusione fra anyoni

Per introdurre il concetto di *fusione fra anyoni* consideriamo come esempio la combinazione dello spin di una coppia di elettroni: questi sono equivalenti ad una particella con spin complessivo 0 o 1. Le conseguenze di questo accoppiamento comportano un cambiamento della statistica da fermionica a bosonica e le conseguenze sono fisicamente molto importanti (si pensi alla superconduttività in cui coppie di elettroni si legano e sono assimilabili ad un'unica particella). Vorremmo quindi dato un sistema di anyoni poter effettuare trasformazioni di questo tipo per generare nuovi anyoni con statistiche differenti. In analogia con l'esempio dello spin, potremmo ad esempio considerare due

¹Si ricorda in generale che dato un gruppo G ed uno spazio vettoriale V , la *rappresentazione del gruppo G su V* è una trasformazione lineare:

$$g \in G \mapsto \rho(g) : V \rightarrow V$$

tale che:

$$\begin{aligned} g_1, g_2 \in G &\mapsto \rho(g_1 \circ g_2) = \rho(g_1) \circ \rho(g_2) \\ \rho(\mathbf{1}) &= \mathbf{1}_V \end{aligned}$$

anyoni con statistica θ e legarli: in questo caso il nuovo anyone possiederebbe un angolo statistico pari a 4θ .

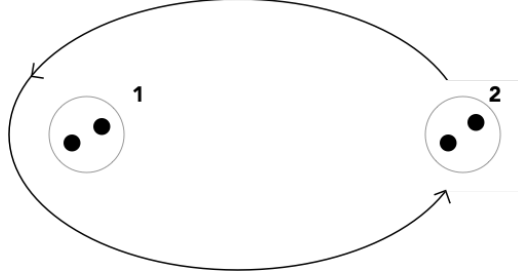


Figura 1.6: Esempificazione di scambio successivo alla fusione.

Tuttavia potrebbe non essere realizzabile un legame stabile fra i due anyoni, ma li si potrebbe portare abbastanza vicini (in modo tale che la loro distanza sia molto più piccola rispetto a quella con gli altri anyoni) da poterli considerare come un'unica particella i cui numeri quantici (incluso quello topologico) sono ottenuti combinando i numeri quantici precedenti. La formazione di un nuovo tipo di anyone unendo insieme altri due anyoni è chiamata *fusione*. Nel caso Abeliano la fusione fra due anyoni è univoca; nel caso invece non-Abeliano invece la situazione è più complessa. Proprio come una coppia di elettroni appaiati può avere spin complessivo pari a 0 o 1, così la fusione fra due anyoni può portare a risultati distinti se gli anyoni sono non-Abeliani.

In generale, denotando con ϕ_a un anyone di tipo a e con \times la fusione fra due anyoni, sarà valida una relazione del tipo:

$$\phi_a \times \phi_b = \sum_c N_{ab}^c \phi_c \quad (1.10)$$

In tale formalismo N_{ab}^c è un numero naturale che indica la molteplicità di modi con cui è ottenibile ϕ_c tramite fusione, mentre i simboli \times che derivano dalla sommatoria scandiscono i possibili canali di fusione di $\phi_{a,b}$. Questo significa che un anyone di tipo c può essere ottenuto per fusione solo se il rispettivo coefficiente $N_{ab}^c \neq 0$. Nel caso Abeliano la fusione è univocamente determinata e varrà quindi:

$$N_{ab}^c = \delta_{c'}^c \quad (1.11)$$

dove c' è l'unico anyone in cui possono fondere a e b . Al contrario, nel caso non-Abeliano possono esistere più c tale per cui N non sia nullo: in tal caso la fusione di due anyoni non è determinata univocamente.

Quando un anyone con statistica α è fuso con uno con statistica $-\alpha$, la particella risultante ha statistica $\theta = 0$; una particella così ricavata viene chiamata *particella banale* e viene indicata con $\mathbf{1}$. Considerando le proprietà topologiche, così come i bosoni agli effetti della statistica non banale sono equivalenti all'assenza di particelle, così $\mathbf{1}$ è anche chiamata il *vuoto*. Il modo con cui fondono con una particella x dà ragione di questo nome, infatti vale sempre che:

$$\mathbf{1} \times x = x \times \mathbf{1} = x \quad (1.12)$$

Un esempio di sistema di anyoni non abeliano è quello di *Ising*, composto da tre tipi distinti di anyoni denotati con $\mathbf{1}$ (comune a tutti i sistemi), σ e ψ che rispettano le seguenti regole di fusione:

$$\begin{aligned} \sigma \times \sigma &= \mathbf{1} + \psi \\ \sigma \times \psi &= \sigma \\ \psi \times \psi &= \mathbf{1} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Ovviamente considerando regole di fusione diverse si possono ottenere sistemi assai differenti; uno di questi, detto *di Fibonacci*, verrà trattato nel dettaglio nella prossima sezione.

1.4 Gli anyoni di Fibonacci e le matrici F e R

Continuiamo la trattazione con un caso particolare di un sistema di anyoni; un sistema anyonico per non essere banale deve contenere almeno un altro anyone oltre a $\mathbf{1}$. Il sistema anyonico di Fibonacci è caratterizzato da sole due particelle: la particella banale $\mathbf{1}$ e una particella non banale τ . Gli anyoni τ sono chiamati *anyoni di Fibonacci*. Una caratteristica importante di τ sta nel fatto che la rispettiva antiparticella è τ stessa (così come $\mathbf{1}$).

I canali di fusione per questo sistema sono dati da:

$$\begin{aligned}\mathbf{1} \times \tau &= \tau \\ \tau \times \mathbf{1} &= \tau \\ \tau \times \tau &= \mathbf{1} + \tau\end{aligned}\tag{1.14}$$

Riferendosi alla notazione in Equazione 1.10, si ha che $N_{\tau\tau}^{\mathbf{1}} = N_{\tau\tau}^{\tau} = 1$; questo doppio canale di fusione rende chiaramente l'anyone di Fibonacci, come detto, non Abelian.

1.4.1 Gli alberi di fusione

Dati inizialmente un numero definito di τ , verifichiamo adesso i possibili risultati delle fusioni.

Consideriamo per esempio tre τ sul piano e ben separati fra di loro: siamo interessati a sapere come possono fondere fra loro. Fondendo il primo col secondo possiamo ottenere $\mathbf{1}$ o τ ; fondendo questo risultato con il τ rimanente si ottiene nel primo caso τ , mentre nel secondo è possibile di nuovo ottenere $\mathbf{1}$ o τ . Queste possibilità di fusione sono graficamente espresse tramite gli *alberi di fusione* in Figura 1.7.

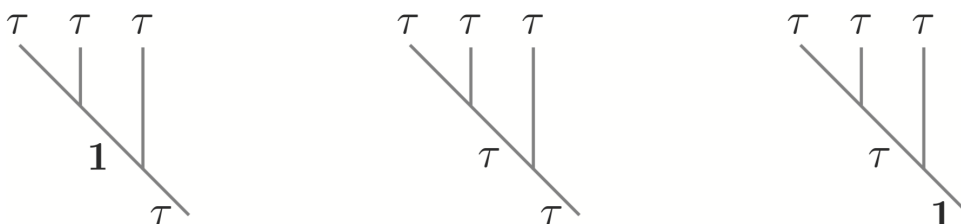


Figura 1.7: I tre alberi di fusione corrispondenti ai cammini di fusione possibili per tre anyoni di Fibonacci.

In questa rappresentazione la fusione delle particelle avviene leggendo il grafico dall'alto verso il basso. Le particelle segnate nei vertici indicano le particelle di partenza o il prodotto delle fusioni. Un particolare albero di fusione con certe particelle come prodotti è chiamato *percorso di fusione*; nell'esempio di Figura 1.7, ad esempio, sono presenti tre percorsi di fusione per i tre τ di partenza.

Supponiamo ora di voler descrivere n τ (labellandoli da 1 a n) nel loro processo di fusione; quando li si comincia a fondere uno dopo l'altro in successione si ottiene l'albero di fusione riportato in Figura 1.8.

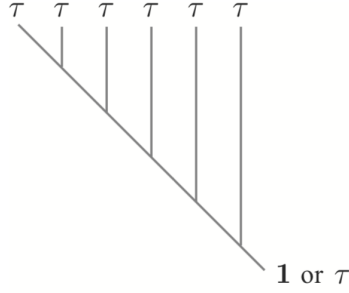


Figura 1.8: Generico albero di fusione per $n \tau$.

Lo stato di energia minima (*ground state*) di un sistema anyonico nel piano come visto deve essere degenere. In realtà l'energia di interazione fra gli anyoni non sarebbe proprio nulla e questo potrebbe rimuovere la degenerazione (vedi Sezione 1.5), ma se si ipotizza di poterli tenere adeguatamente separati allora vi saranno differenti *ground states* degeneri fra loro. Tale degenerazione corrisponde al numero di possibili percorsi di fusione per gli anyoni in questione. Se quindi dati $n \tau$, chiamiamo F_n il numero di percorsi di fusione associati, allora si può verificare che vale la relazione⁽²⁾:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \tag{1.15}$$

Notando poi che evidentemente valgono $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, l'Equazione 1.15 corrisponde alla definizione della sequenza di Fibonacci : tale proprietà è quella che dà il nome ai suddetti anyoni.

1.4.2 Cambi di base: la matrice F

Dato un insieme di tre anyoni da fondere, potremmo scegliere di fondere i primi due anyoni e fondere il risultato con il terzo, ottenendo un certo stato descritto da una funzione d'onda di particella singola Ψ , oppure fondere gli ultimi due e fondere il risultato con il primo, ottenendo un secondo stato descritto da una differente funzione d'onda di particella singola $\tilde{\Psi}$. In entrambi i casi se supponiamo di fissare anche il risultato finale delle fusioni, gli stati che si ottengono sono i medesimi. Ne consegue che le due funzioni d'onda ottenibili saranno collegate da una trasformazione unitaria.

La matrice che parametrizza questo cambio di base è chiamata *matrice F* (*F-matrix*):

$$\tilde{\Psi}_a = F_a^b \Psi_b \tag{1.16}$$

dove a, b corrispondono alle particelle descritte dallo stato. La "mossa" che scambia l'ordine di fusione degli anyoni è chiamata "*F-moves*" (*mossa F*); lo scambio può essere visualizzato nell'albero di fusione in Figura 1.9.

²Per dimostrarlo basta considerare il seguente caso. Supponiamo di avere allo step F_{n-1} di avere α anyoni τ e β di tipo $\mathbf{1}$, che per notazione compatta scriveremo come $\binom{\alpha}{\beta}$. Se a questo punto fondiamo un nuovo τ (F_n), si otterrà $\binom{\alpha+\beta}{\alpha}$. Infine aggiungendone un altro (F_{n+1}), si otterrà $\binom{2\alpha+\beta}{\alpha+\beta}$. Siccome il numero di stati degeneri corrisponde alla somma degli stati finali τ e $\mathbf{1}$ per ciascun n , si avrà che:

$$F_{n+1} = 3\alpha + 2\beta \quad F_n = 2\alpha + \beta \quad F_{n-1} = \alpha + \beta$$

E' immediato vedere che tali termini soddisfano all'Equazione 1.15.

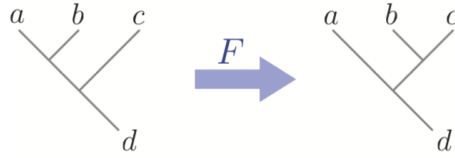
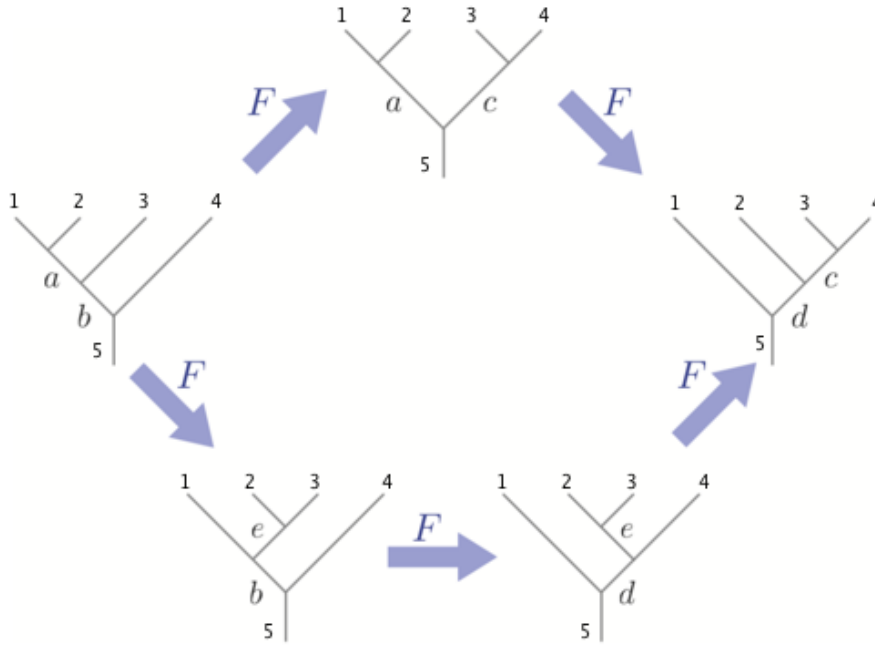


Figura 1.9: Effetto grafico di una mossa F su un albero di fusione.

In realtà la matrice F dovrebbe avere altri quattro indici $[F_d^{abc}]_a^b$ dove a, b, c, d interni alla parentesi indicano le tre particelle che vengono fuse e il risultato, rispettivamente.

Nel caso di più di tre anyoni ci saranno più alberi di fusione possibili. Per avere una teoria consistente servirebbe dunque specificare il cambio di base per ogni numero di anyoni coinvolti. Un esempio con quattro anyoni è riportato in Figura 1.10, dove si può vedere che esistono due set diversi di F-moves con cui passare da uno stato all'altro; questa relazione a cinque alberi è chiamata "*relazione del pentagono*".


 Figura 1.10: Relazione del pentagono per le F -moves fra le particelle 1,2,3,4 e 5.

Fortunatamente, un teorema matematico garantisce che stabilite le equazioni per la relazione del pentagono, la consistenza per le F-moves con un diverso numero di particelle è garantita.

Cerchiamo ora di scrivere esplicitamente l'equazione del pentagono per un generico sistema di quattro particelle (1,2,3,4) che fondono in una quinta (5) che lega la base dell'albero di destra del pentagono |destra; c, d) a quella dell'albero a sinistra |sinistra; a, b). Per il ramo superiore avremo:

$$|\text{sinistra}; a, b\rangle = \sum_{c,d} |\text{destra}; c, d\rangle (F_5^{12c})_a^d (F_5^{a34})_b^c \quad (1.17)$$

Per il ramo sotto avremo:

$$|\text{sinistra}; a, b\rangle = \sum_{c,d,e} |\text{destra}; c, d\rangle (F_d^{234})_e^c (F_5^{1e4})_b^d (F_b^{123})_a^e \quad (1.18)$$

Uguagliando queste due relazioni si trova quindi l'equazione del pentagono:

$$(F_5^{12c})_a^d (F_5^{a34})_b^c = \sum_e (F_d^{234})_e^c (F_5^{1e4})_b^d (F_b^{123})_a^e \quad (1.19)$$

Cerchiamo ora di capire come è fatta la matrice F , focalizzandoci in particolare sugli anyoni di Fibonacci. Il problema in generale è molto complesso, a seconda dei coefficienti N_{ab}^c che regolano la fusione. Per semplificare il problema possiamo però fare delle assunzioni. Ad esempio possiamo assumere che $F_d^{abc} = \mathbf{1}$ se uno fra $a, b, c = \mathbf{1}$; questa assunzione è giustificata dal fatto che, dato un anyone x , vale sempre $\mathbf{1} \times x = x \times \mathbf{1} = x$. Infatti se si considerano tre particelle in cui possono fondere per prime la prima e la seconda o la seconda e la terza, in ogni caso alla fusione successiva ci saranno le stesse particelle indipendentemente dalla posizione di $\mathbf{1}$; possiamo quindi assumere che gli stati iniziali e finali siano gli stessi. Per gli anyoni di Fibonacci potremo assumere in virtù del ragionamento appena fatto e delle regole di fusione di questi anyoni (Equazioni 1.14), che $F_1^{abc} = \mathbf{1}$. Ne segue che l'unica matrice F non banale è $F_\tau^{\tau\tau\tau}$ e, siccome in questo sistema di anyoni ci sono solo due particelle indipendenti, sarà una matrice unitaria 2×2 .

Ovviamente a seconda del tipo di particelle ci saranno vari pentagoni diversi. Per le condizioni semplificative su F si può notare che l'unico pentagono non banale per gli anyoni di Fibonacci è quello in cui le particelle fuse ed il risultato sono τ . Scrivendo l'equazione matriciale che segue dall'Equazione del pentagono 1.19 in cui $1 = 2 = 3 = 4 = 5 = \tau$ segue:

$$(F_\tau^{\tau\tau c})_a^d (F_\tau^{a\tau\tau})_b^c = \sum_e (F_d^{\tau\tau\tau})_e^c (F_\tau^{\tau e \tau})_b^d (F_b^{\tau\tau\tau})_a^e \quad (1.20)$$

dove a, b, c, d, e indicano gli spigoli dell'albero di fusione riportato in Figura 1.10. Ricordando che:

$$F_\tau^{1\tau\tau} = F_\tau^{\tau 1\tau} = F_\tau^{\tau\tau 1} = F_1^{\tau\tau\tau} = \mathbf{1} \quad (1.21)$$

Ponendo $b = c = \mathbf{1}$ e $a = b = c = d = \tau$, l'Equazione 1.20 si semplifica in:

$$(F_\tau^{\tau\tau\tau})_1^1 = (F_\tau^{\tau\tau\tau})_\tau^1 (F_\tau^{\tau\tau\tau})_1^\tau \quad \text{e} \quad [(F_\tau^{\tau\tau\tau})_\tau^\tau]^2 = (F_\tau^{\tau\tau\tau})_\tau^1 (F_\tau^{\tau\tau\tau})_1^\tau + [(F_\tau^{\tau\tau\tau})_\tau^\tau]^3 \quad (1.22)$$

Unendo queste condizioni all'unitarietà di F si ottiene a meno di una fase:

$$F_\tau^{\tau\tau\tau} = F_\tau^{\tau\tau\tau\dagger} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{1\tau} \\ F_{\tau 1} & F_{\tau\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^{-1} & \varphi^{-1/2} \\ \varphi^{-1/2} & -\varphi^{-1} \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

dove $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ è la *sezione aurea*.

La dimostrazione è riportata in Appendice A.

1.4.3 La matrice R e la rotazione fra gli anyoni

Come spiegato nella Sezione 1.1.2, l'operazione che contraddistingue gli anyoni è lo scambio di particelle. Matematicamente questo corrisponde ad una trasformazione del vettore di stato che descrive il sistema in un nuovo vettore di stato, tramite una matrice unitaria del gruppo delle trecce. La matrice che definisce questo scambio è chiamata "*matrice R* " (*R-matrix*).

Cominciamo con il caso di due soli anyoni abeliani a, b e supponiamo di conoscere la base dell'albero di fusione ed indichiamola con e_c^{ab} (anyoni di tipo a, b con carica totale c). Quando le particelle a e b sono intrecciate tramite R allora il vettore di stato cambia in:

$$e_c^{ab} \mapsto R_{ab} e_c^{ab} \quad (1.24)$$

e la matrice R è in questo caso una fase. Ovviamente si sarebbe potuti partire con la base che rappresenta la configurazione iniziale a particelle scambiate e_c^{ba} ; visto che dopo la trasformazione

tramite R in Equazione 1.24 lo stato delle particelle è concorde a quello della base e_c^{ba} , significa che le due basi saranno relazionate da una fase R_c^{ba} :

$$R_{ab} e_c^{ab} = R_c^{ba} e_c^{ba} \tag{1.25}$$

Graficamente sugli alberi di fusione si può visualizzare la relazione in Equazione 1.25 nel seguente modo:

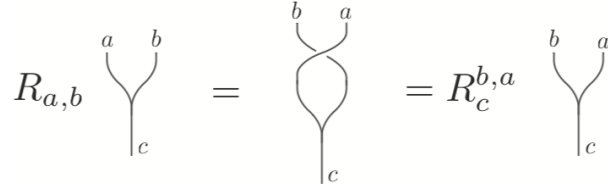


Figura 1.11: Intreccio di due particelle tramite la matrice R.

Fino ad ora è stata adottata la convenzione di lettura degli alberi di fusione dall’alto verso il basso, ma nulla vieta di poterli leggere dal basso verso l’alto (vedi convenzioni in Sezione 1.2); questo cambio di prospettiva corrisponde fisicamente ad un cambio a livello temporale in cui, quindi, invece della fusione di due particelle avviene la separazione di una in due.

Le operazioni di fusione o di separazione degli anyoni devono essere compatibili con le operazioni di intreccio. Consideriamo la base e_c^{cd} : potremmo prendere d , separarlo in a e b e poi scambiare c con questi; in alternativa potremmo scambiare c e d e poi separare quest’ultimo in a e b . Come si vede in Figura 1.12 queste operazioni sono del tutto equivalenti e saranno caratterizzate dalle stesse matrici risultanti.

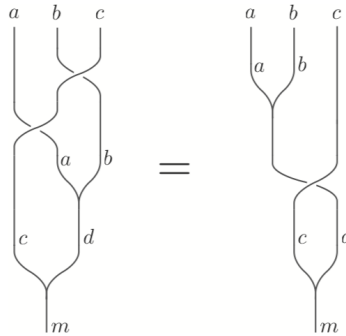


Figura 1.12: Esempio di due alberi equivalenti.

Lo stesso risultato può essere ottenuto più in generale come combinazione di mosse F ed R (intrecci). L’esempio più importante è quello riportato in Figura 1.13, in cui con 6 mosse si ottengono due risultati equivalenti: queste relazioni sono dette *relazioni dell’esagono*.

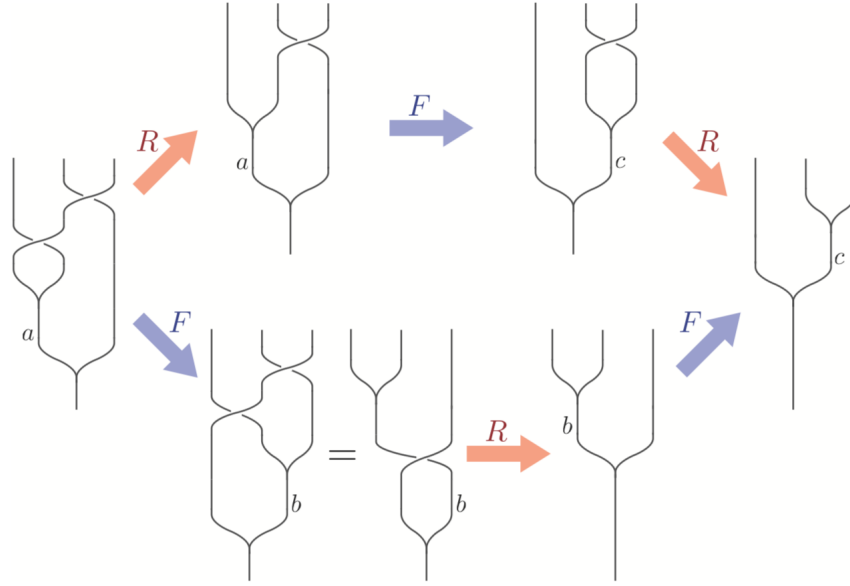


Figura 1.13: Le relazioni dell'esagono.

Come nel caso delle relazioni del pentagono, un teorema matematico stabilisce che le relazioni dell'esagono implicano la consistenza degli intrecci con le altre operazioni.

Scrivendo ora le equazioni dell'esagono per gli anyoni di Fibonacci (in maniera analoga a quanto fatto per la matrice F) si ottiene:

$$R_c^{\tau\tau} (F_\tau^{\tau\tau\tau})_a^c R_a^{\tau\tau} = \sum_b (F_\tau^{\tau\tau\tau})_b^c R_\tau^{\tau b} (F_\tau^{\tau\tau\tau})_a^b \quad (1.26)$$

Utilizzando il risultato per F (Equazione 1.23) e sapendo che l'intreccio di una particella con $\mathbf{1}$ lascia il sistema inalterato ($R_\tau^{\mathbf{1}\tau} = R_\tau^{\tau\mathbf{1}} = 1$) si ottiene la soluzione:

$$R_{\mathbf{1}}^{\tau\tau} = e^{\pm 4\pi i/5} \quad , \quad R_\tau^{\tau\tau} = e^{\mp 3\pi i/5} \quad (1.27)$$

La dimostrazione è riportata in Appendice B.

1.4.4 Operazioni combinate di intreccio

Cominciamo con l'introduzione di una notazione più formale per indicare gli stati descritti dagli anyoni; consideriamo una coppia di τ : questi potranno fondere ed avere una carica complessiva di τ o $\mathbf{1}$. E' conveniente indicare questi due stati con la seguente notazione:

$$|(\bullet, \bullet)_\tau\rangle \quad |(\bullet, \bullet)_\mathbf{1}\rangle \quad (1.28)$$

In tale scrittura \bullet rappresenta un τ mentre le parentesi e il pedice indicano la loro fusione e carica totale rispettivamente. Se adesso aggiungiamo una terza particella si ottengono i tre stati possibili rappresentati in Figura 1.14.

$$\begin{aligned}
 |0\rangle &= |((\bullet, \bullet)_1, \bullet)_\tau\rangle = \text{diagramma} = \text{diagramma} \\
 |1\rangle &= |((\bullet, \bullet)_\tau, \bullet)_\tau\rangle = \text{diagramma} = \text{diagramma} \\
 |N\rangle &= |((\bullet, \bullet)_\tau, \bullet)_1\rangle = \text{diagramma} = \text{diagramma}
 \end{aligned}$$

Figura 1.14: I tre possibili stati di fusione di tre anyoni di Fibonacci associati ad una notazione più compatta; con \bullet sono indicati gli anyoni τ di Fibonacci mentre le parentesi/ellissi che li racchiudono indicano la loro fusione e portano a pedice a destra la carica totale della fusione.

In questa notazione lo scambio d'ordine di fusione si rappresenterà tramite la matrice F nella seguente forma:

$$|(\bullet, (\bullet, \bullet)_i)_k\rangle = \sum_j [F_k^{\tau\tau\tau}]_{ij} |((\bullet, \bullet)_j, \bullet)_k\rangle \quad (1.29)$$

Mentre la rotazione di due anyoni seguendo la matrice R avrà la forma:

$$\begin{aligned}
 R |(\bullet, \bullet)_1\rangle &= e^{-4\pi i/5} |(\bullet, \bullet)_1\rangle \\
 R |(\bullet, \bullet)_\tau\rangle &= -e^{-2\pi i/5} |(\bullet, \bullet)_\tau\rangle
 \end{aligned} \quad (1.30)$$

Definite le operazioni di base cerchiamo ora di vedere cosa succede se le si applica, ad esempio, ad un insieme di tre anyoni, verificando gli effetti delle rappresentazioni del gruppo delle trecce $\rho(\sigma_1)$ e $\rho(\sigma_2)$ sui vari stati.

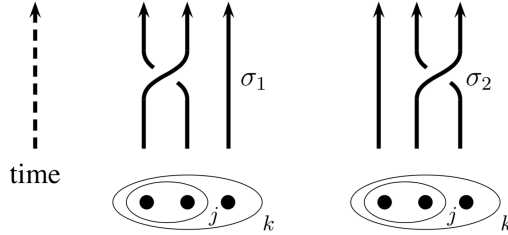


Figura 1.15: Azione dei generatori del gruppo delle trecce sullo stato dei tre anyoni.

Cominciamo col determinare l'effetto di σ_1 sul sistema; tramite l'Equazione 1.30 ed utilizzando la notazione compatta riportata in Figura 1.14 si determina che:

$$\begin{pmatrix} |0\rangle \\ |1\rangle \\ |N\rangle \end{pmatrix} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-4\pi i/5} & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-2\pi i/5} & 0 \\ 0 & 0 & -e^{-2\pi i/5} \end{pmatrix}}_{\rho(\sigma_1)} \begin{pmatrix} |0\rangle \\ |1\rangle \\ |N\rangle \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

Meno banale è invece verificare l'effetto di σ_2 . In questo caso prima bisogna effettuare un cambio di base per vedere come fondono le ultime due particelle, poi effettuare la rotazione ed infine disfare il cambio di base per ritornare in quella iniziale; simbolicamente si ha quindi:

$$\rho(\sigma_2) = F^{-1}RF \quad (1.32)$$

dove R ruota le ultima due particelle. Svolgiamo il calcolo per esempio per lo stato $|0\rangle$:

$$F|0\rangle = F_{11}|(\bullet, (\bullet, \bullet)_1)_\tau\rangle + F_{1\tau}|(\bullet, (\bullet, \bullet)_\tau)_\tau\rangle$$

$$RF|0\rangle = e^{-4\pi i/5}F_{11}|(\bullet, (\bullet, \bullet)_1)_\tau\rangle - e^{-2\pi i/5}F_{1\tau}|(\bullet, (\bullet, \bullet)_\tau)_\tau\rangle$$

Considerando ora la trasformazione inversa di base per i due termini si ottiene il risultato cercato:

$$\begin{aligned} \rho(\sigma_2)|0\rangle &= e^{-4\pi i/5}F_{11}[F_{11}^{-1}|0\rangle + F_{1\tau}^{-1}|1\rangle] - e^{-2\pi i/5}F_{1\tau}[F_{\tau 1}^{-1}|0\rangle + F_{\tau\tau}^{-1}|1\rangle] = \\ &= -\varphi^{-1}e^{-\pi i/5}|0\rangle - i\varphi^{-1/2}e^{-\pi i/10}|1\rangle \end{aligned}$$

Eseguendo il medesimo calcolo per gli altri stati si ottiene quindi il risultato finale:

$$\begin{pmatrix} |0\rangle \\ |1\rangle \\ |N\rangle \end{pmatrix} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -\varphi^{-1}e^{-\pi i/5} & -i\varphi^{-1/2}e^{-\pi i/10} & 0 \\ -i\varphi^{-1/2}e^{-\pi i/10} & -\varphi^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -e^{-2\pi i/5} \end{pmatrix}}_{\rho(\sigma_2)} \begin{pmatrix} |0\rangle \\ |1\rangle \\ |N\rangle \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

Dal momento che con tre anyoni le uniche operazioni che si possono effettuare sono $\sigma_{1,2}$, calcolate $\rho(\sigma_{1,2})$ si possono ricavare immediatamente gli stati dopo un'arbitraria serie di intrecci. Per esempio se volessimo ricavare lo stato dopo l'intreccio $\sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1$ rappresentato in Figura 1.16, basterebbe applicare $\rho(\sigma_1)\rho(\sigma_2^{-1})\rho(\sigma_2^{-1})\rho(\sigma_1)\rho(\sigma_1)\rho(\sigma_2)$ allo stato iniziale (N.B. l'ordine di scrittura dei vari σ e $\rho(\sigma)$ è invertito nella scrittura poichè nelle convenzioni utilizzate nella teoria delle trecce il primo evento in ordine temporale è scritto per primo mentre in notazione matriciale, dal momento il primo elemento temporale agisce a destra sullo stato, per ultimo).

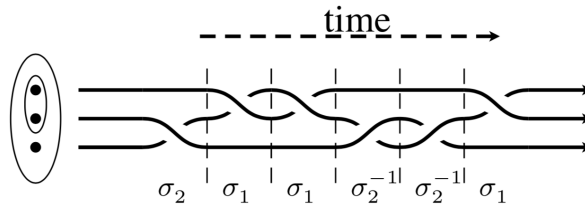


Figura 1.16: Esempio di intreccio come combinazione di σ_1 e σ_2 .

1.5 Anyoni emergenti

Fino ad ora si è parlato di anyoni in generale, facendo riferimento al caso specifico degli anyoni di Fibonacci. Teoricamente si è visto che la teoria è consistente in uno spazio bidimensionale delle coordinate, ma resta però da vedere se e quando gli anyoni possano effettivamente comparire in natura. In effetti elettroni, protoni, atomi e fotoni sono bosoni o fermioni anche quando sono confinati in due dimensioni. Tuttavia se un sistema a molti elettroni (bosoni, atomi, ecc.) confinato in due dimensioni ha eccitazioni al di sopra del loro ground state, chiamate *quasiparticelle*, allora queste *quasiparticelle* possono essere anyoni.

Vediamo ora di dimostrare come le proprietà degli anyoni possano emergere dalle eccitazioni quasiparticellari. Riferiamoci per essere concreti ad un sistema bidimensionale di elettroni aventi le posizioni r_1, r_2, \dots, r_n . Assumiamo poi che il ground state sia separato dagli altri livelli energetici da una certa energia di gap. Le eccitazioni energeticamente più basse e cariche elettricamente sono chiamate *quasiparticelle* (*quasiparticles*) o *quasilacune* (*quasiholes*) a seconda del segno della carica (rispettivamente negativo e positivo). Introduciamo poi nell'Hamiltoniana del sistema un potenziale scalare tale da creare delle "trappole" ben localizzate nelle posizioni (R_1, \dots, R_k) e che siano separate fra di loro da una distanza considerevole (in relazione alle distanze microscopiche in gioco); creiamo queste "trappole" (le quali potrebbero essere create per esempio da impurità) in modo tale che siano in grado di catturare esattamente una quasiparticella ciascuna. Le coordinate di queste trappole saranno coordinate sia dell'Hamiltoniana del potenziale, sia della funzione d'onda che descrive il sistema di elettroni. A questo punto vogliamo vedere cosa accade se si prendono queste quasiparticelle e le si scambia. Supponiamo di poter effettuare delle trasformazioni adiabatiche nel tempo sulle coordinate delle quasiparticelle $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_k)$; consideriamo poi come traiettorie valide quelle che rendono lo stato finale una permutazione a livello di posizioni di quello iniziale (nel frattempo qualche quasiparticella potrebbe aver scambiato la sua posizione con un'altra).

Se esiste un unico ground state per questo sistema allora dopo lo scambio la funzione d'onda finale sarà uguale a quella iniziale a meno di una fase. Parte di questa fase è essenzialmente dinamica e dipende dall'energia delle quasiparticelle in gioco e dal tempo impiegato per lo scambio; nel limite adiabatico questa sarà pari a $\int dt E(R(t))$. C'è poi una fase geometrica che non dipende dalla lunghezza temporale del processo chiamata *fase di Berry* ("*Berry phase*", Berry, 1984):

$$\alpha = i \oint d\mathbf{R} \langle \psi(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} | \psi(\mathbf{R}) \rangle \quad (1.34)$$

dove $|\psi(\mathbf{R})\rangle$ descrive il ground state in cui le particelle sono in posizione \mathbf{R} e dove la traiettoria delle particelle è considerata lungo $\mathbf{R}(t)$. Questa fase è racchiusa al suo interno la topologia del percorso seguito ed è quindi caratteristica delle particelle compatibile con l'angolo statistico θ .

Vediamo ora cosa accade quando il ground state è degenere. In questo caso non è più necessariamente vero che l'effetto dello scambio è solo una fase; infatti il sistema inizia e termina in un ground state ma questo può non essere il medesimo nello spazio degenere complessivo. Se ammettiamo come vincolo che l'evoluzione del sistema stia in questo spazio degenere, allora si può generalizzare il prodotto scalare in Equazione 1.34 tramite una matrice contenente i vari prodotti scalari di componenti:

$$\mathbf{m}_{ab} = \langle \psi_a(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} | \psi_b(\mathbf{R}) \rangle \quad (1.35)$$

dove $|\psi_a(\mathbf{R})\rangle$, $a = 1, 2, \dots, g$, con g la degenerazione dello spazio dei ground states.

Dal momento che queste matrici se valutate in diversi punti \mathbf{R} non commutano, bisogna ordinare l'integrale sul cammino per calcolare la regola di trasformazione per le funzioni d'onda $\psi_a \rightarrow M_{ab}\psi_b$:

$$M_{ab} = \mathcal{P} \exp \left(i \oint d\mathbf{R} \cdot \mathbf{m} \right) \quad (1.36)$$

dove $\mathbf{R}(s)$, $s \in [0, 2\pi]$, è la traiettoria chiusa compiuta dalla particella e \mathcal{P} è l'operatore di *path-ordering* definito come:

$$\mathcal{P} \exp \left(i \oint d\mathbf{R} \cdot \mathbf{m} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \int_0^{2\pi} ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \cdots \int_0^{s_{n-1}} ds_n \{ \dot{\mathbf{R}}(s_1) \cdot \mathbf{m}_{aa_1}[\mathbf{R}(s_1)] \cdots \dot{\mathbf{R}}(s_n) \cdot \mathbf{m}_{a_nb}[\mathbf{R}(s_n)] \} \quad (1.37)$$

La matrice M_{ab} sarà il prodotto di parti topologiche e non: in un sistema in cui le quasiparticelle obbediscono ad una statistica di treccia non-Abeliana la parte non topologica sarà Abeliana e solo la parte topologica sarà invece non-Abeliana.

Di conseguenza le condizioni per le quasiparticelle nel seguire una statistica non-Abeliana essenzialmente tre:

1. il ground state delle N quasiparticelle deve essere degenere. In generale la degenerazione non sarà esatta, ma la differenza dovrebbe scomparire esponenzialmente se la distanza fra le quasiparticelle aumenta;

2. lo scambio adiabatico delle quasiparticelle applica una trasformazione unitaria sul ground state in cui la parte non-Abeliana è determinata solo dalla topologia della treccia;
3. se le particelle sono tenute a distanza elevata, l'unico modo di effettuare operazioni unitarie sul ground state degenere è tramite operazioni di intreccio.

La degenerazione è condizionata dal fatto di avere le quasiparticelle lontane fra loro. Quando due quasiparticelle entrano a distanza ravvicinata la degenerazione viene rimossa: quando sono vicine i loro canali di fusione sono separati in energia. Tale separazione in energia è equivalente ad una misura del suo stato e questo fatto sarà molto utile a livello pratico per quanto seguirà nei prossimi capitoli.

Verifiche sperimentali dell'esistenza degli anyoni

Dopo aver discusso le proprietà principali degli anyoni (in particolare quelli di Fibonacci) e aver descritto un sistema fisico compatibile con la presenza di anyoni è doveroso dire se effettivamente questi siano stati effettivamente visti. Si ha la conferma dell'esistenza degli anyoni Abelian, visti in esperimenti basati sull'effetto Hall quantistico frazionario. Per quel che riguarda invece quelli non-Abeliani, ad oggi non sono mai stati osservati. Sono in corso ulteriori esperimenti atti a verificare la loro esistenza, soprattutto visto le possibili applicazioni che potrebbero avere: e.g. per la computazione quantistica (Sezione 3).

Capitolo 2

Basi di computazione quantistica

"I want to talk about the possibility that there is to be an exact simulation, that the computer will do exactly the same as nature."

— Richard P. Feynman

Il concetto di computazione quantistica nasce da problematiche e necessità tecnologiche. Infatti più la tecnologia elettronica progredisce, più le componenti che la costituiscono diventano piccole; quando le dimensioni saranno sufficientemente piccole sarà quindi necessario scontrarsi con i fenomeni quantistici, che potrebbero essere la causa di un arresto tecnologico o, al contrario, un'occasione per rivoluzionare totalmente il settore verso macchine più performanti. Quest'ultima opportunità è quella che videro i fondatori della computazione quantistica (Manin, 1980, Feynman, 1982, 1986, Deutsch, 1985, Shor, 1994), i quali dimostrarono che un dispositivo che potesse effettuare tale tipo di processo, se realizzabile, sarebbe stato di gran lunga migliore di uno basato sulla computazione classica.

2.1 Applicazioni della computazione quantistica

Il problema che Feynman aveva in mente per un computer quantistico era la simulazione di un sistema quantistico; dimostrò infatti che per certe Hamiltoniane a molti corpi tale simulazione sarebbe stata esponenzialmente più veloce rispetto alla computazione tradizionale. Un'applicazione di questo tipo implicherebbe la possibilità di simulare e comprendere meglio alcune proprietà materiali complessi, come ad esempio la superconduttività ad alte temperature.

Un'altra qualità per cui si guarda con interesse a questo computer è la gamma di algoritmi stocastici che possono essere creati, i quali riescono ad eseguire operazioni degli analoghi algoritmi classici in maniera molto più performante. Un caso degno di nota che suscitò grande interesse anche al di fuori del mondo fisico riguarda l'algoritmo trovato da Peter Shor (1994) per la fattorizzazione di un numero nei suoi fattori primi. Dato un numero composto di m digit, l'algoritmo è in grado di trovare la fattorizzazione di tale numero in una lunghezza di operazioni che va come $\sim m^2 \log(m) \log(\log(m))$; tale metodo è assai più veloce del più veloce algoritmo per la fattorizzazione classico noto, che va come $\sim \exp(m^{1/3})$. Il motivo di tanto interesse sta nel fatto che molti metodi di crittazione si basano proprio su problemi simili a quelli di trovare la fattorizzazione di grandi numeri e quindi con un computer quantistico la decrittazione di tali schemi di codifica sarebbe estremamente più veloce.

2.2 Processo di computazione quantistica

Assumiamo di avere a disposizione un sistema associato ad uno spazio di Hilbert \mathcal{H} e di poter inizializzare questo sistema in modo tale gli corrisponda la funzione d'onda $|\psi_0\rangle$. Supponiamo poi di avere una certa Hamiltoniana $H(t)$ tale per cui l'evoluzione temporale del sistema sia regolata da un operatore unitario $U(t)$, tale per cui (dall'equazione di Schrödinger) valga:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t) = H(t) U(t) \quad (2.1)$$

La funzione d'onda finale sarà quindi $|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi_0\rangle$. Alla fine dell'evoluzione misuriamo quindi lo stato del sistema. Questo processo in tre fasi (inizializzazione del sistema, evoluzione unitaria e misura) è quello che viene chiamato *computazione quantistica*. In analogia con la computazione classica si hanno le seguenti corrispondenze:

$$\begin{aligned} H(t) &\longleftrightarrow \text{software} \\ |\psi_0\rangle &\longleftrightarrow \text{input} \\ \text{Misura di } |\psi(t)\rangle &\longleftrightarrow \text{output} \end{aligned} \quad (2.2)$$

2.3 Il qubit

Ai fini di creare un sistema versatile e facilmente modificabile è buona norma creare pochi elementi che, se opportunamente combinati, possano dare poi forma a strutture più complesse. In questo senso, la base della computazione classica è il *bit*, ossia una cifra binaria che può assumere i valori di 0 (*spento*) e 1 (*acceso*). Questi elementi presi in numero sufficientemente elevato e manipolati tramite opportune operazioni (algebra booleana) permettono di effettuare varie operazioni, dallo storage dei dati a calcoli numerici. Analogamente, per la computazione quantistica si considera uno stato binario detto *qubit*. La differenza fra il bit ed il qubit sta nel fatto che mentre il primo può assumere il valore di 0 o 1, il qubit può essere, per la sua natura quantistica, in una qualunque sovrapposizione di questi due stati:

$$a|0\rangle + b|1\rangle \quad \text{con } a, b \in \mathbb{C} \text{ t.c. } |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (2.3)$$

Se è rispettata la condizione di normalizzazione su a, b in Equazione 2.3 e viene effettuata una misura per stabilire lo stato del qubit la probabilità che questo sia nello stato $|0\rangle$ o $|1\rangle$ è data da $|a|^2$ e $|b|^2$ rispettivamente. Per esempio possiamo considerare il seguente stato

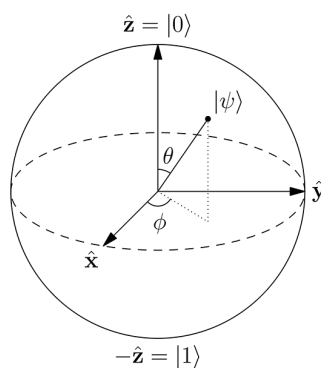
$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \quad (2.4)$$

in cui la probabilità di trovare 0 o 1 nel caso di misura del qubit è del 50% ciascuno.

Possiamo quindi pensare al qubit come un vettore unitario in uno spazio vettoriale complesso bidimensionale. Visto che vale sempre la condizione di normalizzazione per lo stato ($|a|^2 + |b|^2 = 1$), in generale questo si potrà scrivere a meno di un fattore di fase come:

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle \quad (2.5)$$

I parametri θ e ϕ individuano una superficie sferica di raggio unitario che viene usualmente chiamata *sfera di Bloch*.

Figura 2.1: Rappresentazione della *sfera di Bloch*.

Ogni trasformazione del qubit corrisponde ad una trasformazione sulla superficie di questa sfera.

Nel momento della misura lo stato collassa poi nel risultato della misura (0 o 1), eliminando la sovrapposizione degli stati. Dalla misura di un qubit quindi è possibile estrarre solo un bit classico di informazione; tuttavia parte dell'informazione giace nei coefficienti a e b che resta preservata fino a quando non avviene la misura. Se si hanno a disposizione n qubit lo stato appartiene ad uno spazio di Hilbert 2^n -dimensionale, nei quali sono spesso entangled. L'informazione contenuta nei qubit cresce quindi esponenzialmente con il loro numero. Il fenomeno, detto appunto di *sovrapposizione*, è alla base della potenza della computazione quantistica poichè permette di effettuare operazioni diverse contemporaneamente ed ottenere un risultato dalla somma coerente dei vari risultati.

2.3.1 Porte logiche a qubit singolo e multiplo

Nella computazione classica una volta creati gli elementi su cui effettuare la computazione, i *bit*, servono anche i mezzi con cui poter effettuare delle operazioni su di essi: tali mezzi sono costituiti dalle *porte logiche* o *gates*. Le porte logiche possono comprendere un solo bit o bit multipli e tramite di esse si possono effettuare tutte le operazioni desiderate. Un analogo deve essere presente nella computazione quantistica.

Cominciamo con l'analisi di un gate a qubit singolo. Nella computazione classica esiste solo l'operazione NOT, che manda il bit da 0 a 1 (o viceversa); tale operazione per un qubit può essere vista nel seguente modo:

$$a|0\rangle + b|1\rangle \rightarrow b|0\rangle + a|1\rangle$$

Formalmente equivale a prendere la funzione d'onda iniziale, considerando i due stati del qubit come componenti di un vettore bidimensionale, e applicargli una trasformazione lineare nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Se l'operazione sul qubit corrisponde ad applicare una matrice 2×2 viene spontaneo chiedersi se qualunque matrice possa andare bene per una porta quantistica: in effetti qualunque matrice 2×2 unitaria (affinchè lo stato sia normalizzato) può esserlo. Così, mentre per la computazione classica esiste un'unica operazione a singolo bit, in quella quantistica ne esistono molte di più.

Pensiamo ora quelle che coinvolgono più bit/qubit. L'idea è quella di effettuare un'operazione su un bit/qubit chiamato "bersaglio" agendo su un altro bit/qubit detto di "controllo". Un importante risultato teorico per la computazione classica consta nel fatto che qualunque porta logica può essere

realizzata tramite opportune combinazioni della porta NAND (AND+NOT). L'equivalente nella computazione quantistica è la porta CNOT (*controlled-NOT*): classicamente questa inverte il bit bersaglio se il bit di controllo è 1 e non fa nulla altrimenti. Nella rappresentazione quantistica questa operazione sarebbe rappresentata da una matrice del tipo:

$$U_{CN} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si può dimostrare che, come la porta NAND è universale per la computazione classica, usando unicamente porte quantistiche CNOT e porte a qubit singoli e' possibile ottenere l'equivalente di qualsiasi porta a qubit multipli. Di conseguenza la porta CNOT è la porta quantistica universale.

2.4 Errori ed ostacoli per la computazione

Un ostacolo alla computazione in generale è posto dagli errori. Qualunque sia la base della computazione (bit o qubit) essa è "fisica"; può quindi capitare per varie ragioni che tale base venga alterata dall'ambiente circostante provocando una perdita o un cambiamento di informazione. Ovviamente imprevisti di questo tipo costituiscono agli occhi di chi esegue la computazione un errore. E' necessario quindi per lo svolgimento di una corretta computazione l'uso di sistemi ed algoritmi per la prevenzione e correzione degli errori.

Nei computer classici tali errori sono di soliti corretti tramite ridondanze: per esempio la creazione di più copie dello stesso elemento permette sia di avere più possibilità di eseguire correttamente l'operazione, sia di rintracciare per confronto con le altre copie la presenza di un errore.

Nella computazione quantistica la situazione è ben più complessa. Infatti se nel corso della computazione effettuassimo una misura per verificare la presenza di un errore, questa farebbe collassare la sovrapposizione dei qubit rovinando il calcolo. Inoltre gli errori possono non essere discreti ma continui: ad esempio, invece di limitarsi ad un rovescio netto da $|0\rangle$ a $|1\rangle$, si potrebbe avere:

$$a|0\rangle + b|1\rangle \rightarrow a|0\rangle + be^{i\theta}|1\rangle \quad (2.6)$$

per un qualche θ .

Nonostante ciò la correzione di errori è possibile tramite ridondanza. Per esempio, se il tasso di spin-flip è basso potremmo identificare un qubit con una terna di spin binari (e.g. spin 1/2); con questa soluzione si avrebbe la corrispondenza $|0\rangle \longleftrightarrow |000\rangle$ e $|1\rangle \longleftrightarrow |111\rangle$. Così facendo per verificare la presenza di un errore basterebbe controllare se gli spin sono uguali o se uno di essi è cambiato. Supponiamo infatti di avere un qubit nello stato $a|000\rangle + b|111\rangle$: se per errore uno spin subisse un rovesciamento, allora ci si troverebbe nello stato $a|100\rangle + b|011\rangle$; controllando se gli spin sono uguali è possibile accorgersi dell'errore e correggerlo. Questo processo non richiede in effetti di misurare lo stato dei singoli spin e di conseguenza non distrugge la superposizione del qubit⁽¹⁾. Iterando questa procedura è possibile correggere gli errori di spin-flip.

Da un punto di vista pratico è comodo dividere gli errori che possono accadere in due categorie:

1. Errori che si verificano quando un qubit è processato;
2. Errori che si verificano quando un qubit sta preservando informazione e non è processato.

Nel primo caso sono predominanti gli errori sistematici compiuti dalla macchina sul sistema (Sezione 2.4.1), mentre nel secondo caso, quando i qubit non sono processati, sono rilevanti gli errori casuali (Sezione 2.4.2).

¹Infatti basta misurare coppie di spin. Supponiamo che $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3$ siano gli autovalori dei tre spin con autovalore 1: se si ha che $\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 = -1$ e $\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3 = 1$ si dedurrà che il primo spin è stato cambiato e lo si potrà quindi correggere. Siccome si misurano **coppie** di spin la superposizione del qubit viene preservata.

2.4.1 Errori sistematici

Questo tipo di errore può verificarsi quando si esegue un'operazione unitaria sul sistema ma, per ragioni pratiche, non la si riesce ad eseguire alla perfezione. Per esempio vorremmo poter ruotare un qubit di 90.00 gradi e ruotarlo invece inavvertitamente di 90.01 gradi. Ovviamente questo tipo di errore è strettamente legato alla capacità della macchina di eseguire operazioni in modo preciso.

2.4.2 Errori casuali: ambiente e decoerenza

Gli errori casuali sono provocati dall'interazione del sistema con l'ambiente. Da tale interazione il sistema, che era inizialmente in uno stato "puro", diventa entangled con l'ambiente, causando errori. Infatti supponiamo che il sistema sia nello stato $|0\rangle$ e l'ambiente nello stato $|E_0\rangle$, cosicché lo stato complessivo sia $|0\rangle|E_0\rangle$ (e analogamente per lo stato $|1\rangle$). Data la linearità dell'evoluzione temporale, allora per uno stato del sistema $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ l'interazione con l'ambiente farà evolvere il sistema complessivo in $\alpha|0\rangle|E_0\rangle + \beta|1\rangle|E_1\rangle$, con $|E_1\rangle$ un altro stato dell'ambiente (in generale non necessariamente ortogonale ad $|E_0\rangle$). Siccome non possiamo misurare con accuratezza lo stato dell'ambiente, il passaggio dallo stato puro iniziale a quello finale ha fatto perdere informazione.

Supponiamo ora per esempio di partire dal suddetto stato $|0\rangle|E_0\rangle$ e che l'ambiente sia determinato da una serie di stati $|E_0\rangle, |E_1\rangle, \dots, |E_n\rangle$ ortogonali fra di loro. Se vado a costruire il proiettore ortogonale dello stato iniziale siccome non ho informazione sull'ambiente dovrò sommare su tutti i vari stati $|E_n\rangle$ dell'ambiente; si avrà quindi:

$$\sum_n \langle E_n|E_0\rangle |0\rangle \langle 0| \langle E_0|E_n\rangle = |0\rangle \langle 0| \quad (2.7)$$

ove l'ultimo passaggio è valido per l'ortogonalità delle $|E_n\rangle$. Di conseguenza il sistema rimane nello stato iniziale e l'informazione è interamente contenuta in $|0\rangle$. Supponiamo ora invece che il sistema sia evoluto come detto nello stato $\alpha|0\rangle|E_0\rangle + \beta|1\rangle|E_1\rangle$; in questo caso avremo invece:

$$\sum_n \langle E_n|(\alpha|0\rangle|E_0\rangle + \beta|1\rangle|E_1\rangle)(\bar{\alpha}\langle 0| \langle E_0| + \bar{\beta}\langle 1| \langle E_1|)|E_n\rangle = |\alpha|^2 |0\rangle \langle 0| + |\beta|^2 |1\rangle \langle 1| \quad (2.8)$$

La probabilità del sistema di passare allo stato $|1\rangle$ è $|\beta|^2$, cioè l'ambiente ha causato una possibile evoluzione non controllata del sistema. In altre parole, il sistema ha causato la *decoerenza* del sistema.

Capitolo 3

Anyoni come base per la computazione quantistica

"By using anyons, we might achieve fault tolerance by designing hardware with an intrinsic resistance to decoherence and other errors, significantly reducing the size and depth blowups of our circuit simulations. Clearly, then, we have ample motivation for learning about anyons. Besides, it will be fun!"

— John Preskill

La computazione quantistica topologica è un metodo che utilizza un sistema le cui eccitazioni soddisfano ad una statistica di treccia non abeliana per eseguire un processo di computazione. Lo spazio di Hilbert su cui avviene tale processo corrisponde ai ground-states degeneri con un numero ben definito di quasiparticelle in posizioni fissate. In tale sottospazio le operazioni sono effettuate intrecciando le quasiparticelle fra di loro. Il ground-state è separato dagli altri livelli di energia da un gap; ne consegue che se la temperatura del sistema è sufficientemente bassa ed il sistema è perturbato con eccitazioni di frequenza bassa, il sistema evolverà rimanendo nel ground-state. Un sistema così costruito gode di una straordinaria stabilità, dal momento che l'unico modo per effettuare un'evoluzione unitaria del sistema da un ground-state ad un altro che non sia banale consiste nell'intrecciare le quasiparticelle. La ragione di ciò è che le principali perturbazioni locali (come l'interazione fonone-elettrone) non hanno matrici non-banali nel ground-state. Di conseguenza il sistema è riparato dalla decoerenza. Inoltre gli errori unitari sistematici sono sfavoriti dal momento che le trasformazioni unitarie in questione riguardano solo proprietà topologiche delle traiettorie delle quasiparticelle in questione e non la geometria o la dinamica con cui avvengono.

3.1 Processo di computazione con quasiparticelle

Per poter creare propriamente un computer quantistico bisogna creare con queste quasiparticelle i qubits e trovare come effettuare le operazioni che definiscono un processo di computazione quantistica accennati in Sezione 2.2.

Nel modello proposto modello un qubit non è un'entità locale, ma una collezione di quasiparticelle ben separate fra di loro nel ground-state. Con tale associazione i due valori possibili del qubit corrispondono alla carica interna delle quasiparticelle coinvolte. Il sistema più semplice capace di svolgere una completa computazione quantistica utilizza tre quasiparticelle per creare un qubit e sarà brevemente discusso di seguito in Sezione 3.4.

Bisogna ora definire come effettuare le operazioni di inizializzazione del sistema, di evoluzione unitaria su di esso ed infine come misurarne lo stato finale.

L'inizializzazione dello stato avviene preparando nella maniera desiderata le quasiparticelle. Una maniera possibile è quella di "estrarre" dal vuoto una particella con la sua antiparticella (a.e. la produzione di coppia tramite un intenso campo elettrico); siccome i numeri quantici si devono conservare, quelli delle due particelle saranno coniugati (in modo tale che il numero quantico "totale" sia lo stesso del vuoto): così facendo è noto lo stato iniziale. Alternativamente si possono utilizzare insieme le tecniche di misurazione sul sistema e di evoluzione unitaria, misurando prima il sistema e poi facendolo evolvere verso lo stato iniziale desiderato.

Dopo che il sistema è stato inizializzato le operazioni di evoluzione unitarie sono effettuate spostando fisicamente una quasiparticella attorno ad un'altra. Siccome tale evoluzione dipende solo dalla topologia della treccia effettuata, tale operazione non è sensibile a disturbi (come scattering di fononi e fotoni).

Infine la fase di misura può essere effettuata principalmente in due modi. Nel primo caso si tiene conto che la degenerazione di un sistema a più quasiparticelle viene rimossa se le quasiparticelle vengono portate sufficientemente vicine: effettuando quindi una misura dell'energia di una coppia di queste quasiparticelle è possibile misurare la loro carica topologica. Alternativamente si può effettuare un'esperienza di interferenza tipo Aharonov-Bohm. Si può prendere un fascio di quasiparticelle di "test" e separarlo in due fasci: uno di questi viene fatto girare a destra del gruppo di quasiparticelle di cui si vuole misurare la carica, mentre l'altro a sinistra. Siccome i due fasci hanno effettuato un'intreccio diverso con il gruppo di quasiparticelle da esaminare hanno effettuato anche un'evoluzione unitaria distinta; quando si ricongiungeranno l'interferenza fra i due fasci rifletterà quindi la carica topologica delle quasiparticelle esaminate.

La trasformazione unitaria che viene effettuata dipende esclusivamente dalla topologia dell'intreccio effettuato. Si potrebbe obiettare che questo metodo possa comportare degli errori nella computazione se le particelle non ritornano esattamente nelle posizioni di partenza dopo l'intreccio. Il problema è tuttavia solo apparente per la natura stessa della computazione a cui corrispondono linee d'universo chiuse: per esempio quando la computazione coinvolge la creazione e l'annichilazione di due particelle, queste costituiscono delle linee chiuse nello spazio-tempo. Se l'effettuazione della misura comporta portare vicino due quasiparticelle per misurarne la carica totale non importa precisamente *dove* questo accada. Se invece si vuole effettuare una misura tramite esperienze di interferenza allora i due fasci dovranno per forza compiere traiettorie chiuse. Ne consegue che i processi di inizializzazione e misurazione intrinsecamente comportano il portare vicino le quasiparticelle in qualche modo, chiudendo le traiettorie e rendendo il processo completamente topologico.

3.2 Stabilità e protezione dagli errori con l'uso di quasiparticelle

Per le sue caratteristiche particolari la computazione topologica tramite quasiparticelle garantisce intrinsecamente una stabilità ed immunità dagli errori grazie alla stabilità del suo ground-state rispetto alle perturbazioni locali. Se infatti nei computer quantistici non-topologici i qubit sono delle entità locali e sono quindi soggetti a perturbazioni locali, in questo caso sono invece delle entità non-locali influenzati solo dagli intrecci delle quasiparticelle, rendendoli immuni da tali perturbazioni. Questa proprietà garantisce un'eccezionale protezione da errori legati all'ambiente.

E' da considerare anche che con tale approccio alla computazione sono evitati eventuali errori sistematici effettuati durante la computazione. Infatti il problema citato in Sezione 2.4.1 sull'eventuale ed erronea rotazione di un qubit di 90.01 gradi anziché 90.00 con questo approccio non sussiste. Questo tipo di computazione infatti è **discreta** e non continua: si può intrecciare o meno una particella con un'altra ma non si può ottenere un risultato misto (che non influenza il risultato fintanto che la classe topologica di trecce effettuate rimane la stessa). L'insorgere di piccoli errori sistematici durante la computazione è quindi escluso.

3.3 Errori e problemi per la computazione con quasiparticelle

Arrivati a questo punto ci si potrebbe chiedere quali siano quindi le possibili fonti di errore. Vista l'eccezionale stabilità della computazione con l'uso di quasiparticelle, è chiaro che l'unico errore possibile nella computazione sta proprio nell'effettuare degli intrecci indesiderati che implicherebbero una computazione errata. Per ottenere un risultato corretto bisognerebbe infatti tenere traccia di tutte le quasiparticelle del sistema su cui stiamo performando la computazione, assicurandoci che nessuna di queste effettui l'intreccio sbagliato ed effettuino invece quelli voluti. Questa affermazione non si riferisce solo alle quasiparticelle "note" nel sistema, ma anche quelle indesiderate che potrebbero essere celate all'interno del sistema. Due possibili fonti di queste quasiparticelle indesiderate sono:

1. Coppie quasiparticelle-quasilacune generate per eccitazione termica;
2. Quasiparticelle localizzate casualmente ed intrappolate dal disordine (e.g. impurità).

Per esempio se consideriamo il caso di eccitazione termica, le fluttuazioni potrebbero generare una coppia quasiparticella-quasilacuna dal vuoto, queste potrebbero intrecciarsi con delle quasiparticelle di interesse e poi annichilarsi chiudendo l'intreccio; siccome tipicamente queste coppie hanno carica opposta tendenzialmente saranno anche attratte reciprocamente facilitando l'annichilazione: come risultato la computazione è stata rovinata. Per fortuna esiste un'ampia classe di processi simili che non causano errori che include anche i fenomeni più comuni: e.g. da una delle coppie termiche citate in precedenza si intrecciano con una sola quasiparticella per poi annichilarsi o se una quasiparticella della coppia si annichila con una quasiparticella già esistente. Per provocare errori la coppia eccitata deve intrecciarsi almeno con una coppia di quasiparticelle. Nonostante ciò la creazione di queste coppie rappresenta un problema serio e di conseguenza per ovviare a questo problema la computazione deve essere effettuata a temperature molto basse, al di sotto del gap di energia necessaria per la creazione delle coppie in modo da rendere l'effetto esponenzialmente meno significativo.

Il problema delle quasiparticelle indotte dal disordine (impurità distribuite casualmente, ...) è più complesso da gestire. Infatti modificano il ground-state in maniera inaspettata e difficile da controllare; per di più potrebbero effettuare effetto tunnel verso le loro controparti crenando una dinamica in un sistema che dovrebbe essere invece controllato, con il rischio di rovinare la computazione.

Infine va ricordato che come gli anyoni non abeliani siano candidati naturali per questo processo, non tutti soddisfano ai requisiti per effettuare un processo di computazione: questi dovranno avere una "ricchezza" nelle operazioni di intreccio tale per cui si possano definire tutte le porte logiche. Il modello di anyoni più semplice che soddisfa a questo requisito è il modello di Fibonacci che verrà discusso nella successiva sezione.

3.4 Computazione con gli anyoni di Fibonacci

Come detto sopra, il sistema di anyoni di Fibonacci rappresenta il sistema di quasiparticelle più semplice in grado di poter creare tutte le porte logiche necessarie ad un processo di computazione. Verrà quindi ora discussa come effettivamente poter creare i qubit ed effettuare le operazioni di computazione con gli anyoni di Fibonacci, riprendendo i concetti esposti nella Sezione 1.4.

3.4.1 Introduzione dei qubit

Il primo passo da fare è introdurre i qubit. La scelta più intuitiva sarebbe quella di scegliere due particelle a cui far corrispondere i due stati ortogonali del qubit: nel caso specifico la scelta naturale ricadrebbe su $|(\bullet, \bullet)_1\rangle$ e $|(\bullet, \bullet)_\tau\rangle$. Questa scelta non è tuttavia conveniente dal punto di vista computazionale. Durante la computazione è utile poter effettuare operazioni sui singoli qubit intrecciando le particelle, ma non esistono operazioni di intreccio in grado di cambiare la carica di due anyoni: per

esempio è impossibile intrecciando due particelle passare da $|(\bullet, \bullet)_1\rangle$ a $|(\bullet, \bullet)_\tau\rangle$.

Per rimediare a questo problema è possibile utilizzare, fra i vari modi possibili, un insieme di tre quasiparticelle. Con tre anyoni di Fibonacci sono possibili tre stati che vengono denominati con $|0\rangle$, $|1\rangle$ ed $|N\rangle$; questi corrispondono agli stati descritti già nella Sezione 1.4.4 e raffigurati in Figura 3.1

$$\begin{aligned}
 |0\rangle &= |((\bullet, \bullet)_1, \bullet)_\tau\rangle = \text{diagramma} = \text{diagramma} \\
 |1\rangle &= |((\bullet, \bullet)_\tau, \bullet)_\tau\rangle = \text{diagramma} = \text{diagramma} \\
 |N\rangle &= |((\bullet, \bullet)_\tau, \bullet)_1\rangle = \text{diagramma} = \text{diagramma}
 \end{aligned}$$

Figura 3.1: Rappresentazione dei tre possibili stati usati per i qubit.

Lo stato $|N\rangle$ è uno stato *non-computazionale*: a livello pratico si fa in modo che all'inizio e alla fine della computazione l'ampiezza di questo stato sia nulla; ogni ampiezza che finisce in tale stato è chiamata "errore di perdita" (*leakage error*). Fortunatamente come si vede dalle Equazioni 1.31 e 1.33, $\rho(\sigma_1)$ e $\rho(\sigma_2)$ sono diagonali a blocchi e quindi nelle operazioni di intreccio non mischiano $|0\rangle$ e $|1\rangle$ con $|N\rangle$. Ne segue quindi che è possibile effettuare operazioni sui singoli qubit senza incappare in errori di perdita.

3.4.2 Intreccio ed operazioni unitarie

Si può dimostrare che lo spazio delle trecce ha immagine densa nell'insieme delle operazioni unitarie per la teoria di Fibonacci. Ciò significa che per qualunque operazione desiderata esiste un intreccio cui corrisponde l'operazione unitaria cercata in modo arbitrariamente prossimo. Ne segue che più vogliamo approssimare nel modo corretto un'operazione desiderata, più sarà lunga la treccia corrispondente (questo è vero però cresce solo logaritmicamente).

Un modo possibile per trovare quindi l'operazione di intreccio cercata consiste nel fissare la lunghezza della treccia e poi, con un metodo di forza bruta su un computer classico, esaminare tutte le possibili combinazioni ed accettare quella che riproduce con approssimazione migliore l'operazione desiderata. Questo metodo funziona bene se le trecce impiegate hanno lunghezza corta (Bonesteel et al., 2005; Hormozi et al., 2007), ma più si allungano le trecce più il problema cresce esponenzialmente se si vogliono risultati accurati. Fortunatamente esiste un algoritmo iterativo dovuto a Solovay e Kitaev che permette di unire brevi pezzi di treccia e costruire quindi una treccia lunga che approssima in maniera arbitrariamente precisa l'operazione desiderata; tuttavia la treccia così trovata non è, in genere, la più breve possibile.

3.4.3 Porte logiche a due qubit

Per poter effettuare una computazione quantistica universale occorre oltre al saper gestire operazioni sui singoli qubit, anche gestire porte logiche che prevedano l'uso di due qubit. Porte logiche o *gate* a due qubit implicano l'intreccio di particelle appartenenti ai due differenti qubit. I risultati di Freedman et al. (2002) hanno dimostrato che esistono operazioni di intreccio per ogni operazione unitaria sullo spazio di Hilbert dei due qubit; nonostante ciò lo spazio associato a sei particelle di Fibonacci possiede 13 dimensioni e risulta quindi molto arduo ricercare la treccia corretta per l'operazione desiderata, anche con l'utilizzo di computer classici molto potenti. Il problema può essere quindi affrontato per parti, cercando di costruire il gate a due qubit solo con l'intreccio di tre particelle delle sei a disposizione.

Concettualmente quello che si cerca di fare è riportato in Figura 3.2. Si considerino per esempio tre particelle di cui due stazionarie ed una mobile in grado di intrecciarsi con le prime due; cerchiamo per esempio l'intreccio della particella mobile con le due stazionarie sullo spazio di Hilbert in modo tale per cui sia equivalente allo scambio delle due particelle stazionarie. Un'operazione di questo tipo che coinvolge solo tre particelle è di gran lunga meno complessa ed è più abbordabile come problema per quanto detto nella precedente sezione.

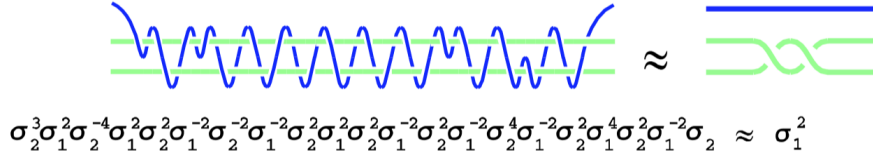


Figura 3.2: In figura sono rappresentate le tre particelle che esemplificano l'interazione di due qubit per creare un gate; in verde le due particelle stazionarie e in blu l'altra mobile. L'approssimazione fra la serie di generatori del gruppo delle trecce a sinistra e σ_1^2 è realizzata considerando la loro rappresentazione matriciale riferendosi agli anyoni di Fibonacci (vedi poi esempi in Sezione 3.4.4).

Torniamo ora al problema con i due qubit e chiamiamoli uno di "controllo" e uno "bersaglio". Prendiamo due particelle appartenenti al qubit di controllo e, considerandoli come un'unica particella, facciamoli intrecciare con due particelle del qubit bersaglio (il procedimento è di fatto quello esemplificato di sopra). A questo punto valutiamo l'azione di questo effetto sul sistema: se la coppia di particelle di controllo ha carica $\mathbf{1}$ (quindi se il qubit di controllo è nello stato $|0\rangle$) allora l'unico effetto nell'intrecciarle con le particelle bersaglio sarà una fase abeliana (intrecciare $\mathbf{1}$ è equivalente a non intrecciare nulla); se invece la coppia di controllo ha carica τ (i.e. qubit di controllo in $|1\rangle$), questa può essere considerata come un'unica particella τ che intrecciandosi con le due particelle bersaglio causa una trasformazione non banale. Se si utilizza la trasformazione esemplificata in Figura 3.2, abbiamo creato un gate per una "rotazione controllata", riportato in Figura 3.3: la rotazione delle due particelle nel qubit bersaglio avviene solamente se il primo è nello stato $|1\rangle$.

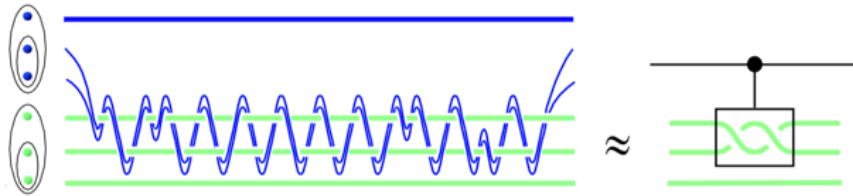


Figura 3.3: Schema di controllo per un gate a due qubit in cui il qubit di controllo (in blu) induce una trasformazione sul qubit bersaglio (in verde).

Le operazioni su singoli qubit unite a quelle su due qubit costituiscono un set universale per la computazione quantistica.

3.4.4 Altri esempi di operazioni su qubit

Vediamo ora un paio di porte logiche che possono essere create tramite intreccio di anyoni di Fibonacci. Per caratterizzare l'accuratezza delle approssimazioni per le operazioni ricavate dalle trecce è necessario definire una norma che indichi "la distanza" fra due matrici. Indicando con $\sigma(A)$ lo spettro di una matrice A , può ad esempio essere definita la distanza fra due matrici U e V come:

$$\epsilon \equiv \|U - V\| \quad , \quad \|O\| \equiv \sqrt{\max_{\lambda \in \sigma(O^\dagger O)} (\lambda)} \tag{3.1}$$

NOT Cominciamo con un'operazione su singolo qubit: la porta logica NOT, per cui si potrebbe usare il seguente intreccio (N. E. Bonesteel et al.):

$$\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-4}\sigma_1^4\sigma_2^{-2}\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-4}\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-4}\sigma_1^2\sigma_2^{-4}\sigma_1^2\sigma_2^{-2}\sigma_1^2\sigma_2^{-2}\sigma_1^{-2} \approx \left(\begin{array}{cc|c} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (3.2)$$

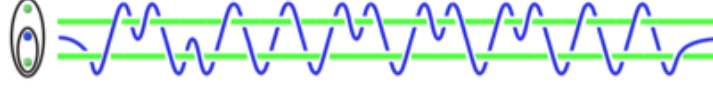


Figura 3.4: Rappresentazione schematica della treccia per la porta logica NOT su un qubit.

In effetti svolgendo i calcoli il risultato della treccia in Equazione 3.2 è circa pari a:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.00064 - 0.00016i & -0.00055 + i & 0 & \\ 0.00055 + i & 0.00064 + 0.00016i & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (3.3)$$

In questo caso la distanza fra la matrice cercata in Equazione 3.2 e quella trovata in Equazione 3.3 è pari a:

$$\epsilon \approx 8.5 \cdot 10^{-4}$$

Scambio di particelle con Identità Questa operazione permette di introdurre una particella all'interno del qubit senza modificare lo stato del sistema.

$$\sigma_2^3\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-4}\sigma_1^2\sigma_2^4\sigma_1^2\sigma_2^{-2}\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-4}\sigma_1^{-4}\sigma_2^{-2}\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_1^{-2}\sigma_2^2\sigma_1^2\sigma_2^{-2}\sigma_1^3 \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (3.4)$$

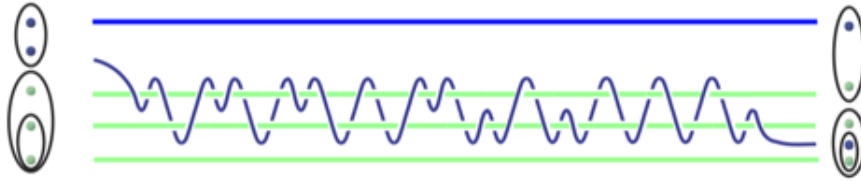


Figura 3.5: Rappresentazione schematica della treccia per iniezione di una particella in un qubit con identità dello stato.

Svolgendo i calcoli, il risultato della treccia in Equazione 3.4 è circa pari a:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 - 0.00074i & -0.00116 + 0.00062i & 0 & \\ 0.00116 + 0.00062i & 1 + 0.00074i & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (3.5)$$

In questo caso la distanza fra la matrice cercata in Equazione 3.4 e quella trovata in Equazione 3.5 è pari a:

$$\epsilon \approx 1.5 \cdot 10^{-3}$$

Capitolo 4

Conclusioni

In conclusione la realizzazione della computazione quantistica tramite l'utilizzo di anyoni è teoricamente possibile ed offre grandissimi vantaggi (come mostrato nel corso del precedente capitolo) relativamente alla protezione del sistema da errori casuali (ambiente) e sistematici.

Il problema si sposta però sulla ricerca di questi anyoni; come detto infatti ad oggi non sono ancora stati trovati degli anyoni che seguano una statistica non-Abeliana, tantomeno gli anyoni di Fibonacci che sono stati discussi.

Di recente, il 4 giugno 2018, è stato pubblicato su *Nature* un articolo [10] di un team di fisici nel quale si descrive come il calore è trasmesso in uno stato della materia noto come *quantum Hall liquid* in cui gli elettroni sono confinati in due dimensioni. I risultati ottenuti nell'esperimento suggeriscono la presenza in tale materiale di anyoni non-Abeliani che potrebbero quindi aprire la via verso la computazione quantistica.

Nel frattempo in tutto il mondo grandi gruppi di ricerca di università e grandi aziende come Google, Intel, Microsoft e molte altre continuano a lavorare sulla creazione di un computer quantistico, attirati dalla rivoluzione che porterebbe; l'Unione Europea stessa ha stanziato un fondo di 1 miliardo di euro da investire nel prossimo decennio per le tecnologie quantistiche che verrà sbloccato quest'anno.

Questa "corsa all'oro" della ricerca porterà in ogni caso ad una vera e propria rivoluzione informatica e tecnologica che, poichè ad oggi l'informatica è presente in quasi tutti i settori, investirà direttamente o meno ogni aspetto della nostra vita quotidiana. La gara è ancora aperta.

Appendici

Appendice A

Calcolo della matrice F per gli anyoni di Fibonacci

Come visto nella Sezione 1.4.2 la matrice F è non banale se e solo se riferita ai soli anyoni τ in partenza e come risultato della fusione. In generale avremo quindi che:

$$F_{\tau}^{\tau\tau\tau} \equiv F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Visto il vincolo di unitarietà sulla matrice, varranno intanto le seguenti relazioni:

$$FF^{\dagger} = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & a\bar{c} + b\bar{d} \\ \bar{a}c + \bar{b}d & |c|^2 + |d|^2 \end{pmatrix} = \mathbb{1} \quad (\text{A.2})$$

A questo punto aggiungiamo le condizioni caratteristiche degli anyoni di Fibonacci già accennate nella Sezione 1.4.2:

$$(F)_1^1 = (F)_\tau^1 (F)_1^\tau \Rightarrow a = bc \quad (\text{A.3})$$

$$[(F_{\tau}^{\tau\tau\tau})_\tau^\tau]^2 = (F_{\tau}^{\tau\tau\tau})_1^1 (F_{\tau}^{\tau\tau\tau})_1^\tau + [(F_{\tau}^{\tau\tau\tau})_\tau^\tau]^3 \Rightarrow d^2 = bc + d^3 \quad (\text{A.4})$$

Si ottiene quindi il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} |a|^2 + |b|^2 = 1 \\ |c|^2 + |d|^2 = 1 \\ \bar{a}c + \bar{b}d = 0 \\ a = bc \\ d^2 = bc + d^3 \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Dalla terza e dalla quarta equazione si deduce che:

$$b(|c|^2 + \bar{d}) = 0$$

La soluzione con $b = 0$ non rispetta il sistema e va scartata, da cui:

$$\bar{d} = -|c|^2 \quad (\text{A.6})$$

Tale relazione implica che d è un numero reale e negativo, per cui si potrà più semplicemente omettere il simbolo di coniugato. Dalla prima equazione e dalla quarta troviamo:

$$|a|^2 = \frac{|c|^2}{1 + |c|^2} \quad |b|^2 = \frac{1}{1 + |c|^2} \quad (\text{A.7})$$

Utilizzando infine il risultato per d in Equazione A.6 e la seconda equazione del Sistema A.5 si ottiene:

$$|c|^4 + |c|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad |c|^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

La soluzione con il $-$ va scartata perchè negativa e risulta quindi:

$$|c|^2 = \frac{1}{\varphi} \quad (\text{A.8})$$

dove $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ è la *sezione aurea*. Risostituendo il valore trovato e ricordando che $\varphi^2 = \varphi + 1$:

$$\begin{cases} |a| = \varphi^{-1} \\ |b| = |c| = \varphi^{-1/2} \\ d = -\varphi^{-1} \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Prendendo infine l'ultima equazione del Sistema A.5 unita alla penultima si ottiene che:

$$a = d^2 - d^3 \quad (\text{A.10})$$

Da cui si deduce che a è reale e vale φ^{-1} . Siccome a è reale e $a = bc$ allora significa che $c = \bar{b}$. Allora a meno di una fase ϕ si trova:

$$F_\tau^{\tau\tau\tau} = F_\tau^{\tau\tau\tau\dagger} = \begin{pmatrix} \varphi^{-1} & e^{i\phi} \varphi^{-1/2} \\ e^{-i\phi} \varphi^{-1/2} & -\varphi^{-1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Con un'opportuna convenzione sulla fase questa può essere posta uguale ad 1 porgendo il risultato annunciato.

Appendice B

Calcolo della matrice R per gli anyoni di Fibonacci

Partiamo dalla relazione dell'esagono:

$$R_c^{\tau\tau} (F_\tau^{\tau\tau\tau})_a^c R_a^{\tau\tau} = \sum_b (F_\tau^{\tau\tau\tau})_b^c R_\tau^{\tau b} (F_\tau^{\tau\tau\tau})_a^b \quad (\text{B.1})$$

In questa equazione $b = 1, \tau$ mentre c ed a sono indici liberi che specificano le componenti della matrice. Ricordando che:

$$R_\tau^{1\tau} = R_\tau^{\tau 1} = 1 \quad (\text{B.2})$$

e sapendo la forma di F , si ottiene la seguente uguaglianza fra matrici:

$$\begin{pmatrix} \varphi^{-1}(R_1^{\tau\tau})^2 & \varphi^{-1/2}R_1^{\tau\tau}R_\tau^{\tau\tau} \\ \varphi^{-1/2}R_1^{\tau\tau}R_\tau^{\tau\tau} & -\varphi^{-1}(R_\tau^{\tau\tau})^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^{-2} + \varphi^{-1}R_\tau^{\tau\tau} & \varphi^{-3/2}(1 - R_\tau^{\tau\tau}) \\ \varphi^{-3/2}(1 - R_\tau^{\tau\tau}) & \varphi^{-1} + \varphi^{-2}R_\tau^{\tau\tau} \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Corrisponde quindi il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \varphi^{-1}(R_1^{\tau\tau})^2 = \varphi^{-2} + \varphi^{-1}R_\tau^{\tau\tau} \\ \varphi^{-1/2}R_1^{\tau\tau}R_\tau^{\tau\tau} = \varphi^{-3/2}(1 - R_\tau^{\tau\tau}) \\ -\varphi^{-1}(R_\tau^{\tau\tau})^2 = \varphi^{-1} + \varphi^{-2}R_\tau^{\tau\tau} \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Cominciamo con il risolvere la terza equazione; chiamando $R_\tau^{\tau\tau} \equiv x$ e rimoltiplicando opportunamente per ϕ si ottiene:

$$\varphi x^2 + x + \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\varphi^2}}{2\varphi}$$

Ricordando che la sezione aurea φ è tale per cui $\varphi^2 = \varphi + 1$ e $\varphi - 1 = 1/\varphi$ si ottiene:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\varphi^2}}{2\varphi} = \frac{1}{2}(\varphi - 1)(-1 \pm \sqrt{1 - 4\varphi^2}) = \frac{1}{2}(\varphi - 1)(-1 \pm i\varphi\sqrt{2 + \varphi})$$

che corrisponde ad un numero complesso con:

$$\text{Re}(x) = \frac{1}{2}(1 - \varphi) \quad , \quad \text{Im}(x) = \pm \frac{1}{2}\varphi(\varphi - 1)\sqrt{2 + \varphi}$$

Cerchiamo ora di metterlo nella forma $x = \rho_x e^{i\theta}$:

$$\begin{aligned} \rho_x^2 &= |x|^2 = \frac{1}{4}(\varphi - 1)^2(1 + \varphi^2(2 + \varphi)) = \frac{1}{4}(\varphi - 1)^2(1 + (\varphi + 1)(2 + \varphi)) = \frac{1}{4}(\varphi - 1)^2(\varphi^2 + 3\varphi + 3) = \\ &= \frac{1}{4}(\varphi - 1)^2 4(\varphi + 1) = (\varphi - 1)(\varphi^2 - 1) = 1 \end{aligned}$$

Si avrà poi:

$$\tan(\theta) = \pm \frac{\varphi(\varphi - 1)\sqrt{2 + \varphi}}{(1 - \varphi)} = \mp \varphi \sqrt{2 + \varphi}$$

a cui corrisponde (basta cercare su delle tavole goniometriche):

$$\theta = \mp \frac{3}{5}\pi \quad \Rightarrow \quad x = e^{\mp 3\pi i/5}$$

Concludiamo quindi che:

$$R_\tau^{\tau\tau} = e^{\mp 3\pi i/5} \quad (\text{B.5})$$

Concentriamoci ora sul calcolo di $R_1^{\tau\tau}$; utilizzando la seconda equazione di B.4, chiamando $y \equiv R_1^{\tau\tau}$ e moltiplicando per gli opportuni fattori si ottiene:

$$\varphi xy = 1 - x \rightarrow y = (\varphi - 1) \left(\frac{1}{x} - 1 \right)$$

a cui corrisponde un numero complesso con:

$$\text{Re}(y) = (\varphi - 1)(\cos(\theta) - 1) \quad , \quad \text{Im}(y) = -(\varphi - 1)\sin(\theta)$$

Se consideriamo y nella forma $y = \rho_y e^{i\psi}$ si ha:

$$\rho_y^2 = |y|^2 = 2(\varphi - 1)^2(1 - \cos(\theta)) = \frac{2}{\varphi^2}(1 - \cos(\theta))$$

Dobbiamo valutarlo in $\theta = \mp 3\pi/5$; con tale angolo inserito si ha $|\rho_y| = 1$, infatti:

$$1 - \cos(\mp 3\pi/5) = 1 - \frac{1 - \sqrt{5}}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1 + \sqrt{5}}{4} = \frac{1}{2}(1 + \varphi) = \frac{\varphi^2}{2}$$

Per quel che riguarda la fase invece, utilizzando le proprietà di φ già citate, si ha:

$$\tan(\psi) = \pm \frac{\sin(3\pi/5)}{1 - \cos(3\pi/5)} = \pm \frac{2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{\varphi^2 \cdot 4} = \pm \frac{\sqrt{\varphi + 2}}{\varphi^2} = \pm \sqrt{7 - 4\varphi} = \pm \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$$

Da cui, consultando le tabelle goniometriche:

$$\psi = \pm \frac{4}{5}\pi \quad \Rightarrow \quad y = e^{\pm 4\pi i/5}$$

Otteniamo quindi che:

$$R_1^{\tau\tau} = e^{\pm 4\pi i/5} \quad (\text{B.6})$$

Si può verificare facilmente che le due coppie di soluzioni verificano anche la prima Equazione del sistema B.4, il ch  pone fine alla dimostrazione.

Le soluzioni quindi trovate sono:

$$R_\tau^{\tau\tau} = e^{\pm 3\pi i/5} \quad , \quad R_1^{\tau\tau} = e^{\mp 4\pi i/5} \quad (\text{B.7})$$

Bibliografia

- [1] Wilczek, F., Quantum mechanics of fractional-spin particles, Phys. Rev. Lett. 49(14), 957, (1982).
- [2] Chetan Nayak, Steven H. Simon, Ady Stern, Michael Freedman¹, Sankar Das Sarm, 2008, Non-Abelian Anyons and Topological Quantum Computation.
- [3] Simon Trebst, Matthias Troyer, Zhenghan Wang, Andreas W.W.Ludwig, 2008, A short introduction to Fibonacci anyon models.
- [4] Berry, M. V., 1984, Quantal phase factors accompanying adiabatic changes, Proc. Roy. Soc. Lond. A392, 45.
- [5] Nielsen, M. A., and I. L. Chuang, 2000, Quantum Computation and Quantum Information (Cambridge University Press, Cambridge).
- [6] Preskill, J., 2004, Lecture notes for physics 219: Quantum Computation
- [7] Richard P. Feynman, 1981, Simulating Physics with Computers, International Journal of Theoretical Physics, Vol 21, Nos.6/7, 1982
- [8] Bonesteel, N. E., L. Hormozi, G. Zikos, and S. H. Simon, 2005, Braid topologies for quantum computation, Phys. Rev. Lett. 95(14), 140503.
- [9] Hormozi, L., G. Zikos, N. E. Bonesteel, and S. H. Simon, 2007, Topological quantum compiling, Phys. Rev. B 75(16), 165310.
- [10] Mitali Banerjee, Moty Heiblum, Vladimir Umansky, Dima E. Feldman, Yuval Oreg and Ady Stern, 2018, Observation of half-integer thermal Hall conductance, Nature.