

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Modelli unificati di materia ed energia oscura

Relatore

Prof. Sabino Matarrese

Correlatore

Prof. Daniele Bertacca

Laureando

Cecilia Sgalletta

Anno Accademico 2018/2019

Indice

1	Caratteristiche generali dei modelli unificati	1
2	Alcuni modelli unificati	5
2.1	Modelli puramente cinetici	5
2.1.1	Gas di Chaplygin generalizzato	6
2.1.2	Modello di Scherrer	6
2.2	Modelli con termine cinetico canonico	7
2.3	Modelli con termine cinetico non canonico	8
2.3.1	Lagrangiane del tipo $L(\varphi, X) = g(X) - V(\varphi)$	8
2.3.2	Lagrangiane del tipo $L(\varphi, X) = f(\varphi)g(X)$	9
3	Come costruire un modello unificato	11
3.1	Come costruire un modello unificato	11
3.2	Modelli unificati generalizzati	14
3.2.1	Ricostruzione dei potenziali $f(\varphi)$, $h(\varphi)$ e $V(\varphi)$	15
3.2.2	Esempio di modello unificato di un campo scalare	16
3.3	Discussione dei parametri del modello	18
3.3.1	Caso 1: a_t trascurabile	19
3.3.2	Caso 2: a_t non trascurabile	20
	Conclusioni	23

Introduzione

Negli ultimi decenni il modello Λ CDM è diventato il modello "di punta" nella descrizione dell'universo. Si basa sul principio cosmologico, secondo cui, su larga scala, l'universo è omogeneo ed isotropo, e assume la Relatività Generale di Einstein come corretta teoria di gravità. Secondo tali assunzioni la metrica del nostro universo è quella di Robertson-Walker e le equazioni di Einstein si riducono a quelle di Friedmann. In generale soluzioni di queste equazioni sono chiamate modelli di Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW).

Il modello Λ CDM è una parametrizzazione del modello cosmologico del Big Bang ed è descritto da sei parametri indipendenti: densità di materia barionica, densità di materia oscura, età dell'universo, indice spettrale scalare, ampiezza di fluttuazione di curvatura e lunghezza ottica di ionizzazione. Prevede che la dinamica dell'universo sia governata da due componenti principali: una costante cosmologica, denotata Λ , associata all'energia oscura e responsabile dell'accelerazione dell'universo, e materia oscura fredda (CDM), che si ritiene essere la principale causa della formazione delle strutture che si possono osservare oggi. Il successo del modello Λ CDM risiede in primo luogo nell'ottimo accordo che presenta con i dati osservati, inoltre è stato in grado di fornire previsioni di effetti successivamente verificati, come il fenomeno della lente gravitazionale, la distribuzione della materia barionica e la polarizzazione della radiazione cosmica di fondo.

La materia oscura è stata introdotta per spiegare effetti gravitazionali osservati in strutture di larga scala. In particolare i dati hanno evidenziato come nelle galassie a spirale la velocità di rotazione, invece di decrescere come l'inverso del quadrato del raggio a grandi distanze dal centro della galassia, si mantenga pressoché costante per circa dieci volte il raggio della galassia stessa. Per spiegare questa evidenza sperimentale è stata quindi ipotizzata la presenza di materia non visibile che circonda la galassia a spirale formando un alone, la materia oscura. La natura della materia oscura è ancora oggi al centro di un acceso dibattito e oggetto di studio. Lo studio negli anni '90 sul redshift delle Supernovae di tipo Ia ha messo in evidenza che l'universo è in espansione accelerata, e questa scoperta completamente inaspettata dal momento che la presenza della materia avrebbe dovuto piuttosto rallentare l'espansione. È proprio per tale ragione che è stata ipotizzata l'esistenza dell'energia oscura. Nel modello Λ CDM questa è rappresentata dalla costante cosmologica ed è caratterizzata da una densità di energia costante e da una pressione negativa, in grado di guidare l'espansione accelerata dell'universo.

Tuttavia il modello Λ CDM non è esente da problemi. Per quanto concerne la materia oscura, il modello non riesce a spiegare il perché questa si trovi principalmente ai margini delle galassie e non al centro, dove dovrebbe tendere a concentrarsi per effetto dell'attrazione gravitazionale, inoltre prevede che la stessa produca un numero di galassie nane molto maggiore di quello effettivamente riscontrato. Anche la costante cosmologica è al centro di due grandi questioni ancora aperte. La prima va sotto il nome di "problema della costante cosmologica", cioè il valore osservato è di molti ordini di grandezza inferiore rispetto a quello previsto dalla teoria. Il secondo problema è quello della coincidenza cosmica: il modello Λ CDM non fornisce una spiegazione al perché le tre componenti che costituiscono l'universo (radiazione, materia ed energia oscura) sono presenti circa nella stessa quantità oggi sebbene esse scalino in maniera differente con il tempo, dalle equazioni di Friedmann si trova infatti che $\rho_{rad} \propto a^{-4}$, $\rho_{mat} \propto a^{-3}$ e $\rho_{\Lambda} = const.$

Come alternativa sono stati proposti dei modelli con un'energia del vuoto variabile, chiamati di *quintessenza*. Questi modelli sono descritti da un campo scalare con un potenziale che permette all'energia del vuoto di diventare importante solo in tempi recenti. Tuttavia non evita il problema del "fine tuning"

ning" non riuscendo quindi a dare una giusta giustificazione al problema di coincidenza cosmica.

Un approccio alternativo è quello di considerare la materia e l'energia oscura come due aspetti di un'unica componente (modelli UDM). Rispetto ai modelli standard DM+DE, questi modelli sono caratterizzati da un unico campo scalare che descrive la dinamica dell'universo e deve quindi guidare sia l'espansione accelerata sia la formazione di strutture dell'universo. Il primo modello ad essere stato proposto in questo senso è stato il gas di Chaplygin, in cui un singolo fluido, che obbedisce all'equazione di stato $p = -A/\rho$, mima la componente oscura. Quest'ultimo ha aperto la strada a numerosi altri modelli, una particolare classe di questi sono costituiti da Lagrangiane con un termine cinetico non canonico, cioè un termine che è una funzione arbitraria del quadrato della derivata rispetto al tempo del campo scalare, e vengono detti modelli di k-essenza. Una caratteristica di particolare importanza di questi modelli è la possibilità di superare il problema di coincidenza cosmica imponendo che la configurazione attuale dell'universo sia un attrattore per le soluzioni delle equazioni del moto del campo scalare.

Più recenti lavori sui modelli unificati sono stati portati avanti negli articoli [9{11].

La presente tesi si propone di studiare modelli unificati descritti da un campo scalare dipendente solo dal tempo e trarre da questi alcune proprietà generali. In particolare nel capitolo 1 sono descritte le principali caratteristiche che deve avere un modello di questo tipo per osservare un comportamento del campo scalare concorde con le osservazioni sperimentali. Nel secondo capitolo verranno studiate e delineate le proprietà principali di lagrangiane di k-essenza, con termine puramente cinetico, quali il gas di Chaplygin e il modello di Scherrer. Verranno inoltre brevemente enunciati modelli con lagrangiane con termine cinetico canonico e non canonico. Nel terzo capitolo si fornirà una regola generale per costruire modelli unificati di materia ed energia oscura. Nello stesso capitolo si mostrerà inoltre che è possibile ottenere in questo modo un'equazione di stato $w_{DE} < -1$, per un fluido che non viola la condizione di energia nulla $p + \rho \geq 0$.

Capitolo 1

Caratteristiche generali dei modelli unificati

In questo capitolo viene fornita una descrizione generale delle proprietà che devono avere i modelli unificati in modo da essere praticabili e permettere una descrizione dell'universo compatibile con quello che viene osservato oggi. Di seguito vengono introdotte alcune nozioni che saranno utili nel corso del presente lavoro.

La segnatura della metrica adottata è $(-, +, +, +)$, sono state inoltre usate le unità $8\pi G = c^2 = 1$. Si consideri l'azione:

$$S = S_G + S_\varphi = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2} + \mathcal{L}(\varphi, X) \right] \quad (1.1)$$

Dove

$$X = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \quad (1.2)$$

Il tensore energia-impulso del campo scalare φ ha la seguente forma:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_\varphi}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi, X)}{\partial X} \dot{\varphi} \dot{\varphi} + \mathcal{L}(\varphi, X) g_{\mu\nu} \quad (1.3)$$

e la sua equazione del moto si scrive

$$\square \varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \quad (1.4)$$

Se X dipende solo dal tempo, S_φ descrive un fluido perfetto, con tensore energia-impulso: $T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}$, dove sono state definite la pressione

$$p = p(\varphi, X) \quad (1.5)$$

e la densità di energia

$$\rho = \rho(\varphi, X) = 2X \frac{\partial p(\varphi, X)}{\partial X} - p(\varphi, X) \quad (1.6)$$

dove la quadri-velocità assume la seguente forma

$$u^\mu = \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{2X}} \delta^\mu_0 \quad (1.7)$$

Di seguito si assume un universo piatto descritto da una metrica di background di Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW)

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \delta_{ij} dx^i dx^j = a(\eta)^2 (-d\eta^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j), \quad (1.8)$$

dove $a(t)$ è il fattore di scala che parametrizza l'espansione relativa dell'universo e δ_{ij} denota la delta di Dirac. Si usa la convenzione di porre pari ad 1 il fattore di scala attuale, $a(t_0) = 1$. η indica il tempo conforme, legato al tempo cosmologico dalla relazione $dt = a(\eta)d\eta$. Assumendo quindi la componente della radiazione trascurabile nei tempi di interesse e con le assunzioni appena fatte, l'evoluzione dell'universo nel background risulta completamente determinata dalle seguenti equazioni:

$$H^2 = a^2 H^2 = \frac{1}{3} a^2 \rho \quad (1.9)$$

$$H^\theta \quad H^2 = a^2 H = \frac{1}{2} a^2 (p + \rho), \quad (1.10)$$

dove è stato introdotto il parametro di Hubble $H = \dot{a}/a$ e $H^\theta = \dot{a}^\theta/a$. Con il punto si indica la derivazione rispetto al tempo cosmologico, mentre con il primo quella rispetto al tempo conforme. Le equazioni 1.9 e 1.10 implicano l'equazione di conservazione dell'energia:

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p). \quad (1.11)$$

Usando l'equazione 1.11 è utile ricavare la dipendenza della densità di energia della materia dal fattore di scala. La materia, nella quale sono incluse sia la materia barionica sia la materia oscura, è caratterizzata da una pressione trascurabile $p \ll 0$, perciò si ottiene $\rho_{mat} \propto a^{-3}$. Nel background si ha $X = \varphi^2/2 = \varphi^{\theta 2}/(2a^2)$. A partire dall'equazione 1.4 e considerando che

$$r \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \varphi)} \right] = r \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} \frac{\varphi^\theta}{a^2} \right]$$

e

$$r \cdot v = \frac{1}{a(\eta)} \partial (a(\eta)v),$$

si arriva all'equazione del moto per $\varphi(t)$:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial X} + 2X \frac{\partial^2 p}{\partial X^2} \right) \varphi + \frac{\partial p}{\partial X} (3H\varphi) + \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi \partial X} \varphi^2 - \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0. \quad (1.12)$$

Nei modelli UDM si possono definire due importanti quantità, la costante dell'equazione di stato $w = p/\rho$, che in questo caso si scrive

$$w = \frac{p}{2X(\partial p/\partial X)}, \quad (1.13)$$

e la velocità del suono, definita in questo caso

$$c_s^2 = \frac{\partial p/\partial X}{\partial \rho/\partial X} = \frac{\partial p/\partial X}{(\partial p/\partial X) + 2X(\partial^2 p/\partial X^2)}. \quad (1.14)$$

La velocità del suono è importante perché entra in gioco nell'evoluzione temporale delle perturbazioni del campo scalare. Si considerano piccole disomogeneità del campo scalare,

$$\varphi(t, x) = \varphi_0(t) + \delta\varphi(t, x) \quad (1.15)$$

e si scrive la metrica perturbata di Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker nella Gauge longitudinale come:

$$ds^2 = -(1 + 2\delta\varphi)dt^2 + a^2(t)(1 - 2\delta\varphi)\delta_{ij}dx^i dx^j, \quad (1.16)$$

dove è stato usato il fatto che $\delta T_i^j = 0$ per $i \neq j$. Linearizzando le componenti $(0, 0)$ e $(0, i)$ delle equazioni di Einstein si ottiene la seguente equazione di differenziale al secondo ordine:

$$u^{\theta\theta} - c_s^2 r^2 u - \frac{\theta^{\theta\theta}}{\theta} u = 0 \quad (1.17)$$

Dove $u = \delta\varphi / (p + \rho)^{1/2}$, $\theta = (1 + p/\rho)^{1/2} / (c_s^2/3a)$ e il primo denota la derivazione rispetto al tempo conforme η . Si nota quindi l'importanza della velocità del suono nell'evoluzione temporale delle

perturbazioni del campo scalare $\delta\varphi$ e nella crescita delle sovradensità $\delta\rho$. In particolare si deve richiedere una velocità del suono sufficientemente piccola per permettere alla materia di clusterare. Un problema che caratterizza molti modelli unificati è infatti la comparsa di una velocità del suono effettiva che può diventare significativamente diversa da zero durante l'evoluzione dell'Universo, in generale portando alla comparsa di un lunghezza di Jeans, cioè orizzonte sonoro, sotto al quale il fluido non è in grado di clusterare. Inoltre la presenza di una velocità del suono non trascurabile può modificare l'evoluzione del potenziale gravitazionale e produrre un forte effetto integrato di Sachs-Wolfe e quindi essere in disaccordo con lo spettro di potenza della temperatura della radiazione cosmica di fondo (CMB) C su larga scala. Per un'analisi più dettagliata di questi aspetti si rimanda agli articoli [5] e [3]. Nel capitolo 3 si propone una tecnica per costruire modelli unificati che siano in grado di riprodurre il comportamento della materia e dell'energia oscura e, al tempo stesso, siano caratterizzati da una velocità del suono effettiva sufficientemente piccola da permettere alla materia di clusterare ed evitare un forte effetto integrato di Sachs-Wolfe.

Capitolo 2

Alcuni modelli unificati

In questo capitolo vengono discussi e analizzati brevemente alcuni modelli unificati di materia ed energia oscura, ponendo particolare attenzione all'andamento della velocità del suono.

2.1 Modelli puramente cinetici

In questa sezione verranno analizzati i modelli puramente cinetici, cioè quelli in cui la lagrangiana L dipende solo da X . Si definisce $p(X) = g(X)$, e la densità di energia

$$\rho(p(X)) = 2X \frac{\partial g(X)}{\partial X} - g(X). \quad (2.1)$$

Da quanto trovato finora si può osservare che i modelli puramente cinetici descrivono un fluido perfetto in cui la pressione risulta determinata univocamente dalla densità di energia. Infatti entrambe dipendono da un unico grado di libertà, il termine cinetico X . Perciò, in questo caso, la velocità del suono corrisponde alla usuale velocità del suono adiabatica. Poiché in questo caso p dipende solo da X , l'equazione generale del moto 1.4 si semplifica, ottenendo:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial X} + 2X \frac{\partial^2 g}{\partial X^2} \right) \varphi + \frac{\partial g}{\partial X} (3H\varphi) = 0, \quad (2.2)$$

che può essere riscritta in termini di X :

$$\left(\frac{\partial g}{\partial X} + 2X \frac{\partial^2 g}{\partial X^2} \right) X + \frac{\partial g}{\partial X} (6HX) = 0. \quad (2.3)$$

Definendo $N = \ln a$, si può effettuare un cambio di variabile, $dX/dt = dX/dNH$, e l'equazione precedente diventa:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial X} + 2X \frac{\partial^2 g}{\partial X^2} \right) \frac{dX}{dN} + 6X \frac{\partial g}{\partial X} = 0, \quad (2.4)$$

che può essere integrata esattamente per una generica funzione $g(X)$, e la soluzione generale risulta:

$$X \left(\frac{\partial g}{\partial X} \right)^2 = ka^{-6} \quad (2.5)$$

dove k è una costante positiva. Dall'equazione 2.5, per $N \rightarrow 1$, X o $\partial g/\partial X$ (o entrambi) devono tendere a zero, quindi, a seconda della forma di $g(X)$, ogni soluzione convergerà ad uno dei due seguenti nodi:

1.

$$X = \dot{X} = 0 \quad (2.6)$$

2.

$$\left. \frac{dg}{dX} \right|_{\hat{X}} = 0 \quad (2.7)$$

dove \hat{X} è una costante. Entrambe corrispondono a $w = -1$, come si può notare sostituendo nell'equazione 1.13. Allora si può concludere che $w \neq -1$ è un attrattore per $N \rightarrow \infty$. I modelli che seguono possono essere classificati in base al nodo cui convergono asintoticamente.

2.1.1 Gas di Chaplygin generalizzato

Un esempio di modello che tende asintoticamente al nodo 2.6 è il Gas di Chaplygin generalizzato, con equazione di stato della forma:

$$p_{GC} = -\rho \left(\frac{\rho_{GC}}{\rho} \right)^{\frac{1}{\nu}}, \quad (2.8)$$

dove ρ e p sono delle costanti appropriate. Ora usando l'equazione di continuità $d\rho_{GC}/dN + 3(\rho_{GC} + p_{GC}) = 0$, si possono scrivere p_{GC} e ρ_{GC} come funzioni del fattore di scala a :

$$p_{GC} = \left(\frac{p}{\rho} \right)^{1-(1/\nu)} \left[1 + \nu a^{3-1/\nu} \right]^{-1/\nu} \quad (2.9)$$

$$\rho_{GC} = \left(\frac{p}{\rho} \right)^{1-(1/\nu)} \left[1 + \nu a^{3-1/\nu} \right]^{-1/\nu} \quad (2.10)$$

dove ν è una costante. Tale modello, si comporta come materia oscura quando il fattore di scala è piccolo, $\rho_{GC} \propto a^{-3}$, mentre si comporta come una costante cosmologica quando $a \rightarrow \infty$. Dalle equazioni 2.8, 1.13 si trova:

$$c_s^2 = \frac{w}{\gamma} = \frac{1}{\left(1 + \nu a^{3-1/\nu} \right) \gamma} \quad (2.11)$$

quindi è necessario considerare il caso con $\gamma < 0$ in modo che $c_s^2 > 0$. Inoltre si deve imporre il vincolo $|1/\gamma| < 10^{-4}$, per evitare un forte effetto integrato di Sachs-Wolfe e quindi un rapporto errato tra il plateau e il primo picco dello spettro di potenza della CMB $l(l+1)C_l/(2\pi)$ (vedere gli articoli [2, 5]). Il caso con $\gamma = -1$ corrisponde al modello del "Chaplygin Gas" standard.

2.1.2 Modello di Scherrer

Si esamina ora un modello che tende al nodo 2.7. Si studia quindi la funzione g attorno ad $X = \hat{X} \neq 0$ ed in questo caso g può essere approssimata tramite una parabola con $\left. \frac{dg}{dX} \right|_{\hat{X}} = 0$

$$g = g_0 + g_2(X - \hat{X})^2 \quad (2.12)$$

con g_0 e g_2 costanti. Un modello di questo tipo, con $g_0 < 0$ e $g_2 > 0$, coincide con quello studiato da Scherrer in Ref. [15]. Sostituendo questa funzione nell'equazione 2.5 si ottiene:

$$4g_2^2 X (X - \hat{X})^2 = k a^{-6} \quad (2.13)$$

mentre la densità di energia si scrive:

$$\rho = g_0 - g_2(X - \hat{X})^2 + 4Xg_2(X - \hat{X}),$$

ed espandendo attorno ad $X = \hat{X}$

$$\rho = g_0 + 4g_2\hat{X}(X - \hat{X}) + 3g_2(X - \hat{X})^2. \quad (2.14)$$

Imponendo che oggi X sia vicino ad \hat{X} , cioè $\epsilon = (X - \hat{X})/\hat{X} \ll 1$, l'equazione 2.13 si riduce a

$$X = \hat{X} \left[1 + \left(\frac{a}{a_1} \right)^3 \right], \quad (2.15)$$

dove è stato definito $(1/a_1)^3 = [1/(2g_2)](k/\hat{X}^3)^{1/2}$ con $a_1 = a$. Sotto queste assunzioni la densità di energia diventa:

$$\rho = g_0 + 4g_2\hat{X}^2 \left(\frac{a}{a_1} \right)^3. \quad (2.16)$$

Quindi affinché la densità di energia sia positiva per tempi $t \rightarrow 0$ si deve imporre $g_0 < 0$. La densità di energia può quindi essere scritta come $\rho = \rho + \rho_{DM}$, dove ρ si comporta come la componente di "energia oscura" ($\rho = const$), e ρ_{DM} come la componente di "materia oscura" ($\rho_{DM} \propto a^{-3}$). La velocità del suono risulta:

$$c_s^2 = \frac{X - \hat{X}}{3X - \hat{X}} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a_1} \right)^3, \quad (2.17)$$

si nota che per $(a/a_1)^3 \ll 1$ si ha una velocità del suono $c_s^2 \ll 1$. Il modello di Scherrer è stato poi esteso, generalizzando la definizione di g nel modo seguente (si veda l'articolo [5]):

$$p = g = g_0 + g_2 + (X - \hat{X})^n \quad (2.18)$$

con $n \geq 2$ e g_0 e g_2 costanti. In questo caso si può seguire lo stesso procedimento del modello di Scherrer appena discusso. La densità di energia è:

$$\rho = (2n - 1)g_n(X - \hat{X})^n + 2\hat{X}^n g_n(X - \hat{X})^{n-1} + g_0. \quad (2.19)$$

Se $\epsilon^n = [(X - \hat{X})/\hat{X}]^n \ll 1$, l'equazione 2.5 si riduce a:

$$X = \hat{X} \left[1 + \left(\frac{a}{a_{n-1}} \right)^{3=(n-1)} \right]. \quad (2.20)$$

L'aspetto positivo di questo modello è che, nel limite $X \rightarrow \hat{X}$, la velocità del suono si scrive:

$$c_s^2 = \frac{(X - \hat{X})}{2(n-1)\hat{X} + (2n-1)(X - \hat{X})} \approx \frac{1}{2n-1}, \quad (2.21)$$

quindi si può scegliere $n \geq 1$ per avere una velocità del suono $c_s^2 \ll 1$ e a differenza del modello di Scherrer semplice studiato in [15], il modello si comporta bene anche ad alte densità.

2.2 Modelli con termine cinetico canonico

Un'altra classe di modelli con equazione di stato barotropica $p = p(\rho)$ sono le Lagrangiane con termine cinetico canonico, $g(X) = X$. In questo caso il sistema è descritto dalle seguenti equazioni differenziali

$$X - V(\varphi) = p(\varphi, X), \quad (2.22)$$

$$X + V(\varphi) = \rho(\varphi, X). \quad (2.23)$$

A partire dall'equazione di continuità e usando l'equazione 1.9 si ottiene $\rho = -3H(p + \rho) = -\frac{\rho}{3\rho}(p + \rho)$. Usando poi $2X = (p + \rho) = (d\varphi/d\rho)^2 \rho^2$, si può ottenere un'espressione per il campo scalare in funzione della densità di energia:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\rho} \frac{d\rho^{\rho} \rho^{\rho}}{(p(\rho^{\rho}) + \rho^{\rho})^{1/2}}, \quad (2.24)$$

a meno di una costante additiva che può essere omessa senza perdita di generalità. Invertendo quindi l'equazione 2.24 $\rho = \rho(\varphi)$, si può ottenere $V(\varphi) = [\rho(\varphi) - p(\rho(\varphi))]/2$. Richiedendo ora che $p = const$, che equivale a dire che la lagrangiana del campo sia costante lungo le traiettorie, si può ricavare una soluzione esatta per $V(\varphi)$. Tuttavia ciascun modello con termine cinetico canonico prevede una velocità del suono pari a $c_s^2 = 1$, che impedisce quindi alla componente di materia di clusterare.

2.3 Modelli con termine cinetico non canonico

In questa sezione verrà studiata una classe più generale di Lagrangiane, con un termine cinetico non canonico. Infatti si è visto che sebbene i modelli con termine cinetico canonico riescano a descrivere bene il comportamento del fluido unito, portano inevitabilmente a $c_s^2 = 1$, in contrasto con la formazione di strutture cosmologiche.

2.3.1 Lagrangiane del tipo $L(\varphi, X) = g(X) - V(\varphi)$

Si considerano ora Lagrangiane con termine cinetico non canonico $g(X)$ e un termine potenziale della forma

$$L(\varphi, X) = g(X) - V(\varphi), \quad (2.25)$$

e la densità di energia si scrive quindi:

$$\rho = 2X \frac{dg(X)}{dX} - g(X) + V(\varphi). \quad (2.26)$$

Si può definire una funzione $F(X)$ tale che

$$\rho + p = 2X \frac{dg(X)}{dX} = 2F(X). \quad (2.27)$$

L'equazione del moto

$$\left(\frac{\partial g}{\partial X} + 2X \frac{\partial^2 g}{\partial X^2} \right) \frac{dX}{dN} + 3 \left(X \frac{\partial g}{\partial X} \right) = \frac{dV}{dN} \quad (2.28)$$

può essere riscritta in termini di $F(X)$

$$\left[2X \frac{dF}{dX} - F \right] \frac{dX}{dN} + X \left(6F + \frac{dV}{dN} \right) = 0. \quad (2.29)$$

Quanto è stato già ricavato per i modelli puramente cinetici, nella sezione 2.1, si trova facilmente che anche in questo caso l'equazione 2.28 ammette due nodi:

1. $dg/dX|_{\hat{X}} = 0$
2. $\hat{X} = 0$

In entrambi i casi per $N \rightarrow \infty$, il potenziale V tende a una costante mentre il termine cinetico può essere scritto attorno all'attrattore nella forma

$$g(X) = M^4 \left(\frac{X - \hat{X}}{M^4} \right)^n, \quad (2.30)$$

dove M è un'adeguata costante di scala di massa, $n \geq 2$ e \hat{X} è costante. Come già fatto nella sezione precedente si impone la condizione $p = 0$, che fornisce la soluzione generale $\rho_m = 2F(X)$ dell'equazione 2.27. Seguendo lo stesso procedimento di sezione 2.2, si arriva a scrivere

$$2X = \left(\frac{d\varphi}{d\rho} \right)^2 \rho^2 = \left(\frac{d\varphi}{d\rho} \right)^2 3\rho(p + \rho)^2, \quad (2.31)$$

Quindi

$$\rho_m = 2F \left[\frac{3}{2} (\rho_m + \rho_m)^2 \rho_m^2 \left(\frac{d\varphi}{d\rho_m} \right)^2 \right], \quad (2.32)$$

che permette di definire $\varphi = \varphi(\rho_m)$ come soluzione di quest'ultima equazione differenziale.

Di questo modello si presterà maggiore attenzione al caso di grandi valori di n e $\hat{X} = 0$ nell'equazione 2.30, per il quale si ottiene

$$\rho_m = \sinh \left[\left(\frac{3}{8M^4} \right)^{1/2} \varphi \right]^2 \quad (2.33)$$

e $V(\varphi) = \rho_m/(2n)$. La velocità del suono, dall'equazione 1.14, in questo caso risulta $c_s^2 = 1/(2n-1) > 0$.

2.3.2 Lagrangiane del tipo $L(\varphi, X) = f(\varphi)g(X)$

Si considerano ora Lagrangiane con termine cinetico non canonico della forma

$$L(\varphi, X) = f(\varphi)g(X) \quad (2.34)$$

con densità di energia

$$\rho = f(\varphi) \left(2X \frac{dg}{dX} + g(X) \right). \quad (2.35)$$

Anche in questo caso si vincolano le soluzioni imponendo $p = -\rho/g(X)$, da cui $f(\varphi) = \rho/g(X)$. Inserito nell'equazione per la densità di energia da

$$\rho = \left(2 \frac{X}{g} \frac{dg}{dX} + 1 \right) \rho, \quad (2.36)$$

deducendo quindi la densità di energia associata alla componente di materia

$$\rho_m = 2 \frac{X}{g} \frac{dg}{dX}, \quad (2.37)$$

si ottiene la soluzione generale per l'equazione del moto

$$X \frac{d \ln |g|}{dX} = \frac{\rho_m}{2}. \quad (2.38)$$

Si assume ora come esempio una lagrangiana con termine cinetico del tipo di Born-Infeld

$$g(X) = \sqrt{1 - 2X/M^4}, \quad (2.39)$$

con M un'opportuna costante di scala di massa, che implica $\rho = f(\varphi)/\sqrt{1 - 2X/M^4}$. Si deriva l'espressione per X in funzione del fattore di scala:

$$X(a) = \frac{M^4}{2} \frac{ka^3}{1 + ka^3}, \quad (2.40)$$

dove $k = \rho_m(a) a^3 / f(\varphi)$ e a è il fattore di scala ad un tempo generico t . Imponendo quindi $H^2 = \rho/3$ si può ottenere un'espressione per $\varphi(a)$:

$$\varphi(a) = \frac{2M^2}{3} \left\{ \arctan \left[\left(\frac{ka^3}{1 + ka^3} \right)^{1/2} \right] + \frac{\pi}{2} \right\}, \quad (2.41)$$

E sostituendo di nuovo in 2.34 il vincolo $p = -\rho/g(X)$ si ottiene:

$$f(\varphi) = \frac{\rho}{\sqrt{\cos \left[\left(\frac{3}{4M^4} \right)^{1/2} \varphi \right]}}. \quad (2.42)$$

Senza perdita di generalità si può scegliere $M = 1/4$ in modo che il termine cinetico assuma la forma canonica nel limite $X \ll 1$. Si può quindi riscrivere la Lagrangiana come:

$$L = \frac{\sqrt{1 - 2X}}{\cos \left(\frac{\rho}{2} \varphi \right)}. \quad (2.43)$$

Il modello prevede che nei limiti $\rho \ll 1$ e $2X \ll 1$ si abbia

$$\cos \left(\frac{\rho}{2} \varphi \right) \approx a^{3-2} \sqrt{1 - 2X/a^{3-2}}. \quad (2.44)$$

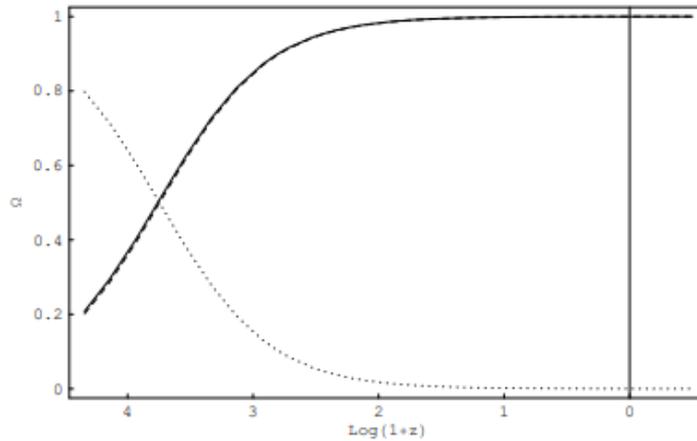


Figura 2.1: Evoluzione del parametro di densita del campo scalare Ω in funzione del redshift z (la figura e stata presa dagli articoli [5, 7]). La linea continua mostra il parametro di densita del modello analizzato, la linea tratteggiata rappresenta il parametro di densita delle componenti di materia e di energia oscura nel modello standard Λ CDM. La linea a puntini e il parametro di densita di radiazione.

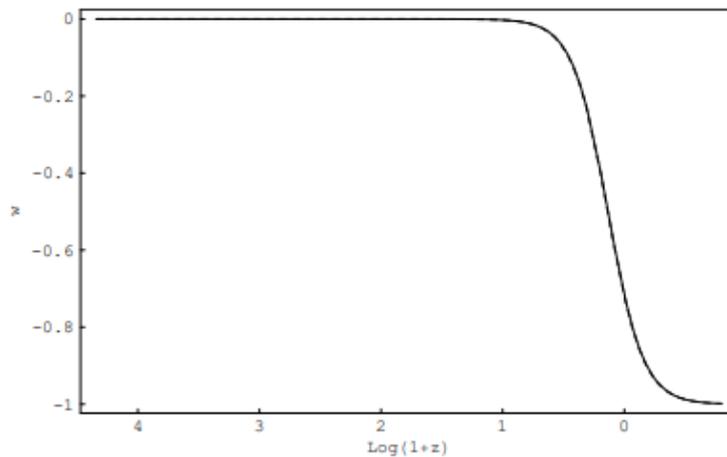


Figura 2.2: Evoluzione del parametro dell'equazione di stato w in funzione del redshift z (linea continua) a confronto con la somma delle componenti di materia e di energia oscura nel modello standard Λ CDM (linea tratteggiata). La figura e stata presa dagli articoli [5, 7].

In questo regime la velocita del suono e $c_s^2 = 1 - 2X/\rho \rightarrow 0$, come desiderato. Si fa notare che il modello non contiene parametri liberi per specificare il contenuto attuale dell'universo, quindi le quantita presenti oggi di materia ed energia oscura sono completamente determinate dalla scelta $\varphi_0 = \varphi(t_0)$. Cioe per riprodurre i valori osservati oggi bisogna settare il valore di $f(\varphi)$ nell'Universo giovane. Nelle figure 2.2 e 2.1 ([5, 7]) si mostrano rispettivamente il parametro dell'equazione di stato w e il parametro di densita Ω in funzione del redshift z . E stato scelto il valore iniziale di φ in modo che oggi il campo scalare riproduca i valori osservati di Ω_{DM} e Ω_{DE} . Dal momento che $c_s^2 = w$, infatti da formula 1.13 si ottiene $w = p/\rho = \frac{f(\varphi)\sqrt{1 - 2X/\rho}}{(f(\varphi)/\sqrt{1 - 2X/\rho})} = (1 - 2X/\rho) = c_s^2$, la velocita del suono e attiva e vicina a zero anche la componente di materia e predominante, come richiesto. Tuttavia la velocita del suono non trascurabile oggi (vedi figura 2.2) produce un forte contributo all'effetto integrato di Sachs-Wolfe e quindi un errato rapporto tra il primo picco e il plateau delle anisotropie dello spettro di potenza della CMB $l(l+1)C_l/(2\pi)$.

Capitolo 3

Come costruire un modello unificato

Nel presente capitolo verrà fornito prima un metodo per costruire modelli unificati che abbiano un background come quello del modello Λ CDM e al tempo stesso una velocità del suono abbastanza piccola per tutti i tempi di interesse cosmologico. Nella seconda sezione verrà studiato un metodo ancora più generale per costruire modelli unificati, che siano comunque in grado di comportarsi come il fluido oscuro ma che non debbano per forza mimare il background del modello Λ CDM. In questo contesto, viene messo in evidenza come questa procedura permetta di trovare modelli con una costante dell'equazione di stato relativa all'energia oscura $w_{DE} < -1$, senza violare la condizione di energia nulla $p + \rho = 0$. Infine nell'ultima sezione è stato studiato il modello riportato in Ref. [6], per il quale sono stati inoltre stimati i parametri usando i dati ottenuti in "Planck 2018" [1].

3.1 Come costruire un modello unificato

In questa sezione viene studiato un metodo per costruire un modello unificato dove il campo scalare mimica l'evoluzione del background del modello Λ CDM e al tempo stesso abbia una velocità del suono effettiva abbastanza piccola da permettere la formazione di strutture ed evitare un forte effetto integrato di Sachs-Wolfe. In particolare si vogliono disaccoppiare le funzioni del parametro dell'equazione di stato w e della velocità del suono c_s^2 , per fare ciò sono stati introdotti i due potenziali $f(\varphi)$ e $V(\varphi)$. Si considerano quindi Lagrangiane della forma

$$L(\varphi, X) = f(\varphi)g(X) - V(\varphi), \quad (3.1)$$

un simile approccio è stato seguito nell'articolo [4]. Infatti, a differenza dei modelli con termine puramente cinetico, in questo caso si ha un grado di libertà in più, dato dalla canonizzazione del campo scalare stessa, e questa libertà aggiuntiva permette di imporre un'ulteriore condizione alle equazioni del moto. Si noti che si sarebbe potuti partire da una Lagrangiana con un termine cinetico più generale, del tipo $g = g(h(\varphi)X)$. In questo caso definendo $Y = h(\varphi)X$, il termine $h(\varphi)$ scompare e si possono rideterminare w e c_s^2 in funzione del nuovo termine cinetico. Tuttavia questa generalizzazione è inutile, in quanto, come dimostrato nell'articolo [4], la dinamica è la stessa di quella generata da eq. 3.1. Facendo quindi riferimento alla Lagrangiana di equazione 3.1 si ricavano la densità di energia ρ , l'equazione di stato w e la velocità del suono c_s^2 , rispettivamente:

$$\rho = f(\varphi) \left(2X \frac{dg}{dX} - g(X) \right) - V(\varphi), \quad (3.2)$$

$$w(\varphi, X) = \frac{f(\varphi)g(X) - V(\varphi)}{f(\varphi) [2X dg/dX - g(X)] - V(\varphi)}, \quad (3.3)$$

$$c_s^2(X) = \frac{(\partial g(X)/\partial X)}{(\partial g(X)/\partial X) + 2X(\partial^2 g(X)/\partial X^2)}. \quad (3.4)$$

3.1 Come costruire un modello unificato

L'equazione del moto 1.4 diventa:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial X} + 2X \frac{\partial^2 g}{\partial X^2} \right) \frac{dX}{dN} + 6X \frac{\partial g}{\partial X} + \frac{d \ln f}{dN} \left(2X \frac{\partial g}{\partial X} - g \right) \frac{1}{f} \frac{dV}{dN} = 0, \quad (3.5)$$

dove $N = \ln a$. Richiedendo $L = \dots$, si ottiene un modello con un background in generale identico a quello del modello Λ CDM. Infatti, dall'equazione di continuita $d\rho/dN = -3(p + \rho)$ e imponendo $p = \dots$, si ottiene:

$$\rho = \rho_{DM}(a=1)a^{-3} + \dots = \rho_{DM} + \rho, \quad (3.6)$$

da cui si vede che ρ si comporta come una costante cosmologica, la componente di "energia oscura" ($\rho = \text{const}$), mentre ρ_{DM} come la componente di "materia oscura" ($\rho_{DM} \propto a^{-3}$). In questo modo la costante di integrazione $\rho_{DM}(a=1)$ puo essere interpretata come la componente di "materia oscura" oggi. Di conseguenza i parametri di densita di materia e di energia oscura oggi si scrivono rispettivamente $\Omega_m(0) = \rho_{DM}(a=1)/(3H^2(a=1))$ e $\Omega_\Lambda(0) = \dots/(3H^2(a=1))$.

La procedura che si usa quindi per ottenere modelli unificati che abbiano una velocita del suono sufficientemente piccola e la seguente. Si impone prima di tutto $L = \dots$, quindi le soluzioni del moto vengono ristrette ad appartenere alla varietta M , immersa nello spazio-tempo quadridimensionale. Cio permette di definire φ in funzione di X : $\varphi = L^{-1}(X, \dots)|_M$. In tali condizioni $V(\varphi) = f(\varphi)g(X) + \dots$, e dall'equazione 3.5 segue immediatamente la soluzione generale dell'equazione del moto sulla varietta M :

$$2X \frac{\partial g(X)}{\partial X} f(\varphi(X)) = \nu a^{-3}, \quad (3.7)$$

dove $\nu = \dots(0)/\dots(0)$. Ora e stata imposta la condizione $p = \dots$, nella sezione 3.2 verra descritta una tecnica ancora piu generale in cui la pressione e una libera funzione del fattore di scala a . Una volta definita la funzione $g(X)$, si trova subito la forma di c_s^2 in funzione del termine cinetico dall'equazione 1.14. Pertanto nei modelli descritti dalle Lagrangiane di sezione 2.3 i.e. $L(\varphi, X) = f(\varphi)g(X)$ e $L(\varphi, X) = g(X) - V(\varphi)$, una volta definita $g(X)$ e imposto il vincolo $L = \dots$, viene subito fissato l'andamento di $c_s^2(X)$ lungo le soluzioni del moto. Se invece si considera la Lagrangiana definita in equazione 3.1, avendo un grado di liberta in piu, si puo decidere l'evoluzione di $c_s^2(X)$ tramite la funzione $f(\varphi(X))$. Si puo infatti scegliere un'appropriata funzione $f(\varphi(X))$ e tramite l'equazione 3.5 fissare l'andamento di X e di conseguenza quello di $c_s^2(X)$, come una funzione del fattore di scala a .

Prima di proseguire riportando un esempio a cui viene applicata questa procedura, sono necessari alcuni commenti sull'equazione 3.7. La relazione 3.7 permette di collegare il fattore di scala a al termine cinetico X sulla varietta M . Il membro di sinistra dell'equazione 3.7, visto come funzione di X , deve avere almeno un asintoto e uno zero, e tra i due deve essere continua. In particolare, quando X si avvicina all'asintoto della funzione il fluido oscuro si comporta come materia oscura, mentre quando X tende allo zero della funzione, l'universo e dominato dal contributo della costante cosmologica. Pertanto si puo definire una funzione

$$F(X) = \frac{1}{\mu} \frac{X_f - X}{X - X_i}, \quad (3.8)$$

dove μ e una costante positiva, e il potenziale

$$f(\varphi(X)) = \frac{F(X)}{2X(\partial g(X)/\partial X)} \quad (3.9)$$

dove i valori X_f e X_i sono rispettivamente lo zero e l'asintoto menzionati prima. Infatti quando $a \rightarrow 0$ si ha $X \rightarrow X_i$, mentre quando $a \rightarrow \infty$, $X \rightarrow X_f$. Dall'equazione 3.7 si puo ricavare quindi esplicitamente l'espressione per il termine cinetico in funzione del fattore di scala:

$$X(a) = X_f \frac{1 + (X_i/X_f) \mu \nu a^{-3}}{1 + \mu \nu a^{-3}}. \quad (3.10)$$

In e importante notare l'importanza dei valori di X_i e X_f , in quanto determinano il range di valori che puo assumere la velocita del suono durante le varie epoche cosmiche.

Di seguito viene fornito un esempio a cui si applica il metodo esposto. Il termine cinetico considerato di seguito è quello del tipo di Born-Infeld:

$$g(X) = \sqrt{1 - 2X/M^4}, \quad (3.11)$$

dove M è un'opportuna costante di massa. In funzione di X si ottengono quindi la soluzione generale dell'equazione del moto (da equazione 3.7) e la velocità del suono:

$$\frac{2X/M^4}{\sqrt{1 - 2X/M^4}} f(\varphi(X)) = \nu a^3, \quad (3.12)$$

e

$$c_s^2 = 1 - 2X/M^4. \quad (3.13)$$

Si considera ora per f la seguente definizione

$$f(\varphi(X)) = \frac{2X/M^4}{\mu} \frac{h}{2X/M^4 \sqrt{1 - 2X/M^4}}, \quad (3.14)$$

dove h e μ sono delle costanti positive. Ulteriori esempi, dove vengono anche considerati termini cinetici del modello di Scherrer o del modello di Scherrer generalizzato, vengono approfonditi nell'articolo [4]. Ora sostituendo nell'equazione 3.7 le espressioni 3.14 e 3.11, si ricava l'espressione del termine cinetico

$$X(a) = \frac{M^4}{2} \frac{h + \mu \nu a^3}{1 + \mu \nu a^3}, \quad (3.15)$$

e per c_s^2 si trova la seguente relazione:

$$c_s^2(a) = \frac{1}{1 + \mu \nu a^3} \frac{h}{h + \mu \nu a^3}. \quad (3.16)$$

Perciò si può vedere che quando $a \rightarrow 0$ si ha una velocità del suono $c_s^2 \rightarrow 1$, e al tempo stesso, per $a \rightarrow \infty$, scegliendo in modo opportuno il valore di h , si può variare il valore della velocità del suono. In particolare si pone $h = 1 - c_1^2$, dove $c_1 = c_s(a \rightarrow \infty)$. In figura 3.1, presa dall'articolo [4], viene mostrata la dipendenza della velocità del suono in funzione del fattore di scala per diversi valori di c_1 . Si può notare in particolare che tale modello è in grado di predire velocità del suono abbastanza piccole da permettere sia al suono oscuro di clusterare che di produrre un effetto integrato di Sachs-Wolfe compatibile con le osservazioni. Riprendendo ora l'eq. 3.15, e usando la relazione $2X = (d\varphi/dN)^2 (dN/dt)^2 = (d\varphi/dN)^2 \rho/3$, si deriva un'equazione differenziale per il campo scalare φ in funzione del fattore di scala:

$$\left(\frac{d\varphi}{dN} \right)^2 = \frac{3M^4}{(1 + \nu a^3)(1 + \mu \nu a^3)} \frac{h + \mu \nu a^3}{h + \mu \nu a^3}. \quad (3.17)$$

Considerando ora il caso in cui $h = \mu$, che rende l'equazione integrabile analiticamente, si può ottenere la traiettoria $\varphi(a)$, cioè

$$\varphi(a) = \left(\frac{4hM^4}{3} \right) \operatorname{arcsinh} (\nu a^3)^{1/2}. \quad (3.18)$$

Sostituendo quindi nell'espressione di $f(\varphi(X))$ da cui si era partiti, si ottiene:

$$f(\varphi) = \frac{(1 - h)^{1/2}}{h} \frac{\cosh \left[\left(\frac{3}{4hM^4} \right)^{1/2} \varphi \right]}{\sinh \left[\left(\frac{3}{4hM^4} \right)^{1/2} \varphi \right] \left\{ 1 + h \sinh^2 \left[\left(\frac{3}{4hM^4} \right)^{1/2} \varphi \right] \right\}}, \quad (3.19)$$

e

$$V(\varphi) = \frac{\left\{ h^2 \sinh^2 \left[\left(\frac{3}{4M^2} \right)^{1/2} \varphi \right] + 2h - 1 \right\}}{h \left(1 + h \sinh^2 \left[\left(\frac{3}{4M^2} \right)^{1/2} \varphi \right] \right)}. \quad (3.20)$$

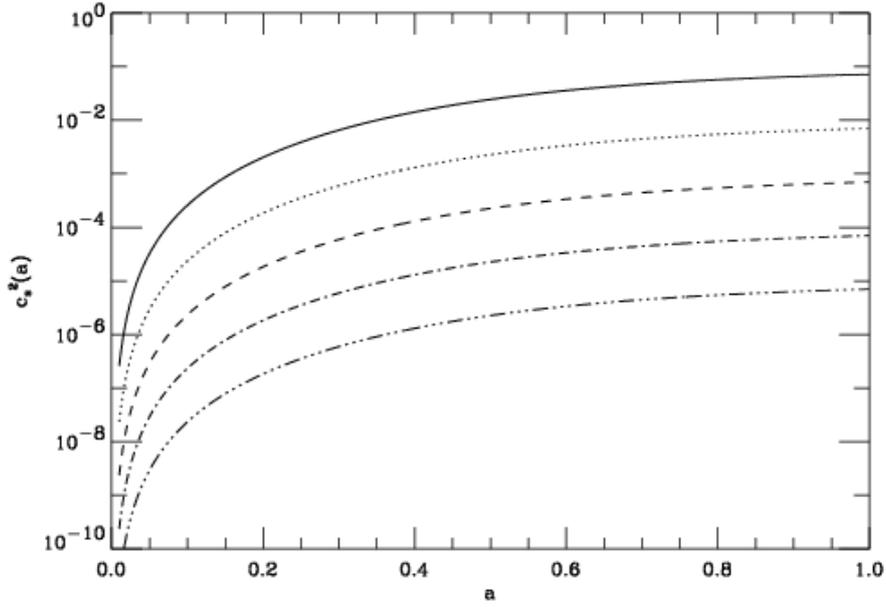


Figura 3.1: Gra co della velocita del suono in funzione del fattore di scala, per diversi valori di $c_\infty = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$, rispettivamente dall'alto al basso. La gura e stata presa dall'articolo [4].

Quindi da quanto trovato si vede che nelle prime fasi dell'Universo ($a \ll 1$) $\sqrt{3/(4hM^4)}\varphi \ll 1$ e $2X/M^4 \ll 1$ da cui:

$$f(\varphi) \approx \left(\frac{3}{4hM^4}\right)^{1/2} \frac{\rho_{1/h}}{h} \frac{1}{\varphi}, \quad |g(X)| \approx \sqrt{1 - 2X/M^4} \approx 1 - X/M^2, \quad |V(\varphi)| \approx \left|\frac{(2h - 1)}{h}\right|. \quad (3.21)$$

Quindi $f(\varphi)$ e $g(X)$ hanno un comportamento simile a quello trovato nella sezione 2.3.2, per la Lagrangiana della forma $L = f(\varphi)g(X)$, studiata negli articoli [4,5,7]. Quando, al contrario, $a \ll 1$, il campo scalare $\varphi \ll 1$ e $2X/M^4 \ll h$. Da cui si ottiene:

$$f(\varphi)g(X) \ll 0, \quad V(\varphi) \approx \frac{2h - 1}{h}, \quad (3.22)$$

cioe per $a \ll 1$, il modello prevede che il fluido oscuro converga verso una costante cosmologica.

3.2 Modelli unificati generalizzati

Verra ora generalizzato il metodo fornito nella sezione 3.1 con lo scopo di studiare modelli il cui comportamento non mimi necessariamente il background del modello Λ CDM, ma siano al tempo stesso in grado di fornire una descrizione accurata del fluido oscuro. Si fa riferimento specialmente all'articolo [6]. Si considera una Lagrangiana della forma:

$$L(\varphi, X) = p(\varphi, X) - f(\varphi)g(h(\varphi)X) - V(\varphi). \quad (3.23)$$

Tuttavia, a differenza di quanto fatto nella sezione precedente, invece di assumere $p = p(X)$, si sceglie a priori un'appropriata espressione, una libera funzione del fattore di scala, per la pressione, i.e. $p = p(N)$, dove $N = \ln a$. Analogamente alla sezione 3.1, i tre potenziali $f(\varphi)$, $h(\varphi)$ e $V(\varphi)$ permettono di specificare separatamente il parametro dell'equazione di stato w e la velocita del suono c_s . Per ricostruire questi potenziali servono quindi tre condizioni dinamiche:

- scegliere un'espressione per $p(N)$
- l'equazione di continuita, o equivalentemente, l'equazione del moto
- una scelta per $c_s^2(N)$.

Assumendo quindi $p(N)$ come una funzione decisa a priori, l'equazione di continuita 1.11 si scrive:

$$\frac{d\rho(N)}{dN} + 3\rho(N) = 3p(N), \quad (3.24)$$

da cui, integrando rispetto ad N

$$\rho(N) = e^{-3N} \left[3 \int^N \left(e^{3N^0} p(N^0) dN^0 \right) + K \right], \quad (3.25)$$

dove K e una costante di integrazione. In particolare imponendo la condizione $L(\varphi, X) = p(N)$, le soluzioni vengono vincolate ad appartenere alla varieta $M_{p(N)}$, quindi il campo scalare e de nito in funzione di X da $\varphi = L(X, p(N))|_{M_{p(N)}}$.

Di seguito verranno studiati modelli in cui la pressione p e la densita ρ soddisfano la condizione di energia nulla $p + \rho = 0$, ma violano la condizione di energia forte in tempi recenti, i.e. $p < \rho/3$, in modo da essere in grado di riprodurre l'espansione accelerata dell'universo (si vedano anche gli articoli [16, 17]). In ne si assume che esista un attrattore costante per l'equazione 3.24, cioe per $N \rightarrow \infty$, $\rho \rightarrow \rho_0$ e $p \rightarrow -\rho_0$, in modo che $d\rho/dN \rightarrow 0$, in questo caso quindi ρ_0 gioca il ruolo di costante cosmologica e ettiva. Se ora $p = -\rho$, allora $K = (\rho_0 - \rho)$, dove ρ_0 si indica il valore della densita oggi. Si noti l'importanza della costante di integrazione K in equazione 3.25. Infatti ponendo $K = 0$ viene rimosso il termine ρ/a^3 dall'equazione 3.25, viceversa quando $K \neq 0$ si ha sempre un termine che si comporta come materia priva di pressione, e K rappresenterebbe in tal caso la densita di materia oggi: $K = \rho_{m0} = (\rho_0 - \rho)$. Si puo notare inoltre che nella soluzione $\rho(N)$ 3.25, $\rho_m = \rho_{m0} e^{-3N}$ rappresenta la soluzione omogenea della componente di materia dell'equazione di erenziale 3.24, mentre $p(N)$ produce la soluzione particolare. Quindi, sulla base di quanto appena detto, si puo definire formalmente un parametro legato alla componente di energia oscura del modello

$$w_{DE} = \frac{p}{\rho - \rho_m}, \quad (3.26)$$

dove $\rho - \rho_m$ e la densita di energia oscura del modello e p e la pressione.

3.2.1 Ricostruzione dei potenziali $f(\varphi)$, $h(\varphi)$ e $V(\varphi)$

Si procede quindi ora con la ricostruzione dei tre potenziali a partire da $f(\varphi)$. Considerando la Lagrangiana di equazione 3.23 si trova per la densita di energia:

$$\rho = 2X \frac{\partial g(h(\varphi(X, N))X)}{\partial X} f(\varphi(X, N)), \quad (3.27)$$

che sostituita nell'equazione 3.25 da

$$2X \left[\frac{\partial g(h(\varphi(X, N))X)}{\partial X} \right] f(\varphi(X, N)) = p(N) + e^{-3N} \left[3 \int^N \left(e^{3N^0} p(N^0) dN^0 \right) + K \right]. \quad (3.28)$$

Si definisce quindi $f(\varphi(X, N))$ nel seguente modo:

$$f(\varphi(X, N)) = \frac{p(N) + \rho(N)}{2X[\partial g(h(\varphi(X, N))X)/\partial X]} (N, X), \quad (3.29)$$

da cui si deduce che lungo le traiettorie classiche del moto $(N, X) = 1$. In particolare ride nendo $(N, X) = \tilde{\rho}(N, X/\rho(N))$, si puo ricavare il termine cinetico in funzione del fattore di scala

$$X = \rho(N) \tilde{\rho}^{-1}(N) G_p(N), \quad (3.30)$$

e sapendo che $2X = (dN/dt)^2 (d\varphi/dN)^2 = \rho(N) (d\varphi/dN)^2 / 3$, si ottiene

$$\varphi = \varphi_i \int_{N_i}^N \left(\tilde{\rho}^{-1}(N^0) \right)^{1/2} dN^0 Q_p(N). \quad (3.31)$$

3.2 Modelli unificati generalizzati

Senza perdita di generalità si può considerare il caso con il segno + davanti all'integrale. A questo punto si può scrivere il potenziale f in termini del solo campo scalare, $f(X, N) = f(G_p(N), N) = f(G_p(Q_p^{-1}(\varphi))) = f(\varphi)$. Definendo quindi opportunamente la funzione $(N(a), X)$, si possono ottenere $X(a) = G_p(N(a))$ e $\varphi(a) = Q_p(N(a))$. Per ricavare $h(\varphi)$ bisogna conoscere $g(\chi)$, avendo definito $\chi = h(\varphi X)$. Dall'equazione 1.14 si ha per la velocità del suono

$$c_s^2(\chi) = \frac{\partial g(\chi)/\partial \chi}{(\partial g(\chi)/\partial \chi) + 2\chi (\partial^2 g(\chi)/\partial \chi^2)}, \quad (3.32)$$

si deve imporre a quest'ultima di essere positiva ma al tempo stesso sufficientemente piccola, i.e. $c_s^2(\chi) \ll 1$ e $c_s^2 \ll 1$. Conoscendo la forma di $\chi = \chi(a)$ dalle equazioni $X = G_p(N(a))$ e $\varphi = Q_p(N(a))$, si può scegliere una funzione appropriata per la velocità del suono $c_s^2(\chi) = R_p(N(a))$ tale che $c_s^2 \ll 1$. Quindi si trova:

$$h(\varphi(a)) = \frac{1}{G_p(N(a))} [c_s^2]^{-1} (R_p(N(a))), \quad (3.33)$$

e attraverso $Q_p^{-1}(\varphi)$ si può ricostruire $h(\varphi)$. Invece per trovare $V(\varphi)$ si usa l'equazione 3.23:

$$V(\varphi(a)) = f(\varphi(a))g(X(a)) - p(N(a)), \quad (3.34)$$

e allo stesso modo, usando $Q_p^{-1}(\varphi)$ si può ricostruire $V(\varphi)$. Come già accennato nella sezione precedente, esiste una classe di Lagrangiane con le stesse proprietà cinematiche, in particolare l'equazione di stato w e la velocità del suono c_s sono invarianti rispetto a un riscaldamento del termine cinetico, tali proprietà sono state studiate in dettaglio nell'articolo [4]. Si può definire il campo scalare $\varphi = \phi$ e di conseguenza si definisce anche un nuovo termine cinetico $Y = \dot{\phi}^2/2 = X/(R(\phi(\varphi)))$ e $\phi(\varphi) = \int [R(\varphi)^{-1/2} d\varphi] + \hat{K}$, con $R(\phi) > 0$ e \hat{K} è un'appropriata costante di integrazione. La Lagrangiana si può quindi semplificare in termini di queste nuove variabili, da $L(X, \varphi)$ si ottiene una nuova Lagrangiana $L(R(\phi)Y, \phi)$.

3.2.2 Esempio di modello unificato di un campo scalare

Viene proposto ora il modello studiato nell'articolo [6]. In particolare lo scopo dello stesso è quello di riportare un modello caratterizzato da una transizione veloce. Nel presente lavoro si concentrerà invece l'attenzione maggiormente sul parametro dell'equazione di stato w_{DE} , definito nella formula 3.26, che si dimostra possa essere $w_{DE} < -1$ senza violare la condizione di energia nulla. Di seguito verrà considerato un termine cinetico del tipo di Dirac-Born-Infeld:

$$g(h(\varphi)X) = \sqrt{1 - 2h(\varphi)X} \quad (3.35)$$

che implica

$$c_s^2(h(\varphi)X) = 1 - 2h(\varphi)X. \quad (3.36)$$

La pressione del modello viene assunta della forma:

$$p(N(a)) = \frac{\rho}{2} \left\{ 1 + \tanh \left[\frac{\beta}{3} (a^3 - a_t^3) \right] \right\}, \quad (3.37)$$

e risolvendo l'equazione differenziale 3.24 per la densità di energia, si ottiene

$$\rho(N(a)) = \rho \left\{ \frac{1}{2} + \frac{3}{2\beta} a^{-3} \ln \left\{ \cosh \left[\frac{\beta}{3} (a^3 - a_t^3) \right] \right\} + \frac{\rho_{m0}}{\rho} a^{-3} \right\}. \quad (3.38)$$

I parametri a_t e β rappresentano rispettivamente il fattore di scala al tempo in cui avviene la transizione e la rapidità della transizione stessa. Il terzo parametro del modello è ρ , che assume il ruolo di costante cosmologica effettiva, infatti nel limite $a \gg 1$, $\rho \rightarrow \rho$ e $p \rightarrow -\rho$. Il modello dipende inoltre da un quarto parametro, legato alla composizione attuale dell'universo, $\rho_{m0}/\rho = m/3$, avendo definito $m = \rho/(3H_0^2)$ e $m = 1$. Si noti che l'introduzione di quest'ultimo parametro è stata possibile grazie alla libertà della costante di integrazione di equazione 3.25.

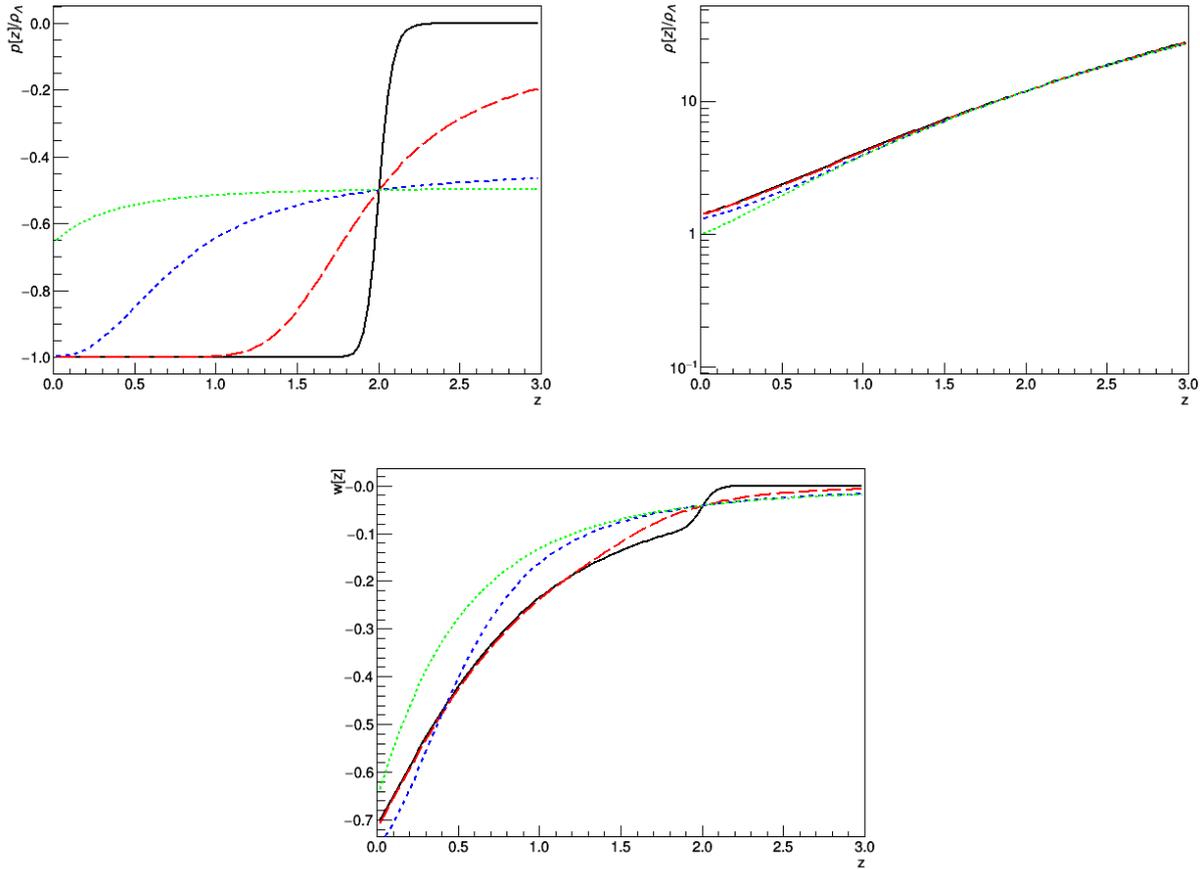


Figura 3.2: Gra ci di p/ρ , ρ/ρ_0 e w in funzione del redshift z , avendo ssato $z_t = 2$ e $m/\rho_0 = 3/7$. Le linee, dal tratteggio piu corto al piu lungo, corrispondono a $\beta = 1, 10, 100$ rispettivamente, la linea continua nera corrisponde a $\beta = 1000$. Vedere anche l'articolo [6].

In gura 3.2 vengono mostrati gli andamenti della pressione $p(N(z))$, della densita $\rho(N(z))$ e di $w(N(z))$ in funzione del redshift z . Nei gra ci e stato posto $z_t = 2$, con il quale si intende il valore del redshift al tempo della transizione; quest'ultimo e collegato al fattore di scala tramite la relazione $(1 + z_t)^{-1} = a_t$. E stato inoltre ssato il rapporto m/ρ_0 al valore $3/7$.

Si possono riscrivere le espressioni 3.37 e 3.38 in termini di un'altra parametrizzazione, piu utile da un punto di vista fenomenologico, usando $\rho_{DE0} = \rho_0 - \rho_{m0}$, cioe la componente di energia oscura attuale del modello. Ponendo il fattore di scala $a = 1$ (per convenzione il valore attuale del fattore di scala) nell'equazione 3.38 si ottiene la seguente relazione per ρ_{DE0} :

$$\frac{\rho_{DE0}}{\rho_0} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2\beta} \ln \left\{ \cosh \left[\frac{\beta}{3} (1 - a_t^3) \right] \right\}, \quad (3.39)$$

In gura 3.3 e stato plottato ρ_{DE0}/ρ_0 per diversi valori di β e di z_t . Si puo notare in particolare che per $z_t > 2$ e $\beta > 100$ si ha $\rho_{DE0}/\rho_0 \rightarrow 1$. Combinando ora le equazioni 3.39 con 3.37 e 3.38 si riscrivono la pressione $p(a)$ e la densita di energia $\rho(a)$ in termini del nuovo parametro ρ_{DE0} :

$$p(a) = \rho_{DE0} \frac{\{1 + \tanh [(\beta/3) (a^3 - a_t^3)]\}}{1 + (3/\beta) \ln \{ \cosh [(\beta/3) (1 - a_t^3)] \}}, \quad (3.40)$$

$$\rho(a) = \rho_{DE0} \left\{ \frac{1 + (3/\beta) a^{-3} \ln \{ \cosh [(\beta/3) (a^3 - a_t^3)] \}}{1 + (3/\beta) \ln \{ \cosh [(\beta/3) (1 - a_t^3)] \}} + \nu a^{-3} \right\}, \quad (3.41)$$

dove e stato ride nito $\nu = \rho_{m0}/\rho_{DE0} = m/\rho_{DE}$.

3.3 Discussione dei parametri del modello

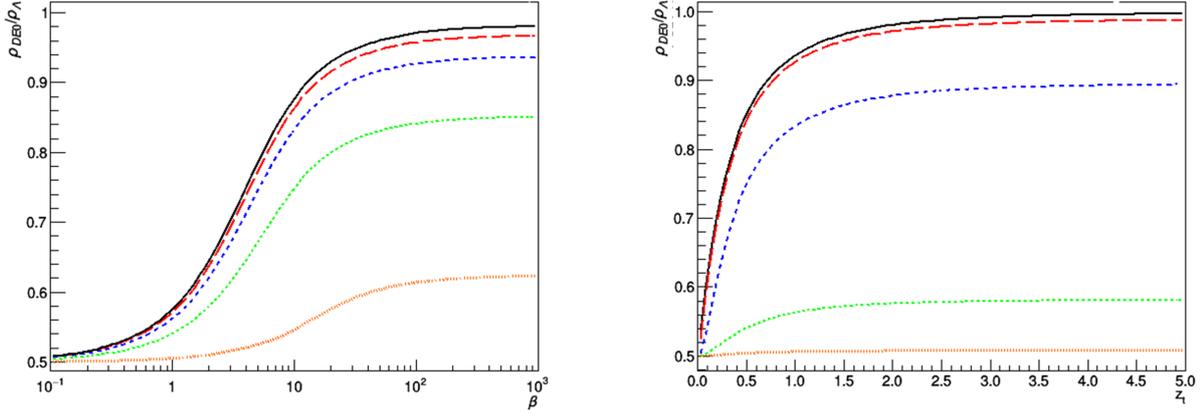


Figura 3.3: A sinistra gra co di $\rho_{\text{DE}0}/\rho$ in funzione di β per $z_t = 0.1, 0.5, 1, 1.5, 2$ (rispettivamente dal basso verso l'alto). A destra gra co di $\rho_{\text{DE}0}/\rho$ in funzione di z_t per $\beta = 0.1, 1, 10, 100, 1000$ (rispettivamente dal basso verso l'alto) avendo fissato $m/\nu = 3/7$. Vedere anche l'articolo [6].

Si puo quindi scrivere esplicitamente l'espressione di w_{DE} :

$$w_{\text{DE}} = \frac{\left\{ 1 + \tanh \left[\frac{1}{3} (a^3 - a_t^3) \right] \right\}}{1 + \frac{3}{2} a^{-3} \ln \left\{ \cosh \left[\frac{1}{3} (a^3 - a_t^3) \right] \right\}} \quad (3.42)$$

In particolare si puo vedere che grazie a questa riparametrizzazione e possibile ottenere $w_{\text{DE}} < -1$ senza violare la condizione $p + \rho \geq 0$, questo caso verra analizzato piu nel dettaglio nella sezione seguente.

3.3 Discussione dei parametri del modello

In questa sezione viene ripreso il modello gia esposto in sezione 3.2.2 e vengono inoltre analizzati i vari parametri alla luce dei dati trovati sperimentalmente nel paper "Planck 2018" [1]. Si desidera $w_{\text{DE}0}$ il valore attuale del parametro dell'equazione di stato legato alla componente di energia oscura del modello, e si ottiene sostituendo nell'espressione per w_{DE} 3.42, il valore attuale del fattore di scala, stabilito per convenzione $a = 1$. Si trova quindi:

$$w_{\text{DE}0} = \frac{\left\{ 1 + \tanh \left[\frac{1}{3} (1 - a_t^3) \right] \right\}}{1 + \frac{3}{2} \ln \left\{ \cosh \left[\frac{1}{3} (1 - a_t^3) \right] \right\}} \quad (3.43)$$

Sono stati quindi studiati i parametri β e z_t per i quali si hanno valori $w_{\text{DE}0}$ compatibili con il valore attuale riportato nel paper [1], tali che il modello rispetti la condizione di energia nulla $p + \rho \geq 0$. In particolare si fa riferimento al valore $w_0 = -1.58^{+0.52}_{-0.41}$ (in "Planck 2018" [1] riportato nella tabella 4) che tiene conto del contributo della sola radiazione cosmica di fondo. E stato inoltre stimato il parametro ν del modello usando i valori attuali dei parametri di densita di materia ed energia oscura m e ν :

- $\beta = 0.6834 \pm 0.0084$
- $m = 0.3166 \pm 0.0084$

presi da tabella 2 in [1], da cui si trova $\nu = m/\beta = 0.463 \pm 0.014$. Sono quindi stati studiati due casi separatamente, il primo considerando a_t trascurabile, il secondo considerando invece $a_t \neq 0$.

3.3.1 Caso 1: a_t trascurabile

Considerando a_t trascurabile, $a_t \rightarrow 0$, si ottengono le seguenti espressioni per la pressione $p(a)$ e la densità $\rho(a)$:

$$p(a) = \rho_{\text{DE}0} \frac{\{1 + \tanh [(\beta/3)(a^3)]\}}{1 + (3/\beta) \ln \tilde{r} \cosh [\beta/3]g}, \quad (3.44)$$

$$\rho(a) = \rho_{\text{DE}0} \left\{ \frac{1 + (3/\beta)a^{-3} \ln \{\cosh [(\beta/3)(a^3)]\}}{1 + (3/\beta) \ln \tilde{r} \cosh [\beta/3]g} + \nu a^{-3} \right\}, \quad (3.45)$$

dove

$$\frac{\rho_{\text{DE}0}}{\rho} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2\beta} \ln \tilde{r} \cosh [\beta/3]g. \quad (3.46)$$

In figura 3.4 si riporta il grafico di $w_{\text{DE}0}$ e di $(p + \rho)(\beta)/\rho_{\text{DE}0}$ in funzione di β . Si può vedere chiaramente che in questo caso il fluido rispetta la condizione di energia nulla per ogni valore di β e il parametro dell'equazione di stato attuale può raggiungere valori minori di -1 , in particolare raggiunge il minimo per $\beta = 4$, in cui vale $w_{\text{DE}0} = -1.2$. In figura 3.5 è mostrato l'andamento di $w_{\text{DE}}(z)$ in funzione del redshift, ed è stato analizzato per diversi valori di β , si può vedere distintamente che $(p + \rho)(z)/\rho_{\text{DE}0} \geq 0$ sempre, quindi la condizione di energia nulla non è mai violata.

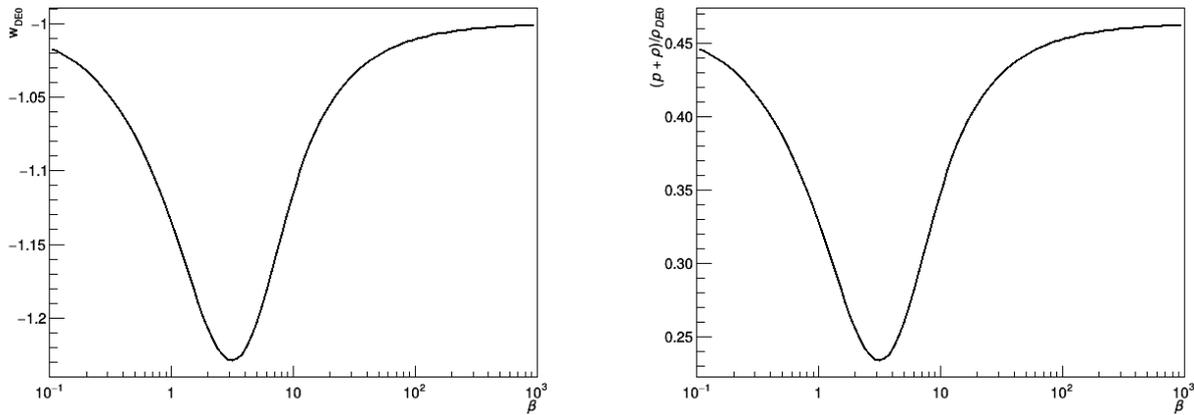


Figura 3.4: A sinistra è riportato il grafico di $w_{\text{DE}0}(\beta)$ in funzione di β nel caso con $a_t \rightarrow 0$. A destra vi è il grafico di $(p + \rho)(\beta)/\rho_{\text{DE}0}$ anche questo in funzione di β . In entrambi è stato posto $\nu = m/\rho_{\text{DE}} = 0.463$.

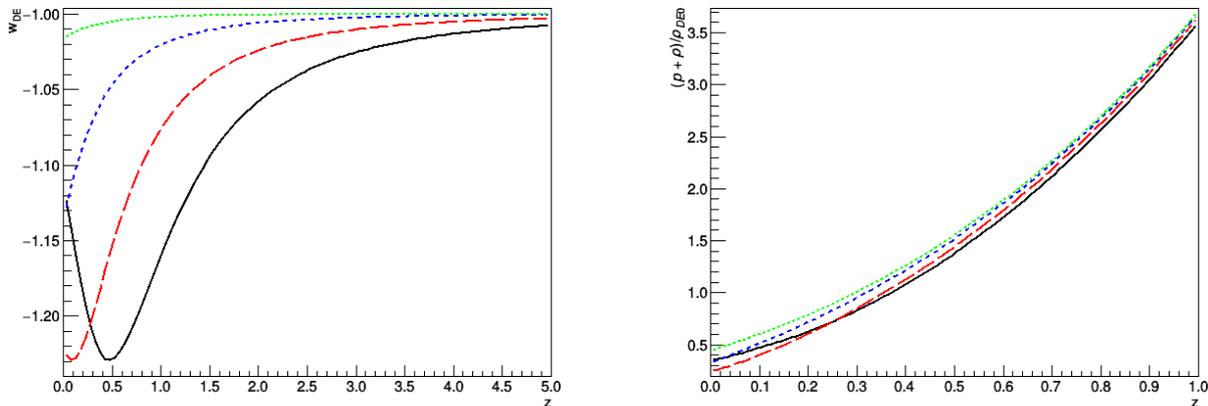


Figura 3.5: Grafici di $w_{\text{DE}}(z)$ (sinistra) e $(p + \rho)(z)/\rho_{\text{DE}0}$ (destra) in funzione del redshift z con $\nu = m/\rho_{\text{DE}} = 0.463$. In entrambi i pannelli le linee, dal tratteggio più corto al più lungo corrispondono a $\beta = 0.1, 1, 4$, e la linea continua nera corrisponde a $\beta = 10$.

3.3.2 Caso 2: a_t non trascurabile

In questo caso, con $a_t \neq 0$, è stato plottato $w_{\text{DE0}}(\beta)$ in funzione di β per diversi valori di z_t , figura 3.6. A differenza del caso precedente ora si deve prestare maggiore attenzione ai valori dei parametri per i quali il modello rispetta la condizione di energia nulla. Si vede infatti nel plot a sinistra di figura 3.6 che le curve con $z_t = 0.1, 0.2$ non rispettano la condizione $(p + \rho)(\beta)/\rho_{\text{DE0}} = 0$ per tutti i valori di β , sebbene siano quelle che raggiungono i valori più negativi di w_{DE0} , bisogna quindi analizzare ogni situazione volta per volta.

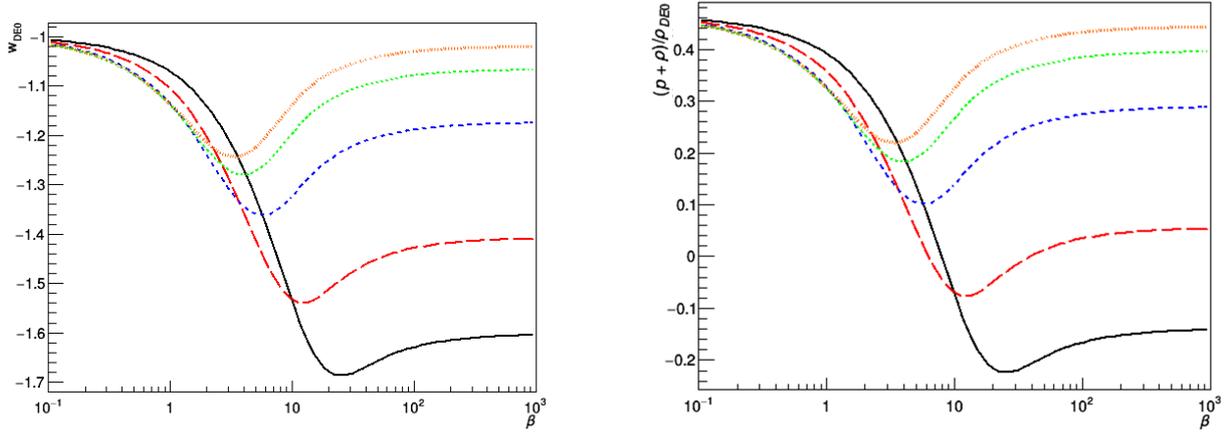


Figura 3.6: Grafi di $w_{\text{DE0}}(\beta)$ (sinistra) e $(p + \rho)(\beta)/\rho_{\text{DE0}}$ (destra) in funzione di β , per diversi valori del redshift di transizione z_t con $\nu = m_{\text{DE}}/\rho_{\text{DE0}} = 0.463$. In entrambi i pannelli le linee, dal tratteggio più lungo al più corto corrispondono a $z_t = 0.2, 0.5, 1$, e la linea continua nera corrisponde a $z_t = 0.1$.

Sono quindi stati studiati maggiormente nel dettaglio due casi in particolare: il primo per $\beta = 100$ e vari valori di z_t (figura 3.7), il secondo per $z_t = 0.2$ fissato e diversi valori di β (figura 3.8).

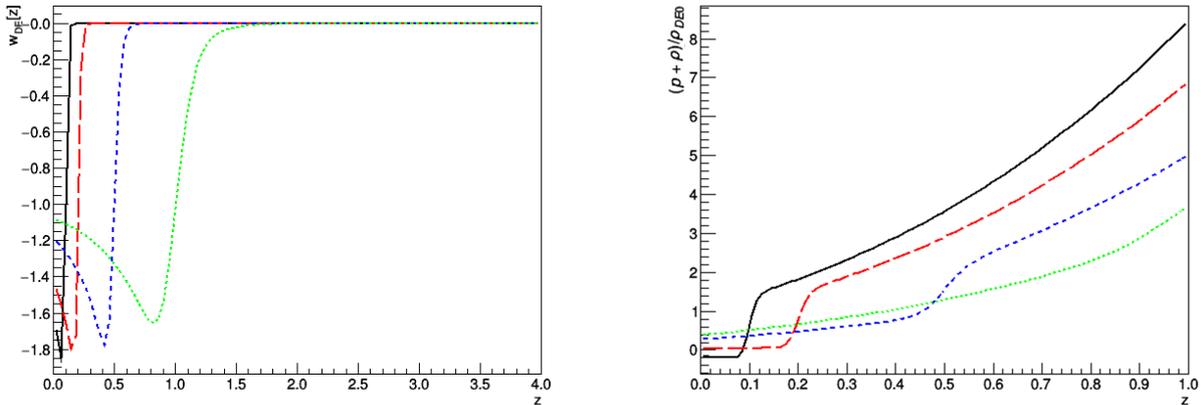


Figura 3.7: Grafi di $w_{\text{DE}}(z)$ (sinistra) e $(p + \rho)(z)/\rho_{\text{DE0}}$ (destra) in funzione del redshift z , con $\beta = 100$ e $\nu = m_{\text{DE}}/\rho_{\text{DE0}} = 0.463$. In entrambi i pannelli le linee, dal tratteggio più lungo al più corto corrispondono a $z_t = 0.2, 0.5, 1$, e la linea continua nera corrisponde a $z_t = 0.1$.

Facendo riferimento alle figure 3.7 e 3.8 si può vedere che w_{DE0} può raggiungere valori significativamente minori di -1 senza violare la condizione di energia nulla cioè con valori di $(p + \rho)/\rho_{\text{DE0}}$ sempre maggiori di 0 . Si noti tuttavia che le curve con $z_t = 0.2$ e $\beta = 10$ in figura 3.8 e quella con $z_t = 0.1$ e $\beta = 100$ in figura 3.7 violano la condizione di energia nulla oggi, tali valori del modello sono quindi da escludere. Per confronto si riportano anche gli andamenti di p/ρ_{DE0} e ρ/ρ_{DE0} in funzione del redshift, nei casi appena analizzati (figure 3.9 e 3.10).

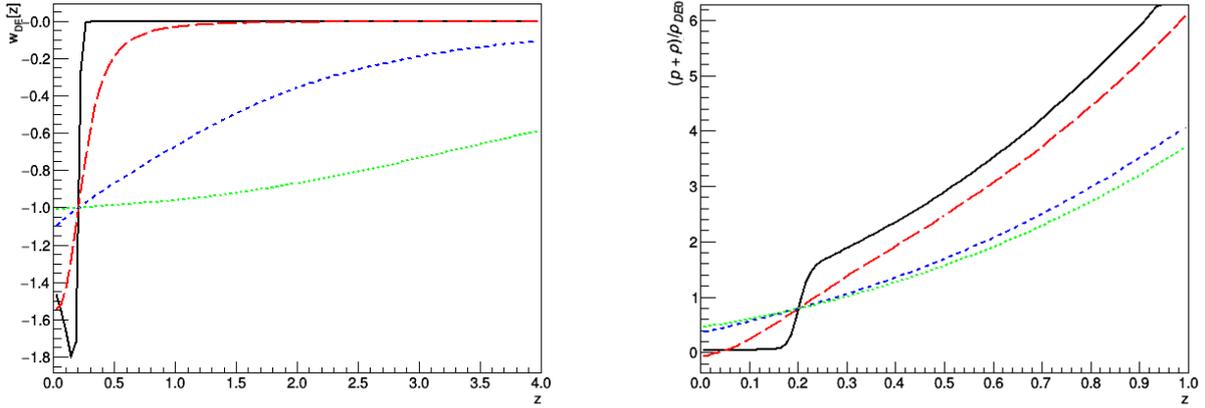


Figura 3.8: Gra ci di $w_{DE}(z)$ (sinistra) e $(p + \rho)(z)/\rho_{DE0}$ (destra) in funzione del redshift z , con $z_t = 0.2$ e $\nu = m/_{DE} = 0.463$. In entrambi i pannelli le linee, dal tratteggio piu corto al piu lungo corrispondono a $\beta = 0.1, 1, 10$, e la linea continua nera corrisponde a $\beta = 100$.

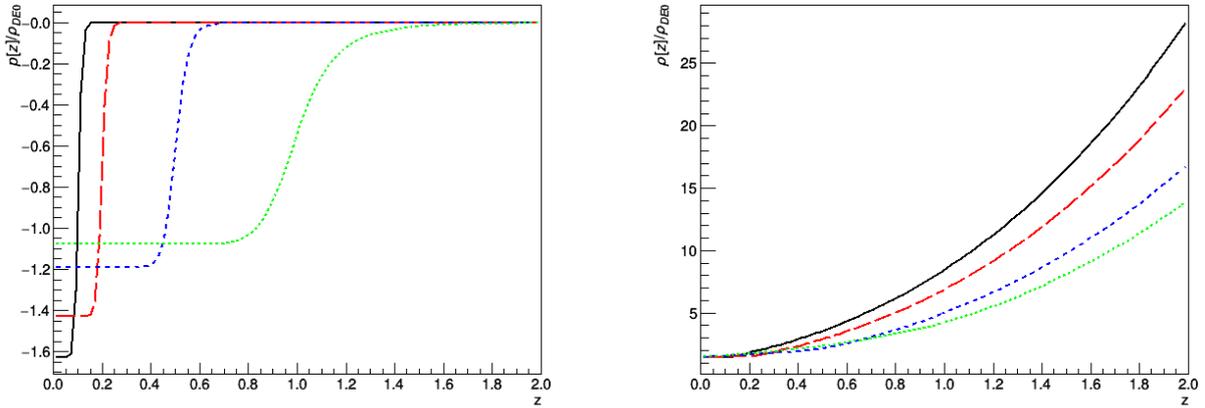


Figura 3.9: Sono stati gra cate le funzioni $p[z]/\rho_{DE0}$ e $\rho[z]/\rho_{DE0}$ in funzione del redshift z per $\beta = 100$ e $\nu = m/_{DE} = 0.463$. In entrambi i pannelli le linee, dal tratteggio piu corto a quello piu lungo, corrispondono a $z_t = 1, 0.5, 0.2$, mentre la linea continua nera corrisponde a $z_t = 0.1$

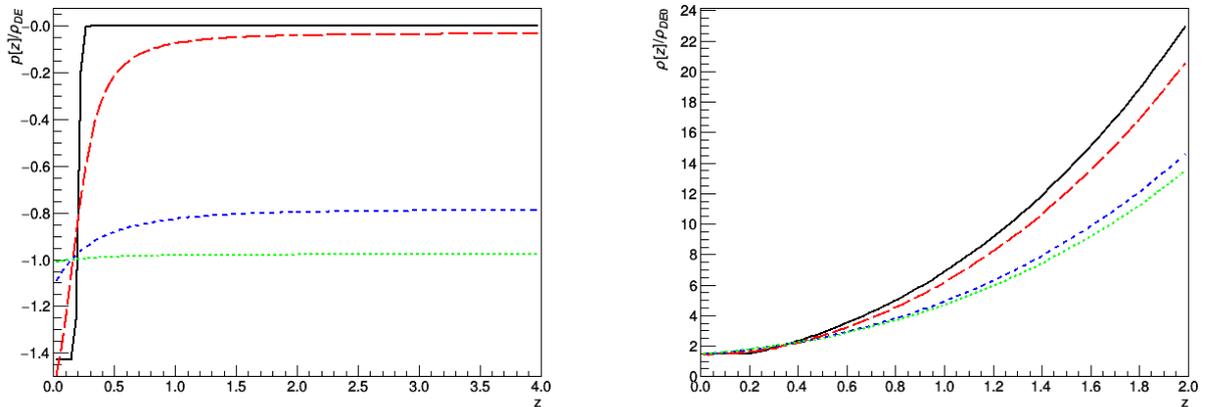


Figura 3.10: Sono stati gra cate le funzioni $p[z]/\rho_{DE0}$ e $\rho[z]/\rho_{DE0}$ in funzione del redshift z per $z_t = 0.2$ e $\nu = m/_{DE} = 0.463$. In entrambi i pannelli le linee, dal tratteggio piu corto a quello piu lungo, corrispondono a $\beta = 0.1, 1, 10$, mentre la linea continua nera corrisponde a $\beta = 100$.

Conclusione

Questo lavoro affronta lo studio di modelli cosmologici in cui la dinamica di un campo scalare dipendente solo dal tempo fornisce una descrizione unificata della materia e dell'energia oscura. In questo contesto sono stati dapprima studiati modelli descritti da una Lagrangiana di *k-essenza* e ne sono state tratte le proprietà generali, prestando attenzione all'andamento della velocità del suono. È stata poi posta l'attenzione su metodi per costruire una Lagrangiana che riesca a descrivere il comportamento del fluido oscuro. Nel primo metodo esposto si impone il vincolo $p = -\rho$, nel secondo, più generale, la pressione è una libera funzione del fattore di scala, $p = p(N)$ dove $N = \ln a$. È stato infine approfondito il modello analizzato nelle sezioni 3.2.2 e 3.3 di cui sono stati studiati i parametri. In particolare è stato verificato che il modello permette di ottenere valori di w_{DE0} significativamente minori di -1 , compatibili con il valore stimato sperimentalmente (si veda ref. [1] tabella 4), senza violare la condizione di energia nulla $p + \rho \geq 0$.

Bibliografia

- [1] N. Aghanim et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. 2018.
- [2] M. C. Bento, O. Bertolami, and A. A. Sen. Generalized Chaplygin gas, accelerated expansion and dark energy matter unification. *Phys. Rev.*, D66:043507, 2002.
- [3] Daniele Bertacca and Nicola Bartolo. ISW effect in Unified Dark Matter Scalar Field Cosmologies: An analytical approach. *JCAP*, 0711:026, 2007.
- [4] Daniele Bertacca, Nicola Bartolo, Antonaldo Diaferio, and Sabino Matarrese. How the Scalar Field of Unified Dark Matter Models Can Cluster. *JCAP*, 0810:023, 2008.
- [5] Daniele Bertacca, Nicola Bartolo, and Sabino Matarrese. Unified Dark Matter Scalar Field Models. *Adv. Astron.*, 2010:904379, 2010.
- [6] Daniele Bertacca, Marco Bruni, Oliver F. Piattella, and Davide Pietrobon. Unified Dark Matter scalar field models with fast transition. *JCAP*, 1102:018, 2011.
- [7] Daniele Bertacca, Sabino Matarrese, and Massimo Pietroni. Unified Dark Matter in Scalar Field Cosmologies. *Mod. Phys. Lett.*, A22:2893{2907, 2007.
- [8] Sidney A. Bludman. Tracking quintessence would require two cosmic coincidences. *Phys. Rev.*, D69:122002, 2004.
- [9] Robert Brandenberger, Rodrigo R. Cuzinatto, Jürg Fröhlich, and Ryo Namba. New Scalar Field Quartessence. *JCAP*, 1902:043, 2019.
- [10] Robert Brandenberger, Jürg Fröhlich, and Ryo Namba. Unified Dark Matter, Dark Energy and Baryogenesis via a "Cosmological Wetting Transition". 2019.
- [11] Elisa G. M. Ferreira, Guilherme Franzmann, Justin Khoury, and Robert Brandenberger. Unified Superfluid Dark Sector. *JCAP*, 2019(08):027, 2019.
- [12] Andrew Liddle. *An introduction to modern cosmology; 2nd ed.* Wiley, Chichester, 2003.
- [13] T. Padmanabhan and T. Roy Choudhury. Can the clustered dark matter and the smooth dark energy arise from the same scalar field? *Phys. Rev.*, D66:081301, 2002.
- [14] Havard Sandvik, Max Tegmark, Matias Zaldarriaga, and Ioav Waga. The end of unified dark matter? *Phys. Rev.*, D69:123524, 2004.
- [15] Robert J. Scherrer. Purely kinetic k-essence as unified dark matter. *Phys. Rev. Lett.*, 93:011301, 2004.
- [16] Alexander Vikman. Can dark energy evolve to the phantom? *Phys. Rev.*, D71:023515, 2005.
- [17] Matt Visser. Energy conditions in the epoch of galaxy formation. *Science*, 276:88{90, 1997.
- [18] Ivaylo Zlatev, Li-Min Wang, and Paul J. Steinhardt. Quintessence, cosmic coincidence, and the cosmological constant. *Phys. Rev. Lett.*, 82:896{899, 1999.