



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA



Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ELETTRONICA

TESI DI LAUREA TRIENNALE

REALIZZAZIONE DI TEST DIMOSTRATIVI PER LABORATORI DI MISURE DIDATTICI

Relatore: Prof.ssa Giada Giorgi

Laureando: Lorenzo Carlo Causin

Matricola: 2094566

Data di Laurea: 19 Marzo 2024

Anno Accademico 2023/2024

Sommario

L'oscilloscopio è uno strumento di misura fondamentale nel settore dell'ingegneria elettronica. Questo consente non solo la visualizzazione e l'analisi dettagliata di segnali sia nel dominio nel tempo che in frequenza, ma è anche in grado, in alcuni modelli specifici, di produrre un vasto insieme di forme d'onda arbitrarie. I suoi usi pratici sono molteplici: permette difatti di analizzare con precisione il comportamento dei circuiti elettronici con finalità, ad esempio, di risoluzione di problemi e viene anche impiegato nelle fasi di progettazione, sviluppo e verifica di conformità e qualità di questi.

In questo elaborato si andrà perciò a riportare innanzitutto un'introduzione della strumentazione utilizzata nei laboratori e dei concetti teorici fondamentali dell'analisi in frequenza, approfondendo la trasformata di Fourier e le sue proprietà; successivamente verranno spiegati i test effettuati a scopo didattico in laboratorio con la strumentazione sopra descritta che, come si vedrà, riguarderanno il confronto tra lo spettro dei segnali definiti nella teoria e quello effettivamente visualizzato nel display dell'oscilloscopio. Seguirà infine l'analisi delle differenze sorte dai test e un commento dei risultati.

Come si dimostrerà, i test riportati sono risultati essere estremamente interessanti e soprattutto formativi dal punto di vista didattico, in modo particolare per applicazioni in futuri lavori in questo contesto.

Alla mia Famiglia

INDICE

CAPITOLO 1 – Introduzione.....	7
1.1 Introduzione, struttura e obiettivi dell'elaborato	7
CAPITOLO 2 – Setup strumentale.....	15
2.1 Descrizione del setup strumentale.....	15
CAPITOLO 3 – Concetti di teoria.....	23
3.1 La serie e la trasformata di Fourier: definizione e proprietà.....	23
3.2 La DFT, Trasformata Discreta di Fourier	27
CAPITOLO 4 – Analisi di segnali in frequenza.....	31
4.1 Descrizione dei test.....	31
4.2 Impostazione dell'oscilloscopio	32
4.3 Definizione e analisi in frequenza dei segnali di interesse didattico	36
4.3.1 Onda quadra.....	37
4.3.2 Onda triangolare.....	47
4.3.3 Impulso singolo	55
4.3.4 Treno di impulsi	61
4.3.5 Segnale sinusoidale modulato in frequenza (segnale chirp)	68
CAPITOLO 5 – Conclusioni.....	81
5.1 Commento finale e possibili lavori futuri	81
Bibliografia e sitografia.....	85
Ringraziamenti.....	87

CAPITOLO 1 – Introduzione

1.1 Introduzione, struttura e obiettivi dell'elaborato

Nel settore ingegneristico e più in generale in quello scientifico, il processo di misurazione riveste un ruolo essenziale nella comprensione dei fenomeni e dei sistemi: il fatto di poter definire e misurare una grandezza costituisce il fondamento non solo della scienza moderna ma anche della nostra società, in termini di scambio di beni e servizi, poiché questi sono in grado di essere quantificati. Come esempio, si consideri la dimensione di terreni e fabbricati, il volume dei carburanti o la massa di prodotti alimentari; è evidente come nell'attuale società industriale l'esecuzione delle misurazioni influenzi ogni attività in modo profondo.

La misurazione è quindi un processo che permette di ottenere, per via sperimentale, uno o più valori ragionevolmente attribuibili ad una grandezza, intesa come proprietà quantificabile di un fenomeno o di una sostanza^[1]. Le misure sono ottenute da vari tipi di strumentazione che, tramite elaborazioni e processi specifici, sono in grado di fornire informazioni molto dettagliate sui fenomeni oggetti di studio.

L'ingegneria elettronica è quindi fondamentale per lo sviluppo di questi sistemi di misura poiché le quantità fisiche vengono convertite da trasduttori in segnali elettrici che a loro volta devono essere elaborati in modo adeguato, ad esempio tramite campionamento, filtraggio oppure venendo opportunamente amplificati o attenuati per poi essere convertiti in formato digitale tramite microprocessori o microcontrollori preposti.

In modo duale il processo di misurazione rappresenta una parte fondamentale della stessa ingegneria elettronica, la quale appunto si basa sull'analisi e l'implementazione di circuiti e dispositivi elettronici che richiedono dati precisi e affidabili. Ad esempio, nella fase di progettazione di un determinato componente hardware o di un circuito le misurazioni consentono di affinare i relativi modelli e simulazioni grazie all'utilizzo di dati sperimentali, mentre nelle fasi di validazione queste diventano critiche per valutarne le prestazioni. Nelle fasi di test, le misurazioni sono fondamentali per verificare che i prodotti soddisfino determinate specifiche di progetto e precisi standard di qualità, oltre a ridurre al minimo i rischi di malfunzionamenti. Attraverso misurazioni

accurate e ripetibili si è perciò in grado di acquisire una comprensione dettagliata dei fenomeni elettronici di interesse e di utilizzarla a proprio vantaggio.

Determinati strumenti elettronici, come ad esempio multimetri e oscilloscopi, hanno così l'obiettivo di determinare e realizzare la relazione funzionale che esiste tra la grandezza che si intende misurare, denominata misurando, e l'uscita che rappresenta l'informazione di misura nel modo più accurato possibile^[2]. Infatti, una parte importante di metodi e strumenti di misura è dedicata al determinare le caratteristiche di tale relazione funzionale, così come la sua realizzazione pratica ed eventuali motivi di discostamento dal comportamento previsto, che sono tutti aspetti essenziali da tenere in considerazione per comprendere al meglio il significato dei risultati ottenuti.

La misura è perciò intesa come il risultato di un confronto tra grandezze omogenee: in modo particolare è il rapporto tra una grandezza incognita ed una omogenea che viene assunta come riferimento e indicata come unità. Quest'ultima è pure rappresentata in genere da dei campioni che sono in realtà sue realizzazioni e che sono ottenuti da particolari fenomeni fisici di riferimento il cui valore è predeterminato ed espresso anch'esso in riferimento all'unità^[3].

Di fondamentale importanza, inoltre, è il concetto di incertezza. Questa è definita come il parametro che, sulla base delle informazioni utilizzate, caratterizza la dispersione dei valori attribuiti al misurando^[1]. Essa corrisponde alla stima dell'intervallo al quale appartiene, con una data probabilità, il risultato di una misurazione.

L'incertezza può essere dovuta in generale a effetti casuali o sistematici^[2].

- **EFFETTI CASUALI**

ripetendo N volte una misura, i valori ottenuti presentano una determinata dispersione attorno al loro valore medio

- **EFFETTI SISTEMATICI**

la misura è influenzata da comportamenti non ideali degli elementi del sistema di misura, i quali danno luogo a degli scarti in una determinata direzione.

In alcuni casi si è in grado di stimare l'entità e il segno di tali scarti e di conseguenza di correggerli nel processo di taratura: in questo caso si parla di errori sistematici. Tuttavia,

anche se alcuni tipi di errori possono essere corretti, permangono lo stesso delle non idealità introdotte dagli standard di taratura usati.

È quindi possibile suddividere l'incertezza in due categorie, ovvero di tipo A e di tipo B^{[2][4]}.

Incetenza di tipo A

Valutabile attraverso metodi statistici applicati ad osservazioni ripetute dello stesso misurando.

Come esempio, si considerino N osservazioni ripetute x_i , con $i = 1, \dots, N$, ottenute in condizioni di ripetibilità. Definiamo perciò la media campionaria \hat{x}

$$\hat{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N x_i \quad 1.1$$

la deviazione standard campionaria s_x

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^N (x_i - \hat{x})^2} \quad 1.2$$

e infine la deviazione standard della media campionaria

$$s_{\hat{x}} = \sqrt{\frac{s_x}{N}} \quad 1.3$$

L'incertezza di tipo A u_A corrisponde perciò alla deviazione standard del valore medio ed è quindi definita come

$$u_A(\hat{x}) = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=0}^N (x_i - \hat{x})^2} \quad 1.4$$

In genere alla misura viene associata una distribuzione di probabilità: se il numero delle osservazioni N è abbastanza grande si tende ad utilizzare una distribuzione gaussiana tramite un modello adatto a rappresentare una popolazione infinita, se $N < 30$ si utilizza invece la distribuzione di Student.

Incertezza di tipo B

Questo tipo di incertezza è valutabile per mezzo di conoscenze a priori sul misurando e determinata tramite opportune ipotesi sulla densità di probabilità degli errori statistici; le più utilizzate sono la distribuzione gaussiana e quella uniforme.

Questo tipo di incertezza si basa quindi sull'ipotesi di poter associare una certa densità di probabilità al risultato della misura, dopo aver considerato l'insieme di informazioni utili disponibili sul misurando e relative grandezze oggetto di studio. È per questo che non può essere valutata mediante osservazioni ripetute.

Le cause dell'incertezza infine possono essere molte e variano a seconda dei sistemi di misura considerati^[2]. Tra queste si ricordano, ad esempio, la conoscenza non completa del processo di misura, delle grandezze di influenza, della definizione e della realizzazione del misurando e della realizzazione del campione di confronto. L'incertezza infine origina anche dalle variazioni nelle osservazioni ripetute del misurando, che vengono eseguite in condizioni apparentemente identiche e, più in generale, anche la presenza di bias personale nella lettura degli strumenti analogici^{[2][4]}.

Possiamo perciò concludere che il risultato di una misurazione deve essere espresso come

$$\hat{x} \pm U(\hat{x}) \qquad 1.5$$

dove \hat{x} rappresenta il valore misurato, ovvero la stima quantitativa del misurando, e $U(\hat{x})$ rappresenta l'incertezza estesa, ovvero la stima dell'intervallo al quale appartiene il risultato della misurazione con una determinata probabilità. È possibile passare

dall'incertezza standard all'incertezza estesa facendo delle opportune considerazioni sulla distribuzione di probabilità assunta e sui relativi intervalli di confidenza.

Come accennato, nel settore dell'ingegneria elettronica le misurazioni coinvolgono grandezze come tensioni, correnti, potenze e altre caratteristiche elettriche varie di componenti e circuiti. Consideriamo perciò un sistema di misura, definito come un dispositivo (o un insieme di dispositivi) il cui ingresso è la grandezza di interesse e la cui uscita è la misura di quella grandezza: in un sistema di misura l'informazione è associata ad un segnale, ovvero una grandezza fisica che contiene informazione e che varia nel tempo^[5]. Un segnale può essere di tipo elettrico, come tensione o corrente, oppure non elettrico; in questo caso è necessario allora un elemento di interfaccia tra la grandezza da misurare e i circuiti elettronici che effettuano la misurazione.

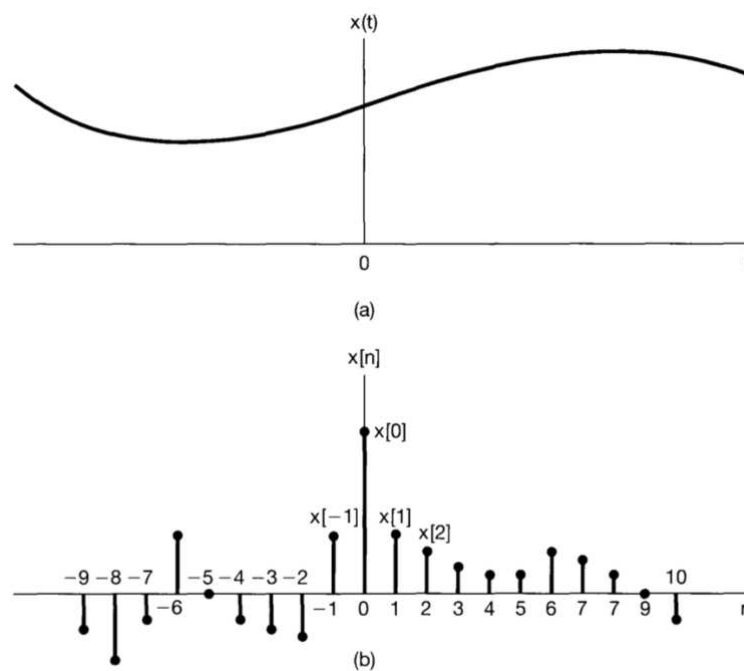
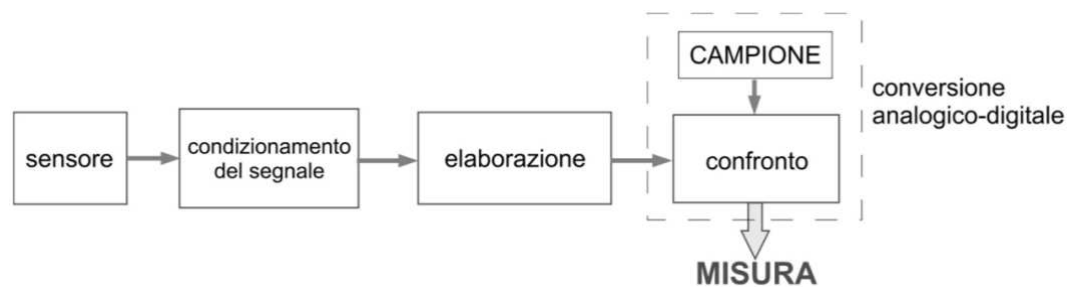


Figura 1 – Rappresentazione di un segnale a tempo continuo (a) e a tempo discreto (b)^[6]

In Figura 1 sopra riportata si può osservare un esempio di segnale a tempo continuo (a) e discreto (b), mentre in Figura 2, riportata di seguito, si possono osservare invece gli

schemi concettuali che riprendono gli step fondamentali della conversione delle grandezze fisiche in segnali sia nel caso analogico (a) che digitale (b).



(a) Sistema analogico



(b) Sistema digitale

Figura 2 – Schema concettuale della conversione analogica (a) e digitale (b) ^[3]

Brevemente, sia in Figura 1 – (a) che in Figura 2 – (b) si può osservare la presenza del sensore, ovvero l'elemento sensibile alla grandezza di interesse. Questo si differenzia dal trasduttore dal fatto che quest'ultimo è definito in senso più lato in quanto permette la conversione di una grandezza fisica in un'altra poiché comprende anche eventuali elementi ausiliari a fornire il segnale elettrico di uscita. Infatti, l'uscita del trasduttore può essere considerata semplicemente come una sorgente di segnale elettrico che viene rappresentata come un generatore equivalente controllato dalla grandezza in ingresso, le cui caratteristiche dipendono dunque dalle modalità di funzionamento e dalle particolarità del sensore^[3].

In Figura 1–(a) subito dopo il sensore possiamo vedere il blocco del condizionamento del segnale, il quale permette di adattare le caratteristiche del segnale in ingresso, di rendere lo strumento resistente ai disturbi, al rumore elettrico e di eseguire un

adattamento di impedenza. Le funzioni di tale blocco sono perpetrate da amplificatori, attenuatori e filtri.

Il blocco di elaborazione svolge invece la funzione di adattare il segnale di ingresso, ad esempio una tensione continua, in un intervallo di tempo o in frequenza. Per ottenere l'indicazione del valore attribuito alla grandezza misurata deve perciò esserci un confronto tra questa e quella omogenea di valore noto, che quindi prende il nome di campione o riferimento (blocchi campione e confronto). In genere in elettronica sono utilizzati riferimenti di tensione, generati da circuiti specifici, e di frequenza, ottenuti da oscillatori al quarzo.

Come si può osservare in Figura 2 – (b), è presente invece il processo di conversione analogico digitale che prevede la discretizzazione nel tempo e in ampiezza (rispettivamente blocchi campionamento e quantizzazione) del segnale di ingresso. Questi poi viene anche qui elaborato in modo tale da estrarre l'informazione tramite opportuni algoritmi.

L'obiettivo di questo elaborato è quindi proprio quello di analizzare le caratteristiche di determinati segnali e, in modo particolare, di indagare le differenze tra il loro andamento analitico, perciò teorico, e quello in un oscilloscopio, che presenta vari fenomeni di disturbo, come rumore e limitazioni ad esempio algoritmiche.

Dopo un'introduzione riportata in questo capitolo, nel Capitolo 2 si descrive il setup strumentale utilizzato per condurre gli esperimenti, tra cui si ricorda l'oscilloscopio e il software Matlab, quest'ultimo utilizzato principalmente per eseguire delle analisi dettagliate dei segnali oggetto di studio.

Nel Capitolo 3 si riportano invece i concetti teorici essenziali dell'analisi nel dominio del tempo e in frequenza: in modo particolare si illustra la trasformata di Fourier, continua e discreta, e le sue proprietà fondamentali.

Nel Capitolo 4 si definiscono in modo analitico i segnali di interesse per i test dell'elaborato, riportando il loro andamento teorico sia nel tempo che in frequenza e analizzando le loro caratteristiche principali. Successivamente si riportano i corrispondenti segnali visualizzati e perciò ottenuti dall'oscilloscopio.

Nel Capitolo 5 si discutono i risultati ottenuti con l'obiettivo di determinare l'origine delle differenze tra teoria e pratica e si svolge anche un'ulteriore analisi sugli effetti delle

variazioni dei parametri fondamentali che caratterizzano i segnali visualizzati nell'oscilloscopio.

Nel Capitolo 6 si disquisisce infine dei risultati complessivi dell'elaborato in un contesto didattico, evidenziando l'applicabilità di quanto ottenuto anche in lavori futuri.

CAPITOLO 2 – Setup strumentale

In questo capitolo viene presentato il setup strumentale utilizzato nei test che comprende l'oscilloscopio Keysight DSOX1102G e il software Matlab. Prima di entrare nei dettagli del Keysight DSO1102G, tuttavia, si riporta una breve panoramica generale sugli oscilloscopi, in modo da fissare alcuni concetti chiave che sono importanti per i prossimi capitoli.

2.1 Descrizione del setup strumentale

Il setup strumentale alla base dei test effettuati è composto dall'oscilloscopio digitale Keysight DSO1102G e da un personal computer, in particolare un MacBook Pro, che è stato utilizzato per pianificare i test e conseguentemente analizzare i risultati ottenuti, anche per mezzo del software Matlab.

Lo strumento più utilizzato nei test effettuati in questo elaborato è perciò l'oscilloscopio Keysight DSOX1102G, riportato in Figura 3 di seguito.

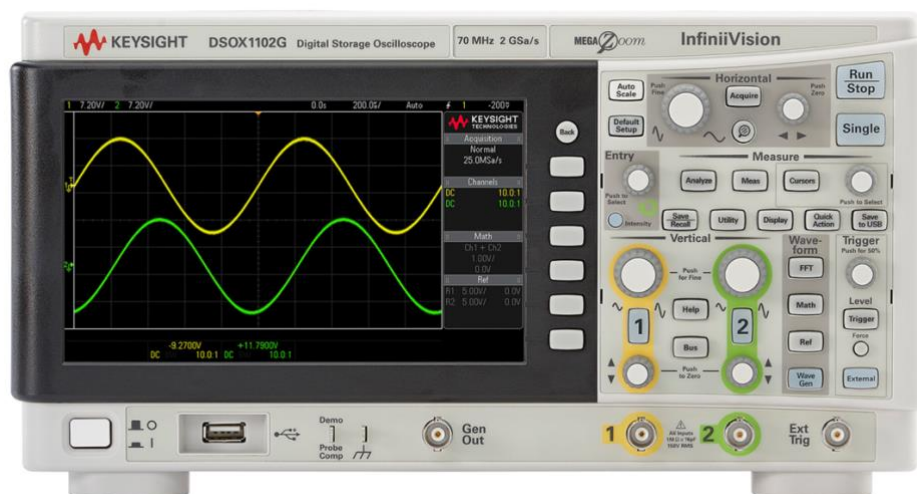


Figura 3 – Oscilloscopio Keysight DSOX1102G^[7]

Come già accennato, l'oscilloscopio è uno degli strumenti di misura più utilizzati nelle attività di progettazione, verifica, qualificazione e manutenzione di apparati elettronici. La sua funzione principale è quella di visualizzare l'andamento di due o più grandezze su un piano dotato di un opportuno sistema di coordinate di riferimento; l'immagine ottenuta infatti viene presentata su uno schermo su cui sono riportati gli assi

cartesiani^[8]. Sempre considerando la Figura 3 si può notare sullo schermo un reticolo graduato diviso in 8 divisioni verticali e 10 orizzontali, le quali facilitano la valutazione delle grandezze considerate, che a loro volta vengono misurate tramite appositi cursori posti a lato dello schermo e che vengono presentati come rette orizzontali o verticali. Lo strumento è quindi in grado di determinare il valore numerico corrispondente alla loro posizione tenendo conto degli eventuali fattori di scala impostati.

Poiché le sue funzioni principali consistono nella diagnostica, ovvero nella verifica del corretto funzionamento di un apparato, e nel rilievo di forme d'onda, inteso come il poter misurare in modo corretto l'andamento di un segnale entro limiti prestabili, si è in grado, perciò, di intuire quali siano le sue caratteristiche generali fondamentali^{[3][4][8]}. Tra queste si ricorda innanzitutto l'intervallo di osservazione, che è finito e che corrisponde all'asse orizzontale sullo schermo (variabile dall'operatore entro certi limiti); è perciò in questo intervallo che deve trovarsi il segnale (o una sua parte) di interesse, con cui poi lo strumento si sincronizzerà. Si cita poi la banda passante, che deve essere tale da garantire una sufficiente accuratezza nella riproduzione dell'andamento del segnale, accuratezza che in linea di massima deve essere dell'ordine di 10^{-2} . Si cita infine anche la velocità di aggiornamento della traccia su schermo, che deve essere sufficientemente elevata in modo tale da essere in grado di evidenziare variazioni repentine del segnale visualizzato, caratteristica fondamentale nella ricerca di anomalie di funzionamento in un circuito.

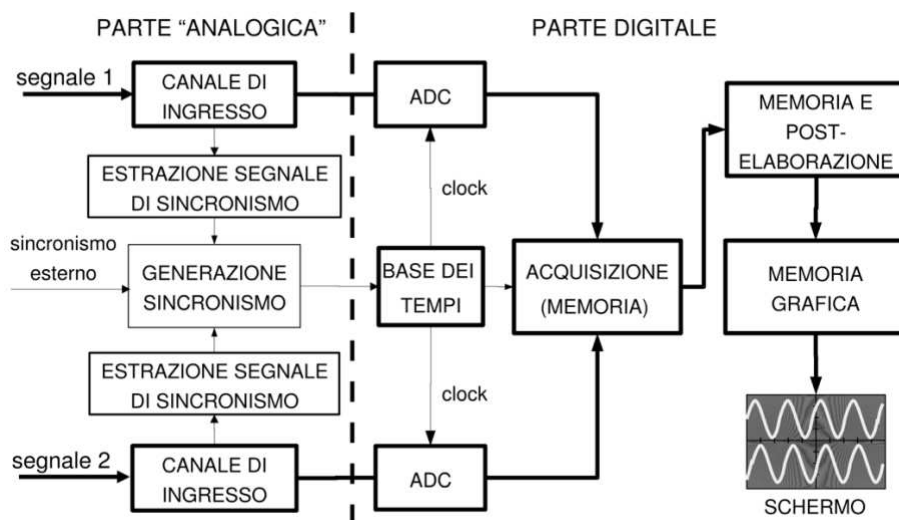


Figura 4 – Schema concettuale di un oscilloscopio digitale^[8]

In Figura 4 si riporta lo schema concettuale dei blocchi fondamentali di un oscilloscopio digitale a campionamento, o DSO (dall'inglese, *Digital Sampling Oscilloscope*), che si differenzia dall'oscilloscopio analogico in quanto permette di realizzare in forma completamente digitale sia la funzione di acquisizione tramite convertitori analogico-digitali preposti, sia quella di visualizzazione che avviene tramite uno schermo digitale. Inoltre, un'altra grande differenza rispetto alla controparte analogica consiste nella presenza di memoria, che viene indicata dal numero di campioni che essa può contenere e che consente di conservare i segnali acquisiti e di sottoporli a successive elaborazioni o confronti con altri segnali. In particolare, si definisce profondità di memoria dello strumento il numero massimo di campioni associato a ciascun canale di ingresso^{[2][3]}.

Prima di proseguire, si ricorda che di seguito viene riportata una spiegazione solamente generale dei blocchi principali di Figura 4, introdotta con l'obiettivo di evidenziare dei concetti chiave utili per i capitoli successivi. Per maggiori informazioni e dettagli circa l'architettura degli oscilloscopi e il loro funzionamento si rimanda ad opportuni riferimenti bibliografici^[7] contenuti nella sezione Bibliografia e sitografia in calce all'elaborato.

Tornando quindi allo schema di Figura 4, si definisce come canale di ingresso l'insieme dei circuiti necessari per ottenere un'amplificazione o un'attenuazione del segnale considerato, cosa che a sua volta richiede un'adeguata banda passante. Il blocco base dei tempi invece fornisce il clock di campionamento al convertitore analogico digitale e assicura, più in generale, che le informazioni di misura siano associate al corretto riferimento temporale. Di particolare importanza è il fatto che la cadenza di acquisizione viene impostata sulla base del fattore di scala orizzontale, che l'operatore può variare. Si definisce quindi T_w l'intervallo di osservazione e N la profondità di memoria (definita sempre come il numero dei campioni che essa può contenere), tale che $T_w = N \cdot T_s$, con T_s che è il tempo di campionamento, definito come la distanza temporale tra due campioni. Al variare del fattore di scala cambia l'intervallo di osservazione T_w , ma in quanto N è fisso per un dato canale dello strumento, questo fa sì che vi siano delle variazioni anche nella distanza temporale T_s tra due campioni memorizzati in celle consecutive, con reciproche variazioni della frequenza di campionamento effettiva $f_s = 1/T_s$ dello strumento. Quindi, in pratica, al variare dell'intervallo di osservazione T_w si

varia direttamente anche la frequenza con cui lo strumento va a campionare il segnale acquisito dal generatore di funzioni preposto. Il sistema è perciò in grado di adattare la modalità di acquisizione e memorizzazione dei campioni, eseguendo specifiche procedure di interpolazione o di decimazione^[8], le quali saranno accennate brevemente successivamente. Tale aspetto sarà comunque messo maggiormente in evidenza nel Capitolo 4, nell'analisi degli spettri dei segnali oggetto di studio.

Si definisce poi la risoluzione come minima variazione sugli assi dei cursori^[3]. La risoluzione sull'asse verticale Δ_V dipende infatti dal numero di livelli di quantizzazione del convertitore analogico-digitale, mentre quella temporale Δ_T dipende dal numero di slot temporali N_V in cui è suddiviso T_w , che sono in genere 400 o 500. La risoluzione temporale espressa in termini relativi al fondo scala è quindi pari a $1/N_V$. Di conseguenza, si conclude affermando che non sempre la risoluzione temporale delle misure mediante l'utilizzo dei cursori coincide con il minimo periodo di campionamento del convertitore analogico-digitale o con la distanza temporale effettiva tra due campioni^{[3][8]}.

Tornando allo schema di Figura 4, i blocchi relativi all'estrazione del sincronismo ("Estrazione segnale di sincronismo" e "Generazione sincronismo"), chiamato anche *trigger*, si riferiscono ad un circuito specifico che agisce sul segnale di ingresso con la funzione di individuare un punto di riferimento nella forma d'onda che viene utilizzato per la sincronizzazione dello strumento. L'estrazione del sincronismo è processo indispensabile per qualsiasi misura in quanto, per regolare uno strumento in modo corretto, l'operatore deve poter essere in grado di vedere effettivamente la parte di segnale di interesse sullo schermo. Per fare un esempio, la condizione più semplice di per la condizione di *trigger* è che un segnale attraverso un livello di riferimento prestabilito con una data pendenza^[3].

Il sistema di acquisizione si basa invece su convertitori analogico-digitali ad alta velocità e può operare, in assenza di segnali di sincronismo, in una modalità di acquisizione continua. In questo caso la memoria, che è caratterizzata da tempi di scrittura molto ridotti, è pertanto gestita come una coda FIFO (dall'inglese, *First- In, First-Out*): i campioni più vecchi vengono cioè man mano sovrascritti da quelli nuovi.

Per quanto riguarda i blocchi finali ("Memoria e post-elaborazione" e "Memoria grafica"), i dati acquisiti dallo strumento sono quindi trasferiti alla memoria di forma

d'onda come vettore che contiene una sequenza di N valori del segnale, con campionamento uniforme. Qui i dati sono disponibili ad essere ulteriormente elaborati oppure vengono trasferiti direttamente al blocco di visualizzazione. In particolare, l'indice delle singole celle di memoria indica la successione dei campioni del tempo, mentre il contenuto delle celle indica l'ampiezza del campione misurata dal convertitore A/D.

Prima di concludere la panoramica generale delle caratteristiche principali di un oscilloscopio è necessario specificare più in dettaglio quanto accennato nei paragrafi precedenti, in relazione alla memoria di acquisizione e quella di visualizzazione. In particolare, come si è visto, la profondità di memoria N è maggiore del numero di slot temporali N_V : questa differenza è giustificata dal fatto che i campioni acquisiti devono essere opportunamente elaborati e processati. Inoltre, a seconda della relazione tra il rapporto T_W/N , che corrisponde ad un *bin* temporale del vettore della forma d'onda (ovvero alla distanza temporale tra due campioni), e la risoluzione $\Delta_T = T_W/N_V$, che corrisponde quindi al minimo spostamento dei cursori su schermo, è possibile che i campioni acquisiti non corrispondano ai campioni visualizzati^[8].

Più in dettaglio, se $T_W/N \geq T_S$ oppure $T_W/N < T_S$ e $\Delta_T > T_S$ sarà necessari una procedura di decimazione in quanto $N > N_V$, ovvero il numero dei campioni è maggiore del numero di slot temporali della memoria di visualizzazione. Se invece $\Delta_T = T_S$ i campioni acquisiti nella finestra temporale T_W sono trasferiti direttamente alla memoria di visualizzazione. Altrimenti, se $\Delta_T < T_S$ i campioni disponibili sono in numero minore di $N_V + 1$ e quindi l'oscilloscopio esegue algoritmi numerici di interpolazione temporale per aumentare la risoluzione temporale visualizzata sullo schermo^{[3][8]}.

Terminata quindi la panoramica generale sulle caratteristiche degli oscilloscopi, si possono ora riportare più in dettaglio le caratteristiche dell'oscilloscopio utilizzato in laboratorio. In particolare, il Keysight DSOX1102G è un oscilloscopio a 2 canali, con 100 MHz di banda, una frequenza di campionamento massima pari a 2 GSa/s e una profondità di memoria pari a 1 Mpts. L'oscilloscopio comprende anche un generatore di funzioni a 20 MHz in grado di generare ad esempio seni, rampe, onde quadre e altri segnali; inoltre, possiede la funzione di modulazione del segnale generato in ampiezza, frequenza e in modalità *FSK*. Come si vedrà nel Capitolo 3, la funzione di modulazione

permetterà di modulare appropriatamente un segnale seno per ottenere una *sweep* in frequenza.

In Figura 5 si può osservare l'oscilloscopio DSOX1102G e parte del computer utilizzato per le analisi nella postazione del laboratorio di Misure elettroniche e compatibilità elettromagnetica al Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione.

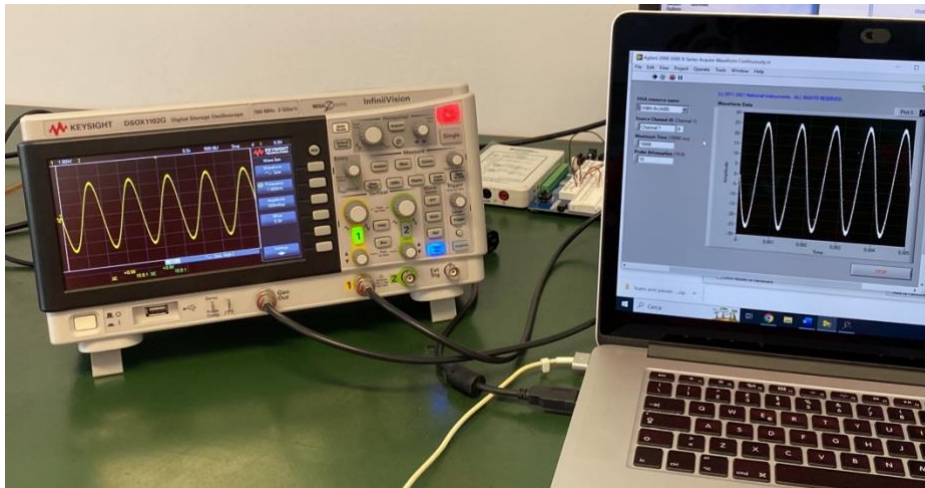


Figura 5 – Postazione del setup strumentale^[7]

Ritornando alla descrizione dell'oscilloscopio, oltre a funzioni di addizione, sottrazione o moltiplicazioni tra forme d'onda, contenute nella sezione *Math* dello strumento, questo oscilloscopio è in grado di computare la *Fourier Fast Transform*, o FFT, dei segnali in input nei canali analogici e di eseguire appropriate analisi di risposta in frequenza calcolando e visualizzando, ad esempio, i diagrammi di Bode. Per ulteriori dettagli si rimanda infine al manuale informativo^[7].

Si conclude la descrizione dell'oscilloscopio precisando poi che, sebbene la condizione teorica di Nyquist implichi che $f_s > 2 \cdot B$, dove f_s è la frequenza di campionamento (*sampling frequency*) e B è la banda del segnale, in realtà a causa delle non idealità introdotte dal canale di ingresso, derivanti dal fatto che per $|f| > B$ l'attenuazione dei segnali non è infinita, i costruttori introducono un fattore di sovraccampionamento di circa 20-25%. Di conseguenza, riprendendo la precedente condizione, nella pratica si ha che in genere $f_s > 2.5 \cdot B$. Per questo motivo i convertitori analogico-digitali utilizzati negli oscilloscopi sono abituati a lavorare a frequenze molto elevate, anche nell'ordine dei MHz e dei GHz^{[3][8]}.



Figura 6 – Logo di Matlab^[9]

Si menziona poi anche il programma Matlab^[9], il cui logo è riportato in Figura 6, il quale è un ambiente di programmazione e di calcolo numerico molto utilizzato in ambito scientifico per l'elaborazione e l'analisi di dati e di segnali. Matlab è stato utilizzato per riprodurre gli spettri delle trasformate in modo qualitativo, con l'obiettivo di fornire un riferimento per il confronto degli spettri calcolati e visualizzati sull'oscilloscopio.

Nel prossimo capitolo si andrà perciò a definire la trasformata di Fourier per segnali periodici e aperiodici e si fornirà una panoramica delle sue principali proprietà. Successivamente si definirà la trasformata di Fourier discreta con focus sull'acquisizione e la visualizzazione di segnali in un oscilloscopio, nonché sul calcolo dei loro spettri.

CAPITOLO 3 – Concetti di teoria

In questo capitolo si definisce innanzitutto la trasformata di Fourier continua per segnali continui periodici e aperiodici, che sono di particolare interesse nell'ambito dell'analisi di segnali con strumentazione di laboratorio e nell'elettronica più in generale, e si elencano brevemente le proprietà fondamentali della trasformata per segnali continui aperiodici. Successivamente si definisce la trasformata di Fourier a tempo discreto e si evidenziano le caratteristiche e le limitazioni più importanti in relazione all'analisi in frequenza tramite oscilloscopio.

È bene precisare che in questo capitolo verranno riportati solo alcuni concetti fondamentali della trasformata; per una trattazione più esauriente si rimanda al riferimento bibliografico preposto^[6].

3.1 La serie e la trasformata di Fourier: definizione e proprietà

La trasformata di Fourier, abbreviata FT dall'inglese *Fourier Transform*, consente di rappresentare un vasto insieme di segnali tramite una combinazione lineare di segnali complessi. La FT è di fondamentale importanza poiché permette di analizzare i segnali di interesse con un livello di profondità che non sarebbe altrimenti possibile nel dominio tempo.

Si consideri un segnale periodico continuo nel tempo $x(t)$: si ricorda che un segnale viene definito periodico se

$$x(t) = x(t + T) \quad 3.1.1$$

per ogni t . Il segnale $x(t)$ può quindi essere espresso tramite una combinazione lineare di esponenziali complessi, e quindi di armoniche, ovvero

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t} \quad 3.1.2$$

dove ω_0 è la frequenza fondamentale, T è il periodo fondamentale tale che $T = 2\pi/\omega_0$ e k indica i componenti armonici del segnale. Ad esempio, il termine per $k = 0$ è costante, mentre i termini per $k = \pm 1$ hanno entrambi la frequenza fondamentale pari a ω_0 . L'Espressione 3.1.2 viene indicata quindi come rappresentazione in serie di Fourier del segnale $x(t)$.

I termini a_k vengono definiti coefficienti di Fourier ed è possibile calcolarli tramite l'Espressione 3.1.3 riportata di seguito.

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk(2\pi/T)t} dt \quad 3.1.3$$

Questi coefficienti complessi misurano la porzione di segnale $x(t)$ che si trova ad ogni armonica della componente fondamentale. Come accennato, il termine per $k = 0$ è costante e, più in dettaglio, rappresenta la componente dc del segnale $x(t)$.

Per quanto riguarda i segnali aperiodici, questi possono essere visti come segnali periodici ma di periodo infinito. Inoltre, nella rappresentazione in serie di Fourier dei segnali periodici, all'aumentare del periodo diminuisce la frequenza fondamentale e le componenti armoniche si avvicinano. Quando il periodo diventa infinito, le componenti in frequenza si avvicinano e formano perciò una componente continua; la serie di Fourier da somma diventa così un integrale, a differenza dell'Espressione 3.1.3. Lo spettro risultante viene quindi chiamato trasformata di Fourier.

In termini più formali, consideriamo un altro segnale $x(t)$ di durata finita tale per cui, per un determinato numero T_1 , si ha che $x(t) = 0$ se $|t| > T_1$. Come illustrato nel paragrafo precedente, è quindi possibile definire il segnale periodico $\tilde{x}(t)$, in cui $x(t)$ ne costituisce un periodo. Per $T \rightarrow \infty$, il segnale $x(t)$ tende a $\tilde{x}(t)$, che perciò diventa una rappresentazione di $x(t)$.

Se definiamo la serie di Fourier di $\tilde{x}(t)$ utilizzando l'Espressione 3.1.2 e la esprimiamo in funzione di $X(jk\omega_0) = T a_k$, si ottiene così l'Espressione 3.1.4.

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \quad 3.1.4$$

Utilizzando quindi il concetto visto nel paragrafo precedente, ovvero che per $T \rightarrow \infty$, $\tilde{x}(t) \rightarrow x(t)$ e che da sommatoria si passa ad un integrale, si ottengono l'Espressione 3.1.5

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad 3.1.5$$

e l'Espressione 3.1.6.

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad 3.1.6$$

L'Espressione 3.1.6 rappresenta la trasformata di Fourier del segnale continuo aperiodico $x(t)$ e viene generalmente chiamata spettro di $x(t)$, mentre l'Espressione 3.1.5 rappresenta l'anti trasformata corrispondente.

Di seguito si riportano solo alcune delle proprietà fondamentali della trasformata di Fourier nel caso di un segnale periodico continuo. Per maggiori informazioni circa le proprietà nel caso di un segnale periodico oppure a tempi discreti si rimanda all'opportuno riferimento bibliografico^[6], ma come si vedrà la maggior parte è del tutto analoga, in quanto esiste una relazione stretta tra la trasformata di Fourier e la serie di Fourier.

Le proprietà della trasformata di Fourier forniscono molte informazioni sulla relazione tra la descrizione in frequenza e quella nel tempo di un segnale. Inoltre, molte di queste permettono di ridurre la complessità nel calcolo della stessa trasformata oppure dell'anti trasformata.

Indicando il passaggio alla trasformata di Fourier con la seguente simbologia,

$$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(j\omega)$$

e definendo un altro segnale $y(t)$ tale per cui

$$y(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} Y(j\omega)$$

allora la prima proprietà che si riporta è quella della linearità, definita nell'Espressione 3.1.7.

$$ax(t) + by(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} aX(j\omega) + bY(j\omega) \quad 3.1.7$$

La traslazione nel tempo indica invece una moltiplicazione nel dominio di Fourier, come indicato nell'Espressione 3.1.8,

$$x(t - t_0) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} e^{-j\omega_0 t} X(j\omega) \quad 3.1.8$$

mentre la proprietà del coniugato è definita nell'Espressione 3.1.9 di seguito.

$$x^*(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X^*(-j\omega) \quad 3.1.9$$

Per concludere si riportano altre tre proprietà importanti, che riguardano l'operazione di derivazione, di moltiplicazione nel tempo e di convoluzione, riportate rispettivamente nell'Espressione 3.1.10,

$$\frac{d(t)}{dt} \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j\omega X(j\omega) \quad 3.1.10$$

nell'Espressione 3.1.11

$$x(at) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right) \quad 3.1.11$$

e nell'Espressione 3.1.12, con $h(t)$ che rappresenta la risposta impulsiva del sistema oggetto di studio, tale che $h(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} H(e^{j\omega})$.

$$y(t) = x(t) * h(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad 3.1.12$$

3.2 La DFT, Trasformata Discreta di Fourier

L'elaborazione dei segnali a tempo continuo può essere complessa e molto onerosa dal punto di vista computazionale, per questo motivo molte tecnologie moderne che comprendono sistemi di elaborazione dei segnali si basano per lo più su segnali a tempo discreto. Il passaggio da tempo continuo a discreto comporta però dei processi di campionamento e di quantizzazione, che sono dei processi che forniscono una sequenza di campioni, dove ciascuno di questi rappresenta il valore del segnale originario in un determinato istante temporale.

Con il passaggio al dominio discreto è possibile definire la trasforma di Fourier a tempi discreti, o DFT dall'inglese *Discrete Fourier Transform*, focalizzando maggiormente l'attenzione però sulle condizioni al contorno poste dall'acquisizione e dall'elaborazione di segnali tramite strumentazione specifica di laboratorio, come oscilloscopi e analizzatori di spettro. Per maggiori informazioni circa la teoria della trasformata di Fourier a tempi discreti e le sue proprietà, tuttavia, è possibile consultare il riferimento bibliografico specifico^[8].

Un algoritmo per il calcolo dello spettro di un segnale che si basa sul calcolo della DFT è in grado di convertire facilmente dei campioni acquisiti da un segnale in informazione tramite il suo spettro, calcolabile in modo standard dagli oscilloscopi. In realtà si precisa che il calcolo della DFT si basa a sua volta sull'algoritmo *Fast Fourier Transform*, abbreviato FFT, che permette di aumentare a sua volta l'efficienza computazionale del calcolo della DFT, che altrimenti risulta essere oneroso. Senza entrare nei dettagli della FFT, però, si consideri di nuovo un segnale $x(t)$ e la sua trasformata $X(f)$, che si è visto è una funzione complessa. L'algoritmo presente negli oscilloscopi è in grado di fornire una stima del suo spettro processando la corrispondente sequenza di campioni $x(nT_s)$

a lunghezza finita. In un DSO, il valore dei campioni rappresenta perciò una stima dell'ampiezza dello spettro di $|X(f)|^{[10]}$.

Si consideri quindi la sequenza di campioni $x[n] = x(nT_s)$, con $n_0 \leq n \leq n_0 + N - 1$, allora la DFT è definita come nell'Espressione 3.2.1.

$$X_{DFT}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \quad 3.2.1$$

La sequenza complessa dei coefficienti di Fourier $X_{DFT}[k]$ è quindi periodica, di periodo N . È inoltre possibile riscrivere l'Espressione 3.2.1 esplicitando la dipendenza da tempo e frequenza, come si evidenzia nell'Espressione 3.2.2,

$$X_{DFT}[kF] = \frac{1}{NT_s} \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} T_s \cdot x(nT_s) e^{-j2\pi \frac{k}{NT_s} nT_s} \quad 3.2.2$$

dove F , definito come $F = 1/NT_s$, indica che i valori del dominio della frequenza sono multipli interi del passo di frequenza F . Come riportato verso la fine del Capitolo 2, lo step di quantizzazione in frequenza F è il reciproco dell'intervallo di osservazione T_w , che è definito come $T_w = NT_s$.

Si consideri poi la trasformata di Fourier a tempi discreti DTFT (*Discrete Time Fourier Transform*) di un segnale campionato $x(nT_s)$ di durata illimitata, con $-\infty < n < +\infty$, definita nell'espressione 3.2.3, con $\omega = 2\pi f$.

$$\tilde{X}(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_s \cdot x(nT_s) e^{-j\omega nT_s} \quad 3.2.3$$

Allora esiste ed è dimostrabile la seguente relazione tra la DTFT e la DFT^{[6][10][11]}.

$$X_{DFT}[kF] = \frac{1}{NT_s} \tilde{X}(j\omega) \Big|_{f=kF} = \frac{1}{NT_s} \tilde{X}(j \frac{2\pi}{NT_s} k) \quad 3.2.4$$

Ovvero la DFT di un segnale consiste nella trasformata di Fourier dello stesso segnale che è stata scalata, ripetuta periodicamente e successivamente campionata in frequenza. Come si vedrà nel Capitolo 4, quest'ultima relazione risulterà essere di fondamentale importanza in quanto consentirà di determinare la DFT dei segnali di interesse direttamente dalla corrispondente DTFT. Si menziona infine che la DTFT indicata da $X(j\omega)$ a volte viene indicata nei testi anche come $X(e^{j\omega})$.

Nel prossimo capitolo si andranno dunque a descrivere i test effettuati in laboratorio e a elencare i segnali utilizzati, riportando il loro andamento nel tempo e in frequenza e analizzando le differenze tra quest'ultimo visualizzato sull'oscilloscopio e quello calcolato in modo analitico.

CAPITOLO 4 – Analisi di segnali in frequenza

In questo capitolo si descrivono i test effettuati e i segnali che sono stati presi in considerazione in tali test; in particolare, si riportano i loro andamenti teorici nel tempo e in frequenza, ottenuti tramite Matlab (con la funzione *fft()* per quanto riguarda gli andamenti in frequenza). Successivamente si riportano i loro andamenti nel tempo e in frequenza così come visualizzati nell'oscilloscopio e si esegue un'analisi delle differenze che si possono riscontrare in tali spettri rispetto a quelli teorici calcolati su Matlab, facendo delle ipotesi sull'origine dei fenomeni osservati.

4.1 Descrizione dei test

I test effettuati consistono quindi nel confrontare l'andamento teorico atteso della DFT di specifici segnali, calcolata tramite Matlab con la funzione preposta *fft*, con il corrispondente spettro calcolato e visualizzato sull'oscilloscopio. Tale strumento è stato perciò utilizzato sia come generatore di funzioni, per generare appunto i segnali di test, sia per calcolare e visualizzare la loro FFT.

Questo confronto risulta essere quindi di particolare importanza perché permette di determinare alterazioni o distorsioni che possono verificarsi durante i vari processi a cui vanno incontro i segnali nel calcolo della trasformata di Fourier o nella visualizzazione di questa.

I test di generazione di forme d'onda e di calcolo della loro FFT si sono perciò svolti con riferimento ai seguenti step:

1. Scelta del segnale di interesse e dei suoi parametri, come ampiezza, frequenza e forma
2. Generazione del segnale di test e calcolo della sua DFT teorica su Matlab tramite la funzione preposta *fft*
3. Generazione e acquisizione del segnale tramite i moduli preposti dell'oscilloscopio

4. Impostazione dei valori dei parametri dell'oscilloscopio, come T_W , e scelta del numero dei periodi del segnale da visualizzare
5. Calcolo e visualizzazione dello spettro del segnale tramite modulo FFT dell'oscilloscopio
6. Impostazione dei valori dei parametri del modulo della FFT per visualizzare spettri coerenti con la teoria di Fourier
7. Salvataggio dei campioni della FFT calcolati dall'oscilloscopio e di istantanee dello schermo su dispositivo removibile USB, importazione su personal computer per successiva analisi
8. Confronto su Matlab dello spettro ottenuto dallo strumento con quello teorico calcolato tramite la funzione *fft()*

Si ritiene che uno studio accurato delle discrepanze e delle differenze che caratterizzano le risposte ottenute su un oscilloscopio con quelle teoriche sia infatti fondamentale per una migliore comprensione del sistema oggetto di studio e dei fenomeni ad esso associati. In definitiva, tutto ciò consente di mettere assieme le conoscenze teoriche in un ambito più pratico, che coinvolge quindi applicazioni reali.

4.2 Impostazione dell'oscilloscopio

Prima di andare a elencare e ad analizzare i singoli segnali nel dettaglio è bene precisare però dove sono localizzati i parametri riportati nel Capitolo 2 su schermo e quali sono le relazioni fondamentali tra questi che possono influire in modo significativo in questa analisi, menzionando anche come è possibile impostarli. I valori di tali parametri e più in generale le impostazioni dell'oscilloscopio non rimangono tuttavia sempre fissi: è necessario variare i loro valori a seconda del segnale oggetto di studio. Per questo motivo, quindi, in questo paragrafo si riporta una panoramica solamente generale delle impostazioni e dei parametri fondamentali dell'oscilloscopio per quanto riguarda l'analisi in frequenza, mentre nel Paragrafo 4.3, in cui è presente la parte di analisi vera

e propria, si riportano i valori precisi dei suddetti parametri per ogni segnale di test. Per maggiori informazioni e dettagli circa le funzioni degli altri parametri modificabili non menzionati o solo accennati si rimanda al riferimento bibliografico preposto^[12].

Una volta che l'oscilloscopio è acceso e ha concluso la sua configurazione iniziale, cioè è pronto all'utilizzo, è necessario impostare il generatore di funzioni che è integrato nello stesso oscilloscopio. Facendo riferimento alle Figure 3 e 5 del Paragrafo 2.1, Capitolo 2, e prendendo in considerazione il pannello frontale dello strumento, si deve quindi collegare con un cavo coassiale l'uscita denominata "Gen Out" con la porta indicata da "1", ovvero il primo canale di ingresso. In questo modo lo strumento è in grado di acquisire segnali che presentano frequenze fino a 20 MHz^[7]. Una volta terminata l'impostazione hardware è possibile scegliere il segnale da acquisire tra una lista di predefiniti, tra cui si ricordano l'onda sinusoidale, quadra, triangolare, impulso, ecc. Di seguito si riportano delle istantanee acquisite dall'oscilloscopio che consentono di localizzare su schermo i parametri più importanti per questi test. Il segnale utilizzato per questo scopo, in particolare, come si vedrà, consiste proprio in uno dei segnali di test preso in considerazione nel Paragrafo 4.3.

Si consideri quindi l'istantanea dello schermo digitale dell'oscilloscopio riportata in Figura 7 che rappresenta il processo di generazione di un'onda quadra (tale immagine è stata acquisita direttamente dallo strumento e salvata su un dispositivo USB tramite una funzione apposita del DSO). Come si osserva, i parametri più significativi per questo elaborato sono evidenziati in rosso e sono:

1. L'intervallo temporale di una divisione (*Time/div*), che permette di impostare T_W
2. La modalità di trigger (*Run/stop status*), che permette di selezionare un'acquisizione continua o manuale
3. Vari parametri specifici del segnale generato

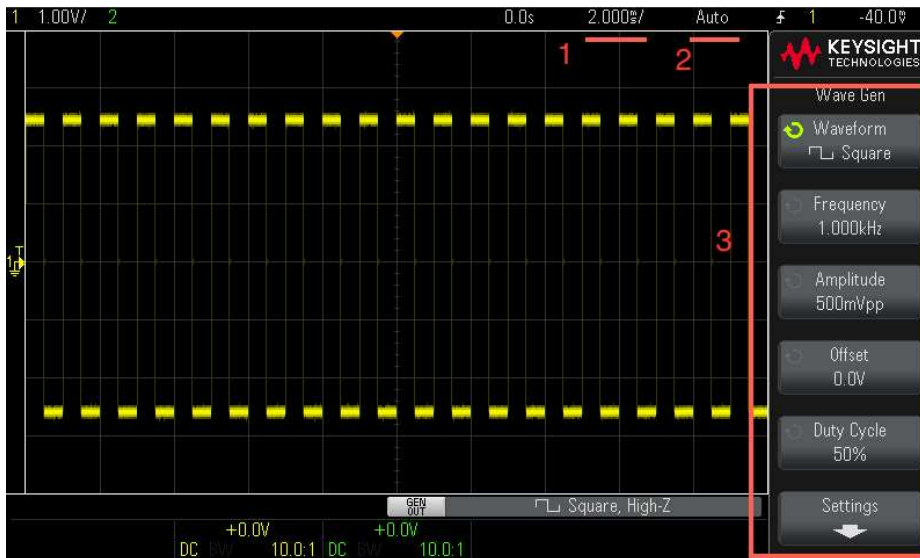


Figura 7 – Onda quadra nel tempo sull'oscilloscopio^[7]

Per quanto riguarda l'ultimo punto, sul lato destro dello schermo è possibile scegliere il tipo di segnale da generare e quindi impostare i suoi parametri, come ad esempio frequenza, ampiezza picco-picco, duty cycle e offset verticale.

In Figura 8 si possono invece osservare, evidenziati in rosso, i parametri più importanti del modulo FFT del DSO, che appunto permette di calcolare lo spettro dei campioni del segnale nel tempo visualizzato su schermo. I parametri di particolare interesse sono:

1. *span e center*
2. La risoluzione in frequenza (*FFT Resolution*)
3. *Window e vertical units*, contenuti in *Settings*

In modo particolare, lo *span* rappresenta l'intervallo di frequenze visualizzato su schermo, mentre *center* rappresenta la frequenza visualizzata al centro dello schermo. La *FFT Resolution* invece è definita come la capacità dello strumento di distinguere due picchi distinti come tali; questa è pari all'inverso di T_W ^{[3][8][10]}.

Con l'impostazione *Settings* invece si possono selezionare il tipo di finestra da applicare al segnale su cui viene calcolato lo spettro e anche la scala, che può essere lineare o logaritmica. Per quanto riguarda la scala, nel corso di questi test sarà sempre impostata sempre come logaritmica, in quanto risulta essere di particolare utilità per il calcolo della

banda (maggiori dettagli al termine di questo paragrafo). Gli altri parametri sono *scale* e *offset*: questi permettono rispettivamente, come si intuisce, di scalare in ampiezza il segnale e aggiungergli un offset.

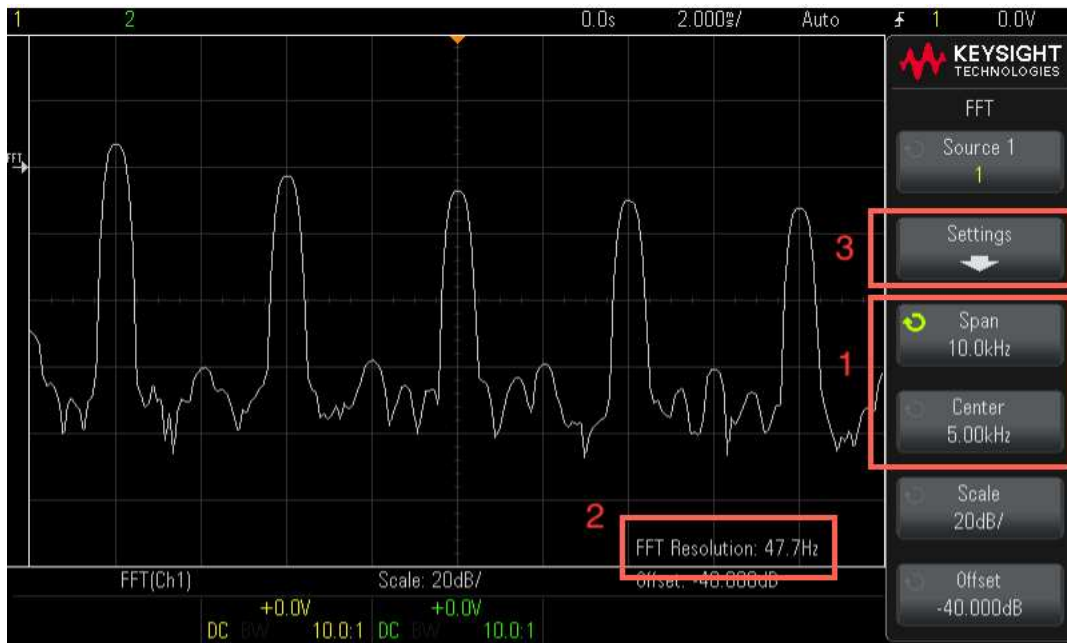


Figura 8 –FFT di un’onda quadra sull’oscilloscopio^[7]

Terminata la presentazione dei parametri più importanti dell’oscilloscopio per quanto riguarda l’analisi condotta in questo elaborato e indicata la loro posizione su schermo, si procede quindi a determinare le relazioni più importanti tra questi che possono avere degli effetti significativi nel calcolo della FFT e nelle misure delle sue caratteristiche.

Innanzitutto, riprendendo quanto accennato nel Capitolo 2, l’intervallo visualizzato su schermo T_W è definito come $T_W = NT_S$, dove N è il numero dei campioni acquisiti in memoria e T_S è il periodo di campionamento. L’intervallo T_W è calcolato come il prodotto tra la durata temporale di una divisione per il numero totale di divisioni dello strumento (che in questo caso è pari a 10, in orizzontale), mentre il tempo di campionamento T_S è definito come $T_S = 1/F_S$, dove F_S è la frequenza di campionamento effettiva che viene fornita dall’oscilloscopio in Pt/s, indicata su schermo dal parametro *sampling rate*.

La memoria profonda dello strumento è pari a 1 MPts, che però è divisa per i due canali di ingresso: si ha quindi che $N = 500'000$ Pts^[7]. Come si può intuire, il numero di punti N

è fisso e questo ha come conseguenza il fatto che T_S (e quindi F_S) vari in funzione di T_W : cambiando il valore di T_W si osserva una variazione corrispondente di T_S e quindi di F_S ^[7]. Prendendo come riferimento l'esempio precedente di Figura 7 e 8, la frequenza di campionamento fornita dallo strumento è pari a 25 MPts, ovvero 25 MHz; in questo caso si ottiene che $T_S = 40 \text{ ns}$, quindi moltiplicando T_S per 500'000 si ottiene $T_W = 20 \text{ ms}$, che è il valore impostato e atteso di T_W . Aumentando T_W però diminuisce T_S poiché come si diceva N è costante, di conseguenza bisogna prestare particolare attenzione a non incrementare troppo tale valore, col rischio di sottocampionare il segnale. È necessario quindi impostare T_W in modo tale da visualizzare circa venti periodi del segnale cui bisogna calcolare lo spettro^[13], di modo da evitare l'effetto di sottocampionamento descritto.

Una volta preso nota della frequenza di campionamento effettiva F_S dell'oscilloscopio (che è fornita dallo stesso), è necessario infine verificare il teorema di Nyquist, il quale afferma che $F_S \geq 2 \cdot B$ (o 2.5 nel caso pratico descritto nel Capitolo 2), dove B è la banda del segnale. È necessario quindi decidere che banda considerare per il segnale di test oggetto di studio: seguendo l'esempio dei riferimenti preposti^{[3][8][10][13]}, si è deciso di considerare una banda a -3 dB.

Per ogni segnale si riporteranno in modo dettagliato i valori scelti dei suoi parametri fondamentali come, ad esempio, ampiezza e frequenza fondamentale, sia su Matlab che sull'oscilloscopio; successivamente si riporteranno i parametri impostati per il calcolo della FFT, come span e tipo di finestra applicata. Infine, si andrà a verificare il teorema di Nyquist, sia quello teorico che quello pratico introdotto nel Paragrafo 2.1 del Capitolo 2.

4.3 Definizione e analisi in frequenza dei segnali di interesse didattico

I segnali presi in considerazione in questi test sono i seguenti:

1. onda quadra
2. onda triangolare
3. impulso singolo
4. treno di impulsi

5. sweep sinusoidale in frequenza

Per prima cosa si andrà a definire in modo analitico ciascuno di questi segnali, riportando l'espressione della DFT a partire dalla relativa DTFT, in modo da intuire la correttezza dello spettro finale. Successivamente si riporteranno su dei grafici appositi i loro andamenti sia nel tempo, con i relativi campioni realizzati direttamente su Matlab, che in frequenza, con gli spettri calcolati da tali campioni tramite l'utilizzo della funzione $fft()$ preposta. Dopo di che, si riporteranno gli andamenti nel tempo e in frequenza di tali segnali così come generati e visualizzati sull'oscilloscopio: come accennato precedentemente, tali andamenti sono stati calcolati tramite la funzione specifica dello strumento, indicata dal pulsante denominato "FFT" sul tastierino.

Con l'obiettivo di determinare l'origine delle eventuali discrepanze sorte, per ogni segnale si eseguirà poi un'analisi delle differenze eventualmente osservate tra l'andamento teorico della FFT ottenuto con Matlab e quello calcolato e visualizzato dall'oscilloscopio.

4.3.1 Onda quadra

Il primo segnale preso in considerazione è un'onda quadra definita come nell'Espressione 4.3.1.1 riportata di seguito,

$$x_{sw}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{sw}^*(t - nT) \quad 4.3.1.1$$

dove

$$x_{sw}^*(t) = \begin{cases} V_H, & 0 < t < T_p/2 \\ V_L, & T_p/2 < t < T_p \end{cases} \quad 4.3.1.2$$

con V_H e V_L impostati rispettivamente a 250 mV e -250 mV .

Un'onda quadra altro non è che la ripetizione periodica nel tempo di un segnale *rect*, di conseguenza si dimostra^[11] che la sua DFT è pari a

$$X_{SW}[kF] = A \cdot d \cdot T_p \cdot \text{sinc}(k \cdot d)$$

4.3.1.3

dove A è l'ampiezza, d è il duty cycle e T_p è il periodo dell'onda quadra. I parametri fondamentali di tale segnale di test sono riportati in Tabella 1.

In Figura 9 si riporta l'andamento nel tempo di questo segnale, ottenuto da Matlab per mezzo della funzione *square()*, mentre in Figura 10 si osserva tale segnale direttamente nell'oscilloscopio, con in evidenza la frequenza di campionamento F_S .

Parametri onda quadra	
Frequenza	1 kHz
Duty cycle	50%
Volt picco-picco (Vpp)	500 mV

Tabella 1

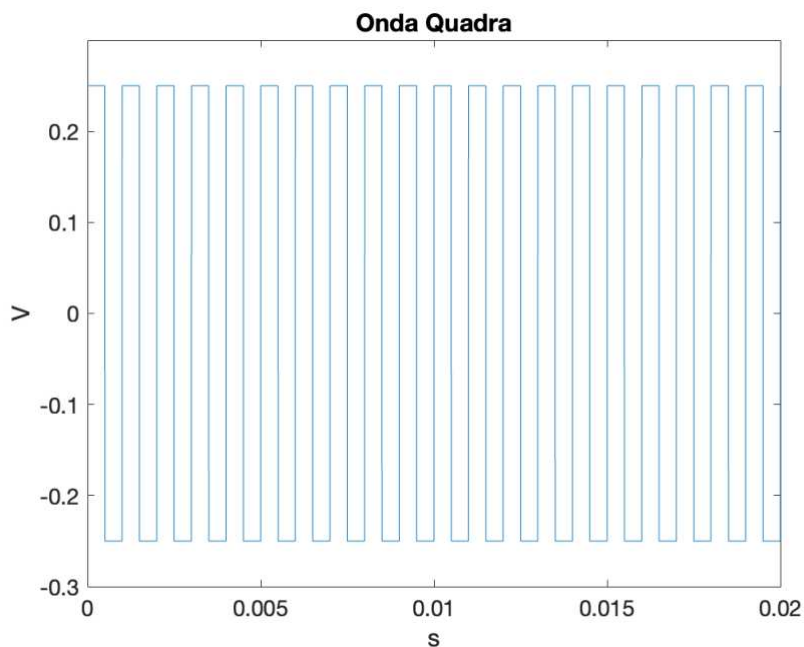


Figura 9 – Onda quadra nel tempo su Matlab^[9]

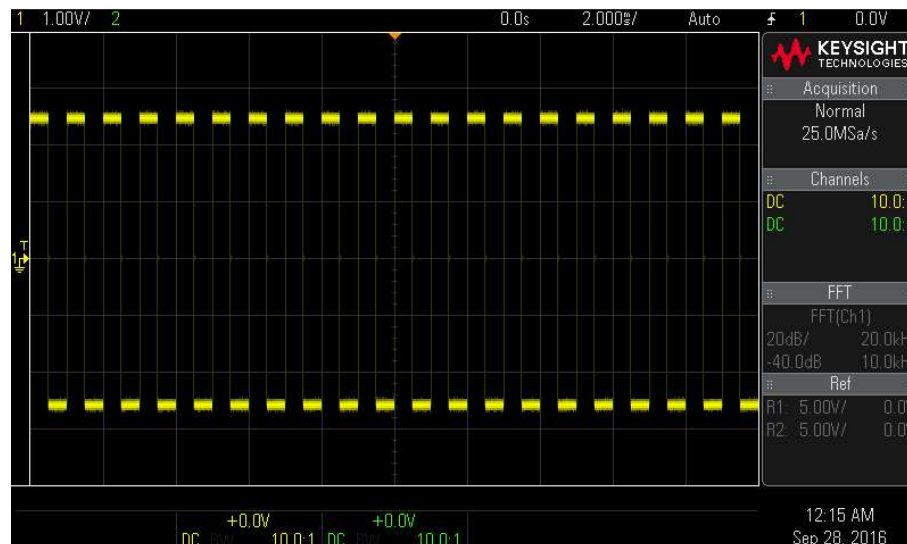


Figura 10 – Onda quadra nel tempo sull'oscilloscopio^[7]

Come accennato precedentemente, è ottimale ai fini di un'analisi in frequenza che il segnale non risulti né sottocampionato né sovraccampionato, di conseguenza si è deciso di riportare 20 periodi dell'onda quadra^[13].

Parlando più in dettaglio dell'impostazione dell'oscilloscopio, come si può osservare da entrambe le Figure 9 e 10, si è posto $T_W = 20 \text{ ms}$ (ovvero 2 ms/div per 10 divisioni). La frequenza di campionamento F_S , o *sampling rate*, fornita dall'oscilloscopio è pari a 25 MPt/s (come visibile in Figura 10 in alto a destra, nel tab *Acquisition*), ovvero 25 MHz: essendo $T_S = 1/F_S$ si ha quindi che $N = T_W/T_S = 500'000$, che come accennato nel Paragrafo 4.2 rappresenta esattamente metà della memoria profonda dell'oscilloscopio (che appunto viene divisa in due canali).

Per quanto riguarda il dominio della frequenza, in Figura 11 si riporta l'andamento della trasformata discreta di Fourier del segnale sopra definito, calcolata tramite il comando *fft()* di Matlab sui campioni generati sempre da tale software. Lo spettro di Figura 11 è stato ottenuto applicando la finestra flat top; i campioni sono stati poi portati in scala logaritmica tramite la funzione Matlab *mag2db()*.

In Figura 12 si riporta invece lo spettro dell'onda quadra calcolato sull'oscilloscopio tramite il modulo preposto FFT a partire dal segnale nel tempo di Figura 10.

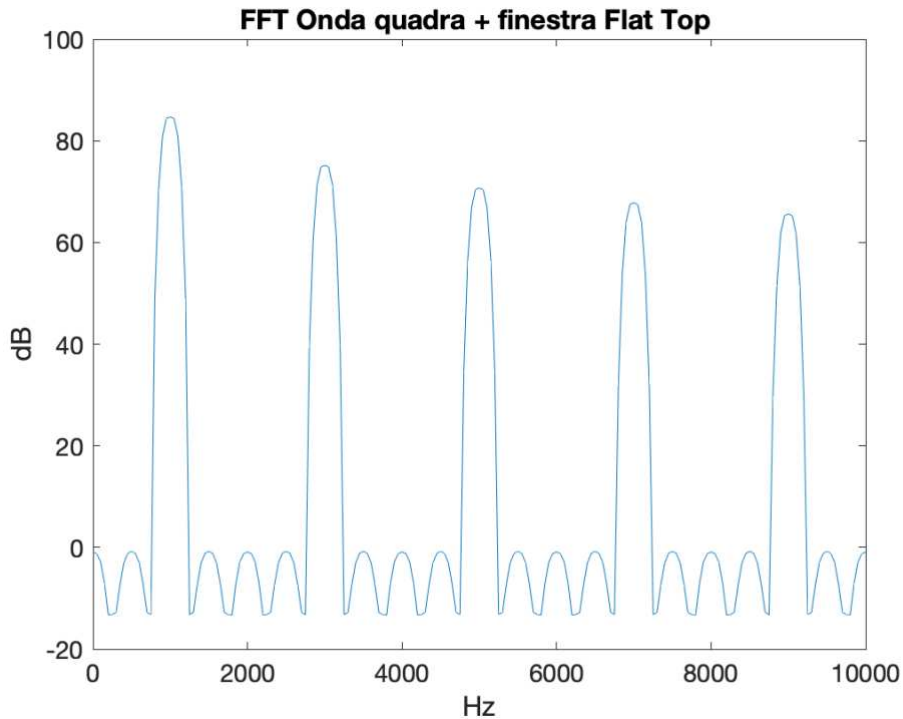


Figura 11 – Spettro di un'onda quadra calcolato su Matlab
(da normalizzare rispetto al numero di campioni $N = 250'000$)^[9]

Si menziona che lo spettro di Figura 11 deve essere normalizzato rispetto al numero di campioni N , il quale non è $500'000$ (come nell'oscilloscopio) ma $250'000$, in quanto si è deciso di prendere solo metà dei campioni della FFT calcolata in virtù della sua proprietà di simmetria.

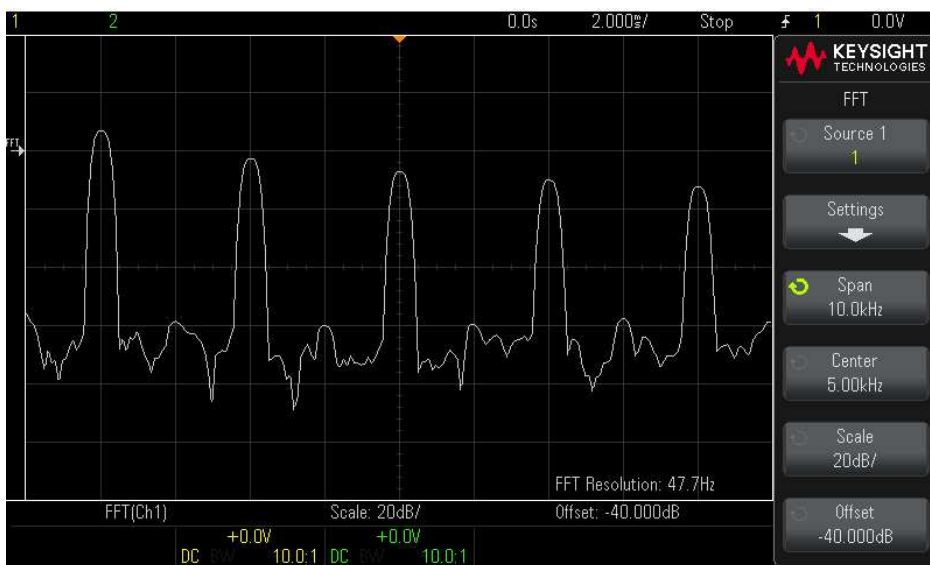


Figura 12 – FFT dell'onda quadra sull'oscilloscopio^[7]

Come si può osservare da Figura 12, i valori di scala e di offset sono rimasti predefiniti (con la scala impostata come logaritmica) e anche qui la finestra selezionata è la *flat top*, la quale risulta essere particolarmente ideale per calcoli di misure di ampiezze^{[3][14]}. Per entrambi gli strumenti la frequenza centrale visualizzata sullo schermo è di 5 kHz, mentre l'intervallo di frequenze è di 10 kHz. In Tabella 2 si riportano sia i valori di ampiezza in dB delle prime 5 armoniche dello spettro del DSO di Figura 12 che quelli normalizzati rispetto ad $N = 500'000$, ovvero al numero di campioni contenuti nella memoria del DSO.

Ampiezze delle armoniche		Ampiezze normalizzate rispetto a N
1 kHz	89,4 dB	32,4 dB
3 kHz	80 dB	23 dB
5 kHz	74,4 dB	17,4 dB
7 kHz	66,9 dB	9,9 dB
9 kHz	67,5 dB	10,5 dB

Tabella 2

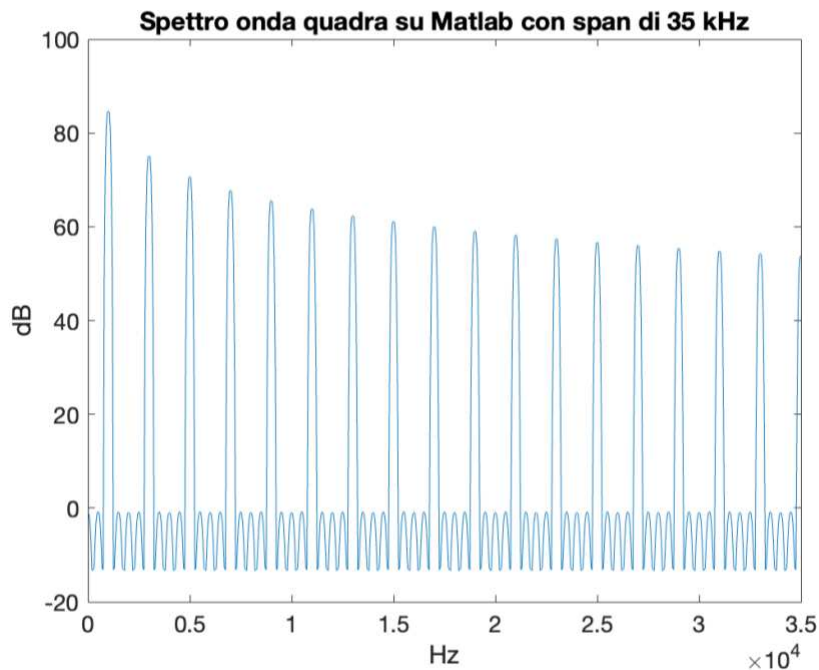


Figura 13 – Spettro di Figura 11 ma con span incrementato, pari a 35 kHz (da normalizzare rispetto a $N = 250'000$)^[9]

In Figura 14 si riporta invece lo spettro calcolato sul DSO (con applicata la finestra *flat top*) sempre con un range di frequenze di 10 kHz ma con la frequenza centrale questa volta impostata a 21 kHz.

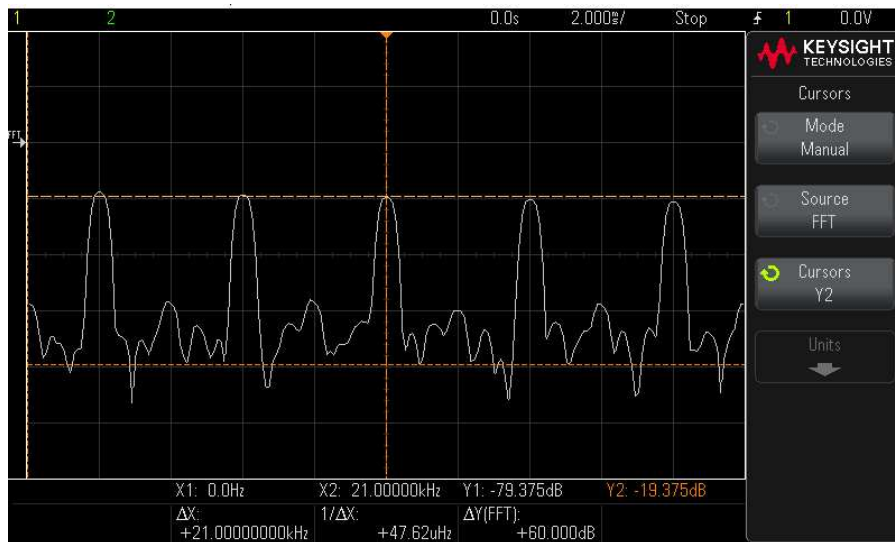


Figura 14 – Spettro DSO, in evidenza la prima armonica con meno del 70% del valore dell’armonica di 1 kHz^[9]

Come si può subito notare dagli spettri delle Figure 11 e 12, i due spettri risultano essere sovrapponibili a meno di un determinato fattore di ampiezza. In modo particolare, si può osservare che le prime cinque armoniche, localizzate rispettivamente a 1, 3, 5, 7 e 9 kHz, coincidono nelle frequenze e anche nella forma dei lobi.

È inoltre presente nella traccia del DSO un rumore di fondo che va ad affliggere le componenti spettrali di ampiezza minore. In particolare, tale rumore è causato da due contributi distinti, ovvero dal processo di quantizzazione del segnale e dal rumore elettronico introdotto dagli stadi del canale di input^[10]. La loro combinazione può quindi essere descritta come un processo aleatorio con una varianza σ_{DSO}^2 che è pari alla somma delle varianze di entrambi questi due componenti (la densità di potenza spettrale di tale processo è quindi costante e indipendente dalla potenza). Tale varianza può essere quindi stimata come la media dei valori di un insieme di punti della traccia dello spettro dove è presente solo rumore, traccia che in questo caso viene perciò definita rumore di base o *noise floor*. Il *noise floor* è quindi un parametro comparabile con gli eventuali componenti spettrali introdotti dalla distorsione dell’oscilloscopio. Il

rumore di fondo può tuttavia essere eventualmente diminuito tramite la modalità di acquisizione ad alta risoluzione dell'oscilloscopio, se presente. Tale modalità non è stata adottata in questo elaborato.

Divergendo per un momento dall'analisi in frequenza del segnale di test, si vogliono fare delle considerazioni su alcune proprietà della trasformata di Fourier. La trasformata di Fourier discreta così come definita nel Capitolo 3 (e l'algoritmo FFT associato) assume inoltre che l'insieme di campioni acquisito sia un periodo finito di un segnale continuo: se infatti il segnale è periodico e il numero di periodi è esattamente un numero intero, allora la traccia visualizzata è continua e non presenta distorsioni.

Se però accade che il segnale misurato non sia periodico oppure il suo periodo non coincida con l'intervallo di osservazione $T_W^{[3]}$, l'algoritmo tronca il segnale misurato e introduce delle differenze nelle sue caratteristiche originali, ovvero delle discontinuità che tendono a palesarsi come componenti ad alta frequenza non presenti nello spettro originario, come visibile in Figura 15. Poiché queste frequenze sono maggiori di zero ma inferiori alla frequenza di Nyquist, lo spettro visualizzato non coincide con lo spettro reale del segnale. L'effetto risultante appare perciò come la perdita di una frequenza in frequenze maggiori e viene perciò definito *spectral leakage*^{[10][13]}, origine quindi di tali componenti di ampiezza ridotta appena citate.

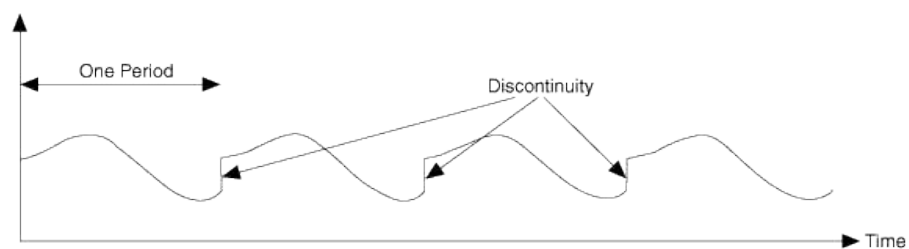


Figura 15 – Origine dello *spectral leakage*^[13]

L'applicazione di *finestre* specifiche permette tuttavia di attenuare lo *spectral leakage*. Una *finestra* consiste perciò in un segnale di lunghezza finita il quale presenta un'ampiezza che tende gradatamente verso zero verso gli estremi del segnale. Moltiplicando il segnale originario per una *finestra* nel dominio nel tempo è quindi possibile ridurre l'ampiezza delle discontinuità presso gli estremi di ogni sequenza di

lunghezza finita acquisita, col risultato di ottenere un'onda continua che non presenta discontinuità troppo marcate^[13].

Andando nei dettagli, riprendendo quanto riportato nel Capitolo 3, si riprenda perciò la trasformata di Fourier a tempo discreto di una sequenza di campioni di lunghezza infinita $x(nT_s)$, con $-\infty < n < +\infty$, definita nell'Espressione 4.3.1.4 di seguito.

$$\tilde{X}(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} T_s \cdot x(nT_s) e^{-j2\pi f n T_s} \quad 4.3.1.4$$

Il troncamento che consente di passare da una sequenza di lunghezza infinita ad una di durata finita di N campioni origina dal seguente prodotto, definito nell'Espressione 4.3.1.5,

$$x_W(nT_s) = x(nT_s) \cdot w_R(nT_s) \quad 4.3.1.5$$

dove $w_R(nT_s)$ è la funzione *finestra* accennata precedentemente. In questo caso particolare, $w_R(nT_s)$, definita nell'Espressione 4.3.1.6,

$$w_R(nT_s) = \begin{cases} 1, & \text{per } n_0 \leq n \leq n_0 + N - 1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad 4.3.1.6$$

è un rettangolo uniforme che pesa allo stesso modo tutti campioni tali per cui $n_0 \leq n \leq n_0 + N - 1$, ovvero i campioni del segnale corrispondenti a quelli della stessa finestra. Ricordando la proprietà di convoluzione della trasformata di Fourier, definita nel continuo come nell'Espressione 3.1.12 ma valida anche nel discreto, $x_W(f)$ può essere definita come una convoluzione circolare delle DFT di due sequenze, come riportato nell'Espressione 4.3.1.7.

$$X_{DFT}(kF) = \frac{1}{NT_s} [\tilde{X}(f) * \tilde{W}_R(f)] \Big|_{f=kF} \quad 4.3.1.7$$

Confrontando l'Espressione 4.3.1.4 con l'Espressione 4.3.1.7, si dimostra quindi la validità dell'Espressione 4.3.1.8 riportata di seguito.

$$X_{DFT}(kF) = \frac{1}{NT_s} [\tilde{X}_W(f)] \Big|_{f=kF} \quad 4.3.1.8$$

Il termine $\tilde{X}_W(f)$ rappresenta quindi la DFT di $x_W(nT_s)$ e, in particolare, mette in risalto quando riportato precedentemente, ovvero che il troncamento di una sequenza di campioni di lunghezza finita pari a NT_s corrisponde alla convoluzione della trasformata di Fourier del segnale con un altro segnale che invece è di durata finita, ovvero il segnale *finestra*. Questo dimostra perciò che lo spettro della DFT del segnale sarà in una certa misura differente da quello originale e presenterà, oltre al *noise floor*, anche delle componenti spettrali di ampiezza ridotte negli intorni dei lobi di ampiezza maggiore.

In Figura 16 si riporta l'ampiezza in modulo di un periodo della DFT del segnale *finestra rettangolare* rispetto all'asse normalizzato delle frequenze che è pari a N . In particolare, è sufficiente che le frequenze normalizzate siano comprese nell'intervallo $0 \leq \lambda \leq N/2$, in quanto $w_R(nT_s)$ è reale e quindi vale la proprietà di simmetria Hermitiana^[6].

Come si può vedere in Figura 16, la finestra è caratterizzata da un lobo di ampiezza unitario e di larghezza pari a 1, con diversi lobi laterali di ampiezza decrescente ma con larghezza normalizzata sempre pari ad 1.

Esistono poi altri tipi di finestre e la loro scelta dipende dalle caratteristiche del segnale oggetto di studio. Se ad esempio un segnale contiene delle interferenze distanti dalla frequenza di interesse si può scegliere una finestra con lobi laterali più grandi, mentre se i disturbi affliggono maggiormente la frequenza centrale è possibile invece sceglierne una che consista in un lobo principale di ampiezza massima. Se invece lo spettro del segnale è abbastanza piatto si può usare la *finestra rettangolare*.

La *finestra di Hanning* è in genere utilizzata quando non si conosce bene la natura del segnale; questa è definita^[3] nell'Espressione 4.3.1.9 e la sua DFT è riportata in Figura 17.

$$x_{W-H}(nT_s) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(2\pi \frac{n}{N}\right) \quad 4.3.1.9$$

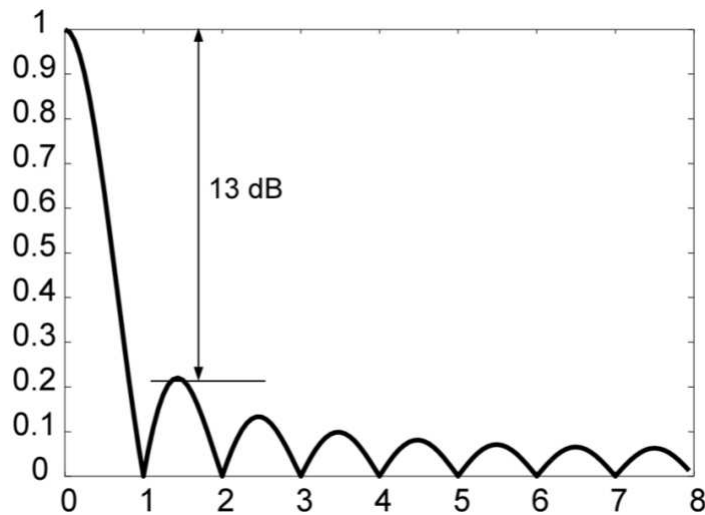


Figura 16 – DFT del segnale *finestra rettangolare*^[10]

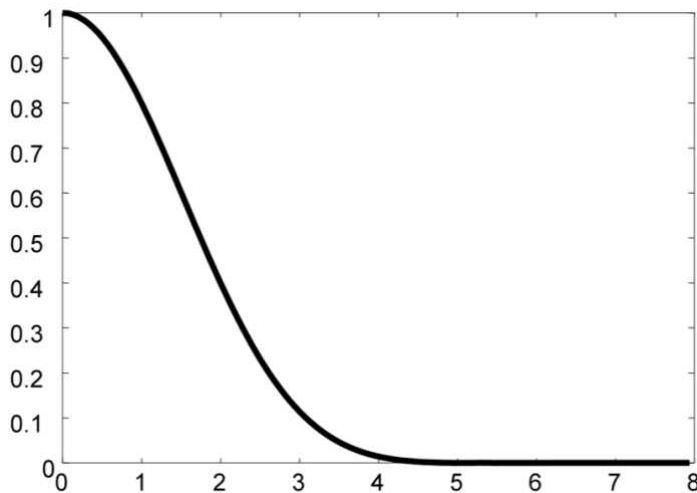


Figura 17 – DFT del segnale *finestra di Hanning*^[10]

Concludendo, si può quindi affermare con certezza che i due spettri presentano le medesime caratteristiche principali, in termini di forma, localizzazione in frequenza delle armoniche, e che quindi sono sovrapponibili a meno di differenze di ampiezze originate da fenomeni di interferenza spettrale e dalla presenza di rumore con origine dal processo di quantizzazione e dai canali degli stadi di input.

4.3.2 Onda triangolare

Il secondo segnale preso in considerazione è invece un'onda triangolare definita come nell'Espressione 4.3.2.1,

$$x_{TR}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{TR}^*(t - nT) \quad 4.3.2.1$$

dove

$$x_{TR}^*(t) = \begin{cases} A(1 - \frac{4}{T_p}t), & 0 < t < T_p/2 \\ A[\frac{4}{T_p}(t - \frac{T_p}{2}) - 1], & T_p/2 < t < T_p \end{cases} \quad 4.3.2.2$$

Anche qui si ha che T_p è il periodo del segnale, mentre A è la sua ampiezza di picco. I parametri della funzione generata dall'oscilloscopio sono riportati in Tabella 3 di seguito.

La DFT di un'onda triangolare corrisponde al campionamento in frequenza della relativa DTFT e quindi risulta essere definita^[11] come nell'Espressione 4.3.2.3.

$$X_{TW}[kF] = A \cdot d \cdot (T_p/2) \cdot \text{sinc}^2(k \cdot d/2) \quad 4.3.2.3$$

Lo spettro risultante dovrà quindi corrispondere, in modo simile al segnale di test 1, alla ripetizione periodica in frequenza di un segnale *sinc*, questa volta però elevato al quadrato.

Parametri onda triangolare	
Frequenza	1 kHz
Volt picco-picco (Vpp)	500 mV
Simmetria	50%

Tabella 3

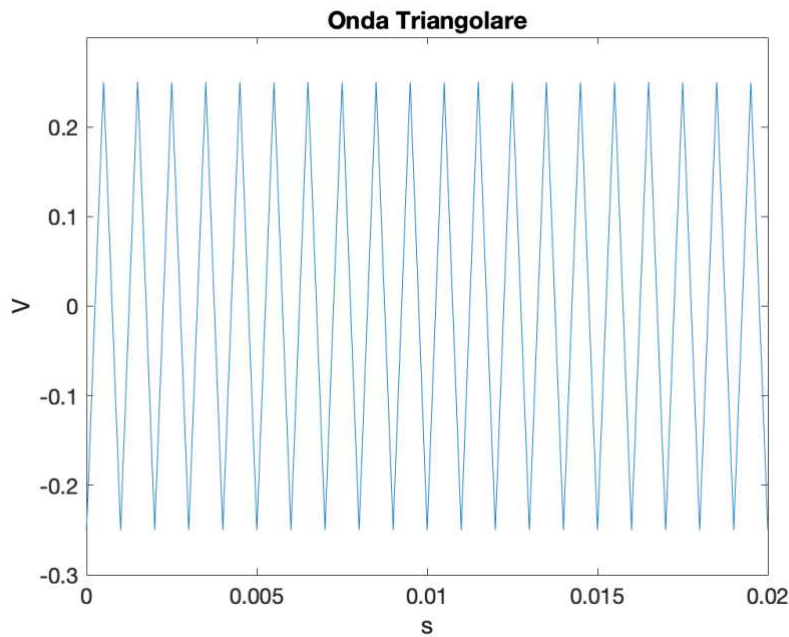


Figura 18 – Onda triangolare nel tempo^[9]

L'onda triangolare nel tempo considerata, riportata in Figura 18, è stata ottenuta su Matlab tramite la funzione preposta *sawtooth()*.

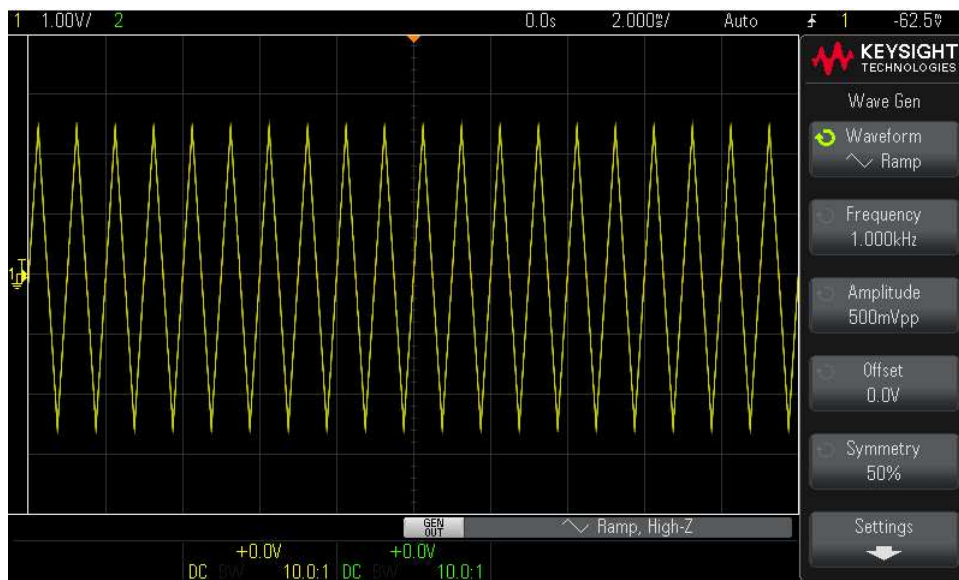


Figura 19 – Onda triangolare nel tempo sull'oscilloscopio^[7]

In Figura 19 invece si riporta, sempre nel dominio del tempo, l'onda triangolare così come generata dall'oscilloscopio. Come si può osservare dalle Figure 18 e 19, anche qui $T_W = 20 \text{ ms}$ e la frequenza di campionamento F_S risulta essere di nuovo di 25 MPt/s,

ovvero $F_S = 25 \text{ MHz}$. Sia su Matlab che nell'oscilloscopio i periodi visualizzati del segnale sono 20, in modo da non sottocampionare né sovraccampionare il segnale.

Anche in questo caso, con tali valori della frequenza di campionamento, di T_W e considerando che la memoria profonda dell'oscilloscopio è di 1 MPts divisa per due canali, dopo un rapido calcolo si ottiene $N = 500'000$, in accordo con quanto riportato nel Capitolo 3.

In Figura 20 di seguito si riporta lo spettro teorico dell'onda triangolare nel tempo di Figura 18 ottenuta su Matlab. Anche qui il calcolo dello spettro è stato effettuato tramite la funzione Matlab $fft()$, i cui valori sono stati poi portati in scala logaritmica tramite la funzione $mag2db()$. Nel calcolo della FFT è stata applicata la finestra *flat top*, in modo analogo al segnale di test onda quadra.

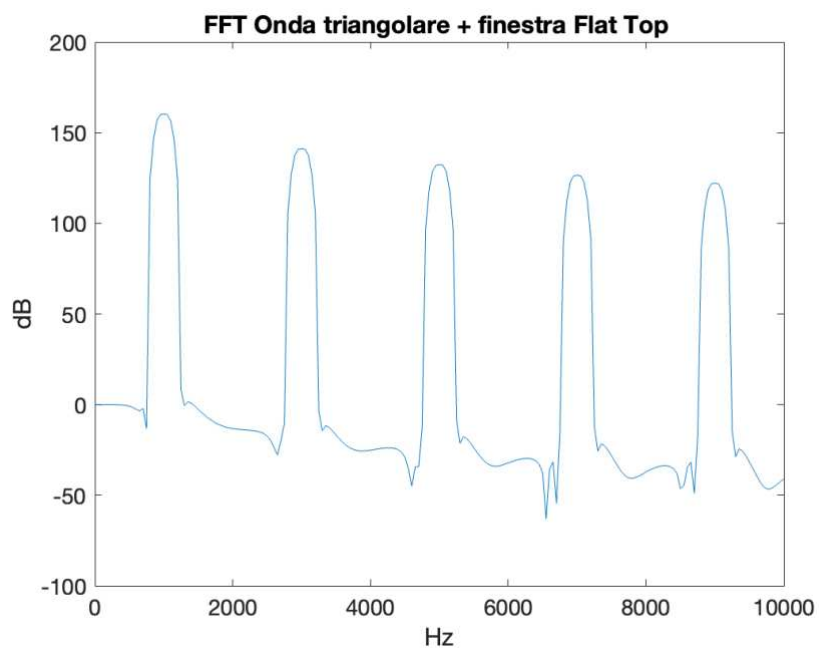


Figura 20 – Spettro dell'onda triangolare calcolato con Matlab
(da normalizzare rispetto a $N = 250'000$)^[9]

Si menziona che, come per il segnale di test precedente, il numero di campioni N necessario alla normalizzazione del segnale viene ridotto da 500'000 a 250'000, in quanto anche in questo caso la metà dei campioni dello spettro ottenuto tramite la funzione Matlab $fft()$ non è stato utilizzato in virtù della proprietà di simmetria della trasformata di Fourier^{[6][11]}.

In Figura 21 si riporta invece lo spettro dell'onda triangolare di Figura 19, calcolato tramite il modulo FFT apposito sull'oscilloscopio.

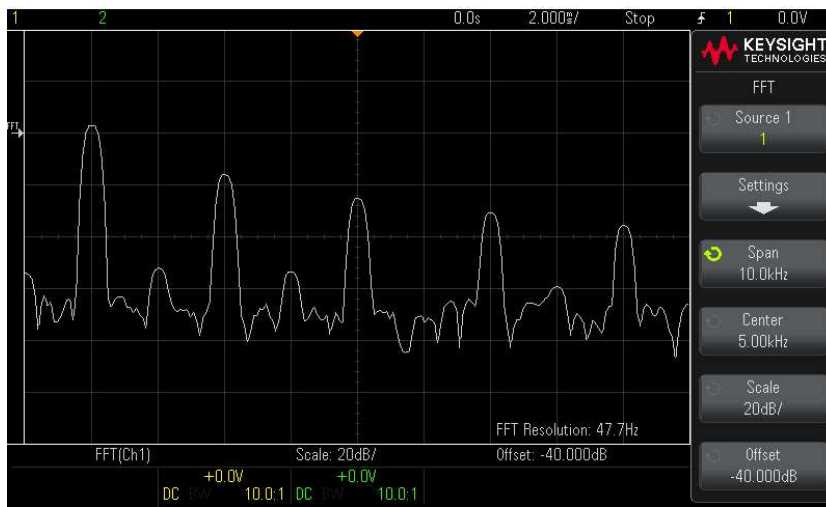


Figura 21 – Spettro dell'onda triangolare sull'oscilloscopio^[7]

Come si può osservare da Figura 21, anche qui i parametri del modulo FFT, ovvero span, center, scale e offset presentano valori uguali al test precedente. La frequenza al centro dello schermo corrisponde a 5 kHz e il range di frequenze visualizzato si estende da 0 a 10 kHz; anche qui è stata applicata la finestra flat top e una scala logaritmica. In quanto non è stato variato T_W non è cambiata nemmeno la risoluzione in frequenza (parametro *FFT Resolution* in Figura 21), che rimane a circa 50 Hz.

Le ampiezze delle prime cinque armoniche dello spettro del DSO sono riportate in Tabella 4. In quanto sono ampiezze riferite allo spettro ottenuto dal DSO, in questo caso $N = 500'000$.

Ampiezze delle armoniche		Ampiezze normalizzate rispetto a N
1 kHz	80 dB	23 dB
3 kHz	65,6 dB	8,6 dB
5 kHz	60,6 dB	3,6 dB
7 kHz	53,7 dB	-3,3 dB
9 kHz	51,8 dB	-5,2 dB

Tabella 4

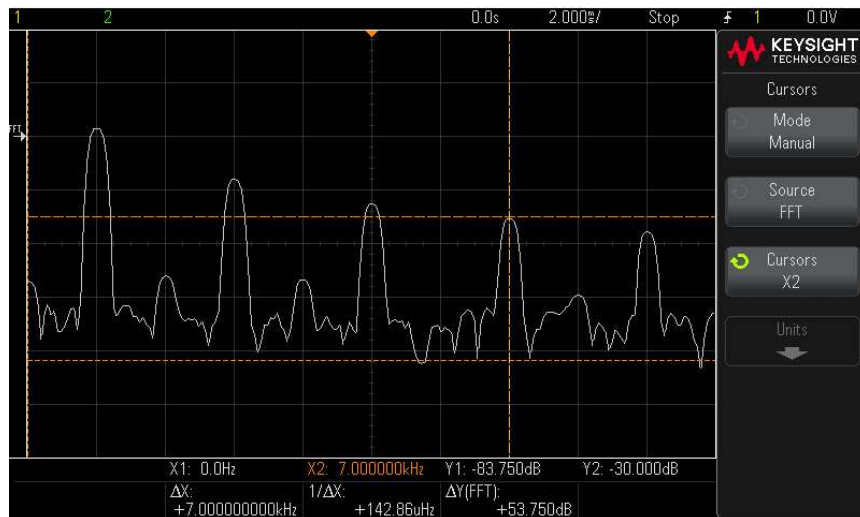


Figura 22 – Localizzazione e ampiezza della quarta armonica^[7]

In Figura 22 è riportato quanto menzionato circa i valori delle armoniche: si può vedere la quarta armonica localizzata dal cursore orizzontale X2 a 7 kHz, con un'ampiezza picco-picco di 53.7 dB misurata dalla differenza dei due cursori orizzontali e indicata su schermo come $\Delta Y(\text{FFT})$, con il cursore orizzontale inferiore posto nel minimo locale del periodo a cui appartiene l'armonica di interesse.

Da Figura 22 si può subito notare come le prime cinque armoniche siano localizzate alle frequenze di 1, 3, 5, 7 e 9 kHz, come anche nello spettro di Matlab di Figura 20: in entrambi i casi, gli spettri risultano essere molto simili nella forma e nelle ampiezze. Si nota poi la presenza anche qui del rumore di quantizzazione e dei canali degli stadi di input descritti nel paragrafo precedente.

Nello spettro dell'onda triangolare calcolato con la funzione $\text{fft}()$ di Matlab con l'applicazione di una finestra *flat top* si possono poi osservare dei picchi di polarità opposta di ampiezza significativa rispetto alle armoniche principali, localizzati ai lati di quest'ultime. Tali picchi rappresentano gli zeri della funzione sinc^2 dell'Espressione 4.3.2.3 che originano dalla rappresentazione dello spettro in scala logaritmica, poiché appunto $\log_{10}(0) = -\infty$.

In Figura 23, dove lo spettro è stato ottenuto su Matlab applicando una finestra *flat top* con successiva applicazione della scala logaritmica, tali picchi tendono ad essere diversi tra loro in ampiezza, forma e in frequenza in accordo con l'effetto di *smoothing* introdotto dalla finestra, mentre in Figura 24, dove lo spettro è stato ottenuto senza l'applicazione di finestre e portato poi sempre in scala logaritmica, gli zeri

dell'Espressione 4.3.2.3 sono chiaramente visibili in quanto tendono a $-\infty$ in modo asintotico e sono limitati esclusivamente dalla capacità di Matlab di rappresentare numeri oltre un certo ordine di grandezza. Si ipotizza perciò che la differenza di forma, ampiezza e frequenza di tali picchi derivi dall'applicazione della *flat top* e dai conseguenti fenomeni di *spectral leakage* descritti nel Paragrafo 4.3.1.

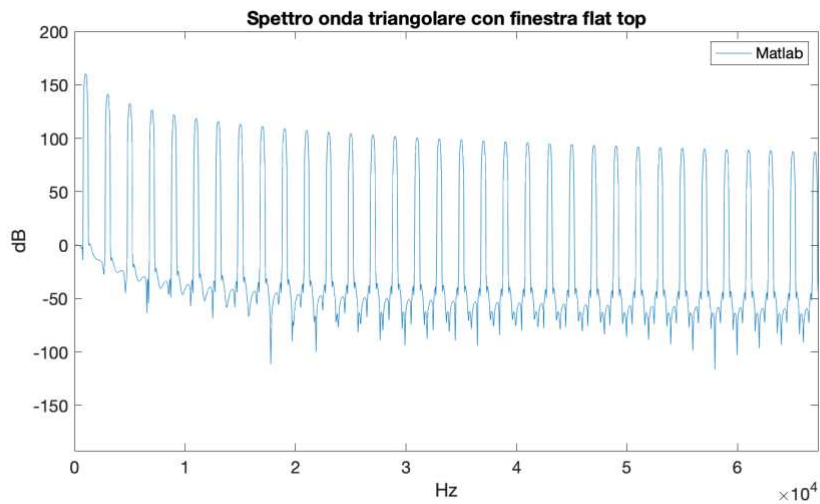


Figura 23 – Onda triangolare in frequenza con finestra *flat top* (da normalizzare rispetto a $N = 250'000$)^[9]

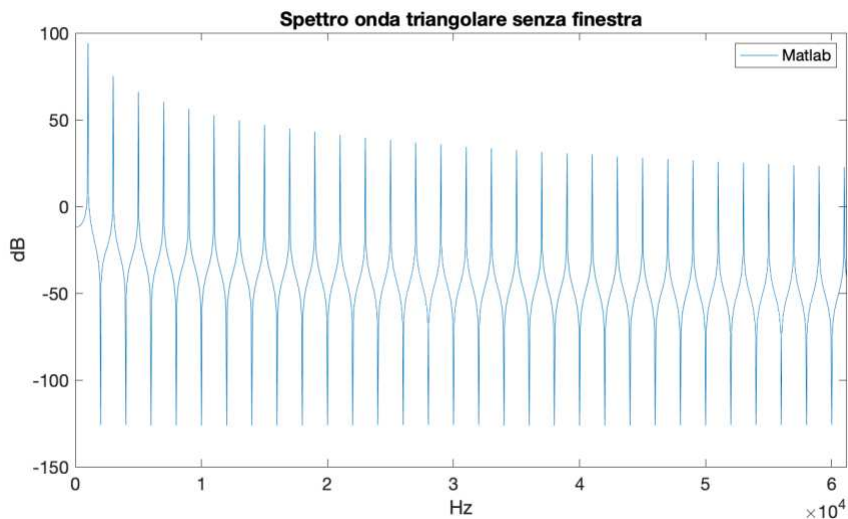


Figura 24 – Onda triangolare in frequenza senza finestra (da normalizzare rispetto a $N = 250'000$)^[9]

Nelle Figura 25 e 26 di seguito, infine, si può osservare l'involuppo dello spettro dell'onda triangolare calcolato su Matlab in assenza di applicazione di finestre con span crescente, rispettivamente pari a 12 kHz e 1,6 MHz: come si nota, tali spettri sono più regolari e l'ampiezza picco-picco delle armoniche tende a diminuire all'aumentare delle frequenze, in accordo con la teoria di Fourier, in particolare con la DFT definita nell'Espressione 4.3.2.3 e con i fenomeni discussi precedentemente.

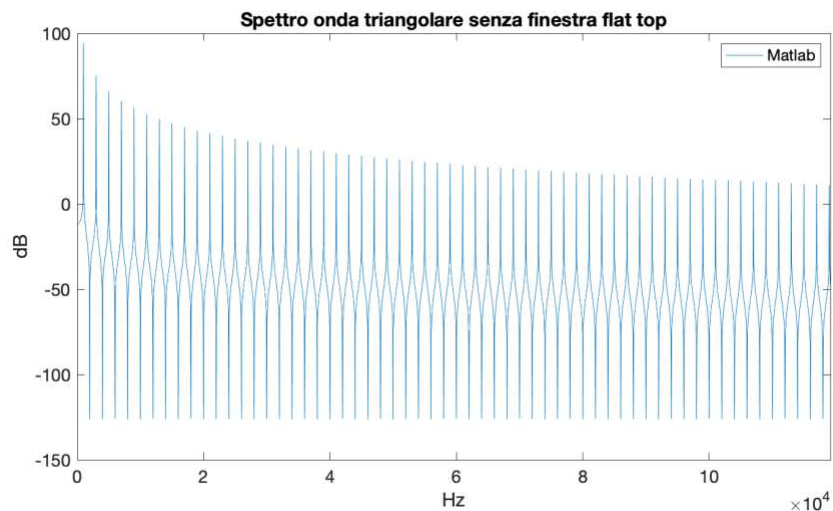


Figura 25 – Spettro dell'onda triangolare senza *flat top* con span di 12 kHz (da normalizzare rispetto a $N = 250'000$)^[9]

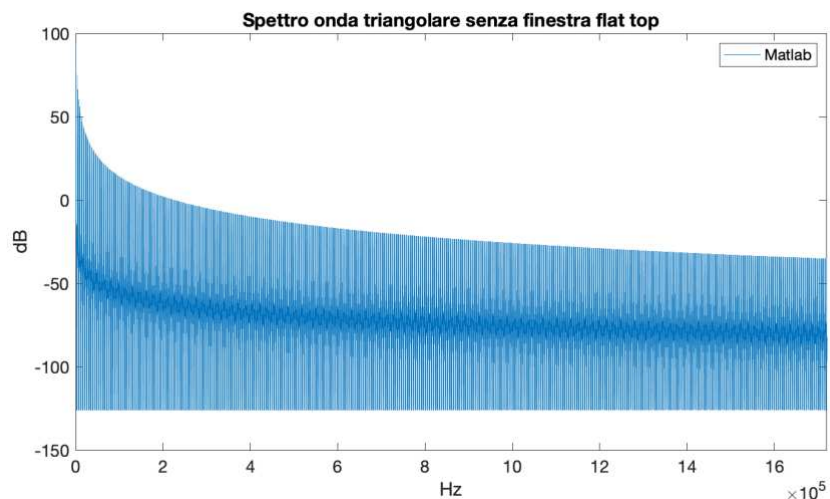


Figura 26 – Involuppo dello spettro dell'onda triangolare con span di 1,6 MHz (da normalizzare rispetto a $N = 250'000$)^[9]

Prendendo come riferimento di nuovo lo spettro del DSO delle Figure 21 e 22 si possono notare delle armoniche di ampiezza minore localizzate tra le armoniche principali: tali armoniche tendono ad assumere valori di ampiezza picco-picco piuttosto elevati a causa dell'operazione di elevazione al quadrato della funzione *sinc*. Ad esempio, la prima armonica "minore", localizzata a 2 kHz, presenta un valore di ampiezza picco-picco pari al 30,5% e del 42% rispettivamente della prima e della seconda armonica fondamentale localizzate a 1 e 3 kHz, mentre l'armonica di ampiezza ridotta localizzata a 4 kHz assume un valore pari al 39,7% e 52,2% rispettivamente della seconda e della terza armonica fondamentale localizzate a 3 e 5 kHz. Nello spettro dell'onda quadra invece, ovvero il segnale di test precedente, prendendo come riferimento sempre le armoniche minori localizzate alle medesime frequenze dell'esempio appena fatto, queste non assumono più del 32% del valore delle armoniche principali. È quindi evidente come l'operazione di elevazione al quadrato tenda ad introdurre dei valori di ampiezza picco-picco maggiori ai lati delle armoniche principali rispetto ad altri segnali.

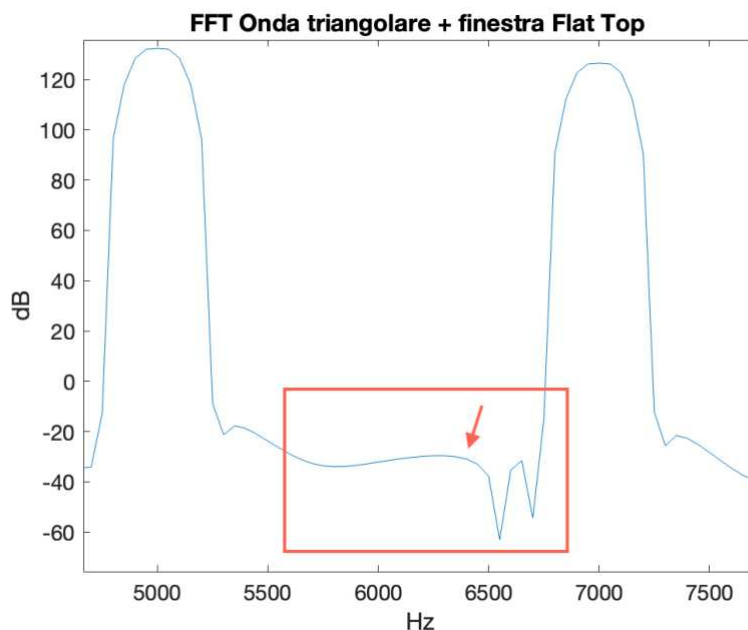


Figura 27 – Esempio di deformazione localizzata a 6.4 kHz
(da normalizzare rispetto a $N = 250'000$)^[9]

Infine, si suppone che Matlab calcoli uno spettro che risulta distorto ai lati dei lobi principali molto probabilmente a causa dello spectral leakage introdotto

dall'applicazione di finestre in prossimità dei lobi laterali del sinc^2 , come visibile in Figura 27 con uno span diminuito che va dai 5 ai 7.7 kHz in modo da visualizzare con più risoluzione lo spettro.

4.3.3 Impulso singolo

Si consideri ora il terzo segnale di test, che consiste in un unico impulso definito nell'Espressione 4.3.3.1,

$$x_{SI}(t) = \begin{cases} V_H, & 0 < t < L_{IMP} \\ V_L, & L_{IMP} < t < T_P \end{cases} \quad 4.3.3.1$$

dove L_{IMP} è la larghezza dell'impulso e T_P è il periodo del segnale, mentre V_H e V_L sono anche qui impostati rispettivamente a 250 mV e -250 mV . In realtà questo segnale non consiste in una ripetizione periodica di un segnale fondamentale, come per i segnali di test precedenti, ma appunto in un singolo impulso, come visibile in Figura 27, che è stato ottenuto tramite la funzione $\text{rectpuls}()$ di Matlab. I parametri di tale impulso sono perciò riportati in Tabella 5 di seguito.

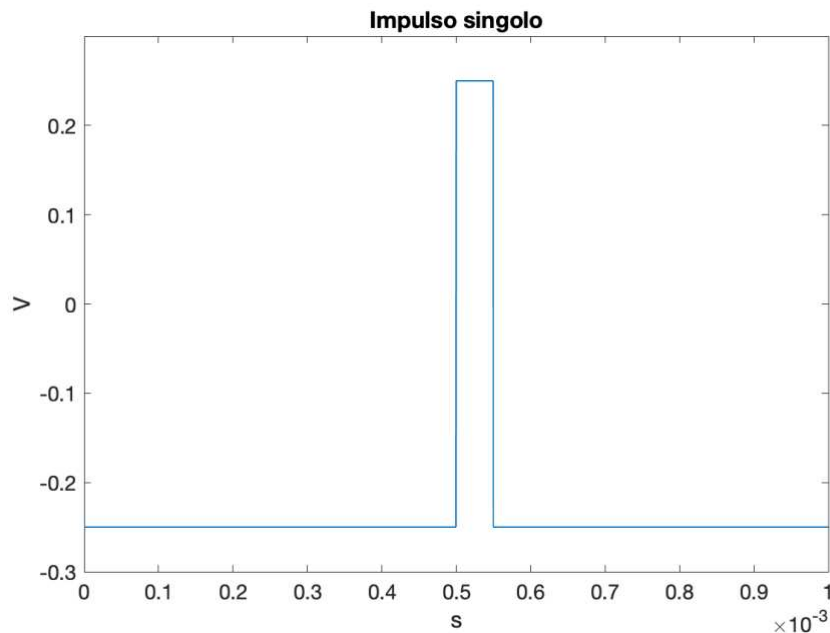


Figura 28 – Impulso singolo su Matlab^[9]

Parametri impulso singolo	
Frequenza	1 kHz
Volt picco-picco (Vpp)	500 mV
Larghezza dell'impulso	50 μ s

Tabella 5

L'impulso di Figura 28 è stato quindi definito in modo analogo al segnale corrispondente ottenuto dall'output del generatore di funzioni integrato nello stesso oscilloscopio (riportato in Figura 30): sulla base di questa definizione si può perciò osservare che questi non è altro che un segnale *rect* nel dominio del tempo e quindi la sua DFT, definita nell'Espressione 4.3.3.2, consiste in una funzione molto simile al sinc campionato in frequenza che viene anche denominata funzione di Dirichlet^{[6][11]}.

$$X_{SI}[kF] = \frac{1}{F} \cdot \frac{\sin [\pi kF(2N_1 + 1)]}{\sin [\pi kF]} \quad 4.3.3.2$$

Qui N_1 è pari a metà della larghezza dell'impulso L_{IMP} nel discreto; inoltre, come visto precedentemente, si ha poi che $F = 1/NT_S$, ovvero F è pari al reciproco dell'intervallo di osservazione T_W ^[10].

Per capire come impostare l'oscilloscopio in modo tale da ottenere uno spettro corretto del segnale di test, ovvero che sia coerente con lo spettro atteso ottenuto dall'Espressione 4.3.3.2, e per verificare la correttezza anche dello spettro ottenuto dalla funzione *fft()* di Matlab, si è deciso di riportare in Figura 29 una realizzazione grafica qualitativa di un segnale *rect* nel dominio discreto e della sua DTFT corrispondente, che, come si è accennato, risulta essere molto simile ad un segnale sinc. I grafici di Figura 29 sono stati presi direttamente dal riferimento bibliografico^[6] da cui è stata reperita l'Espressione 4.3.3.2.

Osservando Figura 29-(b) si precisa che $X(e^{j\omega})$ è la DTFT del segnale *rect* discreto rappresentato in Figura 29-(a): essendo però la DFT lo spettro campionato della DTFT e riprendendo perciò l'Espressione 3.2.4 del Capitolo 3, si conclude che lo spettro risulta comunque sufficiente al fine di ottenere un'idea dell'andamento corretto che dovrebbero avere gli spettri del segnale sia su Matlab che sull'oscilloscopio.

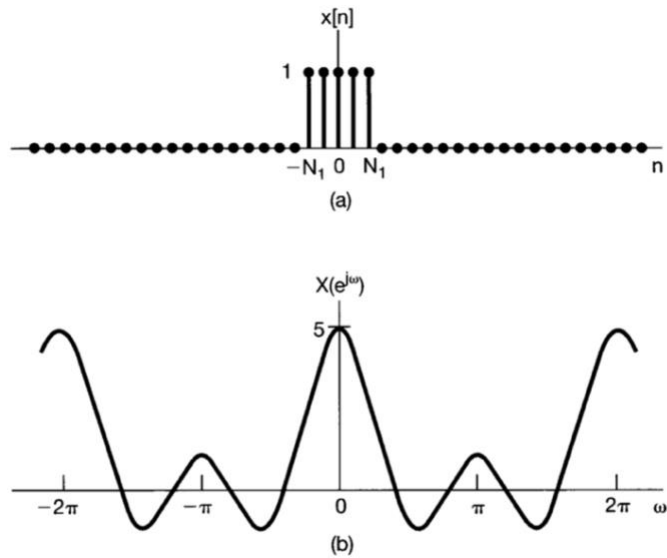


Figura 29 – Segnale rect nel tempo e relativa DTFT^[6]

In Figura 30 si riporta intanto l'impulso così come visualizzato sul display dell'oscilloscopio, che è stato perciò acquisito dal suo generatore di funzioni integrato.



Figura 30 – Impulso singolo nel tempo sull'oscilloscopio^[7]

A differenza dei segnali precedenti, qui è stato necessario modificare l'intervallo temporale di divisione da 2 ms a 100 μ s per poter visualizzare esclusivamente un unico periodo del treno di impulsi con frequenza di 1 kHz che l'oscilloscopio genera di default. Questo particolare modello di oscilloscopio (che si ricorda essere il DSOX1102G) calcola

la FFT utilizzando esclusivamente i campioni del segnale visualizzato su schermo^{[3][8][13]}, perciò è stato necessario variare tale fattore e quindi T_W per poter osservare un unico impulso, in modo poi da calcolarne la relativa FFT. Il parametro T_W assume ora un valore pari a 1 ms.

Avendo variato T_W l'oscilloscopio ha di conseguenza adattato la frequenza di campionamento (indicata come *sampling rate* sullo strumento) in modo tale da acquisire un numero di campioni N sempre pari a 500'000; in questo caso quindi l'oscilloscopio acquisisce campioni con una frequenza di campionamento effettiva pari a $F_S = 500 \text{ MHz}$.

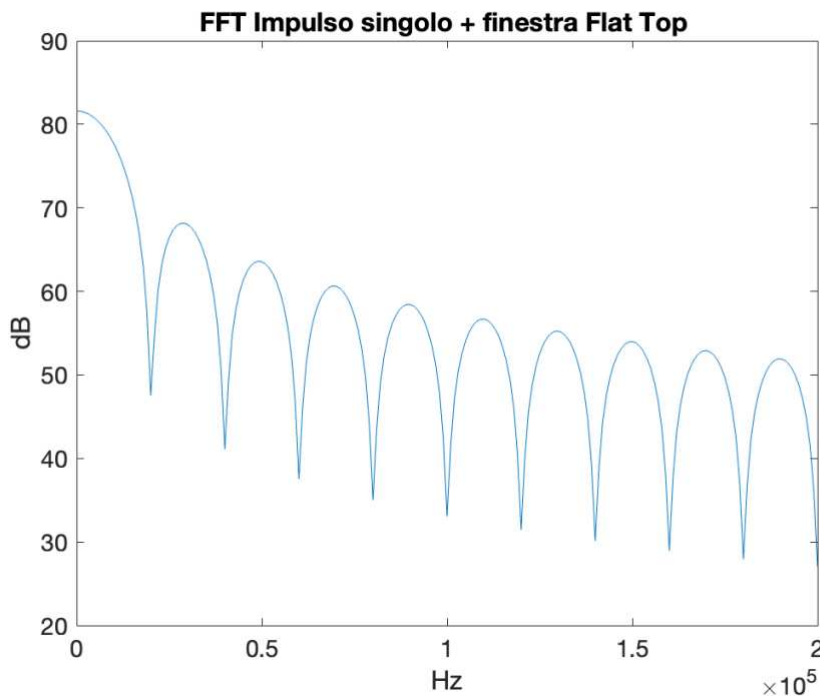


Figura 31 – FFT dell'impulso singolo su Matlab
(da normalizzare rispetto a $N = 250'000$)^[9]

In Figura 31 si riporta la DFT dell'impulso visualizzato in Figura 28, sempre calcolata tramite la funzione *fft()* su Matlab, mentre in Figura 32 invece si osserva invece il display dell'oscilloscopio che riporta la FFT calcolata tramite il modulo apposito dello strumento.

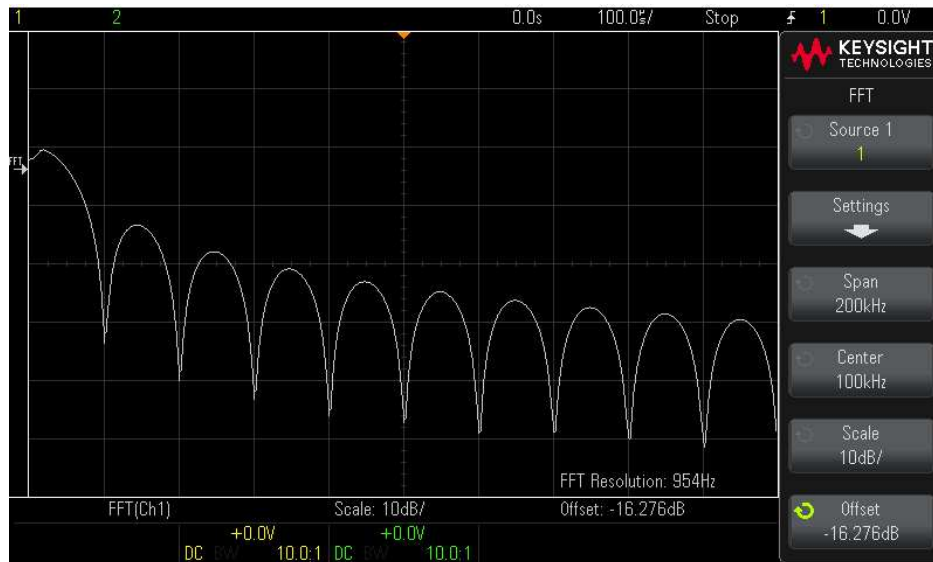


Figura 32 – FFT dell'impulso singolo visualizzata sull'oscilloscopio^[7]

A differenza dei segnali di test precedenti, in questo caso si è dovuto impostare i parametri dell'oscilloscopio in modo tale da determinare quei valori corretti che consentissero di ottenere uno spettro coerente così come riportato nell'Espressione 4.3.3.2, in accordo con la teoria della trasformata discreta di Fourier. Una volta individuati i valori corretti di tali parametri, questi sono stati poi conseguentemente cambiati anche su Matlab.

Innanzitutto, lo span di frequenza è passato da 10 a 200 kHz, con il centro dello schermo fissato a 100 kHz. Successivamente è modificato il fattore di scala da 20 a 10 dB/div e si è impostato un offset di -16 dB/div in modo che lo spettro occupasse il display dell'oscilloscopio senza avere parti "escluse" e comunque in modo tale da riuscire a visualizzarlo con un'ampiezza tale da eseguire misurazioni specifiche con i cursori. La finestra applicata in entrambi i casi è la *flat top* e la scala delle ampiezze rimane logaritmica. Tali valori sono quindi stati impostati anche su Matlab.

Come si osserva dalle figure precedenti, gli spettri ottenuti da Matlab e dal DSO risultano essere circa coerenti con lo spettro teorico atteso riportato in Figura 29. Entrambi presentano un'armonica di ampiezza elevata localizzata a circa 3 kHz così come armoniche di ampiezza relativamente minore poste successivamente. Tali armoniche coincidono anche nella forma, che risulta essere "a campana" per tutte le armoniche, e per la durata in frequenza di ogni armonica. I valori di ampiezza delle armoniche (assoluti e normalizzati rispetto a $N = 500'000$) dello spettro ottenuto dal DSO sono riportati in

Tabella 6: come si può osservare, tali spettri differiscono a meno di un fattore di ampiezza, che comunque non risulta essere particolarmente significativo.

Ampiezze delle armoniche		Ampiezze normalizzate rispetto a N
3.3 kHz	33.5 dB	-23,5 dB
28.7 kHz	26.9 dB	-30,1 dB
49.5 kHz	25.3 dB	-31,7 dB
69.5 kHz	25.6 dB	-31,4 dB
89.5 kHz	24.4 dB	-32,6 dB
109.5 kHz	24.7 dB	-32,3 dB
129.5 kHz	22.9 dB	-34,1 dB

Tabella 6

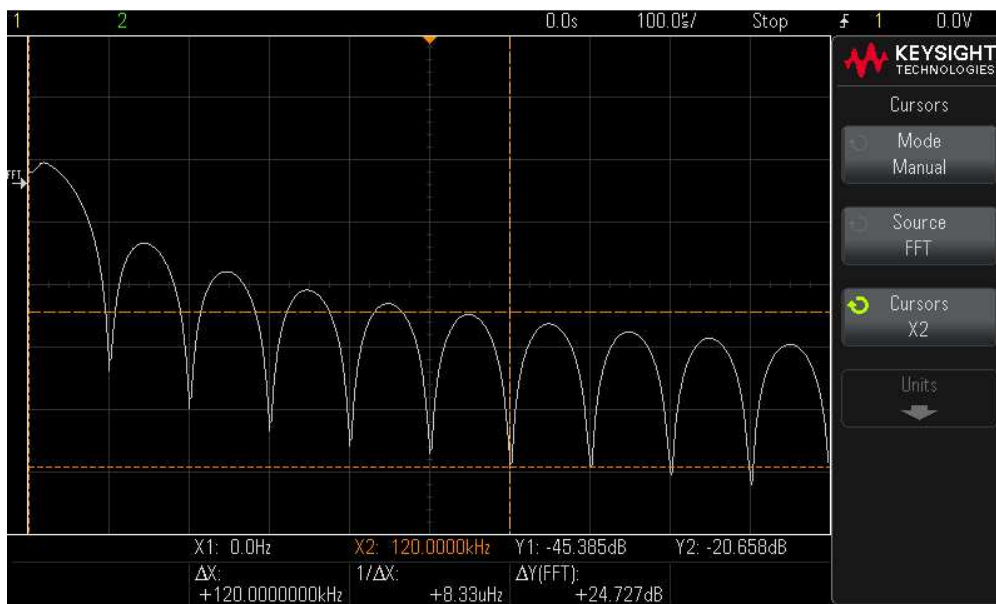


Figura 33 – In evidenza l’ampiezza dell’armonica numero 6 dello spettro sul DSO^[7]

Come visibile in Figura 34 in un range di circa 700 kHz lo spettro ottenuto su Matlab senza l’applicazione di finestre risulta essere coerente con la teoria di Fourier: l’ampiezza dei picchi diminuisce all’aumentare delle frequenze senza però che venga introdotto un

offset crescente in valore assoluto in grado di rendere più difficoltose le misure. Anche qui poi si notano i picchi asintotici derivanti dall'applicazione della scala logaritmica agli zeri della formula teorica dello spettro riportata nell'Espressione 4.3.3.2.

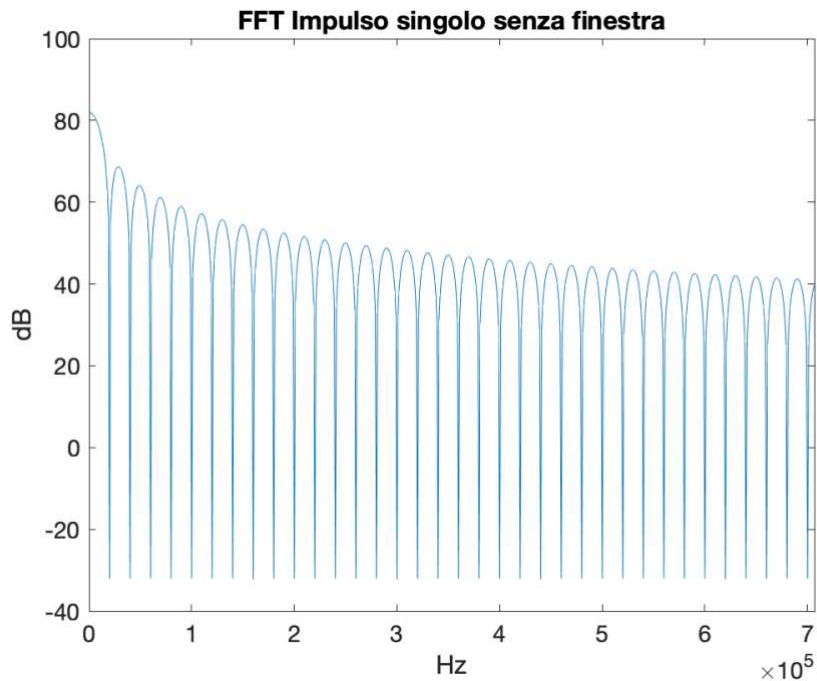


Figura 34 – Spettro dell'impulso singolo senza finestre su Matlab (da normalizzare rispetto a $N = 250'000$)^[9]

Essendo la frequenza di campionamento effettiva dell'oscilloscopio molto elevata, il teorema di Nyquist, teorico e pratico, è rispettato sia sul DSO che su Matlab, tuttavia, si ricorda anche qui la necessità di approfondire l'interazione tra l'algoritmo FFT di Matlab e i campioni dei segnali generati in tale software in futuri lavori.

4.3.4 Treno di impulsi

Il quarto segnale di test consiste in un treno di impulsi, ovvero nella ripetizione periodica nel tempo del segnale di test precedente. L'impulso ripetuto periodicamente non è quindi diverso dall'impulso singolo del Paragrafo 4.3.3; viene quindi definito il treno di impulsi come nell'Espressione 4.3.4.1,

$$x_{IT}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{IT}^*(t - nT_p) \quad 4.3.4.1$$

dove

$$x_{IT}^*(t) = \begin{cases} V_H, & 0 < t < L_{IMP} \\ V_L, & L_{IMP} < t < T_p \end{cases} \quad 4.3.4.2$$

con V_H e V_L fissati rispettivamente a 250 mV e -250 mV . Anche qui T_p è il periodo del segnale e L_{IMP} rappresenta la larghezza dell'impulso. I valori dei parametri di tale segnale sono riportati in Tabella 7, mentre in Figura 35 si riporta invece il treno di impulsi nel tempo realizzato tramite il software Matlab. In Figura 36 si riporta il dettaglio di uno degli impulsi di Figura 35.

Parametri treno di impulsi	
Frequenza	1 kHz
Volt picco-picco (Vpp)	500 mV
Larghezza dell'impulso	$50 \mu\text{s}$

Tabella 7

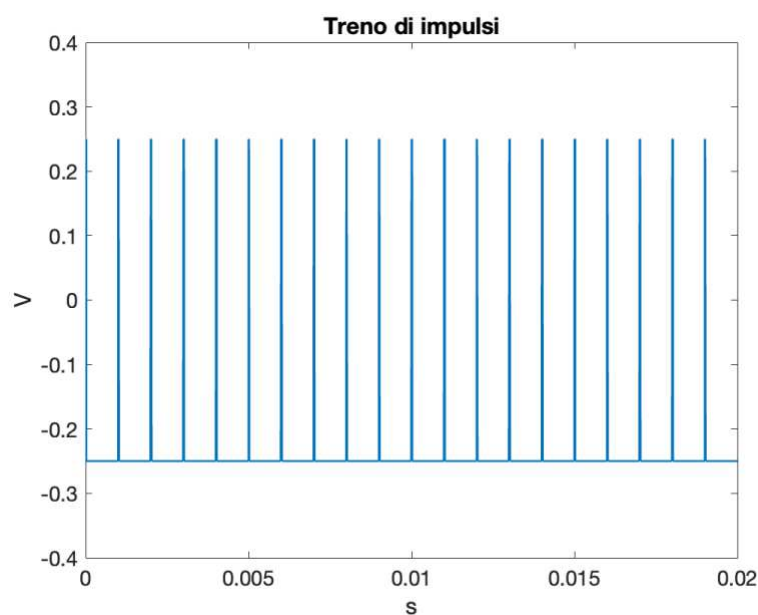


Figura 35 – Treno di impulsi nel tempo su Matlab^[9]

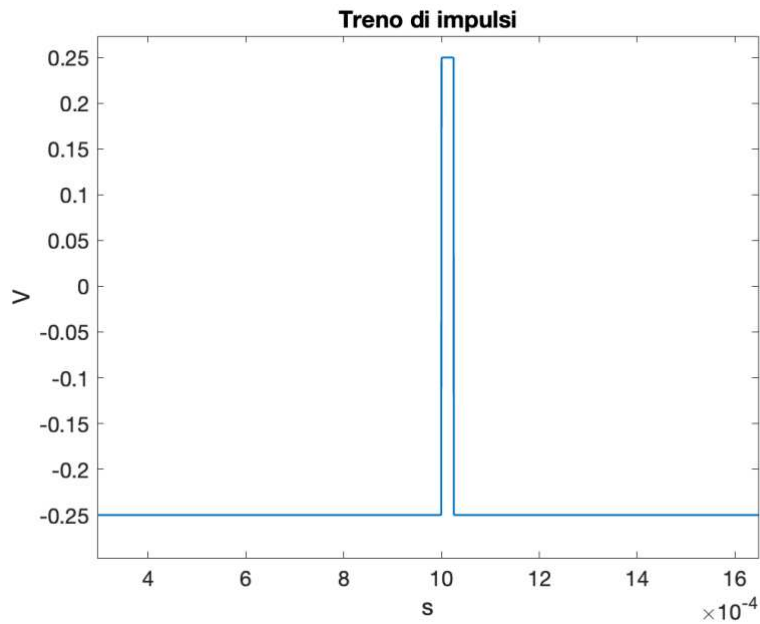


Figura 36 – Un impulso di Figura 35 più in dettaglio^[9]

Per capire com'è stato generato il vettore che contiene i campioni del treno di impulsi nel tempo di Figura 35 è stato fatto un ragionamento circa il periodo e il numero di campioni di un unico impulso, in quanto la funzione Matlab *rectpuls()* restituisce un solo periodo dell'impulso con le caratteristiche desiderate.

Innanzitutto, si consideri la Figura 37 che riporta il treno di impulsi acquisito dal generatore integrato nello stesso DSO e visualizzato sul suo display.

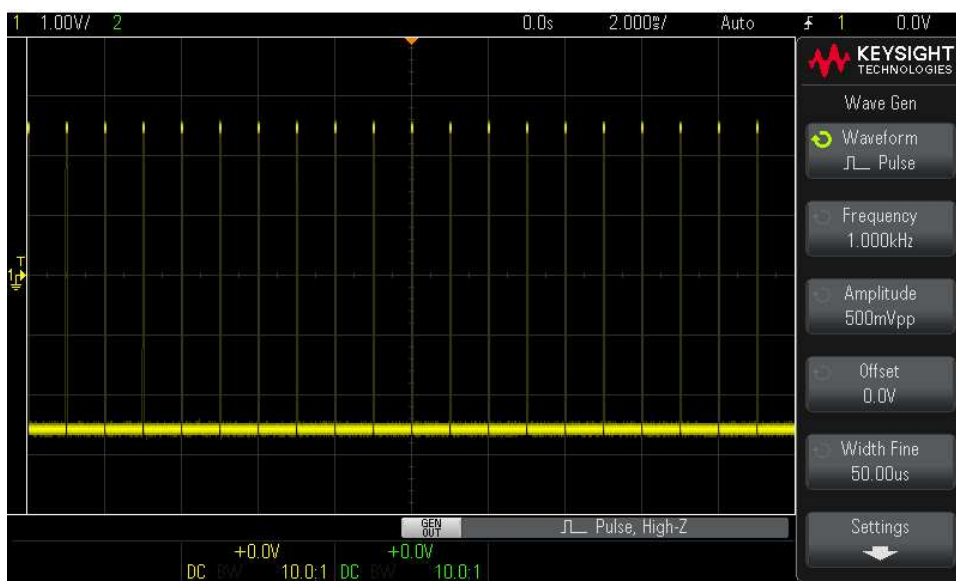


Figura 37 – Treno di impulsi nel tempo^[7]

L'intervallo di osservazione T_W è di 20 ms e il periodo del segnale T_P è pari all'inverso della sua frequenza, ovvero $T_P = 1\text{ ms}$: ogni periodo del segnale ha perciò una durata di 1 ms e quindi in 20 ms si possono osservare esattamente 20 periodi del segnale, il cui insieme costituisce il treno di impulsi.

Questo ragionamento è stato perciò applicato anche nella costruzione del vettore del treno corrispondente su Matlab a causa delle limitazioni della funzione *rectpuls()*. Considerando la larghezza dell'impulso $L_{IMP} = 50\text{ }\mu\text{s}$ e il periodo $T_P = 1\text{ ms}$, si ottiene un duty cycle del singolo periodo pari a 0.05. Ora, è noto che la forma d'onda di Figura 37 è salvata in $N = 500'000$ campioni^[7], di conseguenza se si divide N per il numero di periodi si ottiene il numero di campioni M che occupa in memoria ogni periodo dell'impulso singolo che costituisce il treno, ovvero $M = 500'000/20 = 25'000$. Dopodiché, essendo il duty cycle dell'impulso pari a 0.05, si ottiene che la fase on del segnale nel singolo periodo occupa esattamente 1250 campioni su 25'000.

Si è quindi in grado di creare un vettore che contiene un unico periodo del singolo impulso del treno con l'ampiezza, la frequenza e il duty cycle desiderati tramite il comando Matlab

```
x_app = [A*ones(1,1250, zeros(1,23750))];
```

tenendo al contempo conto però anche delle condizioni al contorno dettate dall'utilizzo del DSO (legate al numero di campioni, che deve essere lo stesso per Matlab e DSO).

È perciò sufficiente "appendere" quest'ultimo vettore 20 volte per ottenere il vettore finale dei campioni del treno di impulsi riportato precedentemente in Figura 35, che risulta essere di fatto uguale e coerente con il corrispettivo treno del DSO di Figura 37.

Per quanto riguarda il calcolo della DFT della ripetizione periodica di un impulso, essa in realtà non differisce da quella calcolata per l'impulso singolo, in quanto la ripetizione periodica nel tempo implica semplicemente un campionamento nel dominio discreto di Fourier^[11]. Si ha quindi che la DFT del segnale treno di impulsi è definita come nell'Espressione 4.3.4.3 di seguito,

$$X_{IT}[kF] = \frac{1}{F} \cdot \frac{\sin[\pi kF(2N_1 + 1)]}{\sin[\pi kF]} \quad 4.3.4.3$$

dove anche qui $F = 1/NT_S$ e N_1 rappresenta metà della larghezza discreta del singolo impulso. È lecito quindi aspettarsi uno spettro non troppo dissimile da quello ottenuto per il segnale di test precedente.

In Figura 38 di seguito si riporta lo spettro del treno di impulsi calcolato sul DSO, con un range di 200 kHz (parametro *span*) e con la frequenza centrale su schermo (parametro *center*) pari a 100 kHz; la *FFT Resolution* è quindi pari all'inverso di T_W , ovvero è di circa 50 Hz.

La prima cosa che si può osservare è che questo spettro presenta lo stesso andamento dello spettro del segnale di test precedente, ovvero si può osservare un'armonica di ampiezza più elevata localizzata alle basse frequenze, seguita da armoniche di ampiezza minore. Come accennato all'inizio del Paragrafo 4.3.4, lo spettro atteso avrebbe dovuto coincidere con il campionamento dello spettro del segnale di test impulso singolo, in quanto la ripetizione periodica nel tempo implica un campionamento in frequenza^[11]: il campionamento è perciò chiaramente visibile in Figura 38 e quindi questo conferma l'ipotesi fatta.

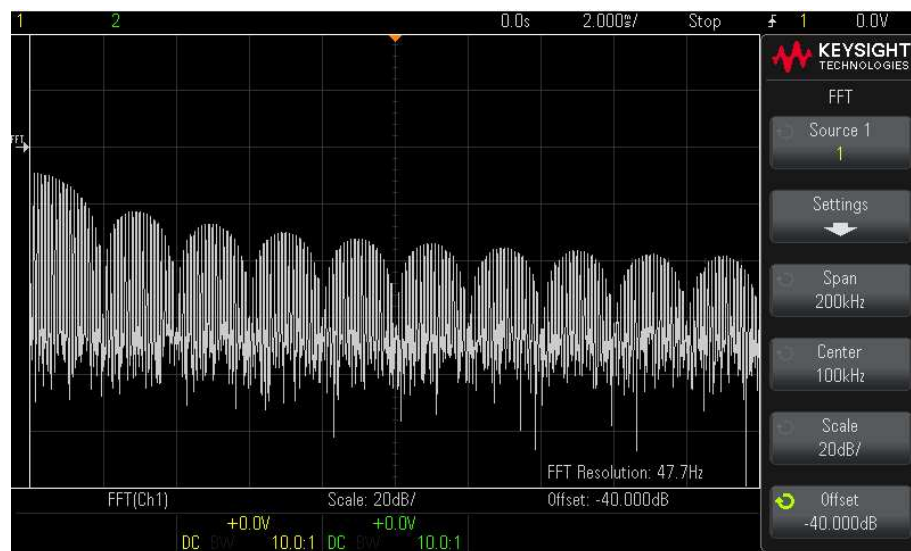


Figura 38 – Spettro del treno di impulsi sull'oscilloscopio^[7]

I campioni dello spettro sono visibili in Figura 39, che rappresenta un dettaglio dello spettro di Figura 38, con span di 10 kHz e center di 5 kHz. Come si può notare, questi sono delle vere e proprie armoniche di ampiezza circa pari all'armonica di ampiezza

maggiore di cui costituiscono i campioni; queste si ripetono poi a frequenze multiple della frequenza fondamentale dei singoli impulsi del treno, che si ricorda essere 1 kHz. È inoltre poi visibile sempre da Figura 38 una banda di rumore di ampiezza molto elevata localizzata alla base della traccia.

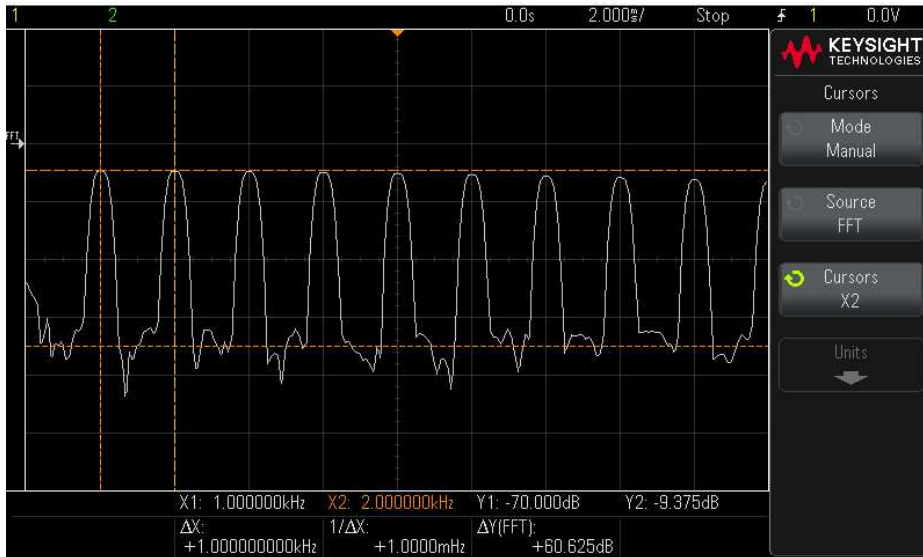


Figura 39 – Dettaglio dello spettro del treno di impulsi, con span di 10 kHz e center di 5 kHz^[7]

Per terminare l'analisi dello spettro di Figura 38 si riportano in Tabella 8 i valori delle armoniche considerate (riferite allo spettro calcolato sul DSO) con i valori di inizio paragrafo di span e center, pari rispettivamente a 200 kHz e 100 kHz.

Ampiezze delle armoniche		Ampiezze normalizzate rispetto a N
1 kHz	55.6 dB	-1,4 dB
28.5 kHz	42.5 dB	-14,5 dB
49.5 kHz	37.5 dB	-19,5 dB
69 kHz	35 dB	-22 dB

Tabella 8

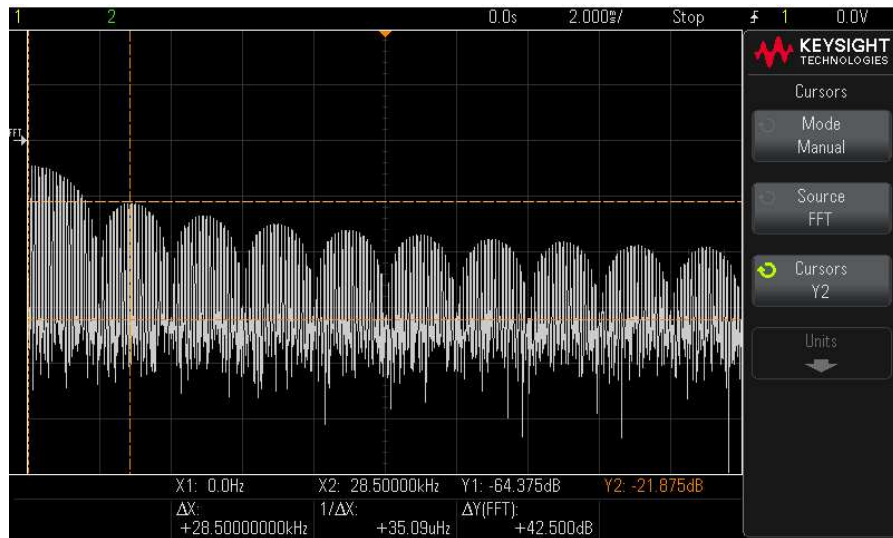


Figura 40 – Misura di ampiezza picco-picco della seconda armonica^[7]

Per il calcolo dell'ampiezza picco-picco di tali armoniche si è posto il cursore Y1 circa all'inizio della fascia di rumore, come visibile in Figura 40.

In Figura 41 si riporta infine lo spettro del treno di impulsi calcolato su Matlab utilizzando il vettore costruito come descritto.

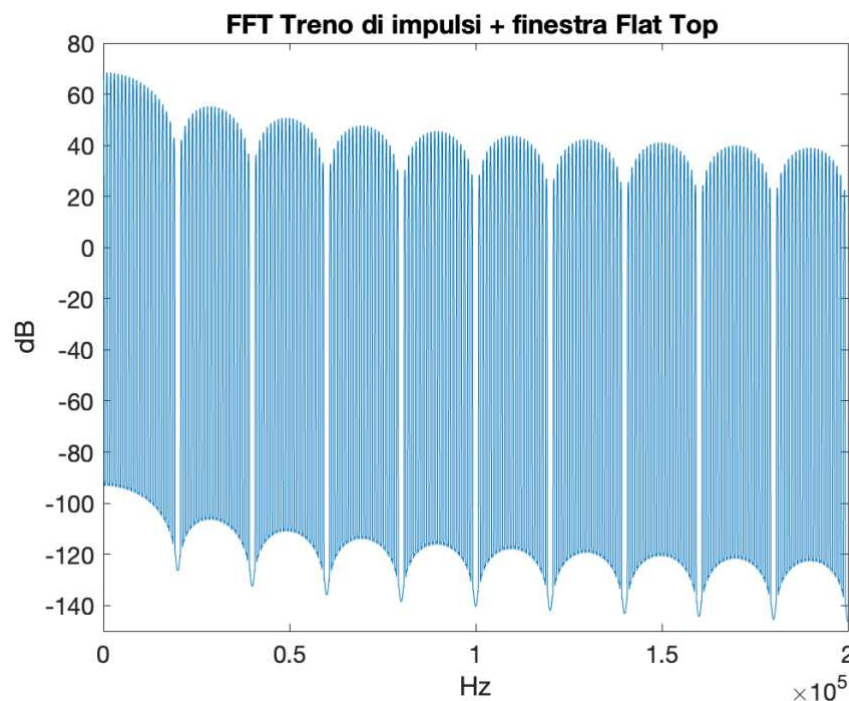


Figura 41 – Spettro del treno di impulsi su Matlab
(da normalizzare rispetto a $N = 250'000$)^[9]

Come si può notare lo spettro di Figura 41 risulta essere molto simile allo spettro ottenuto dal DSO: presenta infatti un'armonica di ampiezza maggiore a basse frequenze e altre armoniche di ampiezza inferiore. Inoltre, anche tali armoniche risultano essere composte a loro volta da armoniche fondamentali, risultato del campionamento in frequenza, che si trovano ai multipli della frequenza fondamentale degli impulsi del treno, che si ricorda essere 1 kHz.

Come visto per gli altri segnali, lo spettro ottenuto in concomitanza all'applicazione di una finestra su Matlab tende ad avere alcune differenze, in particolare nella forma: si può notare infatti che a differenza delle Figure 38 e 40 dove è presente una fascia di rumore ben distinguibile, in Figura 41 lo spettro sembra essere più uniforme, convergendo come già visto in picchi di ampiezza opposta rispetto alle armoniche principali. Questi corrispondono agli zeri in scala logaritmica dell'Espressione 4.3.4.3 che appunto descrive l'andamento teorico dello spettro del treno.

Anche per il segnale di test treno di impulsi si può concludere perciò che l'unica significativa discrepanza osservata tra lo spettro calcolato sul DSO e su Matlab riguarda una differenza di ampiezze picco-picco delle campane considerate, oltre che alla presenza di rumore nelle misurazioni dello strumento che da origine alla fascia relativa osservata in Figura 40 alla base dello spettro e nella conseguente formazione di picchi su Matlab derivanti dagli zeri rappresentati su scala logaritmica.

4.3.5 Segnale sinusoidale modulato in frequenza (segnale chirp)

Come ultimo segnale di test si è deciso di considerare una ripetizione periodica di un segnale sinusoidale modulato in frequenza, denominato anche segnale *chirp*; la modulazione in frequenza applicata viene anche indicata come modulazione FM (dall'inglese, *frequency modulation*).

Il segnale è perciò definito^[14] nell'Espressione 4.3.5.1,

$$x_s(t) = V_p \sin(2\pi f(t)t + \phi) \quad 4.3.5.1$$

dove ϕ è una variabile aleatoria uniformemente distribuita nell'intervallo tra 0 e π che rappresenta la fase iniziale. Come si può osservare dall'Espressione 4.3.5.1, la frequenza

del segnale sweep $x_s(t)$ non è più costante come accadeva per i segnali di test precedenti: essa è infatti una funzione che varia nel tempo secondo una legge nota e prestabilita. Per questo particolare segnale di test $f(t)$ varia linearmente e perciò si parla di sweep lineare in frequenza. Si menziona che ovviamente $f(t)$ può variare anche secondo altre leggi, ad esempio con un andamento quadratico.

La modulazione $f(t)$ è quindi definita^[14] nel tempo come nell'Espressione 4.3.5.2,

$$f(t) = mt + q \quad 4.3.5.2$$

dove t è compreso tra $t = 0$, che è l'istante in cui viene generato lo sweep, e $t = T$, che rappresenta invece la durata dello sweep in frequenza. Supponendo perciò che la frequenza $f(t)$ vari linearmente tra un valore iniziale minimo denominato *start frequency* $f(0) = f_{min}$ e un valore finale massimo denominato *stop frequency* $f(T) = f_{max}$, allora lo sweep è definito positivo, altrimenti è definito negativo.

Altri parametri importanti che caratterizzano tale segnale sono la *span frequency*, che rappresenta il valore dell'intervallo delle frequenze coperte durante la spazzolata e definito quindi come $F_{span} = f_{stop} - f_{start}$, la *center frequency*, che rappresenta la frequenza assunta a metà dell'intervallo di spazzolamento e definita come $f_{center} = (f_{stop} + f_{start})/2$ e lo *sweep time*, che rappresenta invece la durata dell'intervallo T di spazzolamento^[14].

I parametri del segnale chirp sono riportati in Tabella 9 di seguito.

Parametri segnale chirp	
Volt picco-picco (Vpp)	500 mV
Start frequency	1 Hz
Stop frequency	100 Hz

Tabella 9

In Figura 42 si possono osservare perciò i 20 periodi del segnale chirp visualizzati sul display dell'oscilloscopio (con il numero di periodi anche qui scelto in modo tale da ottenere uno spettro coerente, ovvero che non sia né sottocampionato né

sovraccampionato), mentre in Figura 43 si può invece osservare un periodo del segnale chirp di Figura 42 più in dettaglio.

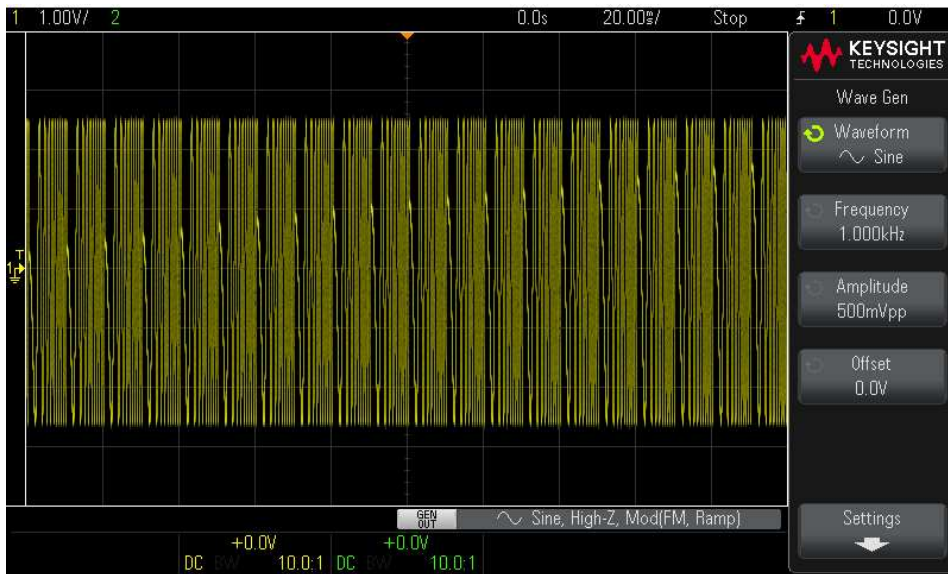


Figura 42 – I 20 periodi del segnale chirp visualizzati sul display dell'oscilloscopio^[7]

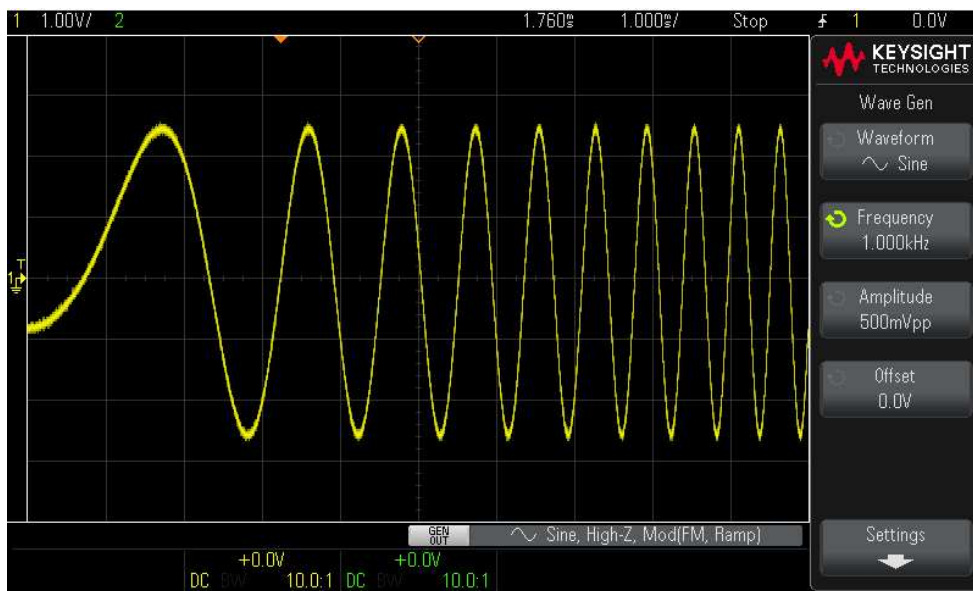


Figura 43 – Dettaglio di uno dei periodi del segnale di Figura 42^[7]

Come si nota, il segnale chirp è quindi costituito, come sopramenzionato, da picchi di un segnale sinusoidale sempre più ravvicinati, fenomeno causato appunto dall'aumento lineare nel tempo della frequenza della sinusoide.

Si ignori quindi il segnale di Figura 43, la quale è stata riportata solo per avere un'immagine più dettagliata del segnale chirp di Figura 42: in questo paragrafo si prenderà in considerazione esclusivamente il segnale di Figura 42, che è appunto costituito dalla ripetizione periodica del segnale chirp i cui parametri sono riportati in Tabella 9. Come si può notare da Figura 42 quindi, la durata dell'intervallo di osservazione T_W è di 200 ms, mentre la frequenza di campionamento effettiva dell'oscilloscopio è pari a 2,5 MHz.

In Figura 44 si riportano i 20 periodi del segnale chirp in un grafico ottenuto invece su Matlab, mentre in Figura 45 si riporta anche qui un periodo del segnale chirp della Figura 44 più in dettaglio, sempre con l'obiettivo di dare una comprensione migliore del segnale chirp che costituisce la ripetizione periodica considerata.

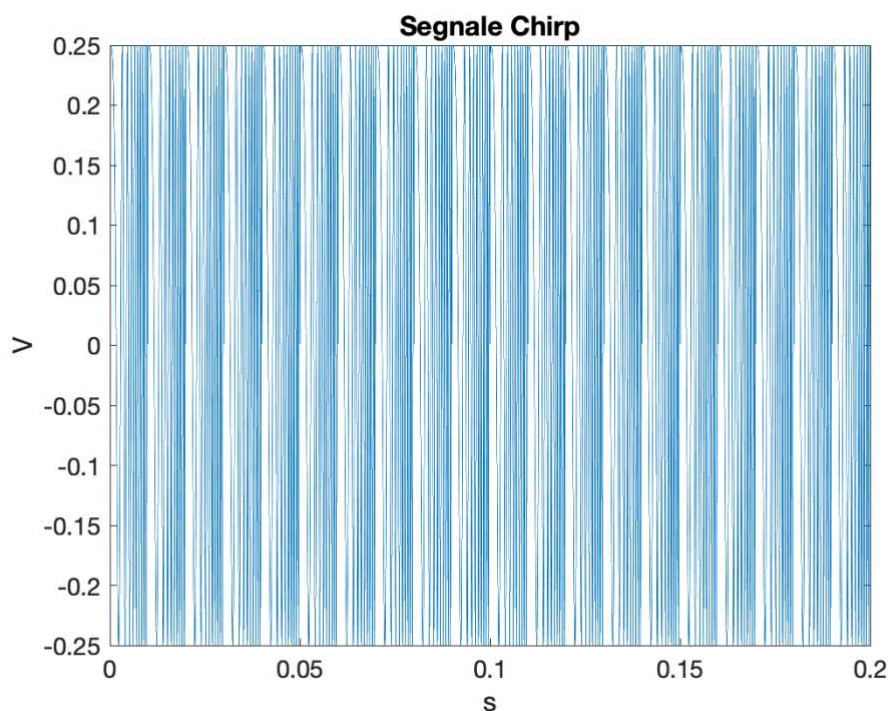


Figura 44 – Ripetizione periodica del segnale chirp su Matlab^[9]

Il segnale di Figura 44 è stato ottenuto su Matlab con un procedimento simile a quello descritto per il segnale di test treno di impulsi. Senza soffermarsi di nuovo troppo nei dettagli, si consideri solo che anche qui si è fatto il calcolo per determinare il numero dei campioni per periodo, sapendo che il numero dei campioni della memoria profonda N è pari a 500'000 e i periodi sono 20.

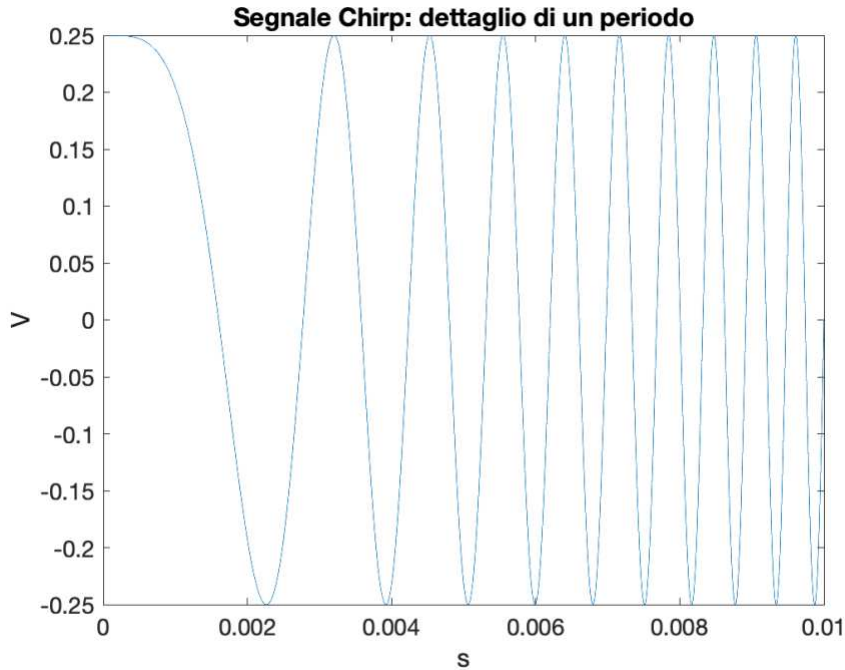


Figura 45 – Dettaglio di un periodo di segnale chirp^[9]

Dalla Figura 42 si è visto poi che, per visualizzare 20 periodi, ogni divisione è di 20 ms e contiene esattamente due periodi del segnale chirp: un periodo di segnale è quindi stato misurato pari a 10 ms. Sulla base di queste informazioni si è generato il treno di segnali chirp su Matlab anche qui come un vettore composto da 20 ripetizioni del singolo periodo del segnale di chirp avente una durata di 10 ms, contenente $500'000/20 = 25'000$ campioni e acquisito con la frequenza di campionamento effettiva fornita dall'oscilloscopio, ovvero 2.5 MHz. Infine, si menziona che il singolo periodo del segnale chirp è stato generato tramite la funzione specifica *chirp()* su Matlab, con i medesimi parametri di Tabella 9.

Passando quindi all'analisi in frequenza del segnale chirp, si precisa subito che le formulazioni analitiche trovate (in forma chiusa), a differenza dei segnali di test precedenti, risultano essere estremamente complesse e sono riferite, in generale, ad un numero di dimensioni maggiore rispetto a quello considerato nelle trasformate di Fourier indicate nel Capitolo 3.

Per intuire quindi quale dovrebbe essere la forma finale della DFT di un segnale chirp, almeno qualitativamente, si consideri un segnale costituito dalla ripetizione periodica

del segnale sinusoidale $s(t)$ riportato nell'Espressione 4.3.5.4, dove A rappresenta l'ampiezza, che è fissata a piacere, mentre la fase è nulla.

$$s(t) = A \sin(2\pi ft) \quad 4.3.5.3$$

Dalla teoria di Fourier (ma anche come visualizzabile direttamente dall'oscilloscopio), si trova che la DFT di un segnale sinusoidale ripetuto nel tempo risulta essere simile ad un segnale sinc molto schiacciato tendente ad un impulso, come visibile in Figura 46 con uno span molto ridotto per far vedere bene il dettaglio della traccia, che però non è caratterizzato da lobi laterali di ampiezza significativa che accompagnano la campana principale di un sinc vero e proprio. Lo spettro di Figura 46 è stato ottenuto infatti impostando uno span ridotto di 2 kHz, con 200 Hz/div, in modo tale da visualizzare il picco dello spettro più in dettaglio. Se però si aumenta lo span, ad esempio ponendolo pari a 20 kHz, si nota che tale spettro tende a “restringersi”, tendendo quasi ad un impulso ideale (ovvero caratterizzato da un picco molto stretto), in accordo con la teoria della trasformata di Fourier per i segnali sinusoidali^[6].

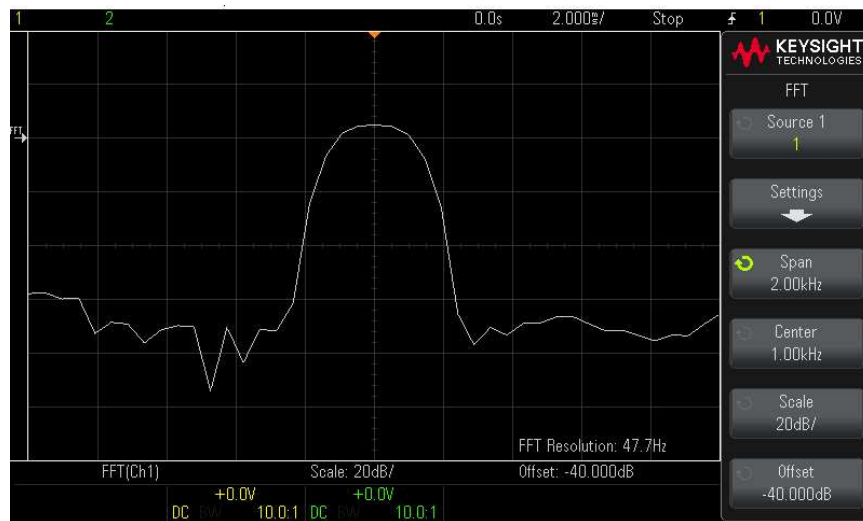


Figura 46 – Spettro del segnale sinusoidale di esempio^[9]

Ora, incrementando di volta in volta sull'oscilloscopio la frequenza istantanea del segnale sinusoidale considerato (sul modulo preposto “Wave gen” indicato sul tastierino) è possibile verificare che non solo il picco di Figura 46 risulta avere una durata

in frequenza maggiore, ma questo risulta essere anche leggermente traslato verso frequenze più alte. Tornando quindi al segnale di test, poiché il segnale chirp presenta più incrementi di frequenza in un medesimo periodo (incrementi regolati dalla funzione $f(t)$ indicata ad inizio paragrafo), è quindi logico intuire che lo spettro finale sarà caratterizzato da una successione in frequenza di picchi di ampiezza significativa rispetto al resto dei campioni spettrali, i quali saranno posti in serie e per questo potrebbero anche arrivare a sovrapporsi.

In Figura 47 si riporta perciò lo spettro della ripetizione periodica del segnale chirp considerato, con center di 10 kHz e span appunto di 20 kHz. Come si può osservare, lo spettro ricalca le considerazioni fatte precedentemente: alle basse frequenze è presente una zona in cui sono presenti dei picchi di ampiezza significativa rispetto al resto dello spettro, picchi che di fatto risultano essere molto stretti ma che posti in serie danno luogo ad una regione di spettro che sembra assumere un andamento quasi costante.

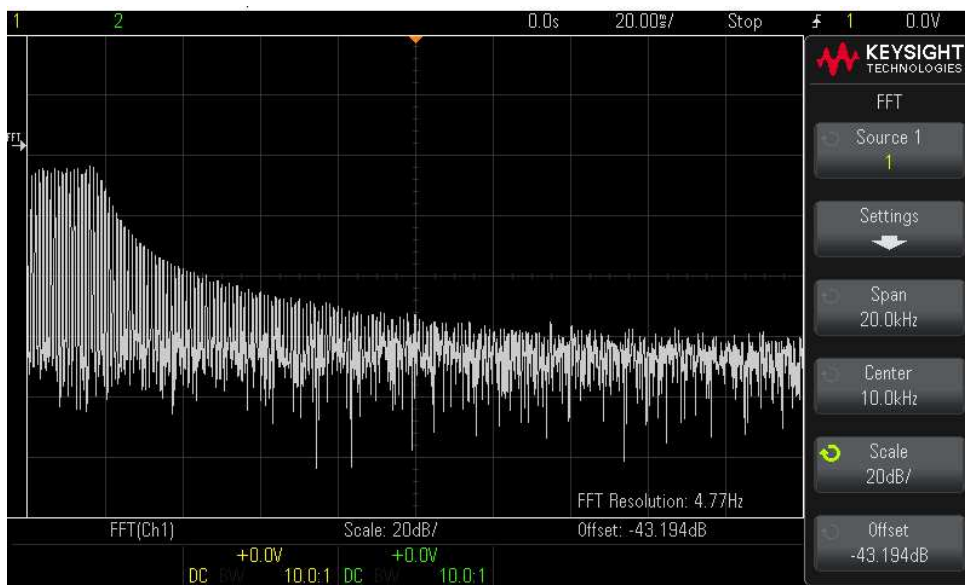


Figura 47 – Spettro del segnale chirp sull'oscilloscopio^[7]

Tali picchi hanno perciò origine dagli incrementi lineari in frequenza del segnale sinusoidale in uno stesso periodo citati precedentemente; questi vengono perciò traslati e “dilatati” in frequenza all’aumentare di $f(t)$, fornendo come risultato finale una porzione di spettro che risulta essere pseudo costante in ampiezza. Osservando la parte

rimanente dello spettro, i valori decrescono poi fino a degenerare ad una fascia di rumore localizzata nella parte bassa di questo.

Per quanto riguarda i parametri dello spettro di Figura 47, si sono impostati span e center rispettivamente a 20 e 10 kHz, lo scale è rimasto impostato al valore predefinito di 20 db/div mentre l'offset è stato leggermente diminuito a - 43 dB, in modo tale da visualizzare bene non solo lo spettro del segnale ma anche l'estensione in ampiezza della banda di rumore.

In Figura 48 si riporta invece lo spettro calcolato su Matlab tramite la funzione *fft()* del treno di segnali chirp visualizzato in Figura 44; anche qui si è applicata la finestra *flat top* e si è impostato uno span di 20 kHz, con un center di 10 kHz.

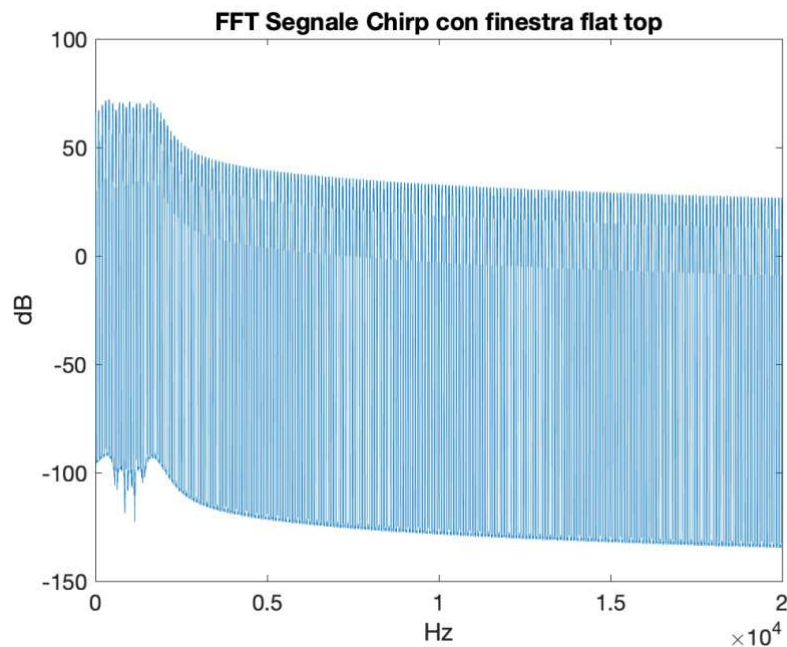


Figura 48 – Spettro del treno di chirp su Matlab
(da normalizzare rispetto a $N = 500'000$)^[9]

Come si può osservare, lo spettro presenta a basse frequenze una zona circa costante, costituita come visto dalla sovrapposizione di picchi di segnali sinusoidali di frequenza crescente, seguita poi da un decremento dei valori di ampiezza (anche qui riportati in scala logaritmica).

Lo spettro di Figura 48 sembra quindi essere coerente con quello ottenuto sull'oscilloscopio. Se poi si fanno delle misure di ampiezza in riferimento allo 0 dB, si

ottiene che l'ampiezza media della zona circa costante in ampiezza a basse frequenze risulta avere un valore simile alla controparte dell'oscilloscopio, che a seconda di dove si posiziona l'estremo inferiore del cursore sulla fascia di rumore questi risulta variare dai 65 agli 80 dB circa (come visibile nei valori dei cursori di Figura 49 A, dove $\Delta Y(FFT) = 67 \text{ dB}$, con Y1 posto circa a metà della fascia di rumore). Questo nell'ipotesi però che su Matlab le misure di ampiezza acquisite rispetto agli 0 dB risultino essere valide: la distorsione dello spettro causata dall'applicazione della finestra *flat top* non consente infatti di ottenere misure significative di ampiezza, come ampiamente visto per i segnali di test precedenti, in quanto non si riesce a dedurre dove e con quale estensione la banda di rumore influenzi lo spettro utile. Come si vedrà successivamente e in accordo con i paragrafi precedenti, le misure di ampiezza sono considerate più attendibili quando riferite ad uno spettro ottenuto su Matlab senza finestre; è proprio in questo caso, infatti, che è possibile distinguere con maggior dettaglio lo spettro utile dalla banda di rumore (che si vedrà essere localizzata proprio agli 0 dB).

L'estensione in frequenza della corona è poi di circa 1.3 kHz, sia su Matlab (in riferimento alla Figura 48) che sul DSO (come si vede in Figura 49 A, valore indicato da ΔX).

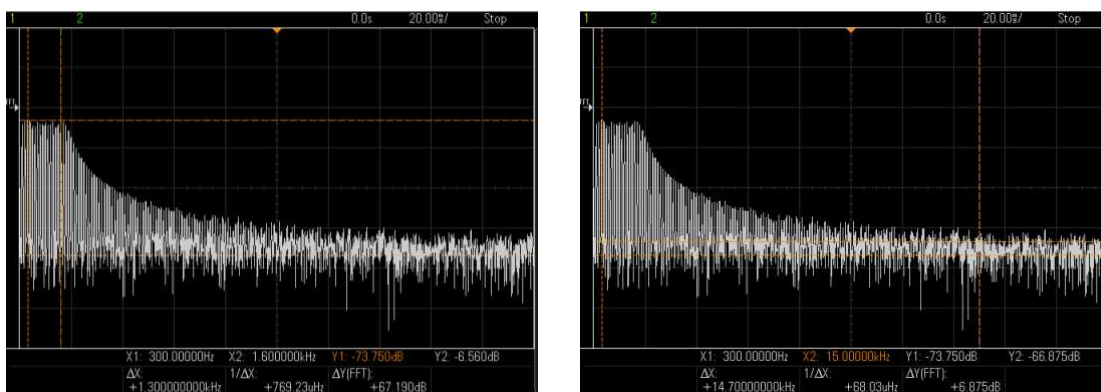


Figura 49 – A e B – Localizzazione della frequenza al 10% del valore della corona^[7]

Una grande differenza dei due spettri risulta essere invece l'intervallo di frequenze necessario per arrivare al 10% circa del valore della corona. Come si può osservare da Figura 49 A e B, il 10% del valore di ampiezza picco-picco (rispetto al centro della fascia di rumore) viene raggiunto circa alla frequenza di 15 kHz. In Matlab invece, questi è localizzato dopo i 190 kHz. L'origine di tali differenze si presuma possa dipendere, come per i casi precedenti, dall'algoritmo FFT di Matlab.

In Figura 50 di seguito si riporta invece lo spettro calcolato su Matlab in assenza dell'applicazione di finestre: come si può osservare, anche in questo caso lo spettro risulta essere meno distorto in assenza dei fenomeni legati all'introduzione di *spectral leakage*.

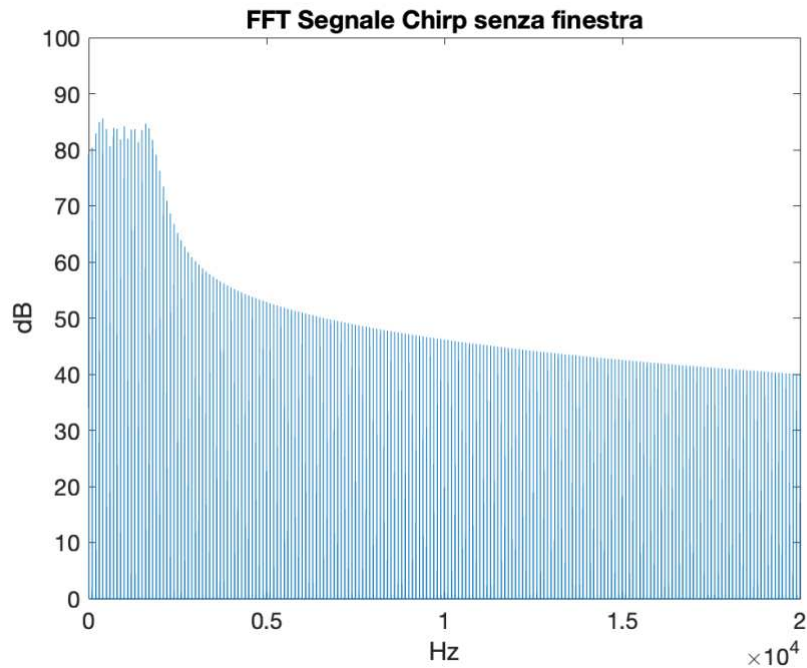


Figura 50 – Spettro treno di chirp senza finestra su Matlab
(da normalizzare rispetto a $N = 500'000$)^[9]

In questo caso si può dire che lo spettro è coerente con quello ottenuto dal DSO in termini di localizzazione della banda di rumore nello spettro (che ora risulta essere correttamente localizzata nella zona inferiore di questo) e quindi di significatività e correttezza delle misure di ampiezza dei campioni spettrali. La fascia di rumore è localizzata ai 0 dB ed è ben definita, sebbene risulti amplificata, perciò questo consente di acquisire delle misure di ampiezza che siano effettivamente confrontabili con le loro controparti del DSO. L'ampiezza picco-picco della corona (misurata in riferimento ai 0 dB) è di circa 80 dB e la sua durata in frequenza è di 1.3 kHz, valori che sono coerenti con quelli misurati direttamente sull'oscilloscopio. Come nel caso dell'applicazione della finestra flat top, il 10% dell'ampiezza picco-picco della corona viene raggiunta a frequenza molto elevate, oltre i 200 kHz, di conseguenza da questo punto di vista non si

sono osservate differenze tra lo spettro calcolato con la flat top e quello ottenuto senza l'applicazione di finestre.

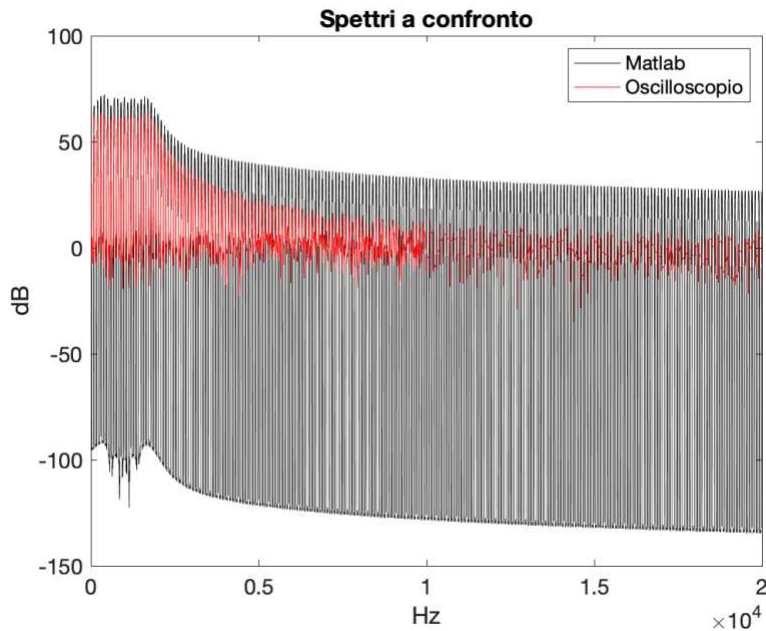


Figura 51 – Spettri Matlab e DSO a confronto (con *flat top*)
(da normalizzare rispetto a $N = 500'000$)^{[7][9]}

In Figura 51 si riportano infine in un unico grafico Matlab gli spettri ottenuti da Matlab e dal DSO, calcolati entrambi con la finestra *flat top*. Si menziona che, per poter sovrapporre le due tracce e confrontarle agevolmente, è stato aggiunto uno offset ai valori di ampiezza dei campioni dello spettro del DSO pari alla differenza tra il massimo valore di ampiezza picco-picco nelle frequenze in cui la corona è appunto circa costante in ampiezza e il valore misurato a metà della fascia di rumore, in coerenza con quanto fatto precedentemente. In questo modo si centra il valore medio della fascia di rumore circa agli 0 dB, permettendo un confronto migliore delle tracce. I campioni di entrambi gli spettri non hanno poi subito altre elaborazioni che ne modificassero le caratteristiche.

Come si può osservare da Figura 51, la corona è localizzata alle stesse frequenze e presenta circa la medesima durata in frequenza per entrambi gli spettri; inoltre, questa differisce nei due strumenti esclusivamente per un fattore di ampiezza, differenza comunque non particolarmente significativa in quanto le misure, come visto, possono

variare in base alla scelta del riferimento (cursore Y1 delle figure precedenti) nella fascia di rumore. La differenza più grande consiste perciò nella differenza dell'intervallo di frequenze necessario affinché lo spettro raggiunga il 10% del valore di ampiezza picco-picco della corona.

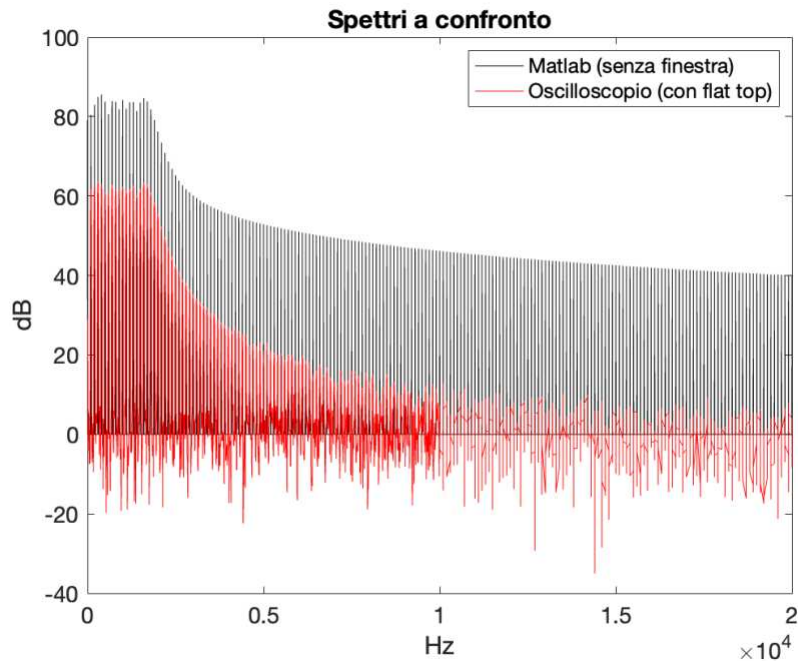


Figura 52 – Spettri a confronto con finestra sul DSO e senza su Matlab (da normalizzare rispetto a $N = 500'000$)^{[7][9]}

Per completezza in Figura 52 si riporta anche il grafico ottenuto da Matlab in cui si mettono a confronto i campioni dello spettro del DSO (a cui è stato aggiunto un offset per centrare la banda del rumore circa a 0 dB, come fatto precedentemente) con quelli dello spettro calcolato su Matlab senza finestre. È quindi evidente come gli spettri siano molto simili, a meno di un fattore di ampiezza e di pendenza. In questo caso è evidente come le differenze di ampiezza e di velocità di decrescita dei valori di ampiezza siano più marcate rispetto al grafico di Figura 51, come d'altronde ci si aspetterebbe in quanto non sono state applicate le stesse condizioni ai due segnali nel calcolo delle rispettive FFT.

Si può quindi concludere che gli spettri calcolati su Matlab e sul DSO risultano essere simili in termini di forma, di ampiezza e localizzazione e durata in frequenza della corona. Alcune differenze però sono evidenti, come ad esempio la frequenza di raggiungimento

di circa il 10% del valore picco-picco della corona. Inoltre, le misure di ampiezza, sebbene tendano ad essere simili sono caratterizzate da un'incertezza significativa a seconda del posizionamento del cursore Y1 sul DSO e della scelta del riferimento anche su Matlab. Sul DSO si è deciso di posizionarlo circa al valore medio della fascia di rumore, mentre su Matlab, nel caso dell'applicazione della finestra *flat top* non si è stato in grado di effettuare misurazioni vista la distorsione dello spettro; senza finestre è invece possibile ottenere misure di ampiezza più precise. Tali differenze, tuttavia, non devono essere sottovalutate e possono essere sicuramente indagate in lavori futuri, anche nell'ottica di un'analisi più approfondita dell'algoritmo FFT di Matlab.

CAPITOLO 5 – Conclusioni

5.1 Commento finale e possibili lavori futuri

In questo elaborato si è deciso di analizzare le differenze tra l'utilizzo di Matlab e dell'oscilloscopio digitale Keysight DS0X1102G per il calcolo della DFT di specifici segnali di test. I segnali scelti a questo proposito sono: un'onda quadra, una triangolare, un impulso singolo, un treno di impulsi e un treno di sweep sinusoidali in frequenza. L'analisi è stata condotta principalmente su Matlab, importando sul laptop i campioni visualizzati sullo schermo del DSO e acquisendo delle istantanee del display; inoltre, si sono anche riportati i valori di determinati parametri dopo averli misurati sull'oscilloscopio utilizzando direttamente i cursori e le funzioni disponibili sullo strumento.

In particolare, si è cercato di impostare l'oscilloscopio in modo tale da calcolare una trasformata di Fourier di tali segnali che fosse coerente con la loro relativa espressione analitica reperita in riferimenti bibliografici preposti; una volta determinati i valori corretti di tali parametri del DSO, questi sono stati poi applicati anche su Matlab, in modo da impostare le medesime condizioni al contorno della strumentazione utilizzata ed eseguire un confronto tra spettri che fosse quindi significativo ai fini di questo elaborato.

Si può affermare che i picchi, le campane e più in generale le forme caratteristiche degli spettri teorici sono stati osservati con successo sugli spettri calcolati con entrambi gli strumenti, dimostrando una corretta localizzazione in frequenza e comunque un andamento complessivo concorde con quello teorico atteso. Si è verificata poi la correttezza di alcuni aspetti teorici introdotti nel Capitolo 3, come ad esempio il fatto che la DFT della ripetizione periodica di un impulso coincida con lo spettro di un singolo impulso campionato in frequenza, ma anche di altri dettagli, come l'incremento dei valori di ampiezza picco-picco di alcune armoniche dello spettro dell'onda triangolare rispetto a quelli dello spettro dell'onda quadra, in accordo col fatto che l'espressione teorica dello spettro nel caso del primo segnale è definita come un'elevazione al quadrato dell'espressione teorica del secondo.

Si sono osservate tuttavia delle differenze nelle misure di ampiezze picco-picco degli spettri calcolati sui due strumenti: si ipotizza che queste derivino non solo dalle

differenze nell'algoritmo FFT utilizzato da Matlab rispetto a quello utilizzato dall'oscilloscopio, ma anche dall'applicazione della funzione finestra *flat top* su entrambi gli strumenti (utilizzata in quanto ideale per misurazioni di ampiezze^[3]), che introduce anche una certa componente di *spectral leakage*.

In alcuni limitati casi si sono osservate poi variazioni non indifferenti nell'andamento degli spettri di alcuni segnali, non a causa però di una scorretta impostazione dei parametri dell'oscilloscopio o delle condizioni al contorno su Matlab, ma perché su Matlab è possibile ottenere la condizione di zero teorico che non è raggiungibile dal DSO, il quale presenta sempre una certa componente di rumore. L'applicazione della scala logaritmica ha infatti portato alla creazione di pseudo asintoti verticali, i quali sono limitati in ampiezza esclusivamente dalla capacità di Matlab di rappresentare numeri oltre un certo ordine di grandezza. Queste considerazioni sono particolarmente evidenti ad esempio nel segnale *chirp*, dove nello spettro calcolato sul DSO è presente, nella parte inferiore della trasformata di Fourier, una fascia di rumore che invece non è localizzabile nella controparte calcolata su Matlab, dove appunto lo spettro presenta un involuppo con un andamento conforme con quanto sopra menzionato in relazione agli zeri teorici di Matlab riportati su scala logaritmica.

Nonostante ciò, la bontà dei risultati ottenuti in termini di forma e localizzazione dei picchi e delle campane caratteristiche e più in generale nell'andamento complessivo delle trasformate, tutto ciò ha altresì permesso di validare i metodi con cui si sono costruiti i vettori contenenti i campioni nel tempo dei segnali usati su Matlab per il calcolo della DFT, metodi utilizzati proprio a causa delle limitazioni ad essi associate (come il fatto che il comando Matlab *rectpulse()* sia in grado di fornire un unico impulso e non una sua ripetizione periodica). Si è quindi riusciti a replicare le esatte condizioni al contorno derivanti dall'utilizzo pratico del DSO, ponendo difatti una base per lo sviluppo di nuove funzioni anche in questo ambito.

In ultima analisi è parso comunque evidente come l'algoritmo FFT di Matlab permetta di ottenere degli spettri che siano coerenti con quelli calcolati tramite il DSO, sempre previa corretta impostazione di determinati parametri su entrambi gli strumenti da parte dell'utente, come l'intervallo di osservazione T_W , il numero di campioni N utilizzati per il calcolo della FFT e l'applicazione della corretta funzione di finestratura. Si ritiene

infine che le differenze osservate potrebbero costituire una base di partenza per miglioramenti e nuovi sviluppi in futuri lavori.

Bibliografia e sitografia

- [1] International Vocabulary of Metrology Fourth edition [Internet]. Riferimento: [Acceduto in Agosto 2023]
https://www.bipm.org/documents/20126/54295284/VIM4_CD_210111c.pdf

- [2] Giorgi G. *Incertezza di misura*. Corso di Strumentazione Elettronica. A.a. 2022/2023. Università degli Studi di Padova.

- [3] Narduzzi C. *Strumentazione elettronica per Ingegneria biomedica*. Corso di Strumentazione Elettronica. A.a. 2018/2019. Università degli Studi di Padova.

- [4] Pozzebon A. *Introduzione alla metrologia*. Corso di Laboratorio di segnali e misure. A.a. 2021/2022. Università degli Studi di Padova.

- [5] Dalla Man C. *Segnali*. Corso di Segnali e sistemi. A.a. 2022/2023. Università degli Studi di Padova.

- [6] Oppenheim AV, Willsky A, Nawab SA. 2014. *Signals and Systems*. Second Edition. Essex: Pearson.

- [7] *DSOX1102G Oscilloscope: 70/100 MHz, 2 Analog Channels* [Internet]. Riferimento: [Acceduto in Agosto 2023]
<https://www.keysight.com/us/en/product/DSOX1102G/oscilloscope-70-100-mhz-2-analog-channels.html>

- [8] Giorgi G. *Oscilloscopio*. Corso di Strumentazione Elettronica. A.a. 2022/2023. Università degli Studi di Padova.

- [9] *Matlab* [Internet]. Riferimento: [Acceduto in Agosto 2023].
<https://it.mathworks.com/products/matlab.html>

- [10] Narduzzi C. *Laboratory guide, Part 2*. Corso di *Electronic Measurements*. A.a. 2021/2022. Università degli Studi di Padova.
- [11] Erseghe T. *Segnali e sistemi, Parte 1,2,3*. Corso di Segnali e sistemi. A.a. 2017/2018. Università degli Studi di Padova.
- [12] *Keysight InfiniiVision 1000 X-Series Oscilloscopes, User's Guide* [Internet].
Riferimento: [Acceduto in Ottobre 2023].
<https://www.keysight.com/us/en/product/DSOX1102G/oscilloscope-70-100-mhz-2-analog-channels.html>
- [13] Narduzzi C. *Guida alle esercitazioni di laboratorio*. Corso di *Strumentazione Elettronica*. A.a. 2018/2019. Università degli Studi di Padova.
- [14] Giorgi G. *Generazione e acquisizione di segnali*. Corso di *Strumentazione Elettronica*. A.a. 2022/2023. Università degli Studi di Padova.

Ringraziamenti

Un ringraziamento particolare a Claudio e Maria Angela, che mi hanno sempre sostenuto e spronato a dare il meglio di me, e a Jacopo e Chiara, che mi hanno aiutato e supportato.

Desidero infine ringraziare la professoressa Giorgi per la disponibilità e la professionalità dimostrate nell'esperienza di tirocinio svolta al dipartimento e nella stesura di questo elaborato.