UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA “TULLIO LEVI-CIVITA”

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

L’implicazione logica: aspetti matematici e didattici

Un approccio interdisciplinare all’insegnamento della logica nella scuola secondaria

Relatore:

Dott. Samuele Maschio

Laureanda:

Carlotta Paoli

Matricola: 2018873

Anno Accademico 2022/2023

21 aprile 2023

"Tanto per cominciare", disse il Gatto,
"i cani non sono matti. Fin qui sei d'accordo?"
"Credo di sì", disse Alice.
"Dunque", proseguì il Gatto,
"tu sai che i cani quando sono arrabbiati ringhiano,
e quando sono contenti agitano la coda.
Invece io ringhio quando sono contento,
e agito la coda quando sono arrabbiato.
Perciò sono matto."
(Lewis Carroll)

Indice

Introduzione

L'implicazione logica, configurandosi come fondamentale in ogni processo argomentativo, è al centro del ragionamento matematico ma nasconde, nella sua complessità, insidie e difficoltà che ne ostacolano una corretta comprensione e un efficace utilizzo. Non è un caso che nel corso della storia l'implicazione sia stata al centro di numerosi confronti tra matematici, logici e filosofi. Risalendo all'età ellenistica, il poeta greco Callimaco scriveva, prendendosi gioco degli stoici, che coniarono per primi il termine logica: "*Ecco anche i corvi sui tetti:* '*Che cosa implica?*' *Gracchiano.*"[1] Non solo in ambito scientifico l'implicazione logica è argomento di diverse controversie, ma anche da un punto di vista didattico si sono svolti, nel corso del tempo, diversi studi e ricerche che hanno indagato le difficoltà concettuali collegate a questa importante struttura logica.

Nella tradizione logica classica, il condizionale $P \to Q$ è chiamato anche *implicazione materiale*: si tratta di uno dei *connettivi* più importanti in matematica, ovvero un'operazione logica che permette di costruire una nuova proposizione $P \to Q$ partendo da altre due proposizioni date P e Q. Nella lingua italiana la forma più usata per esprimere un'implicazione logica è *"se...allora..."* - dove spesso la parola *allora* viene omessa - ma ci sono tante altre espressioni che traducono questo costrutto logico, come, ad esempio, *"P solo se Q"*, *"Q è condizione necessaria per P"*, *"P è condizione sufficiente per Q"*, *"da P segue Q"*, *"P implica Q"* e tante altre.
Bisogna però prestare molta attenzione alla terminologia che, talvolta, può essere ambigua: l'espressione *"P implica Q"* può essere usata anche per intendere *"da P si deduce Q"*, oppure *"Q è conseguenza logica di P"*, cioè per comunicare che se P è vera si può concludere che lo è anche Q. In questo caso si sta considerando una *relazione* tra proposizioni che, in termini logici, si scrive $P \vdash Q$.

La differenza di significato tra *implicazione* e *deduzione* è molto sottile ma è essenziale nel ragionamento matematico. È importante riuscire a distinguere la relazione di conseguenza da altre forme di implicazione, o da altri sensi del costrutto *"se...allora..."*, il cui significato è polimorfo. Infatti, l'espressione può assumere diversi significati.

1. Significato logico o inferenziale: in questa accezione l'implicazione è intesa come deduzione di una conseguenza necessaria da una o più proposizioni, come nel seguente caso: *"se tutti gli uomini sono mortali e Socrate è un uomo, allora Socrate è mortale"*.

[1]Sesto Empirico, *Contro i matematici*, I, 309.

2. Significato definitorio: in questo senso l'espressione *"se... allora"* è utilizzata per definire un concetto, come nella frase *"se è scapolo, allora non è sposato"*.
3. Significato causale: tra le due proposizioni P e Q si stabilisce una relazione di causa-effetto, come nella frase *"se raggiunge la temperatura di circa 100°C, allora l'acqua bolle"*. Vi sono casi in cui la causa è espressa dal conseguente e non, come ci si potrebbe aspettare, dall'antecedente, come, per esempio, nella proposizione *"se si immerge una cartina di tornasole e diventa rossa, allora il liquido è un acido"*.
4. Significato materiale: in questo senso il significato delle proposizioni P e Q non è rilevante ai fini dell'implicazione. Infatti, ad un valore di verità di P e ad uno di Q, indipendentemente dal significato rispettivamente di P e Q, corrisponde un valore della proposizione composta $P \rightarrow Q$, come nel caso della frase *"se la Terra vola, allora la Terra è piatta"*.

Non è facile trovare qualcosa in comune in queste diverse accezioni del *"se...allora..."*. Il caso che ha sollevato maggiori discussioni è relativo a come considerare un'implicazione logica se l'antecedente è falso, come nell'ultimo caso sopra riportato, dove il conseguente è anch'esso falso, oppure come nella proposizione *"se la Terra vola, allora la Terra esiste"*, dove il conseguente è vero. [23]
Già nel IV secolo a.C. il filosofo e logico Filone di Megara si occupò del valore di verità di un'implicazione e parlò per la prima volta di proposizioni il cui valore di verità è completamente determinato dai valori di verità delle sue componenti elementari. Ecco quanto riporta Sesto Empirico: *"secondo lui [Filone di Megara] ci sono tre modi in cui un condizionale può essere vero, e uno in cui può essere falso. Perché un condizionale è vero quando inizia con una verità e termina con una verità, come 'se è giorno, è chiaro'. Ed è vero anche quando inizia con una falsità e termina con una falsità, come 'se la terra vola, la terra ha le ali'. Analogamente, è vero un condizionale che inizia con una falsità e termina con una verità, come 'se la terra vola, la terra esiste'. Un condizionale è falso soltanto quando inizia con una verità e termina con una falsità, come 'se è giorno, è notte'."* [2]

Anche in ambito didattico e pedagogico la questione è particolarmente delicata. Come scrive D'Amore *"nessun quattordicenne ha mai capito davvero che cosa volesse dire 'implicazione materiale' in logica (in particolare: se P è una proposizione falsa e Q pure è falsa, come diavolo fa $P \rightarrow Q$ ad essere vera?)."* [3]

Il motivo per cui l'implicazione logica è difficile e controversa è che non le si può associare una rappresentazione mentale immediata di quello che descrive, come invece si

[2] Sesto Empirico, *Contro i matematici*, VIII, 113. È curioso notare come l'ultima frase *"se è giorno, è notte"* assuma un valore di verità diverso in base al contesto in cui viene pronunciata. Se la frase viene detta di giorno, allora l'antecedente è vero e il conseguente è falso, e dalla tavola di verità dell'implicazione si conclude che l'implicazione è falsa; ma se viene pronunciata di notte, l'antecedente è falso e il conseguente vero, quindi l'implicazione è vera. Forse il punto è, tuttavia, che quando si pronuncia questa frase non si intende semplicemente un'implicazione, ma un'implicazione racchiusa da un quantificatore universale *"in ogni momento in cui è giorno, è notte"*: in questo caso la frase è chiaramente falsa.

[3] D'Amore B., *La matematica fra gli 8 e i 15 anni*, Apeiron, 1991, p. 79.

riesce a fare per gli altri connettivi logici. Non è possibile avere una rappresentazione del fatto descritto da $P \to Q$, combinando quelle di P e di Q. [23]

L'obiettivo della presente tesi è analizzare proprio questi aspetti relativi all'implicazione logica sia da un punto di vista strettamente matematico sia, più in generale, rivolgendo particolare attenzione al contesto didattico.

Nel *Capitolo 1* viene riportata un'indagine sulla conoscenza dell'implicazione logica a livello pre-universitario. A tale scopo è stato preparato e somministrato un test di logica su diversi aspetti dell'implicazione che analizza quali sono le principali difficoltà riscontrate da studenti[4] che frequentano l'ultimo anno del liceo scientifico. Nel test si trovano domande simili a quelle dei test d'ingresso all'Università e alcuni quesiti più articolati costituiti da brevi testi argomentativi che hanno lo scopo di valutare la capacità di comprensione del testo, la padronanza di alcuni aspetti dell'implicazione logica e di indagare se il linguaggio matematico sia da ritenersi un ostacolo aggiuntivo per una corretta comprensione dell'implicazione.

Lo scopo del *Capitolo 2* è analizzare l'implicazione logica nei suoi aspetti matematici. Nello specifico, viene fatto un confronto sull'implicazione logica e le sue proprietà in logica classica e in logica intuizionista. Mentre, nel primo caso, si può definire il connettivo logico di implicazione attraverso la sua tavola di verità, questo non si può fare in logica intuizionista dove non vale il *principio di bivalenza*, secondo il quale una proposizione può avere solo due valori di verità, vero oppure falso. Successivamente si presenta il *sistema assiomatico di Hilbert*, che consiste in un approccio alla logica proposizionale attraverso una teoria formale, all'interno della quale l'implicazione ha un ruolo fondamentale. Viene poi studiato un importante teorema di logica matematica, il *teorema di deduzione*, che lega il concetto di *implicazione* a quello di *deduzione*. Infine, si presentano i calcoli della *deduzione naturale* per la logica classica e quella intuizionista e si dimostra quali proprietà dell'implicazione logica valgono classicamente e quali intuizionisticamente.

Nel *Capitolo 3*, si sposta l'attenzione sul piano della didattica. Si propone un'analisi dei principali errori che nei processi di apprendimento interessano l'implicazione logica e si cerca di individuarne le possibili cause. Una parte del Capitolo è dedicata a considerazioni sul rapporto tra linguaggio naturale e linguaggio logico formale: l'*incongruenza* che sussiste tra questi due linguaggi è un ostacolo ad una corretta interpretazione di frasi condizionali. L'ultima parte è dedicata a presentare alcuni spunti di riflessione per una didattica efficace che punti a ridurre le difficoltà che gli studenti incontrano nella gestione dell'implicazione logica.

Il *Capitolo 4* descrive, infine, un possibile percorso didattico interdisciplinare di logica che mira a potenziare la capacità di utilizzo consapevole dell'implicazione logica in contesto matematico e, più in generale, argomentativo. Nello specifico l'esperienza didattica è stata svolta in una classe terza del liceo scientifico con opzione

[4]In tutto l'elaborato vengono utilizzati i termini studenti, ragazzi intendendo studenti e studentesse, ragazzi e ragazze per evitare di appesantire la scrittura.

Scienze Applicate dell'*Istituto di Istruzione Lorenzo Guetti*, di *Tione di Trento*. Per preparare le lezioni e le attività da portare in classe si sono utilizzate gran parte delle riflessioni proposte nel *Capitolo 3*.

Le ultime due parti di questo lavoro presentano una *Conclusione* e un'*Appendice* finale dove si possono consultare tutti i materiali utilizzati durante il progetto sperimentale a scuola.

Capitolo 1

Un'indagine sulla conoscenza dell'implicazione logica a livello pre-universitario

In questo Capitolo viene riportato un test di logica somministrato a studenti delle classi quinte di alcuni licei scientifici (ordinari e con opzione scienze applicate) che indaga, a livello pre-universitario, la consapevolezza e capacità di utilizzo e comprensione dell'implicazione logica nei diversi suoi aspetti e in quali misure il linguaggio matematico sia da considerarsi un ostacolo ad una corretta comprensione del testo.

Di seguito vengono riportati i seguenti materiali:

- Test di logica
- Soluzioni del test di logica
- Analisi della struttura e degli obiettivi del test
- Risultati e commenti finali emersi dal test

TEST DI LOGICA

Di seguito sono presentati alcuni quesiti di logica a cui rispondere. Solo nelle domande dove viene specificato ci può essere più di una risposta corretta. Il tempo per svolgerlo è di 50 minuti.

QUESITO 1

Assunta come vera la seguente frase *"Tutti i cani che abbaiano non mordono"*, quale delle seguenti proposizioni sarà necessariamente vera?

a) Tutti i cani non mordono.

b) Alcuni cani che abbaiano mordono.

c) I cani che mordono non abbaiano.

d) Tutti gli animali che mordono sono cani.

e) Se i cani non mordono, abbaiano.

QUESITO 2

Dopo aver letto attentamente il seguente testo, rispondi alle successive domande (non necessariamente le domande hanno una sola risposta corretta).

Se consideriamo un qualsiasi triangolo, allora le tre altezze si incontrano in un punto detto ortocentro, le mediane dei lati si intersecano nel baricentro e gli assi dei lati si incontrano nel circocentro. Se questi tre punti non coincidono allora sono allineati su una retta detta di Eulero, altrimenti diciamo che la retta di Eulero non esiste. Il triangolo è equilatero se e solo se i tre punti coincidono e, in questo caso, combaciano anche con l'incentro del triangolo, punto di intersezione delle bisettrici interne. Se il triangolo è isoscele allora ortocentro, baricentro e circocentro appartengono alla bisettrice relativa all'angolo al vertice.

- La retta di Eulero:
  a) esiste in ogni triangolo.
  b) esiste solo nei triangoli equilateri.
  c) esiste solo se ortocentro, baricentro, circocentro e incentro sono allineati.
  d) esiste in ogni triangolo a eccezione dei triangoli equilateri.

- In un triangolo isoscele:
  a) la retta di Eulero non esiste.
  b) l'incentro appartiene alla retta di Eulero.
  c) ortocentro, baricentro, circocentro e incentro coincidono.
  d) la retta di Eulero è la bisettrice relativa all'angolo al vertice.

QUESITO 3

Caterina ha detto: *"Quando piove, prendo l'ombrello"*. Per dimostrare che Caterina ha detto il falso:

a) è necessario che non piova e prenda l'ombrello.
b) è necessario che non piova.
c) è necessario che prenda l'ombrello.
d) è necessario che piova.

QUESITO 4

Dopo aver letto attentamente il seguente testo, rispondi alle successive domande (non necessariamente le domande hanno una sola risposta corretta).

Se uno studente universitario ha la media dei voti degli esami maggiore o uguale a 27 o possiede un reddito familiare minore di 24000 euro, allora è idoneo a ricevere la borsa di studio. Se uno studente è idoneo, se ha la media dei voti minore di 27, allora deve avere un reddito minore di 24000 euro. Data la scarsità di fondi economici a disposizione dell'Università, non tutti gli idonei alla borsa di studio risultano beneficiari e, chi riceve la borsa di studio, soddisfa entrambi i requisiti.

- Quale o quali delle seguenti è una condizione sufficiente affinché uno studente risulti idoneo a ricevere la borsa di studio?
  a) Avere la media dei voti minore di 27.
  b) Avere la media dei voti maggiore di 27 e un reddito familiare inferiore a 24000 euro.
  c) Avere un reddito familiare di almeno 24000 euro.
  d) Avere la media dei voti maggiore o uguale a 27.

- Quale o quali delle seguenti sono condizioni necessarie affinché uno studente risulti beneficiario?
  a) Essere idoneo a ricevere la borsa di studio.
  b) Avere un reddito familiare minore di 24000 euro o la media dei voti maggiore o uguale a 27.
  c) Avere un reddito familiare maggiore di 24000 euro e la media dei voti maggiore o uguale a 27.
  d) Avere una media maggiore o uguale a 27 e un reddito minore di 24000 euro.

QUESITO 5

"Tra i numeri naturali, se un numero è multiplo di 10, allora è multiplo di 5".
Se questa proposizione è vera, quale delle seguenti frasi sarà vera?

a) Se un numero è multiplo di 5, allora è multiplo di 10.

b) Alcuni multipli di 10 non sono multipli di 5.

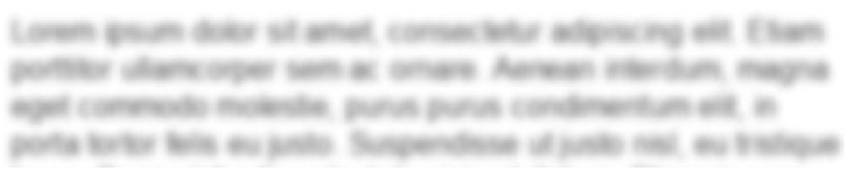
c) Se un numero è multiplo di 10, allora non è multiplo di 5.

d) Se un numero non è multiplo di 10, allora non è multiplo di 5.

e) Se un numero non è multiplo di 5, allora non è multiplo di 10.

QUESITO 6

Di seguito è riportato un testo sull'albero genealogico della famiglia Bianchi.



Non è possibile leggere con chiarezza il testo, ma sapendo che tra le risposte seguenti una sola è corretta riguardo a Teresa Bianchi, indica quale:

a) Teresa è bisnonna

b) Teresa è nonna

c) Teresa è madre

d) Teresa è trisnonna

QUESITO 7

Dopo aver letto attentamente il seguente testo, rispondi alle successive domande (non necessariamente le domande hanno una sola risposta corretta).

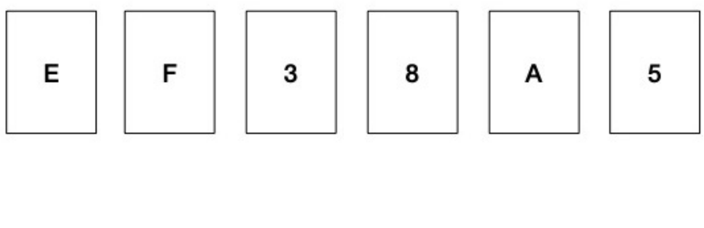
Se consideriamo un mammifero, allora è dotato di quattro arti, si riproduce con fecondazione interna e ha il sangue caldo, cioè è capace di mantenere costante la temperatura corporea. Se, inoltre, l'embrione non si sviluppa all'esterno dell'organismo materno, allora è viviparo, altrimenti è oviparo. Il mammifero è detto monotremo se e solo se l'embrione non si sviluppa all'interno dell'organismo e, in questo caso, le sue ghiandole mammarie sono poco sviluppate rispetto agli altri mammiferi. Se il mammifero è un placentato, allora l'embrione si sviluppa nella placenta all'interno dell'individuo femminile.

- Sono vivipari:
  a) tutti i mammiferi.
  b) tutti i mammiferi tranne i monotremi.
  c) i mammiferi il cui embrione non si sviluppa all'esterno dell'organismo e hanno ghiandole mammarie poco sviluppate.
  d) tutti i mammiferi monotremi.
- I mammiferi placentati:
  a) sono dotati di ghiandole mammarie e sono vivipari.
  b) sono ovipari.
  c) sviluppano l'embrione all'interno dell'organismo e hanno ghiandole mammarie poco sviluppate.
  d) si riproducono con fecondazione interna e hanno ghiandole mammarie.

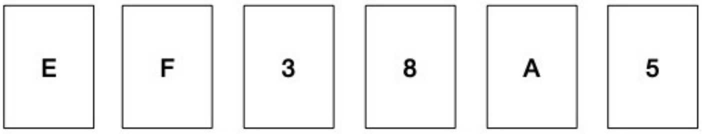
QUESITO 8

Su un tavolo ci sono 6 carte: ogni carta ha un numero su una faccia e una lettera sull'altra.
Di seguito sono riportate tre proposizioni, per ciascuna di esse segna con una croce le carte che devi girare per controllare se quella proposizione è vera o falsa.

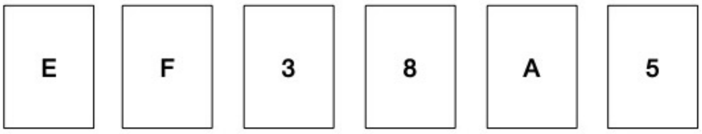
1. *"Ogni carta ha una faccia con un numero maggiore di 2"*



2. *"Se in una faccia c'è una vocale, nell'altra c'è un numero pari"*



3. *"Se in una faccia c'è una vocale, se nell'altra c'è un numero pari allora è multiplo di 3"*



QUESITO 9

Dopo aver letto il seguente testo, rispondi alle successive domande (non necessariamente le domande hanno una sola risposta corretta).

Se un numero si può scrivere nella forma $(n^3 - 2)$ o è divisibile per un numero pari allora è un numero olomorfico. Se un numero è olomorfico, se non si può scrivere nella forma $(n^3 - 2)$, allora deve essere divisibile per un numero pari. Inoltre, non tutti i numeri olomorfici sono ordinari e quelli che lo sono soddisfano entrambi i requisiti.

- Quale o quali delle seguenti è una condizione sufficiente affinché un numero sia olomorfico?
  a) Il numero si può scrivere nella forma $(n^3 - 2)$.
  b) Il numero si può scrivere nella forma $(n^3 - 2)$ ed è divisibile per un numero pari.
  c) Il numero non è divisibile per un numero pari.
  d) Il numero non si può scrivere nella forma $(n^3 - 2)$.
- Quale o quali delle seguenti sono condizioni necessarie affinché un numero sia ordinario?
  a) Essere un numero divisibile per un numero pari o che si può scrivere nella forma $(n^3 - 2)$.
  b) Essere un numero non divisibile per un numero pari e che si può scrivere nella forma $(n^3 - 2)$.
  c) Essere un numero olomorfico.
  d) Essere un numero che si può scrivere nella forma $(n^3 - 2)$ e divisibile per un numero pari.

SOLUZIONI TEST DI LOGICA

Simboli logici presenti nelle soluzioni:

- $\to$ *"se…allora…"*, implicazione logica. Se P è la proposizione *"piove"* e Q è *"prendo l'ombrello"*, $P \to Q$ è *"se piove, allora prendo l'ombrello"*.
- $\neg$ *"non"*; questo simbolo, premesso all'enunciato, ne fornisce la negazione. Se P è la proposizione *"piove"*, $\neg P$ è *"non piove"*.
- $\wedge$ *"e"*; la congiunzione, collega due enunciati. Se P è *"piove"* e Q è la frase *"fa freddo"*, $P \wedge Q$ è la proposizione composta *"piove e fa freddo"*.

QUESITO 1

La risposta corretta è la **c)**. Infatti, la frase *"Tutti i cani che abbaiano non mordono"*, a meno del quantificatore iniziale, può essere vista come un'implicazione della forma $P \to Q$, che è logicamente equivalente alla sua contronominale $\neg Q \to \neg P$ ovvero, *"I cani che mordono non abbaiano"*.

QUESITO 2

Il testo è costituito da implicazioni e doppie implicazioni (*"se e solo se")*.
La prima risposta corretta è la **d)**. Infatti, nel testo si dice che la retta di Eulero è definita se ortocentro, baricentro e circocentro non coincidono e nei triangoli equilateri questi tre punti coincidono e combaciano anche con l'incentro, altro punto notevole dei triangoli. Quindi, la retta di Eulero non è definita.
Nel secondo quesito, le risposte corrette sono due, la **b)** e la **d)**. Nei triangoli isosceli ortocentro, baricentro e circocentro appartengono ad una bisettrice, questo ci dice che la bisettrice relativa all'angolo al vertice è proprio la retta di Eulero e, inoltre, su questa sta necessariamente anche l'incentro poiché punto di intersezione delle bisettrici.

QUESITO 3

La risposta corretta è la **d)**. La frase considerata è un'implicazione $P \to Q$, dove P è *"piove"* e Q è *"prendo l'ombrello"*. La tavola di verità dell'implicazione è la seguente:

P	Q	P → Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Quindi, se non piove, sia che prenda o non prenda l'ombrello, la frase pronunciata da Caterina è vera. Per dimostrare che ha detto il falso, deve succedere che Caterina non prende l'ombrello anche se sta piovendo.

QUESITO 4

Il testo è costituito da diverse implicazioni logiche della forma $P \to Q$, che si può anche esprimere con *"P è **condizione sufficiente** per Q"* e *"Q è **condizione necessaria** per P"*.
Nella prima domanda, le risposte a) e c) sono banalmente scorrette. Le risposte corrette sono la **b)** e la **d)** in quanto, *se uno studente ha entrambi i requisiti* è sufficiente per concludere che è *idoneo* e anche *se ha solo la media dei voti maggiore o uguale a 27.*
Nella seconda domanda, le risposte corrette sono la **a)**, la **b)** e la **d)**. Infatti deduciamo che, per essere beneficiario, si deve essere necessariamente idonei a ricevere la borsa di studio (risposta a)) e soddisfare entrambi i requisiti (risposta d)). La correttezza della risposta b) deriva dal fatto che la frase *"se uno studente risulta beneficiario, allora deve avere un reddito familiare minore di 24000 o la media dei voti maggiore o uguale a 27"* è vera.

QUESITO 5

La risposta corretta è la **e)**. Il ragionamento è analogo al *quesito 1*: la frase considerata è logicamente equivalente alla proposizione *"Se un numero non è multiplo di 5, allora non è multiplo di 10"*, ovvero, a meno dei quantificatori, alla sua contronominale $\neg Q \to \neg P$.

QUESITO 6

La risposta corretta è la **c)**. In questo quesito la risposta non si ricava dal testo, evidentemente non leggibile, ma ragionando opportunamente sulle possibili risposte proposte. Dal momento che è possibile dare una sola risposta, l'unica accettabile è che *"Teresa sia madre"* perché, qualsiasi delle altre tre risposte, implica almeno un'altra risposta da segnare. Ad esempio, segnando la a) come risposta corretta, anche la b) e la c) sarebbero state altrettanto corrette.

QUESITO 7

La prima risposta corretta è la **b)**, in quanto gli unici mammiferi ovipari, quindi non vivipari, sono i monotremi. Nel secondo quesito, le risposte corrette sono due, la **a)** e la **d)**: tutti i mammiferi sono dotati di ghiandole mammarie e si riproducono con fecondazione interna, quindi anche i placentati, ed essi sono anche vivipari.

QUESITO 8

Per verificare se è vera o falsa la prima proposizione, si devono girare tutte le carte che hanno su una faccia una lettere, quindi la carta con la lettera **E**, **F** ed **A**.

Per verificare se la seconda frase è vera o falsa si devono girare le carte con una vocale e un numero dispari, quindi le carte con scritto **E**, **A**, **3** e **5**. Ognuna di queste quattro carte può risolvere il problema (se abbiamo una smentita) e tutte lo risolvono sicuramente (con quattro conferme senza possibilità ulteriori di smentita). Le altre scelte non danno informazioni utili per risolvere il problema. Una spiegazione più formale è la seguente. Posto V la proposizione *"In una faccia c'è una vocale"* e P la frase *"In una faccia c'è un numero pari"*, la frase *"Se in una faccia c'è una vocale, nell'altra c'è un numero pari"*, cioè $V \to P$. La proposizione è vera se non accade $\neg(V \to P)$ che è equivalente a $V \wedge \neg P$. Quindi non deve succedere che su una carta ci sia su una faccia una vocale e sull'altra un numero dispari. Il problema può essere anche risolto scegliendo le carte usando il *modus ponens*, cioè tutte le carte con una vocale devono essere controllate per assicurarsi che dietro abbiano un numero pari, e il *modus tollens*, cioè tutte le carte dispari (non pari) devono essere controllate per assicurarsi che dietro non ci sia una vocale.

Per verificare se la terza proposizione è vera oppure no, si devono girare le carte che hanno una vocale su una faccia e quelle con un numero che sia pari e non multiplo di 3, quindi le carte con le scritte **E**, **A** e **8**. Il ragionamento è come il precedente, solo girando queste tre carte possiamo essere sicuri della risposta. Una spiegazione più rigorosa è la seguente. Posto V e P come sopra, e M la frase *"Il numero è un multiplo di 3"*, la terza proposizione è della forma $V \to (P \to M)$ che è vera solo se non accade $\neg(V \to (P \to M))$ che è equivalente a $V \wedge \neg(P \to M)$ che, con le opportune regole logiche, è equivalente a $V \wedge (P \wedge \neg M)$. Quindi non deve succedere che su una carta ci sia una vocale e un numero che sia contemporaneamente pari e non multiplo di tre. Utilizzando le regole di deduzione il ragionamento è il seguente: secondo il *modus ponens* si devono girare le carte con una vocale (V) e controllare che sia vero $P \to M$ cioè $\neg P \vee M$ (quindi può esserci un numero dispari oppure un multiplo di 3, mentre non deve esserci un numero pari e contemporaneamente non multiplo di 3). Mentre per il *modus tollens* devo girare la carta con un numero pari e contemporaneamente non multiplo di 3 ($\neg(P \to M) = P \wedge \neg M$) e controllare che dietro non ci sia una vocale ($\neg V$).

QUESITO 9

Il ragionamento è analogo al *quesito 4*. Le risposte corrette alla prima domanda sono la **a)** e la **b)**, entrambe ci permettono di concludere che un numero è olomorfico. Le risposte corrette alla seconda domanda sono invece tre, la **a)**, la **c)** e la **d)**: tutte e tre le risposte sono condizioni necessarie affinché un numero sia ordinario.

Analisi della struttura e degli obiettivi del test

A chi è rivolto il test

Il test di logica è stato proposto a studenti di classe quinta di un liceo scientifico, con età compresa tra i 17 e 19 anni. In particolare, l'indagine è stata fatta in due classi di liceo scientifico ordinamentale (14 studenti, 15 studenti) e una classe di scientifico con opzione scienze applicate (22 studenti), per un totale di 51 studenti.

Obiettivi del test

Il test viene proposto alla fine di un percorso scolastico liceale per cercare di rispondere alle seguenti due domande.

1. Che livello di consapevolezza e padronanza della struttura logica dell'implicazione hanno gli studenti?
2. La comprensione di un testo in ambito matematico risulta più difficile rispetto all'analisi di un testo con la stessa struttura logica ma in contesto non matematico?

Per rispondere alle domande si è sviluppato un test di logica che indaga questi aspetti. Tutto il test è rivolto all'analisi del livello di comprensione degli studenti di enunciati o brevi testi contenenti implicazioni logiche espresse in modi differenti. Si vuole valutare la capacità di analizzare implicazioni logiche e individuarne proposizioni con lo stesso significato, l'utilizzo delle espressioni *condizione necessaria e/o sufficiente*, l'utilizzo di proprietà del connettivo e il grado di familiarità degli studenti con il ragionamento deduttivo. In particolare, per rispondere alla seconda domanda, si sono sviluppati dei testi simmetrici, uno riguardo ad un tema matematico e l'altro, con la stessa struttura logica, con argomento di altra natura e di vita quotidiana.

La struttura del test

Il test è costituito da *nove* quesiti di diversa difficoltà da svolgere in 50 minuti. I *quesiti 1, 3, 5, 6* e *8* indagano vari aspetti sulla consapevolezza della struttura logica di proposizioni contenenti implicazioni da parte di studenti pre-universitari.
I *quesiti 2, 4, 7* e *9* riguardano non solo il connettivo di implicazione logica e le locuzioni *condizione necessaria e/o sufficiente*, ma vogliono anche valutare la capacità di comprensione del testo da parte degli studenti e osservare se emergono risultati differenti nelle risposte in base all'argomento trattato.
Nello specifico, con il ***quesito 1*** si vuole indagare se i ragazzi sono capaci di convertire la frase iniziale *"Tutti i cani che abbaiano non mordono"* in forma condizionale e riconoscere tra le cinque frasi elencate la sua contronominale e attribuirle lo stesso valore di verità espressa dalla prima. In questo caso la domanda è posta in contesto non matematico, a differenza del ***quesito 5***, dove si valuta il riconoscimento dell'equivalenza tra un'implicazione diretta *"Se un numero è un multiplo di 10, allora è multiplo di 5"* e la proposizione contronominale, ma in contesto matematico.
Con il ***quesito 3***, si vuole valutare la capacità degli studenti di riconoscere che

un'implicazione è *falsa* quando l'antecedente è *vero* e il conseguente è *falso* e valutare in quale misura è presente la convinzione errata che un'implicazione risulta *falsa* quando l'antecedente è *falso* e il conseguente è *vero*.
Il ***quesito 6*** valuta la capacità di ragionamento logico dei ragazzi, in particolare la risposta esatta, che deve essere una sola, può essere data solo ragionando opportunamente sulle risposte possibili e accorgendosi che tutte le risposte tranne una, quella corretta, implicano almeno un'altra risposta da segnare.
Il ***quesito 8***, costituito da tre punti, è una rivisitazione del *Test di Wason*, uno dei compiti più famosi sul ragionamento deduttivo, che descriveremo meglio nel Capitolo 3. In particolare il punto a) chiede di valutare, girando le opportune carte, la verità della frase *"Ogni carta ha una faccia con un numero maggiore di 2"*. Si tratta quindi di un esercizio di ragionamento che non coinvolge implicazioni, ma prepara gli studenti ad entrare nel meccanismo per ragionare poi sugli altri due enunciati, *"Se in una faccia c'è una vocale, nell'altra c'è un numero pari"* e la proposizione più complessa *"Se in una faccia c'è una vocale, se nell'altra c'è un numero pari allora è multiplo di 3"*. Il *Test di Wason* vuole valutare se i partecipanti leggono l'espressione *"se...allora..."* come implicazione logica e se sono consapevoli del suo significato strutturale. Il quesito si può risolvere anche applicando le regole di deduzione del *modus ponens* e *modus tollens*.
Gli altri quattro quesiti sono costituiti da brevi testi argomentativi con due domande ciascuno di comprensione. A due a due i testi proposti hanno la stessa identica struttura logica ma trattano di argomenti diversi per vedere se il contesto matematico crea più difficoltà di comprensione nonostante la struttura logica sia la stessa. Nello specifico, il ***quesito 2*** ha la stessa struttura logica del ***quesito 7*** e anche le successive domande che vengono proposte sono simmetriche. Il *quesito 2* riguarda la geometria euclidea. Il testo descrive una serie di condizioni, che sono espresse attraverso implicazioni logiche e doppie implicazioni, sui punti notevoli di un triangolo per l'esistenza della *retta di Eulero*. L'argomento trattato nel *quesito 7* è, invece, relativo ai mammiferi: viene descritta una serie di condizioni e caratteristiche per una prima classificazione di questi vertebrati.
Infine, il ***quesito 4*** e il ***quesito 9*** hanno la stessa struttura logica e le domande indagano il livello di comprensione degli studenti di proposizioni contenenti implicazioni logiche e delle espressioni *condizione necessaria e/o sufficiente*. Il *quesito 4* propone un testo relativo alle borse di studio che possono ricevere degli studenti universitari. Il *quesito 9*, simmetrico al precedente, presenta un testo matematico, utilizzando termini tecnici specifici, riguardo alle caratteristiche che devono avere determinati numeri. Va evidenziato che il testo proposto è inventato, per poter riprodurre nel modo più attendibile possibile la struttura logica del testo del *quesito 4*, poiché in quest'indagine non è rilevante la verità degli argomenti trattati ma la pura comprensione della struttura logica del testo.

Analisi dei risultati del test e commenti finali

Di seguito vengono analizzate le risposte date dagli studenti. In particolare, vengono messi in relazione i *quesiti 1-5, 2-7* e *4-9.* Una risposta viene considerata "parzialmente corretta" quando lo studente segna almeno una risposta giusta.

Il ***quesito 1*** *("Tutti i cani che abbaiano non mordono")* e il ***quesito 5*** *("Se un numero è multiplo di 10, allora è multiplo di 5")* valutano la capacità degli studenti di riconoscere l'equivalenza tra un'implicazione e la sua contronominale. La percentuale di risposte corrette è la stessa nelle due domande, il 59% (*Figura 1.1*). In questo caso non si nota una percentuale maggiore di risposte corretta nel caso del quesito di argomento non matematico, ma, in generale, emerge una consapevolezza instabile di questa equivalenza che, alla fine di un percorso scientifico liceale, dovrebbe essere ormai consolidata. Tuttavia, a differenza del *quesito 5*, la prima domanda richiede di essere in grado di convertire la frase in forma condizionale. Inoltre, l'argomento proposto nel *quesito 5* è di livello davvero elementare per ragazzi di quinta, e con ragionamenti anche di tipo non-logico, ma solo basandosi sulla propria conoscenza, avrebbero dovuto tutti riconoscere la risposta corretta. Questo è indice anche del fatto che gli studenti non sono abituati a ragionare su questa tipologia di quesiti e ad analizzare correttamente gli enunciati.

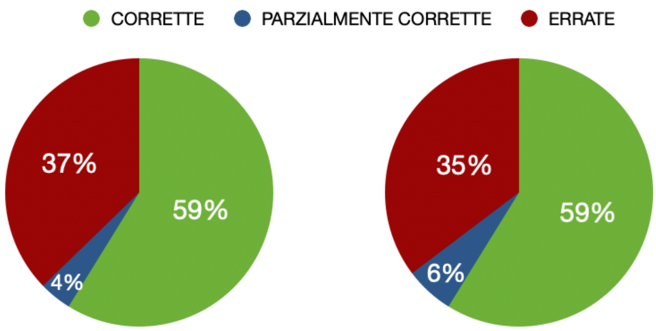


Figura 1.1: Risposte date al ***quesito 1*** (a sinistra) e al ***quesito 5*** (a destra).

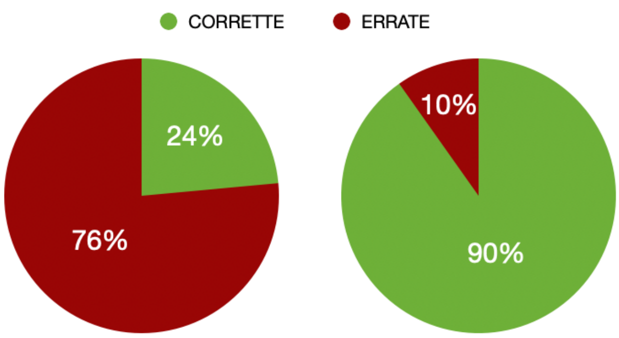


Figura 1.2: Risposte date al ***quesito 3*** (a sinistra) e al ***quesito 6*** (a destra).

Il ***quesito 3*** (*Figura 1.2*) riguarda il valore di verità dell'implicazione e delle due proposizioni che la compongono. Come ci si aspettava, solo una piccola parte di studenti (24%) individua che un'implicazione $P \rightarrow Q$ è *falsa* solo nel caso in cui P è *vera* e Q è *falsa*, mentre la maggior parte è convinta che sia *falsa* anche nel caso in cui P è *falsa* e Q è *vera*.

Nel ***quesito 6*** (*Figura 1.2*) si deve ragionare opportunamente sulle quattro risposte proposte per dare quella corretta. In particolare, le risposte sono legate dalle seguenti relazioni: *Teresa è trisnonna* $\rightarrow$ *Teresa è bisnonna* $\rightarrow$ *Teresa è nonna* $\rightarrow$ *Teresa è madre*. Quindi, se la risposta corretta è una sola, essa deve essere necessariamente *Teresa è madre*. Non si evidenziano grosse difficoltà a riguardo, il 90% degli studenti sembra ragionare correttamente.

I ***quesiti 2*** e ***7*** (*Figura 1.3*) aventi la stessa struttura logica, mostrano una maggiore comprensione del testo nel caso in cui l'argomento trattato sia di contesto non matematico, in questo caso riguardante i mammiferi (*quesiti 7a e 7b*). In particolare, la differenza è molto evidente confrontando i *quesiti 2b* e *7b*, dove, nella domanda relativa alla *retta di Eulero* nei triangoli isosceli risponde correttamente solo il 25% contro quasi il doppio di risposte corrette nella domanda sui *mammiferi placentati*. Mentre nei *quesiti 2a* e *7a* la differenza è meno evidente, anche se la domanda relativa ai mammiferi ha comunque una percentuale lievemente maggiore di risposte corrette rispetto all'argomento matematico. Complessivamente, la comprensione di questi due brevi testi non mette eccessivamente in difficoltà le classi, anche se, trattandosi di testi molto brevi e di studenti alla conclusione del percorso scolastico, ci si poteva aspettare che la percentuale di risposte corrette potesse essere più elevata.

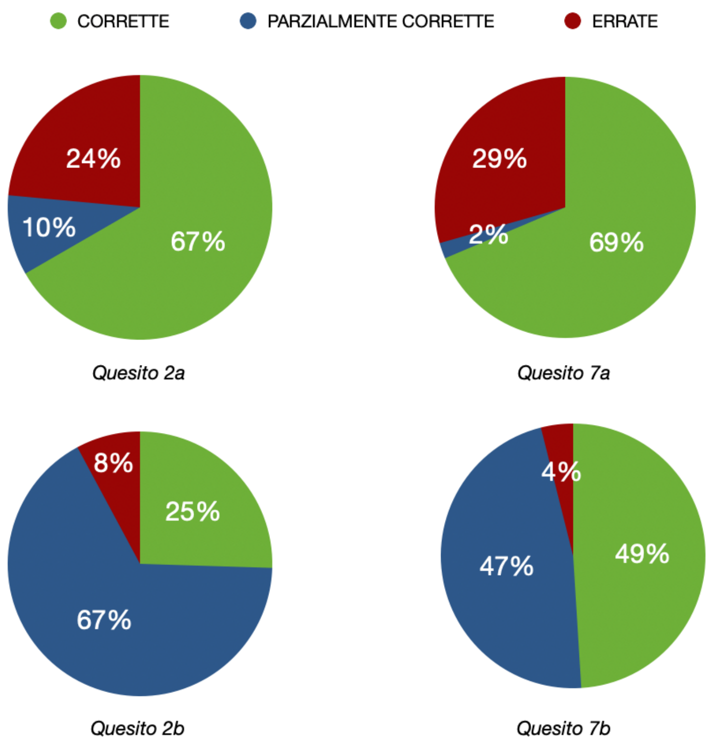


Figura 1.3: Risposte date al ***quesito 2*** (colonna di sinistra) e al ***quesito 7*** (colonna di destra).

Il ***quesito 8*** (*Figura 1.4*), costituito da tre punti, riguarda il *test di Wason*. Per quanto concerne il punto *8a*, la frase da verificare quando è *vera* non contiene un'implicazione *("Ogni carta ha una faccia con un numero maggiore di 2")* e, infatti, il 92% degli studenti individua correttamente le tre carte da girare per verificare la verità della proposizione. Le altre due frasi da verificare sono invece implicazioni, nel *quesito 8b* la frase è *"Se in una faccia c'è una vocale, nell'altra c'è un numero pari"* e, nel *quesito 8c* si propone "un'implicazione nell'implicazione", *"Se in una faccia c'è una vocale, se nell'altra c'è un numero pari allora è multiplo di 3"*. Gli studenti che individuano tutte e sole le carte da girare sono davvero pochi, il 4% nel punto *8b*, mentre la maggior parte, segna correttamente le carte con una vocale ma segna, scorrettamente, il numero pari che compare; e il 6% nel punto *8c*, segnando o solamente le due carte con la vocale oppure, oltre a quelle, anche la carta con il numero 3. Dall'analisi di queste risposte emerge chiaramente una scarsa comprensione del significato del connettivo logico di implicazione e una scarsa capacità di verifica e falsificazione di una proposizione condizionale.

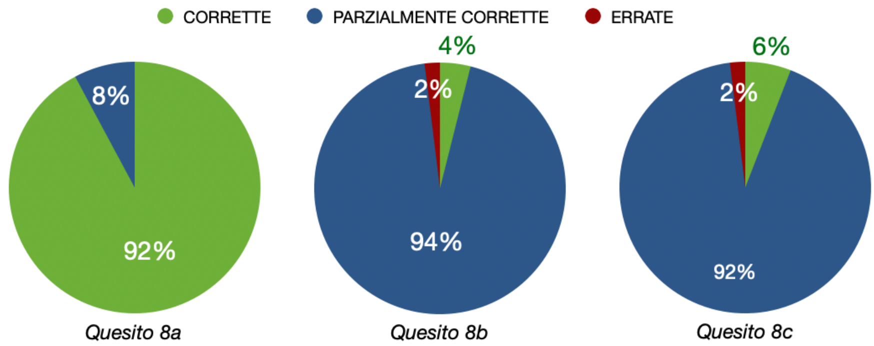


Figura 1.4: Dati in percentuale delle risposte date al **quesito 8**.

Infine, con i ***quesiti 4*** e ***9***, si vuole indagare la padronanza degli studenti delle espressioni *condizione necessaria* e *condizione sufficiente*. Anche in questo caso si propongono due testi, uno di argomento matematico (*quesito 9*) e uno sulle borse di studio (*quesito 4*) per vedere se il linguaggio matematico sia da considerarsi un ostacolo ulteriore. Dai risultati riportati in *Figura 1.5* è evidente che, indipendentemente dall'argomento trattato, gli studenti hanno serie difficoltà a riconoscere quali siano le *condizioni necessarie* e quali quelle *sufficienti* per il verificarsi di un'altra condizione. Nei *quesiti 9a* e *4a* una percentuale maggiore di studenti individua entrambe le condizioni sufficienti nel quesito relativo alle borse di studio, il 37% contro il 24% delle risposte corrette nel quesito di argomento matematico. Comunque, la maggior parte degli studenti non riconosce che la condizione sufficiente è espressa anche da uno solo dei due requisiti, in entrambe le domande. Nei *quesiti 9b* e *4b*, le condizioni necessarie per essere *beneficiario* della borsa di studio o, simmetricamente, per essere un *numero ordinario* sono tre e in entrambi i quesiti meno del 5% degli studenti riesce ad individuarle tutte, la maggior parte ne segna una o due e molti anche quella scorretta. In questi quesiti, oltre alla difficoltà relativa all'implicazione logica espressa come *condizione necessaria o sufficiente* si aggiunge la difficoltà che, in alcuni casi, l'antecedente delle implicazioni è costituito da una proposizione composta contenente una *disgiunzione* e nelle risposte si propongono condizioni che sono proposizioni formate da *congiunzioni* o *disgiunzioni*.

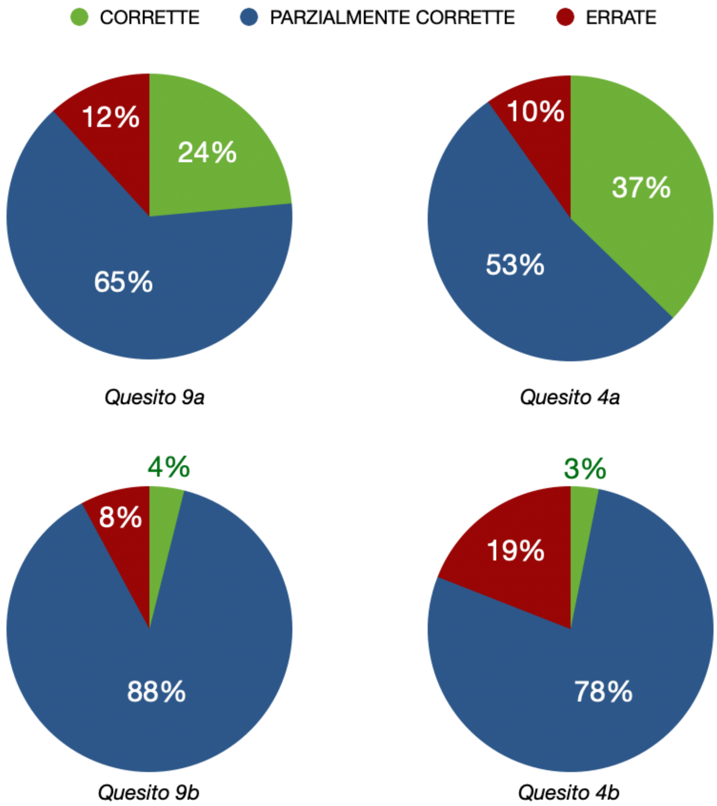


Figura 1.5: Risposte date al ***quesito 9*** (a sinistra) e al ***quesito 4*** (a destra).

Complessivamente, il test conferma buona parte delle difficoltà relative all'implicazione logica che presenteremo nel dettaglio nel Capitolo 3. Una percentuale piuttosto alta di studenti, per essere alla fine di un percorso liceale, non riconosce l'equivalenza tra $P \to Q$ e $\neg Q \to \neg P$ e, al contrario, dichiara che l'implicazione inversa $Q \to P$ è vera se l'implicazione diretta $P \to Q$ lo è. Emergono grandi difficoltà nello stabilire il valore di verità di antecedente e conseguente nel caso in cui l'implicazione sia falsa e nella capacità di riconoscere e distinguere le *condizioni necessarie* e quelle *sufficienti*.
Inoltre, possiamo concludere che i testi di argomento matematico creano, se pur non in modo eccessivamente evidente, qualche insicurezza in più, anche avendo la stessa struttura logica. È una conferma del fatto che il linguaggio specifico matematico in molti casi destabilizza gli studenti a priori.
Concludiamo con un'osservazione finale. Indubbiamente, alcune strutture logiche, come l'implicazione, sono più complicate e insidiose di altre e questo spiega i numerosi errori riscontrati. Tuttavia, alla base di tali difficoltà emerse si può individuare anche una scarsa abitudine dei ragazzi a lavorare su problemi di questo tipo e ad un'insufficiente concentrazione e attenzione nel leggere i testi, ma queste ipotesi richiederebbero un'indagine ulteriore.

Capitolo 2

Aspetti matematici dell'implicazione logica

Lo scopo di questo Capitolo è studiare, da un punto di vista strettamente matematico, il connettivo logico di implicazione in diversi suoi aspetti. Viene data la definizione di implicazione attraverso la sua tavola di verità e poi viene visto come si interpreta tale connettivo in logica intuizionista. Successivamente, si introduce il sistema assiomatico di Hilbert, che consiste in un approccio alla logica proposizionale attraverso una teoria formale, all'interno della quale l'implicazione ha un ruolo fondamentale. Infine, viene presentato il sistema formale della deduzione naturale sia per la logica classica che per quella intuizionista e, attraverso le regole logiche, vengono studiate quali proprietà dell'implicazione valgono in logica classica e quali in logica intuizionista. I tre approcci alla logica classica presentati nel Capitolo, attraverso le tavole di verità, il sistema assiomatico di Hilbert e la deduzione naturale, sono tra loro equivalenti.

2.1 Il connettivo di implicazione

L'implicazione in logica classica

La logica proposizionale si propone di formalizzare e analizzare i ragionamenti che, nel nostro linguaggio naturale, possono essere formulati ricorrendo a proposizioni composte fra loro usando particelle come *e, o, sia...sia, né...né, ma, non, oppure, o...o, se...allora...* e tante altre. [8]

Per fare questo la logica utilizza un linguaggio simbolico specifico. Il linguaggio della logica classica proposizionale è costituito dai seguenti gruppi di simboli:

- ***variabili proposizionali***: $P_1, ..., P_n, ..., Q_1, ..., Q_n, ...$, con o senza indici, che rappresentano delle proposizioni *atomiche*, cioè non contenenti alcun connettivo;

- ***connettivi***: $\neg$ (negazione), $\vee$ (disgiunzione), $\wedge$ (congiunzione), $\rightarrow$ (implicazione), $\leftrightarrow$ (doppia implicazione);
- ***costanti***: $\top$ (vero), $\perp$ (falso);
- ***simboli ausiliari***: (,).

Definizione 2.1.1. *Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio proposizionale. L'insieme delle* ***formule proposizionali*** *nel linguaggio $\mathcal{L}$ è indicato con il simbolo Form($\mathcal{L}$) ed è definito ricorsivamente dalle seguenti condizioni:*

- *le variabili proposizionali appartengono a Form($\mathcal{L}$);*
- $\perp \in Form(\mathcal{L})$;
- *se $P \in Form(\mathcal{L})$ e $Q \in Form(\mathcal{L})$ allora anche $\neg P$, $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$ e $(P \rightarrow Q)$ appartengono a Form($\mathcal{L}$).*

Il sottoinsieme di Form($\mathcal{L}$) formato dalle variabili proposizionali e da $\perp$ è l'insieme delle ***formule atomiche****.*

I cinque *connettivi* permettono di formare nuove proposizioni a partire da altre proposizioni date. Non è tanto il simbolo o la parola che usiamo per descrivere un connettivo ad essere rilevante, ma, come vedremo, il modo in cui il valore di verità della nuova proposizione dipende da quelli delle vecchie con cui essa è stata costruita.
Non studieremo, di seguito, il significato di tutti i connettivi logici, ma ci concentreremo, in particolare, sul connettivo logico di ***implicazione***, chiamata anche *implicazione materiale*. Tale connettivo permette di formare una nuova proposizione $P \rightarrow Q$ a partire da due proposizioni P e Q. La proposizione P viene detta ***antecedente*** e la proposizione Q viene detta ***conseguente***. In italiano, l'implicazione è espressa attraverso la formula *"se...allora..."*, dove spesso viene omessa la parola *allora*, oppure anche con l'espressione *"...solo se..."*.

Le tavole di verità

In logica classica si può attribuire un *valore di verità* a tutte le proposizioni, le quali possono essere soltanto *vere* o *false*. Anche quando non siamo a conoscenza del valore di verità di una proposizione, sappiamo comunque che esso è vero o falso. Quando P risulta vera, diremo che il suo valore di verità è $\boldsymbol{V}$, altrimenti, il valore di verità di P sarà $\boldsymbol{F}$.

Sappiamo che le proposizioni possono essere combinate in vari modi per formare frasi più complesse. Noi consideriamo soltanto combinazioni *vero-funzionali*, nelle quali la verità o falsità della nuova proposizione è determinata solo dalla verità o falsità delle proposizioni che la compongono. Se abbiamo due formule P e Q che costituiscono una nuova proposizione, ci saranno quattro combinazioni possibili dei valori di verità di P e Q da tenere conto. In questo caso la situazione può essere schematizzata da una tabella, che riportiamo sotto, che viene chiamata ***tavola di verità***.

P	Q
V	V
V	F
F	V
F	F

In questo modo è possibile schematizzare la definizione semantica dei connettivi e delle costanti tramite la seguente tavola.

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$	$\perp$	$\top$
V	V	F	V	V	V	V	F	V
V	F	F	F	V	F	F	F	V
F	V	V	F	V	V	F	F	V
F	F	V	F	F	V	V	F	V

La definizione di implicazione attraverso la sua tavola di verità, che è molto poco intuitiva, può lasciare piuttosto perplessi, in particolare per quanto riguarda le ultime due righe della tabella ovvero quando l'antecedente è falso.
Ad esempio, *"se* $1 + 1 \neq 2$*, allora Roma è la capitale dell'Italia"* e *"se* $1 + 1 \neq 2$*, allora Roma è la capitale della Francia"* sono due proposizioni vere.
Questo è difficile da comprendere in quanto siamo abituati a pensare che ci sia una sorta di relazione di causa-effetto tra antecedente e conseguente.

Due esempi significativi del linguaggio naturale, che aiutano a capire la tavola di verità dell'implicazione, si trovano nella *Sezione 3.4*. Proviamo ora, a dare qualche giustificazione con degli esempi e argomentazioni più rigorose.

- Una prima spiegazione fa riferimento alla teoria degli insiemi. Se consideriamo l'insieme vuoto $\emptyset$, sappiamo, per definizione, che esso è contenuto in qualsiasi altro insieme A. Quindi abbiamo $\emptyset \subseteq A$ che significa $\forall x(x \in \emptyset \rightarrow x \in A)$. Ovviamente, $x \in \emptyset$ è un'affermazione falsa, mentre $x \in A$ può essere vero oppure no: alcuni x, infatti, appartengono ad A mentre altri no. Quindi si ottiene $\forall x(\perp\rightarrow x \in A)$, che rappresenta esattamente le ultime due righe della tavola di verità dell'implicazione.
  Quando lavoriamo con gli insiemi e l'insieme vuoto nei termini descritti, stiamo implicitamente utilizzando il fatto che dal falso segue "qualsiasi cosa", ovvero che l'implicazione $P \rightarrow Q$ è vera ogni volta che P è falsa, indipendentemente dal valore di verità di Q.

- Un altro esempio per convincersi della tavola di verità dell'implicazione è dato dal significato di proposizioni quali *"per ogni x, se 10 divide x, allora x è un numero pari"*. Questo significa che, dato un qualsiasi numero naturale x, l'enunciato *"se 10 divide x, allora x è un numero pari"* è vero. Se il numero 10 divide effettivamente x, allora certamente x è pari e questo rappresenta la prima riga della tavola di verità. Se 10 non divide il numero x, può succedere che il numero x sia pari (si pensi, per esempio, al numero 14) e questo rappresenta la terza riga della tavola di verità, oppure il numero x può non essere pari (ad esempio, il numero 15) e questo rappresenta l'ultima riga. Per quanto riguarda la seconda riga, non si troveranno mai dei numeri che sono divisibili per 10 e non sono pari, perché in questo caso la proposizione *"per ogni x, se 2 divide x, allora x è un numero pari"* sarebbe falsa, contrariamente alla realtà dei fatti.

Grazie alle tavole di verità è possibile dimostrare quali proposizioni sono delle tautologie, ovvero proposizioni sempre vere. Infatti, una proposizione è una ***tautologia*** se la corrispondente tavola di verità restituisce il valore di verità V qualsiasi siano le entrate.
In questo modo si possono dimostrare diverse proprietà del connettivo logico dell'implicazione, ma vedremo delle dimostrazioni alternative con il *calcolo della deduzione naturale* nell'ultima sezione di questo Capitolo.

Di seguito, riportiamo due tautologie importanti relative all'implicazione.

1. $(P \to Q) \land P \to Q$

P	Q	$P \to Q$	$(P \to Q) \land P$	$(P \to Q) \land P \to Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Osserviamo che se $P \to Q$ è una proposizione vera e anche P lo è, dalla tavola di verità dell'implicazione, otteniamo che l'unica possibilità è che Q sia altrettanto vera. Si tratta della regola di deduzione del *modus ponens*.

2. $(P \to Q) \land \neg Q \to \neg P$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \to Q$	$(P \to Q) \land \neg Q$	$(P \to Q) \land \neg Q \to \neg P$
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V

Se $P \to Q$ è una proposizione vera e anche $\neg Q$ è vera, ovvero Q è falsa, allora dalla tabella si conclude che l'unica possibilità è che $\neg P$ sia vera. In questo caso si tratta della regola di deduzione del *modus tollens*.

Vediamo ora, invece, due proposizioni che non sono tautologie, in quanto le tavole di verità corrispondenti non restituiscono il valore V qualsiasi siano i valori di verità di P e Q.

1. $(P \to Q) \wedge Q \to P$

P	Q	$P \to Q$	$(P \to Q) \wedge Q$	$(P \to Q) \wedge Q \to P$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	V	F
F	F	V	F	V

2. $(P \to Q) \wedge \neg P \to \neg Q$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \to Q$	$(P \to Q) \wedge \neg Q$	$(P \to Q) \wedge \neg Q \to \neg P$
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	V	F
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Queste ultime due proposizioni che abbiamo dimostrato non essere tautologie sono strettamente collegate a errori di ragionamento molto frequenti, dette *fallacie formali*, che vedremo nel Capitolo 3.
Inoltre, possono essere messe in relazione con i concetti di *implicazione inversa* e *implicazione contraria*.

Data la proposizione $P \to Q$, che viene detta ***implicazione diretta***, si possono considerare le seguenti proposizioni:

- $Q \to P$, che viene detta la sua ***implicazione inversa***: si ottiene scambiando antecedente con conseguente. La sua tavola di verità è la seguente:

P	Q	$Q \to P$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

- $\neg P \to \neg Q$, che prende il nome di ***implicazione contraria***: si ottiene prendendo la negazione dell'antecedente e la negazione del conseguente. La sua tavola di verità è la seguente:

P	Q	$\neg P \to \neg Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

- $\neg Q \to \neg P$, che viene detta ***implicazione contronominale***: si ottiene scambiando antecedente con conseguente e di entrambe si prende la negazione. La sua tavola di verità è la seguente:

P	Q	$\neg Q \to \neg P$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Confrontando le tavole di verità delle quattro implicazioni è immediato vedere che l'implicazione diretta è equivalente all'implicazione contronominale, in quanto hanno la stessa tavola di verità e lo vedremo meglio nella *Sezione 2.3.* L'implicazione diretta non è equivalente alla sua inversa e alla sua contraria, in quanto hanno tavole di verità diverse, mentre queste ultime due sono tra loro equivalenti. Nel Capitolo 3, vedremo che l'equivalenza tra queste quattro proposizioni crea notevoli difficoltà da un punto di vista didattico.

Sistema minimale di connettivi

È importante osservare che si possono ridurre i connettivi restringendosi ad un *sistema minimale di connettivi* e scrivere tutti gli altri in funzione di quelli prescelti. Per fare questo non c'è un'unica possibilità, ad esempio, si possono scrivere tutti i connettivi in funzione dei seguenti insiemi:

$$\{\neg, \vee\} \qquad \{\neg, \wedge\} \qquad \{\neg, \to\} \qquad \{\perp, \to\}$$

Nel linguaggio logico si utilizzano cinque connettivi per comodità: esprimere tutti i connettivi solo in funzione di due porta a notevoli complicazioni nelle espressioni, il risultato è interessante da un punto di vista teorico ma non incide nell'uso.

Poiché nel nostro lavoro siamo interessati al connettivo di implicazione, vediamo come poter esprimere tutti i connettivi in funzione dell'implicazione logica $\rightarrow$ e della costante $\perp$.

Siano P e Q due proposizioni atomiche, allora si possono esprimere i connettivi $\neg, \vee, \wedge, \top$ nel seguente modo:

- $\neg P = P \rightarrow \perp$
- $P \vee Q = (\neg P) \rightarrow Q = (P \rightarrow \perp) \rightarrow Q$
- $P \wedge Q = \neg(P \rightarrow (\neg Q) = (P \rightarrow (Q \rightarrow \perp)) \rightarrow \perp$
- $\top = \neg \perp = \perp \rightarrow \perp$

Sapendo che $P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ si può esprimere anche la doppia implicazione in funzione di $\rightarrow$ e $\perp$ come segue:

$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) = ((P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow P) \rightarrow \perp)) \rightarrow \perp$

Mostriamo, quindi, che sono sufficienti solo i connettivi $\rightarrow$ e $\perp$ per ottenere tutte le altre tavole di verità.

1. Costruendo la tavola di verità di $P \rightarrow \perp$ si ottiene quella di $\neg P$:

P	$\perp$	$P \rightarrow \perp$
V	F	F
V	F	F
F	F	V
F	F	V

2. Costruendo la tavola di verità di $(P \rightarrow \perp) \rightarrow Q$ si ottiene quella di $P \vee Q$:

P	Q	$\perp$	$(P \rightarrow \perp) \rightarrow Q$
V	V	F	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

3. Costruendo la tavola di verità di $(P \rightarrow (Q \rightarrow \perp)) \rightarrow \perp$ si ottiene esattamente quella di $P \wedge Q$:

P	Q	$\perp$	$Q \rightarrow \perp$	$P \rightarrow (Q \rightarrow \perp)$	$(P \rightarrow (Q \rightarrow \perp)) \rightarrow \perp$
V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	V	F
F	V	F	F	V	F
F	F	F	V	V	F

4. La tavola di verità di $P \leftrightarrow Q$ è esattamente uguale a quella di

$((P \to Q) \to ((Q \to P) \to \perp)) \to \perp$:

P	Q	$\perp$	$(Q \to P) \to\perp$	$(P \to Q) \to ((Q \to P) \to\perp$	$((P \to Q) \to ((Q \to P) \to\perp)) \to\perp$
V	V	F	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	F	V

È importante precisare che l'implicazione logica $P \to Q$ si può esprimere in funzione degli altri connettivi nel seguente modo: $\neg P \vee Q$, che rappresenta il *significato materiale* dell'implicazione.
La tavola di verità di $\neg P \vee Q$ corrisponde a quella di $P \to Q$.

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Osserviamo anche che l'equivalenza $P \to Q \equiv \neg P \vee Q$ si legge anche direttamente dalla tavola di verità dell'implicazione, infatti, $P \to Q$ è vera solo nel caso in cui P è falsa (quindi vale $\neg P$) oppure Q è vera, che corrisponde proprio a $\neg P \vee Q$. L'implicazione $P \to Q$ significa, infatti, *non si verifica il primo enunciato oppure si verifica il secondo.*

L'implicazione in logica intuizionista

Nella logica intuizionista si rifiutano alcuni principi della logica classica, primo fra tutti il *principio del terzo escluso*, ovvero la validità di $P \vee \neg P$, per ogni formula P. Un altro principio che viene rifiutato in logica intuizionista è il *principio di bivalenza* che afferma che per ogni proposizione P, essa è *vera* oppure *falsa*, ossia che il grado di verità di una proposizione ammette valori nell'insieme discreto $\{\boldsymbol{V}, \boldsymbol{F}\}$, come succede in logica classica. Proprio per questo, in logica intuizionista le tavole di verità perdono di significato e non si può, quindi, introdurre i connettivi definendoli in base al valore di verità delle proposizioni composte in termini di quelle che le costituiscono.
Nella logica intuizionista non si ragiona più, quindi, in termini di vero e falso, ma di *dimostrabilità*: per affermare P si dice che è stato "dimostrato costruttivamente" e

per affermare $\neg P$ si dice che è stato "dimostrato costruttivamente che si trova una contraddizione assumendo P".

Il linguaggio della logica proposizionale intuizionista è lo stesso di quello della logica classica e l'apparato deduttivo è costituito dalla regola del *modus ponens* ma i connettivi logici devono però essere interpretati diversamente da come viene fatto in logica classica attraverso le tavole di verità.

Di seguito, vediamo un'interpretazione - spesso chiamata *interpretazione BHK* (dai tre matematici Brouwer, Heyting e Kolmogorov che hanno contribuito allo sviluppo della logica intuizionista) - che fornisce non solo una semantica informale dei connettivi, espressa in riferimento ad un concetto primitivo di *dimostrazione informale*, ma anche una spiegazione, ancora informale, del concetto di dimostrazione costruttiva. [10]

L'interpretazione degli operatori logici in un contesto costruttivo viene descritta attraverso le seguenti clausole che ci dicono quali forme assumono le dimostrazioni di enunciati logicamente composti in termini di dimostrazioni delle proposizioni che li costituiscono.

1. Una dimostrazione di $P \vee Q$ è data presentando esplicitamente o una dimostrazione di P oppure una dimostrazione di Q.

2. Una dimostrazione di $P \wedge Q$ è data presentando una dimostrazione di P e una dimostrazione di Q.

3. Una dimostrazione di $P \rightarrow Q$ è una costruzione che ci permette di trasformare qualsiasi dimostrazione di P in una dimostrazione di Q.

4. L'assurdo $\perp$ (contraddizione) non ha nessuna dimostrazione.

5. Una dimostrazione di $\neg P$ è una costruzione che trasforma ogni ipotetica dimostrazione di P in una dimostrazione di $\perp$ ($\neg P$ è equivalente a $P \rightarrow \perp$).

Soffermandoci sul connettivo di implicazione, da un punto di vista intuizionista, $P \rightarrow Q$ è dimostrabile se e solo se, data una qualsiasi dimostrazione di P, si può ottenere in modo effettivo una dimostrazione di Q. La dimostrazione costruttiva richiede di fornire un metodo, ovvero una procedura, o un *algoritmo*, che, passo passo, consenta di dimostrare Q a partire da una dimostrazione di P. [10, 38]
Le proprietà dell'implicazione che valgono in logica intuizionista saranno analizzate nella *Sezione 2.3.*

2.2 Il sistema assiomatico di Hilbert

Le tavole di verità consentono di rispondere a molte domande riguardo ai connettivi e, in particolare, permettono di capire se, data una proposizione, essa è una tautologia, una contraddizione, nessuna delle due, oppure se implica logicamente o è logicamente equivalente ad un'altra proposizione data.
Tuttavia, molte parti di logica classica più complesse, ad esempio quando vengono introdotti i quantificatori e si entra nella logica predicativa, non possono essere gestite con le tavole di verità o con procedure simili, ed è quindi importante essere a conoscenza anche di un altro approccio attraverso delle teorie assiomatiche formali. Di seguito presentiamo il *sistema assiomatico di Hilbert* nel caso proposizionale che permette di dare una definizione rigorosa di deduzione logica. [44]

L'idea di Hilbert è quella di ridurre, per prima cosa, il numero dei connettivi ed esprimerli tutti in funzione della negazione $\neg$ e dell'implicazione $\rightarrow$. Successivamente, vengono individuate delle tautologie che esprimono delle proprietà fondamentali della negazione e dell'implicazione che vengono scelti come assiomi e che sono abbastanza potenti da poter derivare tutte le altre tautologie.
Si può, quindi, introdurre una teoria assiomatica formale $\mathcal{T}$ per il calcolo proposizionale nel seguente modo:

- I simboli utilizzati sono $\neg$, $\rightarrow$, che vengono detti ***connettivi primitivi***, e due simboli ausiliari (,). Con questi due connettivi si possono esprimere tutti gli altri connettivi usuali tramite le seguenti definizioni:

  D1. $P \vee Q := \neg P \rightarrow Q$

  D2. $P \wedge Q := \neg(P \rightarrow \neg Q)$

  D3. $\perp := \neg(P \rightarrow P)$

- Se P e Q sono formule, allora anche $(\neg P)$ e $(P \rightarrow Q)$ sono formule.
- Se P, Q e R sono formule, allora i seguenti sono gli ***assiomi*** della teoria $\mathcal{T}$:

  H1. $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$

  H2. $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$

  H3. $(\neg Q \rightarrow \neg P) \rightarrow (P \rightarrow Q)$

- L'unica regola di deduzione di $\mathcal{T}$ è il *modus ponens* (**MP**): Q è una diretta conseguenza di P e $P \rightarrow Q$.

Osserviamo che i primi due assiomi riguardano esclusivamente il connettivo di implicazione, quindi, se volessimo considerare solo le tautologie relative all'implicazione gli assiomi **H1** e **H2** sarebbero sufficienti. Il terzo assioma **H3** lega l'implicazione alla negazione.
I tre assiomi di Hilbert sono da considerarsi degli *schemi di assiomi* in quanto valgono per qualsiasi proposizione si sostituisca a P, Q ed R.

In una teoria, gli assiomi non bastano per poter derivare tutti i teoremi, è necessaria, infatti, almeno una regola di deduzione che permette di produrre nuovi teoremi da

altri già dimostrati, e, nel caso proposizionale, basta la regola di deduzione del *modus ponens*.
Prima di vedere qualche risultato interessante di questa teoria, vediamo cosa si intende per *dimostrazione* nel caso della logica proposizionale.

Definizione 2.2.1. *Una* ***dimostrazione*** *di P a partire dalle ipotesi Γ è una successione finita $P_0, ..., P_n$ dove $P_n = P$ e per ogni $0 \leq k \leq n$ è soddisfatta una delle seguenti alternative:*

1. *P_k è un assioma;*
2. *P_k appartiene a Γ;*
3. *P_k segue da due elementi precedenti per modus ponens, ovvero esistono $i, j < k$ tali che $P_j = P_i \to P_k$.*

Gli elementi dell'insieme Γ sono chiamate le *ipotesi* o *premesse* della dimostrazione. Un ***teorema*** della teoria assiomatica $\mathcal{T}$ è una formula P tale che sia l'ultima formula di qualche dimostrazione in $\mathcal{T}$. Una tale dimostrazione è chiamata *dimostrazione di P in $\mathcal{T}$*. Una formula Q è detta una ***conseguenza logica*** in $\mathcal{T}$ dell'insieme Γ se c'è una dimostrazione di Q a partire dalle ipotesi Γ in $\mathcal{T}$ e scriveremo $\Gamma \vdash Q$ in $\mathcal{T}$.

Lo scopo finale di questa sezione è presentare il *teorema di deduzione* del 1930. Prima di fare ciò introduciamo due risultati che ci torneranno utili.

Lemma 2.2.1. *$\vdash P \to P$ per ogni formula P.*

Dimostrazione. Costruiamo in $\mathcal{T}$ una dimostrazione di $P \to P$.

1. $(P \to ((P \to P) \to P)) \to ((P \to (P \to P)) \to (P \to P))$ [Istanza di **H2**]
2. $P \to ((P \to P) \to P)$ [Istanza di **H1**]
3. $(P \to (P \to P)) \to (P \to P)$ [**MP** da 1 e 2]
4. $P \to (P \to P)$ [Istanza di **H1**]
5. $P \to P$ [**MP** da 3 e 4]

□

Lemma 2.2.2. *$P \to R, P \to (R \to Q) \vdash P \to Q$ per ogni formula P, Q e R.*

Dimostrazione. Costruiamo una dimostrazione di $P \to R, P \to (R \to Q) \vdash P \to Q$.

1. $P \to (R \to Q)$ [Ipotesi]
2. $(P \to (R \to Q)) \to ((P \to R) \to (P \to Q))$ [Assioma **H2**]
3. $(P \to R) \to (P \to Q)$ [**MP** da 1 e 2]
4. $P \to R$ [Ipotesi]
5. $P \to Q$ [**MP** da 3 e 4]

□

Possiamo ora enunciare il teorema di deduzione nel caso proposizionale.

Proposizione 2.2.1. *(Teorema di deduzione.)* *Sia* $\Gamma \cup \{P, Q\}$ *un insieme di formule di un linguaggio del primo ordine. Allora*

$$\Gamma, P \vdash Q \textit{ se e solo se } \Gamma \vdash P \to Q$$

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) Dimostriamo che *se* $\Gamma \vdash P \to Q$ *allora* $\Gamma, P \vdash Q$.
Se $\Gamma \vdash P \to Q$ significa che esiste una dimostrazione di $P \to Q$ a partire dalle ipotesi in Γ in $\mathcal{T}$. Allora, aggiungendo l'ipotesi P possiamo concludere Q per *modus ponens* e quindi vale $\Gamma, P \vdash Q$.
($\Rightarrow$) Dimostriamo ora l'altro verso. Per ipotesi sappiamo che $\Gamma, P \vdash Q$, cioè esiste una lista finita $Q_0, ..., Q_n$ che costituisce una dimostrazione di Q a partire da Γ, P. Procediamo per induzione su n.

- Se $n = 0$ significa che Q è un assioma oppure appartiene a Γ, P.
  - Se Q è in Γ o è un assioma, allora vale $\Gamma \vdash Q$ e quindi $\Gamma \vdash P \to Q$ perché $Q \to (P \to Q)$ è un assioma.
  - Se, invece, Q coincide con P, dal *Lemma 2.2.1* abbiamo $\vdash P \to Q$ e, quindi, $\Gamma \vdash P \to Q$.
- Supponiamo il teorema valga per le dimostrazioni di lunghezza minore di n. Distinguiamo due casi a seconda della regola usata per concludere Q_n (cioè Q).
  - Se Q è un assioma oppure appartiene a Γ, P allora si ragiona come nel caso base.
  - Se esistono $i, j < n$ tali che $Q_j = Q_i \to Q$, allora si ha $\Gamma, P \vdash Q_i$ e $\Gamma, P \vdash Q_i \to Q$. Per ipotesi induttiva si ottiene $\Gamma \vdash Q \to Q_i$ e $\Gamma \vdash P \to (Q_i \to Q)$. Quindi, per il *Lemma 2.2.2*, segue la tesi perché $P \to Q_i, P \to (Q_i \to Q) \vdash P \to Q$ è derivabile.

$\square$

Il teorema di deduzione è un *metateorema* ovvero un teorema che descrive che cosa si può dimostrare all'interno di questo sistema formale che abbiamo presentato. Il teorema dice che nel sistema formale di Hilbert si riesce a dimostrare un'implicazione $P \to Q$ se e solo se si riesce a dimostrare la conseguenza dell'implicazione Q a partire dalle ipotesi che si hanno Γ più l'aggiunta della premessa P dell'implicazione.
Osserviamo che per la dimostrazione non è necessario l'assioma **H3**. [29, 44]
Tale teorema è molto importante in quanto lega il concetto di *implicazione* con il concetto di *deduzione*. È interessante notare, infatti, come nel teorema compaiono tre "implicazioni" con significati diversi: $\Gamma, P \vdash Q$ che significa *"da* Γ *e* P *si deduce* Q*"*, oppure *"*Q *è conseguenza logica di/segue da* Γ *e* P*"* che indica una *relazione* tra Γ, P e Q; $P \to Q$ dove è presente il connettivo di implicazione, quindi un'operazione, che forma una nuova proposizione a partire da quelle date P e Q infine, la doppia implicazione *se e solo se* che indica l'equivalenza "dall'esterno" tra $\Gamma, P \vdash Q$ e $\Gamma \vdash P \to Q$.

2.3 Deduzione naturale classica e intuizionista

Un altro sistema formale possibile, oltre a quello di Hilbert che abbiamo visto, è quello della *deduzione naturale*. Anziché definire i connettivi attraverso le tavole di verità o introducendo un insieme di assiomi come quelli di Hilbert, vengono date delle regole dimostrative che descrivono quali sono i modi corretti per fare una deduzione.
Di seguito, quindi, viene introdotto un *sistema formale deduttivo* sia per la logica classica proposizionale sia per la logica intuizionista che permette di *derivare* e quindi *dimostrare* la validità delle formule. In particolare, viene presentato il sistema formale della *deduzione naturale* per entrambe le logiche in forma di calcolo dei sequenti.

Innanzitutto, introduciamo brevemente qualche concetto base.

Definizione 2.3.1. *Dato un linguaggio formale $\mathcal{L}$, un* ***sequente in deduzione naturale*** *è una scrittura del tipo*

$$\Gamma \vdash P$$

dove $P \in Form(\mathcal{L})$ e Γ è una lista (anche vuota) in $Form(\mathcal{L})$.

Il significato di questa scrittura, nel caso in cui Γ sia una lista non vuota, è *se ciascuna formula in Γ è vera, allora anche la formula P lo è*; se, invece, Γ è la lista vuota, significa semplicemente che *la formula P è vera*.
Osserviamo che se vale $\Gamma \vdash P$, a maggior ragione vale anche $\Gamma, C \vdash P$ e così via. Ovvero se P si dimostra a partire da certe ipotesi Γ, P si dimostra anche aggiungendo a Γ altre ipotesi. [8, 25]

Va poi introdotto un insieme di regole, che forma un *calcolo dei sequenti*, per trasformare i sequenti in modo da conservare il loro valore di verità dall'alto verso il basso. In generale, si possono considerare tre tipi di regole, a seconda del numero delle premesse.

1. *Regole ad una premessa* rappresentate da scritture del tipo

$$\frac{\Gamma' \vdash P'}{\Gamma \vdash P}\ \textit{regola1}$$

   dove si intende che *se il sequente $\Gamma' \vdash P'$ è vero allora pure il sequente $\Gamma \vdash P$ è vero.* Il sequente $\Gamma' \vdash P'$ è detto *premessa della regola* mentre il sequente $\Gamma \vdash P$ è chiamato *conclusione della regola.*

2. *Regole a due premesse* rappresentate da scritture del tipo

$$\frac{\Gamma' \vdash P' \qquad \Gamma'' \vdash P''}{\Gamma \vdash P}\ \textit{regola2}$$

dove si intende che *se i sequenti* $\Gamma' \vdash P'$ *e* $\Gamma'' \vdash P''$ *sono veri, allora pure il sequente* $\Gamma \vdash P$ *è vero*. In questo caso $\Gamma' \vdash P'$ e $\Gamma'' \vdash P''$ sono le *premesse della regola*.

3. *Regole a zero premesse* detti *assiomi*, che rappresentano l'asserzione *il sequente* $\Gamma \vdash P$ *è vero*, rappresentate dalla scrittura

$$\begin{array}{c} ax - x \\ \Gamma \vdash P \end{array}$$

Nel calcolo della deduzione naturale si possono costruire alberi della forma

$$\dfrac{\Gamma_1 \vdash P_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma_5 \vdash P_5}{\Gamma_3 \vdash P_3}\;\textit{regola 1} \quad \dfrac{\Gamma_6 \vdash P_6}{\Gamma_4 \vdash P_4}\;\textit{regola 1}}{\Gamma_2 \vdash P_2}\;\textit{regola 2}}{\Gamma \vdash P}\;\textit{regola 2}$$

dove il sequente più basso che non è premessa di alcuna regola è detto ***sequente radice*** - che nell'esempio sopra è $\Gamma \vdash P$ - e i sequenti più in alto $\Gamma_1 \vdash P_1$, $\Gamma_5 \vdash P_5$ e $\Gamma_6 \vdash P_6$ che non sono conclusioni di regole a più premesse vengono chiamati ***foglie***. Un albero come quello mostrato sopra si dirà ***albero di derivazione*** o semplicemente ***derivazione*** del sequente radice se le sue foglie sono ***assiomi***.

Definizione 2.3.2. *Una* ***derivazione*** *del sequente* $\Gamma \vdash P$ *in un calcolo dei sequenti* C *è un albero* π *del calcolo* C *avente* $\Gamma \vdash P$ *come radice e ogni foglia di* π *è istanza di un assioma di* C.

Definizione 2.3.3. *Un sequente* $\Gamma \vdash P$ *è* ***derivabile*** *in un calcolo dei sequenti* C *se ammette una derivazione in* C.

Possiamo ora introdurre le regole del calcolo della deduzione naturale per la logica proposizionale classica e intuizionista. Vediamo prima quelle per la logica classica.

Il calcolo della deduzione naturale per la logica classica proposizionale

Il calcolo della deduzione naturale per la logica classica proposizionale, che chiamiamo $\boldsymbol{DNC_p}$, è costituito da regole per i connettivi $\perp$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, assieme all'assioma identità e ad alcune regole strutturali. [25] Le regole del calcolo della deduzione naturale per la logica classica sono le seguenti:

$$\begin{array}{c} ax-id \\ \Gamma, A, \Gamma' \vdash A \end{array} \qquad \begin{array}{c} ax-tt \\ \Gamma \vdash tt \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash A}\ \textit{ex-f-q} \qquad \frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash C}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash C}\ sc_{sx}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\ \wedge - Sn_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\ \wedge - Sn_2 \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ \wedge - Dn$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ \vee - Sn \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee - Dn_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee - Dn_2$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \perp}\ \neg - Sn \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A}\ \neg - Dn$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ \rightarrow -Sn \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}\ \rightarrow -Dn$$

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \perp}{\Gamma \vdash A}\ ra \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}\ in_{sx}$$

Le ultime due regole sono la regola di *riduzione all'assurdo* (ra) che è un rafforzamento dell'*ex-falso-quodlibet* e la *regola di indebolimento* (in_{sx}), una regola strutturale che ci dice che se vale $\Gamma \vdash B$ allora si può aggiungere a Γ un'ipotesi A e si ottiene che vale $\Gamma, A \vdash B$. Tutte le regole agiscono sui connettivi applicati alle variabili proposizionali A, B e C.

La regola $\rightarrow -Dn$ è anche chiamata *introduzione dell'implicazione* in quanto nella conclusione viene introdotta un'implicazione. Analogamente, la regola $\rightarrow -Sn$ è detta regola *eliminazione dell'implicazione ($\rightarrow -e$)* in quanto in una premessa compare un'implicazione $A \rightarrow B$ che viene eliminata nella conclusione finale. Si tratta della regola deduttiva del *modus ponens.*

Osserviamo che nel calcolo della deduzione naturale, il *teorema di deduzione* che abbiamo visto precedentemente viene sostituito dalle due regole dell'implicazione. Il teorema afferma che

$$\Gamma, P \vdash Q \text{ se e solo se } \Gamma \vdash P \rightarrow Q$$

con $\Gamma \cup \{P, Q\} \in Form(\mathcal{L})$.

Un verso del teorema, ovvero che se vale $\Gamma, P \vdash Q$ allora si dimostra anche $\Gamma \vdash P \rightarrow Q$ è dimostrato dalla regola $\rightarrow -Dn$:

$$\frac{\Gamma, P \vdash Q}{\Gamma \vdash P \to Q} \to -Dn$$

Mentre l'altro verso del teorema, segue dalla validità della regola $\to -Sn$:

$$\frac{\Gamma \vdash P \to Q \qquad \Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash Q} \to -Sn$$

Infatti, la regola dice che se $\Gamma \vdash P \to Q$ e $\Gamma \vdash P$ sono veri, allora lo è anche $\Gamma \vdash Q$, quindi, a maggior ragione si può aggiungere a Γ l'ipotesi P ottenendo che $\Gamma, P \vdash Q$ è derivabile, ovvero la tesi del teorema.

Abbiamo visto come esprimere tutti i connettivi in funzione di $\to$ e $\perp$, allo stesso modo si possono restringere le regole di deduzione e utilizzare soltanto $\to -Sn$, $\to -Dn$ e ra. [8] Bisogna però dimostrare che tutte le altre regole derivano da queste tre e dalle definizioni dei connettivi in funzione di $\to$ e $\neg$, che ricordiamo di seguito:

$\neg A = A \to\perp$
$A \wedge B = ((A \to (B \to\perp)) \to\perp$
$A \vee B = (A \to\perp) \to B.$

Analizziamo come le altre regole diventano deducibili dalle tre prescelte.

1. La regola $\wedge - Sn_1$ diventa

$$\frac{\Gamma \vdash (A \to (B \to\perp)) \to\perp}{\Gamma \vdash A}$$

e si dimostra come segue:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overset{ax-id}{\Gamma, A \to\perp, A, B \vdash A} \qquad \overset{ax-id}{\Gamma, A \to\perp, A, B \vdash A \to\perp}}{\Gamma, A \to\perp, A, B \vdash\perp} \to -Sn}{\Gamma, A \to\perp, A \vdash B \to\perp} \to -Dn}{\Gamma, A \to\perp\vdash A \to (B \to\perp)} \to -Dn \qquad \cfrac{\Gamma \vdash (A \to (B \to\perp)) \to\perp}{\Gamma, A \to\perp\vdash (A \to (B \to\perp)) \to\perp} in_{sx}}{\Gamma, A \to\perp\vdash\perp} \to -Sn}{\Gamma \vdash A} ra$$

2. La regola $\wedge - Sn_2$ diventa

$$\frac{\Gamma \vdash (A \to (B \to\bot)) \to\bot}{\Gamma \vdash B}$$

e si dimostra come segue:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{ax-id}{\Gamma, B \to\bot, A \vdash B \to\bot}}{\Gamma, B \to\bot\vdash A \to (B \to\bot)} \to -Dn \qquad \dfrac{\Gamma \vdash (A \to (B \to\bot)) \to\bot}{\Gamma, B \to\bot\vdash (A \to (B \to\bot)) \to\bot} in_{sx}}{\Gamma, B \to\bot\vdash\bot} \to -Sn}{\Gamma \vdash B} ra$$

3. La regola $\wedge - Dn$ diventa

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash (A \to (B \to\bot)) \to\bot}$$

e si dimostra nel seguente modo:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{ax-id}{\Gamma, A \to (B \to\bot) \vdash A \to (B \to\bot)} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, A \to (B \to\bot) \vdash A} in_{sx}}{\Gamma, A \to (B \to\bot) \vdash B \to\bot} \to -Sn \qquad \dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, A \to (B \to\bot) \vdash B} in_{sx}}{\Gamma, A \to (B \to\bot) \vdash\bot} \to -Sn}{\Gamma \vdash (A \to (B \to\bot)) \to\bot} \to -Dn$$

4. La regola $\vee - Sn$ diventa

$$\frac{\Gamma \vdash (A \to\bot) \to B \qquad \Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}$$

e si dimostra come segue:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{ax-id}{\Gamma, C \to\bot, A, B \vdash C \to\bot} \qquad \dfrac{\Gamma, B \vdash C}{\Gamma, C \to\bot, A, B \vdash C} in_{sx}}{\Gamma, C \to\bot, B \vdash\bot} \to -Sn}{\Gamma, C \to\bot\vdash B \to\bot} \to -Dn \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{ax-id}{\Gamma, C \to\bot, A \vdash C \to\bot} \qquad \dfrac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma, C \to\bot, A \vdash C} in_{sx}}{\Gamma, C \to\bot, A \vdash\bot} \to -Sn}{\Gamma, C \to\bot\vdash A \to\bot} \to -Dn \qquad \dfrac{\Gamma, \vdash (A \to\bot) \to B}{\Gamma, C \to\bot\vdash (A \to\bot) \to B} in_{sx}}{\Gamma, C \to\bot\vdash B} \to -Sn}{\Gamma, C \to\bot\vdash\bot} \to -Sn}{\Gamma \vdash C} ra$$

5. La regola $\vee - Dn_1$ diventa

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash (A \to\perp) \to B}$$

e si dimostra nel seguente modo:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{ax-id}{\Gamma, A \to\perp, B \to\perp\vdash A \to\perp} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, A \to\perp\vdash A}\, in_{sx}}{\Gamma, A \to\perp, B \to\perp\vdash A}\, in_{sx}}{\Gamma, A \to\perp, B \to\perp\vdash\perp}\, \to -Sn}{\Gamma, A \to\perp\vdash B}\, ra}{\Gamma \vdash (A \to\perp) \to B}\, \to -Dn$$

6. La regola $\vee - Dn_2$ diventa

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash (A \to\perp) \to B}$$

e si dimostra come segue:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{ax-id}{\Gamma, A \to\perp, B \to\perp\vdash B \to\perp} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, A \to\perp\vdash B}\, in_{sx}}{\Gamma, A \to\perp, B \to\perp\vdash B}\, in_{sx}}{\Gamma, A \to\perp, B \to\perp\vdash\perp}\, \to -Sn}{\Gamma, A \to\perp\vdash B}\, ra}{\Gamma \vdash (A \to\perp) \to B}\, \to -Dn$$

7. La regola $\neg - Sn$ diventa

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash A \to\perp}{\Gamma \vdash\perp}$$

che è esattamente la regola $\to -Sn$ dove la variabile proposizionale B è sostituita dalla costante $\perp$.

8. La regola $\neg - Dn$ diventa

$$\frac{\Gamma, A \vdash\perp}{\Gamma \vdash A \to\perp}$$

che è esattamente la regola $\to -Dn$ dove la variabile proposizionale B è sostituita dalla costante $\perp$.

Il calcolo della deduzione naturale per la logica intuizionista proposizionale

Il calcolo della deduzione naturale intuizionista, $\boldsymbol{DNI_p}$, è ottenuto attraverso appropriate modifiche del calcolo classico che hanno l'effetto di eliminare il principio del terzo escluso o la legge della doppia negazione $\neg\neg P \to P$. Le regole e gli assiomi sono gli stessi della logica classica senza la regola della *riduzione all'assurdo*. Infatti, in logica intuizionista, non si accetta il fatto che *se da* $\neg P$ *segue una contraddizione, allora si dimostra* P che è il *ragionamento per assurdo* valido in logica classica. Riportiamo di seguito il calcolo DNI_p. [25]

$$\begin{array}{cc} ax-id & ax-tt \\ \Gamma, A, \Gamma' \vdash A & \Gamma \vdash tt \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash A}\ ex\text{-}f\text{-}q \qquad \frac{\Sigma, \Gamma, \Theta, \Gamma', \Delta \vdash C}{\Sigma, \Gamma', \Theta, \Gamma, \Delta \vdash C}\ sc_{sx}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\ \wedge - Sn_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\ \wedge - Sn_2 \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ \wedge - Dn$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ \vee - Sn \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee - Dn_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee - Dn_2$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \perp}\ \neg - Sn \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A}\ \neg - Dn$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ \to -Sn \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ \to -Dn$$

Le regole riportate possono essere motivate dall'*interpretazione BHK* in un modo diretto. Analizziamo le due regole relative all'implicazione.

Consideriamo la regola $\to -Dn$. Supponiamo di aver stabilito B, appellandosi ripetutamente all'ipotesi A. Ciò significa che abbiamo mostrato come costruire una dimostrazione di B da un'ipotetica dimostrazione di A, quindi, secondo l'*interpretazione BHK*, ciò significa che abbiamo dimostrato l'implicazione $A \to B$. In questa conclusione A non è più un'assunzione, è stata *cancellata, eliminata* come assunzione. Come nel caso della logica classica, questa regola è chiamata anche *introduzione all'implicazione (*$\to$ *i)* in quanto nella conclusione finale viene introdotta un'implicazione.

Consideriamo la regola $\to -Sn$ o *eliminazione dell'implicazione (*$\to$ *e)*: se abbiamo mostrato $A \to B$ e A, possiamo anche provare B, poiché una dimostrazione di $A \to B$ deve fornire una costruzione per trasformare una dimostrazione di A in una dimostrazione di B. [38]

Allo stesso modo, ragionando secondo l'interpretazione dei connettivi in logica intuizionista, si può chiarire il significato delle altre regole deduttive.

Tautologie classiche e intuizioniste

In questa Sezione andiamo a studiare alcune tautologie classiche e intuizioniste. La maggior parte delle proprietà che vedremo riguardano *l'implicazione logica.*

Definizione 2.3.4. *Una formula P di un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$ si dice* ***tautologia classica****, rispettivamente* ***tautologia intuizionista****, se e solo se $\vdash P$ è derivabile in DNC_p, rispettivamente DNI_p.*

Osserviamo che se una formula è una tautologia intuizionista, allora è anche una tautologia classica: questo deriva dal fatto che la logica intuizionista è un sottosistema della logica classica.
Di seguito, quindi, dimostriamo per prima cosa la validità in logica intuizionista di alcune proprietà, che di conseguenza saranno valide anche in logica classica senza bisogno di ulteriori dimostrazioni.

In logica intuizionista le seguenti sono tautologie:

1. $\neg(P \wedge \neg P)$ *(legge della non contraddizione)*
2. $P \to \neg\neg P$
3. $P \to P$ *(riflessività dell'implicazione)*
4. $P \to (Q \to P)$ *(assioma di Hilbert* ***H1****)*
5. $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$ *(legge della contrapposizione)*
6. $(\neg P \vee Q) \to (P \to Q)$
7. $(P \wedge \neg Q) \to \neg(P \to Q)$
8. $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$ *(assioma di Hilbert* ***H2****)*
9. $((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$ *(transitività dell'implicazione)*

Utilizzando il calcolo dei sequenti DNI_p dimostriamo che le espressioni riportate sopra sono derivabili in logica intuizionista e quindi sono tautologie.

1. La *legge della non contraddizione* $\neg(P \wedge \neg P)$ è derivabile in DNI_p:

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{ax-id}{P \wedge \neg P \vdash P \wedge \neg P}}{P \wedge \neg P \vdash P}\ \wedge - Sn_1 \qquad \cfrac{\cfrac{ax-id}{P \wedge \neg P \vdash P \wedge \neg P}}{P \wedge \neg P \vdash \neg P}\ \wedge - Sn_2}{P \wedge \neg P \vdash \perp}\ \neg - Sn}{\vdash \neg(P \wedge \neg P)}\ \neg - Dn
$$

2. La formula $P \to \neg\neg P$ è derivabile in DNI_p:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{ax-id}{P,\neg P \vdash P} \qquad \cfrac{ax-id}{P,\neg P \vdash \neg P}}{P,\neg P \vdash \bot}\ \neg - Sn}{P \vdash \neg\neg P}\ \neg - Dn}{\vdash P \to \neg\neg P}\ \to -Dn$$

3. La formula $P \to P$ è derivabile in DNI_p:

$$\cfrac{\cfrac{ax-id}{P \vdash P}}{\vdash P \to P}\ \to -Dn$$

4. La formula $P \to (Q \to P)$ è derivabile in DNI_p:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{ax-id}{P, Q \vdash P}}{P \vdash Q \to P}\ \to -Dn}{\vdash P \to (Q \to P)}\ \to -Dn$$

5. La *legge della contrapposizione* $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$ è derivabile in DNI_p:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{ax-id}{P \to Q, \neg Q, P \vdash P \to Q} \qquad \cfrac{ax-id}{P \to Q, \neg Q, P \vdash P}}{P \to Q, \neg Q, P \vdash Q}\ \to -Sn \qquad \cfrac{ax-id}{P \to Q, \neg Q, P \vdash \neg Q}}{P \to Q, \neg Q, P \vdash \bot}\ \neg - Sn}{P \to Q, \neg Q \vdash \neg P}\ \neg - Dn}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}\ \to -Dn}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}\ \to -Dn$$

6. La formula $(\neg P \vee Q) \to (P \to Q)$ è derivabile in DNI_p:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{ax-id}{\neg P \vee Q, P \vdash \neg P \vee Q} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{ax-id}{\neg P \vee Q, P, \neg P \vdash P} \qquad \cfrac{ax-id}{\neg P \vee Q, P, \neg P \vdash \neg P}}{\neg P \vee Q, P, \neg P \vdash \bot}\ \neg - Sn}{\neg P \vee Q, P, \neg P \vdash Q}\ \textit{ex-f-q} \qquad \cfrac{ax-id}{\neg P \vee Q, P, Q \vdash Q}}{\neg P \vee Q, P \vdash Q}\ \vee - Sn}{\neg P \vee Q \vdash P \to Q}\ \to -Dn}{\vdash (\neg P \vee Q) \to (P \to Q)}\ \to -Dn$$

7. La formula $(P \wedge \neg Q) \to \neg(P \to Q)$ è derivabile in DNI_p:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{ax-id}{P \wedge \neg Q, P \to Q \vdash P \to Q} \qquad \dfrac{\dfrac{ax-id}{P \wedge \neg Q, P \to Q \vdash P \wedge \neg Q}}{P \wedge \neg Q, P \to Q \vdash P}\ \wedge - Sn_2}{P \wedge \neg Q, P \to Q \vdash Q}\ \to -Sn \qquad \dfrac{\dfrac{ax-id}{P \wedge \neg Q, P \to Q \vdash P \wedge \neg Q}}{P \wedge \neg Q, P \to Q \vdash \neg Q}\ \wedge - Sn_2}{P \wedge \neg Q, P \to Q \vdash \bot}\ \neg - Sn}{P \wedge \neg Q \vdash \neg(P \to Q)}\ \neg - Dn}{\vdash (P \wedge \neg Q) \to \neg(P \to Q)}\ \to -Dn
$$

8. La formula $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$ è derivabile in DNI_p:

Poniamo $\varphi \equiv P \to (Q \to R)$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{ax-id}{\varphi, P \to Q, P \vdash \varphi} \qquad \dfrac{ax-id}{\varphi, P \to Q, P \vdash P}}{\varphi, P \to Q, P \vdash Q \to R}\ \to -Sn \qquad \dfrac{\dfrac{ax-id}{\varphi, P \to Q, P \vdash P} \qquad \dfrac{ax-id}{\varphi, P \to Q, P \vdash P \to Q}}{\varphi, P \to Q, P \vdash Q}\ \to -Sn}{\varphi, P \to Q, P \vdash R}\ \to -Sn}{\varphi, P \to Q \vdash P \to R}\ \to -Dn}{\varphi \vdash (P \to Q) \to (P \to R)}\ \to -Dn}{\vdash (P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))}\ \to -Dn
$$

9. La formula $((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$ è derivabile in DNI_p:

Poniamo $\varphi \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to R)$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{ax-id}{\varphi, P \vdash (P \to Q) \wedge (Q \to R)}}{\varphi, P \vdash Q \to R}\ \wedge - Sn_2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{ax-id}{\varphi, P \vdash (P \to Q) \wedge (Q \to R)}}{\varphi, P \vdash P \to Q}\ \wedge - Sn_1 \qquad \dfrac{ax-id}{\varphi, P \vdash P}}{\varphi, P \vdash Q}\ \to -Sn}{\varphi, P \vdash R}\ \to -Sn}{\varphi \vdash P \to R}\ \to -Dn}{\vdash \varphi \to (P \to R)}\ \to -Dn
$$

Per quanto riguarda le tautologie classiche, ovvero formule che sono derivabili in DNC_p, abbiamo le seguenti:

1. $\neg(P \wedge \neg P)$ *(legge della non contraddizione)*
2. $P \vee \neg P$ *(legge del terzo escluso)*
3. $\neg\neg P \leftrightarrow P$ *(legge della doppia negazione)*
4. $P \rightarrow P$ *(riflessività dell'implicazione)*
5. $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$ *(assioma di Hilbert **H1**)*
6. $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$ *(legge della contrapposizione)*
7. $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ *(implicazione materiale)*
8. $\neg(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$ *(negazione implicazione)*
9. $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$ *(assioma di Hilbert **H2**)*
10. $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$ *(transitività dell'implicazione)*

Con il calcolo della deduzione naturale DNC_p dimostriamo che le formule sopra riportate sono derivabili in logica classica.

Per quanto riguarda la *legge della non contraddizione* $\neg(P \wedge \neg P)$ e le formule proposizionali $P \rightarrow P$, $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$, $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$ e $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$ abbiamo mostrato che sono tutte tautologie intuizioniste e, quindi, lo sono anche classicamente.
Ci concentriamo quindi sulle formule 2, 3, 6, 7 e 8.

2. La *legge del terzo escluso* è derivabile in DNC_p:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$ax-id$}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg(P \vee \neg P) \vdash \neg(P \vee \neg P)$}
\AxiomC{$ax-id$}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg(P \vee \neg P), P \vdash \neg(P \vee \neg P)$}
\AxiomC{$ax-id$}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg(P \vee \neg P), P \vdash P$}
\RightLabel{$\vee - Dn_1$}
\UnaryInfC{$\neg(P \vee \neg P), P \vdash P \vee \neg P$}
\RightLabel{$\neg - Sn$}
\BinaryInfC{$\neg(P \vee \neg P), P \vdash \perp$}
\RightLabel{$\neg - Dn$}
\UnaryInfC{$\neg(P \vee \neg P) \vdash \neg P$}
\RightLabel{$\vee - Dn_2$}
\UnaryInfC{$\neg(P \vee \neg P) \vdash P \vee \neg P$}
\RightLabel{$\neg - Sn$}
\BinaryInfC{$\neg(P \vee \neg P) \vdash \perp$}
\RightLabel{ra}
\UnaryInfC{$\vdash P \vee \neg P$}
\end{prooftree}
$$

3. La *legge della doppia negazione* è derivabile in DNC_p.

Abbiamo già dimostrato che $P \rightarrow \neg\neg P$ è derivabile in DNI_p e quindi anche in DNC_p, ora dimostriamo che $\neg\neg P \rightarrow P$ è derivabile in logica classica:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} ax-id \\ \neg\neg P, \neg P \vdash \neg P \end{array} \qquad \begin{array}{c} ax-id \\ \neg\neg P, \neg P \vdash \neg\neg P \end{array}}{\neg\neg P, \neg P \vdash \bot}\ \neg - Sn}{\neg\neg P \vdash P}\ ra}{\vdash \neg\neg P \to P}\ \to -Dn
$$

6. La *legge della contrapposizione* è derivabile in DNC_p.

Abbiamo già dimostrato che $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$ è derivabile in DNI_p e quindi anche in DNC_p, ora vediamo che anche $(\neg Q \to \neg P) \to (P \to Q)$ è derivabile in logica classica:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} ax-id \\ \neg Q \to \neg P, P, \neg Q \vdash P \end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} ax-id \\ \neg Q \to \neg P, P, \neg Q \vdash \neg Q \to \neg P \end{array} \qquad \begin{array}{c} ax-id \\ \neg Q \to \neg P, P, \neg Q \vdash \neg Q \end{array}}{\neg Q \to \neg P, P, \neg Q \vdash \neg P}\ \to -Sn}{\dfrac{\neg Q \to \neg P, P, \neg Q \vdash \bot}{\neg Q \to \neg P, P \vdash Q}\ ra}\ \neg - Sn}{\neg Q \to \neg P \vdash P \to Q}\ \to -Dn}{\vdash (\neg Q \to \neg P) \to (P \to Q)}\ \to -Dn
$$

7. Il sequente $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$, che rappresenta il significato materiale dell'implicazione $P \to Q$, è derivabile in DNC_p.

Abbiamo già dimostrato che in logica intuizionista si deriva $(\neg P \vee Q) \to (P \to Q)$ e, quindi, anche in logica classica. Di seguito dimostriamo che in DNC_p è derivabile anche $(P \to Q) \to (\neg P \vee Q)$:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} ax-id \\ P \to Q, \neg(\neg P \vee Q), P \vdash \neg(\neg P \vee Q) \end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} ax-id \\ P \to Q, \neg(\neg P \vee Q), P \vdash P \to Q \end{array} \qquad \begin{array}{c} ax-id \\ P \to Q, \neg(\neg P \vee Q), P \vdash P \end{array}}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q), P \vdash Q}\ \to -Sn}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q), P \vdash \neg P \vee Q}\ \vee - Dn_2}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q), P \vdash \bot}\ \neg - Sn}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P}\ \neg - Dn}{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg P \vee Q}\ \vee - Dn_1 \qquad \begin{array}{c} ax-id \\ P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \neg(\neg P \vee Q) \end{array}}{\dfrac{P \to Q, \neg(\neg P \vee Q) \vdash \bot}{P \to Q \vdash \neg P \vee Q}\ ra}\ \neg - Sn}{\vdash (P \to Q) \to (\neg P \vee Q)}\ \to -Dn
$$

8. Il sequente $\neg(P \to Q) \leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$, che rappresenta il significato classico della negazione di un'implicazione, è derivabile in DNC_p.

Abbiamo già dimostrato che in DNI_p si deriva $(P \wedge \neg Q) \to \neg(P \to Q)$ e, quindi, anche in logica classica. Ora dimostriamo anche $\neg(P \to Q) \to (P \wedge \neg Q)$ che in DNC_p è derivabile:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$ax-id$}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg(P\rightarrow Q),\neg P,P,\neg Q\vdash P$}
\AxiomC{$ax-id$}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg(P\rightarrow Q),\neg P,P,\neg Q\vdash \neg P$}
\RightLabel{$\neg-Sn$}
\BinaryInfC{$\neg(P\rightarrow Q),\neg P,P,\neg Q\vdash\perp$}
\RightLabel{ra}
\UnaryInfC{$\neg(P\rightarrow Q),\neg P,P\vdash Q$}
\RightLabel{$\rightarrow -Dn$}
\UnaryInfC{$\neg(P\rightarrow Q),\neg P\vdash P\rightarrow Q$}
\AxiomC{$ax-id$}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg(P\rightarrow Q),\neg P\vdash \neg(P\rightarrow Q)$}
\RightLabel{$\neg-Sn$}
\BinaryInfC{$\neg(P\rightarrow Q),\neg P\vdash\perp$}
\RightLabel{ra}
\UnaryInfC{$\neg(P\rightarrow Q)\vdash P$}
\AxiomC{π_1}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg(P\rightarrow Q)\vdash \neg Q$}
\RightLabel{$\wedge-Dn$}
\BinaryInfC{$\neg(P\rightarrow Q)\vdash P\wedge\neg Q$}
\RightLabel{$\rightarrow -Dn$}
\UnaryInfC{$\vdash\neg(P\rightarrow Q)\rightarrow(P\wedge\neg Q)$}
\end{prooftree}
$$

Per una maggior chiarezza di lettura spezziamo la derivazione e analizziamo, di seguito, il secondo ramo π_1 ottenuto dalla regola $\wedge - Dn$:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$ax-id$}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg(P\rightarrow Q),Q,P\vdash Q$}
\RightLabel{$\rightarrow -Dn$}
\UnaryInfC{$\neg(P\rightarrow Q),Q\vdash P\rightarrow Q$}
\AxiomC{$ax-id$}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg(P\rightarrow Q),Q\vdash\neg(P\rightarrow Q)$}
\RightLabel{$\neg-Sn$}
\BinaryInfC{$\neg(P\rightarrow Q),Q\vdash\perp$}
\RightLabel{$\neg-Dn$}
\UnaryInfC{$\neg(P\rightarrow Q)\vdash\neg Q$}
\end{prooftree}
$$

Abbiamo dimostrato che in logica classica, oltre alle proprietà che valgono anche in logica intuizionista, in aggiunta si ha che valgono la *legge del terzo escluso* $P\vee\neg P$ e le seguenti equivalenze importanti:

1. $\neg\neg P\equiv P$
2. $P\rightarrow Q\equiv\neg P\vee Q$
3. $P\rightarrow Q\equiv\neg Q\rightarrow\neg P$
4. $\neg(P\rightarrow Q)\equiv P\wedge\neg Q$

dove $P\equiv Q$ significa $\vdash P\leftrightarrow Q$, per ogni formula P e Q.

La prima equivalenza è la *legge della doppia negazione* e ci dice che in logica classica "si può eliminare" il doppio "non" in una proposizione.
La seconda equivalenza riguarda il significato materiale di un'implicazione $P\rightarrow Q$ che significa *non vale il primo enunciato oppure vale il secondo*.
La terza equivalenza è la *legge della contrapposizione* e ci dice che un'implicazione logica $P\rightarrow Q$ è equivalente alla sua contronominale $\neg Q\rightarrow\neg P$.
La quarta equivalenza riguarda il significato classico della *negazione di un'implicazione*: la negazione di un'implicazione $\neg(P\rightarrow Q)$ è vera solo quando P è vera e anche $\neg Q$ lo è.

In logica intuizionista la *legge del terzo escluso* e le quattro equivalenze valide in logica classica non sono altrettanto valide. Abbiamo visto che per le quattro equivalenze vale un verso della doppia implicazione, ora, con l'aiuto di opportuni *contromodelli*, dimostriamo che gli altri versi non sono derivabili in logica intuizionista.

A tale scopo, per una maggiore chiarezza, introduciamo alcune definizioni. [27]

Definizione 2.3.5. *Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio proposizionale con un insieme di costanti proposizionali PROP($\mathcal{L}$). Un'**interpretazione** di $\mathcal{L}$ in un'algebra di Heyting $\mathbb{H} = (\mathcal{H}, \leq, \wedge, \vee, \rightarrow, \bot, \top)$ è una funzione*

$$\alpha\colon PROP(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{H}$$

Data una tale funzione è possibile definire una funzione

$$\| - \|_\alpha\colon Form(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{H}$$

dove *Form($\mathcal{L}$)* è l'insieme delle formule di $\mathcal{L}$, come segue:

1. $\| \bot \|_\alpha := \bot$;
2. $\|P\|_\alpha := \alpha(P)$ per ogni $P \in PROP(\mathcal{L})$;
3. $\|P \wedge Q\|_\alpha := \|P\|_\alpha \wedge \|Q\|_\alpha$;
4. $\|P \vee Q\|_\alpha := \|P\|_\alpha \vee \|Q\|_\alpha$;
5. $\|P \rightarrow Q\|_\alpha := \|P\|_\alpha \rightarrow \|Q\|_\alpha$.

Se Γ è una lista di formule, $\|\Gamma\|_\alpha$ è l'inf dei $\|P\|$ con P in Γ se Γ è non vuoto, altrimenti è definito come $\top$. Scriviamo infine che $\Gamma \vdash_\alpha P$ se $\|\Gamma\|_\alpha \leq \|P\|_\alpha$.

Teorema 2.3.1. ***(Teorema di validità.)*** *Sia α un'interpretazione di $\mathcal{L}$. Se $\Gamma \vdash P$ è derivabile intuizionisticamente, allora $\Gamma \vdash_\alpha P$.*

Possiamo ora dare la definizione di contromodello intuizionista.

Definizione 2.3.6. *Dato un linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$, chiamiamo **contromodello intuizionista** di una formula proposizionale P, un'interpretazione di PROP($\mathcal{L}$) a valori in un'algebra di Heyting $\mathcal{H}$*

$$\alpha\colon PROP(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{H}$$

tale che $\alpha(P) \neq \top$.

Se una formula proposizionale P ha un contromodello, allora, grazie al teorema precedente di validità, non si può avere $\vdash P$ derivabile.

Di seguito andiamo a costruire dei contromodelli che ci permettono di concludere che le seguenti formule non sono derivabili dalla sola logica intuizionista:

1. $P \vee \neg P$
2. $\neg\neg P \to P$
3. $(\neg Q \to \neg P) \to (P \to Q)$
4. $(P \to Q) \to (\neg P \vee Q)$
5. $\neg(P \to Q) \to (P \wedge \neg Q)$

Allo scopo di definire dei contromodelli che falsifichino le formule di nostro interesse, consideriamo $\mathcal{L}$ un linguaggio proposizionale e prendiamo come algebra di Heyting $\mathbb{H}$ la topologia usuale sui reali $\mathbb{R}$. Allora possiamo *interpretare* il linguaggio $\mathcal{L}$ associando ad ogni P in $PROP(\mathcal{L})$ un aperto A. Denotiamo $\bar{A}$ l'insieme $\mathbb{R} \setminus A$. In questo modo se

$$\alpha(P) = A \qquad \alpha(Q) = B$$

dove A e B sono insiemi aperti, allora:

$$\begin{gathered} \|P \to Q\|_\alpha = int(\bar{A} \cup B) \\ \|P \vee Q\|_\alpha = A \cup B \\ \|P \wedge Q\|_\alpha = A \cap B \\ \|\neg P\|_\alpha = \|P \to \emptyset\|_\alpha = int(\bar{A} \cup \emptyset) = int(\bar{A}) \end{gathered}$$

Possiamo ora costruire i contromodelli per le formule 1, 2, 3, 4 e 5 e dimostrare che non sono formule valide in logica intuizionista in quanto non sono derivabili.

1. Dimostriamo che $P \vee \neg P$ non può essere derivato dalla sola logica intuizionista per ogni formula. Associamo alla costante proposizionale P un intervallo della forma (a, b), allora si ha $\|\neg P\|_\alpha = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$, da cui si ottiene che

$$\|P \vee \neg P\|_\alpha = (a, b) \cup (-\infty, a) \cup (b, +\infty) = \mathbb{R} \setminus \{a, b\} \neq \mathbb{R}$$

Questo ci dice che per questa interpretazione α, $\vdash_\alpha P \vee \neg P$ non vale per ogni formula P e quindi, la *legge del terzo escluso* non è derivabile in logica intuizionista.

2. Dimostriamo che $\neg\neg P \to P$ non è derivabile in logica intuizionista per ogni formula. In questo caso, associamo alla proposizione P un insieme aperto non regolare della forma $(-\infty, a) \cup (a, b)$. Allora $\|\neg P\|_\alpha = (b, +\infty)$ e $\|\neg\neg P\|_\alpha = (-\infty, b)$. Da cui si ottiene

$$\|\neg\neg P \to P\|_\alpha = (-\infty, a) \cup (a, +\infty) = \mathbb{R} \setminus \{a\} \neq \mathbb{R}$$

Questo ci dice che l'implicazione $\neg\neg P \to P$ della *legge della doppia negazione* in questa interpretazione α non vale per ogni formula P.

3. Dimostriamo che l'implicazione $(\neg Q \to \neg P) \to (P \to Q)$ della *legge della contrapposizione* non è derivabile in logica intuizionista per ogni formula. Associamo a P un aperto non regolare $(-\infty, a) \cup (a, +\infty)$ e a Q un aperto $(-\infty, b) \cup (b, +\infty)$, con $a < b$. In questo caso abbiamo $\|\neg P\|_\alpha = \emptyset$ e $\|\neg Q\|_\alpha = \emptyset$. Da cui si ottiene

$$\|\neg Q \to \neg P\|_\alpha = \mathbb{R}$$
$$\|P \to Q\|_\alpha = (-\infty, b) \cup (b, +\infty)$$

ottenendo

$$\|(\neg Q \to \neg P) \to (P \to Q)\|_\alpha = (-\infty, b) \cup (b, +\infty) = \mathbb{R} \backslash \{b\} \neq \mathbb{R}$$

Osserviamo che se in $(\neg Q \to \neg P) \to (P \to Q)$ poniamo $P = \top$, si ottiene una formula proposizionale equivalente a $\neg\neg Q \to Q$ che nel punto **2** abbiamo dimostrato non essere derivabile in logica intuizionista. Questo ci permette immediatamente di concludere che anche $(\neg Q \to \neg P) \to (P \to Q)$ non è derivabile intuizionisticamente.

4. Dimostriamo che $(P \to Q) \to (\neg P \vee Q)$ non è derivabile in logica intuizionista per ogni formula. Associamo a P un aperto $(-\infty, a) \cup (a, +\infty)$ e a Q un aperto della forma $(-\infty, a) \cup (a, b)$. Allora, dal momento che $\|\neg P\|_\alpha = \emptyset$, si ha

$$\|P \to Q\|_\alpha = (-\infty, b)$$
$$\|\neg P \vee Q\|_\alpha = \emptyset \cup (-\infty, a) \cup (a, b) = (-\infty, a) \cup (a, b)$$

da cui otteniamo

$$\|(P \to Q) \to (\neg P \vee Q)\|_\alpha = (-\infty, a) \cup (a, +\infty) = \mathbb{R} \backslash \{a\} \neq \mathbb{R}$$

Questo ci dice che l'equivalenza $P \to Q \equiv \neg P \vee Q$ che vale in logica classica non è valida in logica intuizionista.

5. Dimostriamo che $\neg(P \to Q) \to (P \wedge \neg Q)$ non è derivabile in logica intuizionista. Associamo a P un insieme aperto della forma $(-\infty, a) \cup (a, +\infty)$ e a Q l'insieme vuoto, ottenendo in questo caso $\|\neg Q\|_\alpha = \mathbb{R}$. Ne consegue che

$$\|P \wedge \neg Q\|_\alpha = (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$$
$$\|P \to Q\|_\alpha = \emptyset$$
$$\|\neg(P \to Q)\|_\alpha = \mathbb{R}$$

da cui si ottiene

$$\|\neg(P \to Q) \to (P \wedge \neg Q)\|_\alpha = (-\infty, a) \cup (a, +\infty) = \mathbb{R} \backslash \{a\} \neq \mathbb{R}$$

Osserviamo che se in $(\neg(P \to Q) \to (P \wedge \neg Q)$ poniamo $Q = \perp$ si ottiene una formula proposizionale equivalente a $\neg\neg P \to P$ che non è derivabile in logica intuizionista. Questo ci permette immediatamente di concludere che anche $(\neg(P \to Q) \to (P \wedge \neg Q)$ non è derivabile intuizionisticamente senza bisogno di esibire un contromodello.

In logica intuizionista, quindi, $\neg(P \to Q)$, ovvero la negazione di un'implicazione, non è equivalente a $P \wedge \neg Q$, come in logica classica.

Capitolo 3

Aspetti didattici dell'implicazione logica

Lo scopo di questo Capitolo è presentare vari aspetti didattici legati all'implicazione logica. Prima di entrare nel merito dell'argomento viene fatta una panoramica più generale analizzando il ruolo della logica nell'apprendimento della matematica e in quali termini si parla di questa disciplina nelle Indicazioni Nazionali. Seguiranno delle considerazioni sul rapporto tra linguaggio naturale e linguaggio logico formale, argomento strettamente collegato alle difficoltà logiche presentate successivamente. Nel seguito del Capitolo, viene proposta un'analisi dettagliata dei principali errori che nei processi di apprendimento coinvolgono l'implicazione logica e si cercherà di individuarne le possibili cause. Per concludere il Capitolo vengono presentati alcuni spunti di riflessione per una didattica efficace che punti a ridurre le difficoltà che gli studenti incontrano nella gestione dell'implicazione logica.

3.1 La logica nella scuola secondaria di II grado

È ben noto come il tema delle competenze logiche nell'apprendimento della matematica, nel corso del tempo e ancora oggi, sia molto vivo. Ci sono almeno tre livelli di discussione sulla funzione dell'insegnamento della logica matematica nella scuola dell'obbligo: un primo livello riguardante gli obiettivi che andrebbero perseguiti; un secondo livello di tipo disciplinare e curriculare, ovvero quali contenuti proporre; infine, un livello metodologico-didattico che riguarda chi e come debba insegnarla.[3] Su questi temi, nel corso degli anni si sono sviluppate due impostazioni epistemologiche diverse. Principalmente, sul piano pedagogico, vediamo contrapposte due scuole di pensiero: c'è chi sostiene l'insegnamento della logica come disciplina e chi la intende, invece, come competenza trasversale alle discipline. Chi sostiene la prima linea pedagogica ritiene che la logica sia una disciplina autonoma, con metodi e problematiche proprie e che l'apprendimento di qualche elemento di logica matematica sia un passaggio fondamentale o comunque molto utile per lo sviluppo del pensiero logico. Altri, invece, contestano questa posizione e considerano la logica non come un settore da aggiungere ad altri settori della matematica, come l'aritmetica, l'algebra,

la geometria e la probabilità. In questo caso, la direzione giusta sarebbe quella di affiancare lo svolgimento dei temi di matematica con considerazioni e approfondimenti di carattere logico e considerare la logica come una competenza trasversale, che si sviluppa anche nelle altre discipline, come la filosofia o la linguistica. Il matematico tedesco Freudenthal, attraverso il titolo di un suo contributo *Logic as a subject or as an attitude? - La logica come disciplina o come atteggiamento*, dove la parola "atteggiamento" è intesa in senso più ampio rispetto a quello specifico prevalente nell'educazione matematica, a un convegno sull'insegnamento della logica, tenutosi a Roma nel secolo scorso, illustra al meglio questa diversità di posizioni. [17, 42]
Sebbene la logica sia una disciplina autonoma, non per questo deve essere considerata una disciplina separata. Come la matematica, anche la logica ha mutuato molti suoi temi da vari fenomeni ed attività umane, come, per esempio, il processo di formazione dei concetti, la correttezza delle inferenze o la costruzione di discorsi coerenti. In quanto tale, la logica entra naturalmente in rapporto con altre discipline che hanno a che fare in vario modo con quelle stesse attività: dalla matematica all'informatica, dalla linguistica al diritto e, non per ultima, alla filosofia. Proprio per questo, lo studio della logica in tutti gli ordini di scuola potrebbe svolgere un importante compito di cerniera tra diverse aree disciplinari e culturali oltre ad avere un proprio spazio indipendente nei percorsi scolastici.
Tali discussioni non sono al centro del nostro lavoro, ma per un'efficace analisi dell'implicazione logica, che svolge un ruolo fondamentale nella logica proposizionale e in generale in tutta la matematica, è opportuno fare una breve panoramica sul ruolo della logica nella scuola per contestualizzare al meglio l'argomento. Ci limitiamo a riportare qualche riflessione riguardo alla scuola secondaria di II grado, con particolare attenzione ai licei. Inizialmente vedremo alcuni motivi per cui valga la pena studiare logica per un apprendimento più completo della matematica. Poi, analizzeremo in che termini si parla di logica nei programmi di studio nazionali.

La logica nell'apprendimento della matematica

Quando compaiono per la prima volta, nei programmi del biennio, delle indicazioni riguardo allo studio della logica, erano gli anni dell'avvento dell'informatica e si attribuiva alla logica il ruolo di raccordo tra informatica e matematica tradizionale. Tuttavia, intorno a quegli anni, la logica viene inserita nei nuovi programmi di tutti i livelli scolastici, prima in quelli delle scuole superiori, nel 1978, e, successivamente nella scuola secondaria di I grado, nel 1983, e questo rinvia a motivazioni ben più profonde a sostegno dell'importanza della logica nei processi d'apprendimento.

Una prima motivazione si può individuare nella necessità di una maggiore consapevolezza da parte degli studenti nel processo di apprendimento della matematica. Un punto critico dell'insegnamento della matematica è la dimostrazione: considerevole è la resistenza negli studenti i quali fanno fatica a comprenderne la necessità. Nel processo di maturazione dei ragazzi non sembra naturale il passaggio da un'impostazione intuitiva del metodo *ipotetico-deduttivo* a quella caratterizzata da un suo uso sistematico e consapevole. L'introduzione della logica può quindi migliorare l'apprendimento se gli studenti sono in grado di riflettere su quello che stanno facendo quando risolvono problemi o svolgono dimostrazioni, evitando anche salti logici in esse o implicazioni tra premesse e conseguenze non correlabili. Inoltre, gli studenti meno dotati distinguono con difficoltà, nell'enunciato di un teorema, l'ipotesi dalla tesi, confondendo un teorema diretto con il suo inverso. Abituare quindi i ragazzi a lavorare su queste strutture logiche, anche se non elimina le difficoltà, può comunque aiutarli nella comprensione e consapevolezza di tali aspetti. In questi termini la logica è anche intesa come una riflessione sulle operazioni che spontaneamente compiamo quando pensiamo ed è interessante rendere consapevoli i ragazzi del fatto che queste stesse operazioni possono essere inquadrate in strutture di tipo matematico.

Una seconda motivazione è costituita dalla necessaria rivalutazione della componente formale dei processi matematici. Il riconoscimento della potenza della *formalizzazione* in matematica costituisce forse l'obiettivo più ambizioso per l'educazione matematica in tutto l'arco del percorso di studi e la logica costituisce uno strumento essenziale per la sua acquisizione. Per un approccio alla formalizzazione della matematica che non sia ridotto a puro formalismo, è necessario attivare opportuni collegamenti tra due livelli di insegnamento. Un primo livello è rappresentato dalla *logica nella matematica*, cioè dal fatto che facendo matematica si usano più o meno consapevolmente strumenti e concetti logici, quindi la logica appartiene al linguaggio stesso della matematica. Un secondo livello è costituito dalla *logica come metamatematica*, il che significa che essa si presenta come *metalinguaggio*, come riflessione cosciente, scientifica e sistematica su quanto avviene nel livello precedente. È proprio in questo campo che si può cercare di realizzare un'unità metodologica tra informatica, logica e matematica tradizionale. Nell'informatica, come nella logica, c'è l'esigenza di distinguere sintassi da semantica e di separare i vari piani di linguaggio. [3]

Un terzo motivo, infine, che giustifica l'introduzione della logica a scuola, è riconoscere e valorizzare, nell'insegnamento della matematica, la sua dimensione culturale, oltre al "tecnicismo" che ovviamente la caratterizza. Infatti, molto spesso, se gli studenti sanno qualcosa di logica, o di altri aspetti generali relativi al metodo scientifico, lo devono all'insegnante di filosofia, ma sarebbe opportuno e significativo che anche da parte dei docenti di matematica ci fosse la giusta attenzione al valore culturale della propria disciplina. Anche la logica, come altre aree del sapere scientifico, ha avuto un suo sviluppo e ha contribuito alla formazione del sapere matematico. [14, 33]

Le Indicazioni Nazionali

Vediamo ora cosa dicono le Indicazioni Nazionali riguardo all'insegnamento della logica nei licei, e nello specifico in quelli scientifici. Oggi, nella scuola, la dimensione logica viene proposta come trasversale e legata all'educazione linguistica, ma anche alla filosofia e alle scienze, oltre che alla matematica. Infatti, nelle Indicazioni Nazionali non c'è alcun riferimento all'insegnamento della logica come disciplina.
Nel *Profilo culturale, educativo e professionale dei Licei*, all'interno del *Decreto del Presidente della Repubblica* [30], vengono descritte cinque aree di competenze e risultati di apprendimento che a conclusione di tutti i percorsi liceali ogni studente dovrebbe avere sviluppato. Le cinque aree sono le seguenti: *metodologica*, *logico-*

argomentativa, *linguistica e comunicativa*, *storico-umanistica* e *scientifica, matematica e tecnologica*. La seconda area, *logico-argomentativa*, prevede che gli studenti a conclusione del percorso dovranno:

- *"Saper sostenere una propria tesi e saper ascoltare e valutare criticamente le argomentazioni altrui.*
- *Acquisire l'abitudine al rigore logico, ad identificare i problemi e a individuare possibili soluzioni.*
- *Essere in grado di leggere e interpretare criticamente i contenuti delle diverse forme di comunicazione"* [30].

Va sottolineato che l'*area logico-argomentativa* è autonoma rispetto alle altre aree disciplinari. Nell'ultima area si parla implicitamente di linguaggio e ragionamento logico in quanto si legge *"comprendere il linguaggio formale specifico della matematica, saper utilizzare le procedure tipiche del pensiero matematico [...]"* [30], che è caratterizzato dal ragionamento logico.
Per quanto riguarda i risultati di apprendimento dei distinti percorsi liceali, solo nell'indirizzo del liceo scientifico tradizionale e opzione scienze applicate si legge qualche riferimento in merito alla logica. Nello specifico, per il liceo scientifico è indicato come obiettivo il *"comprendere le strutture portanti dei procedimenti argomentativi e dimostrativi della matematica, anche attraverso la padronanza del linguaggio logico-formale; usarle in particolare nell'individuare e risolvere problemi di varia natura"* [30]. Nel liceo scientifico opzione scienze applicate si entra un po' più nello specifico della logica laddove si legge che gli studenti dovranno:

- *"analizzare le strutture logiche coinvolte ed i modelli utilizzati nella ricerca scientifica;*
- *individuare le caratteristiche e l'apporto dei vari linguaggi (storico-naturali, simbolici, matematici, logici, formali, artificiali)"* [30].

È tuttavia rilevante sottolineare che nelle linee generali relative alla disciplina Matematica non si fa alcun riferimento a elementi di logica; viene invece utilizzato il termine *logico* in relazione alle altre discipline, in particolare alla Filosofia, dove compaiono i termini *"problemi logici"*, *"logica moderna"*, *"sviluppi della logica"* e alla Lingua e Letteratura Italiana dove vengono citate esplicitamente *"le competenze logico-argomentative"*, *"la coerenza logico-argomentativa"*, *"l'organizzazione logica"* e *"le relazioni logiche interne"*.

Lo spazio dedicato alla logica, come si può vedere, è davvero limitato e, pur comparendo qualche indicazione più specifica, soprattutto nel liceo scientifico con opzione scienze applicate, molto spesso esso viene lasciato a margine dedicando solo qualche accenno all'introduzione di elementi di teoria degli insiemi.
Nel complesso si può riscontrare una certa incoerenza nelle Indicazioni Nazionali: nel profilo viene indicata espressamente un'area specifica per le competenze logico-argomentative, che poi però non sembra trovar riscontro nella declinazione delle competenze e dei contenuti specifici nelle discipline. L'ipotesi che quindi si può avanzare è che la logica venga intesa solo come competenza trasversale.

3.2 Linguaggio naturale, linguaggio logico-matematico

Con il termine *linguaggio naturale*, indichiamo il linguaggio quotidiano, quello che usiamo tutti i giorni per comunicare e relazionarci. È un linguaggio che si è sviluppato a livello storico e culturale, non simbolico, ricco di espressività, ma anche di sfumature e "ambiguità". Con il termine *linguaggio matematico* indichiamo, invece, un linguaggio costituito da testi verbali, espressioni simboliche e rappresentazioni figurali; tale linguaggio viene definito multimodale, laddove il testo è formato da frasi logicamente strutturate, all'interno delle quali trovano posto, oltre a termini specifici, anche caratteri tecnici, formule e simboli propriamente matematici. Il linguaggio matematico include un ampio spettro di registri ed è, quindi, un linguaggio multivariato. Si può poi parlare espressamente di *linguaggio logico*, costituito da simboli per connettivi e quantificatori, che è un vero e proprio linguaggio simbolico, più preciso anche se indubbiamente meno espressivo di un linguaggio naturale ma proprio per questo adatto ad essere usato in matematica. [16]

Nel percorso scolastico gli studenti sono portati ad utilizzare questi linguaggi, ma molto spesso le difficoltà che si riscontrano nelle discipline sono dovute non solo ad una scarsa comprensione dei concetti, ma anche ad una carenza a livello linguistico. Anche per una buona comprensione della matematica e della logica serve che gli studenti abbiano sviluppato una buona *competenza linguistica*. Questa competenza si potenzia attraverso le diverse attività che svolgono gli studenti: ascoltare spiegazioni, svolgere esercizi e partecipare a discussioni di classe, esperienze di ricerca e attività di lavoro sul testo. Analizzare, commentare, approfondire, rispondere a domande in relazione a piccoli testi argomentativi è un'attività spesso trascurata e, infatti, le abilità di ascolto e di lettura dei ragazzi e, ancora di più, le loro competenze lessicali e di comprensione del testo sono molto spesso scoraggianti. [9]

Le difficoltà in questo campo si manifestano, purtroppo, in tutte le discipline, dall'Italiano alla Matematica, e quindi interessano vari tipi di linguaggio, quello naturale ma anche quello matematico. Tuttavia, per le materie umanistiche, quali possono essere lettere o filosofia, gli insegnanti riescono a lavorare di più in questa direzione, non sempre però dedicando il tempo opportuno o raggiungendo risultati evidenti: si pensi, ad esempio, all'analisi dei testi argomentativi piuttosto che di quelli letterari e poetici. Per quanto riguarda la matematica, questo aspetto viene totalmente dimenticato e le difficoltà dei ragazzi sono ancora più accentuate.
Questo accade principalmente per due motivi: in primo luogo perché tradizionalmente le abilità linguistiche e le specifiche nozioni di matematica e logica appartengono a campi differenti e, infatti, accade spesso che allo studio della matematica non sia associata la comprensione del testo; in secondo luogo, perché l'apparente difficoltà del linguaggio matematico "giustifica" le incomprensioni e gli errori in cui incorrono gli studenti.
Per quanto riguarda questo secondo aspetto possiamo citare Zan e Di Martino, docenti di didattica della matematica, che sostengono: *"il linguaggio matematico è spesso visto da molti, allievi e adulti, come un linguaggio inutilmente complicato, pieno di simboli, distante dalla realtà. Costituisce un aspetto che gioca un ruolo importante nella difficoltà in matematica e nell'atteggiamento di rifiuto che molti*

allievi costruiscono verso la disciplina [...]" [16]
Possiamo quindi affermare che alcune difficoltà di apprendimento e comprensione della matematica siano di natura linguistica. Nell'immaginario comune il linguaggio matematico è visto come difficile, astruso e contrapposto a quello quotidiano. C'è da dire che questa convinzione in parte è giustificata, soprattutto per quanto riguarda il lessico utilizzato in questa disciplina che spesso è costituito da parole con significati diversi dall'uso quotidiano o poco comuni ("ipotenusa", "cateto", "numeratore", "sottraendo", "minuendo"...) oppure per l'utilizzo di formule numeriche o simboliche che spesso spaventano, sia a causa del loro impatto visivo, sia per la loro interpretazione o, ancora, per i numerosi testi irrealistici e stereotipati dei problemi matematici. Inoltre, il linguaggio matematico viene spesso paragonato al linguaggio naturale, e in questo modo non viene compresa la sua funzionalità e viene semplicemente visto come meno espressivo e con molti più vincoli che, spesso, non vengono capiti ma subiti e imparati a memoria.
Bisogna quindi, soprattutto a scuola, cercare di modificare questa convinzione distorta. Come afferma Ferrari: *"la differenza tra il linguaggio quotidiano e quello della matematica non risiede nei principi ma nelle funzioni, e un'educazione linguistica adeguata, come quella delineata nelle Indicazioni Nazionali per il I ciclo, potrebbe aiutare a modificare le percezioni menzionate da Zan e Di Martino"*. [16]

Va inoltre sottolineato che la matematica fa parte della vita di tutti i giorni e molto spesso si utilizza nella quotidianità parte del *linguaggio matematico*, in modo informale e non tecnico. Ad esempio, quando studiamo matematica a scuola, quando facciamo conti, nel progresso collettivo - pensiamo, per esempio, ai computer o agli smartphone - nell'organizzazione della vita sociale, come nelle previsioni di crescita di una nazione, nelle bollette della corrente elettrica o nelle statistiche che descrivono l'andamento delle compravendite. Oppure, utilizziamo strutture logiche ben definite e con un determinato significato nella costruzione di frasi quotidiane. E, nello stesso tempo, non va sottovalutato il fatto che la comunicazione matematica e il suo studio avvengono, quasi sempre, soprattutto a livello scolastico, attraverso il *linguaggio quotidiano*. [4]

"L'incongruenza" tra il linguaggio naturale e il linguaggio logico

Nonostante il linguaggio della matematica e il linguaggio naturale, usato anche per comunicarla, non siano completamente separati e si influenzino a vicenda, ci sono numerosi esempi che mostrano un'evidente incongruenza tra i due.
Un caso emblematico e di nostro interesse è costituito dalla frase ipotetica *"se ... allora..."*. Molto spesso, nel linguaggio quotidiano, si utilizzano frasi che contengono le espressioni *"se...allora..."* o *"solo se"*: tali proposizioni possono essere interpretate in modi diversi, sono apparentemente ambigue e non sembrano in alcun modo andare d'accordo con le regole stringenti della logica.

Di seguito, proponiamo gli esempi più significativi, che ci permetteranno di mettere in luce una contraddittorietà tra i due linguaggi, quello logico-matematico e quello naturale. Successivamente, proveremo a spiegare come questa incongruenza e apparente ambiguità sia del tutto normale ed indispensabile, anche se può creare qualche insicurezza in più nei ragionamenti prettamente logici.

- Abbiamo visto che il significato matematico di una frase ipotetica *"se P allora Q"* è anche inteso come *"non P oppure Q"*, che non esclude il verificarsi di entrambe le affermazioni *non P* e Q. Non sempre, nel linguaggio naturale, tali relazioni vengono intese allo stesso modo. Se qualcuno pronuncia la frase *"se piove, allora prendo l'ombrello"*, non sta presumibilmente intendendo *"non piove oppure prendo l'ombrello"* ma sta, invece, facendo riferimento ad un'azione causale e cioè al fatto che, nell'eventualità che stia piovendo quando sta per uscire, prenderà l'ombrello.

- Ci sono frasi che nella vita quotidiana risultano assurde, prive di senso o totalmente false e che, invece, in un contesto matematico possono assumere un determinato significato. La proposizione *"se io sono a Trento, allora io sono a Padova"* è ovviamente priva di senso e falsa in qualsiasi circostanza; ma in termini matematici, la conoscenza della falsità della frase ipotetica, comporta che sia vera l'ipotesi e falsa la tesi e quindi permette di concludere che è vero che *"io sono a Trento"*.[5]
  Oppure, un altro esempio dal sapore paradossale è l'enunciato *"se sei morto, allora sei vivo"*. La frase, dal punto di vista logico, risulta vera se la persona a cui si riferisce è chi sta leggendo. Infatti, dal momento che il lettore è vivo - in caso contrario non starebbe leggendo queste righe - l'antecedente è falso ed il conseguente è vero, il che rende l'intero condizionale vero.[6]

- Un'altra proprietà dell'implicazione *"se P allora Q"* è la sua equivalenza con l'implicazione contronominale *"se non vale Q allora non vale P"*. Tuttavia, questa regola logica non trova riscontro in alcune situazioni di vita quotidiana. Ad esempio, è sensato dire *"se piove, prendo l'ombrello"*, ma la sua contronominale *"se non prendo l'ombrello, non piove"*, è tutt'altro che ragionevole e può solo essere pronunciata da una persona eccessivamente sicura delle proprie previsioni.
  Una situazione analoga è la frase detta da una mamma premurosa a sua figlia, *"se hai fame, c'è la torta in frigorifero"*, che, ovviamente, non può essere interpretata come l'implicazione *"se non c'è la torta in frigorifero, non hai fame"*. In questo caso stiamo considerando un *atto linguistico* al di fuori della logica enunciativa. In questo caso particolare la frase è, infatti, ellittica, perché il suo significato in realtà è *"se hai fame, prendi la torta che è in frigorifero"*.

- In matematica c'è una netta distinzione tra un'implicazione e una doppia implicazione. Ciò non è così evidente in alcune situazioni di vita quotidiana. La frase *"se è bel tempo domani vado in montagna"* di solito è interpretata come *"domani vado in montagna se e solo se è bel tempo"*. Nella frase iniziale non

[5] La conclusione segue direttamente dal significato di implicazione logica e dalla sua tavola di verità. Posto P la proposizione *"io sono a Trento"* e Q la frase *"io sono a Padova"*, l'implicazione $P \rightarrow Q$ è *vera* nei casi in cui P e Q sono entrambe vere o false, P è falsa e Q è vera ed è *falsa* solo nel caso in cui P è vera e Q è falsa, ovvero nel caso che stiamo considerando.

[6] Come nel caso precedente, segue dalla tavola di verità dell'implicazione.

viene detto nulla nel caso di cattivo tempo, ma è spontaneo pensare che, se piove, non si vada in montagna.
Un problema simile si verifica con l'espressione *"solo se"*. Consideriamo la frase detta ad una bambina da un genitore, *"solo se fai la brava, andiamo al cinema"*. Il significato logico è *"se andiamo al cinema, è perché hai fatto la brava"* mentre, molto spesso, una frase di questo tipo è interpretata come doppia implicazione come nel caso precedente: *"andiamo al cinema se e solo se hai fatto la brava"* e, sotto questa interpretazione, è corretto concludere che *"se non andiamo al cinema è perché non hai fatto la brava"*, conclusione errata se la frase è interpretata correttamente come implicazione. In queste situazioni la differenza la può fare il contesto in cui si stanno facendo le affermazioni.

- È importante sottolineare la differenza tra l'implicazione *"se P allora Q"* e la sua inversa, *"se Q allora P"* poiché, molto spesso, succede di confonderle. Infatti, interpretando un'implicazione come una doppia implicazione, si conclude che l'inversa di un'implicazione è vera. Questa confusione è molto frequente nel linguaggio comune. *"Se uno ha l'influenza, allora ha la febbre alta. Teresa ha la febbre alta, allora ha l'influenza"* è un ragionamento molto frequente, ma ovviamente sbagliato: ci possono essere molte altre malattie che causano la febbre, non solamente l'influenza.
  Oppure, in ambito poliziesco, se un assassino è stato ripreso da una telecamera, si potrebbe affermare che *"se uno ha commesso un crimine, allora è stato ripreso"*. Ma con ciò non è lecito concludere che se una persona è stata ripresa dalla telecamera, allora è l'assassino.

- In alcune frasi pubblicitarie, le affermazioni sono dette e scritte in modo tale da indurre ad una scorretta interpretazione e trarre in inganno. Ad esempio, può capitare di leggere che *"chi è giovane veste gli abiti della linea Dress up"*, che corrisponde all'implicazione *"se uno è giovane, allora veste Dress up"*. L'affermazione è evidentemente scorretta, in quanto non tutti i giovani indossano gli abiti di questa marca, e, inoltre, per invogliare a comprare tali vestiti, induce indirettamente a pensare all'implicazione inversa, *"se uno veste Dress up, allora è giovane"*, alimentando l'erronea e diffusa convinzione comune che un'implicazione e la sua inversa siano equivalenti.
  Ancora, in alcune frasi pubblicitarie compaiono due negazioni, per cercare di ingannare il pubblico che spesso cancella la doppia negazione. Per esempio, nello slogan *"se non giochi, non vinci"* che è, dal punto di vista logico, assolutamente corretto, si è indotti a pensare - annullando la doppia negazione espressa dal connettivo "non" - *"se giochi vinci"*, che non corrisponde in alcun modo ad una verità. In questo caso, si commette il tipico errore di interpretare come equivalenti le implicazioni *"se P allora Q"* e *"se non vale P, allora non vale Q"*.

- Nella lingua italiana ci sono anche usi diversi della formula *"se...allora..."* che non hanno lo stesso significato logico dell'implicazione e che accrescono le difficoltà di comprensione di tale concetto. Proviamo ad elencarne alcuni.
  La frase *"se tu sei campione di scacchi, io sono l'imperatore della Cina"* non ha certo il significato matematico di un'implicazione, ma si vuole intendere che

"tu non sei un campione di scacchi ed io non sono l'imperatore della Cina": in questo caso il *se* viene anche chiamato *"se bi-negativo"*.
Un altro caso è quando il *se* è usato in modo *"correlativo"*, quindi è inteso come unione di due enunciati affermativi, come nella frase *"se al mare ci si abbronza, in montagna si può passeggiare"*, il cui significato equivale a: *"al mare ci si abbronza e in montagna si può passeggiare"*.
Un altro caso particolare è quando si considera il *"condizionale controfattuale"* che descrive una situazione irreale della vita quotidiana, come la frase *"se Verdi e Mozart fossero stati compatrioti, Mozart sarebbe stato italiano"*. In questo caso il contenuto della frase è privo di senso, in quanto è contrario alla realtà dei fatti, ma da un punto di vista logico la verità dell'intero enunciato è indipendente dalla verità delle singole proposizioni che lo compongono quindi, in un certo senso questa frase può assumere il significato matematico di implicazione, in quanto la logica non ha solo a che fare con la verità come corrispondenza al mondo reale.
Ci sono, infine, casi che cadono al di fuori della logica enunciativa, come *"se è pronto, spegni il forno!"* oppure *"se sei stanca, allora perché non vai a dormire?"*. Si tratta di enunciati dichiarativi ("è pronto", "sei stanca") inseriti, nel primo caso in una prescrizione (*"se imperativo"*) e, nel secondo caso, in una domanda (*"se interrogativo"*), che non sono in alcun modo formalizzabili nella logica enunciativa standard.

Le incongruenze emerse tra linguaggio naturale e linguaggio della logica e, più in generale, linguaggio matematico, non coinvolgono solamente il concetto di implicazione, ma riguardano vari altri aspetti della matematica.
Il tema del rapporto tra matematica e linguaggio è stato più volte affrontato e studiato da numerosi autori, anche perché una parte delle problematiche nell'insegnamento e apprendimento della matematica, e nel nostro caso specifico, della logica, deriva proprio dalla diversità dei linguaggi utilizzati.
Noi abbiamo riportato i risultati più importanti e utili ai nostri fini. È indubbio che la distanza mostrata tra i due linguaggi è uno dei possibili fattori che contribuiscono a creare confusione, una sbagliata interpretazione, nonché una evidente difficoltà nel maneggiare enunciati che presentano implicazioni logiche. [4, 42]

Proprio per i motivi esposti, molti studiosi ritengono che le lingue siano ambigue e che le notazioni simboliche della logica siano più adatte nel costruire nuovi enunciati in modo non ambiguo e univoco. Tuttavia, è importante sottolineare che le lingue hanno funzioni diverse dai linguaggi simbolici della logica e dispongono di strumenti differenti, così come i loro meccanismi interpretativi sono diversi da quelli utilizzati dai linguaggi della logica e della matematica, come i linguaggi del primo ordine.
Mentre per il linguaggio logico vale il teorema di leggibilità unica, che stabilisce che data una sequenza finita di simboli è possibile determinare in modo univoco se la sequenza è una formula e qual è la sua struttura, per le lingue naturali tale teorema non vale, avendo a disposizione, semmai, altri strumenti che permettono di chiarire il significato di alcuni termini o testi che possono risultare ambigui. Infatti, le lingue, non solo hanno la funzione di comunicare informazioni, ma permettono anche di esprimere emozioni, sentimenti e sensazioni, di intrattenere rapporti con le

altre persone, di dare ordini o prendere e mettere in atto decisioni. Per fare questo, i linguaggi naturali costruiscono significati anche con l'organizzazione del testo, con modi e tempi verbali o con strumenti non testuali, in quanto la comunicazione orale fra esseri umani è accompagnata anche da gesti, espressioni del viso, come gli sguardi, o il tono della voce, oltre che attraverso il lessico e i connettivi vero-funzionali. Infatti, molto spesso, nella vita di tutti i giorni, utilizziamo intenzionalmente parole che possono essere interpretate in più modi e che hanno diverse sfumature e possiamo indirizzare in maniera indiretta ad un significato piuttosto che ad un altro con gli strumenti menzionati. Quindi, è non solo lecito, ma necessario, che un linguaggio naturale abbia dei margini di ambiguità. [16, 17]

Il ruolo del contesto: atti linguistici e principio di cooperazione

Un elemento importante da considerare nella nostra analisi è che le lingue sono configurate a operare in contesti diversi. Ci sono diversi fattori pragmatici strettamente collegati a tale aspetto.

In primo luogo, si deve chiarire cosa sono gli *indicali*. Essi sono elementi di una lingua e della sua grammatica che attribuiscono alla frase una specifica connotazione di tempo (oggi, domani, l'anno scorso...), di spazio (questo, quello, laggiù, qui...) e di interlocutori (io, tu, noi...), che costituiscono il contesto extralinguistico. Per essere interpretati, gli enunciati linguistici richiedono quindi delle informazioni sia sul contesto costituito dal testo sia sul contesto extralinguistico. Ad esempio, l'affermazione *"la città è attraversata da numerosi canali"* è vera nel caso in cui chi la pronuncia si riferisca a Venezia o Amsterdam (in questo caso l'enunciato può essere nella forma *"se vai a Venezia, la città è attraversata da numerosi canali"*), mentre è falsa se il dichiarante si riferisce a Trento o Berlino, (l'enunciato diventa *"se vai a Trento, la città è attraversata da numerosi canali"*, il che è, per chi conosce Trento, palesemente falso).

Due teorie interessanti possono aiutarci a chiarire il ruolo del contesto negli atti comunicativi. La prima è la *teoria degli atti linguistici* del filosofo anglosassone J.L. Austin (1962), e la seconda è la *teoria della cooperazione comunicativa*, del filosofo inglese P. Grice (1975). I due autori sono diventati i massimi esponenti della *filosofia del linguaggio ordinario*.

La ***teoria degli atti linguistici*** si basa sul presupposto che con un enunciato non si possa solo descrivere il contenuto o sostenerne la veridicità: la maggior parte degli enunciati, infatti, serve a compiere delle vere e proprie azioni in ambito comunicativo e in relazione ad uno specifico contesto. Alcuni esempi li abbiamo visti all'inizio di questo paragrafo. Un atto linguistico riguarda anche frasi non dichiarative, come *"se è pronto, spegni il forno!"*, che è un ordine, oppure domande: nel caso della proposizione *"se sei stanca, perché non vai a dormire?"*. Un atto linguistico può quindi esprimere o modificare convinzioni, o indurre atteggiamenti o comportamenti. Un atto linguistico non è caratterizzato soltanto dalla sua verità o falsità ma anche dalla sua adeguatezza rispetto al contesto. Il valore di verità della proposizione *"se* *hai fame, c'è la torta in frigorifero"* dipende dalla situazione in cui è pronunciata. O ancora, dire a qualcuno *"piove"* quando sta uscendo di casa, significa sia comunicargli un'informazione, sia invitarlo a prendere l'ombrello, mentre se questa frase è detta ad una persona che entra in casa completamente bagnato sarebbe un atto linguistico del tutto inopportuno e inutile.

Per quanto riguarda la teoria della cooperazione comunicativa, essa è ben sintetizzata dal ***principio di cooperazione***, così formulato da Grice nel suo trattato *Logica e conversazione*:

"Conforma il tuo contributo conversazionale a quanto è richiesto, nel momento in cui avviene, dall'intento comune accettato o dalla direzione dello scambio verbale in cui sei impegnato."

Tale principio, come si vede, mette bene in chiaro tutte le componenti che usualmente sfuggono a un'analisi semantica del linguaggio, effettuata nei soli termini di valore di verità degli enunciati, e questo è possibile qualora si mettano in relazione il significato convenzionale dell'espressione linguistica e il contesto conversazionale in cui esso emerge.
La conversazione è per Grice un'attività linguistica razionale e cooperativa, governata dal principio, secondo il quale i partecipanti si sentono, per così dire, obbligati a dare un loro contributo affinché la conversazione in cui sono immersi funzioni bene. Il principio di cooperazione si declina in quattro gruppi di massime:

1. la massima della *quantità*: occorre dare un contributo appropriato sotto il profilo della quantità di informazioni, non si deve essere né troppo prolissi, ma nemmeno eccessivamente concisi;
2. la massima della *qualità*: occorre che il soggetto parlante dica la verità e esprima affermazioni della cui fondatezza è certo;
3. la massima della *relazione*: è necessario essere pertinenti, senza uscire fuori tema;
4. la massima della *modalità*: è opportuno esprimersi in maniera chiara, breve, ordinata.

Si tratta di un principio descrittivo, che può essere applicato in modi diversi, in base agli scopi ma, per questo, può essere anche violato, disatteso o contraddetto sia in maniera volontaria che non. Questo principio ci aiuterà a capire da dove nascono alcune incomprensioni riguardanti i ragionamenti condizionali.

Tutti gli enunciati sono prodotti in un contesto e tutti gli elementi che abbiamo descritto si innescano inevitabilmente: senza di essi sarebbe impossibile comunicare. La legge fondamentale che regola la comunicazione fra persone non è quindi la verità degli enunciati in gioco ma la loro adeguatezza rispetto ad un contesto. Nessuno si sognerebbe di telefonare a qualcuno, nel cuore della notte, per dire che Roma è la capitale dell'Italia: la proposizione sarebbe vera, ma l'atto linguistico sarebbe inadeguato e la persona non starebbe rispettando il principio di cooperazione. Potrebbe essere che la telefonata sia dovuta ad un errore e in questo caso la violazione del principio sarebbe non intenzionale.

Va sottolineato che un minimo di contesto è sempre necessario, anche quando testi verbali o espressioni simboliche sono leggibili in modo univoco. Si considerino i seguenti esempi: *"ho portato la macchina ad aggiustare"* oppure "$x^2+1=0$". Il modo in cui leggere gli esempi è univoco ma in entrambi i casi solo attraverso deduzioni basate sul contesto è possibile determinarne il significato (per esempio, di quale macchina si tratta - automobile o da cucire - o qual è il dominio in cui può variare la x). [17]

Il contesto svolge, dunque, un ruolo estremamente importante e influenza notevolmente l'interpretazione delle proposizioni, in particolare di quelle condizionali. Nel seguito di questo Capitolo, affrontando gli errori di ragionamento, si ritornerà sull'argomento ampliando la discussione.

Torniamo alla tematica principale di nostro interesse. A seguito della nostra analisi risultano meno sorprendenti gli esempi riportati: il divario tra l'interpretazione di enunciati, in particolare di implicazioni logiche, in ambito quotidiano e logico è del tutto naturale e, altresì, necessario.
Le lingue sono usate comunemente e molto spesso in maniera piacevole per dialogare e funzionano in modo differente e hanno scopi diversi rispetto ai sistemi simbolici della matematica e della logica.
Non è quindi appropriato definire le lingue come *ambigue*, derivando questa convinzione dal fatto che si applicano ad esse gli stessi criteri usati nei linguaggi logici: le lingue non dispongono delle stesse proprietà di decidibilità dei linguaggi simbolici della logica e, d'altro canto, se applicassimo a questi le regole con cui funzionano le lingue, violeremmo senza alcun dubbio i principi cooperativi.
È comunque importante riuscire a distinguere il linguaggio matematico dal linguaggio quotidiano e avere la consapevolezza di quando è più adatto l'uno, piuttosto che l'altro. Ovviamente, quando si trattano argomenti scientifici o tecnici, il linguaggio matematico e quello logico diventano gli strumenti fondamentali.

A livello scolastico è necessario rendere consapevoli gli studenti di questa naturale differenza. Indubbiamente questo divario e alcune interpretazioni che vengono date ad espressioni condizionali, che, peraltro, come abbiamo visto, sono del tutto legittime, possono creare maggiori difficoltà di comprensione e utilizzo dell'implicazione logica, in particolare, e alle altre strutture matematiche in generale. Con le dovute accortezze da parte degli insegnanti e lo sviluppo di percorsi didattici ad hoc, sui quali più avanti ci soffermeremo, è possibile però far acquisire agli studenti appropriate competenze nell'utilizzo dei due linguaggi.

3.3 L'implicazione logica: quali difficoltà?

Come molte ricerche e studi hanno mostrato, gli studenti incontrano serie difficoltà ad utilizzare e comprendere in modo adeguato il connettivo logico di implicazione. In questo paragrafo faremo un'analisi dei principali errori che riguardano questa importante struttura logica.
È importante fare una prima grande distinzione tra la tipologia di errori relativi all'implicazione logica. Le difficoltà che emergono riguardano il connettivo logico *"se...allora..."* e le sue specifiche proprietà, oppure i ragionamenti matematici, che sono strettamente collegati a tale connettivo e quindi, in particolare, le regole di deduzione del *modus ponens* e *modus tollens*. Ovviamente, le due questioni sono strettamente correlate e si influenzano a vicenda.
Si possono individuare diverse origini alla base degli errori di cui stiamo parlando. Va sottolineato, però, che questa nozione ha una innegabile complessità intrinseca e, purtroppo, l'inadeguatezza da parte di alcuni insegnanti nell'affrontare tale complessità non aiuta la comprensione da parte degli studenti. Vediamo ora nel dettaglio quali sono le difficoltà emerse dalle varie ricerche e quali sono gli errori più comuni.

Espressioni linguistiche di un'implicazione

In primo luogo, disorienta notevolmente la varietà di espressioni linguistiche che rendono l'implicazione logica *"se P allora Q"*: vi sono, infatti, molti modi equivalenti, in italiano, per esprimere una proposizione condizionale. Vediamo le principali formule e la loro corretta interpretazione.

- se: *"mangio **se** ho fame"* che significa esattamente *"se ho fame, allora mangio"*;

- solo se, solamente se, soltanto se: *"Claudio è nonno **solo se** Claudio è padre"*, che è equivalente alla proposizione *"se Claudio è nonno, allora Claudio è padre"*. A volte queste espressioni sono usate all'inizio della frase, come per esempio nella frase *"**solamente se** hai 18 anni puoi bere la birra"* che significa *"se bevi la birra, allora hai 18 anni"*;

- condizione sufficiente: *"il fatto che un quadrilatero sia un rettangolo è **condizione sufficiente** perché le diagonali di quel quadrilatero siano uguali"* è equivalente all'implicazione *"se un quadrilatero è un rettangolo, allora le sue diagonali sono uguali"*;

- condizione necessaria: *"**condizione necessaria** perché un poligono sia regolare è che sia inscrivibile"* è un modo analogo di dire *"se un poligono è regolare, allora è inscrivibile"*.

Le ultime due locuzioni, che appunto sono modi alternativi per tradurre la formula $P \to Q$, sono molto frequenti in matematica e sono spesso motivo di confusione. Oltre alle espressioni elencate ce ne sono tante altre, come ad esempio, *"Q segue da P"*, *"supponiamo P sia vera, allora Q è vera"*, *"da P segue Q"*, *"se vale P, vale Q"*, *"ogni volta che si verifica P, si verifica Q"*.
In altri casi non compaiono delle formule specifiche che segnalano la presenza di

un'implicazione all'interno di un testo o di una frase, ma essa è racchiusa implicitamente nella struttura della frase, come ad esempio *"quando non piove vado a lavorare a piedi"* oppure *"due rette perpendicolari ad una stessa retta sono parallele"*.

Tutti questi modi alternativi per esprimere un'implicazione logica vengono frequentemente dati per scontati dagli insegnanti, ma in realtà, senza un'accurata presentazione, il rischio è che gli studenti facciano molto fatica, non solo a comprendere il significato logico di un'implicazione, ma banalmente anche solo a riconoscerla.
Inoltre, non solo la varietà dei costrutti linguistici con cui è possibile esprimere il connettivo di implicazione, ma anche il mancato allineamento tra il linguaggio naturale e il linguaggio logico-matematico, analizzato nei paragrafi precedenti, crea confusione e ostacola una più agevole assimilazione.

Il valore di verità di un'implicazione

Una seconda questione è rappresentata dal modo con cui gli studenti attribuiscono un valore di verità a proposizioni contenenti un'implicazione logica. Molto spesso, sia che gli studenti abbiano una scarsa conoscenza del significato strutturale dell'implicazione, sia nei casi in cui viene data un'infarinatura a riguardo, le difficoltà nel valutare se un'implicazione è *vera* o *falsa* sono molto elevate.

Un'indagine inglese ha valutato proprio questo aspetto: agli studenti vengono proposte due proposizioni e viene chiesto loro di valutare se sono da ritenersi vere e spiegare il ragionamento fatto. Le affermazioni sono le seguenti:

1. *"Se la somma di due numeri interi è pari, il loro prodotto è dispari"*
2. *"Se il prodotto di due numeri interi è dispari, la loro somma è pari"*

Emergono tre tipi di strategie utilizzate dagli studenti per verificare se gli enunciati sono veri o no.

- La ***"strategia empirica"***: gli studenti scelgono più o meno casualmente alcuni numeri da inserire nelle proposizioni e verificano con degli esempi la verità degli enunciati. I numeri scelti non soddisfano necessariamente la proposizione antecedente nelle due implicazioni. Successivamente, mettono in relazione i dati ottenuti con l'affermazione che stanno cercando di valutare.
  Questa strategia risulta più efficace quando gli studenti riescono a scegliere i numeri di partenza in modo più generale, come dispari e pari, e li combinano in modo esaustivo, riducendo la quantità di dati iniziali.
- La ***"strategia empirica focalizzata"***: vengono selezionati solo i numeri che si adattano all'antecedente per produrre somme o prodotti che permettono di determinare il valore di verità del conseguente e quindi, dell'enunciato nel suo insieme.
  Come nel caso precedente, alcuni studenti potrebbero anche adottare un approccio più generale ed esaustivo.

- La ***"strategia focalizzata-deduttiva"***: gli studenti usano la loro intuizione o conoscenza per dedurre i numeri che si adattano all'antecedente. Poi, procedono come nella strategia precedente. Infine, cercano di spiegare la loro conclusione facendo riferimento ai numeri di partenza. Questa strategia assume completamente un approccio generale ed esaustivo.

Le tre strategie sono presentate in termini di efficacia e di spostamento del pensiero, da un approccio induttivo a uno deduttivo.
Utilizzando la prima strategia, la probabilità di giungere a una conclusione corretta e valida dipende, almeno in parte, dai numeri scelti inizialmente dagli studenti e, quindi, non risulta essere la più adatta, anche se utilizzata molto frequentemente.

La distinzione tra le ultime due strategie è molto sottile e non sempre distinguibile nelle risposte date, ma è utile da un punto di vista teorico. Per prima cosa evidenzia due approcci diversi: uno empirico, basato sui dati, e uno deduttivo, basato su relazioni strutturali, quello tipico della dimostrazione matematica. Inoltre, fa emergere un'importante differenza nel modo in cui possono essere valutate affermazioni che si rivelano vere, come la seconda: le due strategie, usate accuratamente, portano entrambe alla conclusione corretta, cioè che l'affermazione è vera, ma, mentre con la *strategia focalizzata-deduttiva* si arriva alla conclusione che l'affermazione è necessariamente vera, non si giunge alla stessa conclusione con la seconda strategia, almeno non fino a quando non vengono esaminati tutti i casi possibili.

Emerge chiaramente una difficoltà nell'attribuire il valore di verità ad un'implicazione in senso generale, utilizzando invece esempi specifici che non sempre portano ad una valutazione corretta. L'indagine è stata svolta in relazione a un contesto algebrico ma si riscontra tale problematica anche in altri ambiti della matematica e non solo. [21]

Un altro aspetto molto critico in relazione al valore di verità che può assumere un'implicazione logica, si presenta quando la proposizione antecedente è falsa.
La maggior parte degli studenti - in realtà la perplessità è diffusa anche tra gli adulti - non riesce a comprendere fino in fondo perché se P è una proposizione falsa e anche Q lo è, $P \to Q$ risulta vera o, ancora più sconvolgente è il caso in cui $P \to Q$ è vera, quando P è falsa e Q è vera.
Spesso ciò accade perché nel pensiero comune l'implicazione viene intesa nel senso di "causa-effetto" e quindi la situazione della proposizione antecedente viene interpretata come ciò che "provoca" quanto dichiarato nella proposizione conseguente. Intesa l'implicazione in questi termini scorretti, è alquanto difficile immaginarsi come un qualcosa di falso possa produrre qualcosa di vero.
Un'altra spiegazione sulla perplessità riguardo al comportamento dell'implicazione con antecedente falso verrà proposto nel seguito quando affronteremo l'argomento *deduzione-implicazione*.

Interpretazione dell'implicazione inversa

Un altro errore molto ricorrente riguarda il valore di verità che si attribuisce all'implicazione *inversa*, ovvero l'implicazione ottenuta scambiando antecedente con conseguente. Se l'implicazione diretta è vera non è detto che sia vera anche l'implicazione inversa: in alcuni casi lo è, in altri no, in generale non sempre si può sapere con certezza il suo valore di verità basandosi sulle informazioni che si hanno a disposizione. Ad esempio, se consideriamo la proposizione diretta *"se Luna è un cane allora è un animale"*, può succedere di pensare che sia vera anche la proposizione *"se Luna è un animale allora è un cane"*, ma in realtà ci possono essere anche gatti o altri animali ad avere il nome Luna. Abbiamo visto degli esempi quando abbiamo trattato il tema del rapporto tra linguaggio naturale e linguaggio logico e ne vedremo degli altri quando approfondiremo il discorso riguardo ai ragionamenti deduttivi.
Il problema alla base dell'errore è dato dal modo in cui gli studenti concettualizzano la relazione tra l'implicazione logica e la sua inversa.
Lo studio inglese sopra citato ha messo in luce i diversi significati che gli studenti attribuiscono alle due implicazioni utilizzando le seguenti proposizioni, la prima falsa e la seconda vera:

1. *"Se la somma di due numeri interi è pari, il loro prodotto è dispari"*
2. *"Se il prodotto di due numeri interi è dispari, la loro somma è pari"*

Ai ragazzi viene chiesto di decidere se i due enunciati dicono la stessa cosa. Quindi, se P è l'enunciato *"la somma di due numeri interi è pari"* e Q è *"il prodotto di due numeri interi è dispari"*, viene chiesto se un'implicazione della forma $P \to Q$ e la sua inversa, $Q \to P$, hanno lo stesso significato. Nell'analisi si va anche a verificare fino a che punto, nel dare la risposta, gli alunni sono influenzati dai dati, ovvero da numeri specifici che soddisfano o meno antecedente e conseguente.
Sono emerse quattro diverse categorie teoriche che racchiudono le conclusioni degli studenti sull'equivalenza dell'implicazione logica e della sua inversa.

- ***Equivalenza tra implicazione diretta e inversa, senza fare riferimento ai dati.*** In questo caso gli studenti non si interessano dei valori di verità di antecedente e conseguente, ma li considerano intercambiabili e usano come dato iniziale il fatto che le proposizioni P e Q sono "proprio il contrario" l'una dell'altra. Gli studenti giustificano questo sostenendo che per un'implicazione logica non fa differenza invertire antecedente e conseguente. Non vengono testati indipendentemente i valori di verità delle due affermazioni per dimostrare la loro equivalenza ma, una volta individuato il valore di verità della prima implicazione, deducono semplicemente che il valore di verità dell'implicazione inversa è lo stesso.
- ***Equivalenza tra implicazione diretta e inversa in riferimento ai dati.*** Qui gli alunni ragionano inizialmente come nel caso precedente, partendo dal dato iniziale che le proposizioni P e Q sono una l'inversa dell'altra. Una volta affermato che le due implicazioni dicono la stessa cosa, usano i numeri per confermare quanto dichiarato. Per decidere i valori di verità delle due

affermazioni, vengono utilizzate le stesse coppie di numeri per produrre i dati, indicando che l'antecedente e il conseguente sono visti come intercambiabili.

- ***Non equivalenza tra implicazione diretta e inversa in riferimento ai dati.*** In questo caso gli studenti iniziano con quella che sembra essere una risposta classificabile tra le prime due categorie viste e poi, dopo aver selezionato coppie di numeri appropriate per trovare i valori di verità di $P \to Q$ e $Q \to P$ indipendentemente, ottenendo quindi falso per la prima e vero per la seconda, cambiano la loro risposta arrivando alla conclusione che le due affermazioni non sono equivalenti.
- ***Non equivalenza in generale tra implicazione diretta e inversa.*** In questo caso, i dati relativi ai valori di verità di antecedente e conseguente sono usati per confermare piuttosto che giustificare la conclusione. Infatti gli studenti affermano che un enunciato $P \to Q$ non è lo stesso dell'enunciato $Q \to P$ in quanto l'ordine è importante, e lo confermano con dati che mostrano che la prima implicazione è falsa, mentre la seconda è vera. È improbabile che gli studenti forniscano ragioni molto chiare per la loro conclusione ma piuttosto "sentono" che sia così.

Dallo studio emerge che le ultime due non sono le risposte più frequenti e la maggior parte degli studenti afferma che un'implicazione e la sua inversa sono equivalenti e non verifica tale conclusione. [21]
Questa indagine è proposta a ragazzi di 14 anni ma la difficoltà nel valutare se un'implicazione e la sua inversa hanno lo stesso significato è molto frequente anche in ragazzi di età maggiore. Questo emerge principalmente nei test d'ingresso all'Università. In molti casi, se viene chiesto a livello logico a ragazzi delle scuole superiori se l'implicazione $P \to Q$ ha lo stesso significato dell'inversa $Q \to P$ la risposta è negativa. Ma quando poi si tratta di rispondere a domande nei test di logica, di utilizzare proprietà matematiche o analizzare teoremi, le due implicazioni vengono confuse o, sapendo che l'implicazione diretta è vera, si arriva alla conclusione che anche l'inversa lo è.

Necessità logica

Abbiamo già detto che le espressioni *condizione necessaria* e *condizione sufficiente* non sono altro che modi differenti per esprimere un'implicazione logica. L'implicazione $P \to Q$ significa che P è condizione sufficiente per Q e Q è condizione necessaria per P. Dire che una condizione P è sufficiente per Q significa che la conoscenza di P è sufficiente per concludere Q. Mentre dire che una condizione Q è necessaria per P, significa che affinché P sia soddisfatta, deve essere necessariamente soddisfatta anche Q, cioè che P può essere vera solo nel caso in cui Q è vera. [42]
Nell'affermazione *"se un numero n è naturale, allora è razionale"*, la condizione sufficiente affinché un numero sia razionale è che sia naturale, cioè, il fatto che un numero n sia naturale, è sufficiente per concludere che quel numero è anche razionale. Invece, un numero n non può essere naturale se non è razionale, ovvero il fatto

che un numero sia razionale è una condizione necessaria affinché quel numero sia naturale.
Sicuramente in molti casi, quando gli studenti non riescono a individuare correttamente quale sia la condizione necessaria e quale quella sufficiente, il motivo è che non gli viene spiegata la differenza tra le due locuzioni. Spesso gli insegnanti la danno per scontata, non accorgendosi che una spiegazione rigorosa e con i dovuti tempi è necessaria per una corretta assimilazione. Non si tratta solo di chiarire che è un modo alternativo per indicare un'implicazione logica, ma è opportuno assicurarsi che gli studenti capiscano la differenza concettuale tra i tipi di condizioni.

Vediamo ora quale consapevolezza gli studenti hanno della necessità logica del conseguente di un'implicazione vera. Anche questo aspetto è stato indagato nella ricerca inglese già stata citata. Agli studenti viene chiesto di supporre vera l'affermazione *"se la somma di due numeri interi è pari, allora il loro prodotto è dispari"* e di dire, su tale base, se sia possibile trarre una conclusione sulla somma di due numeri interi il cui prodotto è 1271, o se il valore dei numeri deve essere prima determinato. Le risposte possibili sono le seguenti:

a) Si può essere sicuri che la somma dei due numeri è pari.

b) Si può essere sicuri che la somma dei due numeri è dispari.

c) Non si può essere sicuri né che la somma sia pari né che sia dispari finché non si conoscono i due numeri.

In questo caso non viene fornita una dimostrazione della verità dell'implicazione e non viene nemmeno chiesto agli studenti di verificare se sia effettivamente vera. Si vuole verificare, infatti, la capacità degli studenti di liberarsi dall'empirico e considerare le implicazioni a livello strutturale.
I risultati non sembrano essere così disastrosi e molti studenti hanno operato con successo. Ciò non toglie che spesso questo aspetto sia un ostacolo per molti studenti e comporti un tasso piuttosto elevato di insicurezza e indecisione a riguardo. [21]

Fallacie formali

Gli aspetti operativi dell'implicazione sono principalmente incorporati nelle regole di inferenza, che giocano un ruolo fondamentale nel ragionamento matematico.
Vediamo di seguito il modo in cui gli studenti applicano le regole di deduzione e gli errori di ragionamento più ricorrenti.
Nel Capitolo 2 abbiamo studiato le seguenti due regole di deduzione valide:

- il *modus ponens*: se P *implica* Q è una proposizione vera, e anche la *premessa* P è vera, allora la *conseguenza* Q è vera. In termini logici:

$$\frac{P \to Q \ vera \qquad P \ vera}{Q \ vera}$$

- il *modus tollens*: se P *implica* Q è un enunciato vero, e anche *non* Q è vero, allora si deduce che *non* P è vera. In termini logici:

$$\frac{P \to Q \ \textit{vera} \qquad \neg Q \ \textit{vera}}{\neg P \ \textit{vera}}$$

Spesso succede di trovarsi di fronte a delle argomentazioni in cui viene applicata in modo inadeguato una di queste due regole valide affidandosi a una regola che si può dimostrare essere invalida: in questi casi si parla di *fallacia formale.* In senso più generale, con il termine *fallacia* si intende un errore di ragionamento che mette in dubbio la correttezza della conclusione dell'argomentazione in cui nasce. Spesso, tali argomentazioni risultano ingannevoli, poiché, se viste in maniera superficiale, sembrano presentare tutte le caratteristiche di una buona argomentazione (in latino, *fallere* significa *ingannare*).
Noi, di seguito, analizziamo solo le fallacie formali, ma è bene ricordare che gli errori di ragionamento possono essere anche di altro tipo e coinvolgere diversi aspetti. Inoltre, in alcuni casi, le tecniche formali non aiutano a garantire la validità di un ragionamento e possono dipendere da una molteplicità di criteri, tra cui l'uso del linguaggio (*fallacie semantiche*) oppure quando si presume la verità di ciò che si intende dimostrare (*fallacie di presunzione*).[7]

Le *fallacie formali* più frequenti hanno origine dalla confusione tra le regole valide del *modus ponens* e del *modus tollens*, rispettivamente, e le due seguenti regole di inferenza scorrette:

- l'***affermazione del conseguente***: se P *implica* Q è una proposizione vera, e anche il *conseguente* Q è vero, allora si ricava la conclusione logicamente sbagliata, che l'*antecedente* P è vero. In termini logici: $(P \to Q),\ Q \vdash P$. Per esempio, è piuttosto comune cadere in questo tipo di ragionamento: *"se piove, allora la strada è bagnata. La strada è bagnata, dunque piove".*
- la ***negazione dell'antecedente***: se P *implica* Q è una proposizione vera, e anche *non* P è vera, allora si ricava la conclusione logicamente sbagliata, che *non* Q è vera. In termini logici: $(P \to Q),\ \neg\ P \vdash \neg\ Q$. Vediamo un esempio: *"se sono a Padova allora sono in Veneto. Io non sono a Padova, quindi non sono in Veneto".*

Abbiamo dimostrato formalmente nel Capitolo 2 l'invalidità delle due regole sopra riportate. È possibile evidenziare, anche in modo informale e sicuramente più immediato per il lettore, la scorrettezza dei due ragionamenti, fornendo dei *controesempi* che si concentrano sul contenuto effettivo delle premesse e delle conclusioni. Nel primo esempio, chiaramente la strada può essere bagnata non solo perché ha piovuto, ma anche perché è stata pulita, oppure perché si è sciolta la neve che ne ricopriva una parte. Nel secondo esempio, è banale trovare altre città venete che non siano Padova: la persona infatti, si può trovare a Venezia come a Verona.

Si possono individuare delle cause che giustificano tali errori di ragionamento molto comuni? L'analisi fornisce sicuramente degli elementi che contribuiscono a dare una spiegazione.
In primo luogo l'interpretazione non sempre corretta dell'implicazione inversa, contraria e contronominale è alla base di uno scorretto utilizzo delle regole di deduzione

[7] Per un approfondimento cfr. A. Varzi, *Logica* (Capitolo 8) [39].

corrette.
In secondo luogo, l'errore è riconducibile alla confusione tra *condizione sufficiente* e *condizione necessaria* o, se preferiamo, tra *"se"* e *"solo se"* e quindi, in un certo senso, si può ricondurre al mancato allineamento tra linguaggio naturale e linguaggio logico. [35]

Consideriamo ora un altro esempio più significativo. Sia P la proposizione *"sotto al tavolo c'è un cane"* e Q l'enunciato *"sotto al tavolo c'è un mandarino"*. Molti soggetti, da *"se P allora Q"* e *"non P"* deducono la conseguenza logica *"non Q"*. In questo caso, una spiegazione molto frequente viene data facendo riferimento alla *teoria del bicondizionale*.[8] Secondo tale teoria, l'errore consiste nel fatto che un'implicazione *"se P allora Q"*, viene interpretata come una doppia implicazione, cioè *"P se e solo se Q"*. Con questa spiegazione l'errore nasce solo da una difficoltà nell'interpretazione del testo e non viene in alcun modo messo nel piano logico. Il fatto che nel linguaggio quotidiano un'implicazione sia interpretata come una doppia implicazione è abbastanza comune, come abbiamo visto in precedenza, e, forse, questa spiegazione può essere adottata in alcuni casi specifici, ma ci sono spiegazioni più convincenti riguardo a questa tipologia di errori.

Analizzando il rapporto tra linguaggio naturale e linguaggio logico-matematico abbiamo dato spazio a considerazioni riguardo al ruolo del contesto nell'interpretazione degli enunciati e alla *teoria della cooperazione comunicativa*. Proprio da queste riflessioni si è sviluppata l'ipotesi che i processi di comprensione colloquiali sono all'origine degli errori di ragionamento.
Quindi, l'enunciato *"se sotto al tavolo c'è un cane, allora sotto al tavolo c'è un mandarino"* suggerirebbe l'inferenza *"se sotto al tavolo non c'è un cane, allora sotto al tavolo non c'è un mandarino"*.
Utilizzando le parole di P.L.Ferrari *"le inferenze suggerite possono essere chiamate, con quello che allora era considerato un neologismo, implicature conversazionali. Un'implicatura conversazionale è quella parte di informazione ricavabile da un testo che non deriva dal suo contenuto dichiarativo ma piuttosto dall'ipotesi che il testo sia adeguato al contesto."* [17]
Nella comunicazione tra persone ogni elemento del dialogo è rilevante, quindi, nell'esempio riportato, il fatto che venga citata la presenza del cane sotto al tavolo come condizione per la presenza del mandarino viene ritenuto un fatto importante e quindi, in qualche modo, rende giustificata la deduzione *"se sotto al tavolo non c'è un cane, allora sotto al tavolo non c'è un mandarino."*
Con gli esperimenti proposti dagli autori, la *teoria del bicondizionale* viene meno, in quanto nello studio vengono, ad esempio, aggiunte premesse maggiori e queste, secondo l'ipotesi del bicondizionale, non dovrebbero portare a risultati differenti nelle risposte, cosa che al contrario accade.

[8] Per approfondire tale teoria si consultino Matalon B., *Implication, formalisation, et logique naturelle*, Presses Universitaires, 1962; Peel E.A., "A method for investigating children's understanding of certain logical connectives used in binary proposition thinking", in *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 1967; Taplin et al., "Development changes in conditional reasoning: linguistic or logical?", in *Journal of Experimental Child Psychology*, 1974.

Ad esempio, si considerino le seguenti tre premesse:

1. *"Se sotto al tavolo c'è un cane, allora sotto al tavolo c'è un mandarino"*
2. *"Se sotto al tavolo c'è una gatta, allora sotto al tavolo c'è una mela"*
3. *"Se sotto al tavolo c'è un uccellino, allora sotto al tavolo c'è un mandarino"*

Il fatto che *"sotto al tavolo non c'è un cane"*, nel ragionamento comune, non porterebbe più così frequentemente alla conclusione *"sotto al tavolo non c'è un mandarino"* in quanto la premessa 3 disinnescherebbe il suggerimento implicito nella condizione *"sotto al tavolo c'è un cane"*.

Quello che emerge è una conferma ulteriore del fatto che l'arbitrarietà dei legami tra le proposizioni antecedente e conseguente è un elemento che condiziona notevolmente l'interpretazione di enunciati contenenti implicazioni logiche e di conseguenza i ragionamenti condizionali. I condizionali esaminati rappresentano comunque relazioni arbitrarie e ingiustificate fra enunciati, mentre nella vita quotidiana i condizionali si usano per esprimere connessioni semantiche, cioè relazioni tra i concetti. [17, 34]

Concludiamo questo paragrafo citando il famoso *test di Wason*[9], attraverso il quale si è studiato quest'ultimo aspetto. Il test delle carte di Wason (1966) mette, infatti, in evidenza come il ragionamento sia fortemente ancorato ai contenuti, e, quindi, al contesto cui fa riferimento il problema. Il test procede nel seguente modo: a dei soggetti vengono mostrate su un tavolo quattro carte, ognuna delle quali ha un numero su una faccia e una lettera sull'altra. Le facce visibili delle carte mostrano, ad esempio, *3*, *8*, *E* e *F* e ai soggetti viene chiesto quale carta o carte si devono girare per verificare la verità della proposizione *"se su una faccia c'è una vocale, allora sull'altra c'è un numero pari"*. Il problema può essere risolto scegliendo le carte usando le regole di deduzione del *modus ponens*, girando tutte le carte che riportano una vocale per assicurarsi che sulla faccia opposta ci sia un numero pari, e del *modus tollens*, girando tutte le carte dispari (non pari), per controllare che la faccia opposta non abbia una vocale.
Il risultato è eclatante: meno del 10% dei soggetti risponde correttamente al problema. Tuttavia, studi successivi dimostrano che il numero delle risposte corrette aumenta notevolmente quando il problema è posto in un contesto in cui la regola diventa significativa e socialmente accettata. Ad esempio, se il contesto è il seguente: ogni carta ha su un lato un'età e sull'altro l'immagine di una bevanda e le carte visibili sul tavolo sono *16*, *25*, *bere birra* e *bere soda*. In questo caso alle persone viene chiesto di dire quale carta o carte si devono girare per verificare la regola *"se bevi alcolici, allora devi avere più di 18 anni"* e la maggior parte non ha difficoltà a selezionare le carte corrette, ovvero le carte con il numero *16* e l'immagine della *birra*. L'esperimento di Wason è stato molto discusso in ambito psicologico ma conferma quanto i contenuti delle proposizioni, il legame tra antecedente e conseguente e il contesto influenzino pesantemente l'interpretazione dei condizionali. [12]

[9] Per un approfondimento sul test e alcune ricerche successive si consulti Cosmides L. e Tooby J., *Evolutionary psychology: A Primer*, 1992. Per un'analisi dal punto di vista delle neuroscienze si veda Houdé et al., "Shifting from the perceptual brain to the logical brain: the neural impact of cognitive inhibition training", in *Journal of Cognitive Neuroscience*, 2000.

3.4 Riflessioni per una didattica efficace

In questo paragrafo proponiamo alcuni spunti di riflessione dal punto di vista didattico per rispondere ad una delle domande più delicate riguardo all'insegnamento della logica nella scuola dell'obbligo: *come insegnare questa disciplina?*
Il rischio che la logica sia insegnata male è abbastanza alto, per diversi motivi. In primo luogo, l'insegnamento della logica presenta una difficoltà didattica specifica: l'inquadramento teorico ha una rilevanza indiscutibile, ma non è facile affiancarlo con esercizi e problemi adeguati. In secondo luogo, la logica attualmente è considerata, come abbiamo visto, una disciplina trasversale e, inserita in modo non sufficientemente esplicito nei percorsi didattici, molto spesso è più difficile per gli studenti ma anche per gli insegnanti. Gli insegnanti, inoltre, non sempre hanno una formazione adeguata. Un caso emblematico è la presentazione corretta del connettivo di implicazione, che richiede da parte dell'insegnante una piena capacità di confrontare il linguaggio formalizzato della logica con il discorso naturale, motivando tutte le discrepanze che si trovano e facendole accettare in ciò che hanno di apparentemente paradossale. [42]
Per un buon insegnamento ci vuole una linea didattica efficace, coerente e sperimentata. Ciò significa che bisogna evitare, come in altri campi della matematica - si pensi, ad esempio, alla teoria degli insiemi - sia una eccessiva astrazione e una formalizzazione esasperata, che i ragazzi non sanno apprezzare, sia una didattica statica, definitoria e poco significativa, sia un approccio totalizzante e sistematico. Introducendo in questa maniera alcuni elementi di logica, il rischio è di ottenere un effetto controproducente ostacolando l'apprendimento invece che migliorarlo e di consolidare negli studenti l'immagine diffusa e negativa della matematica come disciplina di studio. Una scarsa attenzione alla motivazione dei ragazzi all'apprendimento e una limitata operatività possono dare l'impressione di voler rendere più difficili i concetti. [3]
Ma tutto questo non significa che non si debba fare logica a scuola. Di seguito elenchiamo brevemente quali argomenti si possono trattare nella scuola del primo e del secondo ciclo e poi proponiamo alcune considerazioni didattiche relative alla logica proposizionale, con particolare attenzione al connettivo di implicazione logica.

Quale logica a scuola

A livello di scuola primaria e secondaria di I grado, può essere efficace puntare su una logica "implicita", che interessi tutta la matematica, ma anche le scienze sperimentali e l'educazione linguistica, piuttosto che presentare una trattazione sistematica dell'argomento, con l'introduzione prematura di un simbolismo astratto e pesante.

Anche nella scuola secondaria di II grado, la formalizzazione dei concetti dovrebbe aver luogo in modo graduale e in contesti significativi. Sarebbe comunque opportuno iniziare ad introdurre nel primo biennio la logica proposizionale perché la sua struttura algebrica e il suo carattere finitistico la rendono più facilmente dominabile; e l'approfondimento dei procedimenti deduttivi e induttivi: assiomi e definizioni, regole d'inferenza, dimostrazioni, principio d'induzione. Può sembrare strano inizia-

re con la logica proposizionale, che storicamente viene scoperta in epoca classica e poi riscoperta in età medievale, dopo la logica dei predicati, in particolare la logica sillogistica. Ma non è una novità che in matematica molto spesso le nozioni più semplici vengano scoperte per ultime.
Un altro grande argomento da affrontare è la logica predicativa, con la manipolazione dei quantificatori in contesti infiniti, che si collega ad elementi della teoria intuitiva degli insiemi. I problemi dell'infinito hanno una tale rilevanza culturale che vale la pena affrontarli in un percorso scolastico. Nel primo biennio gli elementi di logica, a causa dell'immaturità degli studenti, non possono che restare ad un livello iniziale. [33] Questi approfondimenti dovrebbero poi essere ripresi ogni volta che se ne riveli l'opportunità lungo l'arco dell'intero triennio, raggiungendo anche mete interessanti, specialmente verso la conclusione, come ad esempio la nozione di sistema formale e di modello, le nozioni di calcolabilità e di decidibilità, coerenza, indipendenza e completezza di un sistema.

Logica e competenze linguistiche

La matematica fornisce un apporto essenziale alla formazione delle competenze linguistiche, attraverso la ricerca costante di chiarezza, concisione, proprietà di linguaggio e anche confronto tra linguaggio comune e linguaggio formale. Ma se da un lato la matematica e, in particolar modo, la logica, possono essere viste come controllo del pensiero e del linguaggio, dall'altro, l'educazione linguistica ha un ruolo importante nella formazione logica.

Da un punto di vista didattico un buon metodo per introdurre concetti di logica è affiancarli ad esempi e spiegazioni proprie della lingua naturale. Infatti, ogni nozione introdotta deve essere giustificata e, partendo dal linguaggio naturale, si riesce a dare un significato agli elementi logici. In primo luogo, per una formazione logica dell'individuo è fondamentale imparare a distinguere tra soggetto e oggetto, causa e effetto, tra scopo e mezzo e tante altre sottigliezze sintattiche. È opportuno dedicare del tempo all'affinamento della sensibilità verso la logica ponendo una adeguata attenzione all'uso appropriato dei vocaboli, alla capacità di cogliere sfumature linguistiche, alla decodificazione in contesti diversi del medesimo significante, al riconoscimento di analogie formali e/o strutturali e alla distinzione tra linguaggi e metalinguaggi, argomentazioni e metargomentazioni. In questo modo si realizza la trasversalità della logica rispetto alle discipline, in quanto questa operazione richiede l'intervento e le competenze di più docenti Nella scuola superiore, dove i ragazzi dovrebbero già essere pienamente in grado di lavorare su tali aspetti, è opportuno che venga introdotta anche qualche osservazione tecnica in più, ad esempio si dovrebbe far notare esplicitamente il ruolo specifico che alcune parole svolgono nel nostro discorso, come *tutti, nessuno, qualche, non, se, allora, dunque* e dedicare spazio all'analisi logica di enunciati del linguaggio naturale e di argomentazioni costruite con essi. [35]
Tutti questi aspetti diventano fondamentali nella logica proposizionale e predicativa e, in particolare, nella presentazione del connettivo di implicazione che, come abbia-

mo visto, dal punto di vista del linguaggio naturale mostra diverse incongruenze e ambiguità. È importante non dare per scontato l'utilizzo del connettivo in lingua ma insistere anche sul suo significato per renderlo univoco, presentando anche numerosi esempi tratti dal linguaggio comune. Ovviamente la questione è delicata: esempi di questo tipo sono utili e forse fondamentali per farsi comprendere e rendere consapevoli gli studenti dei vari modi con cui nella lingua italiana può essere tradotto il connettivo di implicazione, ma presentano una maggiore incertezza riguardo al valore di verità che si può attribuire alle proposizioni, in quanto entrano in gioco diversi fattori - ad esempio, il contesto e la soggettività di chi interpreta le frasi - e va quindi usata una certa prudenza. Va detto che un buon insegnante della scuola superiore nel momento in cui mette in luce tutti questi aspetti ed insegna a prestare attenzione ai "fatti linguistici" sta insegnando logica, ma non è così facile all'interno della scuola trovare docenti che hanno questa sensibilità.

Per una buona acquisizione dei concetti logico-matematici il passaggio sul piano linguistico è fondamentale e quando questi aspetti vengono dati per scontati, molto spesso quello che emerge è una forte carenza di strumenti linguistici, soprattutto quando si devono affrontare situazioni problematiche attraverso il ragionamento ipotetico-deduttivo, dove il linguaggio si presenta come un indispensabile organizzatore del pensiero. Tuttavia, nonostante l'importanza della componente linguistica anche in contesti matematici, e, più in generale scientifici, nei libri scolastici non è facile trovare l'adeguata attenzione alle spiegazioni o la presenza di esemplificazioni di utilizzo dei tempi verbali o di espressioni linguistiche in campo scientifico. E, in parte, questa scelta spiega le semplificazioni che spesso si trovano nei testi scolastici. Riportiamo un esempio che si trova in un manuale di grammatica per le scuole superiori e riportato in [3]: *"Che cosa significa rapporto ipotetico? Significa che l'evento espresso dalla principale si verifica soltanto a patto che, a condizione che, nell'ipotesi che, si verifichi prima e realmente quello espresso dalla dipendente".* C'è in questo modo di presentare il rapporto ipotetico non solo banalmente la riduzione dell'implicazione alla doppia implicazione, ma anche la mancanza di ogni riferimento ad un contesto di tipo scientifico. In questo modo si accentua la separazione tra le discipline mentre se si puntasse, invece, ad evidenziare gli aspetti logici nello studio della lingua, la logica potrebbe svolgere un importante ruolo di raccordo tra le discipline.

I connettivi e la teoria degli insiemi

Molto spesso si fa riferimento al rapporto tra i connettivi della logica proposizionale e le operazioni della teoria degli insiemi, in particolare si parla spesso della relazione tra *negazione - complementazione*, *congiunzione - intersezione* e *disgiunzione - unione*. Questa corrispondenza tra logica e insiemi è utile in vari contesti, ad esempio nel campo della probabilità[10], ma conduce anche in modo naturale e quasi inevitabile, ad una precisa definizione dei connettivi logici, in corrispondenza alle operazioni sopra citate.

[10] Per un approfondimento cfr. V. Villani et al., *Non solo calcoli* (Capitolo 25) [42].

Va sottolineato che non è in questa direzione che si realizzano realmente le grandi potenzialità della logica matematica nell'ambito della didattica della matematica. Tuttavia, la tanto discussa "insiemistica" può tornare utile perché fornisce occasioni naturali per esercitare le leggi logiche e parlando di insiemi e sottoinsiemi, di unione e intersezione, di appartenenza e non, certi esercizi e concetti diventano più chiari, riducendo il rischio di confusione. Inoltre, attraverso la rappresentazione insiemistica, si può provare a figurare il significato dei connettivi logici che, altrimenti, possono risultare troppo astratti. [20, 35]

La corrispondenza tra connettivi e operazioni insiemistiche, per essere rigorosa, richiederebbe sicuramente delle precisazioni ulteriori, che non rientrano nel nostro campo di indagine. Ci limiteremo, quindi, a proporre una spiegazione piuttosto semplice ed intuitiva del rapporto tra l'implicazione logica e gli insiemi che potrebbe aiutare gli studenti ad una migliore acquisizione della nozione di implicazione e delle sue proprietà. Non è così immediato associare al connettivo di implicazione un'operazione insiemistica, come invece avviene per la negazione, congiunzione e disgiunzione. Da un punto di vista insiemistico l'implicazione $P \to Q$ corrisponde alla zona colorata in *Figura 3.1*. Infatti, $P \to Q$ è equivalente a $\neg P \lor Q$ e quindi corrisponde all'insieme complementare di P unito all'insieme di Q. Il connettivo di implicazione è, inoltre, collegato all'*inclusione tra insiemi*, ma dal momento che l'implicazione è un connettivo, da un punto di vista insiemistico deve rappresentare un'operazione e quindi corrispondere ad un'insieme, mentre l'inclusione tra insiemi rappresenta una *relazione* e non restituisce un insieme. Abbiamo quindi una corrispondenza tra *connettivi - operazioni tra insiemi* e *proposizioni - sottoinsiemi*. Se invece consideriamo un'*asserzione*, ovvero un enunciato il cui contenuto è vero, allora possiamo parlare di una corrispondenza tra *asserzioni - relazioni tra insiemi*. In questi termini, se consideriamo un'asserzione costituita da un'enunciato condizionale, possiamo dire che è collegato all'inclusione tra insiemi, ovvero può descrivere una situazione che conduce a un insieme contenuto in un altro. In altre parole, il fatto che $P \to Q$ sia una proposizione vera, corrisponde all'inclusione $P \subseteq Q$. Vediamolo con un esempio, descritto dalla *Figura 3.2*.

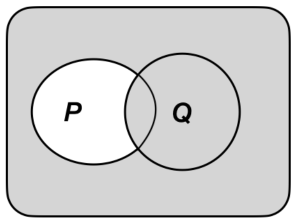


Figura 3.1: Il connettivo di implicazione e gli insiemi.

Sia E l'insieme dei triangoli equilateri e I quello dei triangoli isosceli. Allora l'insieme E è contenuto nell'insieme I e si scrive $E \subseteq I$. La situazione può essere descritta dalla seguente asserzione: *"se un triangolo appartiene all'insieme E, allora appartiene anche all'insieme I"*. Usando il connettivo di implicazione e il simbolo "$\in$" al posto del verbo "appartiene", l'ultima frase può essere sintetizzata dalla seguente formula: *poligono* $\in E \to$ *poligono* $\in I$ che traduce l'implicazione vera *"se un triangolo è equilatero, allora è certamente isoscele"*.

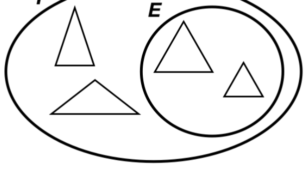


Figura 3.2: "Se un triangolo è equilatero, allora è isoscele."

La rappresentazione insiemistica permette anche di chiarire facilmente il valore di verità dell'implicazione inversa, contraria e contronominale, supponendo *vera* l'implicazione diretta. Infatti, sempre osservando la *Figura 3.2*, si vede che le proposizioni *"se un triangolo è isoscele, allora è equilatero"* (implicazione inversa) e *"se un triangolo non è equilatero, allora non è isoscele"* (implicazione contraria) non possono essere vere ed equivalenti all'implicazione diretta, mentre la proposizione contronominale *"se un triangolo non è isoscele, allora non è equilatero"* è certamente vera, perché se un triangolo non appartiene all'insieme I sicuramente non può appartenere all'insieme E.

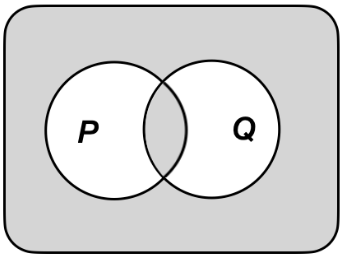


Figura 3.3: Il connettivo di doppia implicazione e gli insiemi.

In ultimo, il linguaggio degli insiemi, permette di distinguere senza ombra di dubbio l'implicazione dalla doppia implicazione. La doppia implicazione corrisponde all'insieme costituito dalla zona colorata in *Figura 3.3*, ovvero all'intersezione dell'insieme che corrisponde a $P \to Q$ e a quello che corrisponde a $Q \to P$. Con queste rappresentazioni è immediato capire che implicazione e doppia implicazione restano ben distinti concettualmente, in quanto fanno riferimento a due operazioni insiemistiche differenti. Quando poi consideriamo un'asserzione costituita da una doppia implicazione, come ad esempio, *"un triangolo è equilatero se e solo se è equiangolo"*, allora stiamo dicendo che l'insieme E dei triangoli equilateri e l'insieme F dei triangoli equiangoli *coincidono*.

Le tavole di verità

In ambito didattico, le ben note *tavole di verità* hanno sollevato molteplici discussioni. Si tratta delle tabelle usate in logica per determinare se, attribuiti i valori di verità alle proposizioni che la compongono, una determinata proposizione è vera o falsa. Didatticamente è opportuno fare due riflessioni riguardo a questo strumento: innanzitutto si tratta di individuare come e quando introdurre la tavola di verità dei connettivi, in particolar modo quella dell'implicazione logica che è decisamente poco convincente ed intuitiva; in secondo luogo bisogna prestare molta attenzione agli esercizi più adatti da proporre in classe.

Nella maggior parte dei casi i connettivi vengono introdotti tramite una sorta di definizione operativa attraverso le tavole di verità, invece che insistere sul loro significato per renderlo univoco in lingua. Un approccio di questo tipo non è molto vantaggioso, soprattutto per il connettivo di implicazione che presenta la seguente tavola di verità poco intuitiva.

P	Q	P $\to$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Una presentazione di questo tipo può risultare adatta a ragazzi più inclini a ragionamenti astratti e formalizzati ma può essere controproducente per gli altri. In un percorso scolastico, le tavole di verità possono essere un punto d'arrivo anziché di partenza e uno studente opportunamente guidato può costruirle da solo. [11]

Nel caso specifico del connettivo di implicazione si possono utilizzare presentazioni più intuitive per spiegare il valore di verità assunto dall'implicazione, una volta attribuiti i valori di verità alle proposizioni che la compongono. In particolare, restando più ancorati all'utilizzo dei condizionali nel linguaggio quotidiano, si possono utilizzare i seguenti due esempi:

1. Si consideri la proposizione *"se farai la brava, ti darò un premio"*, pronunciata da una madre alla figlia. Ci si può porre la seguente domanda: *"quando la promessa della mamma viene mantenuta?"*. Si possono considerare le seguenti possibilità:

   - la figlia fa la brava (antecedente vero) e la mamma le dà il premio (conseguente vero): si può dire che la promessa è stata mantenuta, cioè che l'implicazione è *vera*;

   - la figlia fa la brava (antecedente vero) ma la mamma non le dà il premio (conseguente falso): la promessa non è stata mantenuta e l'implicazione è *falsa*;

   - la figlia non fa la brava (antecedente falso), la mamma non è più legata alla promessa fatta, quindi sia che decida di darle lo stesso il premio (conseguente vero), sia che decida di non darglielo (conseguente falso), la promessa è stata ugualmente mantenuta e l'implicazione è *vera*.

2. Si consideri la proposizione *"se studi matematica, supererai la prossima verifica"*, detta ad uno studente da un professore. Anche in questo caso ci si può porre una domanda, *"in quale situazione lo studente può lamentarsi?"*:

   - lo studente studia matematica (antecedente vero) e supera la verifica (conseguente vero): in questa situazione lo studente non ha nulla in contrario e l'implicazione è *vera*;

   - lo studente studia matematica (antecedente vero) ma non supera la verifica (conseguente falso): lo studente può lamentarsi nei confronti di quanto affermato dal professore e l'implicazione è *falsa*;

   - lo studente non studia matematica (antecedente falso) ma supera comunque la verifica (conseguente vero): lo studente non si lamenterà di aver passato la verifica e nessun altro, compresi i compagni di classe, potrà lamentarsi in questa situazione e l'implicazione è *vera*;

   - lo studente non studia matematica (antecedente falso) e non supera la verifica (conseguente falso): anche se non soddisfatto del risultato ottenuto lo studente non si lamenterà in quanto non aveva studiato e l'implicazione è *vera*.

Gli esempi possono essere definiti stratagemmi didattici per presentare in modo significativo il valore di verità di un'implicazione. In particolare, il primo esempio viene proposto nell'esperienza didattica analizzata nel Capitolo 4.

Per una presentazione più operativa, dopo aver già fornito alcune nozioni sui connettivi e sulle regole deduttive, si può far ragionare gli studenti e guidarli nella costruzione della tavola di verità. L'implicazione logica deve rispettare i seguenti requisiti:

- Consentire il ragionamento deduttivo: se P e $P \rightarrow Q$ sono entrambi veri, allora anche Q deve essere vero.
- Prevenire ragionamenti errati: se P è vera ma Q è falsa, allora anche $P \rightarrow Q$ deve essere falsa.
- Ragionamento per contrapposizione: $P \rightarrow Q$ e $\neg Q \rightarrow \neg P$ devono avere la stessa tavola di verità.
- Prevenire ragionamenti errati per inverso: $P \rightarrow Q$ e $Q \rightarrow P$ devono avere tavole di verità diverse.

Poiché, questi quattro vincoli devono essere rispettati, si arriva alla conclusione che esiste una sola tabella di verità a due valori per l'implicazione logica. In particolare le ultime due regole insieme restringono ad una sola possibilità i valori di $P \rightarrow Q$ nel caso in cui P sia falsa. [31]

Il metodo presentato per proporre la tavola di verità dell'implicazione logica, consente di rendere gli studenti consapevoli del valore delle tavole stesse, senza dare loro una definizione iniziale che risulta essere fine a se stessa e che molto spesso essi imparano a memoria senza comprenderne davvero il significato. In alternativa, nelle scuole, si può fare a meno delle tavole di verità, che a parte in esercizi ripetitivi, non sono utili in altri contesti, come nelle argomentazioni logiche che si propongono in classe e nemmeno nelle dimostrazioni nei testi matematici.

Per quanto riguarda gli esercizi proposti nella scuola superiore, da quando qualche insegnante ha iniziato ad introdurre delle nozioni di logica, gli esercizi più diffusi riguardano le tavole di verità e le tautologie. Non risulta però molto efficace insistere su esercizi che si riducono alla costruzione di queste tabelle: possono essere utili per familiarizzare con i connettivi e con l'idea di calcolo logico ma sono piuttosto meccanici e non hanno molto a che fare con il ragionamento matematico. Una volta vista questa tipologia di esercizi, vale la pena proporre altri problemi più significativi che alla fine portino a "qualcosa", a un risultato o ad una conclusione. Ad esempio gli esercizi sull'*isola di Smullyan*, che riprenderemo nel seguito del nostro lavoro, o esercizi che si rifanno al *Test di Wason*.[11]

[11] Alcuni esempi di problemi significativi da proporre in classe si possono trovare in [5] e in [42].

Ambienti logici

Per approfondire ed esplicitare con maggior precisione la logica matematica, in particolare il calcolo proposizionale e dei predicati, e, nel nostro caso specifico, per approfondire il concetto di implicazione, è opportuno lavorare in quelli che possiamo definire *ambienti logici*, cioè in contesti di apprendimento ben definiti. Questo è fondamentale, da un punto di vista didattico, per ridurre al minimo le interferenze della lingua naturale che abbiamo analizzato nella *Sezione 3.2* e lavorare in situazioni che permettono di regolare le ambiguità e i conflitti che si vengono inevitabilmente a creare tra i modelli intuitivi mutuati dal linguaggio naturale e quelli formalizzati. Non è facile creare contesti che vadano in questa direzione e il campo di problemi significativi è abbastanza limitato. Di seguito proponiamo degli esempi.

Una prima possibilità è proporre situazioni problematiche fantastiche o paradossali, nelle quali si può avere il rigore logico e, allo stesso tempo, divertire e stimolare gli studenti, che in genere gradiscono questo tipo di attività. Un esempio famoso è dato dall'*isola di Smullyan*, abitata da cavalieri e furfanti, che non sono distinguibili dall'aspetto, i primi che dicono sempre la verità, i secondi che mentono sempre. Questi indovinelli si trovano, per esempio, nel libro *Qual è il titolo di questo libro?* del matematico statunitense Raymon Smullyan (1919-2017), che oltre a numerose pubblicazioni scientifiche, è autore di molti libri di matematica e logica ricreativa. Assumendo l'isola di Smullyan come situazione problematica si può chiarire il significato dei vari connettivi e le regole di deduzione ad essi legate.
Altri esempi di questo tipo si possono trovare in molto lavori di Lewis Carroll (1832 - 1898), che oltre ad essere un grade scrittore e poeta, è stato anche un logico e matematico. Testi molto interessanti dell'autore sono il famoso romanzo *Le avventure di Alice nel paese delle meraviglie* e il seguito *Attraverso lo specchio e quel che Alice vi trovò*. Nel mondo fantastico di Alice, dove l'autore si diverte a giocare con la logica e con la lingua, si trovano molte situazioni paradossali che permettono di condurre i ragazzi ad affrontare il ragionamento ipotetico-deduttivo e a scoprire i significati logici dei connettivi.
In questi ambienti logici ben definiti, anche se immaginari, si possono evitare errori che nascono da un uso incontrollato del linguaggio naturale e la logica può essere utilizzata come strumento per scoprire, chiarire e sistemare i modelli intuitivi degli studenti. Infine, questi esercizi permettono di motivare lo studio delle tavole di verità dei connettivi logici e, in un successivo livello, di introdurre i quantificatori e riflettere sulle leggi di De Morgan. [2, 5]

Una seconda area, oggi particolarmente stimolante e attuale, dove si trovano ambienti logici significativi, è l'informatica. Il rapporto che esiste tra logica e informatica è ben noto e la maggior parte delle interazioni serie e non banali tra queste due discipline avvengono oggi soprattutto in aree come la programmazione logica, la programmazione funzionale, la verifica dei programmi e la sintesi dei programmi. Si tratta di campi che coinvolgono conoscenze logiche relativamente avanzate e assolutamente al di sopra di quelle che si può ragionevolmente pensare di introdurre nella scuola secondaria di II grado. Ma questo non significa che l'informatica non sia un'ottima occasione per inserire elementi di logica nella scuola. In primo luogo, lo studio scolastico dell'informatica e dei linguaggi di programmazione, anche a livello base, permettono di avvicinare gli studenti ad attività molto simili a quelle della logica matematica, come l'utilizzo di un linguaggio formale, il concetto di interpretazione di un linguaggio o la manipolazione del linguaggio tramite regole simili alle regole di inferenza. Oltre ad avvicinare ad una mentalità tipicamente logica, l'informatica può dare significato e concretezza alle nozioni di logica che per la loro astrattezza potrebbero non essere recepite dagli studenti in modo adeguato. Si pensi, ad esempio, alla costruzione di un archivio dati e all'elaborazione statistica che si può compiere. Nel manipolare le unità informative s'introducono infatti alcuni aspetti di logica degli attributi e si possono far operare correttamente i connettivi. [6, 20]

Deduzione e implicazione

Nel Capitolo 2 abbiamo analizzato le differenze strutturali tra le nozioni di deduzione e implicazione. Anche da un punto di vista didattico è fondamentale prestare attenzione alla distinzione tra le due espressioni *"da P si deduce Q"* e *"se P allora Q"*, che molto spesso nel parlare quotidiano vengono considerate intercambiabili e talvolta, per questo motivo, anche nei testi scolastici sono inserite in modo inopportuno. In un certo senso si torna alla questione del linguaggio naturale: i due verbi *dedurre* e *implicare*, nella lingua italiana vengono utilizzati quasi come sinonimi, mentre a livello logico hanno un diverso significato, in quanto traducono una stessa idea intuitiva ma a due livelli linguistici differenti, metalinguistico e linguistico, rispettivamente. Infatti, *"da P si deduce Q"* non è un enunciato, come nel caso di *"se P allora Q"*, ma significa che, se si ammette P come ipotesi, quindi si assume la proposizione P vera, è possibile dimostrare Q con metodi di deduzione corretti, cioè che permettono di passare sempre da enunciati veri a conclusioni vere. Nel caso dell'implicazione, come è ben noto, non si tratta di una deduzione, ma di un connettivo, un'operazione, e l'enunciato *"se P allora Q"* non dice nulla riguardo alla verità di Q e tanto meno alla dimostrabilità di Q a partire da P.

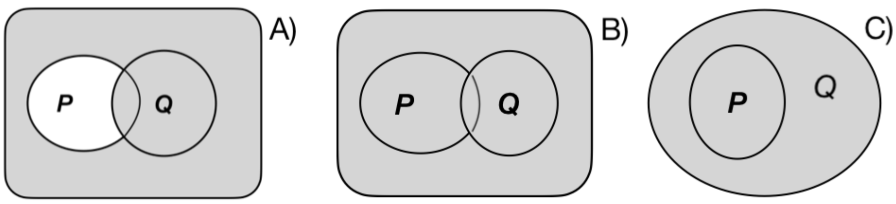


Figura 3.4: Implicazione, deduzione e insiemi.

Per chiarire meglio, vediamo il rapporto tra *deduzione* e *implicazione* con la teoria degli insiemi. Abbiamo detto che il connettivo di implicazione rappresenta l'insieme complementare di P unito all'insieme di Q (*Figura 3.4A*). Quando diciamo che *"da P si deduce Q"* oppure che *"Q è una conseguenza logica di P"* significa che $P \to Q$ è un'asserzione, ovvero una proposizione vera. Da un punto di vista insiemistico, quando $P \to Q$ è vera, significa che si deve considerare anche l'insieme P, ovvero non deve esserci una zona di P fuori da Q (*Figura 3.4B*) e questo succede esattamente quando P è contenuto in Q, ovvero $P \subseteq Q$ (*Figura 3.4C*). Quindi, l'implicazione $P \to Q$ corrisponde all'insieme in *Figura 3.4A*, mentre il fatto che *"da P si deduce Q"* corrisponde all'inclusione tra insiemi.

È evidente che ci sia un profondo legame tra le due nozioni che, in parte, ne giustifica la confusione: si pensi alla regola deduttiva del *modus ponens*, se P e $P \to Q$ valgono è corretto dedurre Q, o al *teorema di deduzione*, visto nel Capitolo 2. Per fare un paragone in un altro ambito della matematica, che si legge in [18], la differenza tra deduzione e implicazione è simile a quella tra integrale definito e integrale indefinito: sono concetti completamente diversi che sono collegati tra loro dal teorema fondamentale dell'analisi.

In ogni caso deduzione e implicazione restano due nozioni diverse ed è importante evidenziarlo anche agli studenti. Se non si presta la dovuta attenzione a spiegare in classe la diversità tra deduzione e implicazione, il rischio è che gli studenti restino confusi ed è giustificata la loro perplessità riguardo al comportamento del connettivo di implicazione, soprattutto nel caso in cui la proposizione antecedente è falsa. Nel proporre, quindi, enunciati con tale struttura, ad esempio "*se* $3 = 2$*, allora Roma è la capitale dell'Italia*" oppure "*se il gatto Fufi ha le ali, allora 7 è maggiore di* 1", la reazione degli studenti sarà quella di dichiarare le frasi senza senso in quanto non riescono ad individuare dei passaggi logici che permettono di passare dalla proposizione antecedente a quella conseguente, e non sanno valutare se la proposizione sia vera o falsa. [11, 18]

È fondamentale, quindi, nell'insegnamento, dedicare il tempo opportuno a chiarire questa differenza sostanziale tra la deduzione e l'implicazione, presentando esempi e introducendo il connettivo di implicazione non solo collegato al *"se...allora..."* ma anche ad altre espressioni del linguaggio comune, che non sono riconducibili alla nozione di deduzione, come ad esempio l'espressione *"ogni volta che si verifica P, allora si verifica anche Q"* che descrive quanto avviene effettivamente nella struttura.

La logica nella matematica

Concludiamo con una riflessione di carattere generale: non si fa della logica solo quando ci si occupa direttamente delle proposizioni, dei predicati, dei connettivi come oggetto di studio, ma anche quando si fa operare la logica come strumento in ambiti della matematica da essa diversi, come l'algebra, la combinatoria o la geometria. Didatticamente, per rendere la logica più significativa, può essere vantaggioso proporre dei chiarimenti e degli approfondimenti di carattere logico nella trattazione di argomenti matematici. Facendo matematica si usano di continuo, in modo più o meno cosciente, strumenti e concetti logici e l'organizzazione di argomentazioni e ragionamenti matematici costituisce una base essenziale per l'approccio alla logica. Molti problemi matematici possono fornire occasioni significative per sviluppare semplici dimostrazioni, chiarire il ruolo dell'ipotesi e della tesi, apprezzare il ragionamento ipotetico-deduttivo. Integrare elementi di logica in un determinato percorso matematico può essere di valido aiuto proprio nella fase di costruzione dell'esperien-

za matematica dello studente.
Questo non significa che si debba fare solo “logica nella matematica”, ma si possono introdurre vari aspetti logici in questo modo coinvolgendo soprattutto le abilità cognitive degli studenti e, successivamente, quando i ragazzi hanno una maturità adeguata per apprezzare alcuni aspetti della logica matematica, quali la formalizzazione, l'organizzazione e lo studio esplicito dei metodi argomentativi matematici, dedicare del tempo a momenti di riflessione e riorganizzazione delle conoscenze acquisite. [2, 43]

Vediamo un esempio che va al di fuori della logica proposizionale. Il mondo delle espressioni algebriche e delle equazioni può essere riorganizzato utilizzando i diagrammi di flusso e giungendo a scoprire le regole con cui è manipolato il calcolo equazionale. Equazioni, identità, equazioni parametriche si configurano in una veste significativa, cioè come formule matematiche contenenti dei quantificatori nascosti. Risolvere un'equazione significa verificare se un enunciato esistenziale è vero, introdurre parametri nelle equazioni vuol dire passare a formule più complesse, con un quantificatore universale seguito da uno esistenziale.

Per quanto riguarda nello specifico l'implicazione logica, i problemi di geometria euclidea si rivelano un ottimo campo per esercitarsi sul significato strutturale del connettivo, analizzando enunciati, ragionando su proprietà geometriche ed utilizzando le regole di deduzione nelle dimostrazioni. Quindi, nelle spiegazioni ed esercitazioni in ambito geometrico, per esempio, ci si può soffermare su tali aspetti, anche senza aver dato la definizione formale di implicazione logica o di regola di deduzione con i rispettivi schemi di ragionamento, o aver presentato le proprietà del connettivo, preparando naturalmente il terreno alla trattazione più formale di questi argomenti di logica matematica. [11]

Si deve osservare che uno dei metodi più naturali per lavorare in classe in questo modo è di dare molto spazio all'interazione tra studenti e tra studenti e docente. Fare logica significa anche dare un'immagine diversa della matematica, come una disciplina nella quale non solo si fanno calcoli ma dove si ragiona, si discute, si argomenta.

Capitolo 4

Unità didattica per la scuola secondaria di secondo grado

In questo Capitolo viene proposto un possibile percorso didattico interdisciplinare di logica per la scuola secondaria di secondo grado. Nello specifico, il progetto mira a potenziare la capacità di utilizzo consapevole dell'implicazione logica in contesto matematico e, più in generale, argomentativo. Vengono affrontate le proprietà più importanti riguardo all'implicazione, con riferimenti anche al contesto linguistico, e le regole del ragionamento deduttivo. Nel Capitolo, dopo una prima presentazione generale, vengono analizzati nel dettaglio tutti gli interventi svolti in classe. In particolare, per ogni incontro vengono descritti la struttura, gli obiettivi, le strategie didattiche e metodologiche utilizzate e l'implementazione e svolgimento in classe. Durante il percorso didattico vengono utilizzate delle presentazioni di supporto o delle schede di lavoro, che si possono consultare in Appendice A.

4.1 Presentazione iniziale

La classe

La sperimentazione didattica sull'implicazione logica è stata effettuata in una classe terza di liceo scientifico opzione Scienze Applicate (3APA) dell'Istituto di Istruzione Lorenzo Guetti, di Tione di Trento. La classe è composta da soli 9 studenti, di cui 4 ragazzi e 5 ragazze. Il numero ristretto di alunni è stato fondamentale per poter lavorare adeguatamente sui concetti introdotti e ha permesso di dedicare molto tempo alle domande e ai chiarimenti richiesti dagli studenti.

Va sottolineato che tale progetto risulta particolarmente adatto ai licei scientifici e classici, ma è stato ideato per essere svolto in qualsiasi indirizzo scolastico ed eventualmente anche in un biennio, con opportune modifiche sui tempi di svolgimento e sul livello di approfondimento dei contenuti presentati adattandoli alla classe.

Obiettivi dell'unità didattica

L'unità didattica ha come scopo principale quello di potenziare la capacità di utilizzo consapevole dell'implicazione logica e delle forme di ragionamento corretto del *modus ponens* e *modus tollens* in contesto matematico e, più in generale, argomentativo. Si vuole inoltre promuovere negli studenti la consapevolezza dell'importanza di saper gestire le implicazioni logiche in contesto matematico e linguistico e favorire lo sviluppo di competenze argomentative trasversali alle discipline. Il progetto intende, inoltre, approfondire le difficoltà incontrate dagli studenti nella gestione dell'implicazione logica nei ragionamenti deduttivi, con particolare riferimento ai ragionamenti matematici. Si vuole infine verificare se un approccio didattico di tipo metacognitivo possa produrre un miglioramento nei processi di apprendimento nell'ambito della matematica.

Nello specifico si propone una panoramica sull'implicazione logica sia in matematica che nel contesto linguistico, con approfondimenti sulle proprietà logiche di tale connettivo, sull'equivalenza tra implicazione diretta, inversa, contraria e contronominale. Si pone l'attenzione anche sul significato di *condizione necessaria* e *condizione sufficiente* e il rapporto con la doppia implicazione, spiegandone la differenza. Si vuole poi chiarire ai ragazzi la differenza concettuale tra *implicazione* e *deduzione*, con focus sull'individuazione e l'utilizzo delle regole valide del ragionamento deduttivo, in relazione anche ai classici errori di ragionamento.

Struttura dell'unità didattica

L'unità didattica è costituita da momenti teorici e attività laboratoriali e partecipate. In prima persona ho tenuto le lezioni e organizzato le attività, le esercitazioni e le discussioni. Il modulo didattico è stato svolto nel corso di nove incontri, tutti della durata di 50 minuti. In linea con gli obiettivi presentati, il percorso è costituito da una parte di lezioni più teoriche, necessarie per introdurre gli elementi fondamentali per una adeguata comprensione della struttura logica dell'implicazione e delle regole di deduzione. Gli altri momenti sono pensati per essere svolti a gruppi o in modo partecipativo all'interno della classe, per permettere ai ragazzi di esercitarsi in modo attivo e lasciare spazio all'argomentazione, sia scritta, sia verbale.

Per la naturale trasversalità della logica, il progetto didattico è stato proposto all'intero Consiglio di classe. Tutti gli insegnanti hanno dato il consenso a mettere a disposizione uno o due momenti per l'attuazione del modulo. Il lavoro segue quindi un approccio interdisciplinare e non strettamente matematico. L'interdisciplinarità si concretizza in lezioni che toccano aspetti diversi, dalla pura logica matematica con il suo linguaggio simbolico e formale, alla sua applicazione in contesti diversi dalla matematica, come la letteratura o la vita quotidiana, al rapporto che intercorre con il linguaggio naturale e con la dimostrazione matematica.

Nello sviluppo delle varie lezioni si è fatto riferimento agli spunti didattici e alle difficoltà riguardo all'argomento presentate nel Capitolo 3. Durante il seguito di questo Capitolo, nella descrizione delle attività svolte in classe, vengono ripresi alcune tematiche del Capitolo precedente e, in particolare, vengono indicate quali strategie didattiche e metodologiche vengono utilizzate in determinati momenti per rendere il più efficace possibile il lavoro.

L'intervento in classe è stato effettuato da metà gennaio 2023 a metà febbraio 2023, con la seguente organizzazione e calendarizzazione:

- **Lezione 1** (lunedì 16/01/2023, dalle ore 11:40 alle ore 12:30): viene sottoposto alla classe un test iniziale di logica per valutare le conoscenze pregresse degli alunni sull'implicazione logica e sulle forme corrette di ragionamento del *modus ponens* e *modus tollens*.
- **Lezione 2** (lunedì 30/01/2023, dalle ore 8:05 alle ore 8:55): vengono introdotti i cinque connettivi logici, con focus sull'implicazione logica e la doppia implicazione. Si presentano le più importanti proprietà del connettivo di implicazione: valore di verità di $P \to Q$, equivalenza con $\neg P \vee Q$, implicazione inversa, contronominale, contraria e rispettive equivalenze o meno.
- **Lezione 3** (mercoledì 1/02/2023, dalle ore 8:05 alle ore 8:55): viene analizzato il significato di *condizione necessaria e/o sufficiente*. Si propone un'analisi del rapporto tra linguaggio naturale e linguaggio logico in relazione al connettivo di implicazione. Viene affrontata la differenza tra *deduzione* e *implicazione* e vengono introdotte le regole di deduzione del *modus ponens* e *modus tollens*, in relazione alle due regole scorrette dell'*affermazione del conseguente* e *negazione dell'antecedente*.
- **Lezione 4** (sabato 4/02/2023, dalle ore 11.40 alle ore 12:30): vengono svolti esercizi logici sull'implicazione presi dai classici indovinelli ambientati nell'isola abitata da cavalieri e furfanti, inventati da Raymond Smullyan.
- **Lezione 5** (lunedì 6/02/2023, dalle ore 10:50 alle ore 11:40): viene proposta un'analisi di un passaggio della *Divina Commedia* nel quale compare un'argomentazione logica e un esempio tratto da *Alice nel Paese delle Meraviglie*, per mostrare l'utilizzo dell'implicazione logica in contesti diversi dalla matematica.
- **Lezione 6** (martedì 7/02/2023, dalle ore 8.55 alle ore 9:45): vengono svolti esercizi a gruppi e in modo partecipativo sull'implicazione logica, sulle sue proprietà e sull'equivalenza o meno dell'implicazione inversa, contraria e contronominale con l'implicazione diretta.
- **Lezione 7** (giovedì 9/02/2023, dalle ore 8.55 alle ore 9:45): vengono svolti esercizi a gruppi e in modo partecipativo con focus sulle regole di deduzione nelle dimostrazioni matematiche.
- **Lezione 8** (mercoledì 15/02/2023, dalle ore 11:40 alle ore 12:30): viene sottoposto alla classe un test finale, con struttura simile al test proposto all'inizio dell'unità didattica, per valutare i possibili miglioramenti degli studenti a seguito degli interventi e l'efficacia delle lezioni.
- **Lezione 9** (giovedì 16/02/2023, dalle ore 12:30 alle ore 13:20): viene fatta un'analisi dei risultati del test finale con comparazione con i risultati del test somministrato in ingresso. Si presentano delle soluzioni di alcuni quesiti più

critici e vengono fatte riflessioni conclusive con la classe sul percorso didattico svolto. Infine, viene somministrato un test di gradimento conclusivo per valutare in modo anonimo le impressioni dei ragazzi e le eventuali proposte di miglioramento.

4.2 Lezione 1. Il test iniziale di logica

Durante il primo incontro, viene somministrato un test iniziale agli studenti per valutare le loro conoscenze di base riguardo all'implicazione e la loro capacità di maneggiare tale struttura logica e le corrette forme di ragionamento. È possibile consultare il test in Appendice A.

La struttura del test

Il test è costituito da *nove* quesiti, che indagano sul connettivo logico di implicazione e sulle due regole di deduzione che coinvolgono l'implicazione. Si vuole valutare la capacità degli studenti nel riconoscere *necessità* e *sufficienza* di una condizione per il verificarsi di un'altra proprietà e il significato che attribuiscono alla proposizione inversa, contraria, contronominale di una proposizione data. La domanda finale *"Sei sicuro della risposta che hai dato?"*, posta in alcuni quesiti, è finalizzata al controllo della solidità delle conoscenze espresse e richiede di riflettere ancora sulla risposta data, permettendo di cogliere il grado di confidenza dello studente con gli argomenti coinvolti nel quesito. In un paio di domande viene chiesto di spiegare il ragionamento fatto. Nello specifico questa richiesta è posta per i quesiti di argomento strettamente matematico al fine di indagare se gli studenti sono in grado di fare un ragionamento generale sul quesito o se si limitano ad esempi numerici per trovare la soluzione. Il test è pensato per essere svolto in 50 minuti.

Analisi dei quesiti e delle risposte date dagli studenti

Di seguito analizziamo i *nove* quesiti proposti nel test: riportiamo una breve analisi di quanto si voleva far emergere con ciascun quesito e delle risposte date dagli studenti. Gli studenti hanno impiegato non più di 40 minuti per rispondere a tutte le domande.

Quesito 1

Con questo quesito, *Figura 4.1*, si vuole indagare l'interpretazione del valore di verità che gli studenti attribuiscono all'implicazione inversa e contronominale data un'implicazione diretta che è da ritenersi vera. Emerge che la difficoltà maggiore si trova nel valutare il valore di verità dell'implicazione inversa: solo 2 studenti su 9 individuano la risposta corretta *"Non si può sapere con certezza se la frase è vera o falsa"* e dichiarano di essere sicuri della risposta data. Tutti gli altri studenti rispondono che l'implicazione inversa è da ritenersi *vera* e uno solo risponde *"La frase*

Assunta come vera la seguente frase *"Se sotto al tavolo c'è un cane, allora sotto al tavolo c'è un mandarino"*. Cosa possiamo dire riguardo al valore di verità della frase *"Se sotto al tavolo c'è un mandarino, allora sotto al tavolo c'è un cane"*?

a) La frase è vera.

b) La frase è falsa.

c) Non si può sapere con certezza se la frase è vera o falsa.

Sei sicuro della risposta che hai dato? *sì* *no*

E cosa possiamo dire riguardo all'affermazione *"Se sotto al tavolo* ***non*** *c'è un mandarino, allora sotto al tavolo* ***non*** *c'è un cane"*?

a) La frase è vera.

b) La frase è falsa.

c) Non si può sapere con certezza se la frase è vera o falsa.

Sei sicuro della risposta che hai dato? *sì* *no*

Figura 4.1: Quesito 1

è falsa", cambiando la precedente risposta, che sarebbe stata corretta e dichiarando di non essere sicuro. Per quanto riguarda il valore di verità dell'implicazione contronominale, 6 studenti su 9 rispondono correttamente e la maggior parte di loro è sicura della risposta data.

Quesito 2

Ad un gruppo di studenti viene detto: *"Per passare l'esame di matematica basta studiare dagli appunti presi in classe"*. Se questa affermazione è vera, che cosa si può affermare con certezza? (Scegli tra le seguenti una o più risposte che ti sembrano corrette)

a) Se non studio dagli appunti presi in classe, sicuramente non passo l'esame di matematica.

b) Se uno studente passa l'esame di matematica, vuol dire che ha studiato dagli appunti presi in classe.

c) Chi non ha passato l'esame di matematica non ha studiato dagli appunti presi in classe.

d) Chi ha studiato dagli appunti presi in classe passerà l'esame di matematica.

Figura 4.2: Quesito 2

Nel secondo quesito, la frase da considerarsi *vera* è un'implicazione non nella forma esplicita e nota *"se...allora..."*. Si vuole analizzare se gli studenti sono in grado di capire il significato logico di implicazione e se individuano i due ragionamenti validi del *modus ponens*, risposta **d)** e *modus tollens*, risposta **c)**. Le altre due risposte riportano i classici errori dell'*affermazione del conseguente* e della *negazione* *dell'antecedente*. Solo 2 studenti su 9 individuano entrambe le risposte corrette, 3 segnano solo la risposta d), che è la regola più immediata e che segue abbastanza facilmente e uno studente segna solo la risposta c).

Quesito 3

Considera la seguente affermazione: *"Se la porta è chiusa a chiave, allora Maria è fuori casa."* Se è vera la precedente affermazione, quale tra le seguenti affermazioni è vera?

a) Se Maria è in casa, allora la porta non è chiusa a chiave.

b) Se Maria è fuori casa, allora la porta è chiusa a chiave.

c) La porta non è chiusa a chiave e Maria è in casa.

d) Maria è fuori casa solo quando la porta è chiusa a chiave.

e) Se la porta è chiusa a chiave, Maria non può uscire di casa.

Figura 4.3: Quesito 3

Si vuole valutare la comprensione degli studenti del significato logico di una proposizione condizionale. La domanda crea un certo disorientamento: solo 2 studenti su 9 individuano la risposta corretta **a)** e molti di quelli che sbagliano segnano la risposta b) contenente l'inversa della proposizione data.

Quesito 4

Con questo quesito si vuole valutare la capacità degli studenti di verificare quando un'implicazione è *falsa*, ovvero solo nel caso in cui l'antecedente è vero e il conseguente è falso. Segnano correttamente la risposta **d)** 4 studenti, ma solo uno dichiara di essere sicuro della risposta data. Gli altri 5 studenti segnano come risposta corretta la a), come ci si poteva aspettare, convinti che un'implicazione risulti falsa quando l'antecedente è falso e il conseguente è vero.

Caterina ha detto: *"Quando piove, prendo l'ombrello"*. Per dimostrare che Caterina ha detto il falso:

a) è necessario che non piova e prenda l'ombrello.

b) è necessario che non piova.

c) è necessario che prenda l'ombrello.

d) è necessario che piova.

Sei sicuro della risposta che hai dato? *sì* *no*

Figura 4.4: Quesito 4

Quesito 5

"Avere tutti gli angoli retti" per un quadrilatero, è:

a) condizione solo sufficiente affinché un quadrilatero sia un rettangolo.

b) condizione solo necessaria affinché un quadrilatero sia un rettangolo.

c) condizione necessaria e sufficiente affinché un quadrilatero sia un rettangolo.

d) condizione né necessaria né sufficiente affinché un quadrilatero sia un rettangolo.

e) non lo so.

Figura 4.5: Quesito 5

Si vuole indagare la capacità di riconoscimento della condizione di sufficienza o di necessità di una proprietà. La domanda viene posta in relazione ai quadrilateri, ritenuto argomento noto perché già trattato dagli studenti. La risposta corretta **c)** è individuata da 4 studenti su 9, che riconoscono che *"avere quattro angoli retti"* è una condizione necessaria e sufficiente affinché un quadrilatero sia un rettangolo, uno studente spunta la risposta *"Non lo so"* e altri 4 danno la risposta sbagliata: 3 pensano che la condizione sia *"solo sufficiente"* e uno *"solo necessaria"*. È significativo che anche nel caso di una proprietà così nota dagli studenti ci siano comunque delle difficoltà nell'individuare la risposta corretta. Una grossa difficoltà sta proprio nell'utilizzo delle espressioni *"condizione necessaria"* e *"condizione sufficiente"*.

Quesito 6

"Tra i numeri naturali, se un numero è multiplo di a, allora è multiplo di b."
Se questa proposizione è vera, è vero anche che...
(scegli tra le seguenti affermazioni una o più frasi che ti sembrano corrette)

a) se un numero è multiplo di b, allora è multiplo di a.

b) alcuni multipli di a non sono multipli di b.

c) se un numero è multiplo di a, allora non è multiplo di b.

d) se un numero non è multiplo di a, allora non è multiplo di b.

e) se un numero non è multiplo di b, allora non è multiplo di a.

Spiega il ragionamento che hai fatto: ....
....
....
....
....
....
....

Sei sicuro della risposta che hai dato? *sì* *no*

Figura 4.6: Quesito 6

Con questo quesito si vuole indagare se e su quali basi lo studente riesce a individuare l'implicazione corretta, in particolare si vuole verificare se per questo utilizza esempi specifici o un'argomentazione generale. Si vuole inoltre testare la capacità di considerare un'implicazione come un unico nuovo enunciato nel suo insieme. La domanda ha creato notevoli problemi. Un solo studente ha individuato l'unica implicazione corretta, la **e)**, e ha cercato di giustificare la propria risposta con un'argomentazione generale utilizzando i numeri a e b, anche se non del tutto corretta, e non attraverso esempi numerici specifici. Riportiamo di seguito quanto argomentato dallo studente:

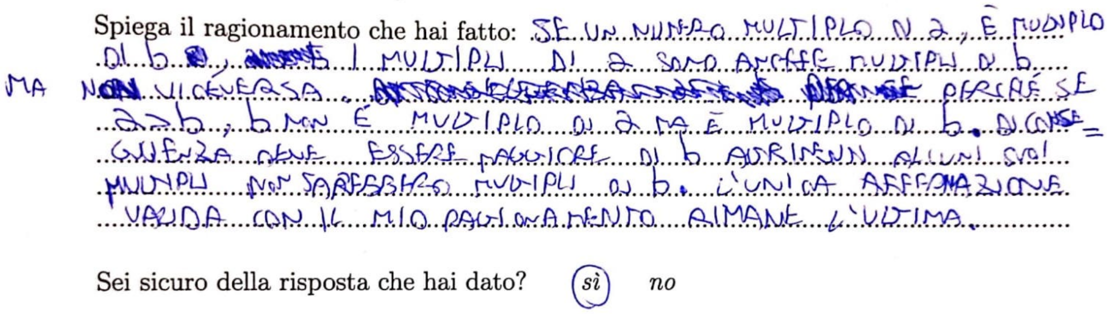


Figura 4.7: "Se un numero è multiplo di a, è multiplo di b, i multipli di a sono anche multipli di b, ma non viceversa. Perché se $a > b$, b non è multiplo di a ma è multiplo di b. Di conseguenza deve essere maggiore di b altrimenti alcuni suoi multipli non sarebbero multipli di b. L'unica affermazione valida con il mio ragionamento rimane l'ultima."

Ci sono poi 2 studenti che segnano oltre alla risposta corretta anche altre sbagliate ma dall'argomentazione che scrivono è evidente che non hanno ben chiara la situazione descritta, come nella risposta riportata sotto:

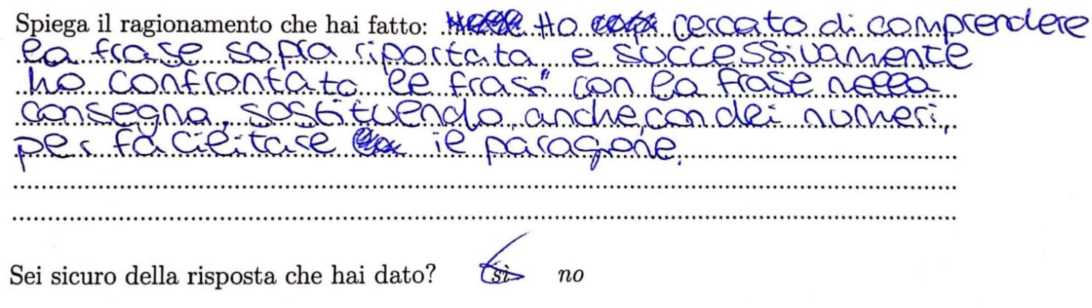


Figura 4.8: "Ho cercato di comprendere la frase sopra riportata e successivamente ho confrontato le frasi con la frase nella consegna, sostituendo anche con dei numeri, per facilitare il paragone."

Gli altri 6 studenti danno risposte sbagliate e alcuni propongono spiegazioni con esempi numerici, alcune delle quali contraddicono anche l'enunciato iniziale, non capendo il significato dell'implicazione considerata, come nella seguente risposta:

Spiega il ragionamento che hai fatto: perchè per esempio se $a=5$ e $b=3$, il numero 10 non è multiplo di 3.

Sei sicuro della risposta che hai dato? *sì* ~~*no*~~

Figura 4.9: "Perché per esempio se $a = 5$ e $b = 3$, il numero 10 non è multiplo di 3."

In relazione proprio a quest'ultima argomentazione riportata è da sottolineare che durante il test 2 studenti hanno chiesto spiegazioni riguardo all'enunciato, chiedendo come sia possibile che l'implicazione iniziale sia da ritenersi vera se ci sono degli esempi numerici in cui essa non è soddisfatta.

Quesito 7

Con questa domanda si vuole capire la padronanza degli studenti dell'espressione linguistica *"solo se"* e la capacità di riportare la frase in una proposizione condizionale esplicita nella forma *"se...allora..."*. Inoltre, una difficoltà ulteriore in questo caso, si trova nella richiesta che chiede di individuare quale tra le risposte riportate *non* è necessariamente vera, forse qualche risposta errata deriva da una lettura poco attenta della domanda. Il quesito non ha creato troppe difficoltà: 6 studenti su 9 hanno segnato correttamente la risposta **c)**, 4 dei quali sono sicuri di quello che hanno dichiarato.

Considera la seguente affermazione: *"Solo se la mia automobile ha benzina può funzionare."* Se quanto affermato è vero, quale delle seguenti **non** è necessariamente vera?

a) La mia automobile funziona solo se ha benzina.

b) Se la mia automobile non ha benzina, allora non può funzionare.

c) Se la mia automobile ha benzina, allora funziona.

d) Se la mia automobile funziona, allora ha benzina.

Sei sicuro della risposta che hai dato? *sì* *no*

Figura 4.10: Quesito 7

Quesito 8

Nel quesito 8 viene analizzata la valutazione degli studenti della necessità logica di una condizione. Il lavoro di manipolare un enunciato in cui si evidenzi una

condizione come necessaria o sufficiente in riferimento al verificarsi si un'altra è denso di difficoltà poiché bisogna spostarsi sul piano metacognitivo e confrontare le condizioni espresse dai predicati in esame.
La domanda è posta in un contesto algebrico, nel quale gli studenti sono abituati a lavorare e hanno padronanza dell'argomento.

Considera la proposizione *"Nella somma di due numeri reali, è necessario che almeno uno dei due sia positivo, affinchè anche la somma sia positiva."*
Questa affermazione è vera, ed è vero anche che...
(scegli tra le seguenti affermazioni una o più frasi che ti sembrano corrette)

a) se la somma di due numeri reali è positiva, allora entrambi i numeri sono positivi.

b) la somma di due numeri reali può essere negativa anche se i numeri sono entrambi positivi.

c) se la somma di due numeri reali è positiva, allora almeno uno di essi è positivo.

d) due numeri reali sono positivi se e solo se la loro somma è positiva.

e) se la somma di due numeri reali è negativa, significa che i due numeri sono entrambi negativi.

Spiega il ragionamento che hai fatto: ....
....
....
....
....
....

Sei sicuro della risposta che hai dato? *sì* *no*

Figura 4.11: Quesito 8

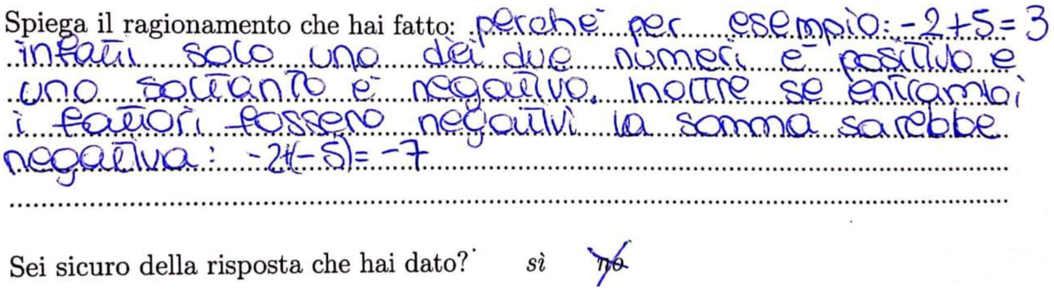
Tutti gli studenti segnano l'implicazione corretta **c)**, 7 individuano solo quella, mentre 2 segnano anche la risposta d), contenente la doppia implicazione relativa alla risposta corretta. A tal proposito uno studente in classe ha chiesto

"Ma se e solo se *corrisponde alla doppia implicazione, vero?"*

mentre un altro studente afferma:

"Scusi, ma la frase iniziale è scorretta: anche se la somma è negativa può essere che uno dei due sia positivo; se faccio -1000 +1 il risultato è negativo ma 1 è positivo."

Nonostante le risposte date siano per la maggior parte corrette, sono le spiegazioni a riguardo che evidenziano una poca consapevolezza della struttura logica e la maggior parte degli studenti giustifica la risposta con esempi numerici, come nella risposta riportata nella *Figura 4.12*.

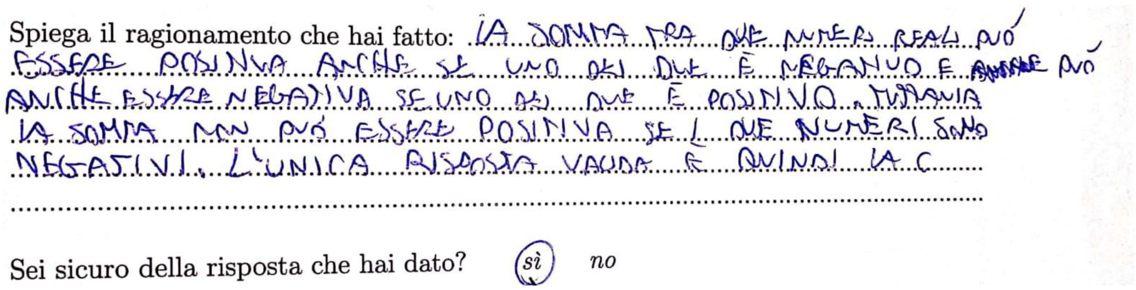


Spiega il ragionamento che hai fatto: perché per esempio: -2+5=3 infatti solo uno dei due numeri è positivo e uno soltanto è negativo. Inoltre se entrambi i fattori fossero negativi la somma sarebbe negativa: -2+(-5)=-7

Sei sicuro della risposta che hai dato? sì ~~no~~

Figura 4.12: "Perché per esempio: $-2 + 5 = 3$ infatti solo uno dei due numeri è positivo e uno soltanto è negativo. Inoltre se entrambi i fattori fossero negativi la somma sarebbe negativa: $-2 + (-5) = -7$."

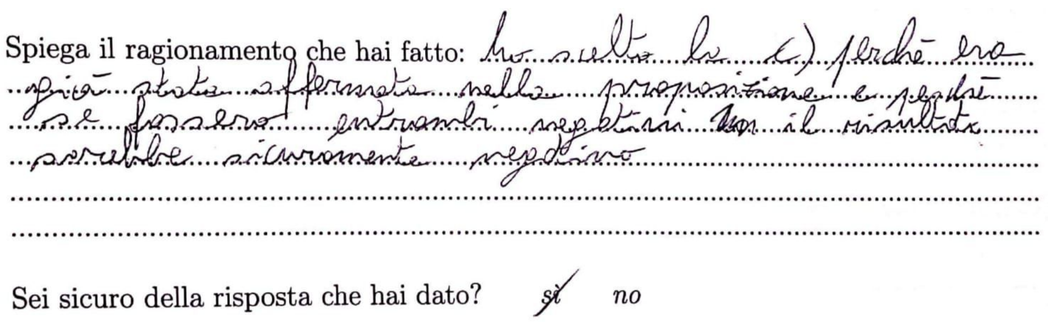
Altri 2 studenti danno delle risposte più generali, come nelle due riportate sotto, si noti che nella seconda lo studente dichiara che la risposta **c)** è proprio l'enunciato iniziale.



Spiega il ragionamento che hai fatto: LA SOMMA TRA DUE NUMERI REALI PUÒ ESSERE POSITIVA ANCHE SE UNO DEI DUE È NEGATIVO E PUÒ ANCHE ESSERE NEGATIVA SE UNO DEI DUE È POSITIVO. TUTTAVIA LA SOMMA NON PUÒ ESSERE POSITIVA SE I DUE NUMERI SONO NEGATIVI. L'UNICA RISPOSTA VALIDA È QUINDI LA C

Sei sicuro della risposta che hai dato? sì no

Figura 4.13: "La somma tra due numeri reali può essere positiva anche se uno dei due è negativo e può anche essere negativa se uno dei due è positivo. Tuttavia la somma non può essere positiva se i due numeri sono negativi. L'unica risposta valida è quindi la c."



Spiega il ragionamento che hai fatto: ho scelto la c) perché era già stata affermata nella proposizione e perché se fossero entrambi negativi il risultato sarebbe sicuramente negativo

Sei sicuro della risposta che hai dato? ~~sì~~ no

Figura 4.14: "Ho scelto la c) perché era già stata affermata nella proposizione e perché se fossero entrambi negativi il risultato sarebbe sicuramente negativo."

Infine, nella *Figura 4.15*, si legge una spiegazione data da uno dei due studenti che ha segnato due risposte, quella corretta e la d) con la doppia implicazione. Si noti come nella sua giustificazione, la risposta d) risulta corretta con quei numeri specifici, ma non può essere una spiegazione valida per ogni coppia di numeri.

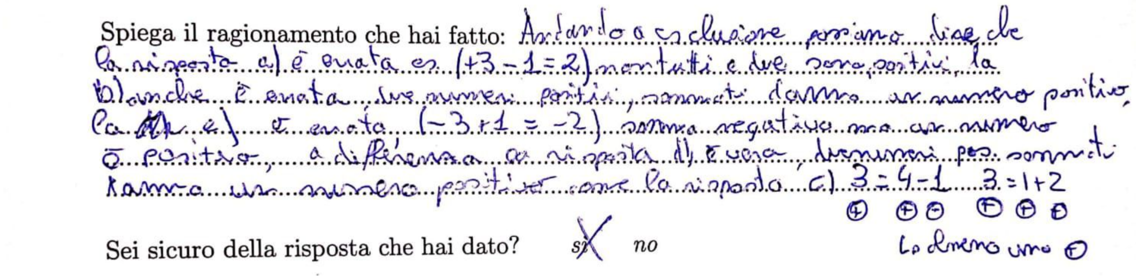

Spiega il ragionamento che hai fatto: Andando a esclusione possiamo dire che la risposta a) è errata es (+3 − 1 = 2) non tutti e due sono positivi la b) anche è errata due numeri positivi, sommati danno un numero positivo, la e) è errata (−3 + 1 = −2) somma negativa ma un numero è positivo, a differenza la risposta d) è vera, due numeri positivi sommati danno un numero positivo come la risposta c) 3 = 4 − 1 3 = 1 + 2
Sei sicuro della risposta che hai dato? sì no
almeno uno ⊖

Figura 4.15: "Andando a esclusione possiamo dire che la risposta a) è errata es $(+3 - 1 = 2)$ non tutti e due sono positivi, la b) anche è errata, due numeri positivi, sommati danno un numero positivo, la e) è errata $(-3 + 1 = -2)$ somma negativa ma un numero è positivo, a differenza la risposta d) è vera, due numeri positivi sommati danno un numero positivo, come la risposta c) $3 = 4 - 1$, $3 = 1 + 2$, almeno uno è positivo."

Si può concludere che gli studenti individuano quasi tutti la risposta corretta ma sulla base delle loro conoscenze riguardo alla somma di numeri reali; probabilmente se la domanda avesse avuto un altro contenuto, viste le giustificazioni che hanno dato, ci sarebbero state più difficoltà.

Quesito 9

In questo quesito si vuole valutare la capacità degli studenti di riconoscere un ragionamento valido. Nelle risposte sono riportate due fallacie molto frequenti, che nascono dalla scorretta applicazione delle regole del *modus ponens* e *modus tollens*, e un ragionamento corretto che corrisponde a quest'ultimo schema di deduzione. Solo 3 studenti su 9 danno come unica risposta quella corretta **b)**, altri 4 studenti riconoscono la validità del ragionamento corretto ma sostengono che anche altri ragionamenti siano altrettanto validi, e 2 studenti segnano solo ragionamenti scorretti.

Quale o quali dei seguenti ragionamenti sono corretti?

a) Se il signor Rossi ha ereditato una grossa somma, allora è ricco. Rossi è ricco. Dunque Rossi ha ereditato una grossa somma.

b) Se il signor Rossi ha ereditato una grossa somma, allora è ricco. Rossi *non* è ricco. Dunque Rossi *non* ha ereditato una grossa somma.

c) Se il signor Rossi ha ereditato una grossa somma, allora è ricco. Rossi *non* ha ereditato una grossa somma. Dunque Rossi *non* è ricco.

d) Tutti i ragionamenti precedenti sono corretti.

Figura 4.16: Quesito 9

Conoscenze pregresse della classe

La *Figura 4.17* rappresenta il grafico della correttezza delle risposte date dagli studenti: il test conferma buona parte delle difficoltà approfondite nel Capitolo 3. In particolare, uno dei quesiti che ha riscontrato minor successo è stato quello relativo alla valutazione del valore di verità dell'implicazione inversa (*quesito 1a*). Meno difficoltà sono emerse in relazione alla verità o meno dell'implicazione contronominale (*quesito 1b*). Si confermano anche alcune insicurezze sulle forme di ragionamento corretto, e, come ci si poteva aspettare, una buona percentuale della classe ha considerato valide le regole di ragionamento scorrette (*quesito 2* e *quesito 9*) e ha manifestato alcuni dubbi sul significato logico di implicazione e sul suo valore di verità (*quesito 3, quesito 4* e *quesito 6*). Per quanto riguarda la necessità logica di un condizionale (*quesito 8*), la maggior parte degli studenti ha riposto correttamente, ma dalle spiegazioni date emerge che la correttezza delle risposte si basa sulla conoscenza dell'argomento piuttosto che sulla vera comprensione della struttura logica della proposizione. Alcune incertezze riguardo all'individuazione delle *condizioni necessarie e/o sufficienti* (*quesito 5*), mentre non ci sono state grosse difficoltà nel trattare un'implicazione introdotta nel linguaggio naturale con l'espressione *"solo se"* (*quesito 7*).

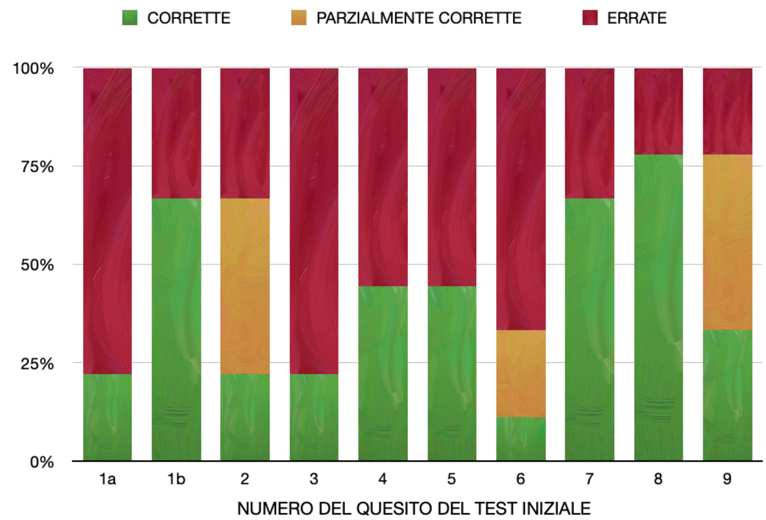


Figura 4.17: Risposte ai quesiti proposti nel test iniziale (dato percentuale).

Concludiamo con un'ultima osservazione sulle conoscenze pregresse della classe sperimentale. Dal test e da un confronto con gli studenti, si è potuto ricavare che la classe all'inizio del progetto didattico non è a conoscenza di alcun elemento di logica elementare; durante il biennio ha affrontato qualche problema di logica classica, che si può trovare nei test d'ingresso, ma non ha avuto alcuna spiegazione a riguardo. Nei primi due anni di liceo hanno studiato solo alcuni elementi base di teoria degli insiemi, nozioni che saranno necessarie nelle lezioni successive.

4.3 Lezioni 2 e 3. L'implicazione logica e le regole di deduzione

Le due ore di lezione che vengono descritte in seguito, della durata di 50 minuti ciascuna, svolte in due giornate differenti, sono dedicate all'introduzione dei concetti teorici relativi all'implicazione logica, alle sue proprietà e alle regole di deduzione. Si tratta di lezioni prevalentemente frontali supportate da una presentazione, dove la classe viene stimolata ad intervenire e partecipare, attraverso domande, commenti ed esempi.

Struttura e obiettivi

Lo scopo delle prime lezioni è fornire agli studenti una base teorica riguardo all'implicazione logica e alle regole di deduzione. Descriviamo nel dettaglio i due momenti.

Lezione 1

La prima ora di lezione si può suddividere in due parti: una prima parte di introduzione generale sulla logica matematica, e una seconda parte con focus sul connettivo di implicazione. Vengono introdotti il linguaggio logico con le sue caratteristiche, la definizione di *enunciato* e i cinque connettivi, soffermandosi maggiormente sull'operazione di implicazione e doppia implicazione. Come è già stato fatto presente nel Capitolo 3, si sceglie di restringere il campo di indagine alla sola logica proposizionale e non a quella dei predicati perché l'argomento risulta nel suo insieme vasto ed interessante e si ritiene che sia indispensabile avere una buona conoscenza e padronanza innanzitutto di questo tipo di logica. Un'altra scelta in questa prima parte è quella di introdurre i connettivi in relazione al linguaggio naturale: ogni connettivo, *negazione, congiunzione, disgiunzione, implicazione, doppia implicazione*, viene presentato attraverso il proprio formalismo, ritenendolo opportuno per avvicinare i ragazzi agli aspetti formali della logica, ma contestualmente vengono proposti esempi dell'utilizzo dei connettivi nella lingua naturale, evidenziando i casi in cui i connettivi non traducono precisamente il costrutto linguistico a cui si appoggiano o ne traducono solo un aspetto, come nel caso della disgiunzione logica.

Per quanto riguarda il connettivo di implicazione e doppia implicazione si ritiene utile appoggiarsi alla rappresentazione grafica degli insiemi, di cui i ragazzi sono pienamente consapevoli, per chiarire il significato logico dei due connettivi. L'obiettivo principale è rendere i ragazzi consapevoli del significato strutturale dei connettivi e aiutarli a capire il valore di verità di $P \to Q$, punto decisamente critico. L'approccio utilizzato per spiegare quando assumere vera un'implicazione è quello della *"promessa mantenuta"* che riteniamo efficace per una prima analisi. Si considera l'implicazione come una promessa: *"Se Teresa fa la brava, allora la mamma porta Teresa al cinema"*. È più facile per uno studente, anche se sicuramente non banale e non sufficiente ad eliminare la difficoltà concettuale di tale aspetto dell'implicazione, capire in quale situazione la promessa non viene mantenuta e di conseguenza riconoscere come falsa la frase. Questo avviene in un solo caso, quando *Teresa fa la brava e la mamma non la porta al cinema*. In tutti gli altri casi (*Teresa fa la brava e la* *mamma la porta al cinema - Teresa non fa la brava e la mamma la porta al cinema - Teresa non fa la brava e la mamma non la porta al cinema*) la promessa iniziale è comunque mantenuta e quindi l'implicazione è vera. Nei due casi più ostici, quando l'antecedente è falso, sono state presentate ulteriori spiegazioni.

Nel caso di antecedente e conseguente falso si è riportato l'aneddoto di Russel. Bertrand Russell (1872-1970), famoso logico, matematico, filosofo, pensatore e scrittore del Novecento, si trovò una volta a spiegare ad un interlocutore la regola dell'implicazione e gli venne chiesto: *"se $2+2$ fa 5, allora lei saprebbe dimostrarmi di essere il Papa?"*. Russell replicò imperturbabile: *"Assumiamo che $2+2$ sia 5. Sottraendo 2 da entrambe le parti, otteniamo che 2 è uguale a 3. Scambiando i due membri dell'uguaglianza, otteniamo che 3 coincide con 2. Sottraendo ancora 1, deduciamo che 2 è uguale a 1. Ora io e il Papa siamo 2. Ma se 2 è uguale a 1, allora siamo 1: quindi io sono il Papa"*. Dimostrazione incontestabile dell'implicazione, dato che dalla premessa falsa $2+2=5$ si conclude l'altrettanto improbabile identificazione di Russell col Papa.

Un'altra argomentazione che si può proporre nel caso di antecedente falso è la seguente, che si appoggia alla teoria degli insiemi. L'argomentazione sfrutta la definizione di insieme vuoto, nel seguente modo:

$$\begin{gathered}\emptyset \subseteq A \\ \forall x\ (x \in \emptyset \rightarrow x \in A) \\ \forall x\ (\perp \rightarrow x \in A)\end{gathered}$$

Questo significa che ogni volta che utilizziamo la nozione di insieme vuoto, che sappiamo essere contenuto in qualsiasi altro insieme ($\emptyset \subseteq A$), stiamo implicitamente utilizzando la regola logica, in quanto esplicitando i passaggi come scritto sopra si ottiene falso ($\perp$) implica qualsiasi cosa (alcuni "x", infatti, appartengono ad A, altri no). Ovvero, se l'antecedente è falso, l'implicazione è sempre vera, indipendentemente dal valore del conseguente, che può essere sia vero che falso.

Infine, vengono introdotte alcune proprietà del connettivo con l'obiettivo principale che gli studenti capiscano l'equivalenza o meno tra implicazione diretta, inversa, contronominale e contraria. Per prima cosa si è posta l'attenzione sul significato logico di implicazione, ovvero sull'equivalenza tra $P \rightarrow Q$ e $\neg P \vee Q$, per introdurre poi, sempre con il supporto di rappresentazioni grafiche, le tre implicazioni che si ottengono dall'implicazione diretta (*implicazione inversa $Q \rightarrow P$, implicazione contronominale $\neg Q \rightarrow \neg P$, implicazione contraria $\neg P \rightarrow \neg Q$*), e le rispettive equivalenze. Si sceglie di utilizzare lo stesso esempio proposto anche per introdurre il connettivo di implicazione, *"se un quadrilatero è un quadrato, allora è un rombo"*, per la padronanza dei ragazzi di tale proprietà, in modo che risultasse più facile concentrarsi sulla struttura logica delle proposizioni e non si spendesse troppa energia per capire il contenuto.

Lezione 2

Nella seconda ora di teoria viene fatto un breve ripasso di quanto visto la volta precedente, per poi soffermarsi sulle espressioni *condizione necessaria, condizio-*

ne sufficiente e *condizione necessaria e sufficiente*, in modo da rendere consapevoli gli studenti della differenza strutturale tra queste espressioni fondamentali in matematica.

Successivamente viene presentato il rapporto tra linguaggio naturale e linguaggio logico in relazione al connettivo di implicazione. Vengono presentati alcuni esempi, analizzati nel dettaglio nel Capitolo 3, che mostrano usi diversi della formula *"se...allora..."* nella lingua italiana, ad esempio all'interno di una domanda (*"Se sei stanca, allora perché non vai a dormire?")* o di un ordine (*"Se è pronto, allora spegni il forno")* o dell'espressione *"solo se"*, che da un punto di vista logico indica un'implicazione ma, molto spesso, nel linguaggio verbale si vuole intendere, in modo non del tutto appropriato, una doppia implicazione. Inoltre, vengono analizzati degli enunciati, tra cui anche frasi pubblicitarie, che mostrano un'apparente incongruenza tra i due linguaggi. Viene poi analizzato il ruolo che gioca il contesto in cui vengono pronunciate le frasi. Si ritiene necessario che i ragazzi siano consapevoli della differenza tra i due linguaggi, del fatto che le lingue hanno funzioni, strumenti e meccanismi interpretativi diversi rispetto al linguaggio simbolico della logica.

L'ultima parte teorica affrontata ha come obiettivo quello di spiegare l'importante differenza tra *deduzione* e *implicazione*. Si introducono poi le due regole di deduzione caratterizzate dall'utilizzo dell'implicazione logica, il *modus ponens* e *modus tollens*. Si ritiene efficace presentare in relazione a queste due regole di deduzione le corrispettive fallacie di ragionamento dell'*affermazione del conseguente* e *negazione dell'antecedente*, soffermandosi sulla definizione di regola di deduzione valida e scorretta.

Implementazione dell'attività in classe

I ragazzi si sono mostrati da subito interessati all'argomento anche se, non avendo mai trattato argomenti di logica nel dettaglio, sono sembrati inizialmente un po' diffidenti. Hanno comunque partecipato attivamente ad entrambe le lezioni rispondendo alle mie domande o ponendo loro stessi dubbi o perplessità. La metodologia utilizzata per le due ore, come anticipato, è stata la lezione frontale, supportata dall'uso della relativa presentazione e arricchita da discussioni che si proponevano lo scopo di far ragionare gli studenti. Vediamo come ha reagito la classe agli argomenti proposti nelle prime due ore.

Nella prima lezione i ragazzi hanno seguito senza alcuna difficoltà la prima parte di introduzione alla logica matematica e la presentazione dei connettivi. I simboli logici corrispondenti ai cinque connettivi erano già stati visti ma di questi non era mai stato analizzato il significato. Da come hanno reagito è stato molto utile riportare degli esempi di come i connettivi vengono utilizzati nel linguaggio quotidiano e di come non sempre ci sia un allineamento tra connettivo logico e sua espressione linguistica. Nell'introdurre l'implicazione logica ho notato positivamente che per i ragazzi è stato abbastanza intuitivo capire il rapporto con l'inclusione tra insiemi e, a seguito della spiegazione, hanno risposto correttamente ad alcune domande del test iniziale che gli ho riproposto e che molti avevano sbagliato. La parte più problematica è emersa quando si è trattato di spiegare il valore di verità dell'implicazione usando la *"promessa mantenuta"*. Indubbiamente una presentazione di questo tipo è più intuitiva rispetto alla semplice tavola di verità, ma anche attraverso questo esempio, come ci si aspettava, la comprensione non è stata immediata. L'implicazione considerata è *"Se Teresa fa la brava, allora la mamma porta Teresa al cinema"* e tutta la classe, alla mia domanda se la promessa fatta dalla mamma è mantenuta nel caso in cui *"Teresa non fa la brava e la mamma la porta al cinema"* ha risposto "no". Una elevata percentuale ha risposto negativamente anche nel caso in cui *"Teresa non fa la brava e la mamma non la porta al cinema"*, mentre nei primi due casi, *"Teresa fa la brava e la mamma la porta al cinema"* e *"Teresa fa la brava e la mamma non la porta al cinema"* non ci sono stati dubbi. Anche le ulteriori spiegazioni riguardo ai due casi di antecedente falso con l'aneddoto di Russell e l'argomentazione dell'insieme vuoto mi è sembrato siano state capite senza grosse difficoltà, anche se la perplessità dei ragazzi in questi due casi è comunque in parte rimasta. Ho notato, poi, come per i ragazzi sia difficile capire che l'antecedente e il conseguente non necessariamente devono trattare dello "stesso tema". Meno problemi sono emersi nella spiegazione di implicazione inversa, contronominale e contraria e delle rispettive equivalenze o meno. Supportati dalla rappresentazione grafica degli insiemi la classe ha risposto sempre correttamente alle mie domande.

Nel secondo incontro, dopo un breve ripasso riguardo agli argomenti più importanti affrontati nella lezione precedente, ho fatto ragionare gli studenti sul significato di *condizione necessaria e/o sufficiente*. La classe ha seguito senza grossi problemi le spiegazioni e ha risposto correttamente ai miei esempi, riuscendo anche a rappresentare graficamente le situazioni proposte. Ho poi analizzato insieme a loro alcune proposizioni nel linguaggio naturale che non possono essere tradotte con il connettivo di implicazione logica in quanto l'espressione *"se...allora..."* è utilizzata con altri significati. Gli esempi considerati sono stati i seguenti: *"Se tu sei campione di scacchi, allora io sono l'imperatore della Cina"*, *"Se al mare ci si abbronza, in montagna si può passeggiare"*, *"Se è pronto, allora spegni il forno!"* e *"Se sei stanca, allora perché non vai a dormire?"*. Ho chiesto ai ragazzi se le quattro proposizioni hanno il significato logico di implicazione, tutti gli studenti hanno risposto di "sì" per quanto riguarda le prime tre, mentre hanno riconosciuto che nella quarta proposizione *"se...allora..."* non viene usato con il significato del connettivo logico. Ho chiarito il corretto significato delle proposizioni considerate e mostrato altri esempi di un utilizzo diverso di *"se..allora..."*. Poi abbiamo ragionato insieme su altri esempi relativi a frasi pubblicitarie e altri contesti della vita quotidiana che evidenziano un mancato allineamento tra proprietà logiche e significato nella vita reale. Ho cercato di chiarire che questa divergenza tra i due linguaggi è naturale e necessaria. Infine, l'argomento teorico che ho trattato è stata la distinzione tra *deduzione* e *implicazione*. Ho trovato i ragazzi particolarmente interessati a questo argomento. La classe non aveva mai sentito le due regole di deduzione del *modus ponens* e *modus tollens* ma ha capito subito la differenza anche in relazione alle due regole non valide dell'*affermazione del conseguente* e della *negazione dell'antecedente*. In ultimo, ho fatto capire a loro quale ragionamento fosse corretto o meno e individuare a quale regola di deduzione corrispondeva e hanno risposto tutti correttamente.

4.4 Lezione 4. L'isola di Smullyan

Nel quarto incontro, della durata di 50 minuti, gli studenti sono invitati a partecipare attivamente durante tutta la lezione svolgendo a gruppi degli esercizi proposti e poi condividendoli con il resto della classe.

Struttura e Obiettivi

Come si è visto nel Capitolo 3, dal punto di vista didattico è importante lavorare in contesti logici ben definiti. La classica isola di Smullyan, dove ci sono solo furfanti che mentono sempre e cavalieri che dicono sempre la verità, è un ottimo ambiente logico. L'obiettivo principale di questa lezione è far lavorare i ragazzi sul valore di verità dell'implicazione logica e dei possibili valori dell'antecedente e conseguente. Infatti, l'isola di Smullyan permette di costruire deduzioni non banali, limitandosi anche ai soli connettivi e, in particolare nel nostro caso, ai connettivi logici di implicazione e doppia implicazione. Grazie a questa tipologia di esercizi è possibile anche motivare lo studio delle tavole di verità, senza cadere in esercizi meccanici e ripetitivi. Dopo una breve introduzione dell'isola di Smullyan si propone alla classe un esempio di doppia implicazione per far vedere il modo con cui formalizzare e risolvere l'esercizio. L'esempio mostrato è il seguente:

Un abitante A dell'isola di Smullyan dice:
"io sono un cavaliere se e soltanto se mi chiamo Giorgio".
Siamo in grado di stabilire se A è un cavaliere o un furfante?
Conosciamo il suo nome?

Per trovare la soluzione si può procedere come segue. Sia P la proposizione *"A è un cavaliere"* e Q la frase *"A si chiama Giorgio"*, allora la proposizione considerata in termini logici è una doppia implicazione $P \leftrightarrow Q$. Supponiamo che A sia un cavaliere, allora $P \leftrightarrow Q$ è vera e anche P è vera, quindi Q deve essere vera. Supponiamo che A sia un furfante, allora $P \leftrightarrow Q$ è falsa e anche P è falsa, quindi Q deve essere vera. La conclusione è *"A si chiama Giorgio ma non si può sapere se è un furfante o un cavaliere"*.
Si sceglie di proporre un esempio sulla doppia implicazione per mostrare il modo di procedere in questa tipologia di esercizi senza però fare esempi con l'implicazione logica per lasciare poi lo spazio agli studenti di sviluppare ragionamenti autonomi. I tre esercizi proposti alla classe, da svolgere in gruppi da 3 persone, sono i seguenti:

1. Un abitante A dell'isola di Smullyan dice: *"se io sono un cavaliere, allora mi chiamo Mario"*. Siamo in grado di stabilire se A è un cavaliere o un furfante? Conosciamo il suo nome?

2. Un forestiero incontra due abitanti A e B e chiede ad A: *"lei è un cavaliere o un furfante?"*. A risponde: *"se B è un cavaliere allora io sono un furfante"*. Siamo in grado di stabilire se A è un cavaliere o un furfante? E cosa possiamo dire di B?

3. Un abitante A dell'isola afferma: *"se io mi chiamo Giovanni allora sono un cavaliere"*. Siamo in grado di stabilire se A è un cavaliere o un furfante? Conosciamo il suo nome?

Le rispettive soluzioni sono:

1. Sia P la proposizione *"A è un cavaliere"* e Q la proposizione *"A si chiama Mario"*, allora la frase da considerare è un'implicazione $P \to Q$. Supponiamo che A sia un furfante, allora $P \to Q$ è falsa e questo accade solo se P è vera e Q è falsa. Se P è vera significa che A è un cavaliere, ma questa è una contraddizione. Supponiamo ora che A sia un cavaliere, allora $P \to Q$ è vera e anche P è vera, quindi Q deve essere vera. La conclusione è *"A è un cavaliere e si chiama Mario"*.

2. Sia P la proposizione *"B è un cavaliere"* e Q la proposizione *"A è un furfante"*, allora la frase da considerare è un'implicazione $P \to Q$. Supponiamo che A sia un furfante, allora $P \to Q$ è falsa e questo accade solo se P è vera e Q è falsa. Se Q è falsa significa che A è un cavaliere, ma questa è una contraddizione. Supponiamo ora che A sia un cavaliere, allora $P \to Q$ è vera e Q è falsa, quindi anche P deve essere falsa. La conclusione è *"A è un cavaliere e B è un furfante"*.

3. Sia P la proposizione *"A si chiama Giovanni"* e Q la proposizione *"A è un cavaliere"*, allora la frase da considerare è un'implicazione $P \to Q$. Supponiamo che A sia un furfante, allora $P \to Q$ è falsa e questo accade solo se P è vera e Q è falsa, quindi A è un furfante e si chiama Giovanni. Supponiamo ora che A sia un cavaliere, allora $P \to Q$ è vera e anche Q è vera, quindi ci sono due casi: P è vera oppure Q è falsa. La conclusione è *"A si chiama Giovanni oppure è un cavaliere"*.

Ad ogni gruppo viene assegnato uno di questi tre esercizi, e dopo aver lasciato il tempo ai ragazzi di ragionare insieme per trovare una soluzione, un rappresentante per ciascun gruppo espone la soluzione trovata al resto della classe utilizzando la lavagna LIM.
Lavorare a gruppi su questa tipologia di esercizi risulta più efficace rispetto al lavoro individuale in quanto stimola le capacità di *problem solving* e riduce le complicazioni nella risoluzione di situazioni e problemi più ostici.

Implementazione dell'attività in classe

Durante questa attività ho trovato i ragazzi molto coinvolti e partecipi, con la curiosità di andare a trovare la soluzione dell'esercizio assegnato. Ho introdotto la tipologia di esercizi, spiegando le regole di chi vive sull'isola e l'efficacia e importanza di creare un ambiente logico appropriato per risolvere alcuni tipi di problemi. Poi ho mostrato l'esempio, descritto nel paragrafo precedente, contenente una doppia implicazione e la classe ha seguito attentamente quanto spiegato. A questo punto ho chiesto ai ragazzi di dividersi in gruppi: si sono formati tre gruppi da tre persone

ciascuno e ho assegnato loro un esercizio da risolvere. Nella divisione dei gruppi, fatta dagli studenti, ho notato che un gruppo era costituito da tre ragazzi che, per il poco tempo che ho potuto osservare nelle lezioni precedenti, mi sono sembrati un po' più intuitivi e ho deciso di assegnare loro l'*esercizio 3*. La difficoltà dei tre esercizi è la stessa, ma nel terzo problema enunciare la soluzione correttamente dal punto di vista logico richiede una buona conoscenza anche del connettivo di disgiunzione, che avevo solo velocemente accennato nella prima lezione.
Ho lasciato ragionare per circa 10/15 minuti i ragazzi sulla soluzione e ho chiesto loro di ragionare prima informalmente a parole e poi provare a scrivere una soluzione più formale, seguendo l'esempio che avevamo svolto insieme. Non è stato così facile per gli studenti trovare la soluzione.
Prima di condividere le soluzioni trovate con il resto della classe sono passata tra i gruppi per capire se erano sulla buona strada oppure no.
Il gruppo a cui avevo assegnato l'*esercizio 3* ha trovato senza grossi problemi la soluzione, anche formalizzando correttamente. Solo con il mio aiuto hanno però capito che da un punto di vista logico potevano esprimere la soluzione tramite una disgiunzione come unico enunciato.
Il gruppo che doveva svolgere l'*esercizio 2* dopo il mio intervento è riuscito a trovare la soluzione anche se non erano sicuri di quanto stavano facendo.
Mentre il gruppo a cui avevo assegnato l'*esercizio 1* non è riuscito a trovare una soluzione del tutto corretta ma ha provato a fare qualche ragionamento.
Ho notato una certa difficoltà nel considerare l'implicazione nel suo complesso. Chiarisco con un esempio dei ragionamenti fatti dai ragazzi. Nell'*esercizio 2* l'implicazione è *"se B è un cavaliere, allora io sono un furfante"* ($P \to Q$), i ragazzi ragionano in questo modo: supponiamo che A sia un cavaliere, allora la proposizione Q è falsa, quindi la P può essere vera o falsa. Ma arrivati a questo punto non riescono più ad andare avanti. Più volte hanno provato questa strada senza valutare la falsità o verità della frase pronunciata dall'abitante e quindi dell'implicazione $P \to Q$. Dopo il mio chiarimento sul fatto che va considerato anche il valore di verità di $P \to Q$ sono riusciti a proseguire nel ragionamento.
Anche il gruppo con l'*esercizio 1* ha avuto qualche difficoltà (*"Se io sono un cavaliere, allora mi chiamo Mario")*: hanno provato a fare qualche ragionamento arrivando a trovare una parte di soluzione, cioè che *"A si deve chiamare Mario"*, ma hanno concluso, scorrettamente, che non si può sapere se è un cavaliere o un furfante.
La grossa difficoltà degli studenti qui è stata capire che se supponiamo che A sia un furfante, si arriva a dire che P è vera, cioè che è un cavaliere, poiché l'implicazione $P \to Q$ è falsa e succede solo se P è vera e Q è falsa. Effettivamente la situazione è abbastanza controintuitiva.
La condivisione con il resto della classe è stata abbastanza veloce in quanto stava terminando l'ora ma il lavoro è stato efficace e soprattutto molto stimolante per i ragazzi che si sono cimentati positivamente nella risoluzione degli esercizi.

4.5 Lezione 5. L'implicazione logica in letteratura

La quinta lezione, sempre della durata di 50 minuti, ha un'impronta nettamente interdisciplinare e, in particolare, punta a mostrare un collegamento tra testi letterari e logica. Gli esempi proposti sono un passaggio delle *Divina Commedia* di Dante e uno di *Alice nel Paese delle Meraviglie* di Lewis Carroll.

Struttura e Obiettivi

Lo scopo principale di questa lezione è di tipo culturale: si vuole mostrare come l'implicazione logica, le regole di deduzione e, in realtà, tantissimi altri aspetti matematici si possano ritrovare in testi letterari e poetici, così apparentemente lontani dalla matematica. Inoltre l'intento è proporre due esempi su che cosa sia possibile fare con strumenti logici formali anche al di fuori del mondo matematico. Un altro obiettivo di questa lezione è quello di aggiungere alcuni concetti nuovi di logica durante l'analisi dei passi letterari proposti. Vediamo nel dettaglio gli esempi considerati.

La *Divina Commedia* di Dante è ricca di conoscenze scientifiche, dall'aritmetica, geometria, astronomia fino anche alla logica.[12] Sono infatti moltissimi gli autori che si sono dedicati ad un'analisi della presenza della matematica nella *Divina Commedia* e con grande sorpresa ci si accorge che esiste sempre qualche angolo inesplorato o qualche verso che può ancora fornire argomento di riflessione e di studio. È importante sottolineare che la matematica di Dante non va molto oltre la cultura generale, ma l'immagine che Dante ci restituisce di questa scienza, attraverso allegorie e metafore, è sorprendente.
Il nostro intento non è assolutamente fare un'analisi della matematica nella *Divina Commedia* ma è fornire un esempio, molto semplificato, di un passaggio dell'*Inferno* dove compare un'argomentazione logica. Quando si parla di logica nell'opera dantesca naturalmente non ci si riferisce alla logica matematica propriamente detta, che nasce intorno alla metà del XIX secolo con l'opera di George Boole (1815-1864), ma piuttosto alla logica di Aristotele.

Nelle strofe che andremo a considerare (*Inferno, XXVII, vv. 112-123)*, compare un ragionamento logico basato sulla regola di deduzione del *modus ponens*. Quanto segue è tratto dal libro di D'Amore, *Matematica stupore e poesia* [12].
La vicenda narrata è quella di Guido da Montefeltro (1223 - 1298), convinto a peccare gravemente dal Papa Bonifacio VIII (1235 - 1303). Lo sventurato frate francescano ed ex grande condottiero Guido narra a Dante la sua tragedia. Il Papa lo convince al tradimento ma lo rassicura, assolvendolo in anticipo. Guido si lascia convincere, pecca, e poi, anni dopo, muore. A quel punto lo stesso Francesco d'Assisi (1182 - 1226) lo va a prelevare per portarlo con se in *Paradiso*, come era d'uso per le anime dei fraticelli dell'ordine, quando appare un "nero cherubino". Avviene una lotta a suon di logica tra Francesco d'Assisi e il diavolo.
Leggiamo i versi di Dante.

[12] Per un approfondimento cfr. B. D'Amore, *Dante e la matematica*, 2011.

Francesco venne poi, com'io fu' morto,
per me; ma un d'i neri cherubini
li disse: "Non portar: non mi far torto.

Venir se ne dee tra' miei meschini
perché il consiglio frodolente,
dal quale in qua stato li sono a' crini;

ch'assolver non si può chi non si pente;
né pentere e volere insieme puossi
per la contraddizion che nol consente".

Oh me dolente! Come mi riscossi
quando mi prese dicendomi: "Forse
tu non pensavi ch'io loico fossi!"

Si può verificare in termini logici se il ragionamento del diavolo è valido, quindi se Guido debba scontare giustamente una pena eterna, oppure se il "nero cherubino" stia solo prendendosi gioco di lui. Di seguito viene riportata la presentazione proposta ai ragazzi, molto semplificata.
Si possono percorrere due strade per verificare la validità del ragionamento.

1. Si considerino le seguenti tre premesse:

   P_1: *Guido ha gravemente peccato*
   P_2: *Non si può assolvere chi non si pente*
   P_3: *Non si può contemporaneamente pentirsi e peccare*
   e la conclusione del diavolo Q: *Guido non è stato (validamente) assolto*

   Le tre premesse del diavolo sono accettabili e quindi vere, inoltre dalla proprietà della congiunzione otteniamo che anche $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$ è vera. Si può quindi considerare l'implicazione $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \rightarrow Q$. Con l'occasione si può mostrare ai ragazzi come l'antecedente di un'implicazione possa essere una proposizione composta utilizzando altri connettivi.
   Il ragionamento fatto dal diavolo si basa quindi sulla regola si deduzione del *modus ponens*, infatti se $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \rightarrow Q$ è vera, e anche l'antecedente $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$ lo è, ne consegue che anche la conclusione Q deve essere vera. Si arriva dunque alla conclusione che il nero cherubino ha perfettamente ragione e Guido sconterà una pena eterna, per non aver fatto lui stesso questo ragionamento, prima di cedere alle lusinghe del Papa.
   Tutto questo ragionamento si basa sulla regola del *modus ponens*, molto utilizzata in quel periodo ed il cui nome è non a caso di origine medievale.
   Il nome viene usato per la prima volta dal grande logico Pietro Ispano (1215 ca. -1277) che fu autore delle *Summulae Logicales*, citato da Dante nel *Paradiso* e che dimostra che il poeta era a conoscenza di questa forma di ragionamento.

2. Il secondo ragionamento, forse più intuitivo, si basa sui sillogismi, tipo fondamentale di ragionamento deduttivo della logica aristotelica, che si possono ritrovare in molti altri passaggi della *Divina Commedia*: questo conferma la conoscenza e l'utilizzo di Dante di ragionamenti di questo tipo. Vediamo come formalizzare il ragionamento. Consideriamo i seguenti insiemi

   $U = \{\text{insieme-universo degli esseri umani}\}$
   $A = \{\text{insieme degli assolti (validamente)}\}$
   $P = \{\text{insieme dei pentiti}\}$
   $V = \{\text{insieme dei peccatori volontari}\}$

   Dalle parole del nero cherubino si ha che *"ogni assolto è un pentito"* cioè, sotto forma di implicazione *"se uno è assolto, allora è un pentito"* e anche che *"nessun pentito è un peccatore volontario"*. Queste due premesse possono essere rappresentate graficamente come nella *Figura 4.18*.

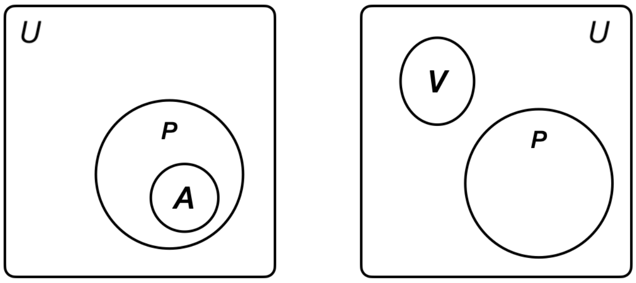


Figura 4.18: "Ogni assolto è un pentito" (sinistra), "Nessun pentito è un peccatore volontario" (destra).

   Dalle due premesse si deduce che *"nessun assolto può essere un peccatore volontario"* e, quindi, poiché Guido è un peccatore volontario, non può essere validamente assolto. La rappresentazione grafica si può vedere in *Figura 4.19*.

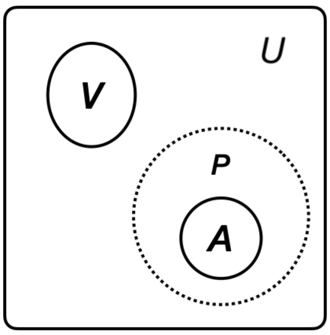


Figura 4.19: "Nessun assolto è un peccatore volontario".

   In questo secondo tipo di ragionamento basato sui sillogismi, si utilizza il *diagramma di Eulero-Venn*, che mostra tutte le possibili relazioni logiche tra una collezione finita di insiemi differenti. Si è cercato di far ragionare i ragazzi sulla rappresentazione grafica puntando l'attenzione su quella dell'implicazione *"Ogni assolto è un pentito"*.

Per quanto riguarda la seconda parte della lezione, l'esempio presentato è tratto da *Alice nel Paese delle Meraviglie.* L'autore, Lewis Carroll (1832 – 1898), oltre ad essere un grande scrittore e poeta, è stato anche un logico e matematico. In molti lavori di Carroll si possono trovare esempi storicamente interessanti di quelli che abbiamo chiamato ambienti logici, che permettono in maniera divertente di chiarire il significato dei vari connettivi e le regole di deduzione ad essi legate.

In questa lezione, l'esempio utilizzato permette di introdurre la *negazione di un'implicazione* e chiarirne il significato logico.
La scena considerata si legge nel Capitolo VI, dove avviene l'incontro di Alice con lo Stregatto, ovvero il gatto del Cheshire nel romanzo originale. Uno degli aspetti che più facilmente colpiscono del gatto color porpora dal ghigno sornione è il suo sorriso che rimane sospeso a mezz'aria, tant'è che la stessa Alice afferma:

"Ne ho visti di gatti senza sogghigno, ma un sogghigno senza gatto mai!"

Si tratta di uno dei tanti casi in cui Carroll si diverte a giocare con la logica classica e la lingua.
Dal punto di vista logico, si può considerare l'implicazione *"Se c'è un ghigno, allora c'è un gatto"*, con P che indica la proposizione *"C'è un ghigno"* e Q la frase *"C'è un gatto"*.
Infatti, Alice afferma di aver visto gatti senza sogghigno e non si stupisce di vedere un gatto ghignante, quindi la presenza del gatto è condizione necessaria affinché ci possa essere un ghigno, mentre la presenza di un ghigno è sufficiente a capire che ci sia un gatto. Si tratta di una situazione *non-sense*, molto utilizzate dall'autore, con cui si intende non solo la mancanza di senso, ma la negazione di un significato che è presente nella situazione considerata, in questo caso la negazione di un'implicazione, formalmente $\neg(P \to Q)$. Si è proposta la risoluzione delle tavole di verità, in *Figura 4.20*, per convincere i ragazzi dell'equivalenza logica tra $\neg(P \to Q)$ e $P \wedge \neg Q$ e per mostrare un esempio dei classici esercizi sulle tavole di verità. Si ritiene che mostrare un paio di esempi di questi classici esercizi sia più che sufficiente, senza cadere in una serie di esercizi meccanici e ripetitivi. Tornando ad Alice, si dimostra quindi che il *non-sense* di questa situazione paradossale è proprio la scena vissuta da Alice, *"C'è un ghigno ma non c'è un gatto"* cioè $P \wedge \neg Q$.

P	Q	$\neg Q$	$P \to Q$	$\neg(P \to Q)$	$P \wedge \neg Q$
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

Figura 4.20

Implementazione dell'attività in classe

La lezione ha avuto molti momenti di interazione con gli studenti che hanno risposto alle mie domande e insieme abbiamo costruito i molti ragionamenti che sono stati descritti nel paragrafo precedente. La classe si è mostrata incuriosita ed è riuscita a seguire buona parte dei passaggi presentati.

Per quanto riguarda la parte relativa alla *Divina Commedia*, la professoressa di italiano aveva anticipato l'analisi del testo dantesco in modo tale che i ragazzi fossero preparati sull'episodio di Guido da Montefeltro. Uno studente ha ripetuto la vicenda al resto della classe ed ha letto le strofe corrispondenti e poi ho guidato i ragazzi con il supporto di alcune slides nei due ragionamenti che permettono di dimostrare la correttezza dell'argomentazione del diavolo. Nel primo ragionamento i ragazzi, ragionando insieme, hanno individuato senza problemi lo schema del *modus ponens*. Anche con gli insiemi hanno individuato correttamente e con sicurezza la rappresentazione grafica corrispondente all'implicazione considerata.

Nell'esempio di Carroll, dopo aver descritto la situazione vissuta da Alice, ho dato ai ragazzi le due proposizioni *"C'è un ghigno"* e *"C'è un gatto"* e ho fatto ricavare loro l'implicazione corretta. Dopo qualche momento di indecisione, tutti sono riusciti a individuare correttamente quale delle due proposizioni fosse la condizione necessaria e quale la sufficiente, arrivando alla corretta conclusione che la frase da considerare è *"Se c'è un ghigno, allora c'è un gatto"*. Prima di far risolvere ai ragazzi la tabella riportata in *Figura 4.20* ho chiesto di dirmi la negazione dell'implicazione $P \to Q$ e alcuni studenti mi hanno risposto $\neg P \to \neg Q$, errore molto frequente, ma non ho dato subito la risposta corretta. Ho lasciato invece trovare ai ragazzi il valore di verità di $\neg Q$, $P \to Q$, $\neg(P \to Q)$ e $P \wedge \neg Q$ attraverso la tavola di verità e non c'è stato alcun tipo di problema o incertezza. Ho fatto loro notare come le ultime due colonne, relative a $\neg(P \to Q)$ e $P \wedge \neg Q$, risultassero uguali. A questo punto ho fatto confrontare il valore di verità di $\neg P \to \neg Q$, dopo averlo fatto ricavare ai ragazzi, con $\neg(P \to Q)$ e immediatamente la classe è arrivata alla conclusione che $\neg P \to \neg Q$ non poteva essere la negazione di un'implicazione logica, trattandosi infatti dell'implicazione contraria. Nonostante i ragazzi avessero seguito molto bene i ragionamenti da me presentati e non avessero avuto esitazioni riguardo alle tavole di verità, ho notato comunque una certa perplessità riguardo al fatto che la negazione di *"Se c'è un ghigno, allora c'è un gatto"* ($\neg(P \to Q)$) sia *"C'è un ghigno ma non c'è un gatto"* ($P \wedge \neg Q$), che è la scena vissuta da Alice.

Nel complesso i due esempi si sono rivelati utili per introdurre alcuni nuovi concetti di logica, nonché a precisare e ampliare argomenti trattati nelle prime due lezioni in maniera divertente e originale ma nel contempo rigorosa, oltre che a mostrare degli esempi di utilizzo di strumenti logici e formali in contesti apparentemente molto lontani dal mondo matematico e della logica.

4.6 Lezioni 6 e 7. Attività di laboratorio logico

Nella sesta e settima lezione si sono svolti esercizi a gruppi e in modo partecipativo, proponendo delle discussioni e coinvolgendo tutta la classe. Gli esercizi sono pensati per consolidare quanto visto nelle lezioni precedenti e mostrare ai ragazzi l'utilizzo dell'implicazione logica e delle regole di deduzione in contesto strettamente matematico, in teoremi e dimostrazioni. Per questi due momenti laboratoriali viene consegnata una scheda di lavoro che guida i ragazzi nella risoluzione degli esercizi.

Struttura e Obiettivi

Come è stato fatto per le prime due lezioni teoriche, di seguito si descrivono separatamente obiettivi, struttura ed esercizi proposti nei due momenti.

Lezione 6

Gli esercizi svolti in questa lezione sono i primi tre della scheda di lavoro, che si trova in Appendice A. Con questi esercizi si vuole consolidare la comprensione, il riconoscimento e l'utilizzo del connettivo di implicazione logica e delle sue proprietà. In particolare, si vuole far lavorare i ragazzi sul riconoscere e scrivere l'implicazione inversa, la contronominale e la contraria di una data e farli riflettere sul valore di verità delle tre proposizioni. Gli esercizi sono stati svolti a gruppi e poi corretti insieme.

L'*Esercizio 1* chiede di individuare, tra i dieci enunciati elencati, quali nascondono un'implicazione logica. L'obiettivo è far ragionare gli studenti sui diversi possibili usi nel linguaggio naturale di espressioni che in logica traducono un'implicazione, oltre a lasciare spazio per analizzare da un punto di vista logico delle proposizioni cercando di capire quali hanno la struttura e il significato di un'implicazione. Solo due proposizioni sono scritte esplicitamente con l'espressione *"se...allora..."*, la numero 9, *"Se moltiplichi per 3 quello che hai ottenuto, allora vedrai che trovi il risultato corretto"* e la numero 10, *"Se 7 è divisibile per 2, allora Roma è la capitale dell'Italia"*, che mostra un esempio in cui antecedente falso e conseguente vero non trattano dello stesso tema. Le altre implicazioni sono enunciate non nella classica forma *"se...allora..."*, come per esempio l'enunciato 2, *"Un numero è divisibile per 4 se le ultime due cifre a destra formano un numero multiplo di 4"* e l'enunciato 4, *"Solo se una funzione f è continua, è derivabile"* oppure con frasi che implicitamente traducono un'implicazione logica, la proposizione 1, *"Quando non piove, vado a lavorare a piedi"*, la frase 5, *"Per la costruzione geometrica è sufficiente solo un righello"*, la proposizione 6, *"Due rette perpendicolari ad una stessa retta sono parallele"* e la proposizione 7, *"In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti"*. Le altre 2 proposizioni, *"Se andiamo al ristorante, ci vieni volentieri?"* e *"Se Socrate morì e visse da uomo saggio, Einstein morì e visse da genio della fisica"* hanno la struttura di un'implicazione logica o contengono parole strettamente riconducibili a tale connettivo, ma nel linguaggio quotidiano non traducono il significato logico di implicazione.

L'*Esercizio 2*, strutturato a punti che guidano lo studente nella risoluzione, analizza l'enunciato 4 del primo esercizio. Nell'implicazione proposta l'argomento non è conosciuto da ragazzi di una classe terza scientifico, in modo tale da concentrarsi solo sulla struttura logica della proposizione, senza farsi influenzare dal contenuto noto. La frase è enunciata con l'espressione *"solo se"* proprio per far ragionare i ragazzi su quest'altro modo di introdurre un'implicazione logica:

"Solo se una funzione è continua, è derivabile"

Il primo punto dell'esercizio chiede si individuare antecedente, conseguente, quale proposizione è la condizione necessaria e quale la sufficiente e riscrivere l'enunciato utilizzando le espressioni *"...soltanto se..."* e *"...se..."*. Solo dopo questo lavoro si chiede di scrivere l'enunciato utilizzando l'espressione *"se...allora..."* e di controllare ed eventualmente correggere quanto scritto nel punto precedente. Questo per abituare i ragazzi a lavorare anche con implicazioni che non sono nella classica forma *"se...allora..."* e saper riconoscere ugualmente la struttura logica. Viene chiesto anche di rappresentare graficamente con gli insiemi la proposizione in modo da poter ne capire a fondo il significato logico e ragionare meglio nel punto successivo. Nell'ultimo punto si lavora sull'implicazione inversa, contraria e contronominale e sui rispettivi valori di verità. Per prima cosa gli studenti devono individuare le formalizzazioni corrette relative alle tre implicazioni indirette e scriverle a parole. Poi si chiede che cosa si può affermare riguardo al valore di verità di ciascuna proposizione: solo l'implicazione contronominale è vera, in quanto è logicamente equivalente all'implicazione diretta, mentre dell'implicazione inversa e contraria non si può sapere con certezza il valore di verità, ma si devono valutare i singoli casi.

Lezione 7

Tutti gli esercizi svolti in questa lezione, gli esercizi 3,4 e 5, sono dedicati alle regole di deduzione del *modus ponens* e *modus tollens* e, in particolare, al loro utilizzo nelle dimostrazioni matematiche.

La lezione comincia con un ripasso sulle forme di ragionamento, si chiede agli studenti di ripeterle insieme e di scrivere gli schemi corrispondenti alla lavagna per averli a disposizione durante tutta la lezione. Oltre alle due regole di inferenza corrette, si ripassano e scrivono anche le due regole di deduzione non valide, quella dell'*affermazione del conseguente* e quella della *negazione dell'antecedente*. La classe viene poi divisa in gruppi e a ciascun gruppo viene chiesto di scrivere a scelta un ragionamento corretto e uno scorretto, scegliendo un tema a caso. Una volta scritti, i ragionamenti vengono assegnati casualmente ad un altro gruppo, il quale deve capire quale dei due è corretto e quale sbagliato e indicare lo schema corrispondente. Inventare dei ragionamenti e non solo leggerli, permette di acquisire maggior padronanza e di prendere confidenza con ragionamenti logici nel contesto del linguaggio naturale.

La classe resta divisa in gruppi e viene svolto l'*Esercizio 3* della scheda di lavoro. Si tratta del *test di Wason*, che abbiamo presentato nel Capitolo 3. Si propongono due versioni, una classica e una più articolata. Su un tavolo ci sono 6 carte: ogni carta ha un numero su una faccia e una lettera sull'altra.

Le carte che si vedono sono le seguenti:

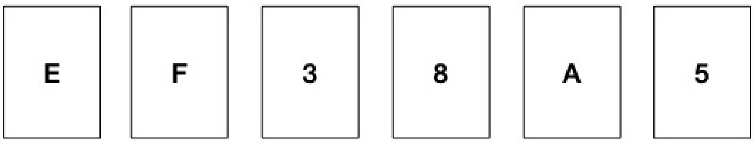


Figura 4.21: Facce visibili delle carte sul tavolo.

Si devono indicare quali carte vanno girate per controllare la verità delle proposizioni *"Se in una faccia c'è una vocale, nell'altra c'è un numero pari"* e *"Se in una faccia c'è una vocale, se nell'altra c'è un numero pari è multiplo di 3"*. Nel testo dell'esercizio viene dato il suggerimento di utilizzare il *modus ponens* e *modus tollens* e di ricordare il significato logico della negazione di un'implicazione $P \wedge \neg Q$. Per risolvere i problemi si può ragionare come segue. Sia V la proposizione *"In una faccia c'è una vocale"*, P l'enunciato *"In una faccia c'è un numero pari"* e con M si indica *"Il numero è multiplo di 3"*. La prima proposizione in termini logici è l'implicazione $V \to P$, che è vera se e solo se non accade $\neg(V \to P)$ che è equivalente a $V \wedge \neg P$. Quindi non deve succedere che su una carta ci sia su una faccia una vocale e sull'altra un numero dispari. Per questo vanno girate le carte **E**, **A**, **3** e **5**. Il problema può essere risolto anche scegliendo le carte usando il *modus ponens*, che prevede che tutte le carte con una vocale devono essere controllate per assicurarsi che nell'altra faccia ci sia un numero pari, e il *modus tollens*, per il quale tutte le carte dispari (non pari) devono essere controllate per assicurarsi che dietro ci sia una consonante (non una vocale). La seconda proposizione, che richiede una sicurezza in questi ragionamenti decisamente più elevata, viene proposta come stimolo e in particolare come esempio di un enunciato contenente due implicazioni. La frase si può formalizzare come $V \to (P \to M)$ e questa è vera solo se non accade $\neg(V \to (P \to M))$ che è equivalente a $V \wedge \neg(P \to M)$ che, con le opportune regole logiche, è equivalente a $V \wedge (P \wedge \neg M)$. Quindi non deve succedere che su una carta ci sia una vocale e un numero che sia contemporaneamente pari e non multiplo di tre. Vanno quindi girate le carte con le scritte **E**, **A** e **8**. Ragionando con le regole di deduzione vanno girate le carte con una vocale per assicurarsi che dietro ci sia $\neg P \vee M$, cioè un numero dispari, o un multiplo di 3, o entrambi (non deve esserci un numero pari e contemporaneamente multiplo di 3), e le carte con un numero pari e multiplo di 3 ($\neg(P \to M) = P \wedge \neg M$) per controllare che dietro ci sia una consonante ($\neg V$).

Gli ultimi due esercizi vogliono mostrare e far riflettere gli studenti sull'importanza di quanto visto nelle lezioni precedenti in contesto matematico, in questo caso nei teoremi e nelle dimostrazioni. L'*Esercizio 4* chiede di considerare il teorema *"Tutti i multipli di 10 sono multipli di 2"*. Per prima cosa si chiede di scriverlo sotto forma di implicazione e di individuare *antecedente* e *conseguente*, che corrispondono ad *ipotesi* e *tesi*. Con l'occasione si vuole sottolineare come la maggior parte dei teoremi matematici abbia la struttura di un'implicazione $I \to T$, o doppia implicazione, anche quando non è scritto esplicitamente. Nel secondo punto dell'esercizio vengono riportate due dimostrazioni, la prima scorretta e la seconda corretta:

Dimostrazione 1. *Sia x un numero naturale. Supponiamo che x non sia multiplo di 10. Allora x non può avere come ultima cifra il numero 0, infatti tutti i multipli di 10 hanno la cifra delle unità pari a 0. Alcuni multipli di 2 hanno come ultima cifra lo 0. Quindi x non è multiplo di 2.*

Dimostrazione 2. *Sia x un numero naturale. Supponiamo che x non sia multiplo di 2. Allora x è un numero dispari, ossia la sua cifra delle unità è 1,3,5,7,9. Di conseguenza x non è multiplo di 10, infatti tutti i multipli di 10 hanno la cifra delle unità pari a 0.*

Nella prima si ragiona supponendo che valga la negazione dell'ipotesi, $\neg I$ e si arriva a dimostrare la negazione della tesi $\neg T$. Nella seconda si utilizza correttamente la *tecnica contronominale*: si suppone valga la negazione della tesi $\neg T$ e si dimostra la negazione dell'ipotesi $\neg I$, tecnica assolutamente lecita in quanto l'implicazione $I \to T$ e logicamente equivalente a $\neg T \to \neg I$. Si chiede ai ragazzi di ragionare sulla struttura logica delle due dimostrazioni riportate e di individuare quale, secondo loro, può essere la prova corretta del teorema e indicare il motivo della scelta. Non si vuole entrare nel merito della dimostrazione matematica, che richiede una trattazione a parte e piuttosto articolata, ma si vuole permettere alla classe di ragionare insieme e cercare di applicare in contesto matematico i concetti logici acquisiti.

L'*Esercizio 5* presenta un teorema in ambito geometrico già enunciato come implicazione logica: *"Se le rette r ed s sono perpendicolari alla retta t, allora sono parallele"*. Anche qua viene riportata la dimostrazione corretta del teorema e si chiede di individuare quali parole indicano che si sta compiendo un'inferenza deduttiva, ovvero le parole evidenziate sotto (*quindi, dunque, di conseguenza*). Nella dimostrazione compaiono anche implicazioni logiche e l'intendo è anche quello di verificare se la classe ha capito la differenza tra *deduzione* e *implicazione.*

Dimostrazione. *Le rette r e s sono perpendicolari alla retta t,* ***quindi*** *gli angoli α e α' sono retti. Sappiamo che se due angoli sono retti allora sono congruenti.* ***Dunque****, α e α' sono congruenti. Inoltre sappiamo che una condizione sufficiente affinché r e s siano parallele è che gli angoli α e α' siano congruenti.* ***Di conseguenza****, r e s sono parallele.*

Infine, viene chiesto di fare un'analisi della struttura logica della dimostrazione e di schematizzare i passaggi individuati nel testo, utilizzando le informazioni riportate e indicando quale regola di deduzione si sta considerando.

P = "le rette r e s sono perpendicolari alla retta t"
Q = "le rette r e s sono parallele"
R = "α e α' sono retti"
T = "α e α' sono congruenti"

Nella dimostrazione ci sono tre *modus ponens* che si schematizzano come segue:

$$\begin{array}{lll} \text{schema A)} & \text{schema B)} & \text{schema C)} \\ P \to R & R \to T & T \to Q \\ P & R & T \\ \hline R & T & Q \end{array}$$

Si vuole anche avvicinare gli studenti al linguaggio simbolico della logica con dei primi passaggi molto semplici.

Implementazione dell'attività in classe

In entrambe le lezioni ho trovato i ragazzi molto partecipi e attivi, concentrati nella risoluzione degli esercizi e con un approccio molto serio e curioso.

Nella sesta lezione in classe erano presenti 8 studenti, ho consegnato la scheda di lavoro a ciascuno e ho chiesto loro di dividersi a coppie per svolgere i primi tre esercizi. Li ho lasciato lavorare circa 30 minuti e poi abbiamo corretto insieme la prima parte della scheda di lavoro.
Nell'*Esercizio 1* tutti gli studenti hanno individuato senza problemi che la proposizione *"Se andiamo al ristorante, ci vieni volentieri?"* non è un'implicazione logica, mentre la proposizione *"Se Socrate morì e visse da uomo saggio, Einstein morì e visse da genio della fisica"* è stata inserita da tutti scorrettamente tra gli enunciati contenenti un'implicazione. La maggior parte ha avuto difficoltà a capire che le proposizioni *"Due rette perpendicolari ad una stessa retta sono parallele"* e *"Per la costruzione geometrica è sufficiente solo un righello"* implicitamente nascondono un'implicazione. Per gli altri enunciati non ci sono stati grossi dubbi.
Nell'*Esercizio 2* la proposizione da analizzare è *"Solo se una funzione è continua, è derivabile"*. Consapevole della difficoltà intrinseca di enunciati contenenti l'espressione *"solo se"*, sono passata subito tra i gruppi per verificare se, in questo caso, antecedente e conseguente erano stati individuati correttamente. Tutte le coppie hanno riscritto l'enunciato nella forma *"Se una funzione è continua, allora è derivabile"*, quindi ho ricavato un momento per rispiegare la struttura logica di frasi contenenti *"solo se"* e ho corretto l'enunciato.
Dopo la correzione il resto dell'esercizio è stato svolto da tutti senza problemi. L'unico dubbio ancora presente è il valore di verità dell'implicazione inversa: la maggior parte ha dichiarato che la proposizione è *falsa* e con la rappresentazione grafica ho spiegato nuovamente il perché non si può sapere con certezza il valore di verità e che dipende dalla funzione considerata, ovvero ci sono funzioni continue ma che non sono derivabili (in questo caso la proposizione è *falsa*) ma ci sono anche funzioni continue che sono derivabili (la proposizione risulta *vera*).

Nel complesso su questi due esercizi, la classe ha lavorato molto bene e in molte parti ha mostrato una buona padronanza delle proprietà dell'implicazione logica.

Nella settima lezione ho restituito la scheda di lavoro che avevo raccolto la lezione precedente e insieme abbiamo ripetuto e riscritto alla lavagna le due regole di deduzione valide e anche le due forme di ragionamento scorretto. In classe erano presenti tutti gli studenti e quindi ho chiesto di formare tre gruppi da tre persone ciascuno e di scrivere due ragionamenti di qualsiasi argomento, uno valido e uno no. Una volta che tutti i gruppi avevano terminato di scrivere, ho consegnato ad un gruppo due ragionamenti corretti individuati dai compagni, ad un altro due ragionamenti sbagliati e all'ultimo uno corretto e uno sbagliato e tutti hanno individuato quali corretti e quali no e lo schema corrispondente. Riporto di seguito quanto hanno scritto gli studenti.

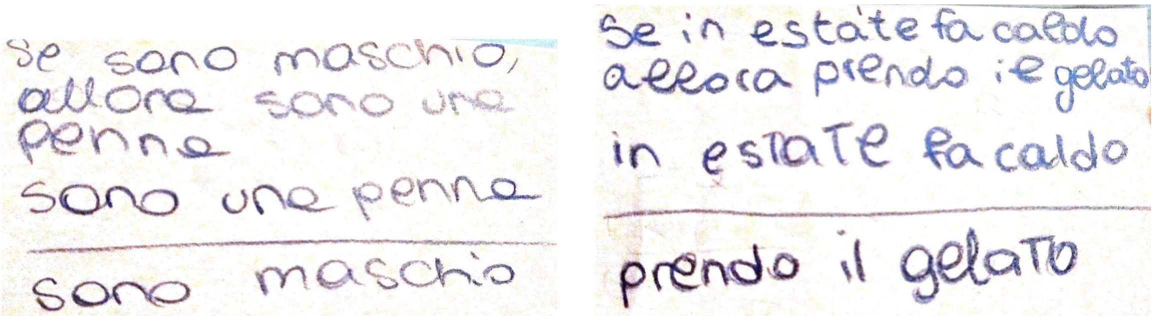


Figura 4.22: Ragionamenti scritti dal primo gruppo: *affermazione del conseguente* (a sinistra) e *modus ponens* (a destra).

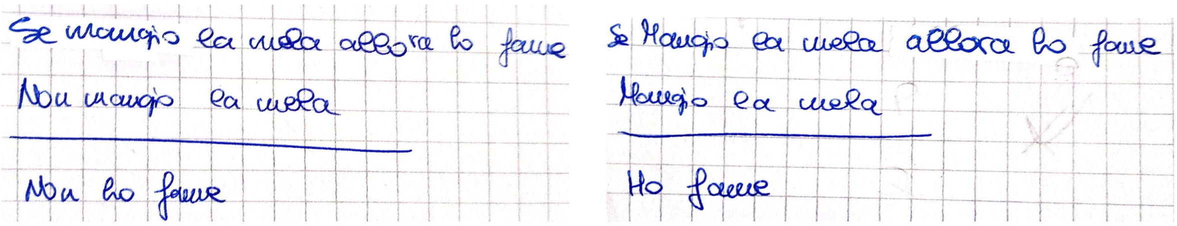


Figura 4.23: Ragionamenti scritti dal secondo gruppo: *negazione dell'antecedente* (a sinistra) e *modus ponens* (a destra).

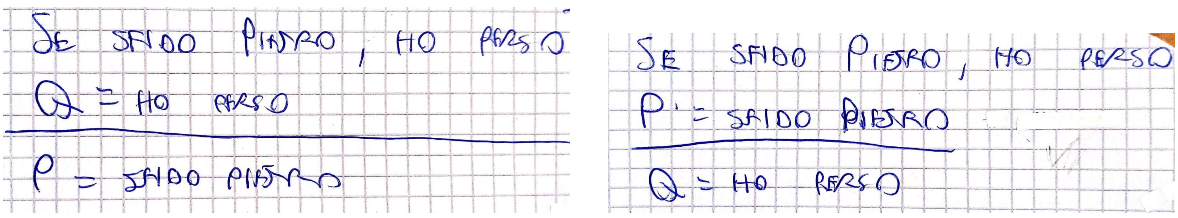


Figura 4.24: Ragionamenti scritti dal terzo gruppo: *affermazione del conseguente* (a sinistra) e *modus ponens* (a destra).

Sempre divisi in gruppi ho lasciato un po' di tempo per ragionare sull'*Esercizio 3* della scheda di lavoro relativo al *test di Wason*. Ho notato fin da subito una grande difficoltà nei ragionamenti che sentivo: un solo gruppo stava seguendo la strada corretta per la prima proposizione *"Se in una faccia c'è una vocale, nell'altra c'è un numero pari"*, individuando correttamente le carte da girare con la scritta **E**, **A**, **3** e **5**. Gli altri gruppi hanno segnato le carte con riportate le vocali e la carta con il numero **8**. Vista la difficoltà ho deciso di non farli ragionare sulla seconda proposizione, molto più complessa, ritenendo più opportuno vedere insieme la soluzione della prima parte di questo esercizio e degli ultimi due. Ho spiegato quindi la soluzione dell'esercizio e ho percepito molta perplessità, quindi ho riproposto loro l'esercizio ma in altro contesto, analizzato nel Capitolo 3. Sul tavolo ci sono 6 carte: ogni carta ha su un lato la scritta di una bevanda e sull'altro un numero e ho disegnato alla lavagna l'immagine riportata in *Figura 4.25*.

Figura 4.25: Test di Wason in contesto sociale.

Ho poi chiesto alla classe quali carte andavano girate per controllare la verità della proposizione *"Se bevi alcolici, devi avere più di 18 anni"* e la maggior parte dei ragazzi ha risposto senza esitazione le carte con riportate le scritte **BIRRA**, **16** e **12**, cioè quelle corrette. Si è trattato quindi di una ulteriore conferma di come i ragionamenti logici e, in questo caso, l'analisi di implicazioni, siano fortemente influenzati dal contenuto e dal contesto.

Gli ultimi due esercizi sono stati svolti tutti insieme. Non ci sono stati problemi e i ragazzi hanno ragionato sugli enunciati dei teoremi e hanno analizzato le dimostrazioni nel modo corretto. Nell'*Esercizio 4*, tutti hanno individuato come dimostrazione corretta la seconda riportata e hanno argomentato bene anche il motivo, accorgendosi che nella dimostrazione si utilizzava la negazione della tesi e la negazione dell'ipotesi e ricordandosi che un'implicazione è logicamente equivalente alla sua contronominale. Nell'*Esercizio 5* quasi tutti hanno individuato le tre parole che indicano una regola di deduzione, un paio di studenti hanno segnato anche l'espressione *"se...allora..."*. Poi in maniera abbastanza sicura hanno individuato gli schemi di deduzione. Hanno avuto qualche perplessità ad individuare lo *schema A)*, in quanto nella dimostrazione non compare l'implicazione iniziale ma viene sottintesa, ovvero che *"Se le rette r ed s sono perpendicolari alla retta t, allora gli angoli* α *e* α' *sono retti"*. Con questi ultimi due esercizi ho potuto mostrare alla classe quanto l'implicazione logica e le regole di deduzione siano fondamentali nei ragionamenti matematici e ho trovato la classe molto attenta e precisa nell'analisi fatta.

In tutte e due le lezioni è stato fondamentale il lavoro di gruppo che ha stimolato gli studenti e ha permesso loro di lavorare nel migliore dei modi rendendo le attività serie e rigorose ma nello stesso tempo divertenti e interattive.

4.7 Lezione 8. Il test finale

Durante l'ottavo incontro, alla classe viene somministrato un test di logica per valutare i possibili miglioramenti sul saper gestire enunciati contenenti implicazioni logiche e sull'utilizzo delle regole di deduzione.

La struttura del test

Il test finale è costituito da *otto* quesiti che vertono tutti sul connettivo di implicazione, le sue proprietà, il valore di verità e il *modus ponens* e *modus tollens*, come nel test iniziale. La tipologia dei quesiti è molto simile a quelli che si trovano nel test somministrato in ingresso proprio per poter valutare nel migliore dei modi i progressi della classe a seguito dell'intervento. I due test non sono esattamente simmetrici ma i quesiti proposti a conclusione del percorso indagano gli stessi aspetti del test iniziale. Anche qui in alcuni quesiti viene posta la domanda *"Sei sicuro della risposta che hai dato?"* per analizzare se, dopo le lezioni, aumenta il grado di sicurezza e di consapevolezza negli studenti. In tre quesiti viene chiesto di spiegare il ragionamento fatto e sotto si riporta un rettangolo dove gli studenti sono liberi di dare un'argomentazione. Il rettangolo permette che ognuno di sentirsi libero di argomentare a parole, con schemi, tabelle, grafici. A posteriori sarebbe stato utile fare la stessa scelta anche nel test iniziale.

Analisi dei quesiti e delle risposte date dagli studenti

Di seguito analizziamo gli *otto* quesiti. In particolare riportiamo le risposte date dagli studenti e mettiamo ciascun quesito, per quanto possibile, in relazione con il corrispettivo quesito del test iniziale.

Quesito 1

Quali dei seguenti ragionamenti sono corretti?

a) Se x è maggiore di 10, allora x è maggiore di 7. Sappiamo che x non è maggiore di 7. Dunque x non è maggiore di 10.

b) Se il gatto dorme, i topi ballano. Il gatto non dorme, quindi i topi non ballano.

c) In un negozio si legge: *"Se superi 50 euro di spesa, ricevi un regalo"*. Quel giorno in negozio Luigi riceve un regalo. Quindi ha speso più di 50 euro.

d) Se un numero ha come cifra delle unità i numeri 0 o 5, allora il numero è divisibile per 5. Il numero 12370 ha come cifra delle unità lo 0, quindi è divisibile per 5.

Figura 4.26: Quesito 1

Questo quesito valuta la capacità di riconoscere ragionamenti corretti e distinguerli dalle fallacie formali, corrisponde, quindi, al *quesito 9* del test iniziale, dove solo 3 studenti su 9 avevano risposto correttamente e 4 avevano dato una risposta parzialmente corretta. In questo quesito, 8 studenti individuano le due risposte corrette, quindi la **a)** (*modus tollens*) e la **d)** (*modus ponens*) e uno individua solo il *modus ponens*.

Quesito 2

QUESITO 2

"Se sono a Tione, allora sono a Trento". Questa frase è da considerarsi *FALSA* in qualsiasi circostanza. Da un punto di vista logico, quale delle seguenti conclusioni è corretta?

a) Non sono a Tione e non sono a Trento.

b) Non sono a Tione ma sono a Trento.

c) Sono necessariamente a Tione.

d) Sono necessariamente a Trento.

Spiega il ragionamento che hai fatto

Figura 4.27: Quesito 2

Questo quesito riguarda il valore di verità di un'implicazione logica, in particolare si considera una proposizione *falsa* e si valuta la capacità degli studenti di concludere che l'antecedente deve essere vero e il conseguente falso, ovvero che la risposta corretta è la **c)**. Il quesito può essere messo in relazione con il *quesito 4* del test d'ingresso, dove le risposte corrette sono state 4 su 9. Anche nel test finale gli studenti che hanno individuato la risposta corretta sono 4, tre dei quali riportano anche un'argomentazione giusta, uno invece argomenta scorrettamente anche se individua la risposta corretta.

Nella *Figura 4.28* è riportata una spiegazione valida data da uno studente.

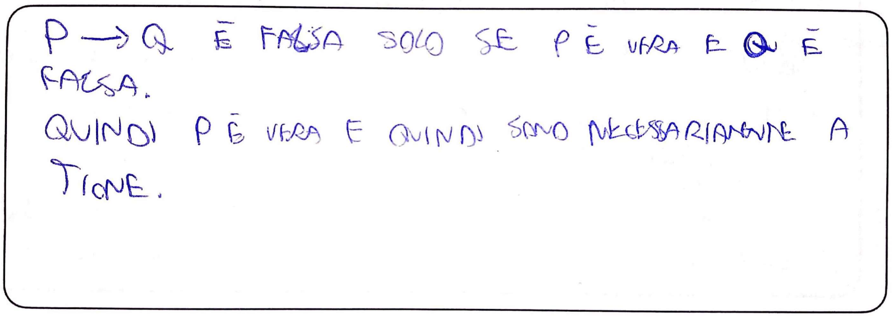

$P \rightarrow Q$ È FALSA SOLO SE P È VERA E Q È FALSA.
QUINDI P È VERA E QUINDI SONO NECESSARIAMENTE A TIONE.

Figura 4.28: "$P \rightarrow Q$ è falsa solo se P è vera e Q è falsa. Quindi P è vera e quindi sono necessariamente a Tione."

Quesito 3

In questo quesito si valuta la capacità degli studenti di riconoscere l'implicazione contronominale e la sua equivalenza con la relativa proposizione diretta, come il *quesito 3* iniziale. Prima delle lezioni solo 2 studenti avevano individuato la soluzione corretta, mentre in questo quesito finale la risposta corretta, ovvero la **b)**, viene segnata da 5 studenti. Resta comunque una certa incertezza in quanto di questi 5 studenti solo 2 rispondono di essere sicuri della risposta data.

"Quando prende il treno, Carlo arriva sempre in ritardo a destinazione". Quale delle seguenti affermazioni può essere dedotta dalla frase precedente?

a) Carlo è arrivato in orario, quindi ha preso il treno.

b) Carlo è arrivato in orario, quindi non ha preso il treno.

c) Carlo è arrivato in ritardo, quindi ha preso il treno.

d) Carlo non ha preso il treno, quindi è arrivato in ritardo.

e) Carlo non ha preso il treno, quindi è arrivato in orario.

Sei sicuro/a della risposta che hai dato? *sì* *no*

Figura 4.29: Quesito 3

Quesito 4

Questo problema indaga la comprensione degli studenti delle espressioni *condizione sufficiente e/o necessaria*, allo stesso modo del *quesito 5* del test d'ingresso, dove 4 studenti avevano risposto correttamente. Anche nel test finale le risposte giuste sono 4, risposta **b)**.

"Ogni volta che un poligono è regolare è inscrivibile in una circonferenza". Questa affermazione è *VERA* ed *"essere inscrivibile in una circonferenza"* per un poligono è:

a) condizione necessaria e sufficiente per essere regolare.

b) condizione solo necessaria per essere regolare.

c) condizione solo sufficiente per essere regolare.

d) condizione né necessaria né sufficiente per essere regolare.

Spiega il ragionamento che hai fatto

Figura 4.30: Quesito 4

Uno studente utilizza la rappresentazione grafica per giustificare la propria risposta. Due ragazzi, nella spiegazione disegnano gli insiemi correttamente, ma segnano la risposta c). Indica che concettualmente hanno capito il significato dell'implicazione, ma confondono le due condizioni. Di seguito sono riportate due argomentazioni della scelta fatta.

Perchè : c) Non è solo sufficiente.
a) No perchè non è sufficiente.
d) No perchè comunque se è regolare deve essere inscrivibile in una circ.

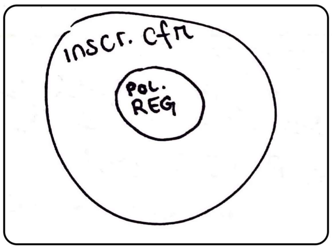


Figura 4.31: Ragionamenti di due studenti. A sinistra, "Perché: c) non è solo sufficiente; a) no perché non è sufficiente; d) no perché comunque se è regolare deve essere inscrivibile in una circonferenza." A destra, rappresentazione insiemistica della proposizione.

Quesito 5

Questo quesito ha la stessa struttura del *quesito 1* iniziale. Il focus è il valore di verità che si attribuisce all'implicazione inversa e contronominale, sapendo che la proposizione diretta è *vera*. Nel test proposto nella prima lezione, 2 studenti su 9 avevano indicato il valore esatto dell'implicazione inversa, e 6 avevano segnato correttamente che l'implicazione contronominale è vera. Nel *quesito 5* del test finale le risposte giuste per la proposizione inversa sono 6, ovvero che *non si può sapere con certezza il valore di verità*, mentre 4 studenti individuano che la proposizione contronominale è *vera*. Si è scelto di porre il quesito in un contesto sconosciuto agli studenti, funzioni continue e derivabili, per valutare a fine percorso didattico la capacità acquisita di analizzare solo la struttura logica delle implicazioni. Solo un paio di studenti che rispondono correttamente dichiarano di essere sicuri delle risposte date.

Considera la seguente proposizione:

"Se P è un punto di massimo per f, allora $f'(P) = 0$".

Sapendo che questa affermazione è *VERA*, indica il valore di verità dei seguenti enunciati:

a) *"Se $f'(P) = 0$, allora P è un punto di massimo per f"*

☐ VERO ☐ FALSO ☐ Non si può sapere con certezza il valore di verità

b) *"Se $f'(P) \neq 0$, allora P **non** è un punto di massimo per f"*

☐ VERO ☐ FALSO ☐ Non si può sapere con certezza il valore di verità

Di quale risposta che hai dato sei sicuro/a?

☐ tutte ☐ a) ☐ b) ☐ nessuna

Figura 4.32: Quesito 5

Quesito 6

Determina quale delle seguenti situazioni **non** è compatibile con l'affermazione *"per superare questo test è necessario, ma non sufficiente, conoscere la matematica e non arrivare in ritardo"*.

a) Giulia conosce la matematica, arriva puntuale e supera il test.

b) Massimo non conosce la matematica, arriva puntuale e supera il test.

c) Riccardo conosce la matematica, arriva puntuale e non supera il test.

d) Mimma non conosce la matematica, arriva in orario e non supera il test.

Figura 4.33: Quesito 6

Qui si analizza la valutazione degli studenti della necessità logica di una condizione, come nel *quesito 8* iniziale. I contesti dei due quesiti sono differenti, il quesito nel test d'ingresso è di argomento matematico mentre questo no, e nel test finale viene chiesto di indicare la situazione che non è compatibile con l'affermazione iniziale. Nel quesito iniziale i risultati erano stati molto positivi ma le spiegazioni date sulla scelta della risposta avevano fatto trapelare una scarsa padronanza dell'argomento. In questo quesito 5 studenti su 9 segnano la risposta corretta, cioè la risposta **b)**.

Quesito 7

Questo quesito può essere messo in relazione con il *quesito 6* del test iniziale, dove un solo studente aveva individuato la risposta corretta e 2 dato una risposta parzialmente corretta. Si vuole valutare, come in altri quesiti proposti, la capacità degli studenti di capire il significato logico dell'implicazione e di metterla in relazione con altre implicazioni che si possono ricavare da quella iniziale. La risposta corretta è la **a)** che corrisponde all'implicazione contronominale e 4 studenti segnano tale risposta.

"Se lasciassi cadere il vaso di porcellana questo si romperebbe." Se l'argomentazione precedente è corretta, quale delle seguenti è certamente vera?

a) Se il vaso di porcellana è intatto, ciò vuol dire che non l'ho lasciato cadere.

b) Se non lascerò cadere il vaso di porcellana, questo non si romperà.

c) Se il vaso di porcellana è rotto, questo indica che l'ho lasciato cadere.

d) Nessuna delle precedenti.

Figura 4.34: Quesito 7

Quesito 8

L'ultimo quesito vuole fare una valutazione complessiva di quello che hanno imparato gli studenti, coinvolgendo diversi aspetti dell'implicazione. La proposizione iniziale è enunciata con l'espressione *"solo se"*, come nel *quesito 7* del test iniziale, dove 6 studenti avevano dato la risposta corretta. In questo quesito finale però le risposte coinvolgono anche l'espressione *condizione necessaria* e si vuole valutare la capacità degli studenti di individuare antecedente e conseguente in un'implicazione che non è scritta nella classica forma *"se...allora..."*. La risposta che non è necessariamente vera è la **c)** e 4 studenti su 9 la riescono ad individuare.

"Solo se conservati nel congelatore, i surgelati non si deteriorano". In base alla precedente affermazione, quale delle precedenti **non** è necessariamente vera?

a) Se non conservati nel congelatore, i surgelati si deteriorano.

b) Condizione necessaria perché i surgelati non si deteriorino è che vengano conservati nel congelatore.

c) I surgelati deteriorati non sono stati conservati nel congelatore.

d) I surgelati non deteriorati sono stati conservati nel congelatore.

Spiega il ragionamento che hai fatto

Figura 4.35: Quesito 8

Di seguito sono riportate due argomentazioni date dagli studenti.

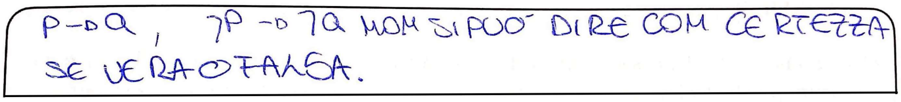


Figura 4.36: "$P \to Q$, $\neg P \to \neg Q$ non si può dire con certezza se vera o falsa."

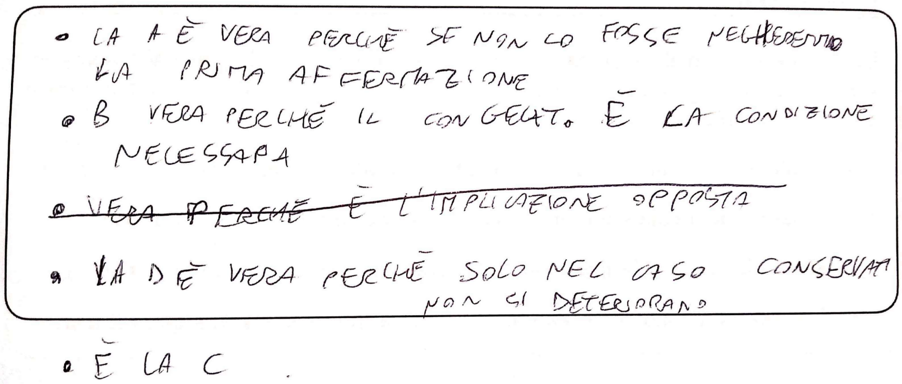


Figura 4.37: "La a) è vera perché se non lo fosse negheremmo la prima affermazione. La b) è vera perché il congelatore è la condizione necessaria. La d) è vera perché solo nel caso conservati nel congelatore non si deteriorano. È la c)."

Un'analisi complessiva delle risposte date nel test finale e un confronto con il test iniziale, per valutare i miglioramenti e progressi della classe a conclusione del percorso effettuato, viene fatta nell'ultimo paragrafo di questo Capitolo, dove vengono proposte le riflessioni conclusive relative all'intero progetto didattico sperimentato.

4.8 Lezione 9. Osservazioni finali

Nell'ultima lezione si è cercato di fare un resoconto finale su quanto fatto insieme nei momenti precedenti e un confronto tra i due test svolti, iniziale e finale.
Si tratta di una lezione più discorsiva, per far emergere le percezioni degli studenti e cercare di portare in classe una piccola discussione a riguardo. Per questo motivo nel paragrafo non distinguo una parte di descrizione strutturale e di obiettivi della lezione ma vado a descrivere quanto successo nell'ultimo incontro.
Nella prima parte della lezione ho corretto il test finale di logica svolto il giorno precedente e ho cercato di far ragionare i ragazzi sugli errori: molti studenti, analizzando i quesiti ad alta voce con i compagni, si sono accorti subito di aver dato alcune risposte sbagliate. Fin da subito la classe mi ha chiesto se il test fosse andato meglio rispetto a quello iniziale, ho mostrato alcuni quesiti dove si è potuto riscontrare un miglioramento e ho analizzato gli aspetti ancora di criticità che sono emersi dal test finale.
Prima di chiedere ai ragazzi impressioni e commenti sulle attività svolte, ho voluto mostrare la seconda parte dell'*Esercizio 4* della scheda di lavoro che, nella settima lezione, era rimasto in sospeso. L'esercizio è quello relativo al *test di Wason*, sul tavolo ci sono 6 carte e le facce che si vedono hanno le scritte **E**, **F**, **3**, **8**, **A** e **5**. Si vuol verificare la verità della proposizione *"Se in una faccia c'è una vocale, se nell'altra c'è un numero pari, è multiplo di 3"*. Per prima cosa ho analizzato l'enunciato spiegando loro che si tratta di una frase contenente due implicazioni, avente quindi la forma $V \to (P \to M)$ e poi ho spiegato che le carte da girare sono quelle con la scritta **E**, **A** e **8** e ho cercato di motivare la soluzione. Ho notato un paio di studenti che riuscivano a seguire il mio ragionamento mentre altri continuavano ad essere molto dubbiosi. Presentare anche un solo esempio un po' più complesso può essere stimolante per i ragazzi più intuitivi e con questo esempio ho potuto mostrare alla classe un enunciato con due implicazioni annidate.

A conclusione, ho chiesto agli studenti se avevano piacere di commentare qualche attività svolta, di dirmi quali aspetti hanno trovato più interessanti e quali meno e quali argomenti sono stati più difficili. Qualche studente ha detto che ha apprezzato il percorso didattico svolto insieme e qualcuno ha detto che in generale il ragionamento logico non è facile da capire, ma, come ci si poteva aspettare, non si sono molto sbilanciati.
Per questo, nell'ultima parte della lezione ho proposto loro un questionario anonimo di gradimento con domande relative al progetto, alcune più generali sulla logica e uno spazio dove poter scrivere liberamente eventuali proposte di miglioramento o suggerimenti.

L'analisi delle riposte date viene proposta nel prossimo paragrafo, inserita nel contesto più generale di riflessioni conclusive riguardanti l'unità didattica svolta.

4.9 Riflessioni conclusive sul progetto

In questo paragrafo vengono fatte delle riflessioni a carattere conclusivo riguardo all'unità didattica svolta. Vengono valutati aspetti strettamente collegati al contenuto affrontato, confrontando quindi i risultati tra i due test per evidenziare i progressi e i miglioramenti della classe; infine si riflette sulle scelte fatte durante le lezioni e su impressioni, suggerimenti ed eventuali critiche emerse dal questionario di gradimento.

Iniziamo con un'analisi complessiva dei risultati dei due test, quello d'ingresso e quello proposto a conclusione del percorso, proponendo un confronto tra le risposte corrette e quelle sbagliate, per vedere se c'è stato un miglioramento generale. Nella *Figura 4.38* sono riportati i grafici delle risposte ai due test. Si è cercato di riordinare il più possibile i quesiti proposti nel test finale, mettendoli in relazione con i quesiti iniziali, in modo da poter valutare meglio i progressi.

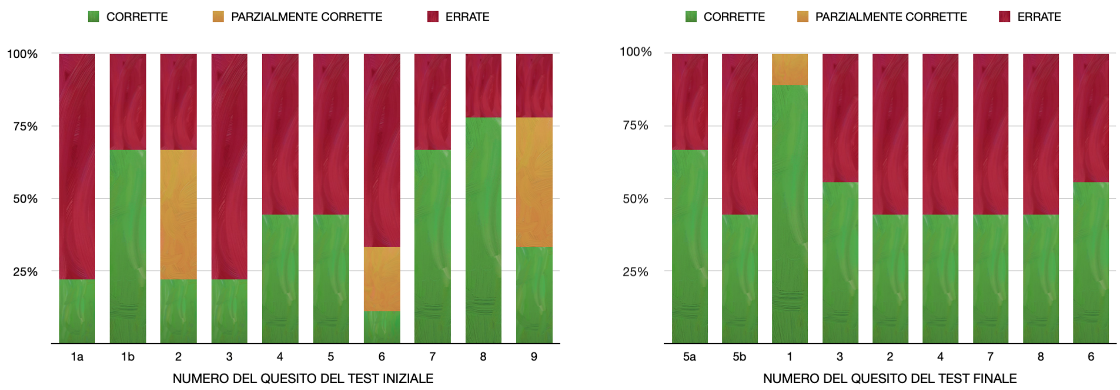


Figura 4.38: Risultati dei due test di logica, iniziale e finale, somministrati alla classe.

Osservando i due grafici, si può notare che c'è stato un miglioramento complessivo. In particolare i progressi più evidenti riguardano il valore di verità che si attribuisce all'implicazione inversa (confrontando il *quesito 1a* e *5a*) e le forme di ragionamento corretto (*quesiti 2* e *9* del test iniziale e *quesito 1* finale). Anche per quanto riguarda il riconoscimento dell'equivalenza logica tra implicazione diretta e contronominale e i significati logici diversi dell'inversa, contraria e altre implicazioni (*quesiti 3* e *6* del test iniziale, e *quesiti 3* e *7* del test finale), emerge una maggior consapevolezza da parte degli studenti. Questo miglioramento non sembra però essere confermato dai *quesiti 1b* e *5b*, che, anzi, mostrano un peggioramento. Nella lezione conclusiva, quando viene proposta la soluzione del test finale, la classe ha avuto una reazione piuttosto negativa al *quesito 5*, ritenendolo molto difficile. Trattandosi comunque di un'implicazione semplice, enunciata esplicitamente, è abbastanza probabile che il loro sconforto e le risposte errate siano dovute al contesto matematico di cui loro non erano a conoscenza e che crea un maggior ostacolo. Dal momento che, negli altri quesiti che coinvolgono l'implicazione contronominale, le risposte sono state positive, e dal fatto che nel *quesito 1b* la maggior parte degli studenti ha risposto correttamente, si ricava un'ulteriore conferma di come i ragionamenti siano fortemente ancorati ai contenuti e di come, in particolare il contesto matematico crei un

ostacolo maggiore. Per quanto riguarda il riconoscimento della *condizione necessaria e/o sufficiente* (*quesito 5* iniziale e *quesito 4* finale), il numero delle risposte corrette è stato lo stesso, ma mentre per il test iniziale quando in classe viene chiesto di motivare la risposta nessuno riesce ad argomentare correttamente, nel test finale qualche ragazzo scrive una spiegazione molto precisa. Anche sui possibili valori di verità di un'implicazione, antecedente e conseguente (*quesito 4* iniziale e *quesito 2* finale), il numero delle risposte corrette è rimasto invariato.
Nel complesso, quindi, l'intervento è stato utile, anche se gli argomenti trattati restano comunque difficili e complessi e richiedono ben più di sei lezioni per prenderne a pieno consapevolezza e padronanza. In particolare, molto ostici sono i valori di verità che possono assumere antecedente e conseguente di un'implicazione ed enunciati dove compare *"solo se"* o, altri modi di esprimere una proposizione condizionale, dove resta difficile capire quale delle due proposizioni sia l'antecedente e quale il conseguente.

In quest'ultima parte andiamo a fare delle riflessioni più generali su tutto il progetto svolto. Per prima cosa è importante avere un feedback degli studenti, per questo a conclusione del percorso viene consegnato un questionario di gradimento alla classe. Di seguito sono riportate le risposte date. Le prime 5 domande vogliono valutare l'apprezzamento delle attività da parte degli studenti e le impressioni strettamente legate agli argomenti trattati nel modulo. Con la prima domanda si valuta l'impressione complessiva della classe riguardo all'esperienza, *Figura 4.39*, e tutti gli studenti hanno apprezzato quanto è stato svolto negli incontri.

Figura 4.39: A conclusione delle attività sull'implicazione logica, come giudichi complessivamente l'esperienza?

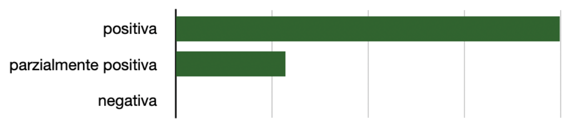
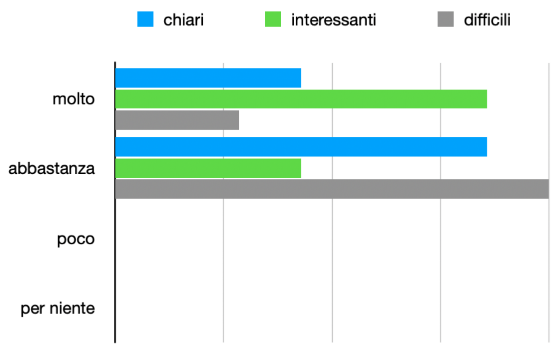


Figura 4.40: Gli argomenti trattati nel modulo sono risultati:



La seconda domanda, *Figura 4.40*, riguarda gli argomenti trattati, in particolare si vuole valutare la chiarezza con cui sono stati esposti, l'interesse che hanno avuto i ragazzi riguardo all'implicazione logica e alle regole di deduzione, e le difficoltà che hanno avuto nel comprendere quanto spiegato. Anche in questo caso per quanto riguarda la chiarezza e l'interesse le risposte sono state positive. E' emerso, invece, come ci si poteva aspettare, che gli argomenti trattati siano risultati agli studenti abbastanza complessi e non sempre di immediata comprensione.

Successivamente si chiede quale aspetto dell'implicazione logica è risultato più difficile. Per due studenti il collegamento fatto tra implicazione logica e letteratura è stato l'argomento più ostico, scrivono che hanno avuto difficoltà a capire il collegamento tra *Dante* o *Alice nel Paese delle Meraviglie* con la logica e che passare dal formalismo logico a testi poetici ha creato abbastanza confusione. Tre studenti individuano come argomento più difficile il valore di verità dell'implicazione logica e le possibili combinazioni dei valori di verità di antecedente e conseguente. Un ragazzo fa riferimento all'utilizzo dei connettivi nel linguaggio naturale e scrive che la parte più difficile per lui è stata distinguere i possibili significati che hanno i connettivi all'interno delle frasi. Una risposta afferma che i ragionamenti deduttivi sono l'argomento più complesso e dove c'è più rischio di sbagliare, infine, due studenti rispondono che non hanno trovato un argomento in particolare ma che la difficoltà è intrinseca nel ragionamento logico. Di seguito sono riportate alcune loro risposte.

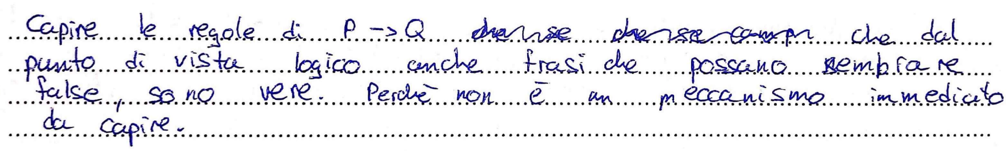


Figura 4.41: "Capire le regole di $P \to Q$ che dal punto di vista logico anche frasi che possono sembrare false, sono vere. Perché non è un meccanismo immediato da capire."

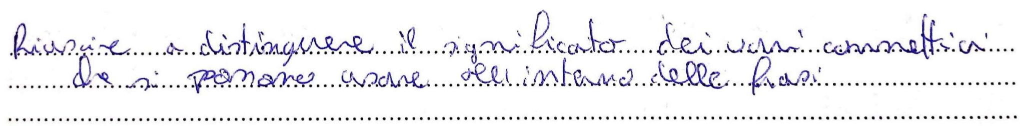


Figura 4.42: "Riuscire a distinguere il significato dei vari connettivi che si possono usare all'interno delle frasi."

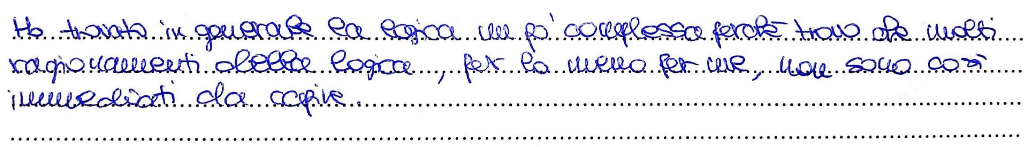


Figura 4.43: "Ho trovato in generale la logica un po' complessa perché trovo che molti ragionamenti della logica, per lo meno per me, non sono così immediati da capire."

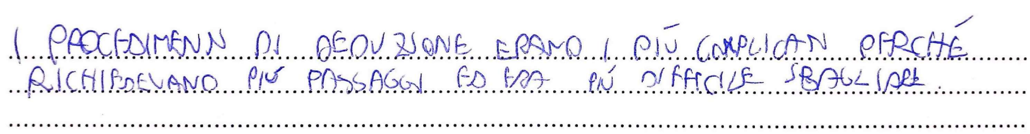


Figura 4.44: "I procedimenti di deduzione erano i più complicati perché richiedevano più passaggi ed era più difficile (intendendo facile) sbagliare."

La domanda successiva vuole valutare l'efficacia e l'interesse che hanno suscitato le varie tipologie di lezioni. Il modulo è costituito da diverse attività che utilizzano metodologie didattiche differenti. Le prime due lezioni hanno un'impronta classica: lezioni frontali per spiegare i concetti teorici con domande e piccoli esercizi da svolgere in pochi minuti per renderle più interattive e dinamiche. La lezione sull'implicazione logica in letteratura è costituita da una parte di spiegazione frontale e una parte partecipata di analisi e ricerca dei ragionamenti che si trovano nei passaggi letterari. Le altre tre lezioni sono costituite da esercizi di gruppo e svolti in modo partecipativo, una, nello specifico sugli esercizi di cavalieri e furfanti, le altre due esercizi di vario tipo sia guidati sia da svolgere autonomamente, sull'implicazione logica e le regole di deduzione. Nel questionario viene chiesto di indicare un ordine di priorità da 1, la lezione più interessante, a 4, la meno interessante. La maggior parte della classe ha trovato più interessanti e divertenti gli esercizi a gruppi, alcuni hanno messo al primo posto quelli relativi all'*Isola di Smullyan*, mentre la maggior parte quelli che si trovano nella scheda di lavoro. Due studenti hanno apprezzato la lezione su *Dante* e *Alice nel Paese delle Meraviglie* e le lezioni teoriche sono state messe quasi da tutti negli ultimi posti. Questo attesta che da parte degli studenti sono molto apprezzate le attività di laboratorio, dove il loro coinvolgimento attivo è prevalente.

Infine, per quanto riguarda il feedback strettamente relativo all'unità didattica, viene chiesto quale argomento è rimasto più impresso. Quattro studenti rispondono che l'attività che li ha colpiti maggiormente è stata l'esercitazione a gruppi, sia gli indovinelli di cavalieri e furfanti, sia gli esercizi svolti nelle ultime due lezioni. Due studenti scrivono che l'argomento che è rimasto più impresso sono le regole di deduzione, il *modus ponens* e *modus tollens*. Un ragazzo non indica un argomento in particolare ma sostiene che *"in realtà essendo argomenti tutti collegati, nel complesso, mi è rimasto impresso tutto"*. Altri due studenti danno delle risposte più particolari che riporto con le loro parole: *"Che comunque anche se siamo sicuri di ciò che leggiamo basta un se che a livello logico può cambiare tutto"* e *"Mi è rimasto impresso come anche da dei cartoni animati possono emergere quesiti di logica e quanto anche noi quotidianamente ci troviamo davanti a dei quesiti di logica"*.

Le domande 6, 7, 8 e 9 del questionario vogliono indagare quanto queste lezioni hanno stimolato l'interesse degli studenti verso la logica matematica e quanto essi abbiano apprezzato l'utilità in ambito matematico e nel linguaggio ordinario, dell'implicazione logica e delle regole di deduzione. Le risposte sono state piuttosto positive. Nelle *Figure 4.45, 4.46, 4.47 e 4.48* sono riportate le domande con le risposte date.

Figura 4.45: Al termine di questa esperienza didattica, sei maggiormente incuriosita/o a conoscere altri aspetti della logica matematica?

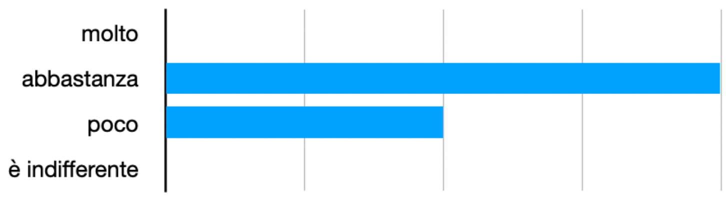


Figura 4.46: Al termine di questo lavoro sull'implicazione logica, ritieni che degli elementi basilari di logica possano esserti utili per capire meglio la matematica?

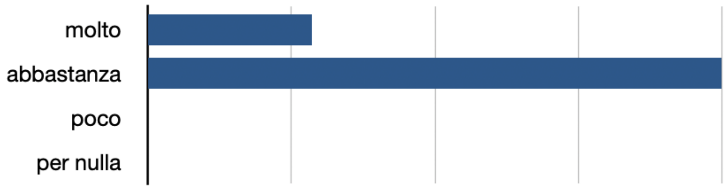


Figura 4.47: E, più in generale, ritieni che possano esserti utili per gestire i processi argomentativi nel linguaggio ordinario?

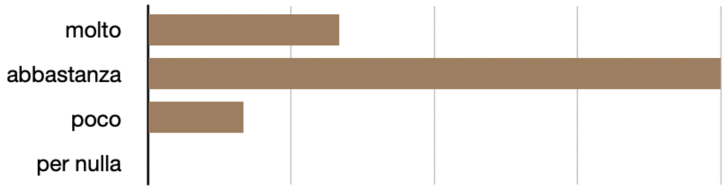
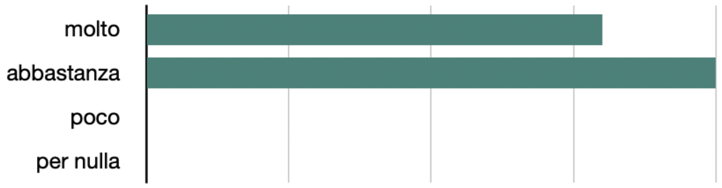


Figura 4.48: Ritieni che l'inserimento di un approfondimento di logica più sistematico nel tuo percorso di studi potrebbe essere utile?



L'ultima domanda chiede eventuali miglioramenti, cambiamenti o suggerimenti riguardo allo svolgimento delle lezioni e alle scelte fatte durante il percorso. Alcuni studenti scrivono che sarebbero stati utili altri esercizi da svolgere a gruppi o insieme in quanto li hanno trovati molto utili. Un paio di commenti riguardano le lezioni teoriche, ritenute da qualcuno abbastanza intense e concentrate, con la richiesta di avere più tempo a disposizione per chiarire meglio i passaggi più difficili. Un ragazzo fa riferimento al linguaggio quotidiano e afferma che *"magari distinguerei meglio la questione dell'implicazione nella logica e nel linguaggio quotidiano"*. Si riportano alcune delle risposte date.

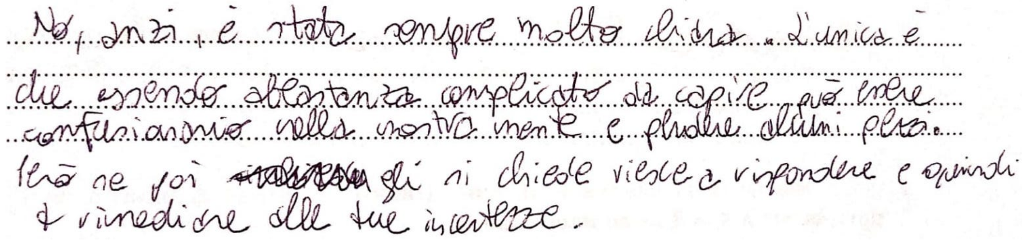
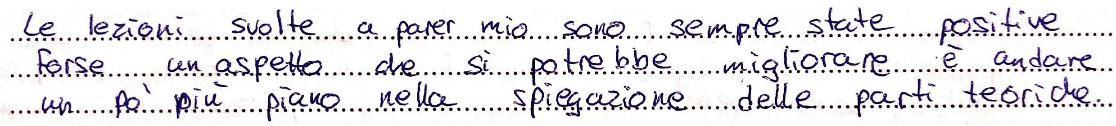
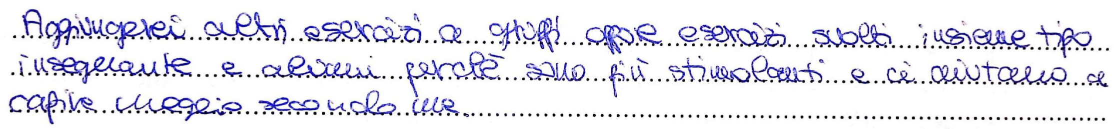

No, anzi, è stata sempre molto chiara. L'unica è
che essendo abbastanza complicato da capire può essere
confusionario nella nostra mente e perdere alcuni pezzi.
Però se poi gli si chiede riesce a rispondere e quindi
a rimediare alle tue incertezze.

Figura 4.49: "No, anzi, è stata sempre molto chiara. L'unica è che essendo abbastanza complicato da capire può essere confusionario nella nostra mente e perdere alcuni pezzi. Però se poi le si chiede riesce a rispondere e quindi a rimediare alle tue incertezze."



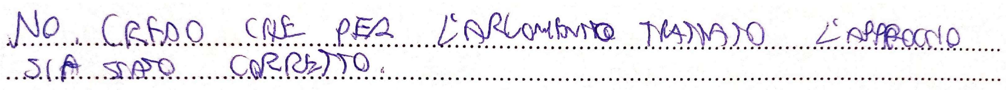
Le lezioni svolte a parer mio sono sempre state positive
forse un aspetto che si potrebbe migliorare è andare
un po' più piano nella spiegazione delle parti teoriche.

Figura 4.50: "Le lezioni svolte a parer mio sono sempre state positive. Forse un aspetto che si potrebbe migliorare è andare un po' più piano nella spiegazione delle parti teoriche."



Aggiungerei altri esercizi a gruppi oppure esercizi svolti insieme tipo
insegnante e alunni perché sono più stimolanti e ci aiutano a
capire meglio secondo me

Figura 4.51: "Aggiungerei altri esercizi a gruppi oppure esercizi svolti insieme tipo insegnante e alunni perché sono più stimolanti e ci aiutano a capire meglio secondo me."



NO CREDO CHE PER L'ARGOMENTO TRATTATO L'APPROCCIO
SIA STATO CORRETTO.

Figura 4.52: "No, credo che per l'argomento trattato l'approccio sia stato corretto."

Da quanto emerso dal questionario di gradimento il bilancio complessivo riguardo all'unità didattica proposta è da ritenersi positivo. Dopo una riflessione finale personale e, in relazione ad alcune impressioni degli studenti, anche altre scelte sulla struttura del percorso didattico sarebbero state utili. È da sottolineare che allo svolgimento del progetto è stato dedicate un numero limitato di ore e che, tutte le attività sono state calibrate per essere svolte in 6 lezioni, oltre a quelle dedicate ai tre questionari. Dal momento che gli studenti non sono abituati ad esercitarsi esplicitamente su argomenti di logica, che richiedono un'elevata concentrazione e attenzione, le parti teoriche potevano essere suddivise in più momenti per non appesantire troppo le lezioni ed evitare di fornire troppi concetti nuovi in tempi ravvicinati. La mia scelta è stata invece di dedicare le prime due ore a presentare tutti i concetti teorici in modo tale che, nelle lezioni successive di attività laboratoriali, le nozioni nuove potessero essere riviste più volte e consolidate. Sicuramente anche altri esercizi da svolgere a gruppi e/o insieme sarebbero stati molto utili e di potenziamento. Per quanto riguarda il rapporto tra linguaggio logico e linguaggio naturale si può pensare ad un intervento un po' più esteso, per trattare un numero maggiore di esempi relativi all'implicazione logica e coinvolgendo anche tutti e cinque i connettivi in modo più approfondito, per dare una visione più completa. All'inizio ho comunque voluto mostrare qualche esempio relativo al distacco tra linguaggio naturale e linguaggio logico anche per gli altri connettivi, ma non mi sono dilungata in quanto non era l'obiettivo principale del progetto.

La classe ha accettato positivamente l'intervento proposto, si è mostrata interessata ed incuriosita nelle varie attività ed ha seguito molto bene tutti gli argomenti proposti, interagendo in modo positivo e proponendo domande e dubbi. Indubbiamente gli argomenti trattati sono molto complessi e non sempre intuitivi e talvolta, durante le attività, questo aspetto è emerso. Ci vuole, quindi, il tempo necessario affinché gli studenti possano apprezzare fino in fondo la struttura logica di un'implicazione e anche l'importanza e l'utilità di tale connettivo.

Vorrei concludere con una riflessione personale. Ho trovato questo lavoro molto stimolante e di arricchimento personale. Il rapporto con la classe è stato decisamente positivo e molte domande che mi sono state poste si sono rivelate molto utili anche per me. Mi sono accorta di quanto, effettivamente, gli argomenti trattati siano complessi per ragazzi di quell'età e di come sia necessario un lavoro continuo su tali aspetti e, più in generale, sulla logica matematica, che penso sia fondamentale in un percorso di studi. I meccanismi che ci sono nei ragionamenti logici richiedono una *forma mentis* ben precisa ma penso che con un lavoro costante tutti gli studenti possano raggiungere buoni risultati in questo campo. Concludo dicendo che, nelle ore in classe, ho potuto constatare quanto importante sia la formazione e la conoscenza dell'insegnante degli argomenti logici trattati per poter lavorare al meglio con gli studenti.

Conclusione

L'idea di questa tesi è nata dalla consapevolezza che l'implicazione logica, una delle strutture fondamentali del ragionamento matematico, sia un concetto complesso e di difficile comprensione e al termine di questo lavoro ne abbiamo avuto la conferma. L'indagine sulla conoscenza dell'implicazione logica a livello pre-universitario, riportata nel Capitolo 1, mostra molti aspetti critici e una scarsa consapevolezza e padronanza di questa struttura logica.

La prima parte di questo lavoro di tesi ha permesso di inquadrare da un punto di vista matematico l'implicazione logica nei suoi diversi aspetti.
Abbiamo visto che l'interpretazione del connettivo logico di implicazione $P \to Q$ ha un significato diverso in logica intuizionista rispetto a quello dato in logica classica attraverso le tavole di verità. Inoltre, molte proprietà dell'implicazione che valgono in logica classica non valgono altrettanto in logica intuizionista, come l'equivalenza di un'implicazione $P \to Q$ con $\neg P \vee Q$ e con la sua contronominale $\neg Q \to \neg P$.
Si è poi mostrato come sia possibile ridurre il numero di connettivi utilizzando solo l'implicazione logica e la costante per il falso ed esprimere tutti gli altri in funzione di questi due prescelti. Inoltre, è stato presentato un approccio alternativo alla logica proposizionale attraverso una teoria formale, all'interno della quale l'implicazione ha un ruolo fondamentale e, infatti, gli assiomi della teoria alla Hilbert riguardano solo proprietà dell'implicazione logica. Abbiamo anche dimostrato come sia possibile utilizzare solo due regole deduttive relative all'implicazione e la riduzione all'assurdo per derivare tutte le altre regole del calcolo della deduzione naturale classica.
È stato studiato, infine, il *teorema di deduzione*, che permette di collegare il concetto di implicazione a quello di deduzione e abbiamo visto che, lavorando nel sistema formale della deduzione naturale, tale teorema non è più necessario in quanto è sostituito dalle due regole di introduzione e di eliminazione dell'implicazione.

Nella seconda parte sono stati messi in luce gli aspetti didattici relativi all'implicazione logica. Sono stati analizzati gli errori concettuali più diffusi che si riscontrano nei processi di apprendimento e, in seguito, sono state fatte alcune considerazioni per una didattica efficace. Abbiamo visto l'importanza di dare significatività e concretezza agli argomenti introdotti, di lavorare in contesti di apprendimento ben definiti e di non limitarsi ad introdurre i connettivi solo attraverso le tavole di verità ma di concentrarsi sul loro significato.
Si può certamente affermare che l'implicazione logica risulta essere un concetto mol-

to complesso e in molti suoi aspetti poco intuitivo e, solo con una continua pratica, si può raggiungere una buona padronanza e capacità di utilizzo.
Una prima grossa difficoltà nasce dall'incongruenza, del tutto lecita, tra linguaggio naturale e linguaggio logico formale che, talvolta, porta a interpretazioni scorrette di enunciati contenenti implicazioni; abbiamo anche rilevato come l'interpretazione di proposizioni condizionali sia altamente influenzata dal contesto e dal contenuto. Inoltre, come si è visto, le tante forme della lingua italiana che esprimono un'implicazione logica costituiscono motivo di fraintendimento della sua univoca struttura nel contesto logico-matematico. Sono emerse molte difficoltà anche nel saper gestire correttamente le locuzioni *condizione necessaria* e *condizione sufficiente*. Tutti questi aspetti creano confusione e ostacolano una più agevole assimilazione.
Un altro punto critico è la difficoltà di valutare un'implicazione $P \to Q$ come un unico enunciato e di attribuire alla proposizione nel suo insieme un valore di verità che dipende da quello che assumono le proposizioni P e Q che la costituiscono. Questo è emerso chiaramente in un quesito dell'indagine iniziale che conferma che la maggior parte degli studenti è convinta, erroneamente, che un'implicazione risulta falsa quando l'antecedente è falso e il conseguente è vero.
In ultimo si sono visti gli errori di ragionamento più comuni, l'*affermazione del conseguente* e la *negazione dell'antecedente*, strettamente collegati al fatto che in molti casi all'implicazione inversa, rispettivamente all'implicazione contraria, si attribuisce lo stesso valore di verità dell'implicazione diretta.

Infine, nell'ultima parte è stato presentato un progetto didattico di logica che ho svolto in una classe terza di un liceo scientifico con opzione Scienze Applicate. Il progetto è stato attuato con l'obiettivo di potenziare la capacità di utilizzo consapevole dell'implicazione logica in contesto matematico e argomentativo. Ho cercato di sfruttare tutti gli spunti di riflessione studiati e presentati nel Capitolo 3 per sviluppare, nell'unità di apprendimento proposta, una linea didattica il più efficace e coerente possibile per cercare di ridurre le difficoltà che gli studenti incontrano nella gestione dell'implicazione logica.
Il bilancio dell'esperienza è da considerarsi positivo sia per quanto concerne la risposta degli studenti che sono stati coinvolti durante il percorso, sia per me che ho preparato e svolto le lezioni e le attività in classe. L'implicazione logica, le sue proprietà, la differenza con il concetto di deduzione e le regole di inferenza sono argomenti concettualmente complessi e non facili da spiegare né tanto meno da essere immediatamente compresi.
L'esperienza svolta mi ha consentito di sperimentare i diversi aspetti che caratterizzano la relazione pedagogica tra docente e studente in un ambito disciplinare, quello matematico, che comporta, per le sue oggettive difficoltà, la continua ricerca da parte dell'insegnante delle strategie più adatte a far conseguire agli studenti gli obiettivi didattici e formativi che si intendono perseguire.
Come ho potuto constatare, la sostanziale assenza nei curricoli scolastici di percorsi specifici e strutturati di logica matematica rende questo ambito disciplinare particolarmente adatto ad un approccio innovativo nella pratica didattica del docente di matematica, favorendo, inoltre, una prospettiva interdisciplinare particolarmente stimolante.

In quest'ottica, il progetto può essere visto come un punto di partenza per sviluppare un percorso più ricco e completo che coinvolge, oltre all'implicazione logica, anche gli altri connettivi, dedicando particolare attenzione al rapporto tra linguaggio naturale e linguaggio logico. È, infatti, importante proporre molti esempi tratti dal linguaggio quotidiano per poter dare significatività agli argomenti introdotti sia di logica, sia, più in generale, di matematica.
Infine, l'unità didattica svolta mi ha dato la possibilità di far conoscere agli studenti una matematica diversa, una disciplina il cui cuore pulsante non è costituito dalla meccanica operazione del calcolo, ma dal ragionamento critico e consapevole.

Questa esperienza è stata per me una sfida nella quale ho potuto unire due mie grandi passioni, la *matematica* e *l'insegnamento*. Non si tratta solo di insegnare questa meravigliosa materia, ma di accompagnare i ragazzi in un percorso di crescita personale, contribuendo anche allo sviluppo di un pensiero critico e insegnando loro a ragionare in modo rigoroso, consapevole e autonomo.
Vorrei concludere citando il filosofo Platone, che ha sintetizzato in modo esemplare il compito arduo ma fondamentale dell'insegnante:

"[...] Non è, questa mia, una scienza come le altre: essa non si può in alcun modo comunicare, ma come fiamma s'accende da fuoco che balza: nasce d'improvviso nell'anima, dopo un lungo periodo di discussioni sull'argomento e una vita vissuta in comune, e poi si nutre di se medesima."

Appendice A

Materiali utilizzati in classe

Di seguito sono raccolti i materiali utilizzati nel corso della sperimentazione presso la classe terza A liceo scientifico opzione scienze applicate dell'Istituto d'Istruzione Lorenzo Guetti. Sono riportati le presentazioni di supporto per le lezioni, la scheda di lavoro con gli esercizi proposti e i tre questionari, quello iniziale, finale e di gradimento.

In ordine è possibile consultare i seguenti file:

- *Test iniziale di logica*, svolto durante il primo incontro;
- *Presentazione di spiegazione teorica*, utilizzata nelle due lezioni iniziali;
- *Presentazione: L'isola di Smullyan*, utilizzata nella quarta lezione;
- *Presentazione: Dante e la logica*, utilizzata nella quinta lezione;
- *Presentazione: Alice nel Paese delle Meraviglie*, utilizzata nella quinta lezione;
- *Scheda di lavoro*, proposta nella sesta e settima lezione;
- *Test finale di logica*, svolto durante l'ottavo incontro;
- *Test di gradimento*, proposto a conclusione nell'ultimo incontro di discussione.

Seguono i file indicati in precedenza.

TEST INIZIALE DI LOGICA

Di seguito sono presentati *nove* quesiti di logica a cui rispondere in 50 minuti.

QUESITO 1

Assunta come vera la seguente frase *"Se sotto al tavolo c'è un cane, allora sotto al tavolo c'è un mandarino"*. Cosa possiamo dire riguardo al valore di verità della frase *"Se sotto al tavolo c'è un mandarino, allora sotto al tavolo c'è un cane"*?

a) La frase è vera.

b) La frase è falsa.

c) Non si può sapere con certezza se la frase è vera o falsa.

Sei sicuro della risposta che hai dato? *sì* *no*

E cosa possiamo dire riguardo all'affermazione *"Se sotto al tavolo **non** c'è un mandarino, allora sotto al tavolo **non** c'è un cane'*?

a) La frase è vera.

b) La frase è falsa.

c) Non si può sapere con certezza se la frase è vera o falsa.

Sei sicuro della risposta che hai dato? *sì* *no*

QUESITO 2

Ad un gruppo di studenti viene detto: *"Per passare l'esame di matematica basta studiare dagli appunti presi in classe"*. Se questa affermazione è vera, che cosa si può affermare con certezza? (Scegli tra le seguenti una o più risposte che ti sembrano corrette)

a) Se non studio dagli appunti presi in classe, sicuramente non passo l'esame di matematica.

b) Se uno studente passa l'esame di matematica, vuol dire che ha studiato dagli appunti presi in classe.

c) Chi non ha passato l'esame di matematica non ha studiato dagli appunti presi in classe.

d) Chi ha studiato dagli appunti presi in classe passerà l'esame di matematica.

QUESITO 3

Considera la seguente affermazione: *"Se la porta è chiusa a chiave, allora Maria è fuori casa"*. Se è vera la precedente affermazione, quale tra le seguenti affermazioni è vera?

a) Se Maria è in casa, allora la porta non è chiusa a chiave.

b) Se Maria è fuori casa, allora la porta è chiusa a chiave.

c) La porta non è chiusa a chiave e Maria è in casa.

d) Maria è fuori casa solo quando la porta è chiusa a chiave.

e) Se la porta è chiusa a chiave, Maria non può uscire di casa.

QUESITO 4

Caterina ha detto: *"Quando piove, prendo l'ombrello"*. Per dimostrare che Caterina ha detto il falso:

a) è necessario che non piova e prenda l'ombrello.

b) è necessario che non piova.

c) è necessario che prenda l'ombrello.

d) è necessario che piova.

Sei sicuro della risposta che hai dato? *sì* *no*

QUESITO 5

"Avere tutti gli angoli retti" per un quadrilatero, è:

a) condizione solo sufficiente affinché un quadrilatero sia un rettangolo.

b) condizione solo necessaria affinché un quadrilatero sia un rettangolo.

c) condizione necessaria e sufficiente affinché un quadrilatero sia un rettangolo.

d) condizione né necessaria né sufficiente affinché un quadrilatero sia un rettangolo.

e) non lo so.

QUESITO 6

"Tra i numeri naturali, se un numero è multiplo di a, allora è multiplo di b".
Se questa proposizione è vera, è vero anche che...
(scegli tra le seguenti affermazioni una o più frasi che ti sembrano corrette)

a) se un numero è multiplo di b, allora è multiplo di a.

b) alcuni multipli di a non sono multipli di b.

c) se un numero è multiplo di a, allora non è multiplo di b.

d) se un numero non è multiplo di a, allora non è multiplo di b.

e) se un numero non è multiplo di b, allora non è multiplo di a.

Spiega il ragionamento che hai fatto: ....
....
....
....
....
....
....

Sei sicuro della risposta che hai dato? *sì* *no*

QUESITO 7

Considera la seguente affermazione: *"Solo se la mia automobile ha benzina può funzionare"*. Se quanto affermato è vero, quale delle seguenti **non** è necessariamente vera?

a) La mia automobile funziona solo se ha benzina.

b) Se la mia automobile non ha benzina, allora non può funzionare.

c) Se la mia automobile ha benzina, allora funziona.

d) Se la mia automobile funziona, allora ha benzina.

Sei sicuro della risposta che hai dato? *sì* *no*

QUESITO 8

Considera la proposizione *"Nella somma di due numeri reali, è necessario che almeno uno dei due sia positivo, affinché anche la somma sia positiva"*.
Questa affermazione è vera, ed è vero anche che...
(scegli tra le seguenti affermazioni una o più frasi che ti sembrano corrette)

a) se la somma di due numeri reali è positiva, allora entrambi i numeri sono positivi.

b) la somma di due numeri reali può essere negativa anche se i numeri sono entrambi positivi.

c) se la somma di due numeri reali è positiva, allora almeno uno di essi è positivo.

d) due numeri reali sono positivi se e solo se la loro somma è positiva.

e) se la somma di due numeri reali è negativa, significa che i due numeri sono entrambi negativi.

Spiega il ragionamento che hai fatto: ....
....
....
....
....
....

Sei sicuro della risposta che hai dato? *sì* *no*

QUESITO 9

Quale o quali dei seguenti ragionamenti sono corretti?

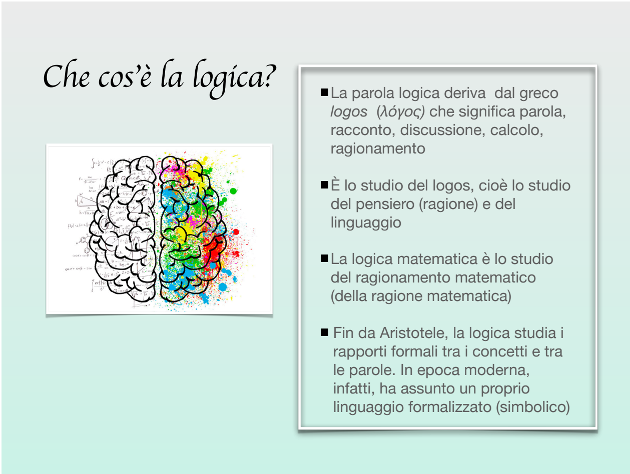
a) Se il signor Rossi ha ereditato una grossa somma, allora è ricco. Rossi è ricco. Dunque Rossi ha ereditato una grossa somma.

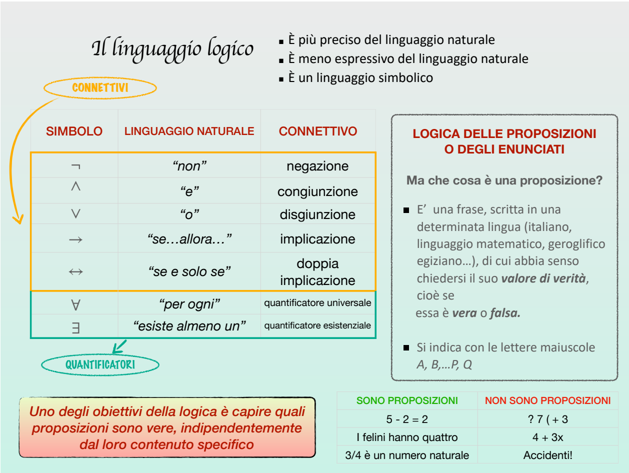
b) Se il signor Rossi ha ereditato una grossa somma, allora è ricco. Rossi *non* è ricco. Dunque Rossi *non* ha ereditato una grossa somma.

c) Se il signor Rossi ha ereditato una grossa somma, allora è ricco. Rossi *non* ha ereditato una grossa somma. Dunque Rossi *non* è ricco.

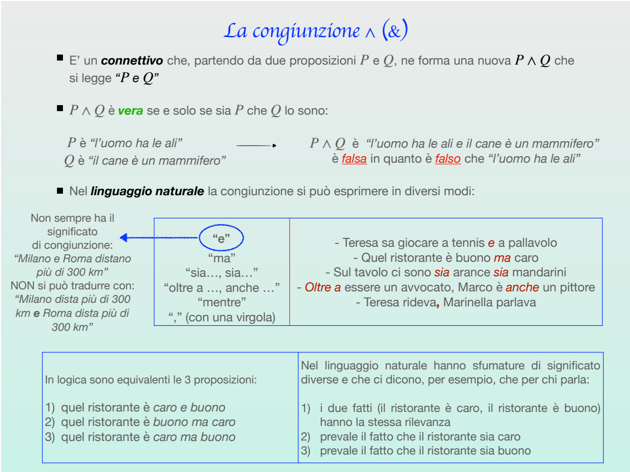
d) Tutti i ragionamenti precedenti sono corretti.

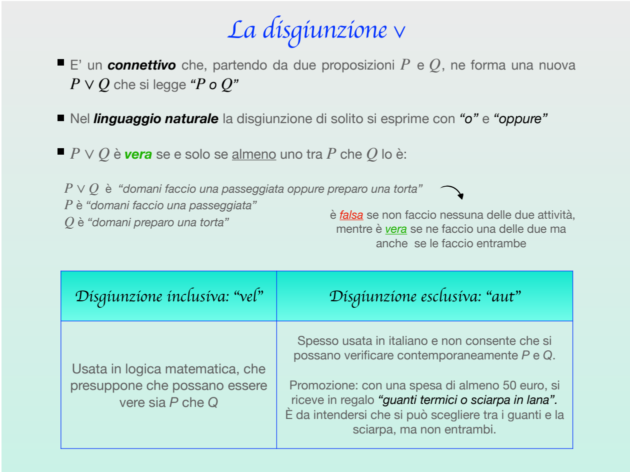

L'implicazione logica
Università degli studi di Padova
gennaio - febbraio 2023
Carlotta Paoli


Che cos'è la logica?
La parola logica deriva dal greco logos (λόγος) che significa parola, racconto, discussione, calcolo, ragionamento
È lo studio del logos, cioè lo studio del pensiero (ragione) e del linguaggio
La logica matematica è lo studio del ragionamento matematico (della ragione matematica)
Fin da Aristotele, la logica studia i rapporti formali tra i concetti e tra le parole. In epoca moderna, infatti, ha assunto un proprio linguaggio formalizzato (simbolico)


Il linguaggio logico
È più preciso del linguaggio naturale
È meno espressivo del linguaggio naturale
È un linguaggio simbolico
CONNETTIVI
SIMBOLO | LINGUAGGIO NATURALE | CONNETTIVO
¬ | "non" | negazione
∧ | "e" | congiunzione
∨ | "o" | disgiunzione
→ | "se…allora…" | implicazione
↔ | "se e solo se" | doppia implicazione
∀ | "per ogni" | quantificatore universale
∃ | "esiste almeno un" | quantificatore esistenziale
QUANTIFICATORI
LOGICA DELLE PROPOSIZIONI O DEGLI ENUNCIATI
Ma che cosa è una proposizione?
E' una frase, scritta in una determinata lingua (italiano, linguaggio matematico, geroglifico egiziano…), di cui abbia senso chiedersi il suo valore di verità, cioè se essa è vera o falsa.
Si indica con le lettere maiuscole A, B,…P, Q
Uno degli obiettivi della logica è capire quali proposizioni sono vere, indipendentemente dal loro contenuto specifico
SONO PROPOSIZIONI | NON SONO PROPOSIZIONI
5 - 2 = 2 | ? 7 (+ 3
I felini hanno quattro | 4 + 3x
3/4 è un numero naturale | Accidenti!


La negazione ¬
E' un connettivo che, partendo da una proposizione P, ne forma una nuova ¬P che si legge "non P"
Dunque non collega enunciati ma cambia il valore di verità delle proposizioni o ai gruppi di proposizioni
P è vera se e solo se ¬P è falsa:
P è "l'uomo ha le ali"
¬P è "l'uomo non ha le ali", che è vera, poiché "l'uomo ha le ali" è falsa
Nel linguaggio naturale la negazione si può esprimere in diversi modi:
"non" "non è vero che…" "è falso che…" "non si dà i caso che…"
- Il quadrato non ha 5 lati
- Non è vero che il quadrato ha 5 lati
- È falso che il quadrato abbia 5 lati
- Non si dà il caso che il quadrato abbia 5 lati
Aggettivi, pronomi, cambio di costruzione e altre parti de discorso
- L'universo è infinito (= L'universo non è finito)
- Oggi Teresa era assente (= oggi Teresa non era presente)


La congiunzione ∧ (&)
E' un connettivo che, partendo da due proposizioni P e Q, ne forma una nuova P ∧ Q che si legge "P e Q"
P ∧ Q è vera se e solo se sia P che Q lo sono:
P è "l'uomo ha le ali"
Q è "il cane è un mammifero"
P ∧ Q è "l'uomo ha le ali e il cane è un mammifero"
è falsa in quanto è falso che "l'uomo ha le ali"
Nel linguaggio naturale la congiunzione si può esprimere in diversi modi:
Non sempre ha il significato di congiunzione: "Milano e Roma distano più di 300 km" NON si può tradurre con: "Milano dista più di 300 km e Roma dista più di 300 km"
"e" "ma" "sia…, sia…" "oltre a …, anche …" "mentre" "," (con una virgola)
- Teresa sa giocare a tennis e a pallavolo
- Quel ristorante è buono ma caro
- Sul tavolo ci sono sia arance sia mandarini
- Oltre a essere un avvocato, Marco è anche un pittore
- Teresa rideva, Marinella parlava
In logica sono equivalenti le 3 proposizioni:
1) quel ristorante è caro e buono
2) quel ristorante è buono ma caro
3) quel ristorante è caro ma buono
Nel linguaggio naturale hanno sfumature di significato diverse e che ci dicono, per esempio, che per chi parla:
1) i due fatti (il ristorante è caro, il ristorante è buono) hanno la stessa rilevanza
2) prevale il fatto che il ristorante sia caro
3) prevale il fatto che il ristorante sia buono


La disgiunzione ∨
E' un connettivo che, partendo da due proposizioni P e Q, ne forma una nuova P ∨ Q che si legge "P o Q"
Nel linguaggio naturale la disgiunzione di solito si esprime con "o" e "oppure"
P ∨ Q è vera se e solo se almeno uno tra P che Q lo è:
P ∨ Q è "domani faccio una passeggiata oppure preparo una torta"
P è "domani faccio una passeggiata"
Q è "domani preparo una torta"
è falsa se non faccio nessuna delle due attività, mentre è vera se ne faccio una delle due ma anche se le faccio entrambe
Disgiunzione inclusiva: "vel"
Disgiunzione esclusiva: "aut"
Usata in logica matematica, che presuppone che possano essere vere sia P che Q
Spesso usata in italiano e non consente che si possano verificare contemporaneamente P e Q.
Promozione: con una spesa di almeno 50 euro, si riceve in regalo "guanti termici o sciarpa in lana".
È da intendersi che si può scegliere tra i guanti e la sciarpa, ma non entrambi.

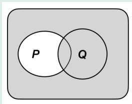
L'implicazione →

- E' un ***connettivo*** che, partendo da due proposizioni P e Q, ne forma una nuova $P \to Q$

$P \to Q$ che si legge *"P implica Q"* o *"se P allora Q"*

antecedente (premessa) **conseguente (conseguenza)**

- Da un punto di vista insiemistico, l'implicazione $P \to Q$ corrisponde alla zona colorata in figura



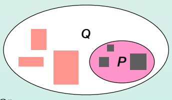
- Se consideriamo una proposizione vera, ad esempio

*"**se** un poligono è un quadrato, **allora** è certamente un rettangolo"*

Allora l'implicazione è concettualmente collegata all'***<u>inclusione tra insiemi.</u>***

Sia P = {insieme dei quadrati} e Q = {insieme dei rettangoli}

*"**se** un poligono appartiene all'insieme P, **allora** appartiene anche all'insieme Q"*



$P \subset Q$

- $P \to Q$ si deve intendere nel seguente modo:

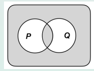
"ogni volta che si verifica P allora si deve verificare anche Q"

La doppia implicazione ↔

- E' un ***connettivo*** che, partendo da due proposizioni P e Q, ne forma una nuova $P \leftrightarrow Q$ che si legge *"P se e solo se Q"*

- Il suo significato è la *congiunzione* delle due *implicazioni* tra P e Q nelle due direzioni possibili

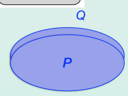
$P \leftrightarrow Q$ è equivalente per definizione a $(P \to Q) \land (Q \to P)$



- Se consideriamo una doppia implicazione vera, ad esempio

*"un triangolo è equilatero **se e solo se** è equiangolo"*

corrisponde all'***<u>equivalenza tra due insiemi</u>***



Sia P = {insieme dei triangoli *equilateri*} e Q = {insieme dei triangoli *equiangoli*}

$P = Q$

*"un triangolo appartiene all'insieme P **se e solo se** appartiene anche all'insieme Q"*

- $P \leftrightarrow Q$ è ***vera*** quando P e Q hanno lo <u>*stesso valore di verità*</u>: entrambe vere o entrambe false

La proposizione *"domani vado al mare **se e solo se** è bel tempo"* è <u>*falsa*</u> in due casi:
1) vado al mare ma è brutto tempo
2) non vado al mare anche se è bel tempo

L'implicazione: quando assumere $P \to Q$ vera?

	P è la proposizione *"Teresa fa la brava"* Q è la proposizione *"La mamma porta Teresa al cinema"* $P \to Q$ è la proposizione *"se Teresa fa la brava, allora la mamma la porta al cinema"*
	In quale delle seguenti quattro situazioni la promessa <u>non</u> è stata mantenuta?
1	Teresa fa la brava *(P vera)* e la mamma la porta al cinema *(Q vera)*
2	Teresa fa la brava *(P vera)* ma la mamma non la porta al cinema *(Q falsa)*
3	Teresa non fa la brava *(P falsa)* ma la mamma la porta al cinema *(Q vera)*
4	Teresa non fa la brava *(P falsa)* e la mamma non la porta al cinema *(Q falsa)*

↓

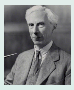
1	VERO → VERO	VERO
2	VERO → FALSO	FALSO
3	FALSO → VERO	VERO
4	FALSO → FALSO	VERO

FALSO → FALSO	VERO

e

FALSO → VERO	VERO

Bertrand Russel (1872-1970)



Uno studente chiede a Russel:
"se 2 + 2 fa 5, allora lei saprebbe dimostrarmi di essere il Papa?"
E Russel rispose senza esitare:
"Assumiamo che 2 + 2 sia 5.
Sottraendo 2 da entrambe le parti,
otteniamo che 2 è uguale a 3.
Scambiando i due membri dell'uguaglianza,
otteniamo che 3 coincide con 2.
Sottraendo ancora 1,
deduciamo che 2 è uguale a 1.
Ora io e il papa siamo 2.
Ma se 2 è uguale a 1, allora siamo 1:
quindi io sono il Papa"

$$\varnothing \subseteq A$$
$$\forall x\ (x \in \varnothing \to x \in A)$$
$$\forall x\ (\perp \to x \in A)$$

In conclusione: quando assumere $P \to Q$ vera?

$P \to Q$ è FALSA solo nel caso in cui <u>P è VERA</u> e <u>Q è FALSA</u>

In tutti gli altri casi l'implicazione $P \to Q$ è VERA

Se l'antecedente è *falso* (P è falso), l'enunciato complessivo $P \to Q$ è sempre *vero*, indipendentemente dal valore di verità del conseguente (Q può essere vero oppure falso)

↔

"Ex falso quodlibet"
che significa
"dal falso può discendere qualsiasi cosa"

$VERO \to VERO = VERO$
$VERO \to FALSO = FALSO$

$FALSO \to VERO = VERO$
$FALSO \to FALSO = VERO$

Alcune proprietà di $P \to Q$

- *L'implicazione <u>non va intesa nel senso di "causa-effetto"</u> ma equivale a*

"non vale il primo enunciato oppure vale il secondo"

$\boxed{P \to Q \text{ equivale a } \neg P \lor Q}$ →

$P \to Q$ è vera
se e solo se
P è falsa **oppure** Q è vera
($\neg P$ $\lor$ Q)

<u>Esempio</u>: "se piove, allora prendo l'ombrello" = "non piove oppure prendo l'ombrello"

- Non deve connettere necessariamente enunciati che si riferiscono ad uno stesso tema, la proposizione antecedente non deve essere rilevante perché si verifichi la conclusione

<u>Esempio:</u> *"se 3+2 = 5, allora Parigi è la capitale della Francia"*

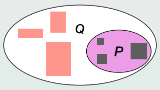
" se 3+2 = 6, allora Parigi è la capitale della Francia"

" se 3+2 = 6, allora Roma è la capitale della Francia"

Sono da considerarsi vere

Alcune proprietà di $P \to Q$

$P \to Q$ viene detta **IMPLICAZIONE DIRETTA**



Esempio: P = "un poligono è un quadrato" e
Q = "un poligono è un rettangolo"
$P \to Q$ = " se un poligono è un quadrato, allora è un rettangolo"

IMPLICAZIONE INVERSA $Q \to P$	Si ottiene scambiando antecedente con conseguente	*"se un poligono è un rettangolo, allora è un quadrato"*	$P \to Q$ **NON** equivale a $Q \to P$
IMPLICAZIONE CONTRONOMINALE $\neg Q \to \neg P$	Si ottiene scambiando antecedente con conseguente e di entrambe si prende la negazione	*"se un poligono non è un rettangolo, allora non è un quadrato"*	$P \to Q$ equivale a $\neg Q \to \neg P$
IMPLICAZIONE CONTRARIA $\neg P \to \neg Q$	Si ottiene prendendo la negazione dell'antecedente e la negazione della conseguente	*"se un poligono non è un quadrato, allora non è un rettangolo"*	$\neg P \to \neg Q$ equivale a $Q \to P$

Condizione sufficiente o condizione necessaria?

$P \to Q$

P è **condizione sufficiente** per Q

Una condizione sufficiente per Q è P

Dire che una condizione P è *sufficiente* per Q significa che la conoscenza di P basta, è sufficiente per concludere Q

Q è **condizione necessaria** per P

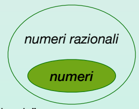
Una condizione necessaria per P è Q

Dire che una condizione Q è *necessaria* per P, significa che, perché P sia soddisfatta, deve essere necessariamente soddisfatta anche Q

Esempio:

P = "essere un numero naturale"
Q = "essere un numero razionale"

$P \to Q$ = "Se un numero è naturale, allora è razionale"



"Essere un numero naturale è sufficiente per essere razionale"

"Essere un numero razionale è necessario per essere un naturale"

"se P allora Q"
"se P, Q"
"Q se P"
"P solo se Q"
"solo se Q, P"
"Q segue da P"

Condizione necessaria e sufficiente

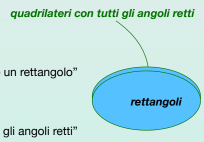
$P \leftrightarrow Q$

"P se e solo Q"
"P equivale a Q"

P è **condizione necessaria e sufficiente** per Q

Q è **condizione necessaria e sufficiente** per P

Esempio:



P = "un quadrilatero ha tutti gli angoli retti"
Q = "un quadrilatero è un rettangolo"

$P \to Q$ = "se un quadrilatero ha tutti gli angoli retti, allora è un rettangolo"

ma vale anche l'implicazione inversa

$Q \to P$ = "se un quadrilatero è un rettangolo, allora ha tutti gli angoli retti"

quindi vale

$P \leftrightarrow Q$ = "Un quadrilatero ha tutti gli angoli retti **se e solo se** è un rettangolo"

Cosa succede nel linguaggio naturale?

È il linguaggio quotidiano, quello che usiamo tutti i giorni per comunicare e relazionarci, non simbolico, ricco di espressività e sfumature.

Le seguenti frasi hanno lo stesso significato logico dell'implicazione $P \to Q$?

- *"Se tu sei campione di scacchi, allora io sono l'imperatore della Cina"*
- *"Se al mare ci si abbronza, in montagna si può passeggiare"*
- *"Se è pronto, allora spegni il forno"*
- *"Se sei stanca, allora perché non vai a dormire?"*

NO!

Nella lingua italiana ci sono anche <u>usi diversi della formula "se…allora…"</u>

- *"Tu **non** sei campione di scacchi **e** io **non** sono l'imperatore della Cina"*
- *"Al mare ci si abbronza **e** in montagna si può passeggiare"*
- Enunciato dichiarativo inserito in una prescrizione
- Enunciato dichiarativo inserito in una domanda

Cosa succede nel linguaggio naturale?

Consideriamo le seguenti frasi pubblicitarie che…

- *"Chi è giovane veste gli abiti della Levi's "*
- *"Se non giochi, non vinci"*

…inducono ad una scorretta interpretazione…

- *"Se uno è giovane, allora veste Levi's"*. *La frase è scorretta perché non tutti i giovani indossano gli abiti di questa marca. Inoltre induce a pensare all'implicazione inversa "Se uno veste abiti Levi's , allora è giovane"*
- Induce a pensare *"Se giochi, allora vinci"*

- $\cancel{P \to Q = Q \to P}$
- $\cancel{\neg P \to \neg Q = P \to Q}$

…producendo i seguenti ERRORI

Cosa succede nel linguaggio naturale?

	IN LOGICA	NEL LINGUAGGIO	QUOTIDIANO
"Solo se fai la brava, andiamo al cinema"	*"Se andiamo al cinema, allora hai fatto la brava"*	Si può intendere come: *"Andiamo al cinema se e solo se fai la brava"*	Non si fa distinzione tra $P \to Q$ e $P \leftrightarrow Q$
"Se hai fame, c'è la torta in frigorifero"	È corretto sostenere che *"Se **non** c'è la torta in frigorifero, allora **non** hai fame"*	Non ha senso	Non vale la proprietà logica $P \to Q = \neg Q \to \neg P$
"Se sei morto, allora sei vivo"	*"sei morto"* è FALSO *"sei vivo"* è VERO Quindi, nel complesso la frase è VERA	Nel complesso la frase è FALSA, non ha senso	non si può applicare la regola logica $FALSO \to VERO = VERO$

Le regole della logica sbagliate? Il linguaggio naturale è ambiguo? NO

Le lingue hanno **FUNZIONI DIVERSE** dal linguaggio simbolico della logica:

- prendere e mettere in atto decisioni
- esprimere emozioni, sentimenti, sensazioni
- intrattenere rapporti con le altre persone
- comunicare informazioni
- dare ordini

Le lingue hanno **STRUMENTI E MECCANISMI INTERPRETATIVI DIVERSI** dal linguaggio simbolico della logica:

- sguardi
- intonazione della voce
- organizzazione
- espressioni
- modi e tempi verbali
- gesti
- un ruolo importante lo ha il CONTESTO in cui vengono dette le frasi. In logica il contesto e il contenuto delle frasi non è sempre importante: interessa il valore di verità che si può dare agli enunciati. Per questo il linguaggio logico è più adatto per parlare di argomenti matematici e tecnici

Deduzione e implicazione

Che cosa è una DEDUZIONE?

È un ragionamento tramite il quale si stabilisce la verità di una proposizione Q (detta ***conclusione***) se si assume che alcune proposizioni $P_1, P_2, ..., P_n$ (dette ***premesse***) siano vere.
E' un processo che da delle premesse permette di ricavare, mediante determinate ***regole di deduzione*** (o **regole di inferenza** o ***schemi di ragionamento***), una conclusione.

È la freccia, che abbiamo visto fino ad ora, nella scrittura $P \to Q$.
È un ***connettivo***,
un'***operazione***,
non è una deduzione.

premesse (possono comprendere una o più proposizioni collegate tra loro da connettivi logici) → **regole di deduzione** (sono regole che, dati degli enunciati, indipendentemente dal loro significato fanno passare a un altro) → **conclusione** (una o più proposizioni)

Le regole di deduzione costituiscono le *"regole del corretto ragionamento"* e quindi, sono applicate nelle procedure di dimostrazione dei teoremi

Regole di deduzione

Ogni regola di deduzione può essere rappresentata sinteticamente mediante uno schema analogo al seguente:

$$\begin{array}{ll} \textbf{Premesse} & \begin{array}{l} P_1, \\ P_2, \\ \ldots \\ P_n \end{array} \\ \hline \textbf{Conclusione} & Q \end{array}$$

Spesso, la conclusione è la proposizione che compare alla fine del ragionamento e può essere introdotta dalle seguenti parole: **quindi, perciò, pertanto, ne consegue che, di conseguenza, ...**

Quando una regola di deduzione è corretta o valida?
Se il ragionamento che si fa è lecito, ovvero se effettivamente in ***tutti*** i casi in cui $P_1, P_2, ..., P_n$ sono vere, anche Q è vera.
Una regola di inferenza non corretta di dice *scorretta* o *invalida*

Proprietà di conservazione della verità

L'uso dell'implicazione → nel ragionamento è caratterizzato da **due importantissime REGOLE DI DEDUZIONE valide:** ***il modus ponens* e *il modus tollens.***

La logica si pone come obiettivo verificare l'esattezza dei ragionamenti, cioè stabilire in che modo da una o più proposizioni è possibile dedurre logicamente altre proposizioni.

Regole di deduzione: il modus ponens

$P =$ "a Teresa piace guardare film dell'orrore"
$Q =$ "Teresa è coraggiosa"

MODUS PONENS: *se P implica Q è una proposizione vera, e anche P lo è, allora la conseguenza Q è vera.*

premesse	$P \to Q$	***Se*** a Teresa piace guardare film dell'orrore, ***allora*** Teresa è coraggiosa
	P	A Teresa piace guardare film dell'orrore
conclusione	Q	Teresa è coraggiosa

REGOLA SCORRETTA

$P \to Q$	***Se*** a Teresa piace guardare i film dell'orrore, ***allora*** è coraggiosa
Q	Teresa è coraggiosa
P	A Teresa piace guardare i film dell'orrore

Teresa può essere coraggiosa per altri motivi, per esempio perché pratica gli sport estremi

Attenzione!

da P si deduce Q

DEDUZIONE: devo dimostrare, sapere che **la proposizione P sia effettivamente VERA**, perché da premesse false potrei giungere ad una conclusione **formalmente corretta** ma falsa

se P allora Q

IMPLICAZIONE: **la proposizione P non deve essere necessariamente VERA,** $P \to Q$ è vero anche se P non lo è

$P =$ "Leonardo Fibonacci è un gatto"
$Q =$ "Fibonacci miagola"

$P \to Q$	***Se*** Leonardo Fibonacci è un gatto, ***allora*** Fibonacci miagola
P	Leonardo Fibonacci è un gatto
Q	Fibonacci miagola

Ragionamento valido ma conclusione falsa

Regole di deduzione: il modus tollens

$P =$ "Giorgio è l'assassino"
$Q =$ "Giorgio era a Roma lunedì a mezzogiorno"

MODUS TOLLENS: *se P implica Q è una proposizione vera, e anche non Q lo è, allora si deduce se anche la conseguenza non P è vera*

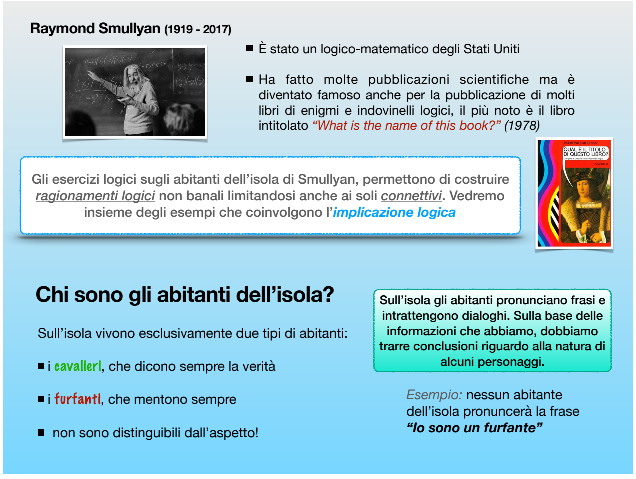
premesse	$P \to Q$	***Se*** Giorgio è l'assassino, ***allora*** era a Roma lunedì a mezzogiorno
	$\neg Q$	Giorgio ***non*** era a Roma lunedì a mezzogiorno
conclusione	$\neg P$	Giorgio ***non*** è l'assassino

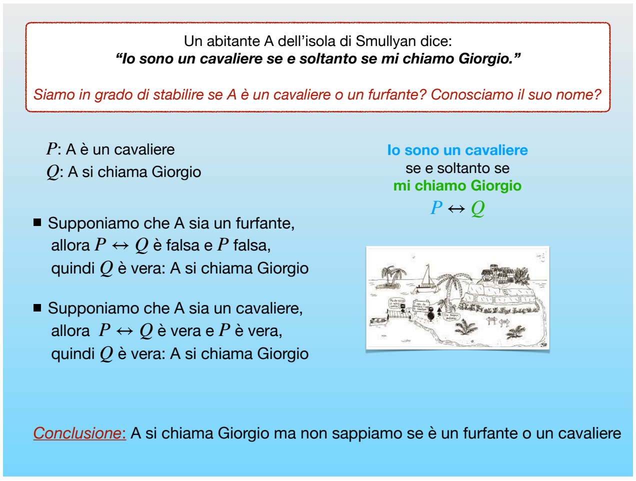
REGOLA SCORRETTA

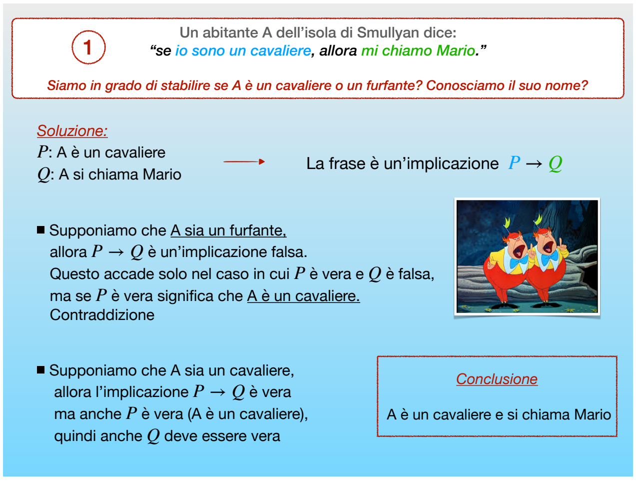
$P \to Q$	***Se*** Giorgio è l'assassino, ***allora*** era a Roma lunedì a mezzogiorno
$\neg P$	Giorgio ***non*** è l'assassino
$\neg Q$	Giorgio ***non*** era a Roma lunedì a mezzogiorno

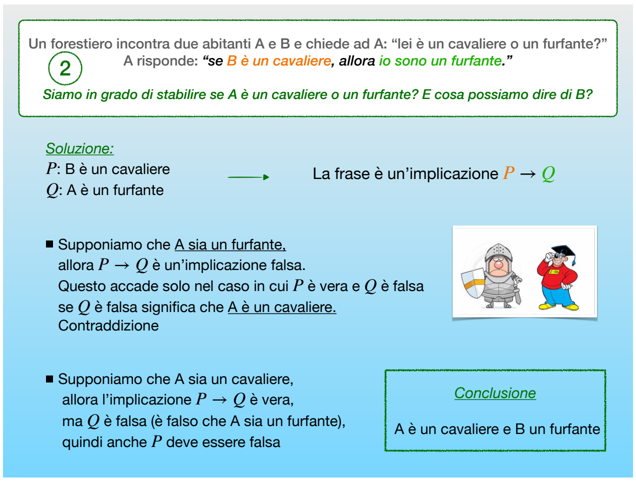
Giorgio può non essere l'assassino ed essere stato comunque a Roma lunedì a mezzogiorno per motivi di lavoro

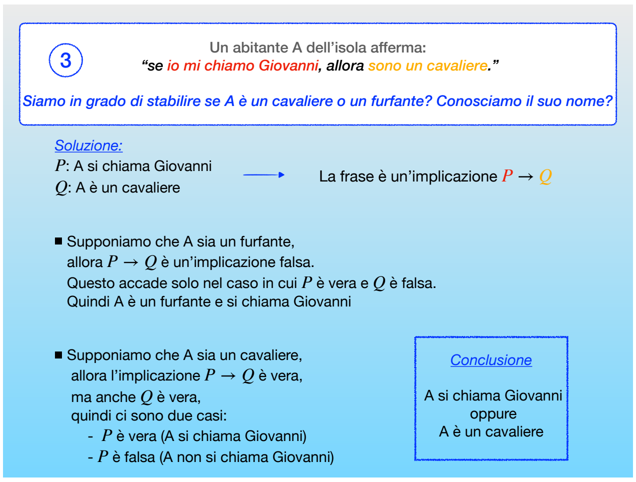
Presentazione: L'isola di Smullyan



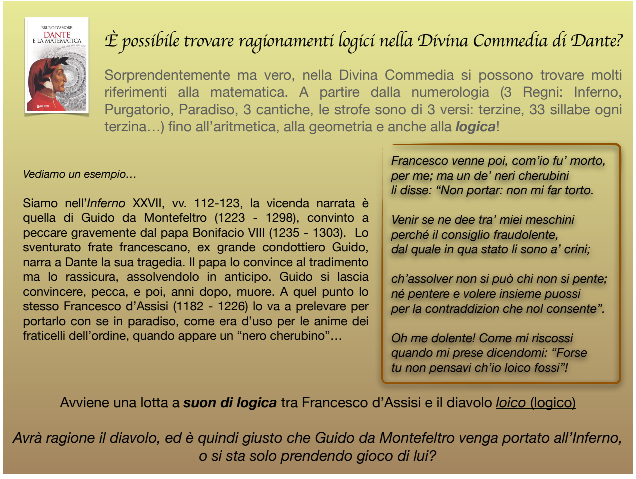


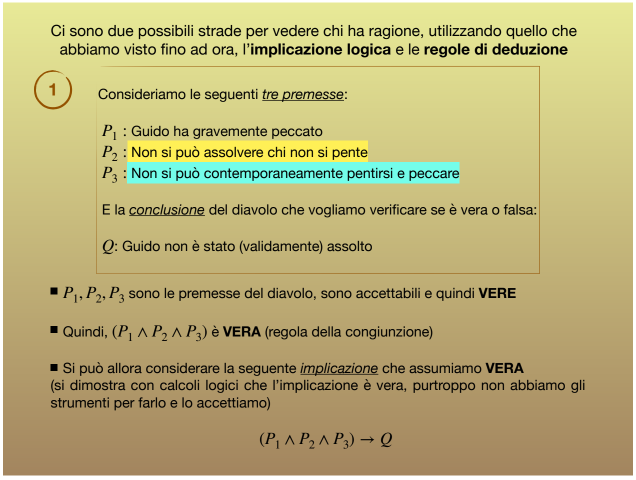


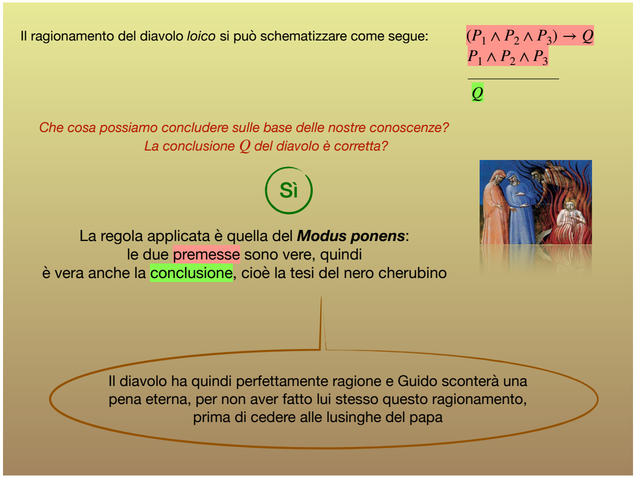


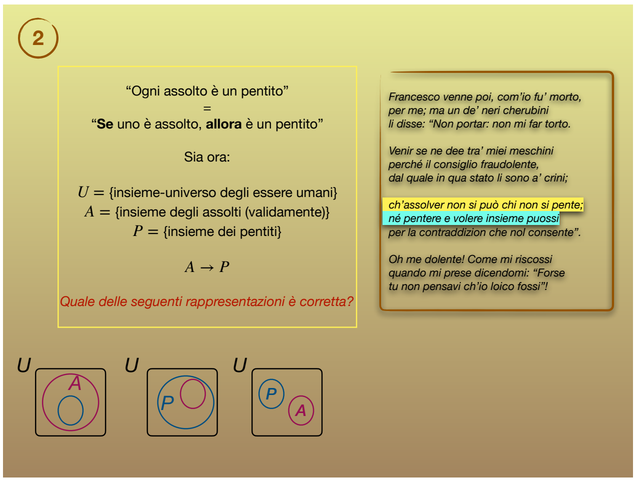


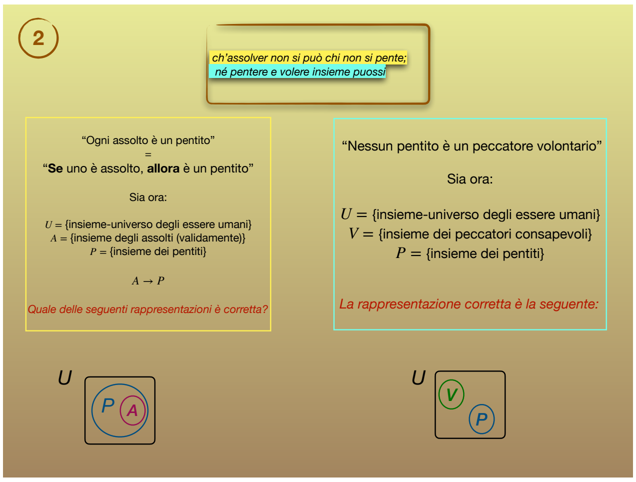
Presentazione: Dante e la logica

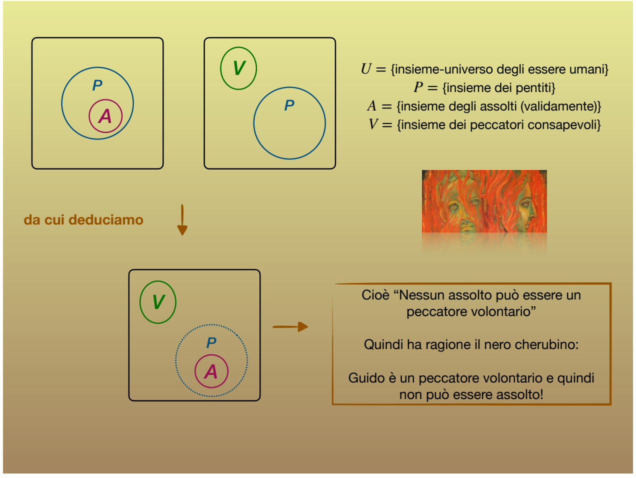




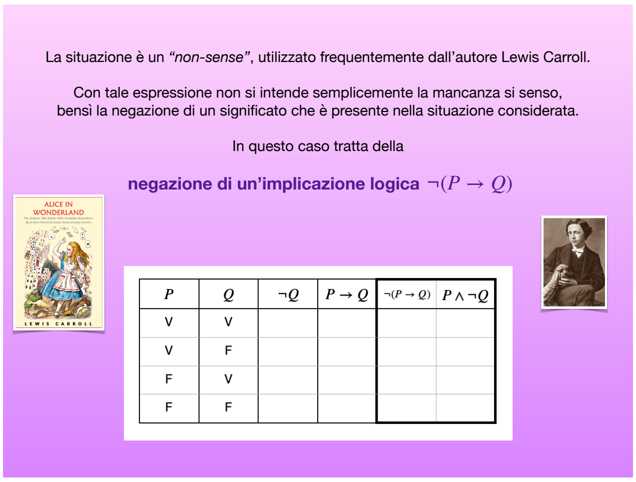


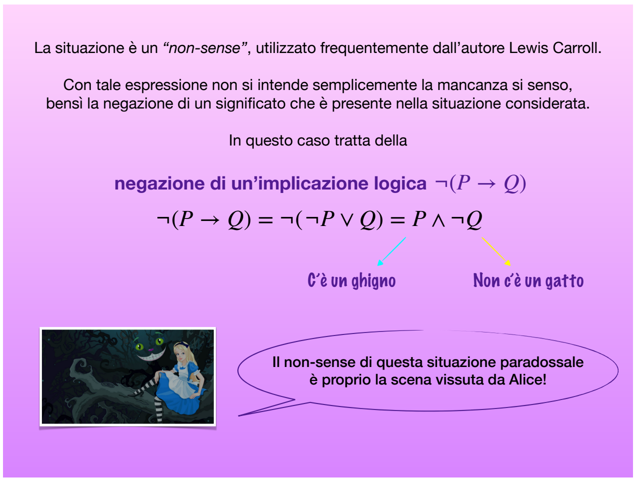






Presentazione: Alice nel Paese delle Meraviglie





SCHEDA DI LAVORO: IMPLICAZIONE e REGOLE DI DEDUZIONE

Esercizio 1. Si indichi quali, dei seguenti enunciati, "nasconde" un'implicazione.

1. Quando non piove, vado a lavorare a piedi.
2. Un numero è divisibile per 4 se le ultime due cifre a destra formano un numero multiplo di 4.
3. Se andiamo al ristorante, ci vieni volentieri?
4. Solo se una funzione f è continua, è derivabile.
5. Per la costruzione geometrica è sufficiente solo un righello.
6. Due rette perpendicolari ad una stessa retta sono parallele.
7. In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti.
8. Se Socrate morì e visse da uomo saggio, Einstein morì e visse da genio della fisica.
9. Se moltiplichi per 3 quello che hai ottenuto, allora vedrai che trovi il risultato corretto.
10. Se 7 è divisibile per 2, allora Roma è la capitale dell'Italia.

Esercizio 2. Si consideri la proposizione 4 dell'esercizio 1, che riportiamo di seguito:

"Solo se una funzione f è continua, è derivabile"

A) La proposizione antecedente è: P: ....
La proposizione conseguente è: Q: ....

B) Si riscriva l'enunciato usando le espressioni indicate sotto (al posto dei puntini, vanno inserite le proposizioni P e Q).

"Se ..., ...": ....

"... soltanto se ...": ....

"... se ...": ....

"... è condizione necessaria per ...": ....

"... è condizione sufficiente per ...": ....

C) Si riscriva l'enunciato usando l'espressione *"se...allora..."* e si rappresenti graficamente con gli insiemi la situazione descritta. Si controlli di aver risposto correttamente ai punti A) e B) ed eventualmente si corregga.

....

D) Si scriva l'implicazione inversa, contraria e contronominale di quella scritta nel punto precedente.

$\neg Q \to \neg P$ ....

$Q \to P$ ....

$\neg P \to \neg Q$ ....

Che cosa si può affermare riguardo al valore di verità di ciascuna delle tre proposizioni? Si argomenti il perché delle risposte date.

INVERSA	CONTRARIA	CONTRONOMINALE

Esercizio 3. Su un tavolo ci sono 6 carte: ogni carta ha un numero su una faccia e una lettera sull'altra. Di seguito sono riportate due proposizioni, per ciascuna di esse si segni con una croce le carte che si devono girare per controllare la verità della proposizione. (Suggerimento: si utilizzino le regole del *modus ponens* e *modus tollens*, e si consideri il significato logico della negazione di un'implicazione visto a lezione: $\neg(P \to Q) = P \wedge \neg Q$.) Nei rettangoli riportati, si argomenti la soluzione data.

1. *"Se in una faccia c'è una vocale, nell'altra c'è un numero pari"*

E	F	3	8	A	5

2. *"Se in una faccia c'è una vocale, se nell'altra c'è un numero pari è multiplo di 3"*

E	F	3	8	A	5

Esercizio 4. Si consideri il seguente teorema:

Teorema. *Tutti i multipli di 10 sono multipli di 2.*

A) Si riscriva l'enunciato del teorema sotto forma di implicazione e si riconosca antecedente (ipotesi) e conseguente (tesi).
....
....
....
....

B) Si legga attentamente le due dimostrazioni sotto riportate e, dopo averne analizzato la struttura logica, si discuta con il resto della classe.

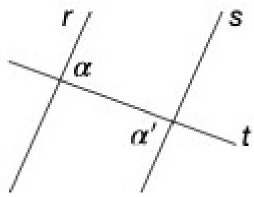
Dimostrazione 1.
Sia x un numero naturale. Supponiamo che x non sia multiplo di 10. Allora x non può avere come ultima cifra il numero 0, infatti tutti i multipli di 10 hanno la cifra delle unità pari a 0. Alcuni multipli di 2 hanno come ultima cifra lo 0. Quindi x non è multiplo di 2.

Dimostrazione 2.
Sia x un numero naturale. Supponiamo che x non sia multiplo di 2. Allora x è un numero dispari, ossia la sua cifra delle unità è 1,3,5,7,9. Di conseguenza x non è multiplo di 10, infatti tutti i multipli di 10 hanno la cifra delle unità pari a 0.

C) Quale delle due prove sopra riportate può essere la dimostrazione del teorema? Perché?

Esercizio 5. Si consideri il seguente teorema:

Teorema. *Se le rette r e s sono perpendicolari alla retta t, allora sono parallele.*



A) Si legga la dimostrazione sotto riportata, si sottolineino le parole che indicano che si sta applicando una regola di deduzione.

Dimostrazione. *Le rette r e s sono perpendicolari alla retta t, quindi gli angoli α e α' sono retti. Sappiamo che se due angoli sono retti allora sono congruenti. Dunque, α e α' sono congruenti. Inoltre sappiamo che una condizione sufficiente affinché r e s siano parallele è che gli angoli α e α' siano congruenti. Di conseguenza, r e s sono parallele.*

B) Utilizzando le informazioni riportate sotto, si schematizzino i passaggi logici sopra individuati corrispondenti ad una regola di deduzione.

P = "le rette r e s sono perpendicolari alla retta t"
Q = "le rette r e s sono parallele"
R = "α e α' sono retti"
T = "α e α' sono congruenti"

TEST FINALE DI LOGICA

Di seguito sono presentati *otto* quesiti di logica a cui rispondere.

QUESITO 1

Quali dei seguenti ragionamenti sono corretti?

a) Se x è maggiore di 10, allora x è maggiore di 7. Sappiamo che x non è maggiore di 7. Dunque x non è maggiore di 10.

b) Se il gatto dorme, i topi ballano. Il gatto non dorme, quindi i topi non ballano.

c) In un negozio si legge: *"Se superi 50 euro di spesa, ricevi un regalo"*. Quel giorno in negozio Luigi riceve un regalo. Quindi ha speso più di 50 euro.

d) Se un numero ha come cifra delle unità i numeri 0 o 5, allora il numero è divisibile per 5. Il numero 12370 ha come cifra delle unità lo 0, quindi è divisibile per 5.

QUESITO 2

"Se sono a Tione, allora sono a Trento". Questa frase è da considerarsi *FALSA* in qualsiasi circostanza. Da un punto di vista logico, quale delle seguenti conclusioni è corretta?

a) Non sono a Tione e non sono a Trento.

b) Non sono a Tione ma sono a Trento.

c) Sono necessariamente a Tione.

d) Sono necessariamente a Trento.

Spiega il ragionamento che hai fatto

QUESITO 3

"Quando prende il treno, Carlo arriva sempre in ritardo a destinazione". Quale delle seguenti affermazioni può essere dedotta dalla frase precedente?

a) Carlo è arrivato in orario, quindi ha preso il treno.

b) Carlo è arrivato in orario, quindi non ha preso il treno.

c) Carlo è arrivato in ritardo, quindi ha preso il treno.

d) Carlo non ha preso il treno, quindi è arrivato in ritardo.

e) Carlo non ha preso il treno, quindi è arrivato in orario.

Sei sicuro/a della risposta che hai dato? *sì* *no*

QUESITO 4

"Ogni volta che un poligono è regolare è inscrivibile in una circonferenza". Questa affermazione è *VERA* ed *"essere inscrivibile in una circonferenza"* per un poligono è:

a) condizione necessaria e sufficiente per essere regolare.

b) condizione solo necessaria per essere regolare.

c) condizione solo sufficiente per essere regolare.

d) condizione né necessaria né sufficiente per essere regolare.

Spiega il ragionamento che hai fatto

QUESITO 5

Considera la seguente proposizione:

"Se P è un punto di massimo per f, allora $f'(P) = 0$"

Sapendo che questa affermazione è *VERA*, indica il valore di verità dei seguenti enunciati:

a) *"Se $f'(P) = 0$, allora P è un punto di massimo per f"*

☐ VERO ☐ FALSO ☐ Non si può sapere con certezza il valore di verità

b) *"Se $f'(P) \neq 0$, allora P **non** è un punto di massimo per f"*

☐ VERO ☐ FALSO ☐ Non si può sapere con certezza il valore di verità

Di quale risposta che hai dato sei sicuro/a?

☐ tutte ☐ a) ☐ b) ☐ c) ☐ nessuna

QUESITO 6

Determina quale delle seguenti situazioni **non** è compatibile con l'affermazione *"per superare questo test è necessario, ma non sufficiente, conoscere la matematica e non arrivare in ritardo"*.

a) Giulia conosce la matematica, arriva puntuale e supera il test.

b) Massimo non conosce la matematica, arriva puntuale e supera il test.

c) Riccardo conosce la matematica, arriva puntuale e non supera il test.

d) Mimma non conosce la matematica, arriva in orario e non supera il test.

QUESITO 7

"Se lasciassi cadere il vaso di porcellana questo si romperebbe". Se l'argomentazione precedente è corretta, quale delle seguenti è certamente vera?

a) Se il vaso di porcellana è intatto, ciò vuol dire che non l'ho lasciato cadere.

b) Se non lascerò cadere il vaso di porcellana, questo non si romperà.

c) Se il vaso di porcellana è rotto, questo indica che l'ho lasciato cadere.

d) Nessuna delle precedenti.

QUESITO 8

"Solo se conservati nel congelatore, i surgelati non si deteriorano". In base alla precedente affermazione, quale delle precedenti **non** è necessariamente vera?

a) Se non conservati nel congelatore, i surgelati si deteriorano.

b) Condizione necessaria perché i surgelati non si deteriorino è che vengano conservati nel congelatore.

c) I surgelati deteriorati non sono stati conservati nel congelatore.

d) I surgelati non deteriorati sono stati conservati nel congelatore.

Spiega il ragionamento che hai fatto

QUESTIONARIO DI GRADIMENTO

1. A conclusione delle attività sull'implicazione logica, come giudichi complessivamente l'esperienza?

   ☐ Positiva

   ☐ Parzialmente positiva (dipende dall'attività svolta)

   ☐ Negativa

2. Gli argomenti trattati nel modulo sono risultati:

	per niente	poco	abbastanza	molto
chiari	○	○	○	○
interessanti	○	○	○	○
difficili	○	○	○	○

3. Quale aspetto dell'implicazione logica hai trovato più difficile? Perché?

   ....
   ....
   ....
   ....

4. Quale lezione ti ha interessato di più? (Indica un ordine di priorità da 1 = il più interessante a 4 = il meno interessante)

   ☐ Lezioni teoriche

   ☐ Esercizi *L'isola di Smullyan*

   ☐ L'implicazione in letteratura: *Dante e Alice nel Paese delle Meraviglie*

   ☐ Esercizi svolti a gruppi e in modo partecipativo

5. Cosa ti è rimasto maggiormente impresso degli argomenti trattati?

   ....
   ....
   ....
   ....

6. Al termine di questa esperienza didattica, sei maggiormente incuriosita/o a conoscere altri aspetti della logica matematica?

   ☐ Molto ☐ Abbastanza ☐ Poco ☐ È indifferente

7. Al termine di questo lavoro sull'implicazione logica, ritieni che degli elementi basilari di logica possano esserti utili per capire meglio la matematica?

   ☐ Molto ☐ Abbastanza (dipende da quale argomento matematico)

   ☐ Poco ☐ Per nulla

8. E, più in generale, ritieni che possano esserti utili per gestire i processi argomentativi nel linguaggio ordinario?

   ☐ Molto ☐ Abbastanza ☐ Poco ☐ Per nulla

9. Ritieni che l'inserimento di un approfondimento di logica più sistematico nel tuo percorso di studi potrebbe essere utile?

   ☐ Molto ☐ Abbastanza ☐ Poco ☐ Per nulla

10. Cambieresti qualcosa delle lezioni svolte? Ci sono aspetti che, a tuo parere, potrebbero essere migliorati? Quali?

    ....
    ....
    ....
    ....

Bibliografia

[1] AILA, Associazione Italiana di Logica e sue Applicazioni, https://www.ailalogica.it/

[2] Arzarello F., "L'insegnamento della logica nelle scuole medie superiori", estratto da Barra M. e Zanardo A., *Atti degli incontri di logica matematica*, vol. 5, Roma 6-9 aprile 1988, pp. 115-120.

[3] Barbero R., "L'insegnamento della logica nelle scuole elementari e medie", estratto da Barra M. e Zanardo A., *Atti degli incontri di logica matematica*, vol. 5, Roma 6-9 aprile 1988, pp. 87-91.

[4] Baccaglini Frank A., Di Martino P., Natalini R., Rosolini G., *Didattica della Matematica*, Mondadori, 2018.

[5] Bernardi C., "Problemi per la logica (ovvero la logica per problemi)", in *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 17 A-B, n.5, 1994, pp. 507-521.

[6] Cellucci C., "L'insegnamento della logica nella scuole medie superiori", estratto da Barra M. e Zanardo A., *Atti degli incontri di logica matematica*, vol. 5, Roma 6-9 aprile 1988, pp. 121-135.

[7] Ciceri C., Furinghetti F., Domingo P., "Analisi logica di dimostrazioni per entrare nella logica delle dimostrazioni", in *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 19B, n. 3, 1996, pp. 209-234.

[8] Ciraulo F., *Dispense del corso di elementi di logica matematica*, anno 2007-08.

[9] Crispina E., "Lavoro sul testo come lezione di logica", in *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 2002.

[10] Crosilla L., *Matematica costruttiva*, AphEx portale italiano di filosofia analitica, Giornale di filosofia, n. 14, 2016.

[11] D'Amore B., Plazzi P., "La didattica dei connettivi logici: alcune considerazioni", in *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 13, n. 4, 1990, pp. 369-398.

[12] D'Amore B., *Matematica stupore e poesia*, Giunti, 2009.

[13] Dapueto C., “Linguaggi e modelli nella scuola secondaria superiore”, estratto da Barra M. e Zanardo A., *Atti degli incontri di logica matematica*, vol. 5, Roma 6-9 aprile 1988, pp. 219-223.

[14] Di Carlo A., Scarafiotti A., “Ci è utile la logica per insegnare matematica? Un’esperienza in prima liceo scientifico”, estratto da Barra M. e Zanardo A., *Atti degli incontri di logica matematica*, vol. 5, Roma 6-9 aprile 1988, pp. 225-229.

[15] Durand-Guerrier V., “Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective”, in *Educational Studies in Mathematics*, n. 53, 2003, pp. 5-34.

[16] Ferrari P.L., *Educazione matematica, lingua, linguaggi. Costruire, condividere e comunicare matematica in classe*, UTET Università, 2021.

[17] Ferrari P.L., “L’interpretazione dei testi matematici tra processi cooperativi e modelli logici: il caso dei connettivi”, in *DdM*, n. 9, 2023, pp. 32-43.

[18] Furinghetti F., “Definire, argomentare e dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto”, tratto da *Atti del secondo internucleo scuola secondaria superiore*, Genova, 1991.

[19] Gallo E., “Geometria e logica”, in *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 1990, pp. 721-731 .

[20] Gerla G., “L’insegnamento della logica nelle scuole elementari e medie”, estratto da Barra M. e Zanardo A., *Atti degli incontri di logica matematica*, vol. 5, Roma 6-9 aprile 1988, pp. 93-98.

[21] Hoyles C., Küchemann D, "Students’ understandings of logical implication", in *Educational Studies in Mathematics*, n. 51, 2002, pp. 193-223.

[22] Iaderosa R., Andrà C., Brunetto D., “Spunti per una *educazione logica* nella formazione matematica pre-universitaria”, in *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 42B, n.1, 2019, pp. 7-38.

[23] Lolli G., *Logica matematica. Corso di laurea in informatica*, 2009.

[24] MateMat, Materiali multimediali di matematica per la scuola secondaria di secondo grado, http://www.matemat.it/

[25] M.E.Maietti, *Appunti per il corso di Logica Matematica*, anno 2018-19.

[26] Malara N. A., “Implicazione e modus ponens: sintesi di una esperienza didattica realizzata in una seconda media”, estratto da Barra M. e Zanardo A., *Atti degli incontri di logica matematica*, vol. 5, Roma 6-9 aprile 1988, pp. 245-253.

[27] Maschio S., *Ventiquattro lezioni di teoria delle categorie e logica categoriale*, anno 2020-21.

[28] Maschio S., *Tecniche dimostrative. La logica incontra la matematica*, Scienza Express, 2019.

[29] Mendelson E., *Introduction to Mathematical Logic*, CHAPMAN & HALL/CRC, 1997.

[30] Miur., *Decreto del presidente della Repubblica n. 89 del 15 marzo 2010*, disponibile su https://www.gazzettaufficiale.it/eli/id/2010/06/15/010G0111/sg

[31] Nievergelt Y., "The truth table of the logical implication", 2018, disponibile su https://www.cambridge.org/core.

[32] Palladino D., Palladino C., *Logiche non classiche*, Carocci, 2007.

[33] Prodi G., "L'insegnamento della logica nelle scuole medie superiori", estratto da Barra M. e Zanardo A., *Atti degli incontri di logica matematica*, vol. 5, Roma 6-9 aprile 1988, pp. 137-144.

[34] Rumain B., Connell J., Braine M., "Conversational comprehension processes are responsible for reasoning fallacies in children as well as adults: if is not the biconditional", *Developmental Psychology*, vol. 19, n. 4, 1983, pp. 471-481.

[35] Scimemi B., "L'insegnamento della logica nelle scuole elementari e medie", estratto da Barra M. e Zanardo A., *Atti degli incontri di logica matematica*, vol. 5, Roma 6-9 aprile 1988, pp. 107-111.

[36] Spirito G., "L'insegnamento della logica nelle scuole medie superiori", estratto da Barra M. e Zanardo A., *Atti degli incontri di logica matematica*, vol. 5, Roma 6-9 aprile 1988, pp. 145-151.

[37] Treccani *Vocabolario Treccani* online, https://www.treccani.it/vocabolario/

[38] Troelstra A.S., Van Dalen D., *Constructivism in Mathematics. An Introduction*, North - Holland, 1988.

[39] Varzi A., Nolt J., Rohatyn D., *logica*, MacGraw-Hill, 2007.

[40] Usuberti G., "Logica e...", estratto da Barra M. e Zanardo A., *Atti degli incontri di logica matematica*, vol. 5, Roma 6-9 aprile 1988, pp. 175-180.

[41] Villani V., "Quale logica nella scuola", estratto da Barra M. e Zanardo A., *Atti degli incontri di logica matematica*, vol. 5, Roma 6-9 aprile 1988, pp. 193-198.

[42] Villani V., Bernardi C., Zoccante S., Porcaro R., *Non solo calcoli*, Springer, 2012.

[43] Vita V., "Quale logica nella scuola", estratto da Barra M. e Zanardo A., *Atti degli incontri di logica matematica*, vol. 5, Roma 6-9 aprile 1988, pp. 199-206.

[44] Zanardo A., Ciraulo F., *Teorie assiomatiche*, anno 2016-17.