



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

**DIPARTIMENTO DI SCIENZE ECONOMICHE ED AZIENDALI
"M.FANNO"**

CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA

PROVA FINALE

**ANALISI DI PORTAFOGLI FINANZIARI: INTEGRAZIONE DEL
METODO BOOTSTRAP PER LA STIMA DEGLI INDICATORI DI
PERFORMANCE**

RELATORE:

CH.MO PROF. NUNZIO CAPPuccio

LAUREANDO: MARCO PICCIONI

MATRICOLA N. 1160843

ANNO ACCADEMICO 2019 – 2020

INDICE

INTRODUZIONE	4
INDICATORI DI PERFORMANCE CORRETTI PER IL RISCHIO	7
1.1 DEFINIZIONE E CARATTERISTICHE GENERALI	7
1.2 L'IPOTESI DI NORMALITÀ	8
1.3 PRINCIPALI INDICATORI DI PERFORMANCE CORRETTI PER IL RISCHIO	11
1.3.1 <i>Indice di Sharpe</i>	11
1.3.2 <i>Indice di Sortino</i>	12
1.3.3 <i>Indice di Sharpe modificato: VaR Sharpe</i>	14
1.3.4 <i>Conditional Sharpe</i>	16
1.3.5 <i>Indice di Treynor</i>	17
1.3.6 <i>Alfa di Jensen</i>	18
1.3.7 <i>Information Ratio</i>	19
BOOTSTRAP	22
2.1 INTRODUZIONE AL CONCETTO DI BOOTSTRAP	22
2.2 ASPETTI FORMALI	23
2.2.1 <i>Campioni bootstrap</i>	23
2.2.2 <i>Bootstrap errore standard</i>	23
2.3 INTERVALLI DI CONFIDENZA BOOTSTRAP	24
2.3.1 <i>I.C. Bootstrap standard</i>	25
2.3.2 <i>I.C. Bootstrap percentile</i>	26
DATI E METODOLOGIA DI CALCOLO	28
3.1 PRESENTAZIONE DEI DATI	28
3.2 TEST SULLA NORMALITÀ DEI RENDIMENTI	32
3.3 STIMA DEGLI INDICI DI PERFORMANCE	35
3.3.1 <i>Stima puntuale</i>	35
3.3.2 <i>Stima intervallare</i>	37
3.4 ANALISI ROLLING	39
CONCLUSIONE	43
BIBLIOGRAFIA	45
TAVOLE	48

INTRODUZIONE

L'analisi della performance di portafogli finanziari è una tematica posta da sempre al centro dell'interesse di investitori istituzionali e *retail* di tutto il mondo. Lo studio della performance rappresenta infatti una fase essenziale nella gestione di portafogli in quanto consente di constatare lo stato di salute di un certo investimento.

Negli ultimi anni è stata posta un'attenzione sempre maggiore all'utilizzo di quei particolari strumenti finanziari che consentono di ottenere una rappresentazione quantitativa del ritorno sul capitale in relazione al rischio assunto; tuttavia, nel mondo accademico sono sorti molteplici dubbi riguardo l'attendibilità dei risultati scaturiti dall'applicazione di questi indicatori a causa delle ipotesi talvolta surreali sui cui essi si fondano.

Questo elaborato si prefigge l'obiettivo di analizzare l'efficienza di alcuni portafogli finanziari attraverso l'utilizzo di alcuni dei principali indicatori di performance appartenenti alla categoria degli indicatori *risk-adjusted* (vale a dire, corretti per il rischio), proponendo l'utilizzo della tecnica statistica del *bootstrap* come metodo per fornire stime intervallari più accurate di quest'ultimi.

Nella primo capitolo sarà fornita una panoramica generale sulle principali caratteristiche degli indicatori di performance ponderati per il rischio. In seguito, sarà poi analizzata la criticità dell'assunzione di normalità della distribuzione dei rendimenti e presentati alcuni esempi delle distribuzioni più frequentemente riscontrate nella pratica. Infine, verranno esaminati i principali indicatori di performance maggiormente utilizzati nel processo di valutazione di portafogli finanziari evidenziandone i relativi vantaggi e limiti.

Il capitolo secondo sarà dedicato alla descrizione della tecnica di ricampionamento *bootstrap* e alle sue implicazioni: dopo averne esposto il concetto, sarà illustrato il processo per determinare gli errori standard di stimatori generici e mostrati alcuni dei principali metodi di costruzioni di intervalli di confidenza *bootstrap*.

Nel capitolo terzo verranno messe in pratica le nozioni teoriche presentate nei primi due capitoli. In particolare, si inizierà testando l'ipotesi di normalità dei rendimenti di quattro portafogli finanziari costruiti in base a quattro differenti criteri; successivamente, si valuteranno e confronteranno le prestazioni di quest'ultimi avvalendosi delle misure di performance introdotte nel capitolo primo e per ognuno di quest'ultime verrà calcolato l'errore standard e la stima dell'intervallo di confidenza. Si concluderà infine eseguendo un'analisi *rolling* degli indicatori di performance per analizzare le variazioni dei loro valori nel corso del tempo.

INDICATORI DI PERFORMANCE CORRETTI PER IL RISCHIO

1.1 Definizione e caratteristiche generali

Gli indicatori di *performance* corretti per il rischio sono particolari strumenti finanziari volti a fornire una valutazione della bontà degli investimenti. Nonostante l'elevato numero di questi indicatori presenti nella letteratura finanziaria, è possibile individuare una caratteristica fondamentale che li accumuna: tutti consentono di valutare e confrontare differenti alternative di investimento prendendo in considerazione non solamente il ritorno sul capitale, ma anche il relativo grado di rischio. In linea di massima, è possibile esprimere un generico indicatore di performance corretto per il rischio (Z) come il rapporto tra una misura di rendimento (RE) e una di rischio (RS). In termini formali si avrà dunque:

$$Z = \frac{RE}{RS}$$

Il rendimento viene usualmente espresso come ritorno in eccesso rispetto ad un certo *benchmark*¹. D'altra parte, tuttavia, non vi è un generale consenso riguardo la misura più idonea per quantificare la rischiosità di un investimento; tra le misure maggiormente utilizzate ricordiamo la *Deviazione Standard*, il *Value at Risk* (VaR), il *Conditional Value at Risk* (CVaR), il *Downside Deviation* e il *Maximum Drawdown* (MDD).

Negli ultimi anni, le misure di performance ponderate per il rischio hanno acquisito sempre più importanza tra gli investitori, contrapponendosi a quegli indicatori che si focalizzano sul mero ritorno sul capitale. Uno dei motivi della crescente popolarità è sicuramente riconducibile all'emersione di molteplici fondi di investimento che ha spinto gli investitori ad adottare

¹ I principali *benchmarks* di riferimento sono rappresentati dagli ipotetici rendimenti di un'attività priva di rischio e del portafoglio di mercato

strumenti che consentissero di valutare le competenze dei gestori patrimoniali in ottica rischio-rendimento (Weisman, 2002). Inoltre, gli indicatori di performance corretti per il rischio vengono da molti considerati più idonei per confrontare la reale bontà degli investimenti.

Infine, è bene evidenziare che le misure di performance corrette per il rischio possiedono un potenziale ambito di applicazione che non si limita puramente alla valutazione di portafogli finanziari (o fondi d'investimenti), sebbene in questo elaborato l'attenzione è posta esclusivamente su quest'ultimo aspetto. Tra i principali usi alternativi ricordiamo la definizione di criteri di remunerazione (con particolare riferimento alle compensazioni dei gestori patrimoniali), la scelta relativa alla *capital allocation*, la designazione di *target* finanziari e il controllo del perseguimento di quest'ultimi (Dzikevičius, 2005).

D'ora in avanti, per semplicità, gli indicatori di performance corretti per il rischio saranno individuati con i termini *indicatori di performance* o *misure di performance*

1.2 L'ipotesi di normalità

L'assunzione di normalità dei rendimenti degli *assets* trova le sue origini nell'articolo "*Portfolio Selection*", pubblicato da Harry Markowitz (1952) nel *Journal of Finance*; in tale occasione, Markowitz propose per la prima volta l'utilizzo della deviazione standard come misura per quantificare la rischiosità degli investimenti e introdusse l'analisi *media-varianza* come metodo per confrontare differenti portafogli. Nonostante con il trascorrere degli anni siano stati sviluppati nuovi modelli finanziari -si pensi, ad esempio, al CAPM proposto da Sharpe nel 1964- e siano state introdotte innovative misure per la quantificazione del rischio e del rendimento delle attività, la gran parte dei più comuni indicatori di performance sono ancora basati sull'ipotesi di normalità introdotta da Markowitz (e quindi esposti alle medesime limitazioni in termini di applicabilità al mondo reale). La distribuzione Gaussiana, avendo la peculiarità di avere una forma campanulare, essere unimodale ed avere un'asimmetria nulla, consente di riassumere le caratteristiche degli investimenti attraverso l'utilizzo di sole due variabili: la media e la deviazione standard.

Tuttavia, considerando i periodi caratterizzati da crisi finanziarie e economiche, è facile osservare come i rendimenti della maggioranza degli *assets*, nella realtà, mostrino distribuzioni notevolmente discostanti da quella normale; queste fasi di crisi, contrariamente all'opinione di molti investitori, sono fenomeni tutt'altro che rari. Di seguito vengono riportati alcuni dei maggiori eventi negativi che hanno avuto luogo nei passati 25 anni (Consob):

- Crisi finanziaria asiatica, 1997
- Crisi valutaria russa, 1998
- Scoppio della bolla tecnologica, 2000 - 2001
- Crisi dei mutui sub-prime, 2007-2009
- Crisi del debito sovrano, 2010-2011
- Crisi legata all'epidemia del Covid-19, 2020 - in corso

Inoltre, molti studi empirici hanno dimostrato che l'assunzione di normalità viene spesso violata anche nei periodi di relativa stabilità finanziaria e economica; si veda per esempio gli studi pubblicati da Aparicio & Estrada (2001) e Sheikh e Qiao (2009).

Una delle potenziali conseguenze dell'assumere la normalità dei rendimenti è la sottostima del rischio effettivo delle attività finanziarie (Sheikh e Qiao, 2010). Nella letteratura vi sono molte ricerche che dimostrano come la probabilità di osservare rendimenti negativi sia decisamente più elevata rispetto a quella che si avrebbe nel caso in cui l'ipotesi di normalità riflettesse la realtà (Mills, 1995); ciò è dovuto al fatto che, molto frequentemente, le distribuzioni dei rendimenti degli *assets* possiedono una curtosi elevata e, allo stesso tempo, un'asimmetria negativa; tutto ciò si traduce in una sottostima del reale rischio intrinseco qualora venissero adottate misure della volatilità basate sull'ipotesi di normalità dei rendimenti (esempi di queste misure sono la deviazione standard e il beta).

Inoltre, è necessario ricordare che ogni qualvolta osserviamo il valore di un certo indice di performance, esso non è altro che una stima del vero valore della popolazione. Tuttavia, sebbene la distribuzione di uno stimatore sia sempre approssimabile ad una normale per grandi campioni, qualora le osservazioni mostrino una distribuzione fortemente discostante da quella normale, non è possibile conoscere la bontà di tale approssimazione e per quale valore minimo della numerosità campionaria essa sia valida. Nel capitolo secondo di questo elaborato sarà presentata la tecnica del *bootstrap* come metodo alternativo alla teoria asintotica per derivare l'approssimazione della distribuzione di generici stimatori e calcolare i rispettivi standard errors e stime intervallari.

Come anticipato precedentemente, le forme di non-normalità più comunemente riscontrate nelle distribuzioni empiriche dei rendimenti sono principalmente due: leptocurtosi e/o asimmetria negativa. In una distribuzione ipernormale (o leptocurtica) la frequenza con cui si verificano i valori centrali e quelli estremi è maggiore rispetto a quella che si avrebbe in una distribuzione normale: in questo caso, le code della distribuzione vengono definite 'più pesanti' (Borra e Di Ciaccio, 2015). Gli investitori, generalmente avversi al rischio, preferiscono

distribuzioni con curtosi bassa in quanto quest'ultime implicherebbero una probabilità minore associata ad eventi estremi². D'altra parte, si ha un'asimmetria negativa qualora la distribuzione sia caratterizzata da una coda sinistra più allungata. Infine, si definisce distribuzione con 'Fat Left Tails' (ossia, con code sinistre 'pesanti'), una distribuzione di probabilità che presenta entrambe le sopra-menzionate caratteristiche (asimmetria negativa e leptocurtosi); in tal caso, quindi, si osserveranno ritorni negativi estremi più frequentemente e con una maggiore entità. Il fenomeno delle 'Fat Left Tails' è illustrato in figura 1 e 2, dove sono contrapposte, rispettivamente, la distribuzione dei rendimenti delle azioni internazionali e quella delle azioni statunitensi, con una distribuzione normale teorica; i rendimenti osservati sono quelli mensili relativi al periodo 1998-2008 (Sheikh e Qiao, 2010).

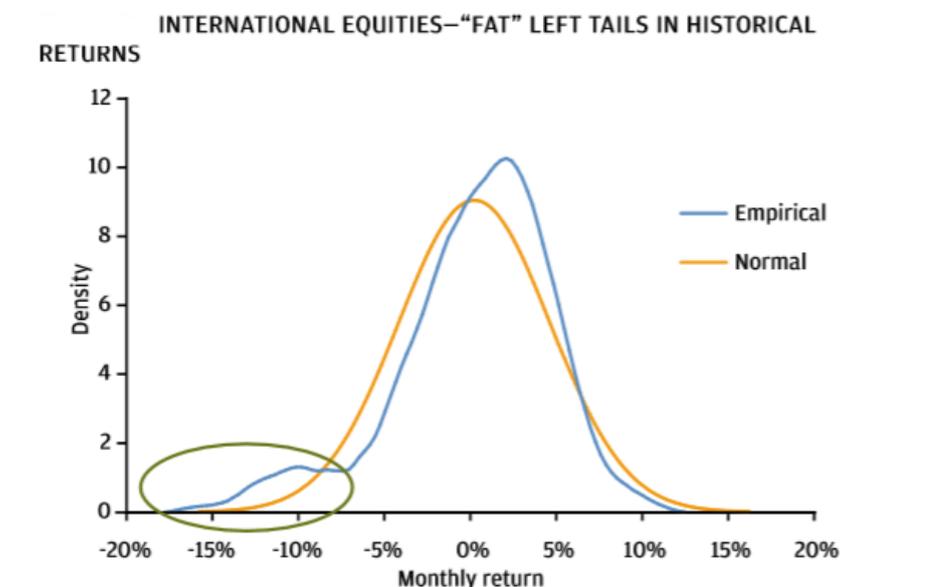


Figura 1- distribuzione empirica dei rendimenti mensili di azioni internazionali contrapposta ad una distribuzione normale teorica

Fonte: J.P. Morgan Asset Management (2010)

² Per una maggior precisione è bene sottolineare che l'avversione al rischio degli investitori si traduce con la predilezione di una bassa probabilità del verificarsi dei soli eventi negativi

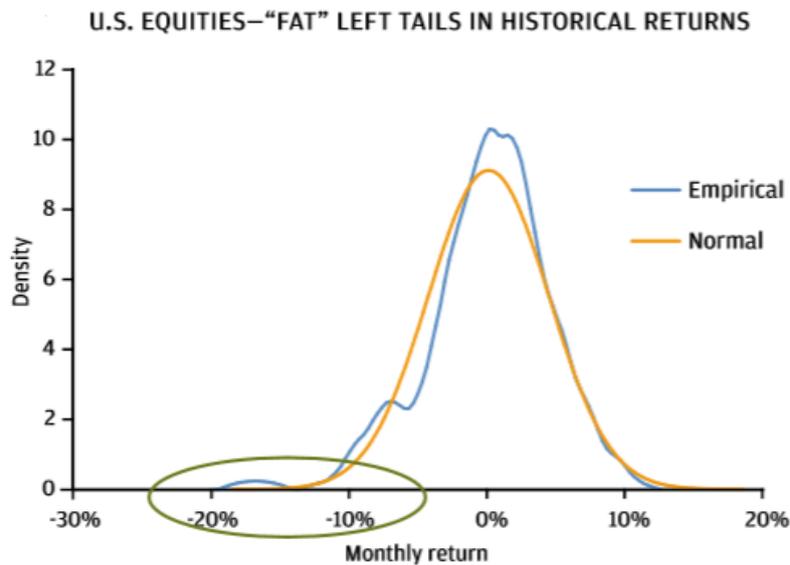


Figura 2- distribuzione empirica dei rendimenti mensili di azioni statunitensi contrapposta ad una distribuzione normale teorica

Fonte: J.P. Morgan Asset Management (2010)

1.3 Principali indicatori di performance corretti per il rischio

1.3.1 *Indice di Sharpe*

L'*indice di Sharpe*, introdotto dal celebre William F. Sharpe nel 1966, si pone al primo posto tra le più famose e utilizzate misure di performance. Tale indice, in letteratura spesso indicato con il termine '*Reward to Variability*', è dato dal rendimento in eccesso medio di un portafoglio rispetto al tasso *risk-free* diviso per la deviazione standard dei rendimenti del portafoglio stesso.

$$Sharpe = \frac{(R_p - r_f)}{\sigma_p}$$

Dove:

R_p = ritorno medio del portafoglio

r_f = rendimento di un'attività priva di rischio

σ_p = deviazione standard dei rendimenti del portafoglio

L'*indice di Sharpe* permette di valutare l'efficienza di un portafoglio finanziario (o fondo d'investimento) evidenziando l'extra-rendimento ottenuto per ogni unità di rischio complessivo assunta. Un investitore avverso al rischio prediligerà le attività che presentano un *indice di Sharpe* più elevato, vale a dire, quelle attività che mostrano un ritorno sul capitale maggiore considerando la volatilità dei rendimenti.

Nonostante la sua ampia popolarità dovuta alla semplicità di calcolo e intuitività di comprensione, l'indice di Sharpe mostra notevoli limitazioni nella pratica che possono condurre a valutazioni degli investimenti fuorvianti (Goetzmann, 2007). Per iniziare, l'*indice di Sharpe* è uno dei tanti indicatori la cui misura di rischio è basata sull'assunzione di normalità dei rendimenti. Tuttavia, dato che quest'ipotesi è spesso non rappresentativa della realtà, come mostrato nel paragrafo precedente, si possono riscontrare sottostime del rischio effettivo degli *assets*. Oltre a ciò, l'utilizzo della deviazione standard non consente di poter distinguere la variabilità associata a rendimenti positivi con quella associata a rendimenti negativi; in tal modo, è possibile che vengano rifiutati investimenti a causa di un'elevata volatilità anche nel caso in cui quest'ultima fosse dovuta esclusivamente dalla presenza di osservazioni positive estreme. Inoltre, qualora l'*indice di Sharpe* sia utilizzato per valutare la performance di diversi gestori di fondi, è bene tener presente che questo indicatore può essere soggetto a svariate forme di manipolazione (Ingersoll, Spiegel, e Goetzmann, 2007). Un esempio di strategia a cui si fa spesso ricorso per incrementare il valore dell'indice di Sharpe consiste nell'investire l'intero patrimonio in titoli privi di rischio dopo aver ottenuto un, seppur piccolo, rendimento in eccesso positivo: avendo le attività *risk-free* una volatilità pari a zero, la deviazione standard del portafoglio diminuirà drasticamente e il valore dell'indice assumerà valori tendenti all'infinito. Un altro esempio consiste nel prendere in considerazione rendimenti mensili, anziché quelli settimanali o giornalieri, in quanto i primi mostrano generalmente una minore variabilità.

Infine, una limitazione che accumuna *tutti* gli indicatori di performance è rappresentata dal fatto che il rendimento, così come il rischio, è calcolato sulla base di dati storici. Pertanto, qualora questi indici vengano utilizzati per fornire una valutazione su prestazioni future, è bene ricordare che non è assolutamente garantito il ripetersi delle performance passate. Si veda, per esempio, lo studio condotto da Kendall (1953) in cui viene argomentata l'impossibilità di effettuare previsioni circa il comportamento futuro degli *assets* a causa della loro imprevedibilità nel tempo.

1.3.2 *Indice di Sortino*

La prima formulazione dell'*indice di Sortino* fu proposta dal dottor Frank Sortino e pubblicata nel 1981 nel *Journal of Risk Management*³. L'indice di Sortino può essere considerato una diretta trasformazione dell'indice di Sharpe, dove al numeratore troviamo i rendimenti in

³ Sebbene nella letteratura finanziaria è possibile trovare svariate varianti di calcolo di quest'indice, in questo elaborato ne verrà presentata la forma originariamente introdotta dal suo fondatore.

eccesso rispetto ad un certo target desiderato (esso non deve necessariamente coincidere con il tasso privo di rischio) mentre al denominatore vi è la suddetta *target downside deviation*. Quest'ultima è una misura di dispersione dei dati indicante la deviazione standard di quei rendimenti che cadono al di sotto dell'arbitrario target di riferimento (Rollinger e Hoffman, 2013). Tenendo presente l'appena menzionata differenza di misura di rischio, l'interpretazione dell'*indice di Sortino* è molto simile a quella dello Sharpe: esso rappresenta, infatti, il rendimento in eccesso ottenuto per unità di rischio sostenuta. È possibile quindi definire l'*indice di Sortino* come:

$$\text{Sortino} = \frac{(R_p - T)}{TDD}$$

R_p = ritorno medio del portafoglio

T = ritorno target desiderabile, inizialmente indicato con il termine MAR (minimum acceptable return, vale a dire ritorno minimo accettabile)

TDD = target downside deviation, definita a sua volta come:

$$\text{Target Downside Deviation (TDD)} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i (\min(0, X_i - T))^2}$$

X_i = i-esimo rendimento

T = ritorno target desiderabile

N = numero *totale* dei rendimenti

Un errore frequentemente commesso nel calcolo della TDD è quello di escludere completamente i rendimenti superiore al target desiderabile. In realtà, nonostante quest'ultimi vengono posti uguali a zero, tali rendimenti devono comunque essere inclusi nel calcolo della TDD; non includere gli zero risulterebbe infatti in un'alterazione della sensibilità dell'indice ai ritorni 'negativi'⁴ in quanto si modificherebbe il reale numero totale dei rendimenti ($\frac{1}{N}$) nell'espressione della TDD (Rollinger e Hoffman, 2013).

Il vantaggio principale dell'utilizzo della *target downside deviation*, rispetto alla deviazione standard, risiede nel potersi focalizzare sulla sola volatilità di quei ritorni inferiori al target soglia arbitrariamente stabilito. In tal modo, l'*indice di Sortino* cerca di rimediare, almeno in parte, al problema di potenziali asimmetrie, evitando di penalizzare la valutazione di quegli *assets* con distribuzioni dei rendimenti caratterizzate da code destre allungate. Inoltre, l'uso

⁴ In questo contesto l'aggettivo negativo indica i rendimenti con valore minore rispetto al target desiderabile.

della TDD è particolarmente apprezzato dagli investitori in quanto quest'ultimi, nel considerare il rischio legato alle attività, sono di norma interessati alla sola volatilità negativa mentre apprezzano la presenza di eventuali *outlier* positivi. In figura 3 è illustrato come la *target downside deviation*, differentemente dalla deviazione standard, esprime la volatilità dei soli rendimenti che cadono al di sotto del valore target.

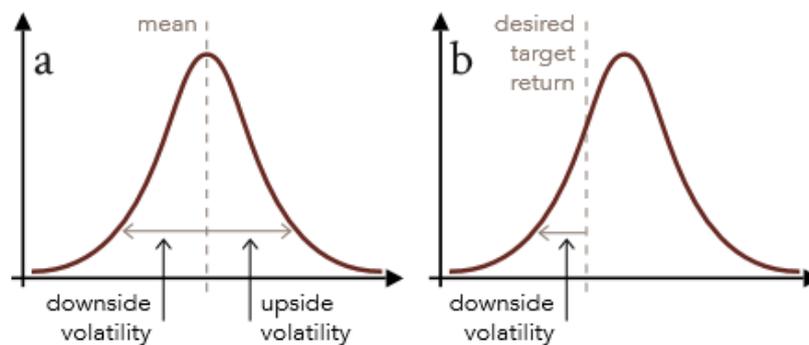


Figura 3- deviazione standard (a) vs target downside deviation (b)

Fonte: Rollinger, T. e Hoffman, S. (2013). *Sortino ratio: a better measure of risk*

Poiché l'*indice di Sortino* e *Sharpe* ricorrono a differenti metriche per calcolare il rischio, essi possono spesso condurre a valutazioni differenti; in generale viene suggerito un uso complementare di questi indici e consigliato di approfondire le cause di eventuali risultati altamente discordanti.

1.3.3 Indice di Sharpe modificato: *VaR Sharpe*

Il *VaR Sharpe* (in letteratura indicato spesso con nomi differenti) rappresenta un'altra variante dell'originale *indice di Sharpe*; in questa versione dell'indice si tenta di rimediare ai problemi legati all'uso della deviazione standard utilizzando, al suo posto, il *Value at Risk* (VaR). Pertanto, mentre al numeratore troviamo nuovamente il rendimento in eccesso rispetto al tasso privo di rischio, al denominatore avremo invece il VaR.

$$VaR\ Sharpe = \frac{(R_p - r_f)}{VaR}$$

R_p = ritorno medio del portafoglio

r_f = rendimento di un'attività priva di rischio

VaR = Value at Risk

Stabilito un intervallo di confidenza $1-\alpha$ (solitamente $1-\alpha = 0.95$ o 0.99), è possibile definire il VaR come la massima perdita potenziale nel $(1-\alpha) \cdot 100\%$ dei casi in un dato orizzonte temporale (Grau-Carles et al., 2009). Similmente si può affermare che, posto un livello di confidenza $1-\alpha$, il VaR rappresenta il punto di *cutoff* tale per cui la probabilità di avere una perdita maggiore di quest'ultimo è minore di α : vale a dire che $P(\text{Perdita} > \text{VaR}) < \alpha$ (Jorion, 2006).

Per ricavare la stima del *value at risk* si possono distinguere differenti metodologie di calcolo. Una dei metodi tradizionali assume la normalità della distribuzione dei rendimenti; in particolare, sotto l'ipotesi che la distribuzione dei rendimenti R sia approssimabile a $R \sim N(\mu, \sigma^2)$, il Value at Risk per un livello di confidenza $(1-\alpha)$ sarà uguale a⁵ (Jorion, 2006):

$$\text{VaR}_{(1-\alpha)}(R) = \mu - Z_{1-\alpha} \sigma$$

Dove:

$1-\alpha$ = livello di confidenza

μ = valore atteso dei rendimenti

Z_α = valore della tavola della funzione di ripartizione normale standardizzata

σ = volatilità dei rendimenti

In figura 4 è proposta una rappresentazione del VaR nel caso si disponga di una distribuzione dei rendimenti normale:

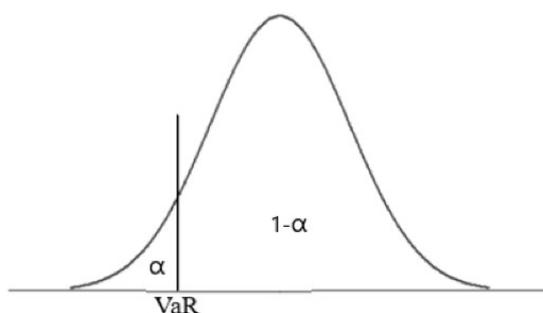


Figura 4- rappresentazione grafica VaR su una distribuzione teorica normale

Una metodologia di calcolo alternativa consiste nell'ordinare i rendimenti storici in ordine crescente in modo tale che $R_1 < R_2 < R_3 < \dots < R_N$: Il VaR al livello di confidenza $1-\alpha$ corrisponde al rendimento $N \cdot \alpha$ -esimo: vale a dire, $\text{VaR}_{(1-\alpha)}(R) = R_{N \cdot \alpha}$.

⁵ N.B. nella pratica viene solitamente utilizzato il valore assoluto del VaR

Ad esempio, dato un campione di 500 rendimenti storici ordinati in ordine crescente e posto $1-\alpha = 95\%$, si avrà che il $\text{VaR}_{95\%}$ è pari al valore del 25esimo rendimento. Il vantaggio di questa seconda metodologia di calcolo è rappresentato dal fatto che non è richiesta alcuna assunzione circa la forma della distribuzione dei rendimenti (Carles et al., 2009).

Seppur non verranno trattate in questo elaborato, è doveroso sottolineare che negli ultimi anni sono stati sviluppati nuovi metodi per stimare il valore del VaR; ricordiamo, ad esempio, la Cornish-Fisher espansione del VaR la quale consente di catturare i momenti terzi e quarti della distribuzione dei rendimenti.

Le principali limitazioni del *VaR Sharpe* sono connesse all'utilizzo del *value at risk* come misura di rischio. Una delle principali critiche è rappresentata dalla forte dipendenza del valore del VaR dal livello di confidenza scelto e dalle metodologie di calcolo utilizzate; questo può lasciare spazio a svariate forme di manipolazione (Beder, 1995). D'altra parte, il *value at risk* non fornisce alcuna informazione riguardo l'entità della perdita che si potrebbe avere nello scenario peggiore in cui i rendimenti negativi fossero minori del punto di *cutoff*. Infine, in caso di distribuzione dei rendimenti non ellittica, il *value at risk* non possiede la proprietà della sub-additività: quest'ultima, coerentemente con il principio di diversificazione, afferma che il rischio associato ad un portafoglio deve essere sempre minore o uguale alla sommatoria dei rischi dei singoli assets (Jorion, 2006).

1.3.4 Conditional Sharpe

Il *Conditional Sharpe* (o *C-Sharpe*) nasce con lo scopo di fornire una rappresentazione migliore del rapporto rischio-rendimento rispetto al sopra-menzionato *VaR Sharpe*. La fondamentale differenza che distingue questi due indicatori di performance è rappresentata dalla misura di rischio impiegata: in particolare, il *Conditional Sharpe* fa ricorso al *Conditional Value at Risk* (CVaR) per quantificare il rischio annesso ad un investimento. Il *C-Sharpe* presenta pertanto la seguente forma:

$$\text{Conditional Sharpe} = \frac{(R_p - r_f)}{\text{CVaR}}$$

R_p = ritorno medio del portafoglio

r_f = tasso di interesse privo di rischio

CVaR = Conditional Value at Risk

Il CVaR, introdotto per la prima volta in un articolo redatto da Artzner et al. (1997), viene considerato come una diretta evoluzione del *value at risk*. Esso, infatti, è calcolato come il valore atteso dei rendimenti negativi estremi eccedenti il punto di cutoff individuato dal VaR e fornisce dunque una stima della perdita media attesa nel ‘peggior scenario possibile’ (figura 5). In termini matematici, è possibile definire il CVaR di una distribuzione di rendimenti continua con la seguente formula⁶:

$$\text{Conditional Value at Risk}_{(1-\alpha)} = E [R | R < \text{VaR}_{(1-\alpha)}(R)]$$

$1-\alpha$ = livello di confidenza

È possibile individuare due principali vantaggi legati all’utilizzo del *Conditional Sharpe* rispetto al VaR Sharpe con riferimento alle rispettive misure di rischio. Il primo fa riferimento al fatto che il CVaR consente di prendere in considerazione i valori più estremi della distribuzione, permettendo di quantificare la perdita che gli investitori dovrebbero sopportare negli scenari più avversi. Inoltre, differentemente dal VaR, il CVaR gode della proprietà sub-additiva indipendentemente dalla forma della distribuzione dei rendimenti, riflettendo meglio gli effetti della diversificazione (Embrechts e Wang, 2015).

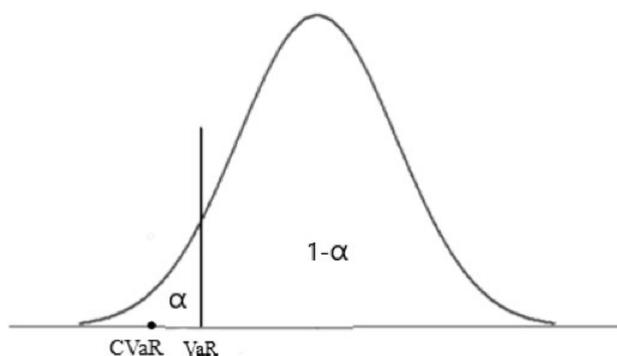


Figura 5- Rappresentazione grafica CVaR su una distribuzione normale

1.3.5 *Indice di Treynor*

L'*indice di Treynor*, introdotto dal 1965 dall'economista Jack Treynor, rappresenta il primo indicatore di performance della storia che prende in considerazione sia il rendimento che il rischio. Nel calcolo dell'*indice di Treynor* troviamo, al numeratore, ritorno in eccesso del portafoglio rispetto al tasso privo di rischio mentre, al denominatore, il beta come misura del

⁶ Nella pratica viene solitamente utilizzato il valore assoluto del CVaR

⁷ In questa formula il $\text{VaR}_{(1-\alpha)}$ non è espresso in valore assoluto

rischio sistematico (o rischio di mercato). L'interpretazione dell'*indice di Treynor* sarà dunque il rendimento in eccesso per ogni unità di rischio sistematico sopportata.

$$Treynor = \frac{(R_p - r_f)}{\beta}$$

Dove:

R_p = rendimento medio del portafoglio

r_f = rendimento di un'attività priva di rischio

β = beta

L'utilizzo del beta deriva direttamente dall'applicazione del *capital asset pricing model* (CAPM). Questa misura di rischio esprime la sensibilità del portafoglio alle oscillazioni del mercato ed è calcolata come la covarianza dei ritorni di un dato portafoglio con quelli del portafoglio di mercato divisa per la varianza dei rendimenti del portafoglio di mercato:

$$\beta_p = \frac{Cov(R_i, R_m)}{Var(R_m)}$$

Graficamente, il beta esprime invece la pendenza della retta di regressione lineare dove i rendimenti in eccesso del portafoglio in esame sono rappresentati sull'asse delle ordinate (y) e mentre quelli del portafoglio di mercato sulla asse dell'ascisse (x) (Berk e DeMarzo, 2018).

Poiché l'*indice di Treynor* è basato sul *capital market pricing model*, esso risente delle medesime limitazioni di questo modello. Tra le critiche più note troviamo, ancora una volta, l'assunzione di normalità dei rendimenti. Inoltre, come dimostrato da Roll (1978), la scelta della proxy usata per rappresentare il portafoglio di mercato influenza significativamente le stime dell'*indice di Treynor*. Infine, poiché il beta è volto a riflettere solamente il rischio sistematico, l'*indice di Treynor* potrebbe condurre a risultati ingannevoli se applicato a singoli titoli o portafogli con un grado di diversificazione ridotto: a parità di rendimenti attesi, potrebbe risultare che un portafoglio poco diversificato *A*, con un rischio totale notevolmente più elevato rispetto ad un portafoglio ben diversificato *B* ma con un beta minore, abbia un indice di Treynor maggiore rispetto al portafoglio *B*.

1.3.6 Alfa di Jensen

L'*alfa di Jensen*, introdotto dal celebre Michael C. Jensen nel 1968, rappresenta il rendimento, incrementale di un portafoglio (o di un fondo) relativamente a quanto predetto dal *capital asset*

pricing model, dato il relativo beta e il rendimento atteso del mercato (Dzikevičius, 2005). Detto in altre parole, l'*alfa di Jensen* riflette lo scostamento del ritorno medio del portafoglio rispetto alla *Security Market Line*.

$$\text{Alfa di Jensen} = (R_p - r_f) - \beta(R_M - r_f)$$

Dove:

R_p = rendimento atteso del portafoglio

r_f = rendimento dell'attività priva di rischio

β = beta del portafoglio

R_M = rendimento medio del portafoglio di mercato

Nella pratica, per il calcolo dell'*alfa di Jensen* si ricorre generalmente alla regressione lineare. In particolare, si regrediscono i rendimenti in eccesso storici del portafoglio d'interesse in funzione dei rendimenti in eccesso dell'ipotetico portafoglio di mercato (quest'ultimo solitamente approssimato dall'indice *S&P 500* o anche *EURO STOXX 600*): l'*alfa di Jensen* rappresenta dunque la costante della retta di regressione stimata con il metodo dei minimi quadrati ordinari (Berk e DeMarzo, 2018).

Dato che l'*alfa di Jensen* è derivato dall'applicazione del CAPM, questo indice è esposto alle medesime limitazioni menzionate in riferimento al calcolo dell'*indice di Treynor*.

1.3.7 Information Ratio

L'*information ratio* (IR) tenta di quantificare l'ammontare di ritorno in eccesso generato rispetto ad un certo benchmark (tipicamente una proxy del mercato o di uno specifico settore) in relazione al rischio *aggiuntivo* supportato (Goodwin, 2009). Tale indice, nonostante venga tipicamente utilizzato per comparare differenti fondi d'investimento, può anche essere impiegato per l'analisi di bontà di portafogli finanziari. L'*information ratio* è ottenuto dividendo il ritorno in eccesso per la volatilità di tale extra-rendimento (quest'ultima indicata spesso con il termine *Tracking Error* o rischio attivo).

$$\text{Information Ratio} = \frac{(R_p - R_B)}{\sigma_{p-B}}$$

Dove:

R_p = ritorno medio del portafoglio

R_B = ritorno medio del benchmark

σ_{p-B} = deviazione standard delle differenze tra il rendimento del portafoglio e quello del benchmark:

$$\sigma_{p-B} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_i (ER_t - \overline{ER})^2}$$

ER_t = ritorno in eccesso (rispetto al benchmark) al tempo t

\overline{ER} = ritorno in eccesso (rispetto al benchmark) medio

La principale critica mossa contro l'uso dell'*information ratio* riguarda la sua dipendenza dall'ipotesi di normalità dei rendimenti introdotta da Markowitz (Kidd). Oltre a ciò, qualora si utilizzasse questo indice per comparare le performance di gestori patrimoniale, è bene essere coscienti del fatto che il suo valore può essere facilmente alterato. Ad esempio, cambiando l'orizzonte temporale in modo tale da escludere periodi di scarsa performance del gestore, è possibile incrementare notevolmente la stima dell'IR. Similmente, la scelta del benchmark di riferimento influenza in modo significativo il valore assunto da questo indice: a tal proposito, Goodwin (2009) ha mostrato come, in media, la performance dei manager fosse relativamente scarsa quando comparata con l'indice *S&P 500* mentre risultava notevolmente migliore se confrontata con l'indice *Russell 1000*.

BOOTSTRAP

2.1 Introduzione al concetto di *Bootstrap*

Il bootstrap è una procedura statistica di ricampionamento utilizzata per stimare la forma della distribuzione di generali statistiche campionarie; questa tecnica, inizialmente introdotta da Efron nel 1979, viene spesso accettata come alternativa alla teoria asintotica (Hesterberg, 2011). L'idea di base sottostante al bootstrap è quella di estrarre (con reinserimento) dal campione originario un numero B di campioni bootstrap di lunghezza uguale a quello originale e su ognuno di essi stimare un generico parametro di interesse utilizzando il medesimo stimatore: in tal modo, si ottiene una distribuzione di frequenza bootstrap dello stimatore la quale, a sua volta, può essere utilizzata come approssimazione della vera distribuzione di quest'ultimo. Dalla distribuzione trovata è possibile derivare proprietà quali, ad esempio, errori standard e intervalli di confidenza (Schmidheiny, 2019).

Si possono distinguere due differenti tipologie di bootstrap: bootstrap parametrico e bootstrap *non* parametrico. Mentre nel secondo le osservazioni iniziali vengono ricampionate senza fare alcuna assunzione riguardo la forma della loro distribuzione, il bootstrap parametrico ricampiona una funzione di distribuzione nota (ad esempio la normale) i cui parametri sono stimati dal campione iniziale di osservazioni. Il vantaggio principale del bootstrap non parametrico risiede principalmente nel minor numero di assunzioni utilizzate; nonostante ciò, è bene sottolineare che le stime di quest'ultimo risultano essere meno accurate (rispetto a quello parametrico) qualora le ipotesi parametriche circa la distribuzione delle osservazioni siano vere. In questo elaborato verrà analizzato esclusivamente il metodo *non* parametrico che, da ora in avanti, sarà indicato semplicemente con il termine *bootstrap*.

Nella letteratura finanziaria, per calcolare le stime intervallari degli indicatori di performance si ricorre spesso alla teoria asintotica, approssimando la distribuzione asintotica degli stimatori

ad una normale; tuttavia, qualora la distribuzione delle osservazioni si discosti notevolmente da quella normale, risulta difficile stabilire il livello di bontà di tale approssimazione e quale debba essere la numerosità campionaria minima per cui essa risulti valida. In questo studio viene proposto il bootstrap come metodo alternativo per poter stimare la distribuzione degli indici di performance, anche nel caso in cui si abbiano a disposizione solamente campioni il cui numero di osservazioni (vale a dire i rendimenti storici) sia relativamente ridotto. Utilizzando la distribuzione bootstrap, come dimostrato dalle ricerche condotte da Lahiri (2003), è possibile ottenere stime degli standard errors e intervalli di confidenza degli stimatori notevolmente più accurati rispetto a quando si ricorre all'approssimazione asintotica normale. La tipologia di bootstrap che verrà mostrata nei paragrafi successivi presenta però un'importante limitazione: essa presuppone che i rendimenti del campione di osservazioni siano indipendenti; numerosi studi empirici, tuttavia, sembrano indicare che i rendimenti della maggior parte degli assets finanziari mostrano, in realtà, una dipendenza stocastica⁸ (si veda, per esempio, l'articolo redatto da Barkoulas, Baum e Travlos, 2010).

2.2 Aspetti formali

2.2.1 Campioni bootstrap

Per la costruzione dei campioni bootstrap è possibile distinguere due fasi principali. Nella prima fase si estrae un campione di ampiezza N (indicato come campione *iniziale*, *originale* o *originario*) dalla popolazione di interesse; nella seconda, dal campione iniziale si estraggono, con ripetizione, B campioni bootstrap indipendenti di lunghezza pari a N . L'estrazione con ripetizione implica che, in un dato campione bootstrap, alcune osservazioni potrebbero apparire più di una volta mentre altre mai.

Un dato campione bootstrap x_b^* (con $b = 1, 2, \dots, B$) sarà dunque composto da $x_{1b}, x_{2b}, \dots, x_{Nb}$ osservazioni, quest'ultime estratte (con reinserimento) dal campione originario $x_o = \{x_{1o}, x_{2o}, \dots, x_{No}\}$.

2.2.2 Bootstrap errore standard

Stimare l'errore standard di alcune statistiche avendo a disposizione un campione della popolazione può rappresentare un processo arduo e talvolta impossibile da implementare. Il

⁸ Due eventi A e B si dicono stocasticamente *dipendenti* se la probabilità condizionata di B dato A è diversa dalla probabilità marginale di $B \rightarrow P(B|A) \neq P(B)$

bootstrap consente di semplificare tale procedimento utilizzando la deviazione standard delle stime bootstrap $(\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, \dots, \hat{\theta}_B^*)$ del parametro di interesse (θ) come approssimazione dello standard error dello stimatore; in altre parole, dato un parametro θ della popolazione e uno stimatore $\hat{\theta}$ di quest'ultimo, lo scarto quadratico medio di una serie di repliche bootstrap di $\hat{\theta}$ può essere utilizzato come approssimazione dell'errore standard $se(\hat{\theta})$ dello stimatore $\hat{\theta}$ (Freedman, 2009; Hesterberg, 2011).

Concettualmente, il passaggio iniziale per stimare la deviazione standard di un certo stimatore consiste nell'estrarre B campioni bootstrap x_b^* seguendo il procedimento illustrato in precedenza; solitamente viene consigliato l'uso di almeno 100 campioni bootstrap (Schmidheiny, 2019). Successivamente viene stimato il parametro di interesse θ per ogni campione bootstrap e quindi calcolata la stima bootstrap di tale parametro che sarà uguale a:

$$\hat{\theta}^* = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{\theta}_b^*$$

Infine, viene stimato lo standard error dello stimatore $\hat{\theta}$ come segue:

$$\widehat{se}^*(\hat{\theta}) = \sqrt{\frac{1}{B-1} \sum_{b=1}^B (\hat{\theta}_b^* - \hat{\theta}^*)^2} \quad (1)$$

2.3 Intervalli di confidenza Bootstrap

Una delle applicazioni più utilizzate della tecnica bootstrap riguarda la stima degli intervalli di confidenza, specialmente per quegli stimatori la cui distribuzione asintotica è di difficile derivazione. Sebbene in letteratura è possibile distinguere una moltitudine di metodologie per la costruzione di intervalli bootstrap, di seguito verranno presentati solamente i due metodi tradizionali: I.C. bootstrap standard e I.C. bootstrap percentile. Da quest'ultimi, nel corso del tempo, si sono sviluppate nuove tipologie di stime intervallari con il tentativo di rimediare, almeno in parte, ad alcune delle loro limitazioni.

2.3.1 I.C. bootstrap standard

Tipicamente il ricorso a questo approccio di stima di intervalli di confidenza avviene qualora la distribuzione bootstrap dello stimatore $\hat{\theta}$ sia approssimabile ad una normale con un certo livello di confidenza. Questa metodologia prevede di calcolare l'errore standard dello stimatore mediante la tecnica illustrata nel paragrafo 2.2.2 e, dopo aver stabilito un livello di confidenza $(1-\alpha)\%$, ricorrere all'uso dei valori z della funzione di ripartizione della variabile casuale normale standardizzata per derivare la stima intervallare del parametro d'interesse. È possibile riassumere il procedimento come segue:

- I. Si estraggono B campioni bootstrap x_b^* di ampiezza N dal campione iniziale $x_o = \{x_{1o}, x_{2o}, \dots, x_{No}\}$ e in ognuno di questi viene stimato il parametro di interesse (è consigliato un numero di campioni bootstrap minimo pari a $B=100$).
- II. Viene calcolato l'errore standard bootstrap
- III. Si stabilisce un livello di confidenza $(1-\alpha)\%$ e si costruisce la rispettiva stima intervallare utilizzando l'errore standard bootstrap trovato al punto precedente. In particolare, gli estremi di questo intervallo sono uguali a:

$$[\hat{\theta} - Z_{\alpha/2}^* \widehat{se}^*(\hat{\theta}); \hat{\theta} + Z_{\alpha/2}^* \widehat{se}^*(\hat{\theta})]$$

Si noti che questa tipologia di costruzioni di intervalli utilizza il bootstrap solamente per il calcolo dell'errore standard dello stimatore $\hat{\theta}$ ed è basata sull'ipotesi di normalità della distribuzione bootstrap di $\hat{\theta}$: per tale ragione, la stima degli I.C. bootstrap standard è spesso considerata una procedura semi-parametrica (Schmidheiny, 2019). Il maggior vantaggio di questa metodologia risiede senza dubbio nella sua semplicità e velocità di calcolo; in aggiunta, come del resto in tutti gli intervalli bootstrap, la stima dello standard error può essere generalmente derivata indipendentemente dallo stimatore considerato. Tuttavia, qualora la distribuzione bootstrap si discosti notevolmente da quella normale, le stime degli estremi di questo intervallo possono risultare poco accurate; ad esempio, eventuali asimmetrie nelle distribuzioni bootstrap non vengono riflesse nell'intervallo bootstrap standard. Infine, poiché questo metodo utilizza quantità pivotali standardizzate, l'intervallo risultante non è invariante per trasformazioni.

Al fine di arginare il 'problema' dell'assunzione di normalità della distribuzione dello stimatore bootstrap, si ricorre spesso all'utilizzo dell'*intervallo bootstrap-t*. Quest'ultimo, a differenza dell'intervallo bootstrap standard, prevede di calcolare la quantità pivotale $T_b^* = \frac{\hat{\theta}_b^* - \hat{\theta}}{\widehat{se}(\hat{\theta}_b^*)}$ per ogni campione x_b^* e stimare, successivamente, i percentili $T_{\alpha/2}^*$ e $T_{(1-\alpha/2)}^*$ usando i valori

bootstrap critici anziché i percentili delle tavola normale standard ($T_{\alpha/2}^*$ e $T_{(1-\alpha/2)}^*$) corrispondono, rispettivamente, al $B \cdot \alpha/2$ -esimo e $B \cdot (1 - \alpha/2)$ -esimo valore ordinato di T_b^* , con $b = 1, 2, \dots, B$). Per informazioni più dettagliate sull'utilizzo dell'intervallo bootstrap-t vedere, ad esempio, l'articolo pubblicato da Hesterberg (2011).

2.3.2 I.C. Bootstrap percentile

Il bootstrap percentile è una metodologia di costruzione di intervalli di confidenza introdotta originariamente da Efron nel 1981. Nel bootstrap percentile, dato un livello di confidenza $(1-\alpha)\%$, l'estremo sinistro e destro dell'intervallo di confidenza vengono approssimati con i percentili $\alpha/2$ e $(1-\alpha/2)$ della distribuzione bootstrap dello stimatore $\hat{\theta}$. In particolare (Schmidheiny, 2019):

- I. Si estraggono B campioni bootstrap x_b^* di numerosità N dal campione originale; il numero di campioni bootstrap minimo consigliato è di $B=1000$ (Si noti che, differentemente a quanto visto negli intervalli bootstrap standard, in quelli percentili viene suggerito un numero di campioni bootstrap più elevato).
- II. Viene calcolata il parametro di interesse θ in ogni campione bootstrap x_b^* (con $b = 1, 2, \dots, B$); si avranno quindi B stime bootstrap $\hat{\theta}_b^*$ del parametro ignoto θ .
- III. Si ordinano in modo crescente gli stimatori bootstrap $\hat{\theta}_b^*$ trovati precedentemente, in modo tale che $\hat{\theta}_1^* \leq \hat{\theta}_2^* \leq \dots \leq \hat{\theta}_B^*$. A tal punto, dato un livello di confidenza $(1-\alpha)$, il limite inferiore del relativo intervallo stimato corrisponderà al $B \cdot \alpha/2$ -esimo percentile della distribuzione bootstrap degli stimatori mentre quello superiore sarà uguale al $B \cdot (1 - \alpha/2)$ -esimo percentile. Gli estremi dell'intervallo di confidenza saranno quindi pari a:

$$[\hat{\theta}_{B \cdot \alpha/2}^* ; \hat{\theta}_{B \cdot (1-\alpha/2)}^*].$$

In caso di distribuzioni bootstrap fortemente *non* normali, le stime intervallari costruite mediante l'utilizzo del bootstrap percentile potrebbero risultare più accurate rispetto a quelle derivate tramite il bootstrap 'standard'; infatti, le prime consentono di catturare potenziali asimmetrie e non richiedono alcuna assunzione riguardo la forma dello stimatore bootstrap. Oltre a ciò, l'intervallo bootstrap percentile gode di due importanti proprietà: esso è *range-preserving* e risulta invariante per trasformazioni. Tuttavia, qualora la dimensione del campione sia relativamente ridotta, le stime intervallari prodotte dal metodo bootstrap-percentile potrebbero risultare poco accurate (Chen, 2014).

DATI E METODOLOGIA DI CALCOLO

L'obiettivo ultimo di questo capitolo è quello di applicare le nozioni teoriche viste in precedenza su dati reali. In particolare, si è interessati a valutare la bontà di differenti portafogli finanziari mediante l'utilizzo degli indicatori di performance illustrati nel paragrafo 1.3 e, allo stesso tempo, impiegare la tecnica del bootstrap per derivare le stime degli errori standard e degli intervalli di confidenza di quest'ultimi.

3.1 Presentazione dei dati

Per la costruzione dei portafogli oggetto di studio, i quali verranno presentati nel seguito, sono stati impiegati 10 indici finanziari rappresentati alcune delle maggiori economie della eurozona. Si noti che ogni 'titolo' facente parte dei portafogli analizzati è a sua volta un portafoglio composto da n titoli azionari (con $n > 1$); pertanto, in questo caso sarà possibile usare il termine *portafoglio* anche qualora quest'ultimo fosse composto da un unico indice in quanto, tale portafoglio, racchiuderebbe implicitamente svariati titoli⁹. Nella tabella 1 sono elencati gli indici azionari utilizzati ed alcune delle loro caratteristiche.

⁹ Questa precisazione risulterà utile più avanti quando illustreremo la composizione dei portafogli in esame

Nome Indice	ISIN	Piazza	Paese	Num. Titoli
AEX	NL0000000107	Amsterdam	Paesi Bassi	25
ATX Prime	AT0000999925	Vienna	Austria	38
BEL 20	BE0389555039	Bruxelles	Belgio	20
CAC 40	FR0003500008	Parigi	Francia	40
DAX 30	DE0008469008	Xetra	Germania	30
FTSE MIB	IT0003465736	Milano	Italia	40
IBEX 35	ESOSI0000005	Madrid	Spagna	35
ISEQ Overall	IE0001477250	Dublino	Irlanda	42
OMX Helsinki 25	FI0008900212	Helsinki	Finlandia	25
PSI 20	PTING0200002	Lisbona	Portogallo	20

Tab 1- Alcuni dei principali indici azionari della zona euro e rispettive caratteristiche

Per ognuno dei sopra-elencati titoli sono stati presi in considerazione i prezzi storici mensili relativamente al periodo 01/05/2015 – 01/05/2020 e calcolati i relativi rendimenti; quest’ultimi rappresentano il campione di osservazioni su cui sono stati calcolati gli indici di performance¹⁰ (*fonte investing.com e yahoo finance*). Inoltre, in aggiunta a questi indici, si è fatto ricorso allo *STOXX 600* e al *Bund* tedesco con scadenza decennale come proxy, rispettivamente, del portafoglio di mercato e di un’attività priva di rischio (*fonte yahoo finance*). Dai prezzi storici sono stati calcolati i rendimenti semplici (mensili) utilizzando la seguente formula:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \%$$

Utilizzando i rendimenti trovati (periodo 01/05/2015-01/05/2020), sono stati in seguito costruiti quattro differenti portafogli, ognuno in base ad uno specifico criterio scelto arbitrariamente. In particolare, sono stati derivati i seguenti portafogli mediante l’utilizzo del software *MATLAB*:¹¹

1. Portafoglio equiponderato (ad ogni titolo è stato assegnato un peso uguale)
2. Portafoglio max Sharpe (pesi dei titoli assegnati con l’obiettivo di massimizzare l’indice di Sharpe)
3. Portafoglio varianza minima (pesi dei titoli assegnati in modo tale da minimizzare la volatilità dei rendimenti)
4. Portafoglio CVaR minimo (pesi dei titoli assegnati in ottica di minimizzazione del CVaR)

¹⁰ Per l’analisi rolling condotta nel paragrafo 3.4 il campione di rendimenti mensili utilizzato è quello relativo al periodo 01/05/2010 – 01/05/2020

¹¹ **N.B.** I portafogli presentati sono a puro scopo illustrativo e non costituiscono, in alcun modo, sollecitazione del pubblico risparmio

Di seguito sono riportanti i relativi outputs ottenuti e le rappresentazioni grafiche dei portafogli; non verranno tuttavia illustrate le procedure utilizzate per il calcolo di questi portafogli in quanto non rientranti nello scopo di questo elaborato.

-	Equiponderato	Max Sharpe	Min volatilità	Min CVaR
Indici	Pesi	Pesi	Pesi	Pesi
AEX	0.1	0	0.6034	0.7032
ATX Prime	0.1	0	0	0
BEL 20	0.1	0	0	0
PSI 20	0.1	0	0.1195	0
CAC 40	0.1	0	0	0
DAX 30	0.1	0	0	0
FTSE MIB	0.1	0	0	0
IBEX 35	0.1	0	0	0
ISEQ Overall	0.1	0	0.0736	0.0475
OMX Helsinki 25	0.1	1	0.2035	0.2493
Totale	1.0	1.0	1.0	1.0

Tab. 2- composizione portafogli finanziari secondo i rispettivi criteri

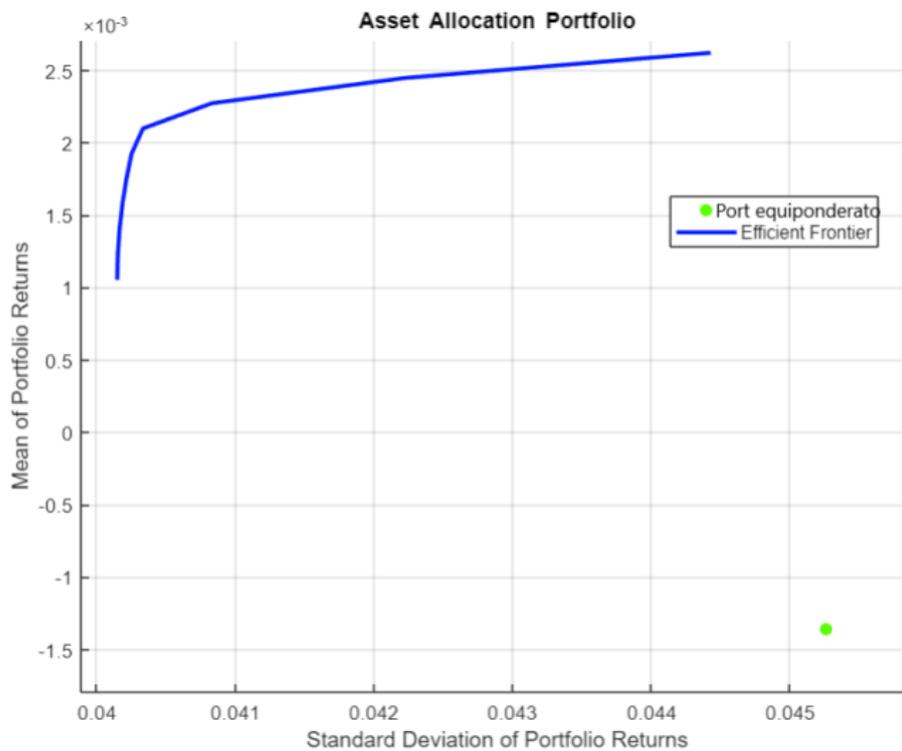


Fig. 6- portafoglio equiponderato

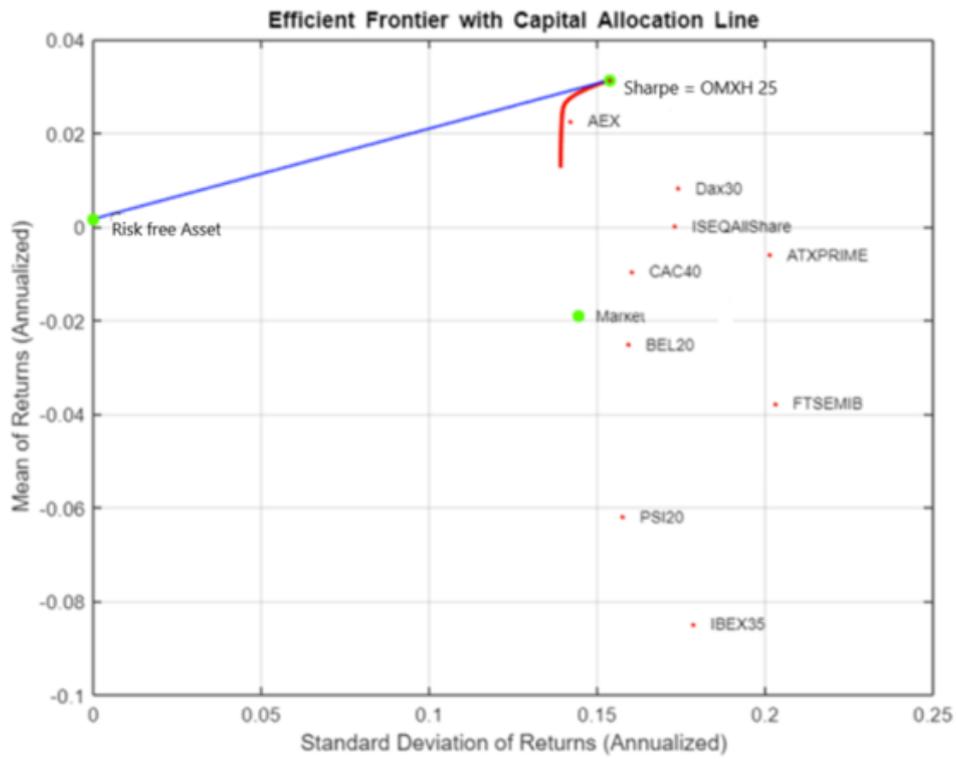


Fig. 7- portafoglio max Sharpe

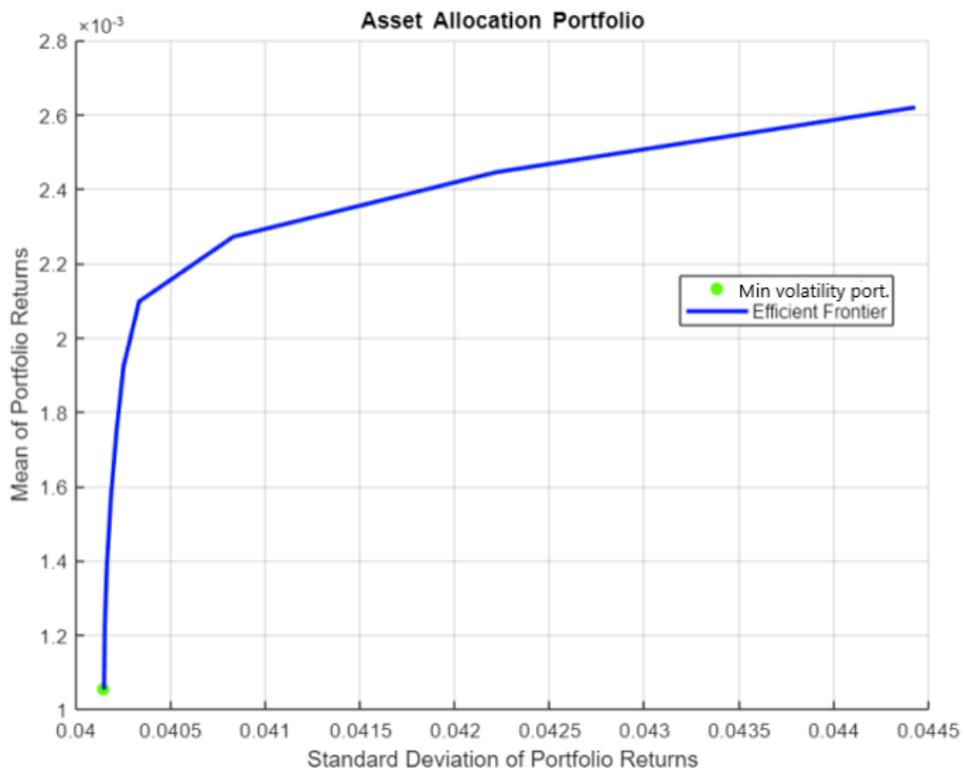


Fig. 8- portafoglio minima varianza

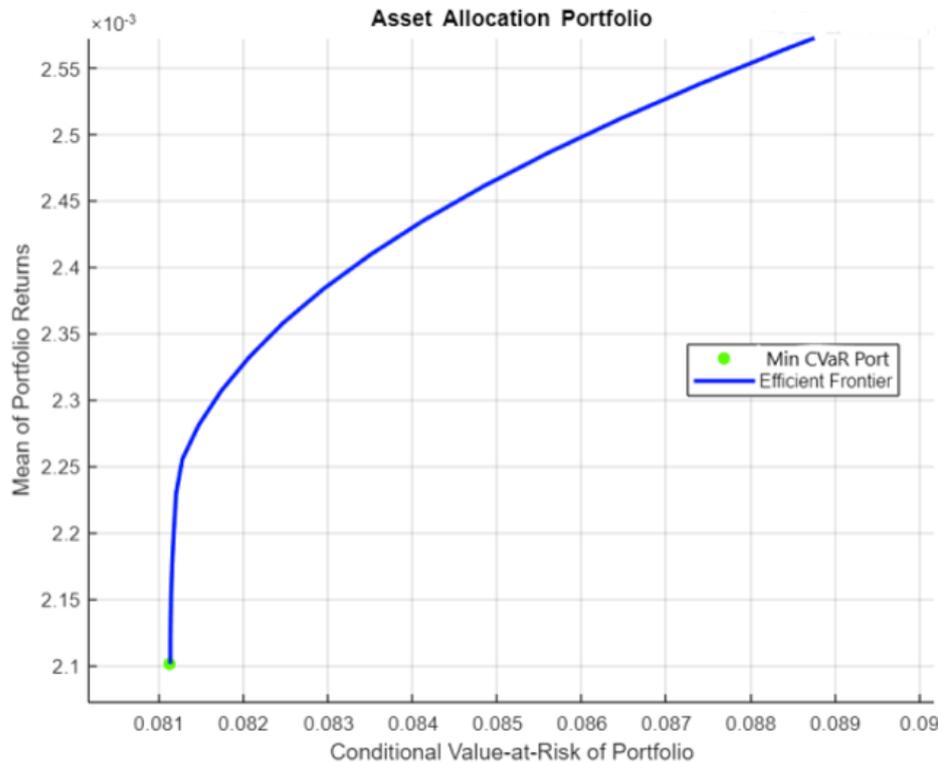


Fig. 9- portafoglio minimo CVaR

3.2 Test sulla normalità dei rendimenti

Come precedentemente descritto nel paragrafo 1.2, in letteratura vi è un larga raccolta di studi che evidenziano come la forma dei rendimenti di molte categorie di *assets*, nella realtà, sono frequentemente contraddistinte da asimmetrie negative e/o leptokurtosis (Sheikh e Qiao, 2010).

Per testare la normalità dei rendimenti dei quattro portafogli in esame, ricorriamo all'uso del *Quantile-Quantile Plot*. Quest'ultimo è uno scatter plot (un grafico di dispersione) il quale indica se un campione di dati proviene da una certa distribuzione teorica (in questo caso la Normale). A tal fine, il Q-Q plot rappresenta sull'asse delle ordinate (y) i quantili della distribuzione campionaria mentre, sull'asse delle ascisse (x), vengono riportati i quantili della distribuzione teorica: se i punti giacciono su una linea retta, allora i due sets di quantili dovrebbero provenire da una medesima distribuzione. La figura 10 mostra i grafici Q-Q plot ottenuti analizzando i rendimenti dei portafogli (software utilizzato: *STATA*). Si noti che i punti, nonostante sembrino conformarsi lungo una linea retta nel centro, tendono a curvarsi nelle

estremità: questo fenomeno è un indicatore della presenza di valori più estremi di quelli previsti da una distribuzione normale. Tuttavia, nonostante la notevole facilità di interpretazione e velocità di calcolo del Q-Q plot, quest'ultimo implica un certo grado di soggettività nel decidere se i dati si adattano o meno ad una certa distribuzione teorica (Oldford, 2015).

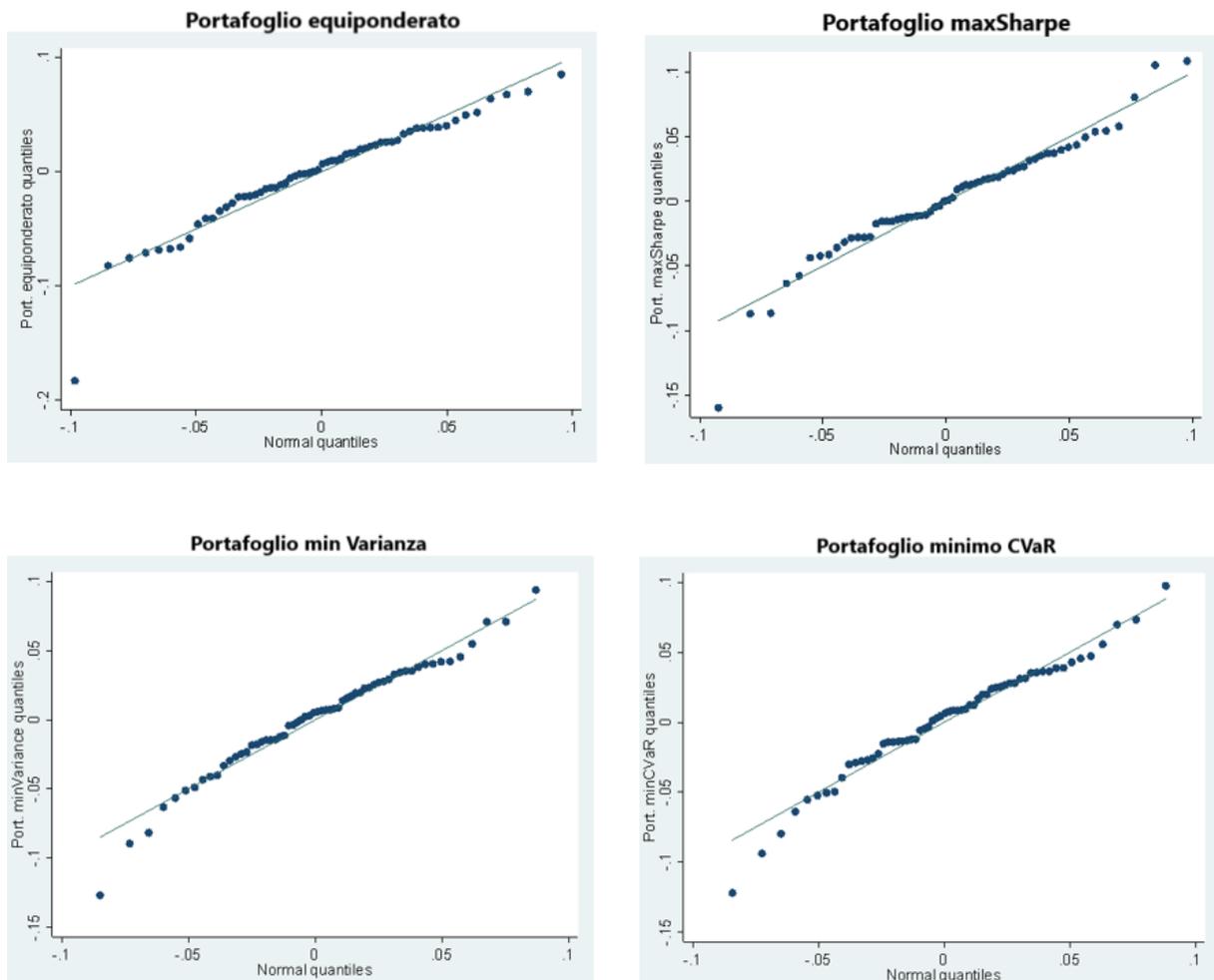


Fig. 10- Q-Q plots dei portafogli finanziari

Per un'ulteriore verifica della normalità dei rendimenti ricorriamo al test Jarque-Bera. Una fondamentale caratteristica della statistica J-B è che essa prende in considerazione, contemporaneamente, due momenti della distribuzione: l'asimmetria e la curtosi. La statistica J-B è infatti calcolata come:

$$JB = n \left[\frac{skewness^2}{6} + \frac{(kurtosis - 3)^2}{24} \right]$$

Dove:

$$skewness = \frac{\frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x})^3}{\left(\frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x})^2\right)^{3/2}}$$

$$kurtosis = \frac{\frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x})^4}{\left(\frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x})^2\right)^2}$$

Sotto l'ipotesi nulla la statistica Jarque-Bera si distribuisce asintoticamente come una chi-quadro con due gradi di libertà χ_2^2 : è uguale a zero nel caso in cui gli indici di asimmetria e curtosi abbiano valori pari a, rispettivamente, zero e tre. D'altra parte, l'ipotesi nulla viene rifiutata ad un livello di significatività α qualora $J-B > \chi_{2,(1-\alpha)}^2$ (Thadewald e Buning, 2007). Nella figura 11 sono riportati gli outputs del test Jarque-Bera condotto sui rendimenti dei 4 portafogli e i relativi istogrammi di frequenza con curva gaussiana (*software utilizzato: MATLAB*). Nel caso del portafoglio equiponderato e di quello che massimizza l'indice di Sharpe, rifiutiamo l'ipotesi nulla di normalità per qualsiasi livello di significatività (p-value < 1%). D'altra parte, invece, per i portafogli *minima varianza* e *minimo CVaR* l'ipotesi di normalità è rifiutata ad un livello di significatività $\alpha = 10\%$ e accettata quando $\alpha = 5\%$. Si noti inoltre come le distribuzioni dei rendimenti di tutti i portafogli in esame esibiscono le caratteristiche '*fat left tails*' illustrate nel paragrafo 1.2. Tuttavia, è bene evidenziare che un'elevata potenza del test Jarque-Bera si ha solamente in caso si disponga di campioni di grandi dimensioni.

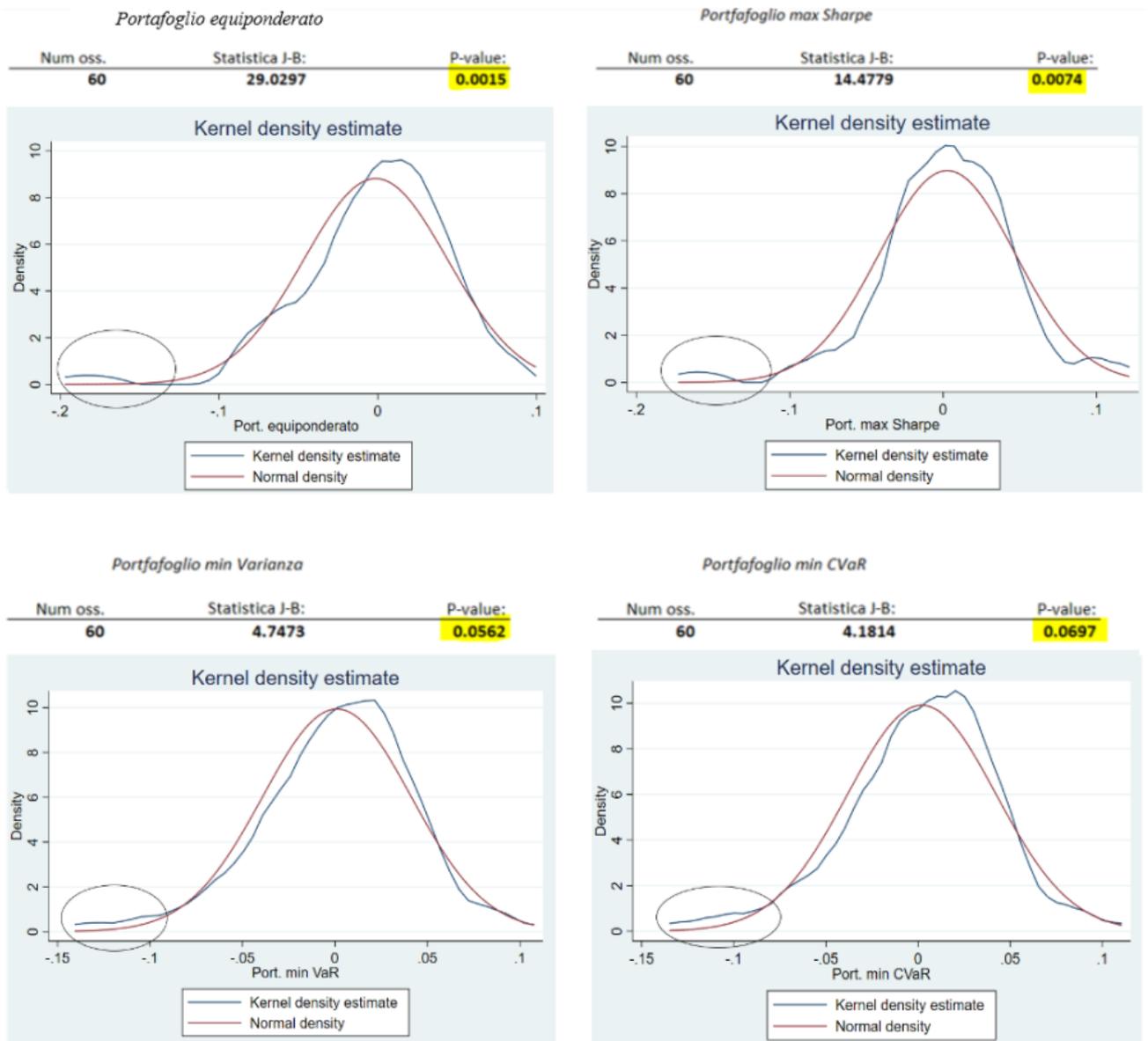


Fig. 11- test Shapiro-Wilk applicato ai rendimenti dei portafogli e relativi istogrammi di frequenza con curva gaussiana

3.3 Stima degli indici di performance

3.3.1 Stima puntuale

Tenendo in considerazione i risultati ottenuti in precedenza, proseguiamo con il calcolo della stima gli indici di performance descritti nel capitolo 1 per ciascun portafoglio finanziario. Di

seguito sono riassunte le stime degli indici calcolate utilizzando i rendimenti mensili del periodo 01/05/2015-01/05/2020¹².

-	Port. equiponderato	Port. max Sharpe	Port. min Varianza	Port. min CVaR
Sharpe	-0.033899	0.052975	0.020275	0.041074
Sortino	-0.048548	0.084346	0.031491	0.064635
Treynor	-0.001478	0.002551	0.000884	0.001798
Information	0.035128	0.200310	0.283083	0.345800
Alpha di Jensen	0.000462	0.004158	0.002603	0.003446
VaR Sharpe	-0.021810	0.036601	0.012798	0.025739
Conditional Sharpe	-0.013643	0.021337	0.008261	0.016928

Tab. 3- stime degli indici di performance

Dalle queste stime è possibile ordinare i portafogli in base al valore assunto dagli indicatori di performance; nella tabella 4, per ogni riga (corrispondente ad un indicatore) vengono classificati i portafogli finanziari da 1 a 4, dove 1 designa il portafoglio con la valutazione maggiore mentre 4 denota quello con la valutazione più bassa.

-	Port. equiponderato	Port. max Sharpe	Port. min Varianza	Port. min CVaR
Sharpe	4	1	3	2
Sortino	4	1	3	2
Treynor	4	1	3	2
Information	4	3	2	1
Alpha di Jensen	4	1	3	2
VaR Sharpe	4	1	3	2
Conditional Sharpe	4	1	3	2

Tab 4- classificazione portafogli in base agli indici di performance

È interessante notare come il portafoglio costruito in base al criterio di massimizzazione dell'indice di Sharpe (*portafoglio max Sharpe*) ottenga la valutazione più alta indipendentemente dall'indicatore di performance utilizzato (fatta eccezione per l'information ratio); ciò sembrerebbe indicare che l'indice di Sharpe, sebbene soggetto a svariate critiche¹³, nella pratica può condurre a risultati molto simili a quelli prodotti dagli altri indicatori, nonostante quest'ultimi utilizzino metodi di misurazione del rischio considerati più avanzate. D'altra parte, il portafoglio costruito assegnando pesi equivalenti a ciascun indice (*portafoglio*

¹² N.B. il rendimento privo di rischio è stato considerato come *target return* nell'indice di Sortino mentre lo STOXX 600 funge da benchmark nel calcolo dell'information ratio; Il VaR e CVaR sono stati calcolati assumendo un livello di confidenza (1- α) pari a 95%

¹³ Vedere capitolo 1 – sub-paragrafo 1.3.1

equiponderato) appare ottenere la valutazione minore per tutti gli indicatori di performance; questo è dovuto con molta probabilità alla presenza di ‘titoli’ sottoperformanti che inficiano sulla performance generale del portafoglio¹⁴.

3.3.2 Stima intervallare

Quando un generico stimatore viene calcolato su un campione di osservazioni, esso produce una stima puntuale del parametro ignoto della popolazione. Tuttavia, tale stima risulta caratterizzata da un errore intrinseco, causato dalle fluttuazioni campionarie, che rende la probabilità di ottenere il valore vero del parametro prossima a zero (Borra e Di Ciaccio, 2015). In aggiunta, la stima puntuale non fornisce sufficienti informazioni riguardo la probabilità che il valore assunto dallo stimatore sia vicino a quello del parametro. Per far fronte a queste problematiche è possibile ricorrere all'utilizzo degli intervalli di confidenza; in quest'ultimo caso, tuttavia, è richiesta la conoscenza della distribuzione dello stimatore o comunque di una sua approssimazione. Di seguito viene proposta l'applicazione della metodologia bootstrap illustrata nel capitolo 2 per la costruzione degli intervalli di confidenza. Nella tabella 5 sono illustrati le stime degli errori standard bootstrap degli indici di performance; nelle tabelle 6-9 sono invece riportate le stime intervallari di tali indici, derivate mediante l'utilizzo del ‘bootstrap standard’ e ‘bootstrap percentile’ con livello di confidenza pari a 95% e 99%.

Errore standard	Port. equiponderato	Port. maxSharpe	Port. min Varianza	Port. min CVaR
<i>Sharpe</i>	0.139689	0.134348	0.134290	0.133508
<i>Sortino</i>	0.211716	0.238028	0.207684	0.208532
<i>Treynor</i>	0.005608	0.006049	0.005502	0.005467
<i>Information</i>	0.099079	0.095229	0.090998	0.090851
<i>Alpha di Jensen</i>	0.005865	0.005623	0.005106	0.005069
<i>VaRSharpe</i>	0.085880	0.110637	0.089068	0.094953
<i>Conditional Sharpe</i>	0.052069	0.067542	0.061140	0.059447

Tab. 5- errori standard bootstrap

¹⁴ Il portafoglio equiponderato è infatti l'unico che ingloba tutti i 10 indici elencati in tabella 2

(1- α)=0.95	Port. equiponderato	Port. maxSharpe	Port. min Varianza	Port. min CVaR
<i>Sharpe</i>	[-0.30769 ; 0.23989]	[-0.21034 ; 0.31630]	[-0.24293 ; 0.28348]	[-0.22060 ; 0.30275]
<i>Sortino</i>	[-0.46351 ; 0.36642]	[-0.38219 ; 0.55088]	[-0.37557 ; 0.43855]	[-0.34409 ; 0.47336]
<i>Treynor</i>	[-0.01247 ; 0.00951]	[-0.00930 ; 0.01441]	[-0.00990 ; 0.01167]	[-0.00892 ; 0.01251]
<i>Information</i>	[-0.15907 ; 0.22932]	[0.01366 ; 0.38696]	[0.10473 ; 0.46144]	[0.16773 ; 0.52387]
<i>Alpha di Jensen</i>	[-0.01099 ; 0.01200]	[-0.00666 ; 0.01538]	[-0.00572 ; 0.01429]	[-0.00655 ; 0.01332]
<i>VaRSharpe</i>	[-0.19013 ; 0.14651]	[-0.18025 ; 0.25345]	[-0.16177 ; 0.18737]	[-0.16037 ; 0.21185]
<i>Conditional Sharpe</i>	[-0.11570 ; 0.08841]	[-0.11105 ; 0.15372]	[-0.11157 ; 0.12809]	[-0.09959 ; 0.13344]

Tab. 6- intervalli di confidenza bootstrap standard con livello di confidenza al 95%

(1- α)=0.99	Port. equiponderato	Port. maxSharpe	Port. min Variance	Port. min CVaR
<i>Sharpe</i>	[-0.39430 ; 0.32650]	[-0.29364 ; 0.39959]	[-0.32619 ; 0.36674]	[-0.30338 ; 0.38552]
<i>Sortino</i>	[-0.59478 ; 0.49769]	[-0.52977 ; 0.69846]	[-0.50433 ; 0.56731]	[-0.47338 ; 0.60265]
<i>Treynor</i>	[-0.01595 ; 0.01299]	[-0.01305 ; 0.01816]	[-0.01331 ; 0.01508]	[-0.01231 ; 0.01590]
<i>Information</i>	[-0.22050 ; 0.29075]	[-0.04538 ; 0.44600]	[0.04831 ; 0.51786]	[0.11140 ; 0.58020]
<i>Alpha di Jensen</i>	[-0.01462 ; 0.01564]	[-0.01015 ; 0.18870]	[-0.00889 ; 0.01746]	[-0.00969 ; 0.01647]
<i>VaRSharpe</i>	[-0.24338 ; 0.19976]	[-0.24884 ; 0.32204]	[-0.21700 ; 0.24259]	[-0.21924 ; 0.27072]
<i>Conditional Sharpe</i>	[-0.14798 ; 0.12070]	[-0.15292 ; 0.19560]	[-0.14948 ; 0.16600]	[-0.13645 ; 0.17030]

Tab. 7- intervalli di confidenza bootstrap standard con livello di confidenza al 99%

(1- α)=0.95	Port. equiponderato	Port. max Sharpe	Port. min Varianza	Port. min CVaR
<i>Sharpe</i>	[-0.26867 ; 0.23541]	[-0.17018 ; 0.34494]	[-0.23562 ; 0.30070]	[-0.20485 ; 0.32730]
<i>Sortino</i>	[-0.25515 ; 0.41205]	[-0.21230 ; 0.67529]	[-0.33629 ; 0.48122]	[-0.27547 ; 0.59173]
<i>Treynor</i>	[-0.12343 ; 0.00866]	[-0.00823 ; 0.01445]	[-0.01046 ; 0.11678]	[-0.00925 ; 0.01244]
<i>Information</i>	[-0.17946 ; 0.19676]	[-0.56157 ; 0.27262]	[-0.13817 ; 0.01381]	[-0.11228 ; 0.24155]
<i>Alpha di Jensen</i>	[-0.01103 ; 0.01177]	[-0.00605 ; 0.01503]	[-0.00825 ; 0.12296]	[-0.00697 ; 0.01313]
<i>VaR Sharpe</i>	[-0.16616 ; 0.14789]	[-0.08811 ; 0.34112]	[-0.12316 ; 0.22740]	[-0.10533 ; 0.25719]
<i>Conditional Sharpe</i>	[-0.10069 ; 0.120968]	[-0.35945 ; 0.29143]	[-0.07339 ; 0.14620]	[-0.07499 ; 0.16858]

Tab. 8- intervalli di confidenza bootstrap percentile con livello di confidenza al 95%

(1- α)=0.99	Port. equiponderato	Port. maxSharpe	Port. min Variance	Port. min CVaR
<i>Sharpe</i>	[-0.36484 ; 0.32709]	[-0.23895 ; 0.43355]	[-0.33630 ; 0.48122]	[-0.28375 ; 0.40537]
<i>Sortino</i>	[-0.43448 ; 0.63612]	[-0.29305 ; 0.71938]	[-0.38681 ; 0.70340]	[-0.38531 ; 0.80915]
<i>Treynor</i>	[-0.17946 ; 0.11921]	[-0.12545 ; 0.01923]	[-0.01327 ; 0.23225]	[-0.12754 ; 0.14675]
<i>Information</i>	[-0.24051 ; 0.27324]	[-0.15504 ; 0.33974]	[-0.18228 ; 0.27329]	[-0.16950 ; 0.29690]
<i>Alpha di Jensen</i>	[-0.04205 ; 0.06059]	[-0.10058 ; 0.19534]	[-0.01086 ; 0.01428]	[-0.01023 ; 0.01521]
<i>VaRSharpe</i>	[-0.20391 ; 0.19327]	[-0.12346 ; 0.48362]	[-0.15666 ; 0.29351]	[-0.14192 ; 0.40070]
<i>Conditional Sharpe</i>	[-0.13885 ; 0.15660]	[-0.09238 ; 0.30745]	[-0.10435 ; 0.21554]	[-0.10459 ; 0.22482]

Tab. 9- intervalli di confidenza bootstrap percentile con livello di confidenza al 99%

Come prevedibile, gli estremi degli intervalli di confidenza prodotti dai due metodi presentano valori diseguali: le cause di eventuali differenze sostanziali potrebbero essere riconducibili a

distribuzioni bootstrap degli stimatori fortemente non-normali¹⁵. Per un controllo di quest'ultimo aspetto, nelle tavole 1A-1D sono riportati i risultati dei test Jarque-Bera condotti sulle distribuzioni bootstrap ed evidenziati i p-value minori di 1%. Si riportano inoltre le distribuzioni bootstrap dell'indice di Sortino e VaR Sharpe (quest'ultimi relativi ai portafogli *max Sharpe* e *min CVaR*, rispettivamente) come esempi di distribuzioni per cui la statistica J-B assume valori molto grandi (figura 12 e 13): è interessante notare come entrambe appaiono essere caratterizzate da una curtosi elevata e un'asimmetria positiva.

In ogni caso, laddove le distribuzioni si discostino molto da una normale e le stime intervallari prodotte dai due metodi bootstrap presentino differenze non trascurabili, è tendenzialmente preferibile l'utilizzo della stima generata dal bootstrap percentile¹⁶ con la consapevolezza, tuttavia, che quest'ultima tipologia di stima intervallare non è priva di limitazioni.

Distribuzione bootstrap dell'indice Sortino Ratio (portafoglio max Sharpe)

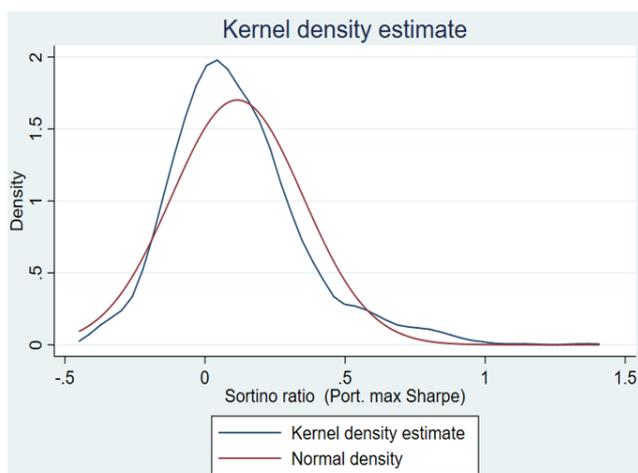


Fig. 12- distribuzione bootstrap della variabile Sortino Ratio (port. min CVaR)

Distribuzione bootstrap del VaR Sharpe (portafoglio min CVaR)

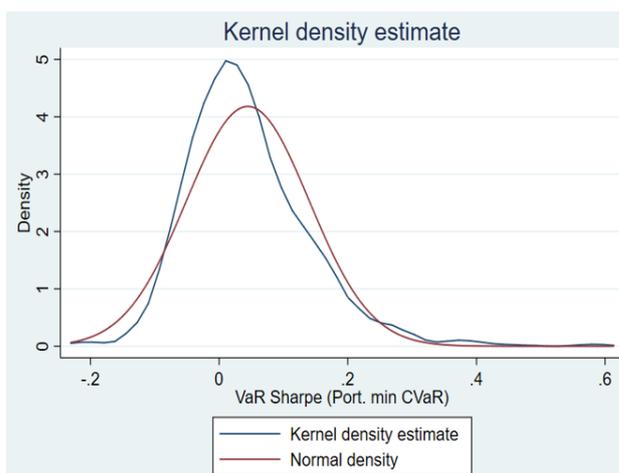


Fig. 13- distribuzione bootstrap della variabile VaR Sharpe (port. min CVaR)

3.4 Analisi rolling

Come abbiamo visto in precedenza, gli indicatori di performance possono essere utilizzati per valutare e comparare l'efficienza di portafogli finanziari (o fondi d'investimento); il passaggio iniziale per ottenere la stima di questi indicatori consiste nello scegliere l'intervallo temporale

¹⁵ Si ricorda infatti che gli intervalli di confidenza bootstrap 'standard' assumono l'ipotesi di normalità della distribuzione bootstrap degli stimatori

¹⁶ Si rimanda alle considerazioni illustrate nel capitolo secondo

su cui vengono calcolati i rendimenti facenti parte del campione delle osservazioni. Tuttavia, la scelta del periodo di osservazione può talvolta influenzare notevolmente la valutazione assegnata ad un portafoglio in quanto i valori assunti dagli indici di performance tendono a variare, in modo più o meno marcato, nel corso del tempo. Un metodo per esaminare l'incidenza di tali variazioni è rappresentato dall'analisi rolling: quest'ultima consiste nel suddividere il periodo temporale di lunghezza T in cui viene osservato il campione in sub-periodi (o finestre temporali) di ampiezza F e stimare, per ognuno di esse, il valore del parametro d'interesse¹⁷. Nel nostro caso specifico, abbiamo deciso di far coincidere l'intervallo temporale di lunghezza T con il periodo 01/05/2010 – 01/05/2020, abbiamo fissato la dimensione delle finestre temporali a 5 anni e, infine, abbiamo stabilito che l'incremento tra quest'ultimi sia pari ad 1 mese. Iniziamo dunque calcolando le stime dei sette indici di performance precedentemente illustrati per il primo sub-campione relativo al periodo 01/05/2010 – 01/05/2015; ripetiamo quindi il calcolo includendo l'osservazione più recente ed escludendo quella più remota (periodo 01/06/2010 - 01/06/2015) e procediamo in modo equivalente fino all'ultima finestra temporale. Uno dei vantaggi di impiegare l'analisi rolling nell'analizzare le performance di un portafoglio è quello di mostrare se le stime degli indicatori tendono o meno ad assumere valori costanti nell'intervallo di lunghezza T . Inoltre, qualora si prenda in esame più di un portafoglio finanziario, l'analisi rolling può essere utilizzata per constatare se il *ranking* di questi ultimi sia stabile nel tempo (Feibel, 2003). Di sotto vengono proposte delle rappresentazioni grafiche delle analisi rolling degli indici di performance eseguite per ogni portafoglio. Nelle Tavole 2A – 2G vengono invece riportate le stime degli indici di performance ottenute in ogni finestra temporale, evidenziando il portafoglio che ha ottenuto la valutazione più alta per ogni periodo.

Dalle analisi grafiche è possibile evincere che la variazione dei valori assunti dai 7 indicatori di performance dei quattro portafogli in esame sono state molto simili tra loro, fatta eccezione per i valori associati all'information ratio e alfa di Jensen¹⁸. D'altra parte, se si osservano le figure 14-20 così come le tavole 2A-2G, è possibile notare che, tralasciando le finestre temporali relative agli anni meno recenti, il *portafoglio max Sharpe* ha riportato stime degli indicatori di performance (fatta eccezione per l'information ratio) generalmente più elevate rispetto a quelle relative agli altri portafogli; tuttavia, quando si prendono in considerazione le finestre meno recenti, si nota che il *portafoglio min CVaR* è generalmente classificato come

¹⁷ Supponendo che l'incremento tra finestre temporali sia pari ad 1 periodo, il numero di finestre totali sarà pari a: $N = T - F + 1$

¹⁸ Si noti che la caduta generale dei valori finali è dovuta con ogni probabilità al fatto che le ultime finestre temporali incorporano le osservazioni relative ai mesi di crisi economica e finanziaria provocata dall'emergenza COVID-19.

primo nel ranking dei portafogli: ciò evidenzia l'importanza ricoperta dall'orizzonte temporale. Per quanto concerne invece i portafogli *equiponderato* e *min Varianza*, essi non ottengono mai la valutazione più alta da parte di nessun indicatore di performance in nessuna finestra temporale.

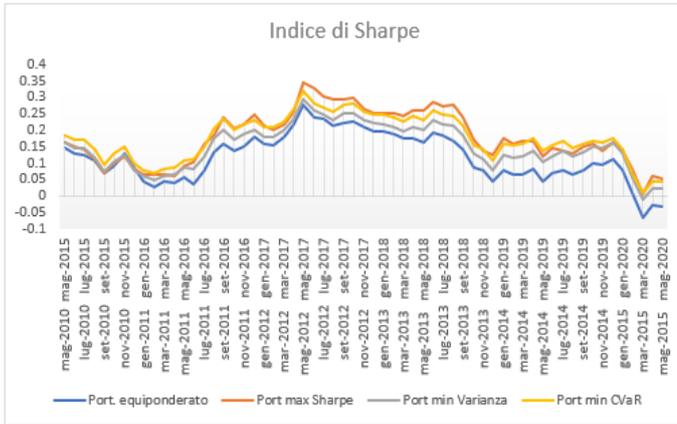


Fig. 14- analisi rolling Sharpe

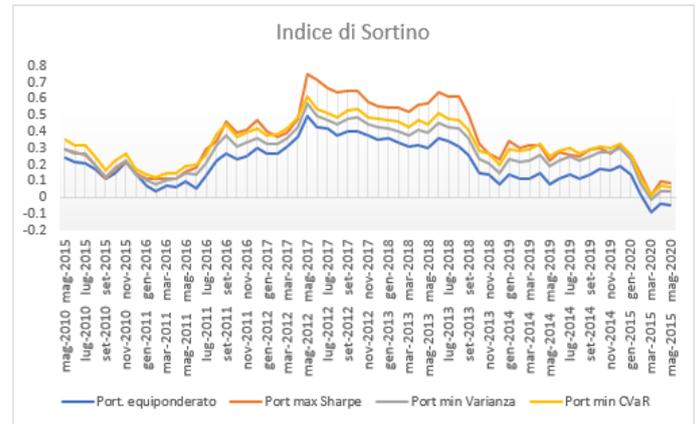


Fig.15- analisi rolling Sortino

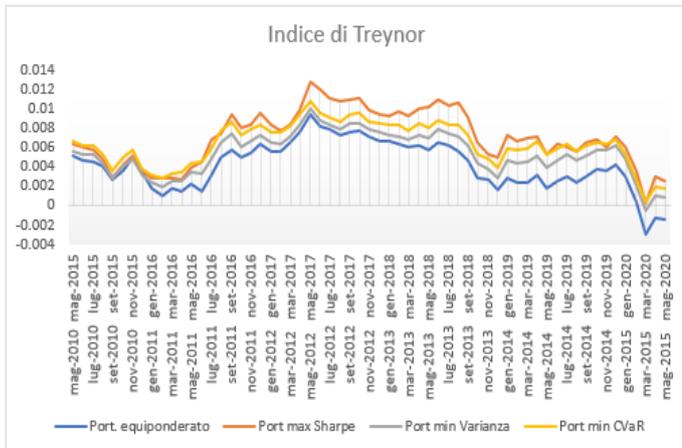


Fig. 16- analisi rolling Treynor

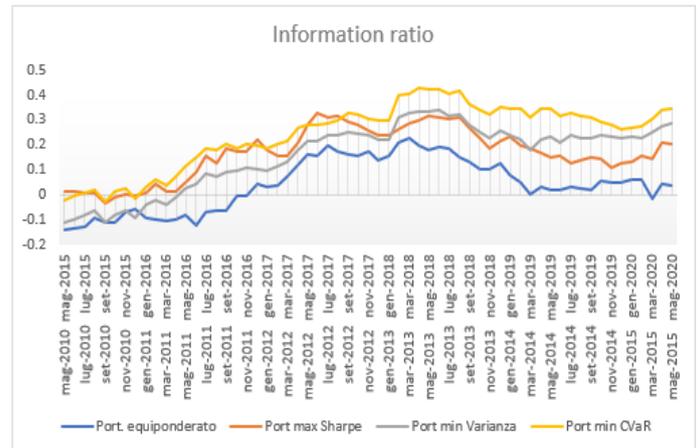


Fig.17- analisi rolling Information ratio

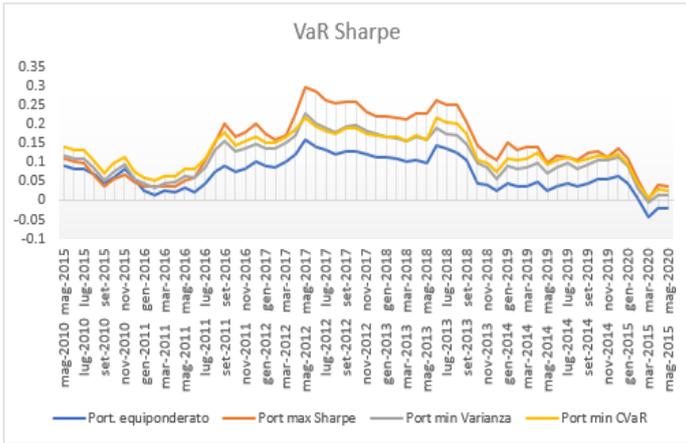


Fig. 18- analisi rolling VaR Sharpe

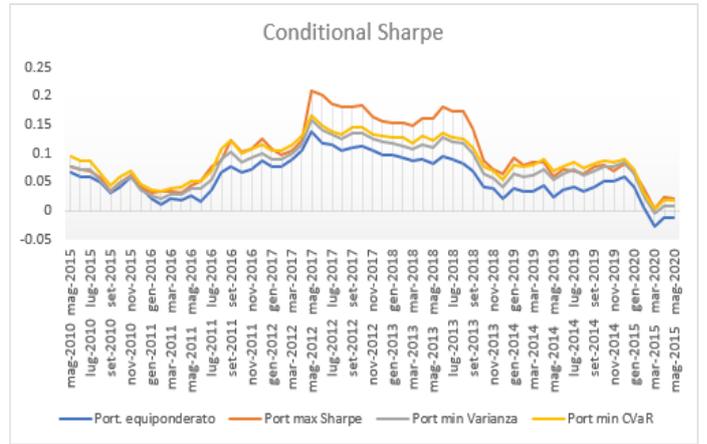


Fig. 19- analisi rolling Conditional Sharpe

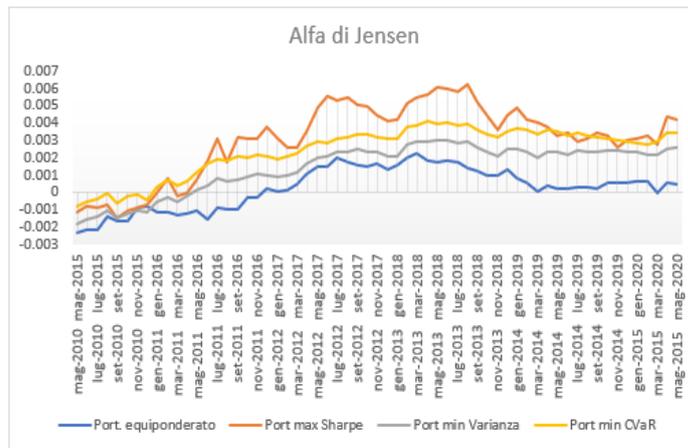


Fig. 20- analisi rolling Alfa di Jensen

CONCLUSIONE

Il fulcro centrale di questo elaborato è stato lo studio di alcuni dei principali indicatori di performance e l'applicazione pratica di quest'ultimi nel comparare la bontà di quattro differenti portafogli finanziari. Per ciascun indicatore di performance sono stati analizzati i punti di forza e di debolezza, illustrando l'importanza che ricopre l'ipotesi di normalità dei rendimenti; in aggiunta, è stata presentata la tecnica del bootstrap come alternativa alla teoria asintotica per derivare la stima degli errori standard e degli estremi degli intervalli di condifenza di tali indicatori.

Sono stati costruiti quattro portafogli finanziari in base a quattro criteri distinti e, attraverso l'uso dei test Q-Q plot e Jarque-Bera, è stata verificata l'assunzione di normalità dei rispettivi rendimenti. I risultati ottenuti, specialmente quelli relativi ai portafogli *equiponderato* e *max Sharpe*, hanno confermato quanto descritto nel capitolo primo: le distribuzioni di probabilità dei rendimenti di molti assets sono caratterizzate da asimmetrie negative e/o leptokurtosis, compromettendo la validità di alcune delle più comuni misure di rischio (si pensi, ad esempio, alla deviazione standard e al beta) e inficiando sulla bontà dell'approssimazione normale asintotica degli stimatori.

I sette indicatori di performance presentati nella parte iniziale di questo elaborato (quali Sharpe, Sortino, Treynor, Information ratio, Alfa di Jensen, VaR Sharpe, Conditional Sharpe) sono stati calcolati per ognuno dei quattro portafogli in esame al fine di valutare e comparare l'efficienza di quest'ultimi; complessivamente, le stime degli indici hanno indicato una sostanziale superiorità delle performance conseguite dal *portafoglio max Sharpe*, ad eccezione di quelle relative all'information ratio che pongono al primo posto il *portafoglio min CVaR*.

Oltre a ciò, date le limitazioni derivanti dall'uso esclusivo delle stime puntuali e in considerazione dei risultati dei test sulla normalità dei rendimenti effettuati, sono state calcolate le stime intervallari per ognuno dei sette indicatori sopra-menzionati mediante l'utilizzo della tecnica statistica del *bootstrap*; nello specifico, dopo aver illustrato il funzionamento del

bootstrap in via teorica, sono state calcolate le stime degli errori standard degli indici di performance e, successivamente, i relativi intervalli di confidenza. Infine, è stata condotta un'analisi rolling sulle stime degli indicatori di performance in modo tale da poter osservare il loro andamento nel tempo e constatare la consistenza del ranking dei portafogli finanziari presi in esame.

Alla luce dei risultati conseguiti, è bene evidenziare che, in questo elaborato, si è assunta l'indipendenza stocastica dei rendimenti del campione esaminato. Si ricordi, in particolare, che la metodologia bootstrap presentata è basata sull'ipotesi di indipendenza delle osservazioni campionarie; tuttavia, nella realtà, i rendimenti mostrano generalmente una dipendenza stocastica, sebbene tendenzialmente incorrelati. Inoltre, per il calcolo delle stime intervallari bootstrap sono stati impiegati solamente i due metodi più tradizionali, tralasciando le altre tipologie le quali vengono spesso esaltate per la loro capacità di fornire stime relativamente più accurate.

BIBLIOGRAFIA

- Aparicio, F. & Estrada J. (2001). Empirical distributions of stock returns: European securities markets 1990-95. *The European Journal of Finance*, 7 (1), 1-21
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M. & Heath, D. (1997). Thinking coherently. *Risk Magazine*, 10(11), 68-71.
- Barkoulas, J. T., Baum, C.F. e Travlos, N. (2010). Long memory in the Greek stock market. *Applied Financial Economics*, 10(2), 177-184.
- Beder, T. (1995). VAR: Seductive but Dangerous. *Financial Analysts Journal*, 51(5), 12-24.
- Berk, J., DeMarzo, P. (2018). *Finanza aziendale 1*. Pearson Italia.
- Borra, S. e Di Ciaccio, A. (2015). *Statistica*. 3° ed. Milano: McGraw-Hill Education.
- Carles, P.G., Sainz, J., Otamendi, J., e Doncel, L. M. (2009). Different Risk-Adjusted Fund Performance Measures: A Comparison. *Economics* [Online], 11 Dicembre. Disponibile su <<http://www.economics-ejournal.org/economics/discussionpapers/2009-54/file>>. [Data di accesso: 10/06/2020].
- Chen, Z., (2014). *Statistical Methods of QTL Mapping*. 1° ed. Chapman& Hall Book. 47-48.
- CONSOB. *Le crisi finanziarie* [Online]. Disponibile su <<http://www.consob.it/web/investor-education/le-crisi-finanziarie>>. [Data di accesso: 05/06/2020].
- Dzikevičius, A. (2005). Risk adjustment and performance measurement: symmetrical versus asymmetrical measures. *Business: Theory & Practice*, 6(1), 77-84.
- Efron, B. (1979). Bootstrap methods: Another look at the Jackknife. *The Annals of Statistics*, 7(1), 1-26.
- Efron, B. (1981). Non parametric Standard Errors and Confidence Intervals. *The Canadian Journal of Statistics*, 9(2), 139-158.
- Embrechts, P. e Wang, R. (2015). Seven Proofs for the Subadditivity of Expected Shortfall. *Dependence Modeling*, 3(1), 126-140.

- Feibel, B. J. (2003). *Investment Performance Measurement*. 1° ed. John Wiley & Sons. 206-212
- Freedman, D. A. (2009). *Statistical Models: Theory and Practice*. Cambridge: Cambridge University Press. 155-175.
- Goetzmann, W., Ingersoll, J., Spiegel M., e Welch, I. (2007). Portfolio performance manipulation and manipulation-proof performance measures. *Review of Financial Studies*, 20(5), 1503–1546
- Goodwin, T. H. (2009). The Information Ratio. *Financial Analysts Journal*, 54(4), 34-43
- Hesterberg, T. (2011). Bootstrap. *WIREs Computational Statistics* [Online], 3(6). Disponibile su <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/wics.182>> [Data di accesso: 14/06/2020].
- Ingersoll, J., Spiegel, M. e Goetzmann, W.(2007). Portfolio performance manipulation and manipulation-proof performance measures. *Review of Financial Studies*, 20(5), 1503–1546
- Jorion, P. (2006). *Value at Risk*. 3° ed. Singapore, McGraw-Hill. 105-115
- Kendall, M. G. (1953). The analysis of economic time-series- Part 1: Prices. *Journal of the Royal Statistical Society*, 116(1), 11-25.
- Kidd, D. *The Sharpe Ratio and the Information Ratio* [Online]. Investment Performance Measurement. Disponibile su <<https://deborahkidd.com/wp-content/uploads/The-Sharpe-Ratio-and-the-Information-Ratio-1.pdf>>. [Data di accesso: 11/06/2020]
- Lahiri, S. N. (2003). *Resampling Methods for Dependent Data*. New York: Springer.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77-91.
- Mills, T. C. (1995). Modelling skewness and kurtosis in the London Stock Exchange FT-SE index return distributions. *The Statistician*, 44 (3), 323–332.
- Oldford, W. R. (2015). Self-Calibrating Quantile–Quantile Plots. *The American Statistician*, 70(1), 1-47.
- Roll, R. (1978). Ambiguity When Performance Is Measured by the Securities Market Line. *Journal of Finance*, 33(4), 1051–1069.
- Rollinger, T. N. e Hoffman, S. T. (2013). *Sortino: a ‘Sharper’ ratio* [Online]. Chicago: Red Rock Capital. Disponibile su <<https://www.cmegroup.com/education/files/rr-sortino-a-sharper-ratio.pdf>> [Data di accesso: 08/06/2020]
- Schmidheiny, K. (2019). The bootstrap. *Short guides to microeconometrics* [Online]. Disponibile su < <https://www.schmidheiny.name/teaching/bootstrap.pdf> >. [Data di accesso: 13/06/2020].

Sheikh, A. Z. e Qiao, H. (2009). Non-Normality of Market Returns: A Framework for Asset Allocation Decision Making. *The Journal of Alternative Investments*. 12(3), 8-35. [Data di accesso: 05/06/2020].

Thadewald, T. e Buning, H. (2007). Jarque-Bera Test and its Competitors for Testing Normality- A Power Comparison. *Journal of Applied Statistics*, 34(1), 87-105.

Weisman, A. (2002). Informationless Investing and Hedge Fund Performance Measurement Bias. *Journal of Portfolio Management*, 26, 81–91.

TAVOLE

<i>Port. equiponderato</i>	Statistica Jarque-Bera	p-value
<i>Indice di Sharpe</i>	25.7175	0.0000
<i>Indice di Sortino</i>	404.1539	0.0000
<i>Indice di Treynor</i>	150.5703	0.0000
<i>Information ratio</i>	277.7697	0.0000
<i>Alfa di Jensen</i>	150.5703	0.0000
<i>Var Sharpe</i>	632.2596	0.0000
<i>Conditional Sharpe</i>	4.00E+02	0.0000

Tavola 1A-risultati test di normalità Jarque-Bera relativi alle distribuzioni bootstrap degli indici del portafoglio equiponderato

<i>Port. max Sharpe</i>	Statistica Jarque-Bera	p-value
<i>Indice di Sharpe</i>	4.9598	0.0788
<i>Indice di Sortino</i>	1.24E+03	0.0000
<i>Indice di Treynor</i>	3.469	0.1645
<i>Information ratio</i>	0.0259	>0.5
<i>Alfa di Jensen</i>	1.0425	>0.5
<i>Var Sharpe</i>	144.104	0.0000
<i>Conditional Sharpe</i>	511.1359	0.0000

Tavola 1B-risultati test di normalità Jarque-Bera relativi alle distribuzioni bootstrap degli indici del portafoglio max Sharpe

<i>Port. min Varianza</i>	Statistica Jarque-Bera	p-value
<i>Indice di Sharpe</i>	122.867	0.0000
<i>Indice di Sortino</i>	118.7518	0.0000
<i>Indice di Treynor</i>	1.1263	>0.5
<i>Information ratio</i>	0.7731	>0.5
<i>Alfa di Jensen</i>	1.1263	>0.5
<i>Var Sharpe</i>	138.1368	0.0000
<i>Conditional Sharpe</i>	195.5882	0.0000

Tavola 1C-risultati test di normalità Jarque-Bera relativi alle distribuzioni bootstrap degli indici del portafoglio minima varianza

Port. min CVaR	Statistica Jarque-Bera	p-value
<i>Indice di Sharpe</i>	17.891	0.0012
<i>Indice di Sortino</i>	170.7983	0.0000
<i>Indice di Treynor</i>	3.1658	0.1924
<i>Information ratio</i>	5.9152	0.0503
<i>Alfa di Jensen</i>	3.1658	0.1924
<i>Var Sharpe</i>	1.65E+03	0.0000
<i>Conditional Sharpe</i>	293.2761	0.0000

Tavola 1D-risultati test di normalità Jarque-Bera relativi alle distribuzioni bootstrap degli indici del portafoglio minimo CVaR

Tavola 2A- analisi rolling applicata allo Sharpe ratio

Rolling Sharpe		Port. equiponderato	Port. max Sharpe	Port min Varianza	Port. min CVaR	Port. con valore maggiore
mag-2015	mag-2020	-0.033899	0.052975265	0.020275166	0.041074253	Port max Sharpe
apr-2015	apr-2020	-0.029650222	0.060623786	0.021676444	0.043112382	Port max Sharpe
mar-2015	mar-2020	-0.068416793	0.003899111	-0.011675405	0.007297983	Port min CVaR
feb-2015	feb-2020	0.01078592	0.082781993	0.053753405	0.069846947	Port max Sharpe
gen-2015	gen-2020	0.078855875	0.137272469	0.128402436	0.141264915	Port min CVaR
dic-2014	dic-2019	0.110230348	0.162599355	0.161889091	0.175435067	Port min CVaR
nov-2014	nov-2019	0.094946756	0.138161028	0.146991217	0.163739497	Port min CVaR
ott-2014	ott-2019	0.097830464	0.156943562	0.149699448	0.167750166	Port min CVaR
set-2014	set-2019	0.076513311	0.149429611	0.133105436	0.157811154	Port min CVaR
ago-2014	ago-2019	0.063775777	0.129163148	0.119199218	0.145578778	Port min CVaR
lug-2014	lug-2019	0.078700718	0.137166289	0.13698755	0.164117623	Port min CVaR
giu-2014	giu-2019	0.066673985	0.143338162	0.120387123	0.151796512	Port min CVaR
mag-2014	mag-2019	0.045042271	0.120194285	0.103363143	0.136875843	Port min CVaR
apr-2014	apr-2019	0.083070639	0.164907456	0.137982657	0.175984013	Port min CVaR
mar-2014	mar-2019	0.065435632	0.164134104	0.118641774	0.158359877	Port max Sharpe
feb-2014	feb-2019	0.065287412	0.155856221	0.115691379	0.153892155	Port max Sharpe
gen-2014	gen-2019	0.075853685	0.173498476	0.123284191	0.156959812	Port max Sharpe
dic-2013	dic-2018	0.043074798	0.122739974	0.078916994	0.108591497	Port max Sharpe
nov-2013	nov-2018	0.076992004	0.138487492	0.110059371	0.141909426	Port min CVaR
ott-2013	ott-2018	0.085131574	0.170216876	0.126468724	0.155432325	Port max Sharpe
set-2013	set-2018	0.140851384	0.239991399	0.183571641	0.214270676	Port max Sharpe
ago-2013	ago-2018	0.164689012	0.274703784	0.211443069	0.243648306	Port max Sharpe
lug-2013	lug-2018	0.183538761	0.273870956	0.218283468	0.247308648	Port max Sharpe
giu-2013	giu-2018	0.192274671	0.285005012	0.229630706	0.258342515	Port max Sharpe
mag-2013	mag-2018	0.162833765	0.261090822	0.201274861	0.230230568	Port max Sharpe
apr-2013	apr-2018	0.176204774	0.258813668	0.208876875	0.241686721	Port max Sharpe
mar-2013	mar-2018	0.172748899	0.241659391	0.195671189	0.22383244	Port max Sharpe
feb-2013	feb-2018	0.185737284	0.249814454	0.208967753	0.239392993	Port max Sharpe
gen-2013	gen-2018	0.197529468	0.25074575	0.215245024	0.244686943	Port max Sharpe
dic-2012	dic-2017	0.195212386	0.25286889	0.220319348	0.247390192	Port max Sharpe
nov-2012	nov-2017	0.209305776	0.264803859	0.229021348	0.253309002	Port max Sharpe
ott-2012	ott-2017	0.226085931	0.29705305	0.251499546	0.279392646	Port max Sharpe
set-2012	set-2017	0.222183618	0.294510874	0.248933771	0.275771008	Port max Sharpe
ago-2012	ago-2017	0.213210201	0.292921114	0.231514131	0.255330682	Port max Sharpe
lug-2012	lug-2017	0.232875838	0.301800062	0.246043258	0.267719231	Port max Sharpe
giu-2012	giu-2017	0.240148425	0.326977803	0.257553398	0.280589879	Port max Sharpe
mag-2012	mag-2017	0.275445499	0.342561551	0.293024058	0.316906106	Port max Sharpe
apr-2012	apr-2017	0.215005172	0.256646754	0.233170757	0.262662022	Port min CVaR
mar-2012	mar-2017	0.179549622	0.215723543	0.199604681	0.227587865	Port min CVaR
feb-2012	feb-2017	0.155322586	0.201286084	0.180088545	0.20936002	Port min CVaR
gen-2012	gen-2017	0.157726778	0.214941285	0.179808776	0.20820522	Port max Sharpe
dic-2011	dic-2016	0.178106951	0.246274563	0.19988267	0.229830695	Port max Sharpe
nov-2011	nov-2016	0.150666501	0.215081231	0.187206878	0.21816786	Port min CVaR
ott-2011	ott-2016	0.137981029	0.204265622	0.170733367	0.200821867	Port max Sharpe
set-2011	set-2016	0.156637157	0.236520625	0.202169047	0.234767458	Port max Sharpe
ago-2011	ago-2016	0.132695958	0.183382251	0.173297293	0.203497045	Port min CVaR
lug-2011	lug-2016	0.077895456	0.156114505	0.119730904	0.147371252	Port max Sharpe
giu-2011	giu-2016	0.035137522	0.102788691	0.082105103	0.111530911	Port min CVaR
mag-2011	mag-2016	0.055996451	0.088770428	0.085291263	0.108761742	Port min CVaR
apr-2011	apr-2016	0.037740562	0.061986836	0.064096851	0.085045947	Port min CVaR
mar-2011	mar-2016	0.042777017	0.06485258	0.061698089	0.082343245	Port min CVaR
feb-2011	feb-2016	0.024091951	0.06358903	0.046032521	0.069668703	Port min CVaR
gen-2011	gen-2016	0.042892343	0.062627765	0.058327437	0.078677856	Port min CVaR
dic-2010	dic-2015	0.087244852	0.082247773	0.078349742	0.096826728	Port min CVaR
nov-2010	nov-2015	0.127462939	0.11794575	0.12539764	0.147376369	Port min CVaR
ott-2010	ott-2015	0.089315269	0.097254716	0.102109587	0.126133227	Port min CVaR
set-2010	set-2015	0.068206386	0.067796897	0.07358161	0.094639069	Port min CVaR
ago-2010	ago-2015	0.105521961	0.11246864	0.116418356	0.140600889	Port min CVaR
lug-2010	lug-2015	0.125300926	0.142633459	0.145885176	0.171510809	Port min CVaR
giu-2010	giu-2015	0.127867502	0.148590581	0.14527012	0.170923551	Port min CVaR
mag-2010	mag-2015	0.143047995	0.160596361	0.159810918	0.184962552	Port min CVaR

Tavola 2B- analisi rolling applicata all'indice di Sortino

Rolling Sortino	Port. equiponderato	Port. max Sharpe	Port min Varianza	Port. min CVaR	Port. con valore maggiore
mag-2015 mag-2020	-0.048548491	0.084345944	0.03149055	0.064635472	Port max Sharpe
apr-2015 apr-2020	-0.041996124	0.096220876	0.033672233	0.067873345	Port max Sharpe
mar-2015 mar-2020	-0.095427127	0.005917959	-0.017711753	0.011222992	Port min CVaR
feb-2015 feb-2020	0.01737833	0.146540392	0.089356787	0.116839026	Port max Sharpe
gen-2015 gen-2020	0.134712165	0.25199136	0.231054667	0.253441824	Port min CVaR
dic-2014 dic-2019	0.190876894	0.311178508	0.297335596	0.321047642	Port min CVaR
nov-2014 nov-2019	0.165195595	0.264223236	0.271013585	0.300158153	Port min CVaR
ott-2014 ott-2019	0.170578388	0.300758061	0.276635498	0.308621039	Port min CVaR
set-2014 set-2019	0.133971095	0.286877729	0.247180071	0.291985576	Port min CVaR
ago-2014 ago-2019	0.110822816	0.245303148	0.219596371	0.267134338	Port min CVaR
lug-2014 lug-2019	0.136038648	0.259099252	0.251141555	0.299734713	Port min CVaR
giu-2014 giu-2019	0.115807381	0.269452438	0.221765886	0.278747301	Port min CVaR
mag-2014 mag-2019	0.077977444	0.225245223	0.189442586	0.249560193	Port min CVaR
apr-2014 apr-2019	0.147014437	0.316885409	0.257385803	0.326586922	Port min CVaR
mar-2014 mar-2019	0.114891454	0.315493397	0.220990563	0.293514311	Port max Sharpe
feb-2014 feb-2019	0.114638313	0.299354521	0.215489465	0.285345055	Port max Sharpe
gen-2014 gen-2019	0.135116345	0.341796005	0.232121039	0.292308604	Port max Sharpe
dic-2013 dic-2018	0.074739779	0.233510807	0.144735365	0.196561948	Port max Sharpe
nov-2013 nov-2018	0.135562641	0.262405574	0.204653782	0.260743796	Port max Sharpe
ott-2013 ott-2018	0.149125516	0.324522857	0.234291696	0.284388381	Port max Sharpe
set-2013 set-2018	0.256958173	0.505338149	0.357134004	0.411666348	Port max Sharpe
ago-2013 ago-2018	0.30411978	0.611427397	0.413636998	0.471925248	Port max Sharpe
lug-2013 lug-2018	0.337946387	0.609492008	0.425448893	0.478062156	Port max Sharpe
giu-2013 giu-2018	0.357719934	0.638418849	0.45518611	0.509142448	Port max Sharpe
mag-2013 mag-2018	0.294697435	0.565936517	0.39030076	0.443890889	Port max Sharpe
apr-2013 apr-2018	0.317120578	0.560865347	0.405440435	0.467249279	Port max Sharpe
mar-2013 mar-2018	0.310008384	0.522958655	0.376632723	0.428592966	Port max Sharpe
feb-2013 feb-2018	0.331452646	0.542061544	0.400001621	0.455938129	Port max Sharpe
gen-2013 gen-2018	0.353602179	0.544327195	0.413379436	0.46716762	Port max Sharpe
dic-2012 dic-2017	0.348883552	0.550014662	0.425511631	0.47352257	Port max Sharpe
nov-2012 nov-2017	0.375436431	0.576932542	0.443630463	0.485418792	Port max Sharpe
ott-2012 ott-2017	0.40335379	0.649983393	0.485377043	0.53407243	Port max Sharpe
set-2012 set-2017	0.396077129	0.644480176	0.480031115	0.526508766	Port max Sharpe
ago-2012 ago-2017	0.377997233	0.640763033	0.443688439	0.486736541	Port max Sharpe
lug-2012 lug-2017	0.414159228	0.660425383	0.469390943	0.50765403	Port max Sharpe
giu-2012 giu-2017	0.428012354	0.714527462	0.496064553	0.539440146	Port max Sharpe
mag-2012 mag-2017	0.496163711	0.744223078	0.567993336	0.613359433	Port max Sharpe
apr-2012 apr-2017	0.367826938	0.474154244	0.423958276	0.482536745	Port min CVaR
mar-2012 mar-2017	0.305889774	0.394133829	0.360558758	0.415053658	Port min CVaR
feb-2012 feb-2017	0.262268027	0.369459651	0.323893093	0.381117418	Port min CVaR
gen-2012 gen-2017	0.266859328	0.401033802	0.323486432	0.378836166	Port max Sharpe
dic-2011 dic-2016	0.301138974	0.466348838	0.358436502	0.417752149	Port max Sharpe
nov-2011 nov-2016	0.250340811	0.406016036	0.331462974	0.391702439	Port max Sharpe
ott-2011 ott-2016	0.230228984	0.387537807	0.30383934	0.36252046	Port max Sharpe
set-2011 set-2016	0.265992921	0.460092958	0.372534313	0.443218934	Port max Sharpe
ago-2011 ago-2016	0.224736346	0.341762483	0.315689744	0.379524773	Port min CVaR
lug-2011 lug-2016	0.1258183	0.286600311	0.205561677	0.257237172	Port max Sharpe
giu-2011 giu-2016	0.056154867	0.182457075	0.140068387	0.193784674	Port min CVaR
mag-2011 mag-2016	0.090949523	0.157044881	0.145841338	0.188865254	Port min CVaR
apr-2011 apr-2016	0.06161477	0.109795231	0.110055609	0.148164148	Port min CVaR
mar-2011 mar-2016	0.069975674	0.114467284	0.106068794	0.143662589	Port min CVaR
feb-2011 feb-2016	0.039496066	0.112227777	0.079187618	0.121562346	Port min CVaR
gen-2011 gen-2016	0.070031031	0.110531187	0.099861884	0.136685139	Port min CVaR
dic-2010 dic-2015	0.144883522	0.144619712	0.133631461	0.167460343	Port min CVaR
nov-2010 nov-2015	0.214097216	0.210279912	0.219285926	0.262706268	Port min CVaR
ott-2010 ott-2015	0.148843011	0.172548273	0.179161408	0.225612144	Port min CVaR
set-2010 set-2015	0.110223711	0.115870367	0.124057454	0.162363567	Port min CVaR
ago-2010 ago-2015	0.171504449	0.19683752	0.199055475	0.245862128	Port min CVaR
lug-2010 lug-2015	0.208751813	0.256489303	0.262845368	0.319077337	Port min CVaR
giu-2010 giu-2015	0.21396336	0.269227017	0.261773215	0.31803687	Port min CVaR
mag-2010 mag-2015	0.239669777	0.29017318	0.289104443	0.345807341	Port min CVaR

Tavola 2C- analisi rolling applicata all'indice di Treynor

Rolling Treynor		Port. equponderato	Port. max Sharpe	Port min Varianza	Port. min CVaR	Port. con valore maggiore
mag-2015	mag-2020	-0.001477932	0.002551177	0.000883766	0.001797896	Port max Sharpe
apr-2015	apr-2020	-0.001282407	0.002917955	0.00094561	0.001888226	Port max Sharpe
mar-2015	mar-2020	-0.002914838	0.000186207	-0.000499807	0.00031389	Port min CVaR
feb-2015	feb-2020	0.00041168	0.003668975	0.002059337	0.002688228	Port max Sharpe
gen-2015	gen-2020	0.00295714	0.006000171	0.004835213	0.005343709	Port max Sharpe
dic-2014	dic-2019	0.004246645	0.007179648	0.006256133	0.006808419	Port max Sharpe
nov-2014	nov-2019	0.003657524	0.006095087	0.005680235	0.006355562	Port min CVaR
ott-2014	ott-2019	0.003772445	0.006859125	0.005791216	0.00651883	Port max Sharpe
set-2014	set-2019	0.002956349	0.006551283	0.005164655	0.006142696	Port max Sharpe
ago-2014	ago-2019	0.002449762	0.005639396	0.004596514	0.005633572	Port max Sharpe
lug-2014	lug-2019	0.003021093	0.005999557	0.005276456	0.006343344	Port min CVaR
giu-2014	giu-2019	0.002566008	0.006283796	0.004652278	0.005879754	Port max Sharpe
mag-2014	mag-2019	0.001717823	0.0052344	0.003956671	0.005255843	Port min CVaR
apr-2014	apr-2019	0.003108446	0.007097575	0.005184274	0.006630321	Port max Sharpe
mar-2014	mar-2019	0.002438526	0.006977246	0.004449054	0.005953001	Port max Sharpe
feb-2014	feb-2019	0.002436664	0.006586336	0.004337676	0.00577996	Port max Sharpe
gen-2014	gen-2019	0.002842531	0.007323972	0.004640437	0.005920155	Port max Sharpe
dic-2013	dic-2018	0.001539255	0.005005775	0.002833111	0.003913485	Port max Sharpe
nov-2013	nov-2018	0.00262372	0.005328785	0.003762166	0.004876187	Port max Sharpe
ott-2013	ott-2018	0.002898789	0.00651339	0.004320182	0.005335429	Port max Sharpe
set-2013	set-2018	0.004716359	0.00906357	0.006164271	0.007230187	Port max Sharpe
ago-2013	ago-2018	0.005576461	0.010573712	0.007164075	0.008292117	Port max Sharpe
lug-2013	lug-2018	0.006191274	0.010381433	0.007357153	0.008370644	Port max Sharpe
giu-2013	giu-2018	0.006553743	0.010872611	0.007819965	0.008838039	Port max Sharpe
mag-2013	mag-2018	0.005673561	0.010126864	0.007009944	0.008053338	Port max Sharpe
apr-2013	apr-2018	0.006133717	0.010017341	0.007271394	0.008457223	Port max Sharpe
mar-2013	mar-2018	0.005976773	0.009304451	0.006757025	0.007775805	Port max Sharpe
feb-2013	feb-2018	0.006398401	0.009643576	0.007178739	0.008273875	Port max Sharpe
gen-2013	gen-2018	0.006729194	0.009297056	0.007328292	0.008386441	Port max Sharpe
dic-2012	dic-2017	0.006654324	0.009390237	0.007521804	0.008496521	Port max Sharpe
nov-2012	nov-2017	0.007146282	0.009835745	0.007830014	0.008704688	Port max Sharpe
ott-2012	ott-2017	0.007694371	0.011011876	0.00856246	0.009558327	Port max Sharpe
set-2012	set-2017	0.007555178	0.010897567	0.008472423	0.009429538	Port max Sharpe
ago-2012	ago-2017	0.00719844	0.010720802	0.007826527	0.008684304	Port max Sharpe
lug-2012	lug-2017	0.007867224	0.01102627	0.008310058	0.009103796	Port max Sharpe
giu-2012	giu-2017	0.008185328	0.01201996	0.008737542	0.009580784	Port max Sharpe
mag-2012	mag-2017	0.009406042	0.01275132	0.009967816	0.010849791	Port max Sharpe
apr-2012	apr-2017	0.007637052	0.00990303	0.008261974	0.009359751	Port max Sharpe
mar-2012	mar-2017	0.006429409	0.008374143	0.007134728	0.008183306	Port max Sharpe
feb-2012	feb-2017	0.005536369	0.007781523	0.006417317	0.007507393	Port max Sharpe
gen-2012	gen-2017	0.005646615	0.008337059	0.006434017	0.007500098	Port max Sharpe
dic-2011	dic-2016	0.006419736	0.009610371	0.007203859	0.008331497	Port max Sharpe
nov-2011	nov-2016	0.005378377	0.008398849	0.006656976	0.007804798	Port max Sharpe
ott-2011	ott-2016	0.004937317	0.00799335	0.006090605	0.007205532	Port max Sharpe
set-2011	set-2016	0.00576281	0.00947674	0.007419128	0.008669067	Port max Sharpe
ago-2011	ago-2016	0.004968534	0.007419549	0.006473926	0.007646362	Port min CVaR
lug-2011	lug-2016	0.003124434	0.006828908	0.004800354	0.005936559	Port max Sharpe
giu-2011	giu-2016	0.001411508	0.00453374	0.003296648	0.004498787	Port max Sharpe
mag-2011	mag-2016	0.002228013	0.003841385	0.003387106	0.004328941	Port min CVaR
apr-2011	apr-2016	0.001503981	0.002689086	0.002549785	0.003392588	Port min CVaR
mar-2011	mar-2016	0.001709844	0.002828732	0.002476352	0.003316339	Port min CVaR
feb-2011	feb-2016	0.000972929	0.002837489	0.00187045	0.002845476	Port min CVaR
gen-2011	gen-2016	0.001728545	0.002825036	0.002365189	0.00320692	Port min CVaR
dic-2010	dic-2015	0.003436388	0.003596815	0.003069442	0.003808585	Port min CVaR
nov-2010	nov-2015	0.004989954	0.005100409	0.004892569	0.005780487	Port min CVaR
ott-2010	ott-2015	0.003526177	0.004208644	0.003988514	0.0049505	Port min CVaR
set-2010	set-2015	0.002619834	0.002876148	0.002792897	0.003614736	Port min CVaR
ago-2010	ago-2015	0.004022307	0.004768423	0.00439028	0.005343561	Port min CVaR
lug-2010	lug-2015	0.004533805	0.005783914	0.005229001	0.006207513	Port min CVaR
giu-2010	giu-2015	0.004647614	0.006040707	0.005234304	0.006218285	Port min CVaR
mag-2010	mag-2015	0.005099054	0.006401618	0.00564407	0.006597493	Port min CVaR

Tavola 2D- analisi rolling applicata all'information ratio

Rolling Information		Port. equiponderato	Port. max Sharpe	Port min Varianza	Port. min CVaR	Port. con valore maggiore
mag-2015	mag-2020	0.035424658	0.20031	0.283082689	0.345799793	Port min CVaR
apr-2015	apr-2020	0.040816035	0.21080744	0.272352575	0.339362155	Port min CVaR
mar-2015	mar-2020	-0.014532885	0.141978833	0.249184497	0.303295075	Port min CVaR
feb-2015	feb-2020	0.060341814	0.155588427	0.226903767	0.272747464	Port min CVaR
gen-2015	gen-2020	0.059997772	0.129944499	0.232905508	0.267563181	Port min CVaR
dic-2014	dic-2019	0.045890662	0.122390469	0.224974415	0.264125976	Port min CVaR
nov-2014	nov-2019	0.04620167	0.10456736	0.230007048	0.27892595	Port min CVaR
ott-2014	ott-2019	0.052471589	0.141727257	0.236317732	0.290210826	Port min CVaR
set-2014	set-2019	0.020636414	0.150292082	0.22432899	0.306373838	Port min CVaR
ago-2014	ago-2019	0.02640445	0.137171004	0.226824409	0.31257783	Port min CVaR
lug-2014	lug-2019	0.027734636	0.12416147	0.236095351	0.324685492	Port min CVaR
giu-2014	giu-2019	0.018241093	0.152079167	0.209573113	0.316745603	Port min CVaR
mag-2014	mag-2019	0.019448482	0.148819398	0.233142856	0.34358144	Port min CVaR
apr-2014	apr-2019	0.030477253	0.16515548	0.220212198	0.345711303	Port min CVaR
mar-2014	mar-2019	0.002515589	0.186042243	0.180190545	0.310105974	Port min CVaR
feb-2014	feb-2019	0.047913105	0.198716511	0.218645792	0.345290804	Port min CVaR
gen-2014	gen-2019	0.075986096	0.233495997	0.238411816	0.346154385	Port min CVaR
dic-2013	dic-2018	0.127026921	0.217262295	0.258565057	0.348248769	Port min CVaR
nov-2013	nov-2018	0.103337754	0.182023987	0.226078146	0.322411924	Port min CVaR
ott-2013	ott-2018	0.0998523	0.22851091	0.25067455	0.33616203	Port min CVaR
set-2013	set-2018	0.129319554	0.267969989	0.277131525	0.363815767	Port min CVaR
ago-2013	ago-2018	0.151327909	0.306797561	0.322105331	0.41703302	Port min CVaR
lug-2013	lug-2018	0.184312846	0.300654055	0.317326176	0.403049287	Port min CVaR
giu-2013	giu-2018	0.189440653	0.31170876	0.338510236	0.422695914	Port min CVaR
mag-2013	mag-2018	0.178171624	0.315839282	0.334923784	0.422805329	Port min CVaR
apr-2013	apr-2018	0.194501958	0.296426402	0.33071797	0.429751057	Port min CVaR
mar-2013	mar-2018	0.223104075	0.283934526	0.328110942	0.40511382	Port min CVaR
feb-2013	feb-2018	0.206217366	0.261630886	0.309902462	0.395886159	Port min CVaR
gen-2013	gen-2018	0.156010782	0.239062708	0.217338659	0.300245007	Port min CVaR
dic-2012	dic-2017	0.135123795	0.235807448	0.220890353	0.296117642	Port min CVaR
nov-2012	nov-2017	0.170655602	0.255417818	0.238981951	0.305000884	Port min CVaR
ott-2012	ott-2017	0.156469496	0.282504056	0.241689464	0.319606282	Port min CVaR
set-2012	set-2017	0.162017013	0.289232141	0.25128683	0.325266241	Port min CVaR
ago-2012	ago-2017	0.175491079	0.316625464	0.235955944	0.297437753	Port max Sharpe
lug-2012	lug-2017	0.194437495	0.31000418	0.236081342	0.2878457	Port max Sharpe
giu-2012	giu-2017	0.152123157	0.32506977	0.216212963	0.278646575	Port max Sharpe
mag-2012	mag-2017	0.160004315	0.277988265	0.213378826	0.278579916	Port min CVaR
apr-2012	apr-2017	0.119919529	0.20558621	0.178304545	0.265613782	Port min CVaR
mar-2012	mar-2017	0.069515941	0.157060818	0.128942012	0.212395111	Port min CVaR
feb-2012	feb-2017	0.036157053	0.156056342	0.112055628	0.201530389	Port min CVaR
gen-2012	gen-2017	0.0312958	0.181458017	0.095864055	0.182383674	Port min CVaR
dic-2011	dic-2016	0.042031018	0.221075907	0.102705372	0.197498783	Port max Sharpe
nov-2011	nov-2016	-0.004518257	0.174684254	0.10794289	0.204590862	Port min CVaR
ott-2011	ott-2016	-0.007162459	0.172651208	0.092687999	0.187132809	Port min CVaR
set-2011	set-2016	-0.062164852	0.184516846	0.089429347	0.200673547	Port min CVaR
ago-2011	ago-2016	-0.065340234	0.122751859	0.074439158	0.18013673	Port min CVaR
lug-2011	lug-2016	-0.073123524	0.153909075	0.081614432	0.18338609	Port min CVaR
giu-2011	giu-2016	-0.125433898	0.089240169	0.041250807	0.149624848	Port min CVaR
mag-2011	mag-2016	-0.085364545	0.049296655	0.022721722	0.115435701	Port min CVaR
apr-2011	apr-2016	-0.103102751	0.014185026	-0.01163884	0.069837765	Port min CVaR
mar-2011	mar-2016	-0.105892726	0.009942985	-0.040152125	0.036497308	Port min CVaR
feb-2011	feb-2016	-0.097957132	0.040738569	-0.022749229	0.058617279	Port min CVaR
gen-2011	gen-2016	-0.09725879	0.008548918	-0.043426366	0.029403714	Port min CVaR
dic-2010	dic-2015	-0.061851603	-0.005557132	-0.092924074	-0.016670118	Port max Sharpe
nov-2010	nov-2015	-0.068234869	0.001171591	-0.063210722	0.023554085	Port min CVaR
ott-2010	ott-2015	-0.115127633	-0.012266945	-0.079830141	0.01162964	Port min CVaR
set-2010	set-2015	-0.113741634	-0.037759648	-0.110838901	-0.030905779	Port min CVaR
ago-2010	ago-2015	-0.096061257	0.003530812	-0.066741515	0.020427398	Port min CVaR
lug-2010	lug-2015	-0.132658684	0.007725839	-0.08444923	0.004326079	Port max Sharpe
giu-2010	giu-2015	-0.1341763	0.015183068	-0.098025705	-0.007708482	Port max Sharpe
mag-2010	mag-2015	-0.143478884	0.010848344	-0.11115285	-0.020863185	Port max Sharpe

Tavola 2E- analisi rolling applicata all'indicatore Alfa di Jensen

Rolling Alfa di Jensen	Port. equponderato	Port. max Sharpe	Port min Varianza	Port. min CVaR	Port. con valore maggiore
mag-2015 mag-2020	0.000462257	0.004158444	0.002603252	0.003446911	Port max Sharpe
apr-2015 apr-2020	0.000508103	0.004357897	0.002518492	0.003389857	Port max Sharpe
mar-2015 mar-2020	-3.15613E-05	0.002773104	0.002197426	0.002941277	Port min CVaR
feb-2015 feb-2020	0.000620094	0.00330002	0.002123038	0.002723872	Port max Sharpe
gen-2015 gen-2020	0.000616265	0.003120386	0.002341618	0.002822842	Port max Sharpe
dic-2014 dic-2019	0.000512696	0.00303694	0.002366959	0.002886394	Port max Sharpe
nov-2014 nov-2019	0.000504727	0.002586719	0.002373037	0.00300436	Port min CVaR
ott-2014 ott-2019	0.000566054	0.003256229	0.002429557	0.003114555	Port max Sharpe
set-2014 set-2019	0.000227679	0.003395397	0.002296132	0.00321393	Port max Sharpe
ago-2014 ago-2019	0.000288917	0.00307005	0.002292515	0.003262004	Port min CVaR
lug-2014 lug-2019	0.000311672	0.002892239	0.002408766	0.003403476	Port min CVaR
giu-2014 giu-2019	0.000205534	0.003432935	0.002157164	0.00329684	Port max Sharpe
mag-2014 mag-2019	0.000208883	0.003261155	0.002311529	0.003515047	Port min CVaR
apr-2014 apr-2019	0.000354279	0.003785605	0.002285602	0.003623959	Port max Sharpe
mar-2014 mar-2019	6.88594E-05	0.004062434	0.001948223	0.003343043	Port max Sharpe
feb-2014 feb-2019	0.000544238	0.004191449	0.002300055	0.003639701	Port max Sharpe
gen-2014 gen-2019	0.000828627	0.004864593	0.00248403	0.003654896	Port max Sharpe
dic-2013 dic-2018	0.001329965	0.004441956	0.002518612	0.003543141	Port max Sharpe
nov-2013 nov-2018	0.000997531	0.00358723	0.002085482	0.003163682	Port max Sharpe
ott-2013 ott-2018	0.000954888	0.004409101	0.002325662	0.00330369	Port max Sharpe
set-2013 set-2018	0.001215202	0.00517736	0.002589305	0.003597062	Port max Sharpe
ago-2013 ago-2018	0.001405621	0.006187707	0.002901942	0.003976071	Port max Sharpe
lug-2013 lug-2018	0.001769974	0.005844302	0.002849785	0.003820702	Port max Sharpe
giu-2013 giu-2018	0.001811248	0.006012106	0.003008014	0.00399721	Port max Sharpe
mag-2013 mag-2018	0.001700998	0.006054293	0.002964568	0.003981391	Port max Sharpe
apr-2013 apr-2018	0.001845467	0.005643616	0.002915518	0.004078736	Port max Sharpe
mar-2013 mar-2018	0.002196466	0.005435271	0.002891598	0.00388128	Port max Sharpe
feb-2013 feb-2018	0.002017192	0.005138903	0.002724618	0.003790981	Port max Sharpe
gen-2013 gen-2018	0.001522112	0.004158407	0.002070822	0.003109396	Port max Sharpe
dic-2012 dic-2017	0.001269348	0.00408424	0.002103418	0.003054369	Port max Sharpe
nov-2012 nov-2017	0.001660155	0.004429557	0.002299373	0.003147627	Port max Sharpe
ott-2012 ott-2017	0.001515688	0.004936018	0.002340675	0.003306207	Port max Sharpe
set-2012 set-2017	0.001583823	0.005039478	0.002454719	0.003379642	Port max Sharpe
ago-2012 ago-2017	0.001743656	0.005439872	0.002319975	0.003151469	Port max Sharpe
lug-2012 lug-2017	0.00195632	0.005278481	0.00232929	0.003090508	Port max Sharpe
giu-2012 giu-2017	0.001515042	0.005512408	0.002033306	0.002863843	Port max Sharpe
mag-2012 mag-2017	0.001513206	0.00490763	0.002024093	0.002889803	Port max Sharpe
apr-2012 apr-2017	0.001016622	0.003497332	0.001616155	0.002701371	Port max Sharpe
mar-2012 mar-2017	0.000443967	0.002585956	0.001153961	0.002208016	Port max Sharpe
feb-2012 feb-2017	0.000103388	0.002582589	0.001003669	0.002102772	Port max Sharpe
gen-2012 gen-2017	5.18677E-05	0.003059594	0.000854636	0.001924241	Port max Sharpe
dic-2011 dic-2016	0.000170105	0.003784978	0.000957742	0.002085956	Port max Sharpe
nov-2011 nov-2016	-0.000288126	0.003090861	0.001015095	0.002164513	Port max Sharpe
ott-2011 ott-2016	-0.000322932	0.003096194	0.0008583	0.001977838	Port max Sharpe
set-2011 set-2016	-0.000956682	0.003155648	0.000749219	0.002035241	Port max Sharpe
ago-2011 ago-2016	-0.000962978	0.00176625	0.000590729	0.001803894	Port min CVaR
lug-2011 lug-2016	-0.000935729	0.003065475	0.000772325	0.001940695	Port max Sharpe
giu-2011 giu-2016	-0.001558701	0.001785712	0.000372407	0.001614099	Port max Sharpe
mag-2011 mag-2016	-0.001027424	0.000683874	0.000145675	0.001132767	Port min CVaR
apr-2011 apr-2016	-0.001268311	-7.5631E-05	-0.000211423	0.000668594	Port min CVaR
mar-2011 mar-2016	-0.001302727	-0.000191241	-0.000531225	0.000332824	Port min CVaR
feb-2011 feb-2016	-0.001185341	0.000761221	-0.000288262	0.000704633	Port max Sharpe
gen-2011 gen-2016	-0.001175714	-8.66545E-05	-0.000542531	0.000310649	Port min CVaR
dic-2010 dic-2015	-0.000784386	-0.00070404	-0.001191124	-0.000432021	Port min CVaR
nov-2010 nov-2015	-0.000921039	-0.000929017	-0.001063568	-0.000127584	Port min CVaR
ott-2010 ott-2015	-0.001681223	-0.001107245	-0.001251781	-0.000233998	Port min CVaR
set-2010 set-2015	-0.001626844	-0.001516808	-0.001491056	-0.000634387	Port min CVaR
ago-2010 ago-2015	-0.001423962	-0.000748128	-0.00108004	-7.69872E-05	Port min CVaR
lug-2010 lug-2015	-0.002130488	-0.000917913	-0.001420929	-0.000384634	Port min CVaR
giu-2010 giu-2015	-0.00215561	-0.000782833	-0.001553884	-0.000517904	Port min CVaR
mag-2010 mag-2015	-0.002368219	-0.001121923	-0.001809012	-0.000798441	Port min CVaR

Tavola 2F- analisi rolling applicata al VaR Sharpe

Rolling VaR Sharpe		Port. equiponderato	Port. max Sharpe	Port min Varianza	Port. min CVaR	Port. con valore maggiore
mag-2015	mag-2020	-0.021809624	0.036600839	0.01279809	0.025738888	Port max Sharpe
apr-2015	apr-2020	-0.018909297	0.041853914	0.013684749	0.027028262	Port max Sharpe
mar-2015	mar-2020	-0.042942256	0.002593554	-0.007181453	0.004456514	Port min CVaR
feb-2015	feb-2020	0.005979805	0.053831349	0.033858372	0.045228044	Port max Sharpe
gen-2015	gen-2020	0.043949703	0.108821873	0.088385653	0.095467017	Port max Sharpe
dic-2014	dic-2019	0.0624763	0.134381702	0.11408153	0.121266201	Port max Sharpe
nov-2014	nov-2019	0.053904962	0.113804456	0.103670717	0.113148895	Port max Sharpe
ott-2014	ott-2019	0.05566142	0.129901658	0.105821265	0.1163391	Port max Sharpe
set-2014	set-2019	0.043684834	0.123715988	0.094733058	0.109846735	Port max Sharpe
ago-2014	ago-2019	0.036136722	0.105786955	0.08416146	0.100497549	Port max Sharpe
lug-2014	lug-2019	0.04447667	0.11206613	0.096290291	0.112808326	Port min CVaR
giu-2014	giu-2019	0.037871797	0.116894004	0.085206269	0.104628623	Port max Sharpe
mag-2014	mag-2019	0.025415227	0.097424039	0.072722487	0.093673156	Port max Sharpe
apr-2014	apr-2019	0.046491382	0.141016911	0.099324212	0.122564438	Port max Sharpe
mar-2014	mar-2019	0.036332911	0.140361423	0.085038419	0.109915681	Port max Sharpe
feb-2014	feb-2019	0.036252859	0.133919953	0.082921565	0.106840153	Port max Sharpe
gen-2014	gen-2019	0.042728767	0.152906676	0.089321489	0.109447476	Port max Sharpe
dic-2013	dic-2018	0.023591383	0.106095887	0.055796532	0.07437785	Port max Sharpe
nov-2013	nov-2018	0.041188563	0.118900636	0.085521196	0.096459567	Port max Sharpe
ott-2013	ott-2018	0.045453897	0.144412361	0.09817859	0.10549144	Port max Sharpe
set-2013	set-2018	0.103772823	0.205883688	0.147289002	0.1753489	Port max Sharpe
ago-2013	ago-2018	0.123018376	0.249526208	0.170957625	0.201396451	Port max Sharpe
lug-2013	lug-2018	0.135777695	0.248736367	0.175876061	0.203996971	Port max Sharpe
giu-2013	giu-2018	0.143722171	0.260541539	0.188169111	0.217259442	Port max Sharpe
mag-2013	mag-2018	0.095954031	0.22929957	0.159528386	0.160082506	Port max Sharpe
apr-2013	apr-2018	0.103445947	0.227244893	0.165716455	0.168506354	Port max Sharpe
mar-2013	mar-2018	0.101125922	0.211536439	0.153941822	0.154565542	Port max Sharpe
feb-2013	feb-2018	0.108209308	0.217468035	0.163834055	0.164680848	Port max Sharpe
gen-2013	gen-2018	0.114045647	0.218376985	0.167878721	0.167590075	Port max Sharpe
dic-2012	dic-2017	0.11252377	0.220658722	0.172805762	0.169869828	Port max Sharpe
nov-2012	nov-2017	0.121087746	0.231457825	0.180164053	0.174137437	Port max Sharpe
ott-2012	ott-2017	0.129995635	0.259063113	0.196369123	0.190608319	Port max Sharpe
set-2012	set-2017	0.127650462	0.256869702	0.19420632	0.187908878	Port max Sharpe
ago-2012	ago-2017	0.121823549	0.255388165	0.179563956	0.17337676	Port max Sharpe
lug-2012	lug-2017	0.13371412	0.263224964	0.190381446	0.181166215	Port max Sharpe
giu-2012	giu-2017	0.138186696	0.284994275	0.201200062	0.192509709	Port max Sharpe
mag-2012	mag-2017	0.160024208	0.297317443	0.228886796	0.217314663	Port max Sharpe
apr-2012	apr-2017	0.119472744	0.229072421	0.171640763	0.187135957	Port max Sharpe
mar-2012	mar-2017	0.101566386	0.171150769	0.149837091	0.16550829	Port max Sharpe
feb-2012	feb-2017	0.086925957	0.16010038	0.134407173	0.151730742	Port max Sharpe
gen-2012	gen-2017	0.088447695	0.173782614	0.134238419	0.150822528	Port max Sharpe
dic-2011	dic-2016	0.100038322	0.202507403	0.148936955	0.166639665	Port max Sharpe
nov-2011	nov-2016	0.083068343	0.176584831	0.137728958	0.15624854	Port max Sharpe
ott-2011	ott-2016	0.076537095	0.168148297	0.126433331	0.144625943	Port max Sharpe
set-2011	set-2016	0.088426422	0.200105549	0.155135527	0.177030621	Port max Sharpe
ago-2011	ago-2016	0.076196989	0.152572766	0.130895763	0.156103159	Port min CVaR
lug-2011	lug-2016	0.045001235	0.106806262	0.087406191	0.110354895	Port min CVaR
giu-2011	giu-2016	0.020396621	0.058305379	0.060334302	0.084183968	Port min CVaR
mag-2011	mag-2016	0.033252619	0.050852276	0.06242801	0.082209079	Port min CVaR
apr-2011	apr-2016	0.022539308	0.035694996	0.047120798	0.064601471	Port min CVaR
mar-2011	mar-2016	0.025597812	0.037318054	0.045371744	0.062577582	Port min CVaR
feb-2011	feb-2016	0.014401339	0.036587941	0.033780493	0.052860165	Port min CVaR
gen-2011	gen-2016	0.02556643	0.03603761	0.042727274	0.059618872	Port min CVaR
dic-2010	dic-2015	0.056168013	0.047016215	0.057040571	0.072978848	Port min CVaR
nov-2010	nov-2015	0.08231217	0.068402028	0.09261214	0.112559818	Port min CVaR
ott-2010	ott-2015	0.05880383	0.056008133	0.075832637	0.09655526	Port min CVaR
set-2010	set-2015	0.043546393	0.037610825	0.052509098	0.069486758	Port min CVaR
ago-2010	ago-2015	0.066947715	0.063551853	0.082849216	0.103224161	Port min CVaR
lug-2010	lug-2015	0.080743142	0.096348522	0.109060096	0.131257013	Port min CVaR
giu-2010	giu-2015	0.082758917	0.101133361	0.108615237	0.130829002	Port min CVaR
mag-2010	mag-2015	0.091506107	0.108556027	0.118113976	0.140003076	Port min CVaR

Tavola 2G- analisi rolling applicata all'indicatore Conditional Sharpe

Rolling	Conditional Sharpe	Port. equiponderato	Port. max Sharpe	Port min Varianza	Port. min CVaR	Port. con valore maggiore
mag-2015	mag-2020	-0.01364271	0.021337376	0.008261052	0.016928239	Port max Sharpe
apr-2015	apr-2020	-0.011828451	0.024399788	0.008833382	0.017776248	Port max Sharpe
mar-2015	mar-2020	-0.026861938	0.001511977	-0.004635563	0.00293101	Port min CVaR
feb-2015	feb-2020	0.005389594	0.039428348	0.024650268	0.031916539	Port max Sharpe
gen-2015	gen-2020	0.041389389	0.06633451	0.065083456	0.070737692	Port min CVaR
dic-2014	dic-2019	0.058836708	0.081915006	0.084004813	0.089853977	Port min CVaR
nov-2014	nov-2019	0.050764698	0.069371741	0.07633873	0.08383934	Port min CVaR
ott-2014	ott-2019	0.052418833	0.079184108	0.077922303	0.086203169	Port min CVaR
set-2014	set-2019	0.041139949	0.075413511	0.069757416	0.081392556	Port min CVaR
ago-2014	ago-2019	0.034031558	0.064484516	0.061972939	0.074465139	Port min CVaR
lug-2014	lug-2019	0.041885657	0.068312111	0.070904097	0.08358699	Port min CVaR
giu-2014	giu-2019	0.035665554	0.071255036	0.062742292	0.077526119	Port min CVaR
mag-2014	mag-2019	0.023934649	0.059386737	0.053549763	0.069408504	Port min CVaR
apr-2014	apr-2019	0.043102805	0.084176239	0.071623178	0.088384577	Port min CVaR
mar-2014	mar-2019	0.033684746	0.083784962	0.061321622	0.079263212	Port max Sharpe
feb-2014	feb-2019	0.033610528	0.079939901	0.059795149	0.077045365	Port max Sharpe
gen-2014	gen-2019	0.039614432	0.091273513	0.064410165	0.078925576	Port max Sharpe
dic-2013	dic-2018	0.021871898	0.063331076	0.040235154	0.053635907	Port max Sharpe
nov-2013	nov-2018	0.038186487	0.070974525	0.055531104	0.06915294	Port max Sharpe
ott-2013	ott-2018	0.042140937	0.086203061	0.063749874	0.07562799	Port max Sharpe
set-2013	set-2018	0.068222033	0.143994665	0.100189143	0.108959754	Port max Sharpe
ago-2013	ago-2018	0.080874389	0.174518162	0.116289049	0.125145397	Port max Sharpe
lug-2013	lug-2018	0.089262584	0.173965749	0.119634674	0.12676133	Port max Sharpe
giu-2013	giu-2018	0.094485419	0.182222263	0.127996671	0.135002474	Port max Sharpe
mag-2013	mag-2018	0.082320317	0.161480561	0.110440795	0.122835548	Port max Sharpe
apr-2013	apr-2018	0.088747737	0.160033587	0.114724767	0.12929939	Port max Sharpe
mar-2013	mar-2018	0.086757355	0.14897116	0.106573242	0.118602235	Port max Sharpe
feb-2013	feb-2018	0.092834292	0.153148391	0.11342159	0.126363978	Port max Sharpe
gen-2013	gen-2018	0.097841369	0.153788505	0.116221695	0.128596304	Port max Sharpe
dic-2012	dic-2017	0.096535729	0.155395382	0.119632663	0.130345619	Port max Sharpe
nov-2012	nov-2017	0.103882885	0.163000478	0.124726776	0.133620269	Port max Sharpe
ott-2012	ott-2017	0.111525088	0.182441061	0.135945474	0.146258813	Port max Sharpe
set-2012	set-2017	0.109513132	0.180896386	0.134448175	0.14418746	Port max Sharpe
ago-2012	ago-2017	0.104514141	0.179853038	0.124311332	0.133036581	Port max Sharpe
lug-2012	lug-2017	0.114715229	0.185371978	0.131800231	0.139013636	Port max Sharpe
giu-2012	giu-2017	0.118552315	0.200702668	0.139289911	0.147717799	Port max Sharpe
mag-2012	mag-2017	0.137287025	0.209381062	0.158457315	0.166751298	Port max Sharpe
apr-2012	apr-2017	0.104609129	0.123433813	0.11435013	0.12950174	Port min CVaR
mar-2012	mar-2017	0.088930503	0.104979322	0.099824136	0.114534971	Port min CVaR
feb-2012	feb-2017	0.076111491	0.098201307	0.08954445	0.105000639	Port min CVaR
gen-2012	gen-2017	0.077443909	0.106593625	0.089432023	0.104372137	Port max Sharpe
dic-2011	dic-2016	0.087592546	0.124212646	0.099224449	0.115317905	Port max Sharpe
nov-2011	nov-2016	0.072733803	0.10831243	0.091757483	0.108127043	Port max Sharpe
ott-2011	ott-2016	0.067015108	0.103137685	0.084232135	0.100083979	Port max Sharpe
set-2011	set-2016	0.077425283	0.122739412	0.103354048	0.12250865	Port max Sharpe
ago-2011	ago-2016	0.066717315	0.087466298	0.089074577	0.106870516	Port min CVaR
lug-2011	lug-2016	0.036866392	0.076145795	0.054841694	0.068375278	Port max Sharpe
giu-2011	giu-2016	0.016709538	0.051255799	0.037855846	0.052159918	Port min CVaR
mag-2011	mag-2016	0.025980867	0.044703836	0.039169512	0.050936287	Port min CVaR
apr-2011	apr-2016	0.017610366	0.03137919	0.029565233	0.040026711	Port min CVaR
mar-2011	mar-2016	0.020000029	0.032806007	0.028467815	0.038772721	Port min CVaR
feb-2011	feb-2016	0.011252024	0.032164171	0.02119506	0.032751864	Port min CVaR
gen-2011	gen-2016	0.01997551	0.031680379	0.026808583	0.036939521	Port min CVaR
dic-2010	dic-2015	0.039817429	0.041331584	0.035789245	0.045217287	Port min CVaR
nov-2010	nov-2015	0.058350987	0.060131684	0.058108088	0.069741436	Port min CVaR
ott-2010	ott-2015	0.041685956	0.049236308	0.047580042	0.059825101	Port min CVaR
set-2010	set-2015	0.03086998	0.03306338	0.03294604	0.043053608	Port min CVaR
ago-2010	ago-2015	0.047459145	0.055867934	0.051982489	0.063957115	Port min CVaR
lug-2010	lug-2015	0.058109897	0.068674229	0.071820929	0.087580163	Port min CVaR
giu-2010	giu-2015	0.059560627	0.072084713	0.071527969	0.087294577	Port min CVaR
mag-2010	mag-2015	0.065855877	0.077375358	0.077783312	0.093415902	Port min CVaR