

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INDUSTRIALE

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA AEROSPAZIALE

---

ANALISI DI STABILITÀ DI UNA BICICLETTA  
CON APPROCCIO 2-LEVEL FACTORIAL DOE

---

*Relatore: Prof. Alberto Doria*

*Laureando: Matteo Vinco  
Matr. 1056303*

Anno Accademico 2015 / 2016



# *Abstract*

---

Negli ultimi anni c'è stato un forte incremento nella progettazione e nell'utilizzo di biciclette dalle forme particolari e innovative, per la praticità di certe nuove configurazioni e per questioni di moda. Questa tendenza dimostra che il mercato delle biciclette è in evoluzione e per questo è opportuno studiarle approfonditamente, al fine di ottenere sistemi sempre più performanti e sicuri.

Nel seguente elaborato viene presentata l'analisi della stabilità di una bicicletta: con ciò si intende lo studio dell'evoluzione delle equazioni che descrivono il moto del sistema non controllato. L'obiettivo è quello di comprendere quali parametri caratteristici della bicicletta influenzano maggiormente la sua stabilità e quali invece non la condizionano affatto: in questo modo la progettazione sarà più precisa, in quanto si potrà conoscere la ricaduta di ogni scelta sulla stabilità del sistema non controllato e si potranno realizzare mezzi più sicuri. Per arrivare a tali conclusioni è necessario apprendere il modello della bicicletta e ottenere le equazioni che ne governano il moto. Grazie a queste equazioni differenziali è possibile implementare delle simulazioni in Matlab, variando i valori dei parametri, in modo da riprodurre il comportamento di numerose biciclette. Tramite il metodo degli autovalori complessi si ottengono dei risultati numerici per ogni diversa configurazione. Tali risultati sono studiati con l'analisi di correlazione di Pearson, che permette di evidenziare un'eventuale relazione tra i risultati trovati e il parametro considerato. Un'opportuna interpretazione di tali parametri permette di capire come ogni grandezza influenzi la stabilità della bicicletta.



## Sommario

<b>Introduzione</b> .....	7
<b>1 – Metodi per lo studio della stabilità</b> .....	9
1.1 – Criterio di Cartesio .....	12
1.2 – Criterio di Routh .....	13
1.3 – Criterio di Nyquist .....	16
1.4 – Metodo degli autovalori complessi .....	21
<b>2 – Modello della bicicletta</b> .....	25
2.1 – Rappresentazione della bicicletta .....	25
2.2 – Gradi di libertà .....	28
2.3 – Equazioni linearizzate del moto .....	29
2.4 – Considerazioni sui risultati .....	31
2.5 – Rigidezza flessionale della forcella anteriore .....	32
2.6 – Adattamento del modello allo studio parametrico .....	36
<b>3 – Metodo per discriminare l’influenza dei parametri</b> .....	39
3.1 – Approccio 2-level factorial DOE .....	39
3.2 – Analisi di correlazione di Pearson .....	41
<b>4 – Simulazioni</b> .....	47
4.1 – Primo ciclo di simulazioni .....	48
4.2 – Secondo ciclo di simulazioni .....	52
4.3 – Terzo ciclo di simulazioni .....	55
4.4 – Quarto ciclo di simulazioni .....	58
4.5 – Simulazioni sui singoli parametri .....	63
4.5.1 – Ruota posteriore .....	63
4.5.2 – Ruota anteriore .....	64
4.5.3 – Massa dell’avantreno .....	65
4.5.4 – Posizione orizzontale del centro di massa .....	66
4.5.5 – Posizione verticale del centro di massa .....	67
4.5.6 – Passo .....	68
4.5.7 – Avancorsa .....	69
4.5.8 – Inclinazione dello sterzo .....	70
4.5.9 – Rigidezza della forcella anteriore .....	71
<b>5 – Confronto con il modello di un’ala</b> .....	73
5.1 – Flutter .....	73

<i>5.2 – Modello dell'ala di un aereo</i> .....	74
<i>5.2.1 Instabilità stazionaria</i> .....	79
<i>5.2.2 Instabilità dinamica a un grado di libertà</i> .....	80
<i>5.3 – Analisi stazionaria e dinamica a un grado di libertà della bicicletta</i> .....	81
<b>6 – Conclusioni e sviluppi futuri</b> .....	85
<b>Bibliografia</b> .....	87
<b>Appendice A</b> .....	89
<b>Appendice B</b> .....	93
<b>Appendice C</b> .....	97
<b>Appendice D</b> .....	101
<b>Ringraziamenti</b> .....	123

# *Introduzione*

---

Nella seguente tesi viene trattata una delle proprietà fondamentali di un sistema dinamico: la stabilità. La sua importanza deriva dal fatto che essa è una specifica imposta ad ogni sistema fisico controllato e la sua trattazione permette di conoscere l'evoluzione delle equazioni che governano il moto. È quindi indispensabile comprendere le metodologie per studiare la stabilità di un sistema dinamico, sia esso una bicicletta, le ali di un aereo o un satellite in orbita.

Nello specifico viene studiata una bicicletta, sottolineando le analogie con sistemi più complessi, e si comprende quali grandezze sono più influenti sulla stabilità e in che modo è conveniente modificarle per migliorare lo sviluppo del sistema.

Nel primo capitolo viene ulteriormente spiegato il significato di stabilità di un sistema dinamico e sono elencati gli strumenti matematici necessari per un corretto studio delle equazioni del moto.

Nel secondo capitolo viene presentato il modello della bicicletta: con esso si intende una rappresentazione semplificata dei suoi componenti, necessaria per dedurre le equazioni che ne governano il comportamento. Per ottenere questo sistema di equazioni differenziali è necessario descrivere quali sono i parametri che rappresentano univocamente una bicicletta e comprendere quali sono i gradi di libertà di tutto il sistema. Successivamente viene spiegato come interpretare i risultati ottenuti dalle simulazioni in Matlab: esse non sono altro che lo studio delle equazioni con gli strumenti per l'analisi di stabilità presentati nel primo capitolo. Infine viene presentata una modifica al modello originale della bicicletta, considerando anche l'effetto della rigidità flessionale della forcella anteriore e limitando il numero di parametri da studiare.

Nel capitolo 3 si chiarisce cosa significa approccio 2-level factorial DOE e quindi si spiega come sono state organizzate le simulazioni in modo che ogni studio fosse diverso dagli altri. Successivamente viene introdotta l'analisi di correlazione di Pearson, cioè lo strumento che permette di elaborare i dati ottenuti dalle simulazioni: grazie ad esso è possibile tradurre l'incidenza di un determinato parametro sulla stabilità del sistema in un semplice indice numerico.

Nel quarto capitolo sono descritti i cicli di simulazioni che sono stati implementati per lo studio del comportamento della bicicletta. In totale si tratta di quattro cicli, ognuno con un miglioramento rispetto al precedente, per un'analisi sempre più approfondita. Ogni ciclo è riportato con le spiegazioni dei parametri considerati, con i risultati ottenuti e con gli indici di Pearson calcolati dopo l'analisi di correlazione. Per tutti gli indici sono fornite le opportune spiegazioni per comprendere in che

modo ogni parametro influisce sull'evoluzione della bicicletta. Infine sono state effettuate anche delle simulazioni facendo variare esclusivamente un parametro per volta: mentre i primi quattro cicli danno delle informazioni “nell'insieme”, cambiando tutti i parametri, queste ultime forniscono informazioni solo su modifiche locali.

Nel quinto capitolo si spiega come l'analisi elementare effettuata sulle ali di un aereo per lo studio del Flutter possa essere applicata a una bicicletta. Ovviamente i due sistemi sono molto differenti tra loro, ma si possono riscontrare delle analogie nella forma delle equazioni che ne governano il moto.

Infine, sono presentate le conclusioni dell'elaborato e gli sviluppi futuri che risultano opportuni per un approfondimento del lavoro svolto.

# 1 – Metodi per lo studio della stabilità

---

La stabilità è una delle proprietà dei sistemi dinamici più studiata. Essa è di fondamentale importanza in quanto permette di comprendere l'evoluzione nel tempo di un sistema e di capire se è necessario un opportuno controllo.

Quando un sistema fisico inizialmente in quiete viene sottoposto ad un ingresso di durata finita, l'uscita del sistema deve stabilizzarsi ad un certo valore, o oscillare attorno ad esso, e non continuare ad aumentare illimitatamente. In questo caso si parla di sistema instabile.

Viene proposto un semplice esempio<sup>1</sup> per comprendere quali possano essere le evoluzioni di un sistema fisico soggetto a una perturbazione.

Si consideri il sistema SISO (Single Input – Single Output):

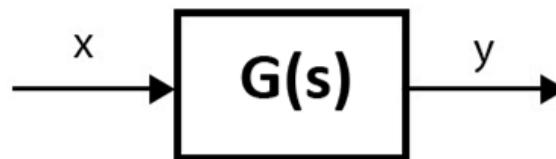


Figura 1: Schema sistema SISO

Esso è descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) \\ = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) \end{aligned}$$

Si supponga che il sistema sia in quiete o in equilibrio all'istante  $t = 0$ . Di conseguenza entrata e uscita sono da considerarsi costanti, quindi tutte le derivate risultano nulle.

---

<sup>1</sup> Ing. Mariagrazia Dotoli – “Controlli automatici, stabilità dei sistemi lineari”

L'equazione differenziale che rappresenta il sistema diventa:

$$a_0 y(t)|_{t=0} = b_0 x(t)|_{t=0}$$

Si consideri che il sistema venga perturbato da un ingresso impulsivo  $\tau$ , diverso da zero:

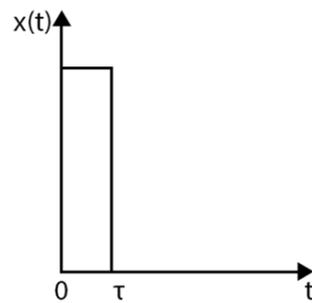


Grafico 1: Schema dell'impulso

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \text{ e } t > \tau \\ \text{qualsiasi}, & 0 \leq t \leq \tau \end{cases}$$

La risposta del sistema può presentarsi nelle seguenti tre forme<sup>2</sup>:

- Risposta limitata: esiste una costante  $M > 0$  tale che  $|y(t)| < M \forall t > 0$ .

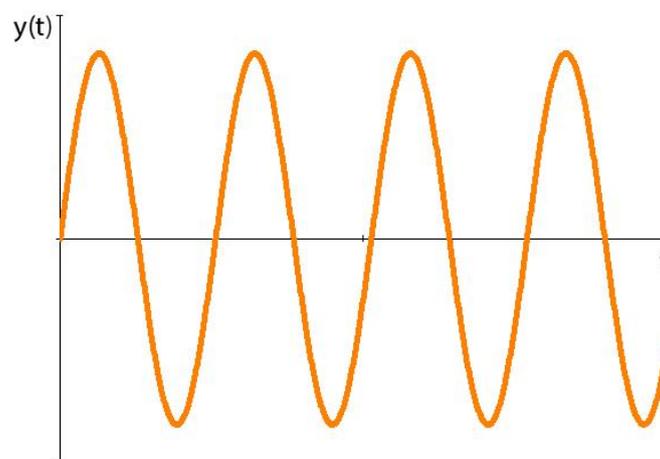


Grafico 2: Risposta limitata

---

<sup>2</sup> Ing. Mariagrazia Dotoli – “Controlli automatici, stabilità dei sistemi lineari”

Il sistema è semplicemente stabile, quindi raggiunge una nuova configurazione di equilibrio, differente da quella di partenza, o oscilla attorno ad essa.

- Risposta convergente asintoticamente a zero: esiste una costante  $M > 0$  tale che  $|y(t)| < M \forall t > 0$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)| = 0$ .

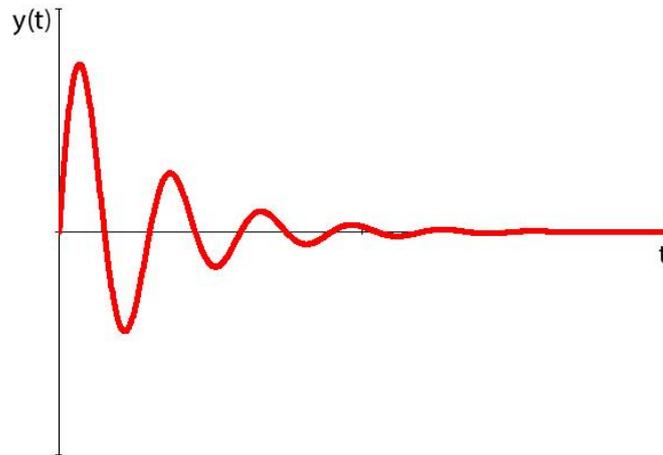


Grafico 3: Risposta asintoticamente stabile

Il sistema è detto asintoticamente (o strettamente) stabile ed esso, dopo la perturbazione, tornerà nella configurazione di equilibrio originaria.

- Risposta divergente: non esiste alcuna costante  $M > 0$  tale che la risposta risulti limitata dopo un certo intervallo di tempo.

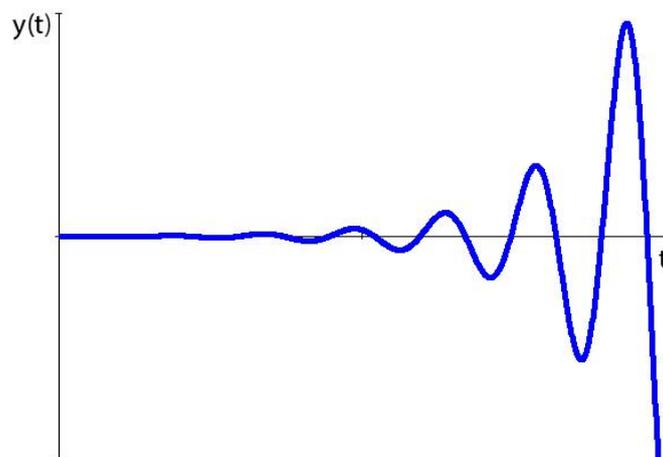


Grafico 4: Risposta instabile

Il sistema è instabile.

Per riassumere, un sistema semplicemente stabile ha una risposta all'impulso limitata, che sia essa oscillatoria o costante, mentre un sistema asintoticamente stabile ha una risposta all'impulso che converge a zero (situazione di equilibrio). Al contrario, un sistema instabile ha una risposta alla forzante che diverge.

Nei grafici precedenti si è visto come possono essere diverse le risposte di un sistema fisico perturbato, quindi è facile comprendere l'importanza dello studio della stabilità ai fini della progettazione in sicurezza di ogni sistema dinamico.

Risulta opportuno capire i metodi utilizzabili nell'analisi della stabilità di un sistema fisico.

## ***1.1 – Criterio di Cartesio***

Il criterio di Cartesio è uno strumento preliminare per lo studio della stabilità molto pratico in quanto non richiede il calcolo esplicito delle radici del polinomio caratteristico  $P(s)$ :

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

È il primo criterio da applicare all'equazione caratteristica in quanto fornisce solamente una condizione necessaria, ma non sufficiente, affinché tutte le radici del polinomio siano a parte reale minore di zero.

Il criterio di Cartesio dice che il massimo numero di radici con parte reale positiva è dato dal numero di variazioni di segno tra coefficienti consecutivi non nulli. Per esempio:

$$s^3 + s^2 - 8s - 12 = 0$$

Nell'equazione c'è un solo cambio di segno, significa che  $P(s)$  può avere al massimo una radice con parte reale positiva. Infatti:

$$s^3 + s^2 - 8s - 12 = (s + 2)^2(s + 3)$$

Confermando quanto previsto dal criterio di Cartesio.

Dal criterio ne consegue che il numero di radici con parte reale negativa può essere pari al massimo numero  $w$  di variazioni di segno tra coefficienti consecutivi non nulli del polinomio  $P(-s)$ , o inferiore a  $w$  per un numero pari. Quindi:

$$P(-s) = (-s)^3 + (-s)^2 - 8(-s) - 12 = -s^3 + s^2 + 8s - 12$$

Nell'equazione ci sono due cambi di segno, a testimonianza del fatto che il polinomio  $P(s)$  ha due o zero radici con parte reale negativa.

Riassumendo, il criterio di Cartesio consente di calcolare il massimo numero di radici con parte reale positiva che un polinomio può avere: il criterio non permette di quantificare il numero preciso o di calcolare la posizione delle radici, di conseguenza è un metodo utile solo come controllo introduttivo.

## 1.2 – Criterio di Routh

Per studiare la stabilità di un sistema bisogna conoscere i segni delle parti reali dei poli della funzione di trasferimento, cioè delle radici del suo denominatore. In molti casi può essere sconsigliato e complicato trovare tutti i valori che annullano il polinomio  $P(s)$ :

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

Il criterio di Routh<sup>3</sup> risulta molto comodo in quanto permette di conoscere i segni delle parti reali delle radici attraverso un esame dei coefficienti dell'equazione.

Questo studio viene fatto attraverso l'interpretazione della tabella di Routh, costruita come segue:

- essa è costituita da  $n+1$  righe;
- le prime due righe sono formate dai coefficienti del polinomio caratteristico  $P(s)$ , opportunamente distribuiti;

---

<sup>3</sup> Giovanni Marro – “Controlli Automatici”

- dalla terza riga in poi, gli elementi di ogni riga sono calcolati dai valori degli elementi delle due righe precedenti, come descritto in seguito;
- le righe della tabella sono di lunghezza decrescente, per costruzione;
- l'ultima riga è formata solo dal coefficiente  $a_0$  di  $P(s)$
- il primo coefficiente  $a_n$  del polinomio  $P(s)$  deve essere positivo; in caso contrario si moltiplica il polinomio per  $-1$ , cambiando segno a tutti i coefficienti.

La tabella di Routh si presenta come segue:

Riga n:	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	...
Riga n-1:	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	
Riga n-2:	$b_1$	$b_2$	$b_3$	
Riga n-3:	$c_1$	$c_2$	$c_3$	
...	...			
Riga 1:	...			
Riga 0:	$a_0$			

Dove i valori delle righe, dalla terza in poi, sono calcolati come segue:

$$b_1 = \frac{a_{n-1} a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \qquad c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1} a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} \qquad c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}$$

$$b_3 = \frac{a_{n-1} a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}} \qquad c_3 = \frac{b_1 a_{n-7} - a_{n-1} b_4}{b_1}$$

Il criterio di Routh dice che ad ogni variazione di segno che presentano i termini della prima colonna della tabella di Routh corrisponde una radice a parte reale positiva dell'equazione caratteristica, ad ogni permanenza una radice a parte reale negativa<sup>4</sup>. Le conclusioni vengono tratte esclusivamente dallo studio dei segni della prima colonna. Le altre colonne servono soltanto per la costruzione della prima.

Da questo criterio si può dedurre che è condizione necessaria e sufficiente affinché le radici dell'equazione caratteristica abbiano tutte parte reale negativa che tutti i termini della prima colonna della tabella di Routh siano di segno concorde.

---

<sup>4</sup> Giovanni Marro – "Controlli Automatici"

Analogamente è condizione sufficiente affinché un sistema lineare SISO sia instabile che tra i termini della prima colonna della tabella di Routh ad esso associata vi sia almeno uno di segno discorde dagli altri.

Vengono proposti due semplici esempi numerici per avvalorare il criterio.

- Si consideri la seguente equazione caratteristica:

$$s^3 + s^2 - 17s + 15 = 0$$

Da tale equazione si costruisce la tabella di Routh:

Riga 3:	1	-17
Riga 2:	1	15
Riga 1:	-32	
Riga 0:	15	

Si nota che nella prima colonna ci sono due variazioni di segno, che corrispondono a due radici con parte reale positiva, di conseguenza il sistema è instabile.

Infatti l'equazione caratteristica si può esprimere come:

$$s^3 + s^2 - 17s + 15 = (s - 1)(s - 3)(s + 5) = 0$$

Dove  $s = 1$  e  $s = 3$  sono radici con parte reale positiva, quindi vengono confermate le conclusioni anticipate con il criterio di Routh.

- Si può studiare la stabilità anche con un'equazione caratteristica parametrizzata, per esempio sul valore del guadagno K:

$$s^4 + s^3 + 2(K + 1)s^2 + (K - 1)s + (K + 3) = 0$$

Da tale equazione si costruisce la tabella di Routh:

Riga 4:	1	$2(K+1)$	$K+3$
Riga 3:	1	$K-1$	
Riga 2:	$K+3$	$K+3$	
Riga 1:	$K-2$		
Riga 0:	$K+3$		

Si nota che nella prima colonna non ci sono variazioni di segno solo nel caso in cui  $K$  sia maggiore di 2. In questo modo si può stabilire il guadagno necessario per avere un sistema asintoticamente stabile.

### 1.3 – Criterio di Nyquist

Il criterio di Nyquist è un approccio diverso da quelli finora presentati. Esso infatti non si basa sullo studio dei segni dei poli dell'equazione caratteristica ma richiede un'analisi di natura grafica di un'apposita curva nel piano complesso<sup>5</sup>.

Il criterio consente di stabilire se un sistema, del quale si conosce la risposta armonica ad anello aperto, sia stabile o meno una volta chiuso in retroazione.

Si consideri il seguente sistema in retroazione:

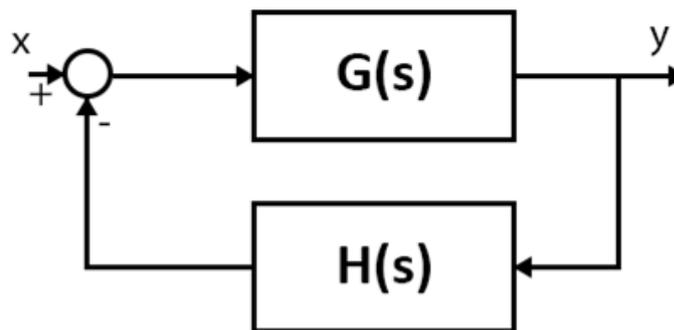


Figura 2: Sistema in retroazione

<sup>5</sup> Giovanni Marro – “Controlli Automatici”

Sia  $F(j\omega) = G(j\omega)H(j\omega) = Re(\omega) + j Im(\omega)$  la funzione di risposta armonica di anello di cui si suppone noto il diagramma di Nyquist, tracciato per  $\omega$  da 0 a  $+\infty$ . Esso rappresenta la funzione al variare di  $\omega$  nel piano complesso di Gauss.

Il completamento del diagramma per pulsazioni negative si ottiene rovesciando il diagramma attorno all'asse delle ascisse, come mostrato nella seguente figura.

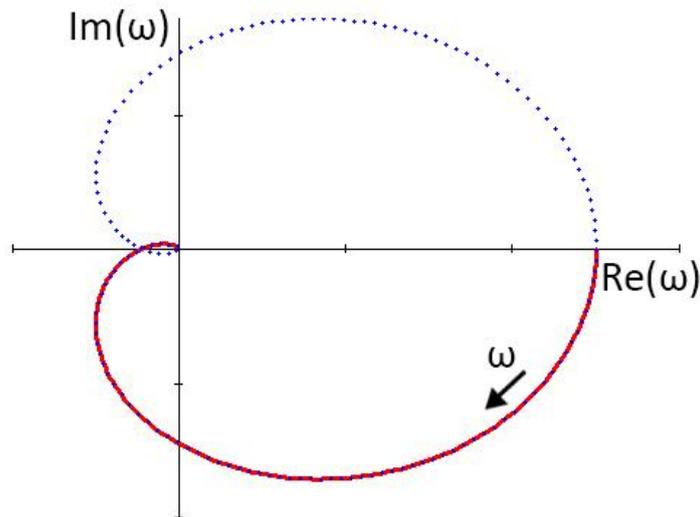


Grafico 5: Diagramma di Nyquist

Per sistemi stabili ad anello aperto (quindi nell'ipotesi che il guadagno in anello  $F(s) = G(s)H(s)$  abbia tutti i poli a parte reale negativa, ad eccezione di un eventuale polo nullo, semplice o doppio) il criterio di Nyquist afferma che è condizione necessaria e sufficiente che il diagramma completo della funzione  $F(j\omega)$  non circonda o tocchi il punto critico  $-1 + j0$  affinché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile.

Più in generale, anche per sistemi instabili ad anello aperto, si può affermare che è condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile che il diagramma polare completo della funzione  $F(j\omega)$  circonda il punto critico  $-1 + j0$  tante volte in senso antiorario quanti sono i poli di  $F(s)$  con parte reale positiva. Ogni giro in meno in senso antiorario (o giro in più in senso orario) rispetto al numero fornito dal criterio corrisponde a un polo con parte reale positiva nel sistema in retroazione.

Per comodità il criterio si può riassumere con una semplice equazione:

$$\vec{N} = Z - P$$

Z e P sono rispettivamente i numeri dei poli a parte reale positiva in anello chiuso e in anello aperto;  $\bar{N}$  è il numero di giri in senso orario del diagramma di Nyquist attorno al punto critico  $-1 + j0$  (nel caso in cui P sia nullo non importa il verso dei giri).

P si calcola dal guadagno in anello, N si trova graficamente e Z è incognita.

Di seguito sono forniti due esempi dell'applicazione del criterio di Nyquist. Per tracciare i grafici polari è stato utilizzato il software PTC Mathcad.

- Si consideri il sistema in retroazione avente guadagno in anello pari a:

$$F(s) = \frac{8}{(1+s)^2(1+1,5s)(1+2s)}$$

Il sistema ad anello aperto è asintoticamente stabile dato che i poli hanno tutti parte reale negativa, quindi  $P = 0$ .

Il diagramma di Nyquist è:

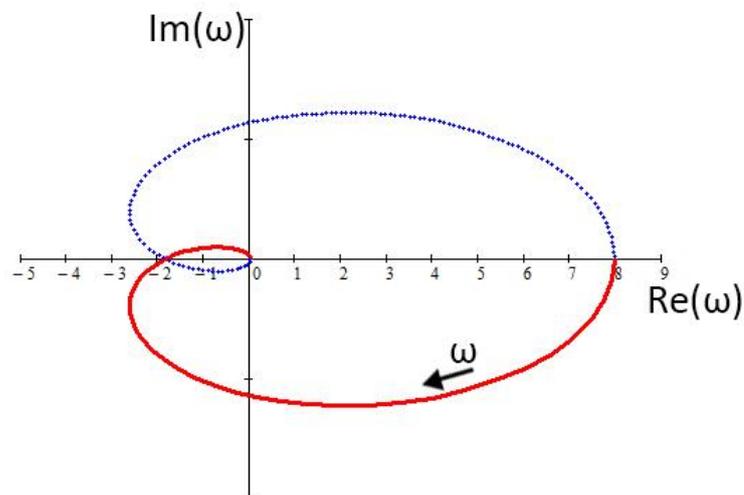


Grafico 6: Diagramma di Nyquist del primo esempio

Il diagramma polare completo circonda due volte in senso il punto critico, quindi  $N = 2$ . Dato che il sistema ad anello aperto è asintoticamente stabile il sistema in retroazione ha due poli a parte reale positiva ( $Z = N = 2$ ). Esso è quindi instabile.

$$P = 0 \quad N = 2 \quad N = Z - P \Rightarrow Z = 2 \quad \text{Instabile}$$

- Il criterio di Nyquist è utile anche per verificare la stabilità in funzione di determinati parametri.

Sia data  $F(s)$  in funzione del guadagno  $K$ :

$$F(s) = \frac{K(1 + 2s)}{(1 - 2s)(1 - s)}$$

Si noti che  $F(s)$  ha due poli a parte reale positiva ( $P = 2$ ).

Di seguito sono forniti i diagrammi di Nyquist per  $K = 1$  e  $K = 3$ .

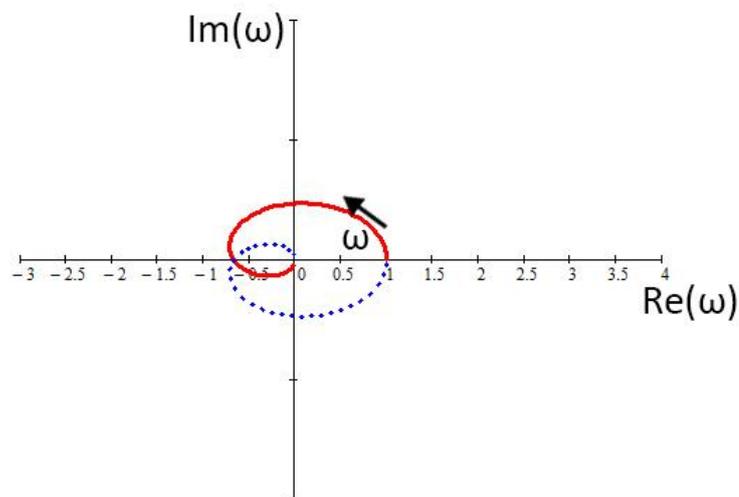


Grafico 7: Diagramma di Nyquist del secondo esempio, con  $K=1$

Nel primo caso il punto critico non viene circondato ( $\vec{N} = 0$ ). Ogni giro antiorario in meno rispetto al numero di poli a parte reale positiva del guadagno corrisponde a un polo con parte reale positiva nel sistema in retroazione ( $Z = N + P = 2$ ): in questo caso, esso è instabile.

$$P = 2 \quad \vec{N} = 0 \quad N = Z - P \Rightarrow Z = 2 \quad \text{Instabile}$$

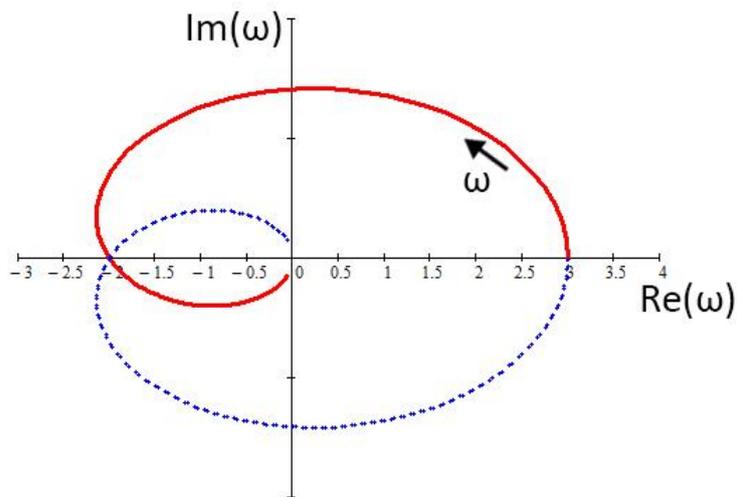


Grafico 8: Diagramma di Nyquist del secondo esempio, con  $K=3$

Invece con  $K = 3$  il diagramma polare circonda il punto critico due volte in senso antiorario ( $\vec{N} = -2$ ). Il guadagno in anello presenta due poli a parte reale positiva ( $P = 2$ ). Il sistema in retroazione è stabile in quanto ha due poli a parte reale positiva.

$$P = 2 \qquad \vec{N} = -2 \qquad N = Z - P \Rightarrow Z = 0 \qquad \text{Stabile}$$

In conclusione, il criterio di Nyquist permette di valutare per via grafica la stabilità dei sistemi dinamici in retroazione, tramite lo studio dei sistemi ad anello aperto. Inoltre fornisce, diversamente dal criterio di Routh, un utile strumento per giudicare l'efficacia di possibili interventi per migliorare il comportamento dinamico del sistema in retroazione.

## 1.4 – Metodo degli autovalori complessi

Gli autovalori sono un importante strumento per la risoluzione di sistemi di equazioni differenziali e per la loro analisi in termini di stabilità. È opportuno capire come si utilizzano e in che modo usarli per giudicare l'evoluzione di un sistema dinamico.

Si consideri una matrice a valori reali  $A$ . Vengono definiti autovalore e autovettore della matrice rispettivamente lo scalare  $\lambda$  e il vettore  $x$  (non nulli) che verifichino la relazione  $Ax = \lambda x$  o l'equivalente  $(A - \lambda I)x = 0$ .

Affinché l'equazione ammetta soluzione è necessario che sia verificato che  $\det(A - \lambda I) = 0$ . Quindi gli autovalori sono semplicemente le radici del polinomio caratteristico; di conseguenza, a seconda del tipo di polinomio, si possono ottenere radici reali o radici complesse, che avranno i corrispettivi autovettori.

Nel caso in cui si ottengano degli autovalori complessi, essi devono essere a coppie di coniugati: se  $z = a + ib$  è un autovalore lo sarà anche  $\bar{z} = a - ib$ . E saranno coniugati anche i corrispettivi autovettori, quindi l'autovettore  $w = u + iv$  associato all'autovalore  $z$  sarà il coniugato dell'autovettore  $\bar{w} = u - iv$  associato all'autovalore  $\bar{z}$ .

Si consideri il sistema lineare di equazioni differenziali  $\dot{x} = Ax$ , con la matrice  $A$  di dimensioni  $n \times n$ , avente  $n$  autovalori distinti  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  e  $n$  autovettori associati  $w_1, w_2, \dots, w_n$ <sup>6</sup>. È possibile dimostrare che la sua soluzione è

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} w_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} w_2 + \dots + C_n e^{\lambda_n t} w_n$$

Questo teorema vale anche se gli autovalori sono complessi: se gli autovalori complessi sono  $\alpha \pm i\beta$  e gli autovettori associati sono  $u \pm iw$  allora la soluzione generale si può esprimere come:

$$x(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t)(C_1 u - C_2 w) - e^{\alpha t} \sin(\beta t)(C_2 u - C_1 w)$$

Osservando alla formula si nota che il contributo più considerevole per l'andamento della soluzione generale è dato dalla parte reale, in quanto la parte immaginaria è

---

<sup>6</sup> [http://www.econ.uniurb.it/materiale/5485\\_Autovalori\\_EDO-lineari\\_numeri-complessi.pdf](http://www.econ.uniurb.it/materiale/5485_Autovalori_EDO-lineari_numeri-complessi.pdf)

espressa dal coseno e dal seno che oscillano attorno allo zero. Da questa considerazione si arriva a delle importanti conclusioni sulla stabilità del sistema dinamico<sup>7</sup>:

- il sistema è asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori hanno parte reale negativa;
- se il sistema possiede degli autovalori a parte reale nulla allora è semplicemente stabile;
- il sistema è instabile se esiste almeno un autovalore di  $A$  con parte reale positiva, infatti con  $\lambda_x > 0$  il contributo  $e^{\lambda_x t}$  diverge.

Seguono due semplici esempi.

- Sia dato il sistema lineare di equazioni differenziali  $\dot{x} = Ax$ , con la matrice  $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ . Per giudicarne la stabilità si deve considerare il segno della parte reale dei suoi autovalori.

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

Gli autovalori di  $A$  sono  $\lambda = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ , quindi entrambi hanno parte reale positiva. Ciò comporta che il sistema lineare sia instabile. Infatti le componenti  $e^{5t}$  e  $e^{2t}$  aumentano allontanando la soluzione dallo zero.

- Considerato il sistema lineare di equazioni differenziali  $\dot{x} = Bx$ , con la matrice  $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ . Per giudicarne la stabilità si deve considerare il segno della parte reale dei suoi autovalori.

$$\begin{vmatrix} -3 - \lambda & -2 \\ 2 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = (-3 - \lambda)^2 - 2 = \lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0$$

Gli autovalori di  $A$  sono complessi coniugati pari a  $\lambda = \begin{pmatrix} -3+i2 \\ -3-i2 \end{pmatrix}$ , quindi hanno parte reale negativa. Questo dimostra che il sistema lineare sarà asintoticamente stabile in quanto la grandezza  $e^{\alpha t}$ , con  $\alpha < 0$ , all'infinito tende a zero.

---

<sup>7</sup> Alberto Bemporad – “Corso di teoria dei sistemi”

È stato mostrato quanto il metodo degli autovalori complessi risulti efficace e comodo per giudicare un sistema dinamico espresso in equazioni differenziali. È importante comprendere come questo metodo sia in grado di fornire una misura della stabilità del sistema e di quanto essa possa essere facilmente controllata e verificata finché gli autovalori della matrice del sistema manterranno parte reale negativa<sup>8</sup>.

---

<sup>8</sup> Samuela Locci – *“Metodi per il calcolo degli autovalori e autovettori e stabilità dei sistemi lineari”*



## 2 – Modello della bicicletta

Nel 1899 il francese Emmanuel Carvallo e l'inglese Francis Whipple usarono le equazioni della dinamica dei corpi rigidi per dimostrare teoricamente che una bicicletta potesse essere stabile senza un controllo esterno, se mantenuta a un'opportuna velocità. Questi studi furono utilizzati nel 2007 da J. P. Meijaard, Jim M. Papadopoulos, Andy Ruina e Arend L. Schwab per arricchire il modello che descrive ancora oggi la stabilità della bicicletta. Nei seguenti paragrafi vengono descritti i passaggi per giungere a una completa comprensione del modello<sup>9</sup>.

### 2.1 – Rappresentazione della bicicletta

Il modello CWBM (Carvallo Whipple Bicycle Model) descrive la bicicletta come quattro corpi rigidi distinti, tra loro collegati da tre coppie rotoidali: la ruota posteriore R, il retrotreno B, comprendente il telaio e il corpo del ciclista, avantreno H, composto dal manubrio e dalla forcella anteriore, e la ruota anteriore F.

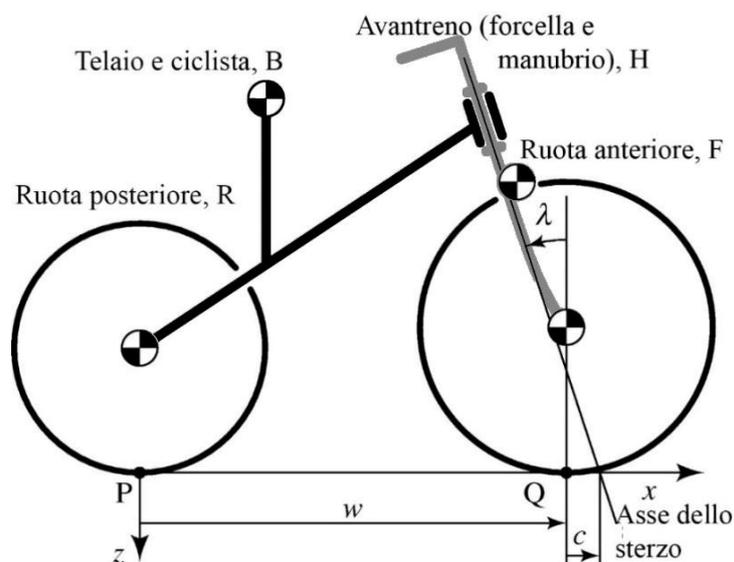


Figura 3: Modello della bicicletta

<sup>9</sup> J. P. Meijaard, Jim M. Papadopoulos, Andy Ruina e A. L. Schwab – “Linearized dynamics equation for the balance and steer of a bicycle: a benchmark and review”

Si accettano le seguenti ipotesi semplificative:

- le due ruote sono delle lame che producono un solo punto di contatto ciascuna con il manto stradale;
- le ruote rotolano senza strisciare;
- non c'è movimento del ciclista rispetto al telaio, ma sono un unico corpo rigido;
- ciascun accoppiamento è privo di ogni attrito;
- non ci sono ammortizzatori;
- la bicicletta è perfettamente simmetrica rispetto al piano verticale.

Le equazioni della bicicletta sono inequivocabilmente descritte da venticinque parametri geometrici, descritti in seguito. Nella seguente tabella sono riportati i valori dei parametri che sono stati utilizzati da Meijsaard, Papadopoulos, Ruina e Schwab e che verranno considerati nominali nelle successive simulazioni implementate.

<b>Parametro</b>	<b>Valore nominale</b>
$w$	1,02 m
$c$	0,08 m
$\lambda$	18° ( $\pi/10$ rad)
$r_R$	0,3 m
$m_R$	2 kg
$(I_{Rxx}, I_{Ryy})$	(0,0603, 0,12) kg m <sup>2</sup>
$(x_B, z_B)$	(0,3, -0,9) m
$m_B$	85 kg
$\begin{bmatrix} I_{Bxx} & 0 & I_{Bxz} \\ 0 & I_{Byy} & 0 \\ I_{Bxz} & 0 & I_{Bzz} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9,2 & 0 & 2,4 \\ 0 & 11 & 0 \\ 2,4 & 0 & 2,8 \end{bmatrix}$
$(x_H, z_H)$	(0,9, -0,7) m
$m_H$	4 kg
$\begin{bmatrix} I_{Hxx} & 0 & I_{Hxz} \\ 0 & I_{Hyy} & 0 \\ I_{Hxz} & 0 & I_{Hzz} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,05892 & 0 & -0,00756 \\ 0 & 0,06 & 0 \\ -0,00756 & 0 & 0,00708 \end{bmatrix}$
$r_F$	0,35 m
$m_F$	3 kg
$(I_{Fxx}, I_{Fyy})$	(0,1405, 0,28) kg m <sup>2</sup>
$g$	9,81 N kg <sup>-1</sup>
$v$	diverse velocità

I venticinque parametri sono  $w$ ,  $c$ ,  $\lambda$ ,  $r_R$ ,  $m_R$ ,  $I_{Rxx}$ ,  $x_B$ ,  $z_B$ ,  $m_B$ ,  $I_{Bxx}$ ,  $I_{Byy}$ ,  $I_{Bzz}$ ,  $I_{Bxz}$ ,  $x_H$ ,  $z_H$ ,  $m_H$ ,  $I_{Hxx}$ ,  $I_{Hyy}$ ,  $I_{Hzz}$ ,  $I_{Hxz}$ ,  $r_F$ ,  $m_F$ ,  $I_{Fxx}$ ,  $g$ ,  $v$ .

L'origine delle coordinate viene preso coincidente con il punto di contatto P della ruota posteriore con il suolo. Le due ruote sono sullo stesso piano stradale, con un

angolo di sterzata nullo. Il sistema di riferimento scelto è quello convenzionale nella dinamica del veicolo (J670e, SAE 2001) con asse positivo  $x$  verso il punto di contatto tra ruota anteriore e suolo, asse  $z$  positivo rivolto verso il basso, asse  $y$  positivo verso la destra del ciclista.

Per quanto riguarda le ruote, i raggi sono indicati con  $r_R$  e  $r_F$ , le loro masse con  $m_R$  e  $m_F$  e i centri di massa coincidono con i centri geometrici delle ruote. I momenti di inerzia delle ruote anteriori e posteriori rispetto ai loro assi sono  $I_{Ryy}$  e  $I_{Fyy}$  rispettivamente.  $I_{Rxx}$  e  $I_{Fxx}$  sono invece i momenti di inerzia delle ruote relativi a qualsiasi diametro nel piano  $x$ - $z$ .

Il punto di contatto della ruota anteriore  $Q$  si trova a una distanza  $w$  dall'origine delle coordinate. Tale distanza viene chiamata passo. Con avancorsa  $c$  invece si intende la distanza tra il punto di contatto della ruota anteriore  $Q$  con l'intersezione tra manto stradale e asse dello sterzo. Anche se normalmente l'avancorsa è positiva, le equazioni del modello permettono anche  $c < 0$ , quindi con il punto di contatto davanti allo sterzo.

Il telaio (comprendente il ciclista) ha una massa  $m_B$  e il suo centro di massa ha coordinate spaziali ( $x_B, y_B = 0, z_B < 0$ ). Il suo momento di inerzia è rappresentato da una matrice  $3 \times 3$  dove tutta la massa è distribuita simmetricamente rispetto al piano  $x$ - $z$ , ma non necessariamente sul piano. Il corpo  $H$  (forcella anteriore e manubrio) ha massa  $m_H$  e il suo centro di massa ha coordinate ( $x, y_H = 0, z_H < 0$ ).

$$I_B = \begin{bmatrix} I_{Bxx} & 0 & I_{Bxz} \\ 0 & I_{Byy} & 0 \\ I_{Bxz} & 0 & I_{Bzz} \end{bmatrix} \quad I_H = \begin{bmatrix} I_{Hxx} & 0 & I_{Hxz} \\ 0 & I_{Hyy} & 0 \\ I_{Hxz} & 0 & I_{Hzz} \end{bmatrix}$$

L'angolo di inclinazione dello sterzo  $\lambda$  è misurato dalla verticale passante per il centro della ruota e viene misurato in senso antiorario. Lo sterzo viene completamente definito assegnando un passo  $w$ , un'avancorsa  $c$  e un'inclinazione  $\lambda$ .

Gli ultimi due parametri sono l'accelerazione gravitazione  $g$ , rivolta verso il basso e la velocità  $v$ . Essi non sono parametri propri della progettazione della bicicletta.

Questo modello permette di semplificare l'analisi di una bicicletta e di impostare uno schema che può essere migliorato per studiare sistemi dinamici più articolati, come una motocicletta, considerando anche le ruote toroidali, la forma dei pneumatici e la complessità del telaio.

## 2.2 – Gradi di libertà

È fondamentale capire quanti gradi di libertà ha il modello finora presentato<sup>10</sup>.

Senza nessun vincolo i quattro corpi rigidi avrebbero  $6 * 4 = 24$  gradi di libertà. Ogni vincolo diminuirà i gradi di libertà del sistema come segue:

- le coppie rotoidali eliminano cinque gradi di libertà ciascuna;
- il suolo blocca un grado di libertà per ogni ruota;

Grazie a queste considerazioni si ottengono:

$$24 - 5 * 3 - 2 * 1 = 7$$

Si ottiene così una configurazione spaziale a sette gradi di libertà.

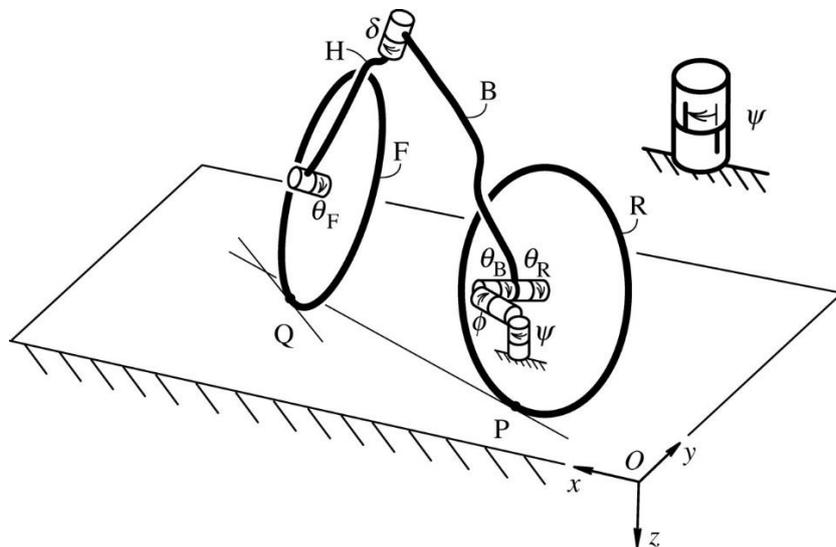


Figura 4: Configurazione delle variabili

<sup>10</sup> J. P. Meijaard, Jim M. Papadopoulos, Andy Ruina e A. L. Schwab – “Linearized dynamics equation for the balance and steer of a bicycle: a benchmark and review”

Infine bisogna considerare i vincoli anolonomi: le ruote non possono slittare in direzione longitudinale e in direzione laterale. Questa impossibilità comporta un'ulteriore diminuzione dei gradi di libertà, che passano da sette a tre. Questi tre gradi di libertà sono espressi come l'angolo di rollio  $\phi$  del telaio posteriore, l'angolo di sterzata  $\delta$  e l'avanzamento  $\theta$  della ruota posteriore.

## 2.3 – Equazioni linearizzate del moto

Si deve studiare la stabilità della bicicletta rispetto alla posizione di equilibrio verticale. Le forzanti a cui è sottoposto il sistema sono:

- le forze di gravità applicate in ogni centro di massa del sistema;
- il momento delle ruota posteriore  $T_\theta$  equivalente alla forza della spinta;
- il momento di rollio  $T_\phi$  attorno all'asse che unisce i due punti di contatto delle ruote con il suolo;
- il momento dello sterzo  $T_\delta$  attorno all'asse dello sterzo che viene applicato dal ciclista sul manubrio.

Le equazioni linearizzate dei sistemi dinamici vengono solitamente fornite in questa forma:

$$[M]\ddot{q} + [C]\dot{q} + [K]q = f$$

Per il modello della bicicletta queste equazioni possono essere scritte, con l'accelerazione gravitazionale e la velocità esplicite, in questo modo:

$$[M] \begin{Bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\delta} \end{Bmatrix} + v[C_1] \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\delta} \end{Bmatrix} + [g[K_0] + v^2[K_2]] \begin{Bmatrix} \phi \\ \delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_\phi \\ T_\delta \end{Bmatrix}$$

$[M]$  è la matrice 2x2 delle masse, definita simmetrica e positiva, e rappresenta l'energia cinetica del sistema (con una traslazione);  $[C_1]$  è la matrice di smorzamento equivalente (non c'è un reale smorzamento) che descrive gli effetti giroscopici dovuti al cambio di orientamento degli assi delle ruote causati dal rollio e dallo sterzo; la terza matrice è quella di rigidità ed è composta da due termini: il primo  $[K_0]$ , proporzionale all'accelerazione gravitazionale, tiene in considerazione le

forze gravitazionali e i cambi di energia potenziale, mentre il secondo  $[K_2]$  considera gli effetti giroscopici e centrifughi.

Dato che lo scopo di questa ricerca è considerare il comportamento di una bicicletta priva di ogni controllo da parte del ciclista è necessario impostare  $T_\phi=T_\delta=0$ . In questo modo si ottengono le equazioni:

$$[M] \begin{Bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\delta} \end{Bmatrix} + v[C_1] \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\delta} \end{Bmatrix} + [g[K_0] + v^2[K_2]] \begin{Bmatrix} \phi \\ \delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

In Appendice A sono forniti i coefficienti delle equazioni linearizzate, mentre in Appendice B sono spiegati i passaggi per la derivazione delle equazioni del moto.

Per studiare la stabilità del sistema dinamico si utilizza il metodo degli autovalori complessi presentato nel Capitolo 1.4, assumendo soluzioni del tipo  $q = q_0 e^{st}$ . In particolare il polinomio caratteristico è un'equazione di quarto grado che comporta la ricerca di quattro autovalori:

$$\det\{[M]s^2 + v[C_1]s + [g[K_0] + v^2[K_2]]\} = 0$$

Il segno della parte reale degli autovalori permette la verifica della stabilità del sistema: gli autovalori con parte reale negativa descrivono una soluzione stabile, al contrario una parte reale positiva comporta una soluzione instabile.

## 2.4 – Considerazioni sui risultati

Impostando i valori nominali in Matlab e simulando il comportamento della bicicletta si ottengono i seguenti risultati:

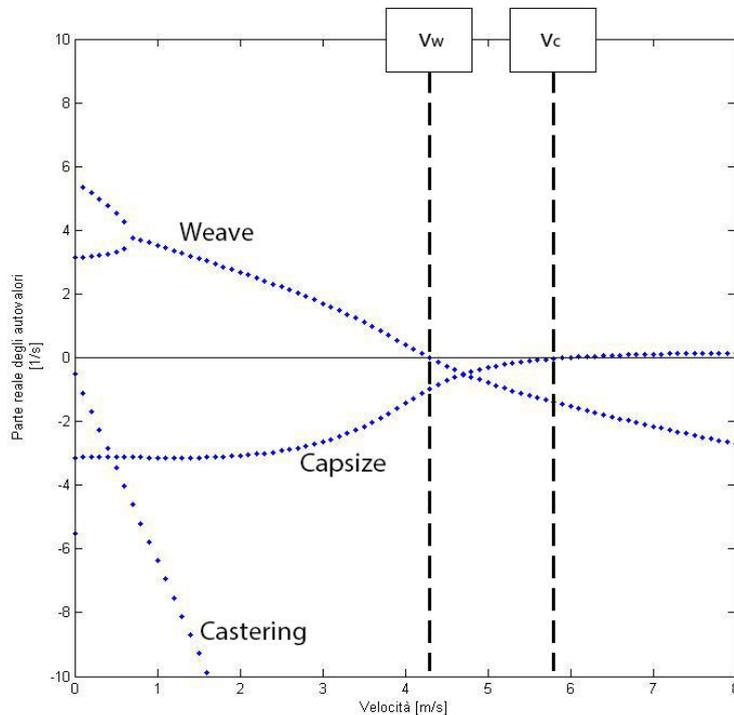


Grafico 9: Andamento delle parti reali degli autovalori in funzione della velocità

Il grafico precedente fornisce le parti reali degli autovalori al variare della velocità, in modo da poter individuare i modi oscillatori e comprendere a quali velocità ogni modo risulta stabile.

Si riconoscono tre modi fondamentali:

- il modo di weave rappresenta l'oscillazione dello sterzo attorno al suo asse, che genera un movimento sinusoidale attorno alla direzione della velocità;
- il modo di capsizer mostra il rollio della bicicletta: quando è instabile essa tende a percorrere una spirale sempre più piccola, dove gli angoli  $\phi$  e  $\delta$  continuano a diminuire fino alla caduta;
- il modo di castering è un modo stabilizzante che tende a raddrizzare la bicicletta in caso di disturbo laterale; esso è sempre stabile quindi risulta meno importante ai fini dello studio in questione.

A differenza di quest'ultimo, i modi di weave e di capsizer non sono sempre stabili. Osservando l'immagine precedente si possono fare le seguenti considerazioni.

A velocità molto basse (minori di 0,7 m/s) si riconoscono due autovalori positivi e due autovalori negativi. I primi due generano instabilità e corrispondono alla caduta laterale della bicicletta. Aumentando la velocità si nota che i due autovalori si uniscono e diventano una coppia di coniugati.

A una certa velocità  $v_w$  (velocità di weave) anche la parte reale degli autovalori del modo di weave diventa negativa, rendendo il modo stabile. In questa configurazione la bicicletta può procedere a velocità costante senza bisogno di nessun controllo da parte del ciclista.

Questa situazione è verificata fino alla velocità  $v_c$  (velocità di capsized) quando il modo di capsized diventa instabile, dato che i suoi autovalori hanno parte reale positiva.

È quindi dimostrata l'esistenza di un certo range di velocità  $v_w < v < v_c$  all'interno del quale la bicicletta (con quei particolari valori di parametri caratteristici) risulta sempre stabile, indipendentemente dal controllo del ciclista. Il comportamento stabile di una bicicletta incontrollata a una determinata velocità si spiega come segue: se la bicicletta tende a piegarsi da un lato, lo sterzo si gira contemporaneamente nella stessa direzione in modo che si generi una forza centrifuga che possa bilanciare il momento della forza peso, stabilizzando il sistema<sup>11</sup>.

È compito del progettista ottenere biciclette con configurazioni tali da avere un range di autostabilità il più ampio possibile (velocità di weave bassa e velocità di capsized alta) e con dei valori di velocità non eccessivamente elevati, in modo che siano accessibili alla maggior parte delle persone.

## ***2.5 – Rigidezza flessionale della forcella anteriore***

Finora è stato presentato il modello utilizzato da Meijaard, Papadopoulos, Ruina e Schwab. Esso risulta di fondamentale importanza per lo studio della stabilità, ma può comunque essere arricchito da nuove componenti per una interpretazione più veritiera del comportamento di una bicicletta reale. Infatti nei seguenti paragrafi viene spiegato come il modello viene modificato per poter prendere in considerazione anche la rigidezza flessionale della forcella anteriore<sup>12</sup>.

---

<sup>11</sup> Alberto Doria – “Key features of single-track vehicles dynamics”

<sup>12</sup> Alberto Doria, Luca Taraborelli e Nicola Segliani – “The effect of front fork compliance on the stability of bicycles”

Nello schema della bicicletta viene posizionato un giunto con asse perpendicolare all'asse dello sterzo, a una distanza  $h_w$  dal centro della ruota anteriore. Esso avrà rigidità  $k_\beta$  e smorzamento  $c_\beta$  che si oppongono rispettivamente alla rotazione  $\beta$  e alla velocità di rotazione  $\dot{\beta}$ .

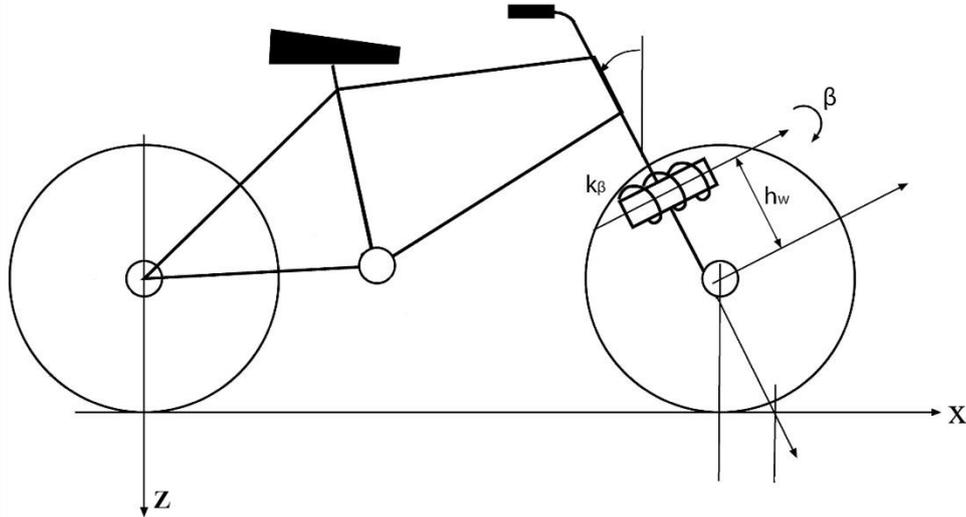


Figura 5: Schema della bicicletta con l'aggiunta della rigidità

L'aggiunta di questa nuova componente modifica l'equazione del bilancio del momento angolare e la posizione del centro di massa della ruota anteriore. Da queste considerazioni si ottengono tre nuove equazioni differenziali del secondo ordine nelle variabili  $\phi$ ,  $\delta$  e  $\beta$ , che rappresentano le oscillazioni libere del sistema e sono il fulcro dello studio della stabilità della bicicletta.

La struttura delle equazioni è molto simile a quelle del modello precedentemente presentato e si scrivono come segue:

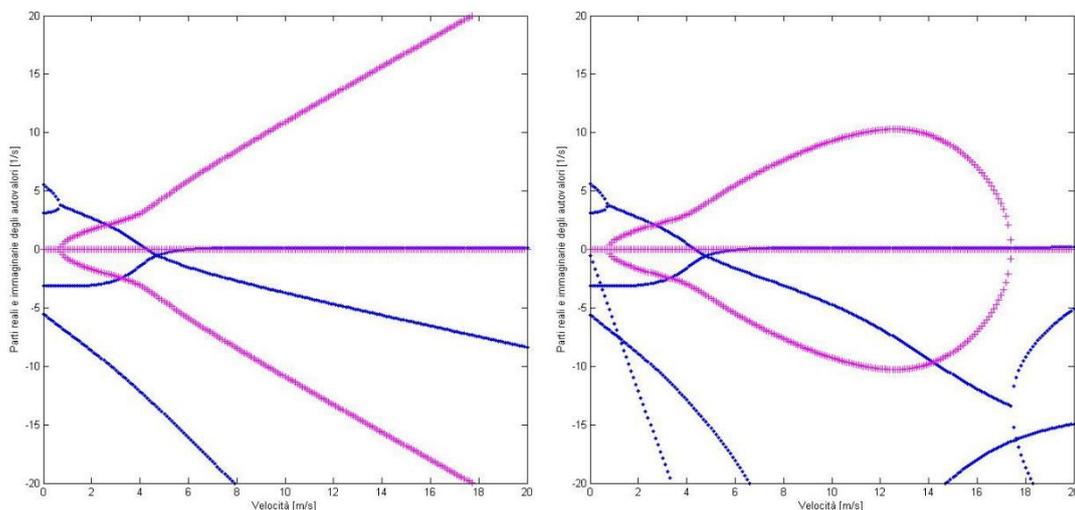
$$\begin{aligned}
 [M^B] \begin{Bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\delta} \\ \ddot{\beta} \end{Bmatrix} + v[C_1^B] \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\delta} \\ \dot{\beta} \end{Bmatrix} + [C^B] \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\delta} \\ \dot{\beta} \end{Bmatrix} + [g[K_0^B] + v^2[K_2^B]] \begin{Bmatrix} \phi \\ \delta \\ \beta \end{Bmatrix} + [K^B] \begin{Bmatrix} \phi \\ \delta \\ \beta \end{Bmatrix} \\
 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

Dove  $[M^B]$  è la matrice simmetrica di massa,  $[C_1^B]$  la matrice di smorzamento che considera gli effetti giroscopici e la quarta matrice è la matrice di rigidità formata da due componenti, la prima  $[K_0^B]$  è proporzionale all'accelerazione di gravità e rappresenta i termini gravitazionali, mentre  $[K_2^B]$  riproduce gli effetti giroscopici e

centrifughi. Queste matrici hanno lo stesso significato fisico delle corrispettive matrici presenti nel modello di Meijaard, Papadopoulos, Ruina e Schwab. Le matrici  $[C^B]$  e  $[K^B]$  sono rispettivamente le matrici di smorzamento e di rigidità dovute alla presenza della rigidità della forcella anteriore.

Per studiare la stabilità si utilizza lo stesso procedimento usato nel modello CWBM, quindi si impiega Matlab per risolvere il problema degli autovalori e per studiarne il segno della parte reale. Sono stati settati gli stessi parametri nominali del modello di Meijaard, Papadopoulos, Ruina e Schwab e la forcella anteriore è stata scelta in acciaio, con una rigidità pari a 5683 Nm/rad. Tale valore è stato ottenuto nello studio “The effect of front fork compliance on the stability of bicycles” di Alberto Doria, Luca Taraborelli e Nicola Segliani.

Viene proposto un confronto tra i risultati dei due modelli:



**Grafico 10: Confronto tra i risultati dei due modelli**

Come si può vedere nei grafici precedenti, l’effetto più evidente dell’aggiunta della rigidità flessionale della forcella è la modifica del modo di weave a velocità elevate: nel modello CWBM il modo di weave ad alte velocità rimaneva un modo complesso; nel nuovo modello invece, dopo una certa velocità, il modo di weave è rimpiazzato da due modi con autovalori a parte reale negativa.

Il secondo effetto della modifica del modello consiste nella comparsa di un nuovo modo oscillatorio chiamato bending: la parte reale dei suoi autovalori è zero a velocità nulla, diminuisce al crescere della velocità fino al suo minimo e poi risale rimanendo comunque negativa e di conseguenza stabile.

Il range di autostabilità non subisce variazioni sensibili rispetto al modello originale.

Nell'Appendice C sono forniti gli script del codice utilizzato per le simulazioni.

Si può dimostrare che abbassando l'asse di flessione il modo di weave scompare a una velocità maggiore, come si può vedere nei grafici seguenti: nel primo la distanza  $h_w$  è pari a 21 cm e il modo di weave si chiude a "goccia" a 17 m/s, nel secondo caso  $h_w$  è stata diminuita a 15 cm e la velocità di chiusura è cresciuta fino a 19 m/s.

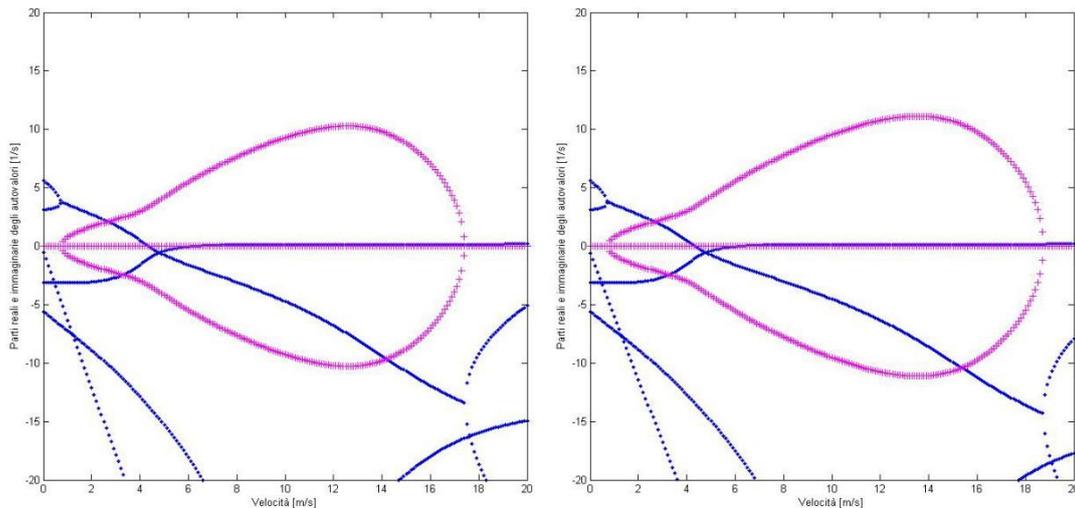


Grafico 11: Confronto tra diverse distanze  $h_w$

La scomparsa del modo di weave ad alte velocità si può considerare un effetto tipico della rigidità flessionale della forcella anteriore<sup>13</sup>.

Un ragionamento analogo a quello fatto per la rigidità flessionale può essere fatto anche per la rigidità torsionale della forcella anteriore: ripetendo gli stessi passaggi si dimostra che i modi di weave, capsize e castering rimangono pressoché invariati rispetto al modello CWBM. Si nota inoltre la formazione di un nuovo modo oscillatorio chiamato torsion, che è quasi dieci volte più piccolo degli altri modi e genera un modo complesso ad alte frequenze; i suoi autovalori hanno sempre parte reale negativa e pertanto non risulta di interesse pratico.

<sup>13</sup> Alberto Doria, Luca Taraborelli e Nicola Segliani – “The effect of front fork compliance on the stability of bicycles”

## 2.6 – Adattamento del modello allo studio parametrico

Lo studio di tutti i 25 parametri che caratterizzano la bicicletta avrebbe comportato un gran numero di simulazioni e di tempo computazionale. Per semplificare lo studio si è deciso di concentrare gli sforzi su un numero limitato di parametri, passando da 25 a 8. Essi sono: il passo  $w$ , l'avancorsa  $c$ , l'angolo di inclinazione dello sterzo  $\lambda$ , la posizione orizzontale  $X_B$  e quella verticale  $Z_B$  del centro di massa del ciclista, la massa dell'avantreno  $m_H$  e i raggi delle ruote.

Tutti i parametri della ruota anteriore vengono considerati diversi da quelli della posteriore, in modo da poter indagare separatamente sull'importanza delle due ruote.

In realtà l'attribuzione di un certo valore ad alcuni dei sopracitati parametri definisce implicitamente il valore di altri. Attribuendo quindi un determinato valore ai raggi delle ruote, sono univocamente definiti anche i loro momenti di inerzia e le loro masse. Allo stesso modo, assegnando un certo valore alla massa dell'avantreno, sono automaticamente definite le componenti del tensore di inerzia  $I_H$ .

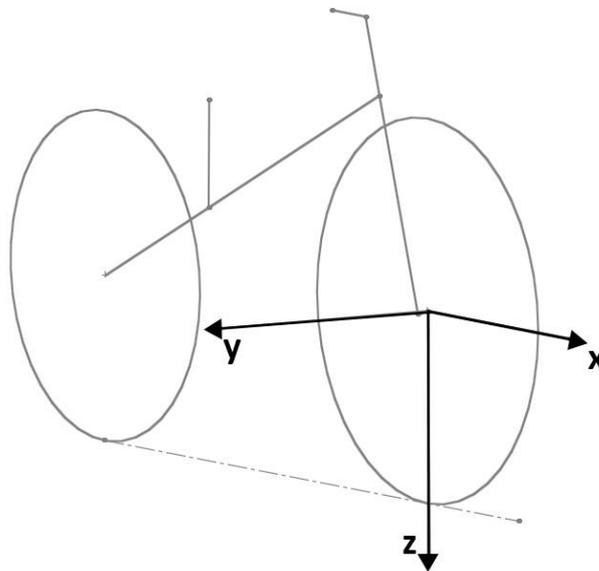


Figura 6: Schema della ruota ad anello

Per calcolare i momenti di inerzia, le ruote sono state approssimate a degli anelli omogenei. I momenti sono espressi come:

$$I_{YY} = m R^2 \qquad I_{XX} = I_{ZZ} = \frac{1}{2} m R^2$$

Considerando che i momenti d'inerzia sono calcolati e non misurati, ad essi viene applicato un fattore correttivo  $\xi = 0,76$  (ottenuto da dati bibliografici) per renderli più simili alla realtà.

Di seguito sono fornite quattro tabelle con i dati delle ruote, per ogni dimensione presa in considerazione.

#### **Ruote da 20":**

<b>Massa</b>	1,5 kg
<b>Raggio</b>	0,254 m
<b>IYY, CALCOLATO</b>	0,096774 kg m <sup>2</sup>
<b>IXX, CALCOLATO = IZZ, CALCOLATO</b>	0,048387 kg m <sup>2</sup>
<b>IYY, CORRETTO</b>	0,0735 kg m <sup>2</sup> (approssimato)
<b>IXX, CORRETTO = IZZ, CORRETTO</b>	0,0368 kg m <sup>2</sup> (approssimato)

#### **Ruote da 24":**

<b>Massa</b>	2 kg
<b>Raggio</b>	0,305 m
<b>IYY, CALCOLATO</b>	0,18605 kg m <sup>2</sup>
<b>IXX, CALCOLATO = IZZ, CALCOLATO</b>	0,093025 kg m <sup>2</sup>
<b>IYY, CORRETTO</b>	0,1414 kg m <sup>2</sup> (approssimato)
<b>IXX, CORRETTO = IZZ, CORRETTO</b>	0,0707 kg m <sup>2</sup> (approssimato)

#### **Ruote da 28":**

<b>Massa</b>	3 kg
<b>Raggio</b>	0,356 m
<b>IYY, CALCOLATO</b>	0,380208 kg m <sup>2</sup>
<b>IXX, CALCOLATO = IZZ, CALCOLATO</b>	0,190104 kg m <sup>2</sup>
<b>IYY, CORRETTO</b>	0,2890 kg m <sup>2</sup> (approssimato)
<b>IXX, CORRETTO = IZZ, CORRETTO</b>	0,1445 kg m <sup>2</sup> (approssimato)

#### **Ruote da 29":**

<b>Massa</b>	3 kg
<b>Raggio</b>	0,368 m
<b>IYY, CALCOLATO</b>	0,406272 kg m <sup>2</sup>
<b>IXX, CALCOLATO = IZZ, CALCOLATO</b>	0,203136 kg m <sup>2</sup>
<b>IYY, CORRETTO</b>	0,3088 kg m <sup>2</sup> (approssimato)
<b>IXX, CORRETTO = IZZ, CORRETTO</b>	0,1544 kg m <sup>2</sup> (approssimato)

Si può calcolare il tensore d'inerzia per l'avantreno, al variare della sua massa:

$$I_H = m_H \begin{bmatrix} 0,01473 & 0 & -0,00189 \\ 0 & 0,015 & 0 \\ -0,00189 & 0 & 0,00177 \end{bmatrix}$$

$$m_H = 3 \text{ kg} \rightarrow I_H = \begin{bmatrix} 0,04419 & 0 & -0,00567 \\ 0 & 0,045 & 0 \\ -0,00567 & 0 & 0,00531 \end{bmatrix}$$

$$m_H = 5 \text{ kg} \rightarrow I_H = \begin{bmatrix} 0,07365 & 0 & -0,00945 \\ 0 & 0,075 & 0 \\ -0,00945 & 0 & 0,00885 \end{bmatrix}$$

Considerando solo un certo numero di grandezze caratterizzanti si sono limitate le simulazioni da implementare, diminuendo i parametri da considerare ma permettendo comunque di effettuare un'analisi completa e approfondita.

## ***3 – Metodo per discriminare l’influenza dei parametri***

---

In questo capitolo viene spiegata l’analisi grazie alla quale si studiano gli effetti dei diversi parametri sulla stabilità della bicicletta.

In primo luogo bisogna capire qual è l’approccio ideale per comprendere pienamente il sistema ed organizzare le simulazioni necessarie ad ottenere delle risposte numeriche. In seguito viene spiegato in che modo queste risposte vengono analizzate per giungere a delle conclusioni sull’influenza dei parametri.

### ***3.1 – Approccio 2-level factorial DOE***

Per simulare il comportamento della bicicletta è stato necessario implementare una metodologia DOE (Design of Experiments), grazie alla quale è stato possibile comprendere il sistema studiato, determinare le variabili più significative e determinare le relazioni tra esse e la risposta del sistema.

Per ottenere informazioni complete si è utilizzato un approccio 2-level factorial: grazie ad esso ad ogni parametro sono stati assegnati due livelli ed si sono studiate tutte le possibili configurazioni tra le variabili considerate<sup>14</sup>. Questa è un’analisi molto comoda, anche in presenza di un gran numero di fattori su cui investigare, poiché riesce a coprire tutte le combinazioni dei parametri nei diversi livelli.

Questo esperimento fattoriale completo permette di fornire informazioni su come i fattori interagiscano tra loro. Questa informazione non è ottenibile esaminando i parametri con l’approccio OFAT (One Factor At a-Time). Il limite di questa analisi è che, utilizzando solo due livelli per ogni parametro, è possibile ottenere esclusivamente delle dipendenze lineari tra fattori e risposta. Per ovviare a questo inconveniente sarebbe necessario aumentare il numero di livelli, ottenendo però un numero molto grande di simulazioni da implementare.

Il numero di combinazioni è calcolato dalla seguente espressione:

$$n = L^F$$

---

<sup>14</sup> Douglas C. Montgomery – “Design and analysis of experiments”

Con n numero di combinazioni possibili, L numero di livelli per ogni parametro (due in questo caso) e F numero di fattori considerati.

I livelli possono essere qualitativi, come alto o basso, acceso o spento, o quantitativi come valori di massa, altezza e inclinazione.

Viene proposto un semplice esempio con tre fattori A, B e C a due livelli ciascuno (acceso o spento, rispettivamente + e -).

Il numero di prove è pari a  $2^3 = 8$ :

Prova	Fattori			Risposta
	A	B	C	
1	-	-	-	(1)
2	+	-	-	a
3	-	+	-	b
4	+	+	-	ab
5	-	-	+	c
6	+	-	+	ac
7	-	+	+	bc
8	+	+	+	abc

Le risposte sono espresse con la lettera minuscola del fattore (o dei fattori) che risulta acceso in quella particolare prova.

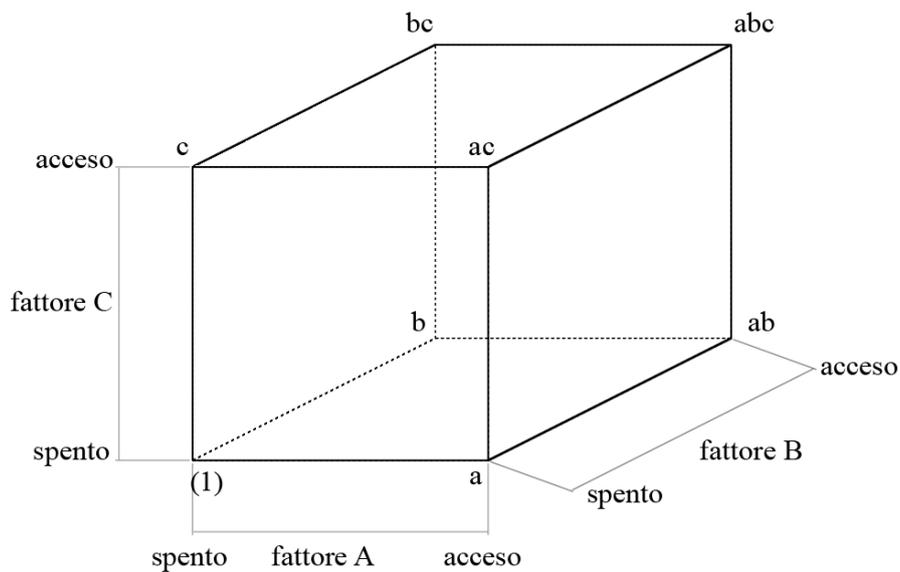


Figura 7: Visione geometrica di un design  $2^3$

In questo modo si possono tabulare tutte le prove da svolgere, numerandole in modo univoco, senza correre il rischio di rifare simulazioni già fatte.

Lo stesso ragionamento può essere ripetuto aumentando il numero di fattori. Per il caso della bicicletta, i parametri presi in considerazione sono otto, per un totale di  $2^8 = 256$  simulazioni.

### 3.2 – *Analisi di correlazione di Pearson*

Per completare lo studio è necessario trovare una correlazione tra i parametri e la risposta delle simulazioni: l'analisi di correlazione è un metodo per stabilire il grado di probabilità che ci sia una certa relazione tra le due grandezze<sup>15</sup>.

Seguono le espressioni per il calcolo degli indici di Pearson  $\rho_{xy}$ :

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$
$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$
$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$
$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Dove  $\sigma_{xy}$  è la covarianza tra x e y,  $\sigma_x$  è la radice quadrata della varianza di x,  $\sigma_y$  è la radice quadrata della varianza di y, e  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  sono le medie aritmetiche di x e y.

Gli indici di Pearson sono dei numeri puri, compresi tra -1 e 1:

- valori prossimi a 1 indicano che c'è una forte correlazione positiva tra le due variabili;

---

<sup>15</sup> Vittore Cossalter, Alberto Doria, Matteo Formentini e Martino Peretto – “*Experimental and numerical analysis of the influence of tyres’ properties on the straight running stability of a sport-touring motorcycle*”

- valori vicini a -1 significano che tra le due grandezze c'è una forte correlazione negativa;
- al contrario, per valori prossimi allo 0 vuol dire che non ci sono prove di una dipendenza tra le due variabili.

In base agli indici di Pearson si può ragionare sulla forma della relazione tra le variabili. In particolare si può comprendere che tipo di andamento ha la risposta al crescere del fattore di riferimento. In tal modo si può prevedere quale parametro è meglio modificare, e in che modo, per ottenere una risposta più consona alle proprie esigenze.

Sono forniti sei esempi di diversi indici di Pearson, con relativa spiegazione del grafico.

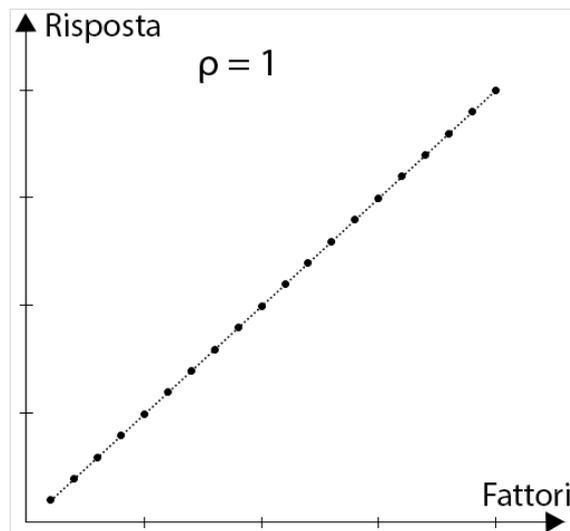


Grafico 12: Diretta proporzionalità

Nel primo caso l'indice di Pearson è uguale a 1. Di conseguenza c'è una fortissima correlazione tra la variabile dipendente e la variabile indipendente. Questo giustifica l'assunzione che ci sia una perfetta proporzionalità diretta tra le grandezze considerate e la risposta.

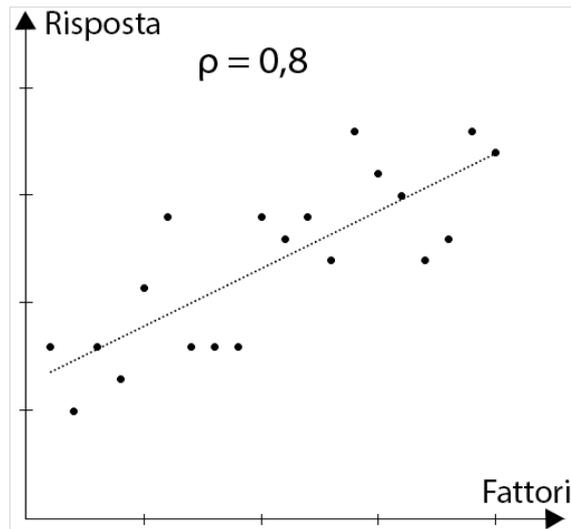


Grafico 13: Forte correlazione positiva

L'indice di Pearson cala, ma tuttavia rimane prossimo all'unità. I punti sul grafico non sono più tutti allineati sulla retta interpolatrice, ma c'è una leggera dispersione. La retta mantiene comunque una disposizione chiara che va dall'origine degli assi verso l'alto. Si tratta di una forte correlazione positiva.

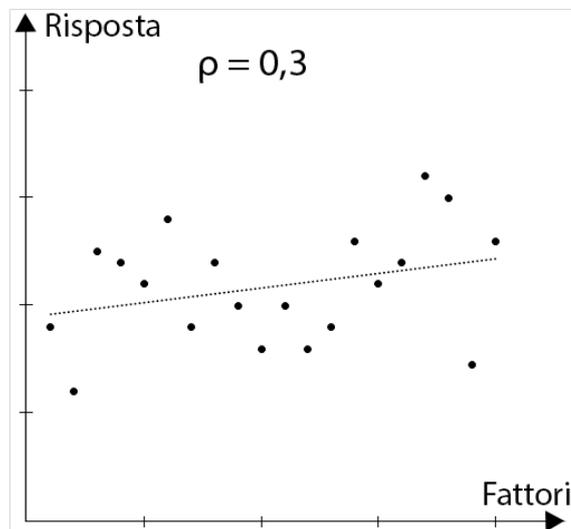


Grafico 14: Sensibile correlazione positiva

Se l'indice di Pearson calasse ancora, la disposizione dei punti risulterebbe meno chiara. In questo caso si riconosce comunque una correlazione sensibile tra le grandezze, ma essa risulta meno forte e nitida.

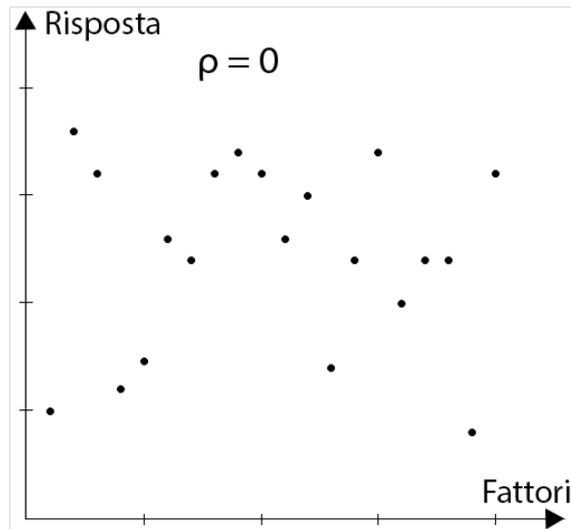


Grafico 15: Nessuna correlazione

Con l'indice di Pearson uguale a 0 i punti sul grafico hanno una disposizione non riconducibile a una particolare relazione. Questo non vuol dire che essi siano completamente scorrelati ma significa che per l'analisi di Pearson non ci sono prove dell'esistenza di questa correlazione.

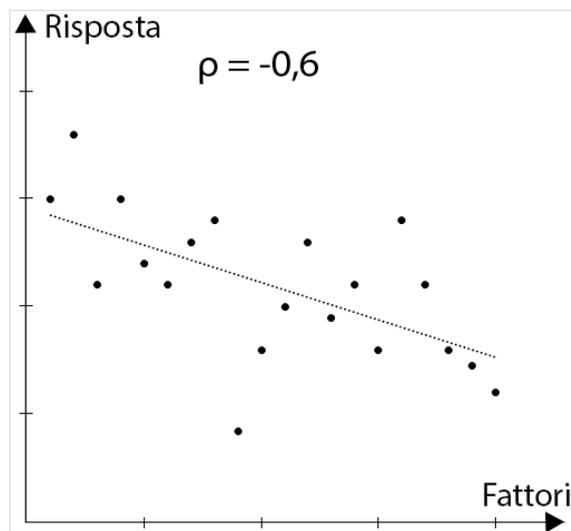


Grafico 16: Correlazione negativa

Come già detto l'indice di Pearson può anche essere negativo. In tal caso si riscontra l'esatto contrario di quanto presentato nei grafici precedenti, quindi alla crescita del

valore del fattore indipendente corrisponde una diminuzione del valore della risposta. Dato che l'indice è diverso da -1 le velocità di queste modifiche non sono uguali.

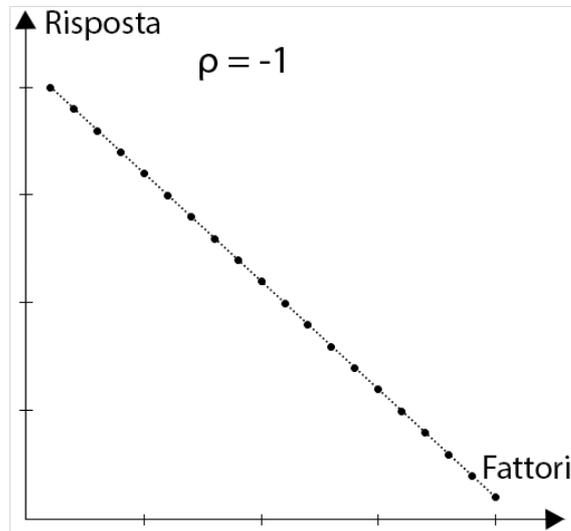


Grafico 17: Proporzionalità inversa

Con indice di Pearson uguale a -1 si riconosce immediatamente una perfetta proporzionalità inversa tra le variabili.



## 4 – Simulazioni

Le simulazioni hanno lo scopo di fornire le velocità di weave e di capsise in ogni precisa configurazione, al fine di comprendere con quali valori dei parametri la bicicletta possa avere un range di autostabilità più ampio.

Ad ogni parametro sono stati assegnati un valore basso e uno alto. I valori sono stati scelti in modo che la media tra i due fosse pari al valore nominale (scelto da Schwab) e che lo scarto quadratico medio rapportato al valore nominale fosse molto simile per tutti i parametri. Tenendo in considerazione che le dimensioni delle ruote sono standardizzate, sono stati scelti i seguenti valori:

<i>Parametri</i>	$X_{NOMINALE} = \bar{X}$	<i>Valore Basso</i>	<i>Valore Alto</i>	$\frac{\sqrt{\sigma^2}}{\bar{X}}$
Ruota posteriore	Ø 24''	Ø 20''	Ø 28''	0,1667
Ruota anteriore	Ø 26,5''	Ø 24''	Ø 29''	0,0943
Massa dell'avantreno $m_H$	4 kg	3 kg	5 kg	0,25
Posizione $X_B$	0,3 m	0,2 m	0,4 m	0,3333
Posizione $Z_B$	-0,9 m	-0,75 m *	-1,05 m *	-0,1667
Passo $w$	1,02 m	0,80 m	1,24 m	0,2157
Avancorsa $c$	0,08 m	0,05 m	0,11 m	0,375
Angolo $\lambda$	18° [ $\pi/10$ ]	15° [ $\pi/12$ ]	21° [ $7 \pi/60$ ]	0,1667
Rigidezza $K_\beta$	5683 Nm/rad	4262,25 Nm/rad	7103,75 Nm/rad	0,25

\*: in questo caso “alto e basso” non si riferiscono ai valori, ma piuttosto alla posizione fisica del centro di massa del ciclista.

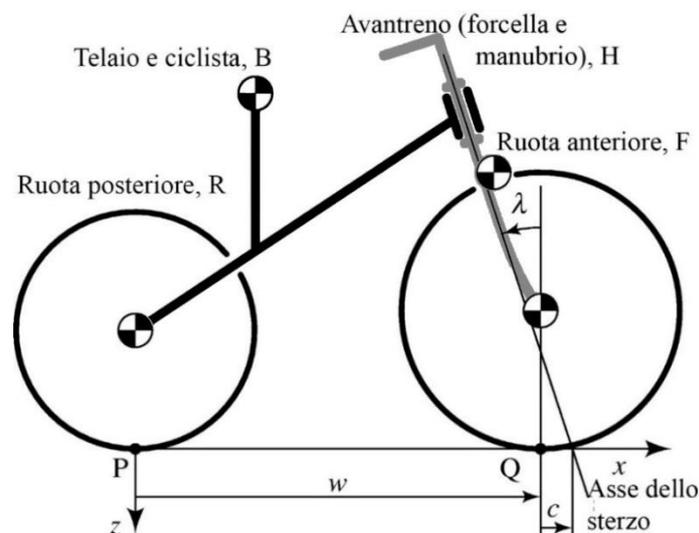


Figura 8: Schema della bicicletta

In totale sono stati eseguiti quattro cicli di 256 simulazioni ciascuno. Ogni ciclo è stato completato dall'analisi di correlazione, per capire come ogni parametro influenzasse la stabilità del sistema.

Di seguito è descritto nel dettaglio ogni ciclo di simulazioni, con la relativa analisi di correlazione e le osservazioni finali. Le tabelle con i risultati delle singole simulazioni sono fornite in appendice.

## 4.1 – Primo ciclo di simulazioni

Come già anticipato nel capitolo 2, gli otto parametri considerati sono i raggi delle ruote, la massa dell'avantreno, le posizioni orizzontale ( $X_B$ ) e verticale ( $Z_B$ ) del centro di massa del ciclista, il passo delle ruote, l'avancorsa e l'inclinazione dello sterzo. Inizialmente la rigidità della forcella anteriore è stata imposta infinita, seguendo fedelmente il modello CWBM.

Dai risultati ottenuti è stato possibile eseguire l'analisi di correlazione ottenendo i seguenti indici di Pearson:

Ruota posteriore		Ruota anteriore	
V di weave	V di capsize	V di weave	V di capsize
0,01885	0,11146	-0,09447	-0,36890

Massa dell'avantreno		Posizione $X_B$	
V di weave	V di capsize	V di weave	V di capsize
0,15194	0,00175	-0,09198	0,42524

Posizione $Z_B$		Passo	
V di weave	V di capsize	V di weave	V di capsize
-0,01701	0,05189	0,87245	-0,54789

Avancorsa		Inclinazione dello sterzo	
V di weave	V di capsize	V di weave	V di capsize
0,04650	0,45381	-0,14416	0,09799

È importante comprendere il significato dei indici di Pearson: se un indice è di segno negativo significa che la velocità cala al crescere del valore del parametro a cui è attribuito, e viceversa. Al contrario, se l'indice ha segno positivo vuol dire che all'aumentare del valore del parametro crescerà anche la velocità.

Per quanto riguarda i moduli degli indici, più essi sono prossimi allo 0, meno sarà la possibilità di avere una relazione tra fattore e risposta. Invece, con indici prossimi a 1 ci si avvicina alla proporzionalità diretta (o inversa, con segno negativo) tra la velocità e il parametro relativo all'indice.

Inoltre, al fine dello studio della stabilità, bisogna osservare che è conveniente avere un'alta velocità di capsise e una bassa velocità di weave, in modo da ottenere un maggiore range di autostabilità. Quindi il significato degli indici è opposto che ci si riferisca alla velocità di weave o alla velocità di capsise.

In conclusione, se si considerano i valori dei parametri sempre crescenti, è meglio avere indici relativi alla velocità di weave con segno negativo e indici della velocità di capsise con segno positivo.

Seguono dei grafici per una migliore comprensione degli indici.

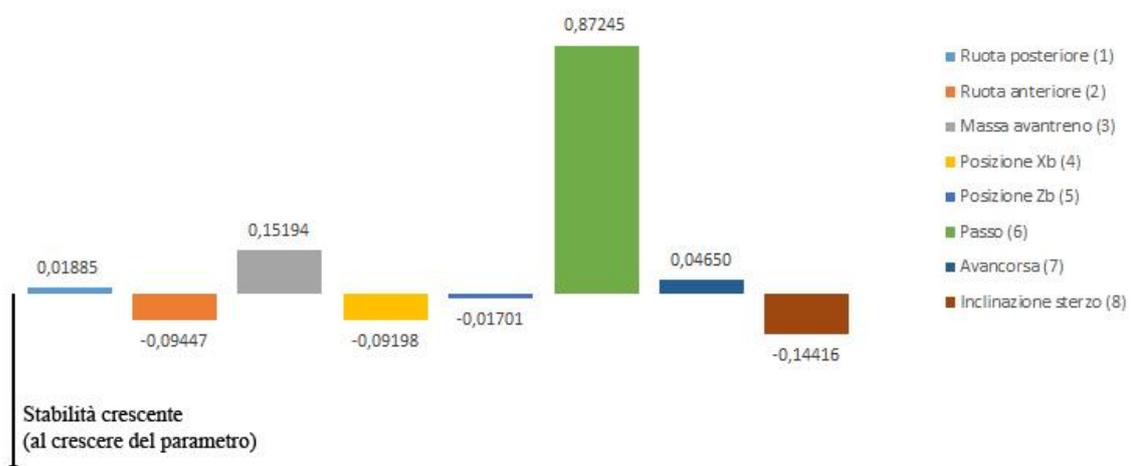
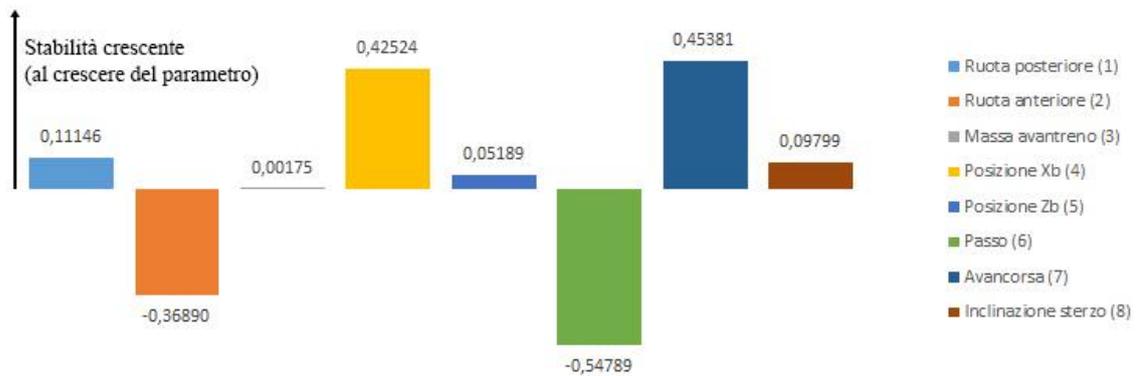
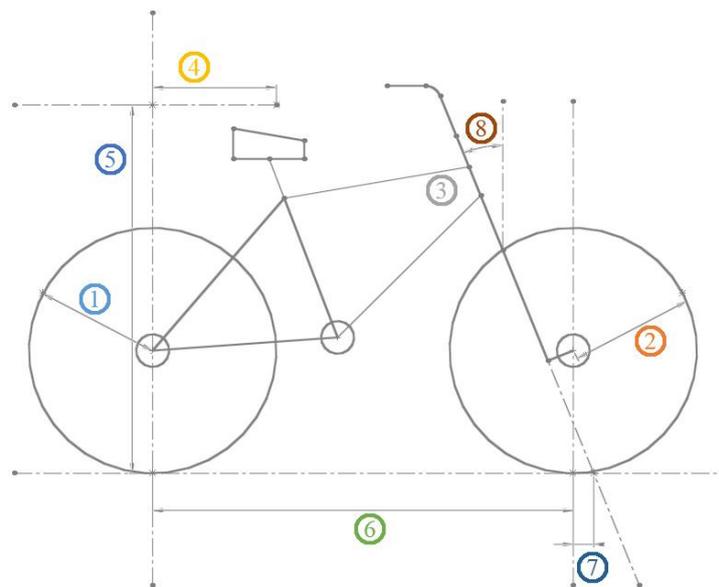


Grafico 18: Indici della velocità di weave del primo ciclo di simulazioni



**Grafico 19: Indici della velocità di capsizze del primo ciclo di simulazioni**



**Figura 9: Schema della bicicletta con i parametri considerati**

Di seguito viene fornito un grafico che riassume gli istogrammi precedenti: in esso è rappresentata l'influenza dell'aumento del valore di ogni parametro sul range di autostabilità. È importante specificare che gli indici in esso presenti non sono gli indici di correlazione di Pearson delle differenze di velocità, ma dei coefficienti per una più facile interpretazione delle reali dipendenze.

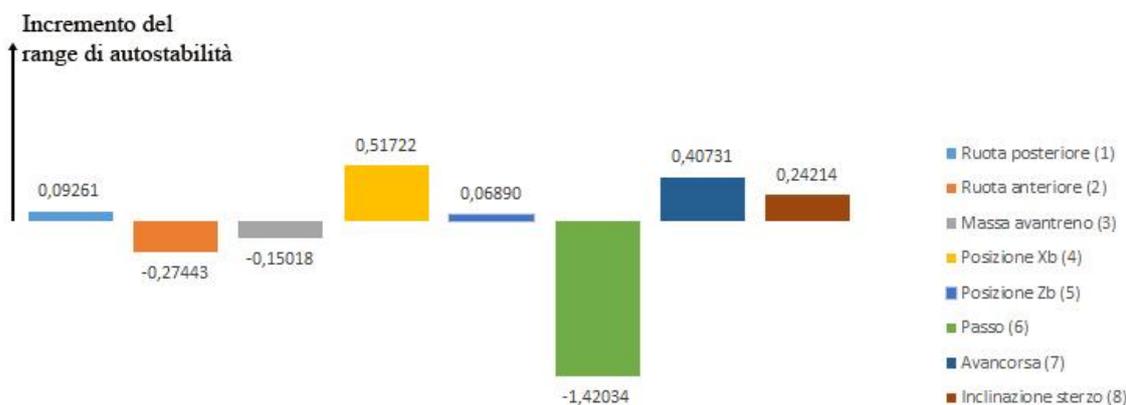


Grafico 20: Influenza dei parametri sul range di autostabilità per il primo ciclo

Osservando gli istogrammi si giunge alle seguenti conclusioni, considerando la crescita di ogni parametro:

- ruota posteriore: si nota un piccolissimo effetto sulla velocità di weave e un sensibile effetto stabilizzante sulla velocità di capsiz;
- ruota anteriore: l'effetto stabilizzante sulla velocità di weave viene contrastato nettamente da una ancor più forte destabilizzazione sulla velocità di capsiz;
- massa dell'avantreno: non viene presentato alcun effetto sulla velocità di capsiz ma si nota un contributo indesiderato sulla velocità di weave;
- posizione orizzontale: l'aumento del parametro permette di migliorare notevolmente la stabilità della bicicletta, per effetto di un contemporaneo calo della velocità di weave e un aumento della velocità di capsiz;
- posizione verticale: non si riscontrano modifiche sensibili al range di velocità poiché si nota un effetto quasi nullo sulla velocità di weave e un piccolo contributo stabilizzante sulla velocità di capsiz;
- passo: al contrario di quanto visto per la posizione orizzontale, la crescita del parametro induce un effetto fortemente destabilizzante, riducendo il range di velocità in modo considerevole;
- avancorsa: un piccolo contributo indesiderato sulla velocità di weave viene annullato da un forte effetto stabilizzante sulla velocità di capsiz;
- inclinazione: il range di autostabilità migliora con un aumento della velocità di capsiz e un simultaneo calo della velocità di weave.

## 4.2 – Secondo ciclo di simulazioni

Per avere maggiori informazioni su quale fosse il reale comportamento del sistema bicicletta è stato opportuno indicare un valore finito della rigidità della forcella anteriore. Si è considerato una forcella in acciaio con  $k_{\beta} = 5683 \text{ Nm/rad}$ . Gli altri parametri delle simulazioni sono rimasti invariati.

Come nel caso precedente, dai risultati è stata eseguita l'analisi di correlazione:

Ruota posteriore	
V di weave	V di capsizze
0,00041	0,04557

Ruota anteriore	
V di weave	V di capsizze
-0,14181	-0,37048

Massa dell'avantreno	
V di weave	V di capsizze
0,14754	0,02619

Posizione $X_B$	
V di weave	V di capsizze
-0,06116	0,47707

Posizione $Z_B$	
V di weave	V di capsizze
-0,02499	0,03558

Passo	
V di weave	V di capsizze
0,76942	-0,58699

Avancorsa	
V di weave	V di capsizze
0,01141	0,41015

Inclinazione dello sterzo	
V di weave	V di capsizze
-0,32124	0,18002

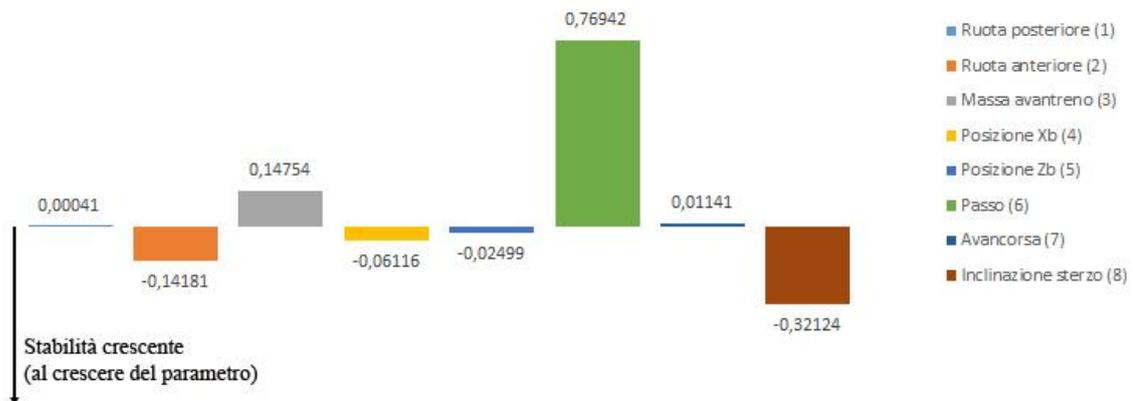


Grafico 21: Indici della velocità di weave del secondo ciclo di simulazioni



Grafico 22: Indici della velocità di capsizze del secondo ciclo di simulazioni

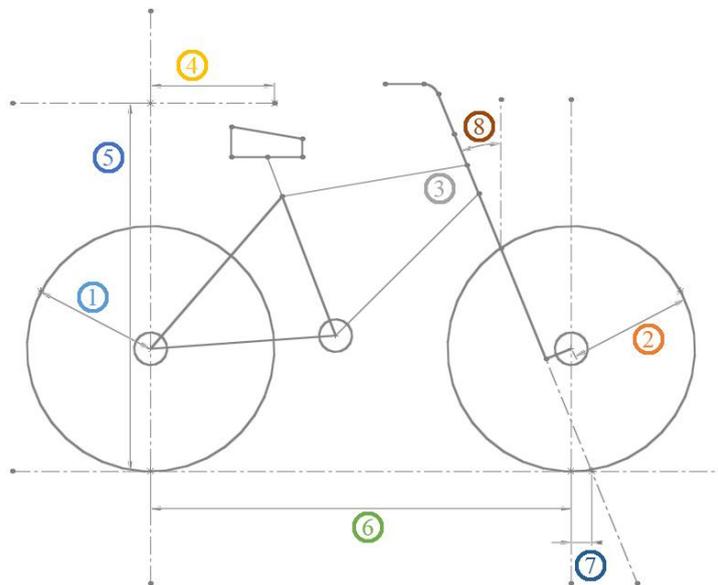


Figura 10: Schema della bicicletta con i parametri considerati

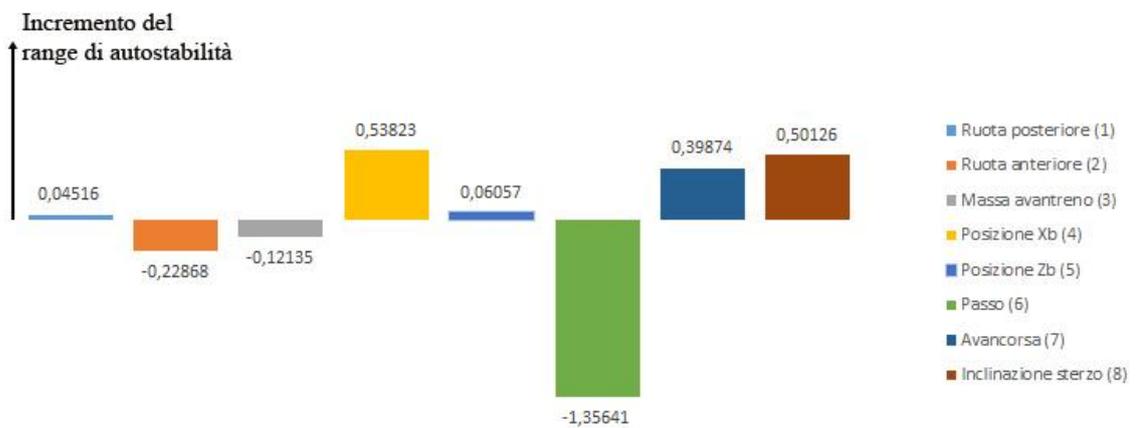


Grafico 23: Influenza dei parametri sul range di autostabilità per il secondo ciclo

All'aumentare del valore di ogni parametro si possono fare le seguenti considerazioni:

- ruota posteriore: si nota un effetto praticamente nullo sulla velocità di weave e un piccolo contributo stabilizzante per la velocità di capsizate;
- ruota anteriore: il range di velocità si stringe dato che la velocità di capsizate diminuisce più velocemente di quanto quella di weave cresca;
- massa dell'avantreno: un piccolissimo contributo positivo alla velocità di capsizate viene sovrastato da un sensibile effetto destabilizzante sulla velocità di weave;
- posizione orizzontale: nel complesso si ottiene un buon miglioramento della stabilità in quanto la velocità di weave cala leggermente e la velocità di capsizate aumenta in maniera decisa;
- posizione verticale: si constatano piccoli effetti stabilizzanti in entrambe le velocità;
- passo: come nel ciclo di simulazioni precedente, si ottiene un effetto fortemente negativo in quanto l'aumento del parametro si ripercuote in una fortissima diminuzione del range di autostabilità, dovuto alla simultanea diminuzione della velocità di capsizate e un robusto aumento della velocità di weave;
- avancorsa: un forte contributo stabilizzante alla velocità di capsizate e un piccolo effetto sulla velocità di weave migliorano il range di autostabilità;
- inclinazione: si ottiene un discreto aumento del range di velocità, giustificato dal sensibile aumento della velocità di capsizate e da una forte diminuzione della velocità di weave.

### 4.3 – Terzo ciclo di simulazioni

Dai primi due cicli di simulazioni è stato possibile comprendere come la posizione verticale del centro di massa fosse un parametro poco influente sulla stabilità del sistema. Di conseguenza, nelle successive simulazioni il parametro della posizione  $Z_B$  è stato sostituito dalla rigidezza della forcella anteriore  $k_\beta$ . Il valore della posizione verticale è stato imposto nominale.

Gli indici di Pearson ottenuti sono:

Ruota posteriore	
V di weave	V di capsiz
0,00529	0,14353

Ruota anteriore	
V di weave	V di capsiz
-0,16102	-0,34784

Massa dell'avantreno	
V di weave	V di capsiz
0,14951	0,02719

Posizione $X_B$	
V di weave	V di capsiz
-0,05298	0,48259

Passo	
V di weave	V di capsiz
0,77569	-0,55279

Avancorsa	
V di weave	V di capsiz
0,02960	0,33939

Inclinazione dello sterzo	
V di weave	V di capsiz
-0,30617	0,15632

Rigidezza	
V di weave	V di capsiz
0,01518	-0,05795

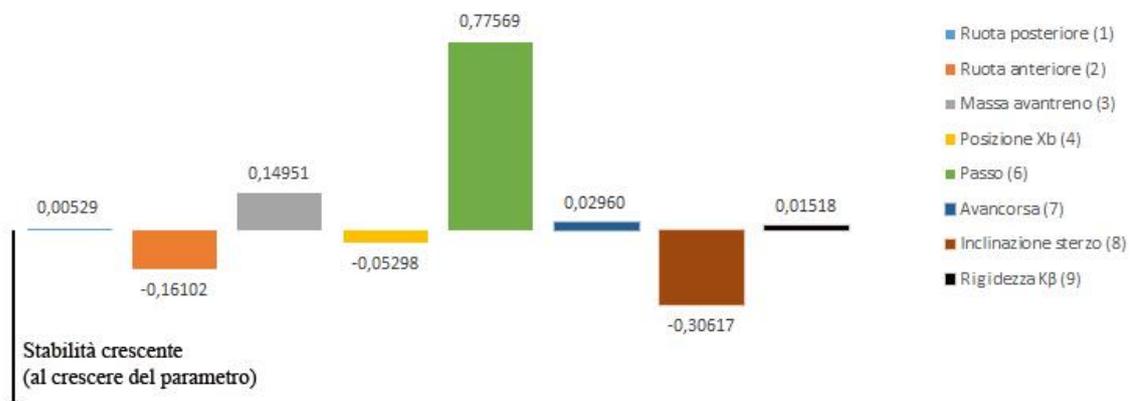


Grafico 24: Indici della velocità di weave del terzo ciclo di simulazioni

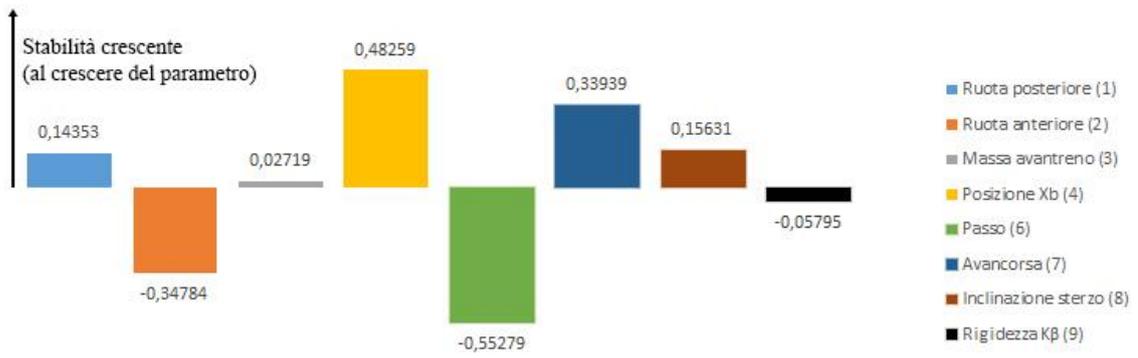


Grafico 25: Indici della velocità di capsizing del terzo ciclo di simulazioni

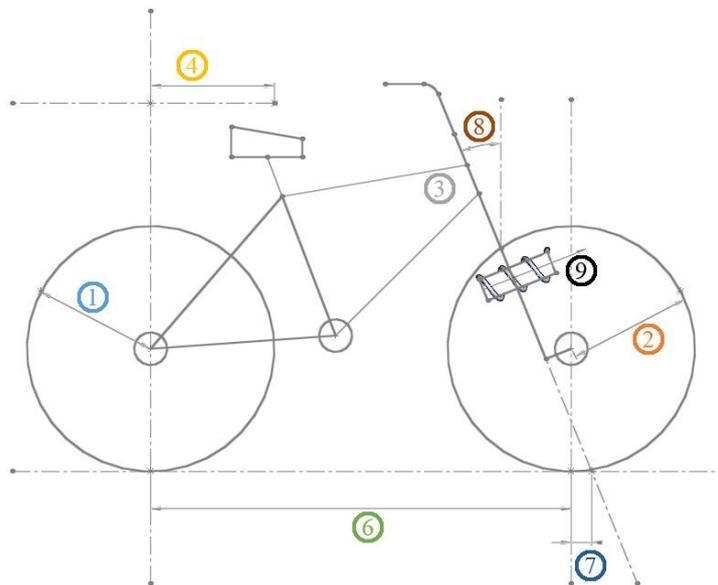


Figura 11: Schema della bicicletta con i parametri considerati

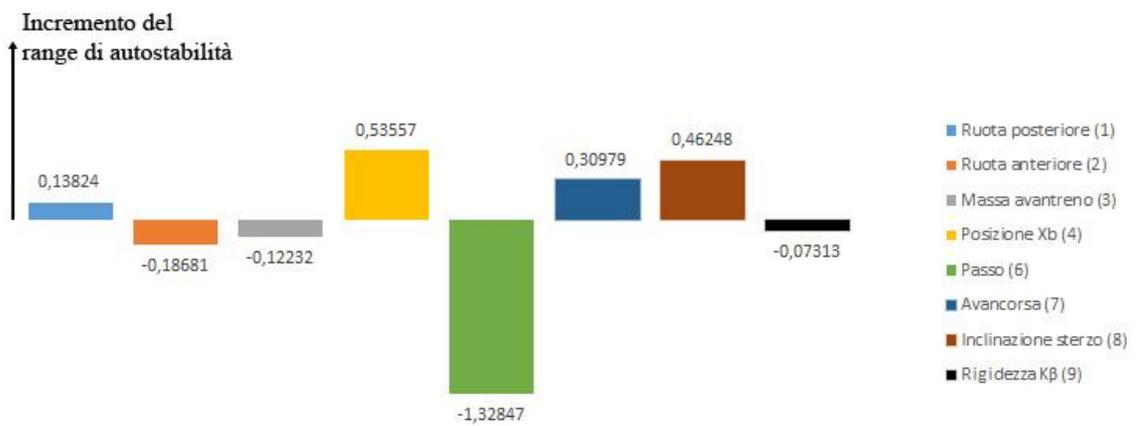


Grafico 26: Influenza dei parametri sul range di autostabilità per il terzo ciclo

Al crescere del valore del parametro, si verificano i seguenti effetti:

- ruota posteriore: il range di autostabilità si allarga in quanto la velocità di weave non cambia ma la velocità di capsize aumenta sensibilmente;
- ruota anteriore: un effetto stabilizzante sulla velocità di weave viene sovrastato da un contributo fortemente negativo sulla velocità di capsize;
- massa dell'avantreno: l'effetto positivo sulla velocità di capsize è troppo piccolo per pareggiare il sensibile contributo destabilizzante sulla velocità di weave;
- posizione orizzontale: come negli altri cicli di simulazioni, il range di autostabilità si allarga grazie ad un concreto aumento della velocità di capsize, a fronte di una leggera diminuzione della velocità di weave;
- passo: il passo si conferma il parametro che, al crescere del valore, più influenza negativamente la stabilità della bicicletta: entrambe le velocità stringono il range di autostabilità in modo netto e deciso;
- avancorsa: un piccolo contributo stabilizzante alla velocità di weave e un forte effetto positivo alla velocità di capsize permettono di ampliare il range di velocità;
- inclinazione: un sensibile aumento della velocità di capsize e una decisa diminuzione della velocità di weave migliorano la stabilità;
- rigidità: entrambe le velocità subiscono una piccola variazione a scapito dell'ampiezza del range di velocità.

## 4.4 – Quarto ciclo di simulazioni

Nelle simulazioni precedenti le posizioni  $x_H$  e  $z_H$  del centro di massa dell'avantreno sono rimaste costanti. In realtà esse possono cambiare e dipendono dal passo, dall'avancorsa e dall'inclinazione dello sterzo. Non considerare queste dipendenze significa modificare la geometria della forcella al variare di questi parametri. Per risolvere questo aspetto si sono implementate delle nuove simulazioni nelle quali le coordinate del centro di massa dell'avantreno fossero funzione di  $w$ ,  $c$  e  $\lambda$ .

Per trovare le dipendenze appena descritte è necessario considerare un avantreno caratterizzato dai valori nominali e modificare separatamente il passo, l'avancorsa e l'inclinazione dello sterzo (si trascurano piccole modifiche al rake della ruota).

- Contributo del passo:

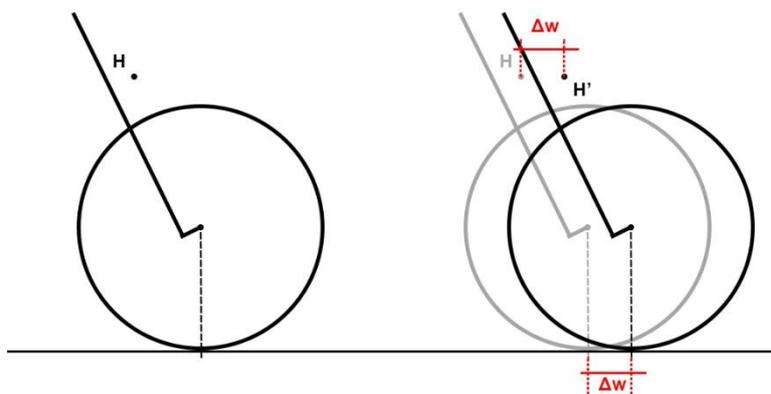


Figura 12: Schema dell'avantreno, con passo variabile, avanzorsa e inclinazione costanti

L'incremento del valore del passo produce un uguale aumento di  $x_H$ , mentre  $z_H$  rimane invariato.

- Contributo dell'avancorsa:

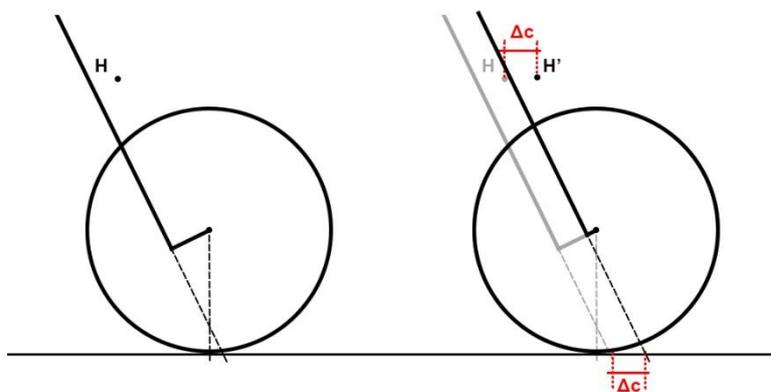


Figura 13: Schema dell'avantreno, con avancorsa variabile, passo e inclinazione costanti

Anche in questo caso  $x_H$  avanza di una quantità pari al valore di cui aumenta  $c$ . La coordinata  $z_H$  non subisce alcun cambiamento.

- Contributo dell'inclinazione dello sterzo:  
Si consideri un sistema di riferimento parallelo a  $xyz$ , con origine in  $C$ ; si definisce  $\vec{u}$  il vettore che unisce il punto  $C$  con il punto  $H$ , con  $x_C = z_C = 0$  e  $x_H = -0,2$ ,  $y_H = -0,7$ :

$$\vec{u} = \begin{Bmatrix} x_H - x_C \\ z_H - z_C \end{Bmatrix}$$

Mantenendo costanti il passo e l'avancorsa e variando l'inclinazione dello sterzo di  $\Delta\lambda$ , si ottiene una nuova configurazione, come nella seguente figura.

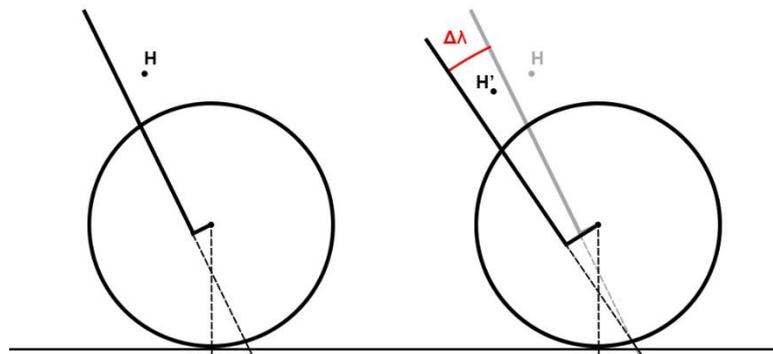


Figura 14: Schema dell'avantreno, con inclinazione variabile, avancorsa e passo costanti

Il nuovo vettore  $\vec{u}'$  è dipende dal cambio di inclinazione:

$$\vec{u}' = \begin{Bmatrix} x_{H'} - x_C \\ z_{H'} - z_C \end{Bmatrix} = [R] \vec{u} = \begin{bmatrix} \cos \Delta\lambda & -\sin \Delta\lambda \\ \sin \Delta\lambda & \cos \Delta\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_H - x_C \\ z_H - z_C \end{Bmatrix}$$

In questo modo si trova:

$$\begin{cases} x_H = -0,2 \cos(\lambda_{nominale} - \lambda) + 0,7 \sin(\lambda_{nominale} - \lambda) \\ z_H = -0,2 \sin(\lambda_{nominale} - \lambda) - 0,7 \cos(\lambda_{nominale} - \lambda) \end{cases}$$

Infine le nuove coordinate del centro di massa dell'avantreno, rispetto al sistema di riferimento xyz con origine in O, vengono espresse come:

$$\begin{cases} x_H = -0,2 \cos(\lambda_{nominale} - \lambda) + 0,7 \sin(\lambda_{nominale} - \lambda) + w + c \\ z_H = -0,2 \sin(\lambda_{nominale} - \lambda) - 0,7 \cos(\lambda_{nominale} - \lambda) \end{cases}$$

I parametri presi in considerazione sono gli stessi studiati nel terzo ciclo di simulazioni. Gli indici di Pearson ottenuti sono i seguenti:

Ruota posteriore	
V di weave	V di capsize
0,04383	0,05348

Ruota anteriore	
V di weave	V di capsize
-0,56976	-0,43455

Massa dell'avantreno	
V di weave	V di capsize
0,08529	0,07060

Posizione X <sub>B</sub>	
V di weave	V di capsize
-0,05212	0,51394

Passo	
V di weave	V di capsize
0,34944	0,10550

Avancorsa	
V di weave	V di capsize
0,44894	0,55424

Inclinazione	
V di weave	V di capsize
-0,39563	-0,26131

Rigidezza	
V di weave	V di capsize
0,04027	-0,01195

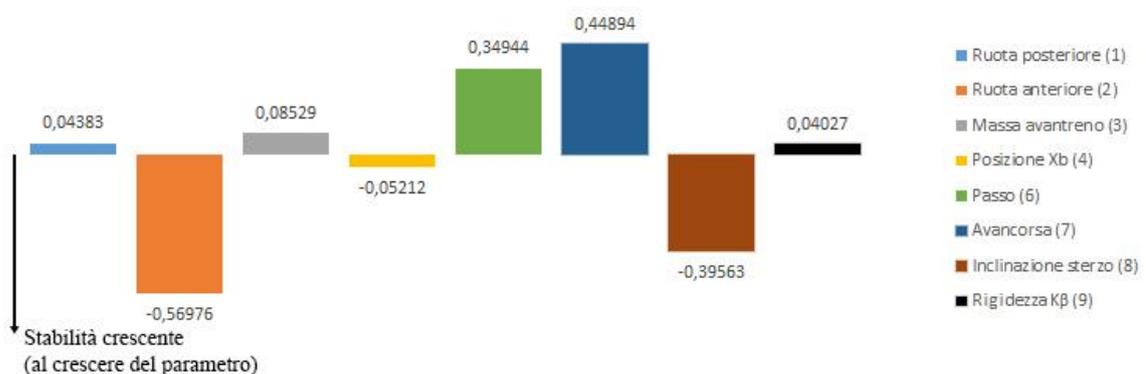


Gráfico 27: Indici della velocità di weave del quarto ciclo di simulazioni

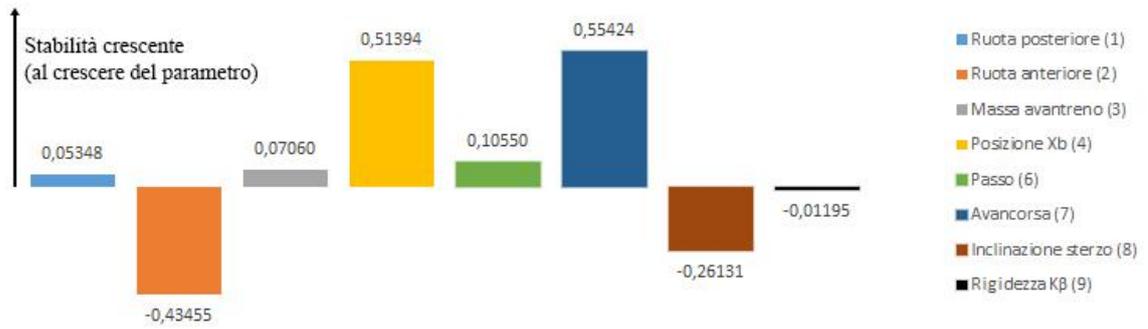


Grafico 28: Indici della velocità di capsizing del quarto ciclo di simulazioni

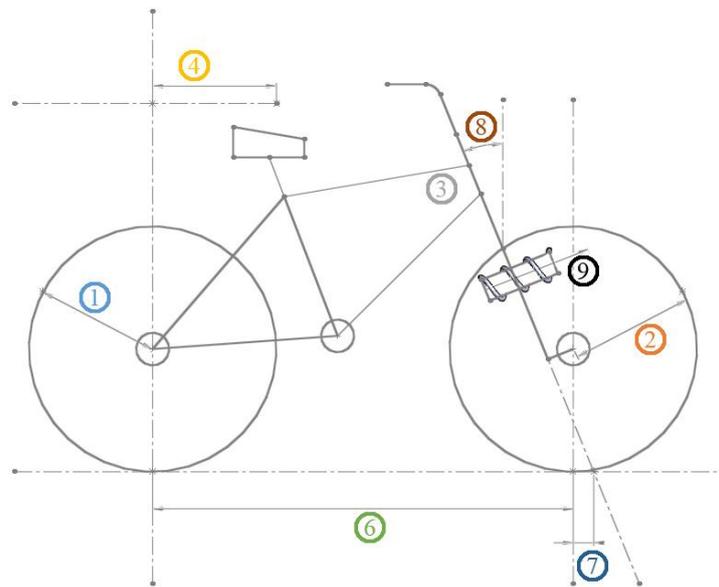


Figura 15: Schema della bicicletta con i parametri considerati

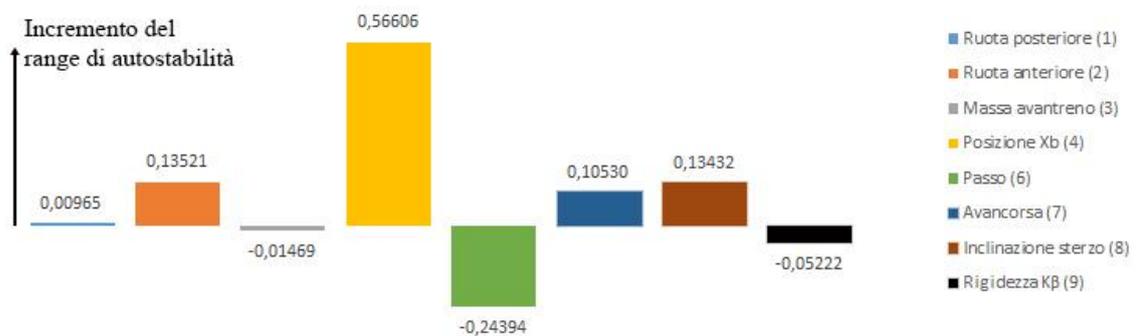


Grafico 29: Influenza dei parametri sul range di autostabilità per il quarto ciclo di simulazioni

Sempre considerando la crescita del valore del parametro, si verificano i seguenti effetti:

- ruota posteriore: si vedono dei piccoli contributi alle velocità, non sufficienti a giustificare un aumento del range di autostabilità;
- ruota anteriore: la prima cosa che si nota è che la ruota anteriore è l'unico parametro con entrambi gli indici di Pearson negativi: ciò significa che al crescere del raggio corrisponde una diminuzione di ambedue le velocità. Dato che il modulo dell'indice di weave è maggiore di quello di capsize, si ottiene un piccolo allargamento del range di autostabilità;
- massa dell'avantreno: entrambe le velocità crescono di un contributo abbastanza piccolo, dello stesso ordine di grandezza: il range di autostabilità subisce un leggero restringimento;
- posizione orizzontale: la velocità di weave risente leggermente di un avanzamento del centro di massa del corpo, mentre la velocità di capsize aumenta considerevolmente: il range di autostabilità si allarga notevolmente. Questa è l'ulteriore conferma che la posizione  $x_B$  è un parametro molto interessante da studiare;
- passo: la velocità di weave cresce molto più rapidamente della velocità di capsize. Ciò comporta un indesiderato restringimento del range di autostabilità;
- avancorsa: dato che la velocità di capsize cresce più velocemente di quella di weave il range di autostabilità si allarga;
- inclinazione: ambedue le velocità diminuiscono ma quella di weave cala più rapidamente: in questo caso il range di autostabilità si allarga;
- rigidità: entrambe le velocità non risentono in maniera sensibile di un aumento della rigidità.

## 4.5 – Simulazioni sui singoli parametri

Fino ad ora sono stati presentati risultati dove cambiavano tutti i parametri, al fine di comprendere quale fosse più predominante rispetto agli altri. Risulta però molto interessante capire cosa succeda se si modifica un solo parametro alla volta.

Di seguito vengono forniti i confronti tra tre simulazioni: in esse varia solo il parametro considerato: dal valore basso, a quello nominale e poi a quello alto.

In tutte queste simulazioni la posizione del centro di massa dell'avantreno rimane dipendente dal passo, dall'avancorsa e dall'inclinazione dello sterzo, secondo le funzioni spiegate nel capitolo 4.4.

### 4.5.1 – Ruota posteriore

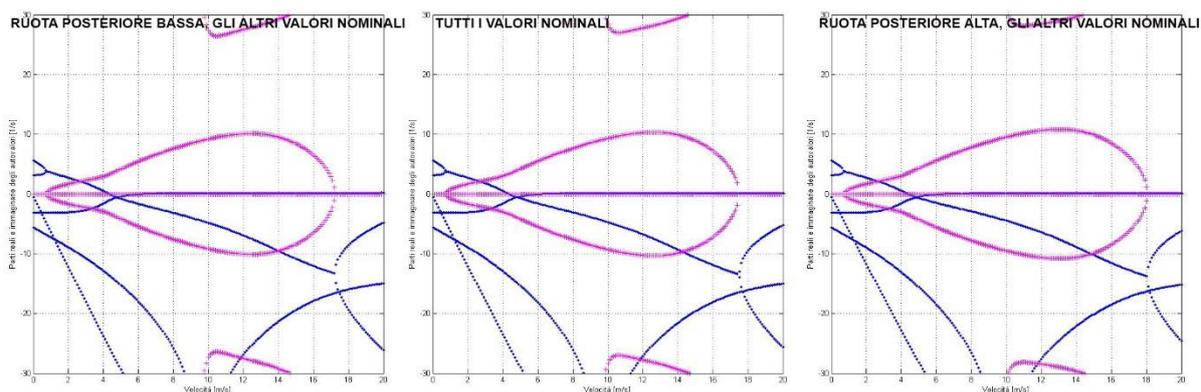


Grafico 30: Confronto tra le geometrie dei modi per la ruota posteriore

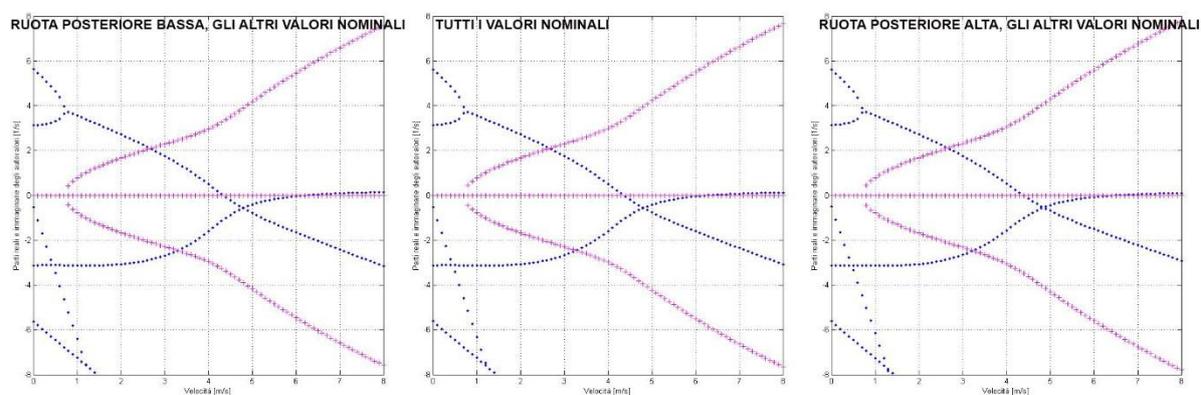


Grafico 31: Confronto tra i range di autostabilità per la ruota posteriore

All'aumentare del valore del raggio della ruota posteriore si nota che il secondo modo di weave si allunga verso destra. Questo effetto non ha conseguenze dirette sulla stabilità ma fa capire come la modifica di un parametro possa influenzare i modi vibrazionali. Inoltre la velocità di weave rimane pressoché costante, mentre quella di capsise è soggetta a un piccolo aumento.

#### 4.5.2 – Ruota anteriore

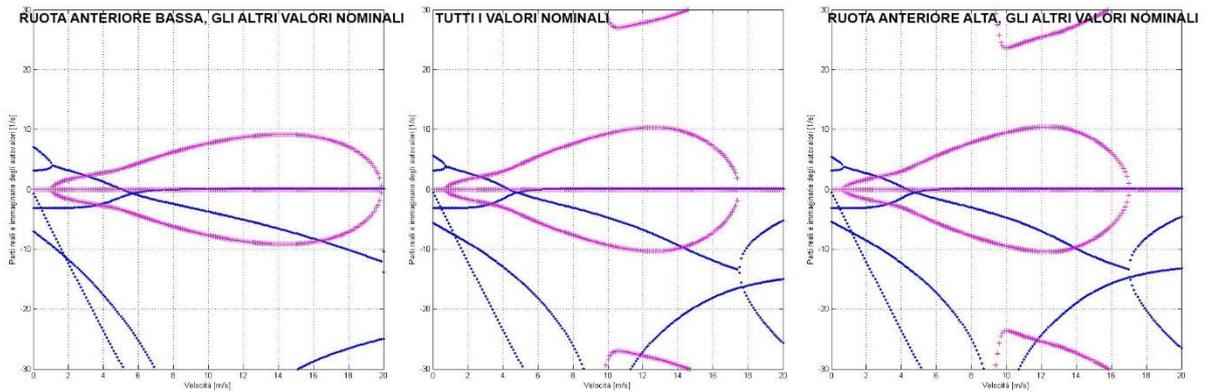


Grafico 32: Confronto tra le geometrie dei modi per la ruota anteriore

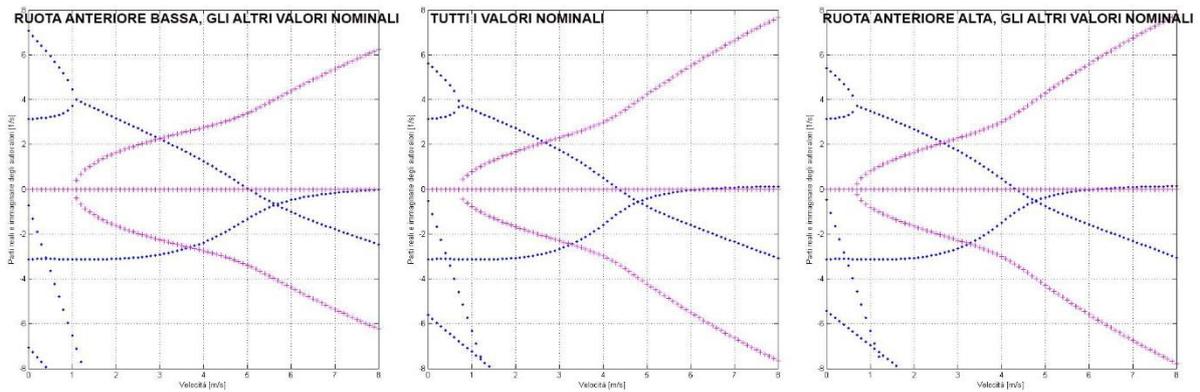


Grafico 33: Confronto tra i range di autostabilità per la ruota anteriore

Facendo calare il valore del raggio della ruota anteriore si vede come la seconda transizione del weave risulti più schiacciata e più allungata. Le velocità di weave e capsise risultano entrambe più piccole passando da un diametro di 20'', a uno di 26,5'' e infine a uno di 29''.

### 4.5.3 – Massa dell'avantreno

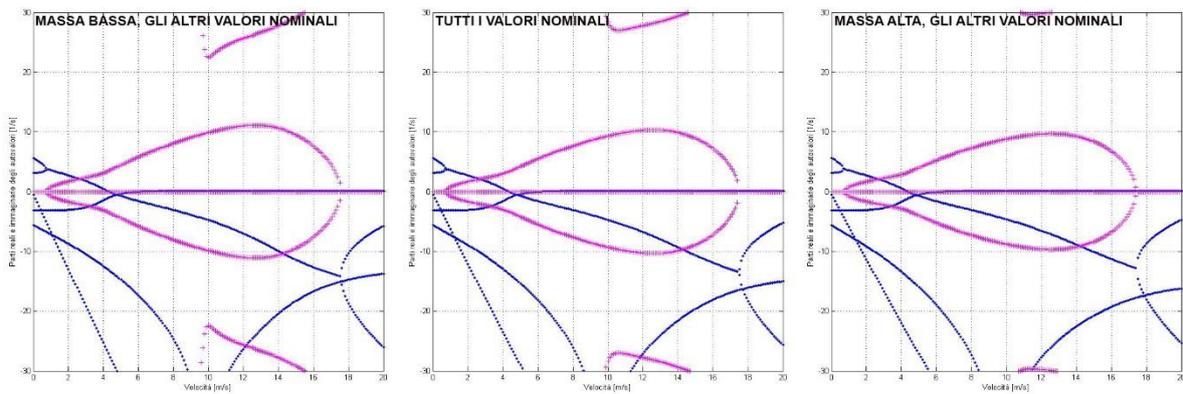


Grafico 34: Confronto tra le geometrie dei modi per la massa dell'avantreno

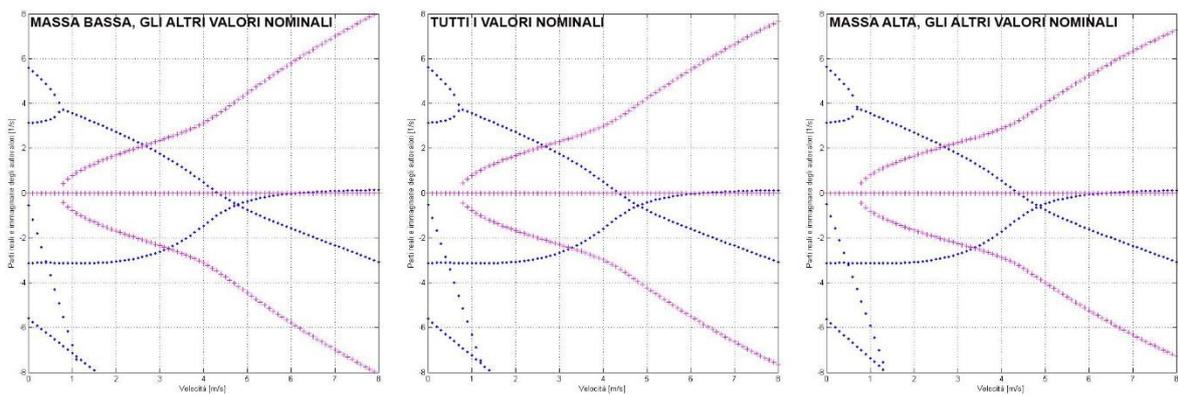


Grafico 35: Confronto tra i range di autostabilità per la massa dell'avantreno

Il secondo modo di weave si assottiglia al crescere della massa dell'avantreno. La velocità di weave rimane invariata, si osserva un piccolissimo aumento nella velocità di capsise.

#### 4.5.4 – Posizione orizzontale del centro di massa

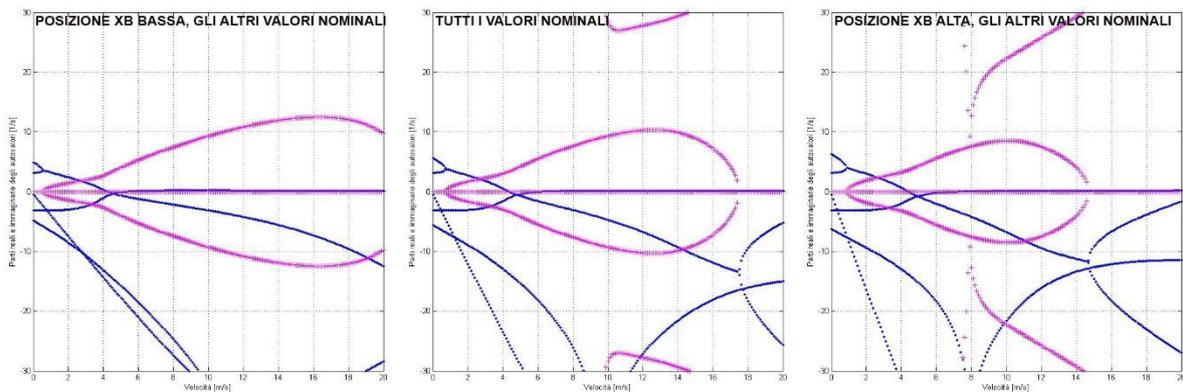


Grafico 36: Confronto tra le geometrie dei modi per la posizione orizzontale del centro di massa

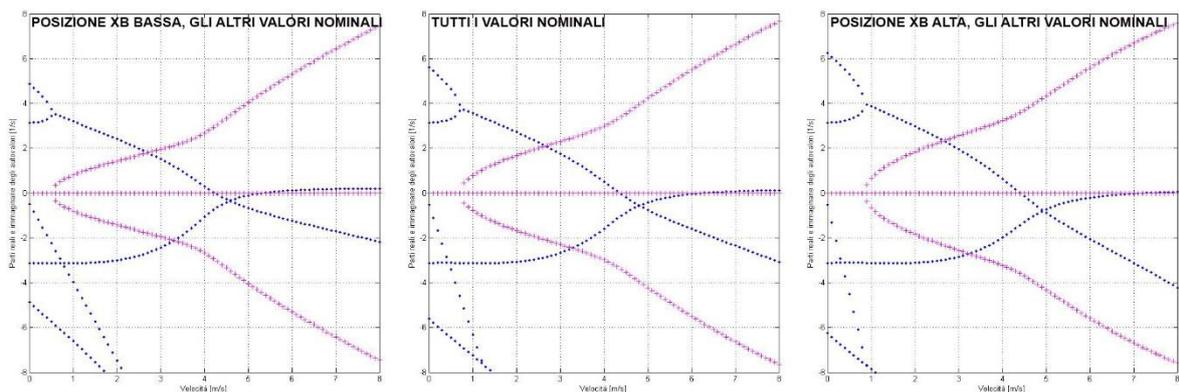
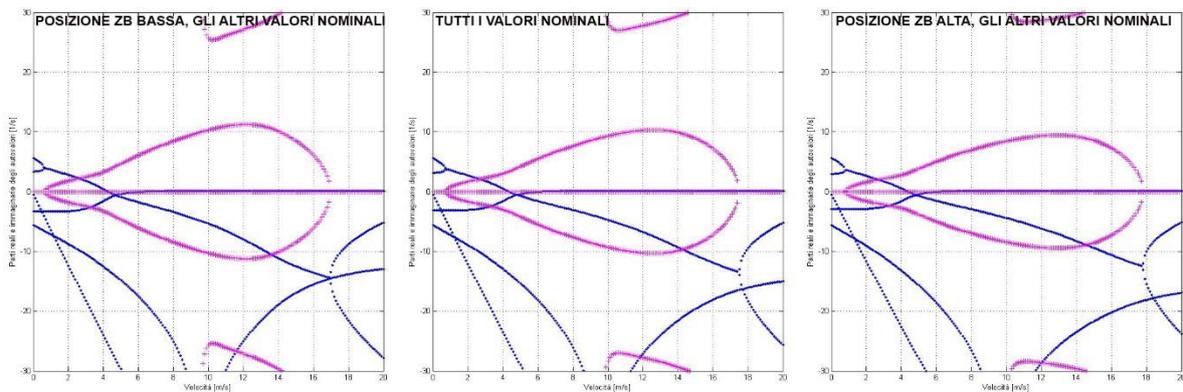


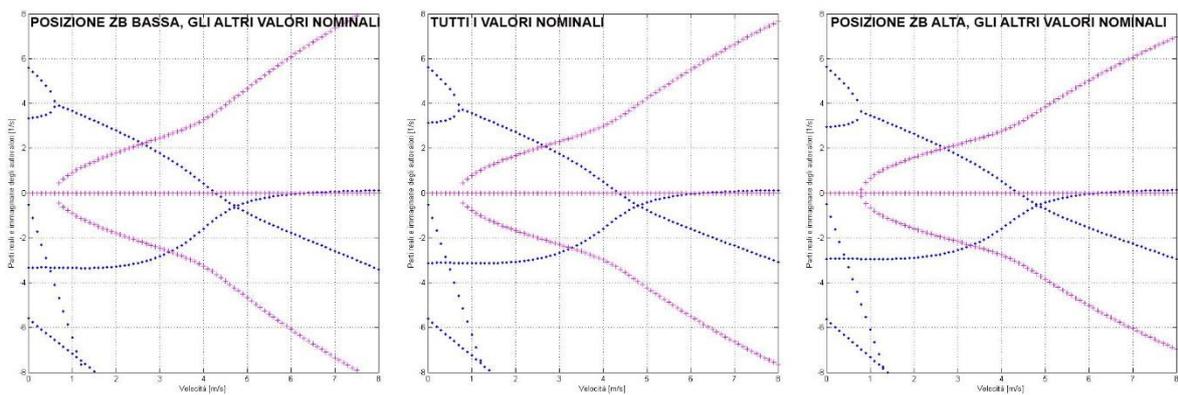
Grafico 37: Confronto tra i range di autostabilità per la posizione orizzontale del centro di massa

All'aumentare di  $X_B$ , quindi all'avanzare del centro di massa rispetto alla ruota posteriore, si rileva una netta modifica della geometria del secondo modo di weave. Inoltre si vede un sensibile aumento della velocità di capsizing, contro una velocità di weave praticamente immutata. Questo produce una buona espansione del range di autostabilità, rendendo la posizione orizzontale uno dei parametri più interessanti di tutta l'analisi.

### 4.5.5 – Posizione verticale del centro di massa



**Grafico 38: Confronto tra le geometrie dei modi per la posizione verticale del centro di massa**



**Grafico 39: Confronto tra i range di autostabilità per la posizione verticale del centro di massa**

La modifica del valore della posizione verticale produce un restringimento del secondo modo del weave, ma le velocità non subiscono nessuna variazione riscontrabile. Questo risultato conferma quanto espresso in precedenza, infatti  $Z_B$  è il parametro che meno influenza il range di autostabilità. Questa ulteriore analisi conferma la scelta di non considerare la posizione verticale del centro di massa come un parametro fondamentale per la stabilità di una bicicletta.

## 4.5.6 – Passo

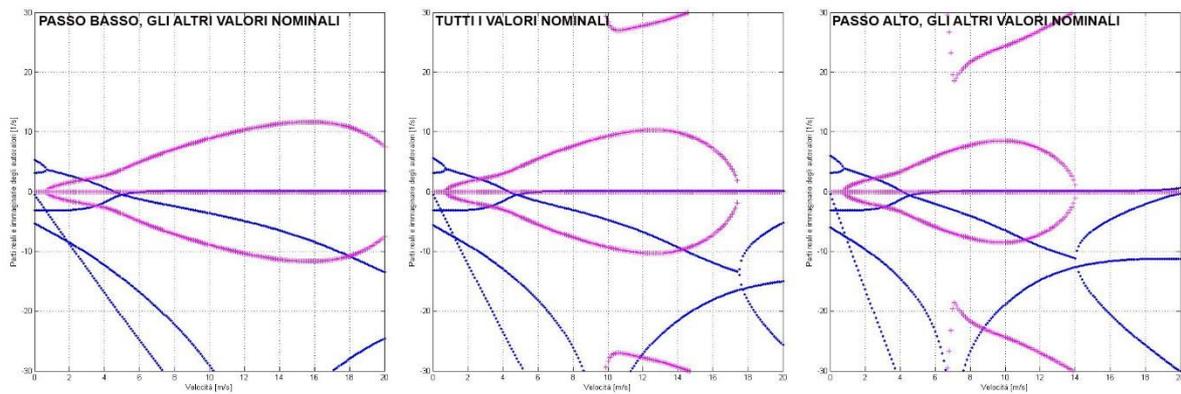


Grafico 40: Confronto tra le geometrie dei modi per il passo

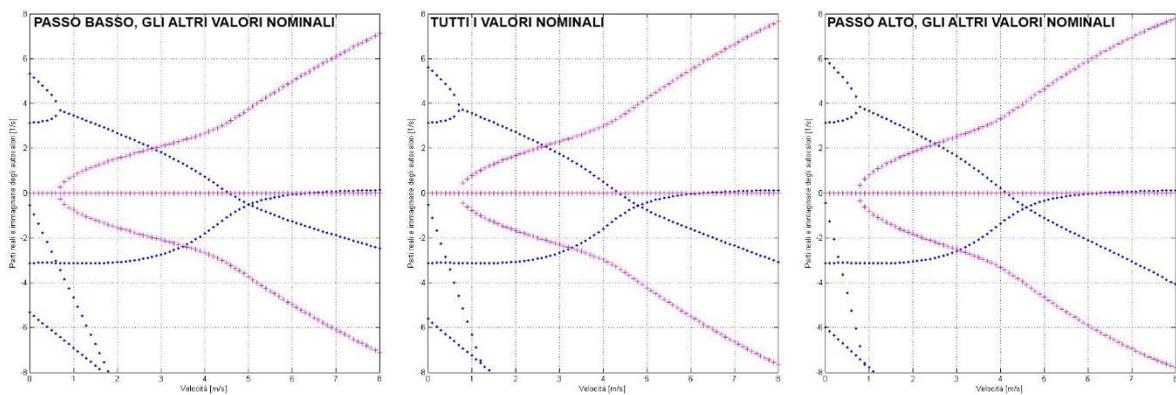


Grafico 41: Confronto tra i range di autostabilità per il passo

Aumentando il valore del passo si riscontra una modifica nella forma del secondo modo di weave. Inoltre la velocità di weave aumenta mentre quella di capsizze non mostra sensibili variazioni: il range di autostabilità risulta minore al crescere del passo.

## 4.5.7 – Avancorsa

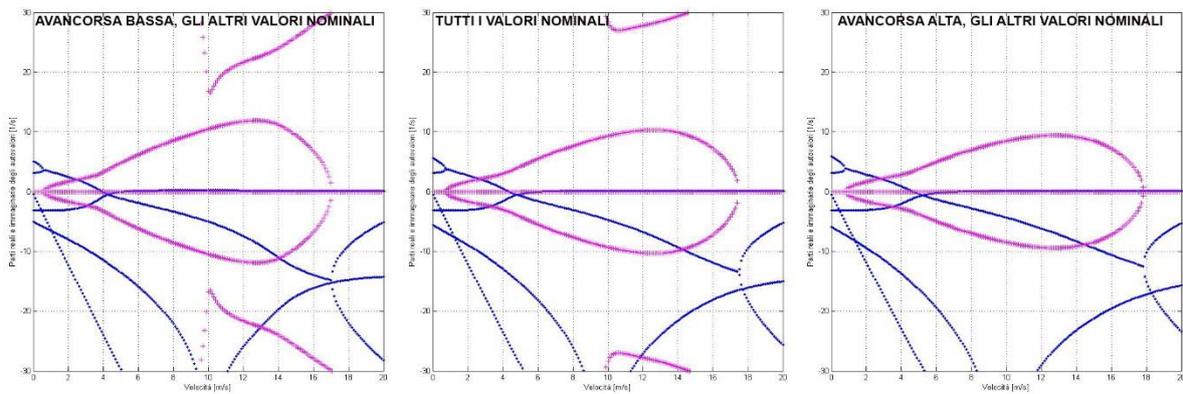


Grafico 42: Confronto tra le geometrie dei modi per l'avancorsa

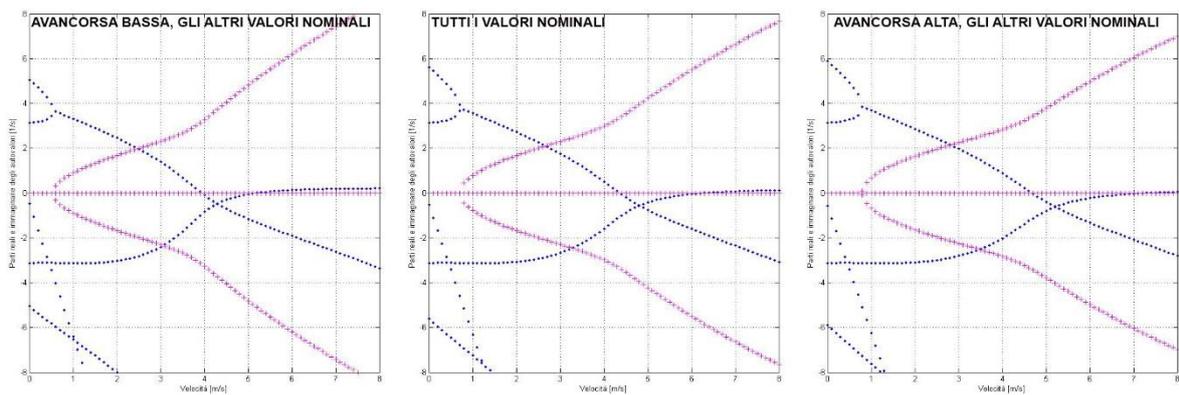


Grafico 43: Confronto tra i range di autostabilità per l'avancorsa

Con un'avancorsa maggiore la seconda transizione del weave tende ad allungarsi. In più, entrambe le velocità aumentano, ma quella di capsizing cresce più rapidamente, offrendo range di velocità sempre maggiori.

## 4.5.8 – Inclinazione dello sterzo

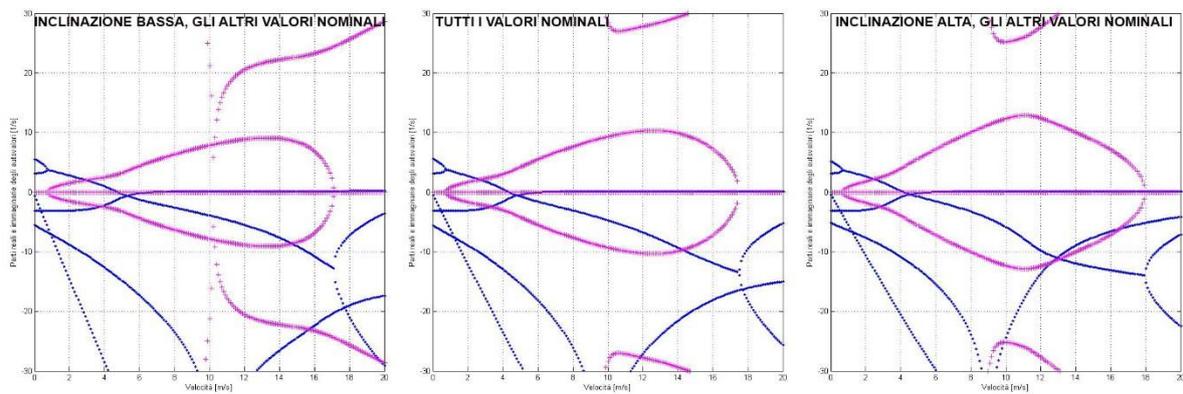


Gráfico 44: Confronto tra le geometrie dei modi per l'inclinazione dello sterzo

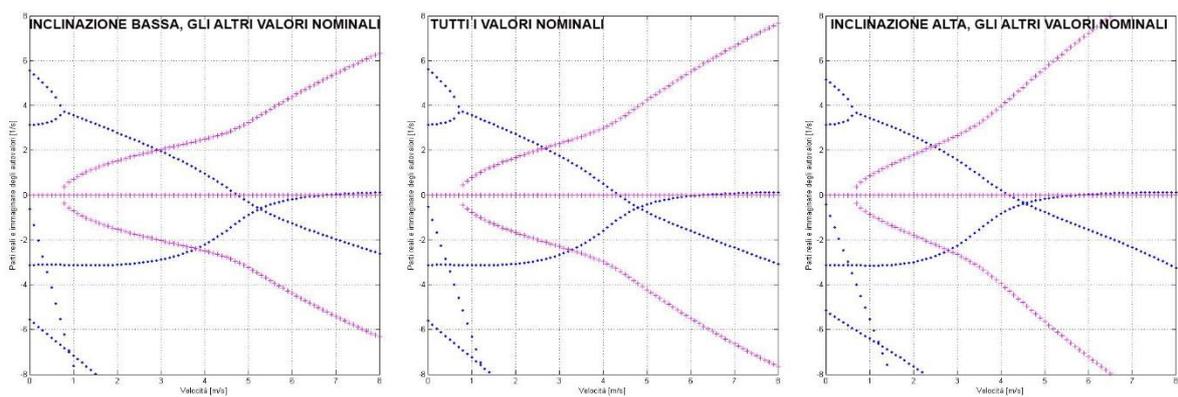


Gráfico 45: Confronto tra i range di autostabilità per l'inclinazione dello sterzo

Aumentando l'inclinazione dello sterzo il secondo modo di weave si allarga. Entrambe le velocità diminuiscono sensibilmente.

### 4.5.9 – Rigidezza della forcella anteriore

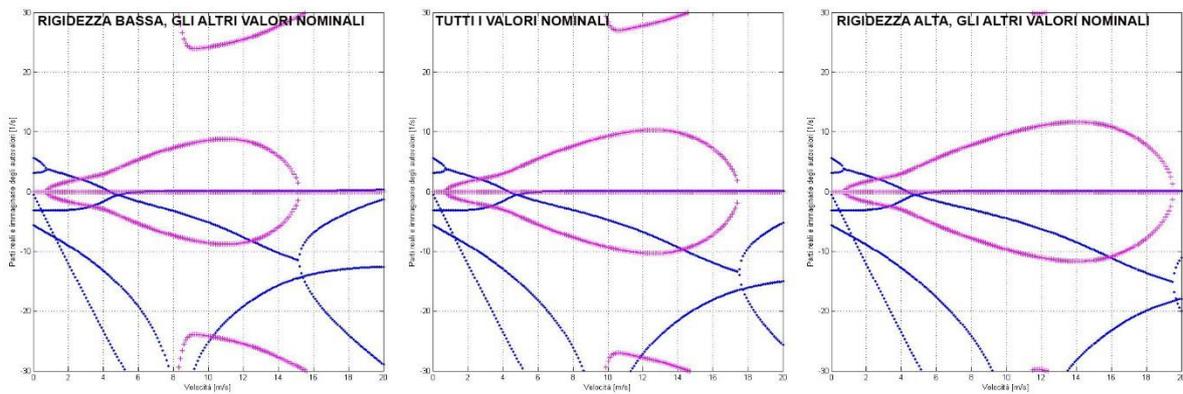


Grafico 46: Confronto tra le geometrie dei modi per la rigidezza

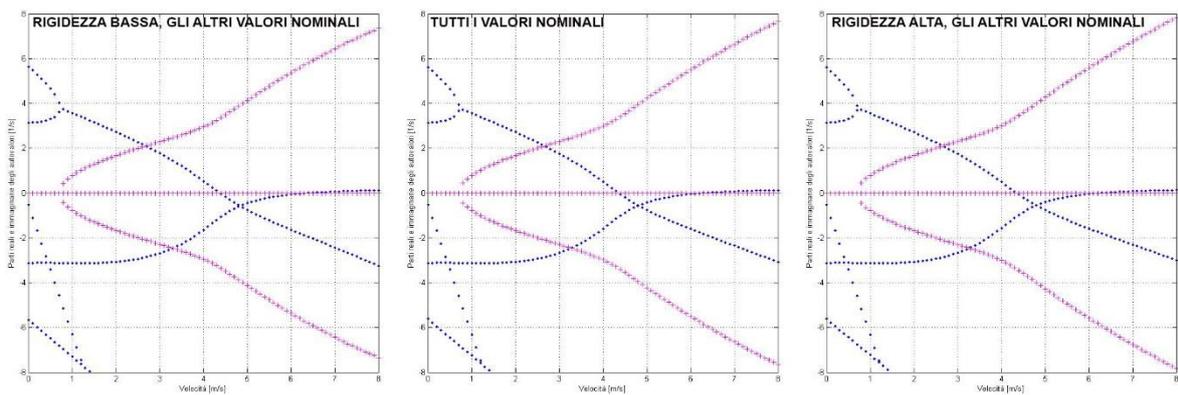


Grafico 47: Confronto tra i range di autostabilità per la rigidezza

Si può notare come la rigidezza non modifichi in modo sensibile i valori delle due velocità, mantenendo quindi immutato il range di autostabilità, ma essa risulti responsabile del cambiamento della geometria del modo di weave: nello specifico, la rigidezza tende a spostare la seconda transizione da immaginario a reale. Diversamente, il modo di capsise non si modifica.



## 5 – *Confronto con il modello di un'ala*

---

Nei capitoli precedenti è stata presentata un'analisi completa e dettagliata della stabilità di una bicicletta. Nei seguenti paragrafi si mostra come il modello della bicicletta abbia molte similitudini con il modello dell'ala di un aeroplano. Tale trattazione è di fondamentale importanza in quanto è alla base dello studio di uno dei fenomeni più importanti nella scienza delle strutture aerodinamiche, il Flutter. Da ciò si può comprendere che, con le opportune modifiche, gli strumenti utilizzati per la trattazione elementare del modello delle ali possono essere usati anche per lo studio della stabilità della bicicletta.

### 5.1 – *Flutter*

Il Flutter è il fenomeno più trattato dell'aeroelasticità: con ciò ci si riferisce alla mutua interazione tra una struttura, sia essa un'ala di un aereo o un ponte, e il flusso aerodinamico che la investe.

Il carico aerodinamico avvolge la struttura e ne comporta una modifica. Tale cambiamento implica una nuova configurazione nell'interazione tra la struttura e il flusso aerodinamico, che a sua volta produce delle nuove modifiche alla struttura. Questo ciclo di “interazione-modifiche” si autoalimenta se non opportunamente prevenuto e, se le forze viscosse non risultano in grado di contrastare le forze di inerzia, si possono ottenere delle vibrazioni talmente ampie da portare al cedimento strutturale dei componenti.

Dal punto di vista fisico il Flutter consiste nell'insorgere di oscillazioni divergenti su una struttura elastica immersa in una corrente fluida, e in prossimità di una certa velocità  $v_F$  (velocità di Flutter) i modi della struttura arrivano ad avere smorzamento nullo. Matematicamente è quindi necessario studiare il comportamento degli autovalori del sistema aeroelastico al variare delle condizioni di volo, in modo da comprendere il limite di stabilità di Flutter, cioè quando alcuni valori si trovano sull'asse immaginario del piano complesso<sup>16</sup>. Per poter fare ciò è necessario sviluppare le equazioni che costituiscono il modello dell'ala di un aereo.

---

<sup>16</sup> Giampiero Bindolino, Paolo Mantegazza e Pierangelo Masarati – “Aeroelasticità applicata”

## 5.2 – Modello dell'ala di un aereo

Per procedere alla modellazione di un'ala di un aereo è necessario approssimarla a una trave a mensola incastrata nella fusoliera. Le diverse sezioni dell'ala si appoggiano sulla trave equivalente: esse sono singolarmente rigide, definiscono il profilo dell'ala e hanno proprietà inerziali.

La trave si può modificare in due modi, come mostrato in figura, tramite:

- una traslazione verticale  $z$  riferita al punto  $O$ , che è la traccia della trave equivalente;
- una rotazione  $\theta$ .

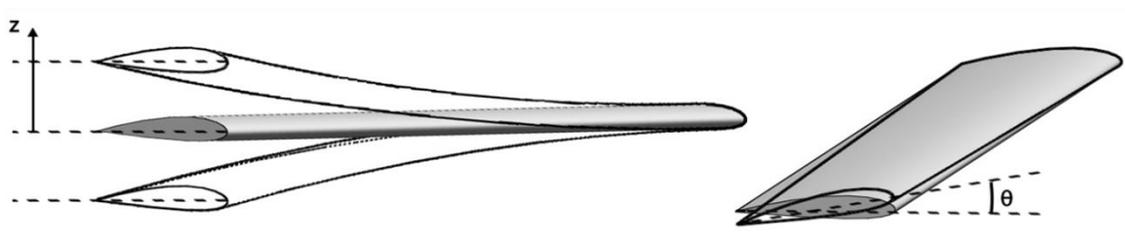


Figura 16: Ala di profilo NACA 2414 soggetta a flessione (sinistra) e torsione (destra)

Solitamente i due gradi di libertà vengono schematizzati con una visione laterale dell'ala, come mostrato nella seguente figura.

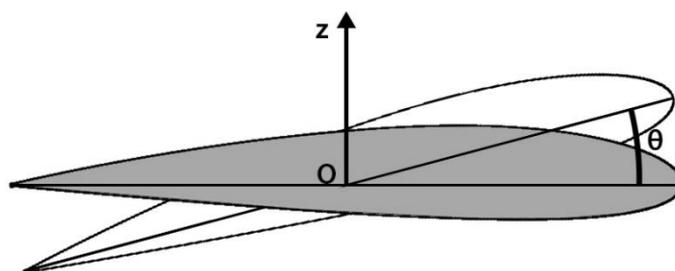


Figura 17: Schema dei due gradi di libertà: flessione  $z$  e rotazione  $\theta$

Gli spostamenti e le inclinazioni a cui è sottoposta l'ala sono le dirette conseguenze delle forze aerodinamiche, cioè dell'interazione tra il flusso e il profilo che viene investito. Esse dipendono dalla distribuzione di pressione  $p$  e dallo sforzo tangen-

ziale  $\tau$  sulla superficie del corpo. Integrando su tutta la superficie si ottiene la risultante  $R$ , le cui componenti sono la portanza  $L$  (lift) e la resistenza  $D$  (drag), orientate come in figura.

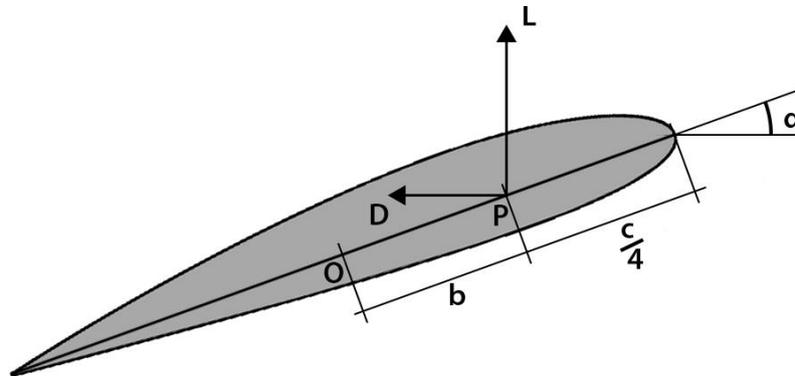


Figura 18: Schema delle forze aerodinamiche

Tali componenti sono applicate a una distanza dal punto di attacco pari a un quarto della corda per flussi subsonici. Tale distanza raddoppia in caso di flussi supersonici. La portanza e la resistenza si esprimono come segue:

$$L = \frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 S c_L \qquad D = \frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 S c_D$$

Dove  $\rho$  e  $v_{\infty}$  sono rispettivamente la densità e la velocità dell'aria che investe il profilo,  $S$  è la superficie dell'ala,  $c_D$  e  $c_L$  sono i coefficienti di resistenza e di portanza. In particolare quest'ultimo è fortemente dipendente dall'angolo di attacco  $\alpha$ :

$$c_L = c_{L0} + \frac{dc_L}{d\alpha} \Delta\alpha = c_{L0} + c_L' \Delta\alpha$$

Se l'ala vibra sotto l'effetto delle forze aerodinamiche il suo profilo cambia istantaneamente l'angolo di attacco. Di conseguenza si instaurano altre componenti di portanza variabili,  $L_{\theta}$  e  $L_z$ . Di seguito è mostrato come vengono espresse tali grandezze.

Si consideri un profilo soggetto solamente a un'inclinazione  $\Delta\alpha = \theta$ , come presentato in figura; in tal caso la forza variabile è pari a:

$$L_\theta = \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 S c_L' \theta$$

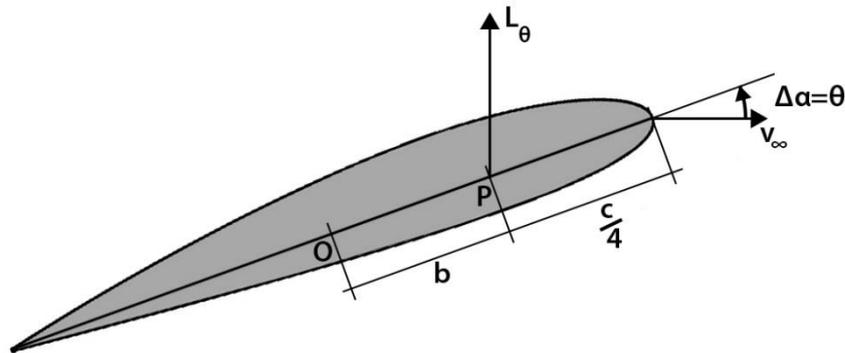


Figura 19: Profilo soggetto a torsione  $\theta$

Si consideri ora un profilo soggetto solo a flessione, con una velocità di vibrazione  $\dot{z}$  verso l'alto, come nella seguente immagine:

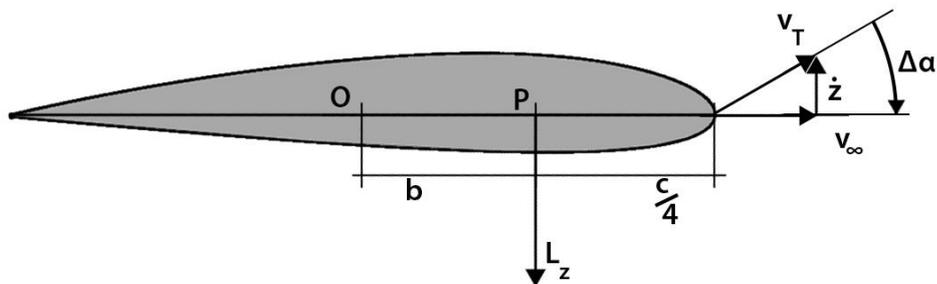


Figura 20: Profilo soggetto a flessione  $\dot{z}$

La velocità di flessione  $\dot{z}$  e la velocità del flusso  $v_\infty$  costituiscono le componenti della velocità totale  $v_T$  che risulta inclinata rispetto alla corda del profilo di un angolo pari a:

$$\Delta\alpha = \tan^{-1} \left( -\frac{\dot{z}}{v_\infty} \right) \approx -\frac{\dot{z}}{v_\infty}$$

La flessione non comporta direttamente una variazione di angolo di attacco ma modifica la velocità risultante: il profilo risulta inclinato di un angolo negativo rispetto alla a tale velocità totale. Di conseguenza una velocità di flessione  $\dot{z}$  comporta una forza variabile esprimibile come segue:

$$L_z = -\frac{1}{2}\rho v_\infty S c_L' \dot{z}$$

Dunque si osserva che la forza di portanza variabile ha due componenti: la prima,  $L_\theta$ , positiva e proporzionale alla velocità indisturbata e alla velocità di vibrazione flessionale; la seconda,  $L_z$ , negativa e proporzionale al quadrato della velocità e all'angolo di inclinazione torsionale.

$$L_{var} = \frac{1}{2}\rho v_\infty^2 S c_L' \theta - \frac{1}{2}\rho v_\infty S c_L' \dot{z}$$

Il modello è quindi rappresentato dalla seguente immagine.

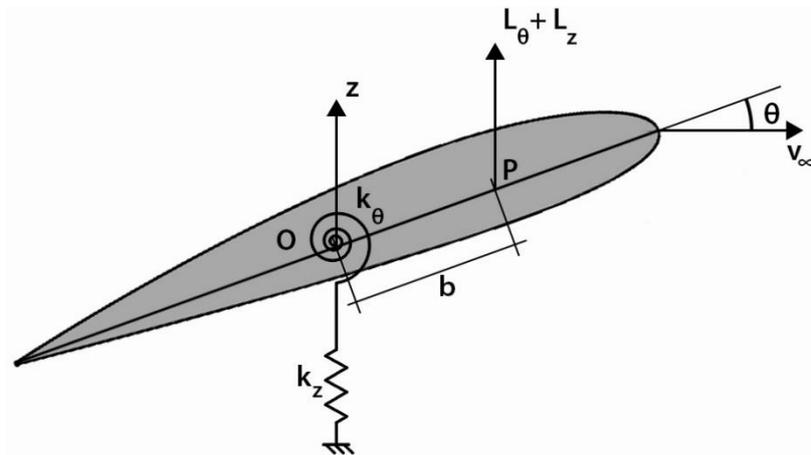


Figura 21: Schema del modello dell'ala

Le molle lineare e rotazionale rappresentano rispettivamente la rigidità flessionale e quella torsionale dell'ala. In parallelo con le molle ci sono degli smorzatori viscosi  $c_z$  e  $c_\theta$ . Le componenti variabili della portata sono applicate nel punto P, la cui coordinata si esprime come  $z_p = z + b \sin \theta \approx z + b\theta$ .

Le coordinate generalizzate sono  $z$  e  $\theta$ . Con l'approccio lagrangiano si ottengono le equazioni del moto dell'ala.

$$[M] \begin{Bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + [C] \begin{Bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + [K] \begin{Bmatrix} z \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_z \\ Q_\theta \end{Bmatrix}$$

Dove:

$$[M] = \begin{bmatrix} m & ma \\ ma & I_G + ma^2 \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} c_z & 0 \\ 0 & c_\theta \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} k_z & 0 \\ 0 & k_\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_z \\ Q_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_{var} \frac{dz_P}{dz} \\ L_{var} \frac{dz_P}{d\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left( \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 S_{c_L}' \theta - \frac{1}{2} \rho v_\infty S_{c_L}' \dot{z} \right) \frac{d(z+b\theta)}{dz} \\ \left( \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 S_{c_L}' \theta - \frac{1}{2} \rho v_\infty S_{c_L}' \dot{z} \right) \frac{d(z+b\theta)}{d\theta} \end{Bmatrix}$$

Quindi:

$$[M] \begin{Bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + [C] \begin{Bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + [K] \begin{Bmatrix} z \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 S_{c_L}' \theta - \frac{1}{2} \rho v_\infty S_{c_L}' \dot{z} \\ \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 S_{c_L}' b \theta - \frac{1}{2} \rho v_\infty S_{c_L}' b \dot{z} \end{Bmatrix}$$

Riscrivendo le equazioni si nota che le componenti aerodinamiche danno origine a due nuove matrici.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m & ma \\ ma & I_G + ma^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \left[ \begin{bmatrix} c_z & 0 \\ 0 & c_\theta \end{bmatrix} + \rho v_\infty \begin{bmatrix} \frac{1}{2} S_{c_L}' & 0 \\ \frac{1}{2} S_{c_L}' b & 0 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \\ & + \left[ \begin{bmatrix} k_z & 0 \\ 0 & k_\theta \end{bmatrix} + \rho v_\infty^2 \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} S_{c_L}' \\ 0 & -\frac{1}{2} S_{c_L}' b \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} z \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Le matrici di rigidezza e di smorzamento aerodinamico non sono simmetriche e accoppiano le equazioni.

Le frequenze naturali dei modi flessionale e torsionale variano in funzione della velocità di avanzamento  $v_\infty$ . Alla velocità di Flutter  $v_F$  le frequenze naturali si equivalgono e i termini della matrice di smorzamento aerodinamico tendono a destabilizzare dinamicamente il sistema: in questo caso le oscillazioni non vengono smorzate ma diventano instabili e possono portare alla rottura catastrofica della struttura. Per questa ragione è di fondamentale importanza studiare la stabilità di un'ala di un aereo, per comprendere in quali condizioni una certa struttura è in grado di resistere agli sforzi aerodinamici.

### 5.2.1 Instabilità stazionaria

Si consideri il caso stazionario, dove le accelerazioni e le velocità sono nulle. Si ottiene in seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} [k_z & 0] \\ [0 & k_\theta] \end{bmatrix} + \rho v_\infty^2 \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} S c_L' \\ 0 & -\frac{1}{2} S c_L' b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La seconda equazione in  $\theta$  è disaccoppiata dalla prima:

$$\left( k_\theta - \frac{1}{2} S c_L' b \rho v_\infty^2 \right) \theta = 0$$

Trascurando la soluzione banale  $\theta = 0$ , si nota che a una certa velocità di avanzamento  $v_d$  la rigidezza torsionale complessiva si annulla. Ciò implica che una piccola perturbazione può far crescere indefinitamente la rotazione  $\theta$ : in questo caso si parla di instabilità stazionaria. Tale velocità è chiamata velocità di divergenza ed è espressa come:

$$v_d = \sqrt{\frac{k_\theta}{\frac{1}{2} S c_L' b \rho}}$$

Si deve volare ben al di sotto della velocità  $v_d$  per evitare cedimenti torsionali della struttura.

### 5.2.2 Instabilità dinamica a un grado di libertà

Un'altra importante analisi è lo studio dell'instabilità dinamica a un grado di libertà, quindi considerando separatamente le due equazioni del modello dell'ala.

Si consideri bloccata la rotazione  $\theta$  legata al movimento torsionale. L'equazione del moto si riduce a:

$$\theta = 0 \rightarrow m\ddot{z} + \left(c_z + \frac{1}{2}Sc_L'\rho v_\infty^2\right)\dot{z} + k_z z = 0$$

Si ottiene un sistema instabile se il termine smorzante complessivo è negativo o nullo, quindi nel caso in cui la derivata del coefficiente di portanza  $c_L'$  è negativa e la componente aerodinamica è maggiore dello smorzamento strutturale  $c_z$ . In tal caso si giunge alla condizione di instabilità dinamica.

Allo stesso modo, se si blocca lo spostamento  $z$  si ottiene:

$$z = 0 \rightarrow (I_G + ma^2)\ddot{\theta} + c_\theta\dot{\theta} + \left(k_\theta - \frac{1}{2}\rho v_\infty^2 Sc_L' b\right)\theta = 0$$

In questo caso il sistema è instabile se il termine di rigidità diventa negativo o nullo, quindi se si raggiunge la velocità di divergenza, calcolata nello studio dell'instabilità stazionaria.

Lo studio della combinazione di questi fenomeni permette una completa analisi del Flutter, al fine di comprendere le condizioni più sicure in cui poter volare.

### 5.3 – Analisi stazionaria e dinamica a un grado di libertà della bicicletta

È interessante ripetere i procedimenti elementari fatti con le equazioni del modello dell'ala, applicandoli alle equazioni che descrivono la bicicletta, sfruttando le similitudini formali tra i due modelli.

Si considerino le equazioni del modello della bicicletta in condizioni stazionarie, quindi con  $\ddot{\phi} = \ddot{\delta} = \dot{\phi} = \dot{\delta} = 0$ :

$$\left[ g \begin{bmatrix} m_T z_T & -S_A \\ -S_A & -S_A \sin \lambda \end{bmatrix} + v^2 \begin{bmatrix} 0 & \frac{S_T - m_T z_T}{w} \cos \lambda \\ 0 & \frac{S_A + S_F \sin \lambda}{w} \cos \lambda \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \phi \\ \delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Si nota immediatamente che in questo caso le equazioni sono accoppiate. Per calcolare la soluzione non banale è dunque necessario trovare il valore della velocità che annulla il determinante della matrice di rigidezza. Esso è pari a:

$$v = \sqrt{\frac{g w S_A (S_A + m_T z_T \sin \lambda)}{S_A (S_T - m_T z_T) \cos \lambda + (S_A + S_F \sin \lambda) m_T z_T \cos \lambda}}$$

Se si considerano le grandezze con i valori nominali si trova  $v = 6,024262015$ . Tale velocità è esattamente uguale alla velocità di capsizate, calcolata con il metodo degli autovalori complessi in Matlab. Questa è un'osservazione molto importante in quanto conferma che il capsizate è un effetto stazionario e permette di calcolare in modo più semplice e immediato la velocità di transizione.

Per comprendere se il sistema sia stabile o instabile è necessario studiare il segno del lavoro prodotto da spostamenti infinitesimi, secondo il seguente ragionamento:

$$\begin{Bmatrix} M_\phi \\ M_\delta \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{\phi\phi} & K_{\phi\delta} \\ K_{\delta\phi} & K_{\delta\delta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ \delta \end{Bmatrix}$$

$$dL = \{M_\phi \quad M_\delta\} \begin{Bmatrix} d\phi \\ d\delta \end{Bmatrix}$$

Si ottiene il lavoro infinitesimo espresso in una forma quadratica del tipo:

$$dL = -K_{\phi\phi}d\phi^2 - \frac{K_{\phi\delta} + K_{\delta\phi}}{2}d\phi d\delta - \frac{K_{\phi\delta} + K_{\delta\phi}}{2}d\phi d\delta - K_{\delta\delta}d\delta^2$$

Lo studio del segno di  $dL$  può fornire informazioni sul sistema:

- $dL > 0$ : se per uno spostamento infinitesimo il lavoro è negativo, significa che la forza è resistente e quindi si oppone allo spostamento del sistema dalla posizione di equilibrio. In questo caso il sistema è stabile;
- se  $dL < 0$ : in questo caso la forza è motrice, quindi tende a favorire il moto, allontanando il sistema dalla configurazione stabile.

Di conseguenza è necessario verificare il segno del lavoro per capire se il sistema è stabile o no. A tal fine è possibile riscrivere  $dL$  nella seguente forma e studiare gli autovalori della matrice, al variare della velocità:

$$dL = \begin{Bmatrix} \phi & \delta \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} K_{\phi\phi} & \frac{K_{\phi\delta} + K_{\delta\phi}}{2} \\ \frac{K_{\phi\delta} + K_{\delta\phi}}{2} & K_{\delta\delta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ \delta \end{Bmatrix}$$

Dallo studio della matrice si trova che essa ha autovalori di segno opposto nell'intorno di  $v = 6,024262015$ . Questo significa che questi punti sono punti di sella e non forniscono informazioni utili all'interpretazione della stabilità.

Il grafico tridimensionale di  $dL$  può aiutare a dare la giusta interpretazione:

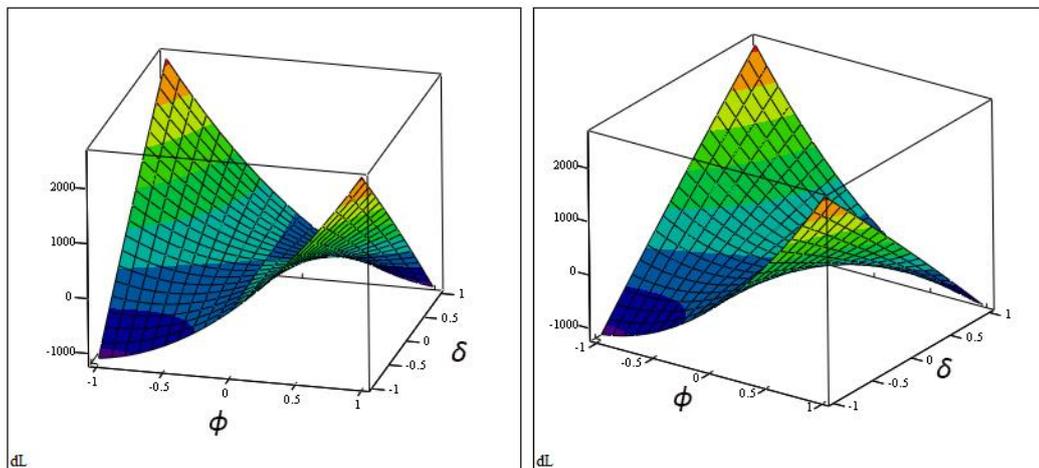


Grafico 48: Andamento del lavoro infinitesimo al variare di  $\phi$  e  $\delta$ , con  $v = 5$  m/s

Con lo studio della matrice non è possibile risolvere analiticamente il problema dell'analisi di stabilità in condizioni stazionarie: non si può dire se il sistema sia stabile prima o dopo la velocità di transizione. Ma il grafico del lavoro infinitesimo permette di mostrare che con perturbazioni dello stesso segno il sistema è stabile. Di conseguenza, con una sterzata di un angolo  $\delta$  verso destra, la bicicletta si piegherà con un angolo di rollio  $\phi$  dalla stessa parte per mantenere l'equilibrio. Se si piegasse dalla parte opposta (angoli con segno discorde) il sistema non sarebbe stabile.

Si consideri ora l'analisi dinamica a un grado di libertà: si studiano separatamente le due equazioni, mantenendo una delle due variabili uguale a zero.

- Si mantenga bloccato lo sterzo ( $\delta = 0$ ). In questa configurazione l'equazione del moto diventa:

$$I_{Txx}\ddot{\phi} + (0)\dot{\phi} + gm_T z_T \phi = 0$$

L'equazione è sempre instabile, indipendentemente dalla velocità, e il sistema può essere paragonato a un pendolo rovesciato.

- Se si blocca il rollio ( $\phi = 0$ ) si ottiene una bicicletta con le rotelline da bambino dove si impedisce la caduta laterale:

$$(I_{A\lambda\lambda} + 2\mu I_{A\lambda z} + \mu^2 I_{Tzz})\ddot{\delta} + v \left( \frac{I_{A\lambda z}}{w} \cos \lambda + \mu \left( S_A + \frac{I_{Tzz}}{w} \cos \lambda \right) \right) \dot{\delta} + (-gS_A \sin \lambda + \frac{S_A + S_F \sin \lambda}{w} \cos \lambda v^2) \delta = 0$$

L'equazione dipende dalla velocità: se si studia il segno del coefficiente della rigidità si può calcolare che con  $v < 1,723$  m/s la forza centrifuga, prodotta da una variazione di  $\delta$ , non è abbastanza forte da contrastare l'effetto destabilizzante della forza peso e della forza reattiva sul corpo formato da avantreno e ruota anteriore. Diversamente con  $v > 1,723$  m/s il sistema è sempre stabile.



## 6 – Conclusioni e sviluppi futuri

---

Grazie all'analisi di stabilità è stato possibile comprendere quali parametri di una bicicletta sono maggiormente responsabili dell'evoluzione del sistema non controllato e in che modo devono essere modificati per ottenere un veicolo con un range di autostabilità più ampio.

I cicli di simulazione implementati con il modello Whipple Carvallo Bicycle Model, arricchito con l'effetto della rigidità della forcella anteriore, hanno dato risultati concordi tra loro e riscontrabili nel comune utilizzo di una bicicletta. Di seguito viene spiegato come bisogna modificare i diversi parametri per ottenere un sistema più stabile.

Le simulazioni hanno dimostrato che la posizione verticale del centro di massa è il parametro meno interessante nello studio della stabilità, in quanto non modifica sensibilmente la velocità di weave e di capsise. Ciò significa che in fase di progettazione si può stabilire una determinata altezza del centro di massa senza che questa vada a compromettere la stabilità del sistema non controllato.

Invece è conveniente diminuire i valori del passo, della massa dell'avantreno e della rigidità della forcella anteriore, dato che la loro crescita comporta un restringimento del range di autostabilità. In particolare il passo risulta essere il parametro con l'effetto più destabilizzante in assoluto. Questo non significa che sia impossibile utilizzare una bicicletta con un passo grande, ma vuol dire che è necessario un costante intervento del ciclista per controllare l'evoluzione del moto, che altrimenti sarebbe divergente. La rigidità invece non condiziona le velocità di weave e di capsise ma modifica la forma del secondo modo di weave.

Al contrario, aumentando i valori del raggio delle ruote, dell'avancorsa, dell'inclinazione dello sterzo e della posizione orizzontale del centro di massa si ottiene un aumento del range di velocità, che si traduce in un miglioramento della stabilità della bicicletta. Di questi ultimi parametri la posizione orizzontale del centro di massa è quello che comporta una maggiore espansione del range di autostabilità. Di ciò si può avere facilmente una testimonianza pratica: si consideri di trasportare un passeggero alle nostre spalle; in questo caso sarà più difficile pedalare senza le mani solide sul manubrio. Se il passeggero scende dalla bicicletta il centro di massa si sposta in avanti e il valore di  $X_B$  cresce; con questa disposizione delle masse è molto più fattibile procedere senza controllare il manubrio. La ruota anteriore e l'inclinazione dello sterzo meritano un'ulteriore osservazione: esse sono responsabili di una forte diminuzione delle velocità di weave e di capsise e conseguente aumento del range di autostabilità; questo significa che aumentando la grandezza della ruota anteriore e dell'angolo di inclinazione si rende il range più accessibile alla maggior parte degli utenti.

Nonostante si sia giunti a dei risultati validi e completi, lo studio della stabilità di una bicicletta può essere ancora arricchito da ulteriori sviluppi. Per esempio, per ottenere dei risultati ancora più precisi si potrebbero aumentare i livelli dei valori dei parametri, da due a tre. Questo permetterebbe di ottenere delle dipendenze quadratiche tra i parametri e la risposta, ma ciò comporterebbe un notevole aumento di simulazioni da implementare: esso passerebbe da  $2^8 = 256$  a  $3^8 = 6561$ , quasi 25 volte tanto. Dato il fortissimo incremento del numero di simulazioni risulta più comodo aumentare i valori solo per quei parametri che sono risultati particolarmente significativi in questo elaborato: quindi si potrebbero implementare delle simulazioni facendo variare quattro grandezze, la posizione orizzontale del centro di massa, il passo, la ruota anteriore e l'inclinazione dello sterzo, e attribuendo loro quattro livelli. In questo modo, con  $4^4 = 256$  simulazioni, si otterrebbe un ulteriore approfondimento dei risultati ottenuti, senza eccessive difficoltà computazionali.

Un altro sviluppo potrebbe riguardare il modello utilizzato: nel capitolo 2 le equazioni della bicicletta sono state ottenute considerando una particolare configurazione del telaio, ignorando la presenza di ammortizzatori e approssimando le ruote a dei dischi senza nessuno pneumatico. Tali ipotesi semplificative, se opportunamente trattate e modellizzate, possono tradursi in altri parametri caratterizzanti di una bicicletta che possono essere considerati in un'ulteriore analisi di stabilità.

# *Bibliografia*

---

Ing. Mariagrazia Dotoli – *“Controlli automatici, stabilità dei sistemi lineari”*

Giovanni Marro – *“Controlli Automatici”*

[http://www.econ.uniurb.it/materiale/5485\\_Autovalori\\_EDO-lineari\\_numeri-complessi.pdf](http://www.econ.uniurb.it/materiale/5485_Autovalori_EDO-lineari_numeri-complessi.pdf)

Alberto Bemporad – *“Corso di teoria dei sistemi”*

Samuela Locci – *“Metodi per il calcolo di autovalori e autovettori e stabilità dei sistemi lineari”*

J. P. Meijaard, Jim M. Papadopoulos, Andy Ruina e A. L. Schwab – *“Linearized dynamics equation for the balance and steer of a bicycle: a benchmark and review”*

Alberto Doria – *“Key features of single-track vehicles dynamics”*

Alberto Doria, Luca Taraborelli e Nicola Segliani – *“The effect of front fork compliance on the stability of bicycles”*

Douglas C. Montgomery – *“Design and analysis of experiments”*

Vittore Cossalter, Alberto Doria, Matteo Formentini e Martino Peretto – *“Experimental and numerical analysis of the influence of tyres’ properties on the straight running stability of a sport-touring motorcycle”*

Giampiero Bindolino, Paolo Mantegazza e Pierangelo Masarati – *“Aeroelasticità applicata”*



# Appendice A

---

## Coefficienti delle equazioni linearizzate del moto

Le matrici delle equazioni linearizzate del moto sono definite secondo i 25 parametri che caratterizzano la bicicletta. In questa sezione verranno spiegati i passaggi significativi per ottenere i coefficienti di ogni singola matrice.

$$[M] \begin{Bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\delta} \end{Bmatrix} + v[C_1] \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\delta} \end{Bmatrix} + [g[K_0] + v^2[K_2]] \begin{Bmatrix} \phi \\ \delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Per comodità si usa la seguente nomenclatura:

- con R si intendono le grandezze relative alla ruota posteriore;
- B per quanto concerne il telaio posteriore e il corpo del ciclista;
- H per l'avantreno, composto da forcella anteriore e manubrio;
- F per indicare la ruota anteriore;
- T per specificare le grandezze del sistema nel suo insieme;
- infine A per il sistema composto dall'avantreno e dalla ruota anteriore.

Si definiscono la massa totale del sistema e la posizione del centro di massa totale:

$$m_T = m_R + m_B + m_H + m_F$$
$$x_T = \frac{x_B m_B + x_H m_H + x_F m_F}{m_T} \quad z_T = \frac{-r_R m_R + z_B m_B + z_H m_H - r_F m_F}{m_T}$$

I momenti di inerzia e i prodotti di inerzia del sistema sono:

$$I_{Txx} = I_{Rxx} + I_{Bxx} + I_{Hxx} + I_{Fxx} + m_R r_R^2 + m_B z_B^2 + m_H z_H^2 + m_F r_F^2$$
$$I_{Txz} = I_{Bxz} + I_{Hxz} - m_B x_B z_B - m_H x_H z_H + m_F w r_F$$
$$I_{Tzz} = I_{Rzz} + I_{Bzz} + I_{Hzz} + I_{Fzz} + m_B x_B^2 + m_H x_H^2 + m_F w^2$$

Le medesime grandezze vengono specificate anche per il sistema A:

$$\begin{aligned}
 m_A &= m_H + m_F \\
 x_A &= \frac{x_H m_H + w m_F}{m_A} & z_A &= \frac{z_H m_H - r_F m_F}{m_A} \\
 I_{Axx} &= I_{Hxx} + I_{Fxx} + m_H (z_H - z_A)^2 + m_F (r_F + z_A)^2 \\
 I_{Axz} &= I_{Hxz} - m_H (x_H - x_A)(z_H - z_A) + m_F (w - x_A)(r_F + z_A) \\
 I_{Azz} &= I_{Hzz} + I_{Fzz} + m_H (x_H - x_A)^2 + m_F (w - x_A)^2
 \end{aligned}$$

Sia  $\lambda = (\sin \lambda, 0, \cos \lambda)^T$  un vettore unitario con  $\lambda$  angolo di inclinazione dello sterzo. Il centro di massa del sistema A è posizionato avanti all'asse di sterzo di una distanza perpendicolare  $u_A$  espressa come segue:

$$u_A = (x_A - w - c) \cos \lambda - z_A \sin \lambda.$$

Sono necessarie altre tre grandezze per il sistema A: il momento di inerzia relativo all'asse di sterzo e i prodotti di inerzia:

$$\begin{aligned}
 I_{A\lambda\lambda} &= m_A u_A^2 + I_{Axx} \sin^2 \lambda + 2I_{Axz} \sin \lambda \cos \lambda + I_{Azz} \cos^2 \lambda \\
 I_{A\lambda x} &= -m_A u_A z_A + I_{Axx} \sin \lambda + I_{Axz} \cos \lambda \\
 I_{A\lambda z} &= m_A u_A x_A + I_{Axz} \sin \lambda + I_{Azz} \cos \lambda
 \end{aligned}$$

Si definisce  $\mu = \frac{c}{w} \cos \lambda$ .

I momenti angolari lungo l'asse y delle ruote, divisi per le velocità, e la loro somma formano i coefficienti giroscopici:

$$S_R = \frac{I_{Ryy}}{r_R} \quad S_F = \frac{I_{Fyy}}{r_F} \quad S_T = S_R + S_F$$

Si definisce il momento statico come:

$$S_A = m_A u_A + \mu m_T x_T$$

Si possono quindi scrivere le matrici come segue:

$$M = \begin{bmatrix} M_{\phi\phi} & M_{\phi\delta} \\ M_{\delta\phi} & M_{\delta\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{Txx} & I_{A\lambda x} + \mu I_{Txz} \\ I_{A\lambda x} + \mu I_{Txz} & I_{A\lambda\lambda} + 2\mu I_{A\lambda z} + \mu^2 I_{Tzz} \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} C_{1\phi\phi} & C_{1\phi\delta} \\ C_{1\delta\phi} & C_{1\delta\delta} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \mu S_T + S_F \cos \lambda + \frac{I_{Txz}}{w} \cos \lambda - \mu m_T z_T \\ -(\mu S_T + S_F \cos \lambda) & \frac{I_{A\lambda z}}{w} \cos \lambda + \mu \left( S_A + \frac{I_{Tzz}}{w} \cos \lambda \right) \end{bmatrix}$$

$$K_0 = \begin{bmatrix} K_{0\phi\phi} & K_{0\phi\delta} \\ K_{0\delta\phi} & K_{0\delta\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_T z_T & -S_A \\ -S_A & -S_A \sin \lambda \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} K_{2\phi\phi} & K_{2\phi\delta} \\ K_{2\delta\phi} & K_{2\delta\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{S_T - m_T z_T}{w} \cos \lambda \\ 0 & \frac{S_A + S_F \sin \lambda}{w} \cos \lambda \end{bmatrix}$$

Per le equazioni:

$$[M] \begin{Bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\delta} \end{Bmatrix} + v[C_1] \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\delta} \end{Bmatrix} + [g[K_0] + v^2[K_2]] \begin{Bmatrix} \phi \\ \delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



# Appendice B

---

## Derivazione delle equazioni linearizzate del moto

Il problema consiste nel trovare le equazioni linearizzate che governano il moto di una bicicletta, senza controllo esterno, soggetta a una leggera perturbazione. Queste equazioni saranno funzioni dei due gradi di libertà: l'angolo di rollio  $\phi$ , e l'angolo di sterzo  $\delta$ .

È necessario precisare che si assume che gli angoli  $\psi$ ,  $\phi$  e  $\delta$  siano sufficientemente piccoli da rendere trascurabili le potenze del secondo ordine.

Le forze che verranno considerate sono: la forza gravitazionale per ogni corpo, il momento di rollio  $T_\phi$  attorno all'asse che collega i due punti di contatto delle ruote, il momento di sterzo applicato dal ciclista positivamente al manubrio, quindi negativamente al telaio posteriore, e le reazioni vincolari della ruota anteriore con il suolo: in direzione verticale, pari a  $\frac{-m_T g x_T}{w}$ , e in direzione orizzontale,  $F_{Fy}$ .

Si applica il bilancio del momento angolare ai diversi sottosistemi, relativo a un asse fissato  $u$ :

$$\sum_{i \in \{\text{corpi}\}} [r_i \times a_i m_i + I_i \dot{\omega}_i + \omega_i \times (I_i \omega_i)] \cdot u = \sum_{j \in \{\text{forze applicate}\}} [r_j \times F_j] \cdot u$$

Nella parte sinistra dell'equazione è rappresentata la velocità di variazione del momento angolare relativo all'asse  $u$ . A destra invece è descritto il momento delle forze esterne.

Le grandezze  $r_i$  e  $r_j$  sono rispettivamente le posizioni dei centri di massa e dei punti di applicazione delle forze misurati dall'asse  $u$ . Le velocità angolari  $\omega_i$  e le accelerazioni  $\dot{\omega}_i$  e  $a_i$  vengono espresse come derivate prima e seconda degli spostamenti laterali, degli angoli di imbardata, rollio e sterzo.

Si consideri il bilancio del momento angolare per tutta la bicicletta (relativo all'asse sul piano del suolo, istantaneamente allineato con la retta dove il piano del telaio interseca il terreno):

$$\begin{aligned} -m_T \ddot{y}_P z_T + I_{Txx} \ddot{\phi} + I_{Txz} \ddot{\psi} + I_{A\lambda x} \ddot{\delta} + \dot{\psi} v S_T + \dot{\delta} v S_F \cos \lambda \\ = T_\phi - g m_T z_T \phi + g S_A \delta \end{aligned} \quad (B1)$$

Nella parte a destra dell'equazione si nota che oltre al momento  $T_\phi$  c'è anche il contributo del momento delle forze gravitazionali dovuto agli spostamenti laterali prodotti dal rollio e dallo sterzo, e un termine che rappresenta lo spostamento laterale della forza di reazione verticale della ruota anteriore indotto dallo sterzo.

Il bilancio del momento angolare di imbardata del sistema completo (relativo a un asse verticale fissato che istantaneamente passa per il punto di contatto della ruota posteriore con il suolo) si scrive come:

$$m_T \ddot{y}_P z_T + I_{Txz} \ddot{\phi} + I_{Tzz} \ddot{\psi} + I_{A\lambda z} \ddot{\delta} - \dot{\phi} v S_T - \dot{\delta} v S_F \sin \lambda = w F_{Fy} \quad (B2)$$

Il bilancio del momento angolare dello sterzo per il solo sistema A (insieme di avanzamento con la ruota anteriore) relativo all'asse di sterzo si scrive come segue:

$$\begin{aligned} m_A \ddot{y}_P u_A + I_{A\lambda x} \ddot{\phi} + I_{A\lambda z} \ddot{\psi} + I_{A\lambda\lambda} \ddot{\delta} + v S_T (-\dot{\phi} \cos \lambda + \dot{\psi} \sin \lambda) \\ = T_\delta - c F_{Fy} \cos \lambda + g (\phi + \delta \sin \lambda) S_A \end{aligned} \quad (B3)$$

Sommato al momento di sterzo  $T_\delta$  ci sono anche le coppie del vincolo orizzontale (incognita) e del vincolo verticale per il sistema A.

È possibile combinare le equazioni B2 e B3 in modo da eliminare la reazione vincolare orizzontale  $F_{Fy}$ .

L'ipotesi di perfetto rotolamento della ruota posteriore elimina  $\psi$ ,  $y_P$  e le loro derivate dalle equazioni. Tale condizione si esprime come:

$$\dot{y}_P = v\psi \quad (\text{B4})$$

Lo stesso ragionamento si può ripetere per la ruota anteriore:

$$y_Q = y_P + w\psi - c\delta \cos \lambda \Rightarrow \frac{d(y_P + w\psi - c\delta \cos \lambda)}{dt} = v(\psi + \delta \cos \lambda) \quad (\text{B5})$$

Sottraendo l'equazione B4 dalla B5 si ottiene un'equazione di  $\dot{\psi}$  in termini di  $\delta$  e  $\dot{\delta}$ :

$$\dot{y}_P + \dot{\psi}w - c\dot{\delta} \cos \lambda - \dot{y}_P = v\psi + v\delta \cos \lambda - v\psi \Rightarrow \dot{\psi} = \frac{v\delta + c\dot{\delta}}{w} \cos \lambda \quad (\text{B6})$$

Derivando l'equazione B6 si ottiene:

$$\ddot{\psi} = \frac{v\dot{\delta} + c\ddot{\delta}}{w} \cos \lambda \quad (\text{B7})$$

Si deriva l'equazione B4 e si esplicita  $\dot{\psi}$ :

$$\dot{y}_P = v\dot{\psi} = \frac{v^2\delta + vc\dot{\delta}}{w} \cos \lambda$$

(B8)

Sostituendo le equazioni B6, B7 e B8 nell'equazione B1 si ottiene un'espressione di  $T_\phi$  in funzione di  $\phi$ ,  $\dot{\phi}$ ,  $\ddot{\phi}$ ,  $\delta$ ,  $\dot{\delta}$  e  $\ddot{\delta}$ . Questa è l'equazione del rollo:

$$I_{Txx}\ddot{\phi} + (I_{A\lambda x} + \mu I_{Txz})\ddot{\delta} + \left[ v \left( \mu S_T + S_F \cos \lambda + \frac{I_{Txz}}{w} \cos \lambda - \mu m_{Tz_T} \right) \right] \dot{\delta} \\ + g m_{Tz_T} \phi + \left[ v^2 \frac{(S_T - m_{Tz_T}) \cos \lambda}{w} - g S_A \right] \delta = T_\phi$$

Con  $\mu = \frac{c}{w} \cos \lambda$ .

Allo stesso modo, sostituendo le equazioni B6, B7 e B8 nell'equazione ottenuta combinando le equazioni B2 e B3, si ottiene l'espressione di  $T_\delta$  in funzione di  $\phi$ ,  $\delta$  e le loro derivate prime e seconde. Questa è l'equazione dello sterzo.

$$(I_{A\lambda x} + \mu I_{Txz})\ddot{\phi} + (I_{A\lambda\lambda} + 2\mu I_{A\lambda z} + \mu^2 I_{Tzz})\ddot{\delta} + [-v(\mu S_T + S_F \cos \lambda)]\dot{\phi} \\ + \left[ v \frac{I_{A\lambda z}}{w} \cos \lambda + v\mu \left( S_A + \frac{I_{Tzz}}{w} \cos \lambda \right) \right] \dot{\delta} - g S_A \phi \\ + \left[ v^2 \frac{(S_T + S_F \sin \lambda) \cos \lambda}{w} - g S_A \right] \delta = T_\delta$$

Queste equazioni possono essere scritte nella forma più conosciuta, propria del modello della bicicletta:

$$[M] \begin{Bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\delta} \end{Bmatrix} + v[C_1] \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\delta} \end{Bmatrix} + [g[K_0] + v^2[K_2]] \begin{Bmatrix} \phi \\ \delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_\phi \\ T_\delta \end{Bmatrix}$$

# Appendice C

---

## Codici in Matlab

```
% Input
w      = 1.02;
c      = 0.08;
lambda = pi/10;
g      = 9.81;
rR     = 0.30;
mR     = 2;
IRxx   = 0.0603;
IRyy   = 0.12;
IRzz   = IRxx;
xB     = 0.3;
zB     = -0.9;
mB     = 85;
IBxx   = 9.2;
IByy   = 11;
IBzz   = 2.8;
IBxz   = 2.4;
xH     = 0.9;
zH     = -0.7;
mH     = 4;
IHxx   = 0.05892;
IHyy   = 0.06;
IHzz   = 0.00708;
IHxz   = -0.00756;
rF     = 0.35;
mF     = 3;
IFxx   = 0.1405;
IFyy   = 0.28;
IFzz   = IFxx;

%-----
% Matrice di massa 2x2
%-----
mT     = mR+mB+mH+mF;
xT     = (xB*mB+xH*mH+w*mF)/mT;
zT     = (-rR*mR+zB*mB+zH*mH-rF*mF)/mT;
ITxx   = IRxx+IBxx+IHxx+IFxx+mR*rR^2+mB*zB^2+mH*zH^2+mF*rF^2;
ITxz   = IBxz+IHxz-mB*xB*zB-mH*xH*zH+mF*w*rF;
ITzz   = IRzz+IBzz+IHzz+IFzz+mB*xB^2+mH*xH^2+mF*w^2;

%-----
mA     = mH+mF;
xA     = (xH*mH+w*mF)/mA;
zA     = (zH*mH-rF*mF)/mA;
IAxx   = IHxx+IFxx+mH*(zH-zA)^2+mF*(rF+zA)^2;
IAxz   = IHxz-mH*(xH-xA)*(zH-zA)+mF*(w-xA)*(rF+zA);
IAzz   = IHzz+IFzz+mH*(xH-xA)^2+mF*(w-xA)^2;
uA     = (xA-w-c)*cos(lambda)-zA*sin(lambda);
uW     = rF*sin(lambda)-c*cos(lambda);
IA11   =
mA*uA^2+IAxx*sin(lambda)^2+2*IAxz*sin(lambda)*cos(lambda)+IAzz*cos(lam
bda)^2;
IALx   = -mA*uA*zA+IAxx*sin(lambda)+IAxz*cos(lambda);
IALz   = mA*uA*xA+IAxz*sin(lambda)+IAzz*cos(lambda);
mi     = (c/w)*cos(lambda);
```

```

SR      = IRyy/rR;
SF      = IFyy/rF;
ST      = SF+SR;
SA      = mA*uA+mi*mT*xT;
Mphiphi= ITxx;
Mphidel= IAlx+mi*ITxz;
Mdelphi= Mphidel;
Mdeldel= IAll+2*mi*IAlz+ITzz*mi^2;
M       = [Mphiphi,Mphidel;Mdelphi,Mdeldel];
%-----
% Matrice di smorzamento equivalente C1 2x2
%-----
Cvphiphi = 0.;
Cvphidel = mi*ST+SF*cos(lambda)+ITxz*cos(lambda)/w-mi*mT*zT;
Cvdelphi = -(mi*ST+SF*cos(lambda));
Cvdeldel = IAlz*cos(lambda)/w+mi*(SA+ITzz*cos(lambda)/w);
Cv       = [Cvphiphi,Cvphidel;Cvdelphi,Cvdeldel];
%-----
% Matrici di rigidezza K0 e K1 2x2
%-----
Kophiphi = mT*zT;
Kophidel = -SA;
Kodelphi = Kophidel;
Kodeldel = -SA*sin(lambda);
Ko       = [Kophiphi,Kophidel;Kodelphi,Kodeldel];
%-----
Kvphiphi = 0.;
Kvphidel = (ST-mT*zT)*cos(lambda)/w;
Kvdelphi = 0.;
Kvdeldel = (SA+SF*sin(lambda))*cos(lambda)/w;
Kv       = [Kvphiphi,Kvphidel;Kvdelphi,Kvdeldel];
%-----
%
% Modello della forcilla
%
%-----
% Dati forcilla
%-----
kbeta  = 5683*1
cbeta  = 1*1
hW     = 0.21*1
%-----
% Matrice di massa 3x3
%-----
MA = [0,0,(ITxz*(hW+rF*cos(lambda))+IFxx*w*cos(lambda)-
hW*mF*rF*w)/w;0,0,(ITzz*c*rF*(cos(lambda))^2+(ITzz*c*hW-
c*hW*mF*w^2+IAlz*rF*w)*cos(lambda)-IFxx*c*w*cos(lambda)*sin(lambda)-
hW*mF*uW*w^2+IAlz*hW*w)/w^2;(ITxz*(hW+rF*cos(lambda))+IFxx*w*cos(lambda)-
hW*mF*rF*w)/w,(ITzz*c*rF*(cos(lambda))^2+(ITzz*c*hW-
c*hW*mF*w^2+IAlz*rF*w)*cos(lambda)-IFxx*c*w*cos(lambda)*sin(lambda)-
hW*mF*uW*w^2+IAlz*hW*w)/w^2,(ITzz*(hW^2+(rF*cos(lambda))^2)+2*(-
mF*w^2+ITzz)*hW*rF*cos(lambda)+IFxx*w*(-2*hW*sin(lambda)-
2*rF*cos(lambda)*sin(lambda)+w)-hW^2*mF*w^2)/w^2];
%-----
% Matrice di smorzamento 3x3
%-----
CdA = [0,0,0;0,0,0;0,0,cbeta];
%-----
CvA = [0,0,((hW+rF*cos(lambda))*mT*zT+ST)-
(SF*w+ITxz)*sin(lambda))/w;0,0,(c*(mT*rF*xT-
SF*w)*(cos(lambda))^2+(c*mT*hW*xT+mA*rF*uA*w)*cos(lambda)+(SF*rF*w-

```

```

ITzz*c)*cos(lambda)*sin(lambda)+w*(SF*hW-IAIz)*sin(lambda)-
SF*w^2+mA*hW*uA*w)/w^2;(-ST*(hW+rF*cos(lambda))+SF*w*sin(lambda))/w,(-
w*((IFxx*sin(lambda)+SF*rF*sin(lambda)+hW*mF*w)*cos(lambda)+SF*hW*sin(
lambda))+c*mT*rF*xT*(cos(lambda))^2+(ITzz*rF+c*SF*w)*(cos(lambda))^2+
-
c*mF*w+ITzz)*hW*cos(lambda)+c*mT*hW*xT*cos(lambda))/w^2,(mT*hW^2*xT+((
2*mT*xT-
mF*w)*hW+mT*rF*xT*cos(lambda))*rF*cos(lambda)+IFxx*w*(sin(lambda))^2+
(mF*w^2-ITzz)*hW-ITzz*rF*cos(lambda))*sin(lambda)-hW^2*mF*w)/w^2];
%-----
% Matrice di rigidezza 3x3
%-----
KsA = [0,0,0;0,0,0;0,0,kbeta];
%-----
RW =-mF*hW+(hW+rF*cos(lambda))*(mT*xT)/w;
% SW = (c/w)*mT*xT*cos(lambda)+mF*uW;
KoA = [0,0,-RW;0,0,-RW*sin(lambda);-RW,-RW*sin(lambda),-
RW*cos(lambda)];
%-----
KvA = [0,0,-((mT*zT+ST)*sin(lambda))/w;0,0,-
((c*mT*xT*cos(lambda)+SF*w*sin(lambda)+mA*uA*w)*sin(lambda))/w^2;0,((m
T*hW*xT+(mT*rF*xT+SF*w)*cos(lambda)-hW*mF*w)*cos(lambda))/w^2,-
((mT*hW*xT+(mT*rF*xT+SF*w)*cos(lambda)-hW*mF*w)*sin(lambda))/w^2)];
%-----
%
% GLOBAL MODEL OK
%
%-----
Cz = [0;0];
Rz = [0,0,0];
MB = [M,Cz];
MB = [MB;Rz];
MM = MA+MB;
%-----
CvB = [Cv,Cz];
CvB = [CvB;Rz];
CCv = CvA+CvB;
%-----
CCd = CdA;
%-----
KoB = [Ko,Cz];
KoB = [KoB;Rz];
KKo = KoA+KoB;
%-----
KvB = [Kv,Cz];
KvB = [KvB;Rz];
KKv = KvA+KvB;
%-----
KKs = KsA;
%-----
% EIGENVALUES
%-----
II = eye(3);
ZER = zeros(3);
IVett= [1;1;1;1;1;1];
for i = 1:1:401
v = 0.1*(i-1);
CC = CCv*v+CCd;
KK = KKo*g+KKv*v^2+KKs;
%-----
MK = -MM\KK

```

```

MC = -MM\CC
MSUP= cat(2,ZER,II)
MINF= cat(2,MK,MC)
MAT = cat(1,MSUP,MINF)
[eigvett,eigvalA] = eig(MAT);
Vaut(i,[:, :]) = eigvett;
eigval = eigvalA*IVett;
Maut(i, :) = eigval;
Vel(i)      = v;
end
%-----
% Plotting
%-----
Mre = real(Maut')
Mim = imag(Maut')
figure(1)
plot1 = plot(Vel,Mre,'b.',Vel,Mim,'m+');
set(plot1,'LineStyle','none');
axis([0 20 -30 30])
grid on
xlabel('Speed [m/s]')
ylabel('Real and imaginary parts [1/s]')
%-----
% Vectors
%-----

speed = input('forward speed')
index =speed*10+1
for ke = 1:1:6
    for kq = 1:1:3
        evec(kq,ke) = Vaut(index,kq,ke)
    end
end
for ke = 1:1:6
    mevec = abs(evec(:,ke))
    angevec = angle(evec(:,ke))
    nevec = norm(mevec)
    Revec = real(evec(:,ke))/nevec
    Ievec = imag(evec(:,ke))/nevec
    figure(2)
    subplot(2,3,ke)
    compass(Revec,Ievec)
end
%-----
% Verification
%-----
meq = mF*(c*cos(lambda)+uW)/(c*cos(lambda));
omesh = (kbeta/(meq*hW^2+IFxx))^0.5;
Index = uW/(IFxx/(mF*rF*sin(lambda)))

```

# Appendice D

## Tabella del primo e del secondo ciclo di simulazioni

Grazie a questa tabella è possibile numerare univocamente tutte le diverse configurazioni della bicicletta. Questa chiave di lettura è valida per i primi due cicli di simulazioni.

Prova	R <sub>R</sub>	R <sub>F</sub>	m <sub>H</sub>	X <sub>B</sub>	Z <sub>B</sub>	w	c	λ
1	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto
2	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso
3	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto
4	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso
5	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto
6	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso
7	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto
8	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso
9	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto
10	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso
11	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto
12	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso
13	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto
14	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso
15	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto
16	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso
17	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto
18	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso
19	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto
20	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso
21	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto
22	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso
23	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto
24	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso
25	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto
26	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso
27	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto
28	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso
29	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto
30	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso
31	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto
32	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso
33	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto
34	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso
35	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto
36	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso
37	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto
38	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso
39	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto
40	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso

Prova	R <sub>R</sub>	R <sub>F</sub>	m <sub>H</sub>	X <sub>B</sub>	Z <sub>B</sub>	w	c	λ
41	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto
42	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso
43	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto
44	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso
45	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto
46	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso
47	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto
48	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso
49	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto
50	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso
51	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto
52	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso
53	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto
54	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso
55	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto
56	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso
57	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto
58	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso
59	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto
60	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso
61	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto
62	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso
63	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto
64	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso
65	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto
66	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso
67	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto
68	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso
69	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto
70	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso
71	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto
72	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso
73	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto
74	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso
75	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto
76	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso
77	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto
78	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso
79	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto
80	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso
81	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto
82	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso
83	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto
84	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso
85	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto
86	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso
87	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto
88	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso
89	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto
90	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso
91	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto
92	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso
93	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto

Prova	R <sub>R</sub>	R <sub>F</sub>	m <sub>H</sub>	X <sub>B</sub>	Z <sub>B</sub>	w	c	λ
94	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso
95	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto
96	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso
97	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto
98	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso
99	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto
100	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso
101	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto
102	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso
103	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto
104	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso
105	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto
106	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso
107	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto
108	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso
109	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto
110	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso
111	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto
112	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso
113	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto
114	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso
115	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto
116	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso
117	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto
118	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso
119	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto
120	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso
121	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto
122	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso
123	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto
124	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso
125	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto
126	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso
127	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto
128	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso
129	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto
130	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso
131	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto
132	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso
133	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto
134	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso
135	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto
136	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso
137	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto
138	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso
139	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto
140	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso
141	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto
142	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso
143	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto
144	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso
145	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto
146	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso

<b>Prova</b>	<b>R<sub>R</sub></b>	<b>R<sub>F</sub></b>	<b>m<sub>H</sub></b>	<b>X<sub>B</sub></b>	<b>Z<sub>B</sub></b>	<b>w</b>	<b>c</b>	<b>λ</b>
147	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto
148	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso
149	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto
150	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso
151	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto
152	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso
153	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto
154	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso
155	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto
156	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso
157	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto
158	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso
159	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto
160	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso
161	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto
162	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso
163	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto
164	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso
165	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto
166	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso
167	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto
168	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso
169	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto
170	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso
171	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto
172	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso
173	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto
174	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso
175	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto
176	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso
177	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto
178	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso
179	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto
180	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso
181	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto
182	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso
183	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto
184	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso
185	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto
186	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso
187	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto
188	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso
189	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto
190	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso
191	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto
192	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso
193	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto
194	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso
195	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto
196	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso
197	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto
198	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso
199	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto

<b>Prova</b>	<b>R<sub>R</sub></b>	<b>R<sub>F</sub></b>	<b>m<sub>H</sub></b>	<b>X<sub>B</sub></b>	<b>Z<sub>B</sub></b>	<b>w</b>	<b>c</b>	<b>λ</b>
200	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso
201	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto
202	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso
203	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto
204	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso
205	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto
206	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso
207	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto
208	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso
209	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto
210	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso
211	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto
212	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso
213	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto
214	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso
215	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto
216	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso
217	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto
218	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso
219	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto
220	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso
221	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto
222	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso
223	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto
224	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso
225	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto
226	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso
227	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto
228	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso
229	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto
230	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso
231	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto
232	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso
233	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto
234	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso
235	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto
236	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso
237	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto
238	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso
239	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto
240	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso
241	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto
242	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso
243	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto
244	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso
245	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto
246	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso
247	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto
248	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso
249	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto
250	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso
251	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto
252	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso

Prova	R <sub>R</sub>	R <sub>F</sub>	m <sub>H</sub>	X <sub>B</sub>	Z <sub>B</sub>	w	c	λ
253	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto
254	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso
255	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto
256	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso

### **Tabella dei risultati del primo ciclo di simulazioni**

In diverse configurazioni il moto di weave e/o di capsizing risulta sempre instabile. Di conseguenza, per le successive analisi, alla velocità di weave è stato assegnato il valore di fondo scala, pari a 20 m/s, e alla velocità di capsizing il valore di 0 m/s (due situazioni fortemente indesiderate al fine dello studio della stabilità).

Segue la tabella dei risultati del primo ciclo di simulazioni, con velocità espresse in m/s.

	<u>V weave</u>	<u>V capsizing</u>
1	-----	6,8
2	-----	6,2
3	-----	4,5
4	-----	3,5
5	5,1	9,2
6	4,6	9,5
7	4,7	6,9
8	4,2	6,6
9	-----	6,9
10	-----	6,3
11	13,7	4,5
12	-----	3,5
13	5,1	10,0
14	4,4	9,9
15	4,8	7,1
16	4,2	6,9
17	-----	4,6
18	-----	3,6
19	-----	3,1
20	-----	-----
21	5,1	7,1
22	4,7	6,9
23	4,8	5,9
24	4,3	5,4
25	-----	4,6
26	-----	3,6
27	-----	3,2
28	-----	-----
29	5,4	7,4
30	4,8	7,3

	<u>V weave</u>	<u>V capsizing</u>
31	5,0	6,0
32	4,5	5,6
33	7,2	6,9
34	-----	6,7
35	5,1	4,8
36	-----	4,2
37	5,0	8,5
38	4,5	8,8
39	4,4	6,2
40	3,9	5,9
41	5,8	7,2
42	-----	6,9
43	4,9	4,8
44	-----	4,2
45	4,8	9,1
46	4,2	9,4
47	4,5	6,3
48	3,9	6,2
49	-----	2,6
50	-----	4,3
51	5,3	3,5
52	-----	2,6
53	4,8	6,4
54	4,5	6,2
55	4,3	5,1
56	3,9	4,8
57	-----	5,0
58	-----	4,4
59	8,3	3,5
60	-----	2,6

	<u>V weave</u>	<u>V capsize</u>
61	5,0	6,6
62	4,6	6,5
63	4,5	5,2
64	4,1	4,9
65	-----	9,1
66	-----	8,4
67	-----	8,4
68	-----	4,4
69	6,1	12,9
70	5,4	14,4
71	5,6	9,6
72	5,0	9,5
73	-----	9,5
74	-----	8,8
75	-----	5,8
76	-----	4,4
77	6,0	17,0
78	5,2	16,9
79	5,8	10,3
80	5,1	10,7
81	-----	5,8
82	-----	4,5
83	-----	3,6
84	-----	-----
85	6,2	10,0
86	5,6	10,0
87	5,9	8,0
88	5,3	7,5
89	-----	5,9
90	-----	4,6
91	-----	3,7
92	-----	-----
93	6,5	10,8
94	5,8	11,4
95	6,1	8,3
96	5,5	8,0
97	13,4	9,5
98	-----	9,3
99	8,7	6,1
100	-----	5,4
101	5,9	12,6
102	5,3	13,9
103	5,2	8,4
104	4,7	8,4
105	6,8	9,9
106	-----	9,9
107	6,1	6,2
108	-----	5,4
109	5,6	14,8
110	4,9	19,9
111	5,3	8,9
112	4,6	9,2

	<u>V weave</u>	<u>V capsize</u>
113	-----	6,3
114	-----	5,6
115	-----	4,2
116	-----	3,0
117	5,8	8,8
118	5,3	8,9
119	5,2	6,8
120	4,7	6,5
121	-----	6,4
122	-----	5,7
123	-----	4,2
124	-----	3,0
125	6,1	9,4
126	5,5	9,8
127	5,4	7,0
128	4,9	6,8
129	-----	6,6
130	-----	6,0
131	-----	4,4
132	-----	3,5
133	5,1	8,4
134	4,6	8,2
135	4,7	6,5
136	4,2	6,2
137	11,9	6,6
138	-----	6,0
139	11,8	4,4
140	-----	3,5
141	5,0	8,6
142	4,4	8,6
143	4,8	6,6
144	4,2	6,3
145	-----	4,5
146	-----	3,6
147	-----	3,1
148	-----	-----
149	5,1	6,7
150	4,7	6,4
151	4,8	5,6
152	4,3	5,2
153	-----	4,5
154	-----	3,6
155	-----	3,1
156	-----	-----
157	5,3	6,8
158	4,8	6,5
159	4,9	5,7
160	4,4	5,3
161	6,9	6,9
162	-----	6,4
163	5,0	4,7
164	-----	4,1

	<u>V weave</u>	<u>V capsize</u>
165	4,9	7,9
166	4,4	7,8
167	4,3	5,9
168	3,9	5,7
169	5,7	6,8
170	-----	6,5
171	4,8	4,7
172	-----	4,1
173	4,8	8,0
174	4,2	8,1
175	4,4	6,0
176	3,9	5,7
177	9,9	4,8
178	-----	4,3
179	5,0	3,5
180	-----	2,6
181	4,8	6,1
182	4,4	5,9
183	4,3	5,0
184	3,9	4,6
185	12,3	4,9
186	-----	4,3
187	6,9	3,5
188	-----	2,6
189	5,0	6,2
190	4,5	6,0
191	4,4	5,0
192	4,0	4,6
193	-----	8,7
194	-----	7,9
195	-----	5,6
196	-----	4,3
197	6,1	11,5
198	5,5	11,6
199	5,6	8,8
200	5,0	8,4
201	-----	8,8
202	-----	8,0
203	-----	5,6
204	-----	4,3
205	6,0	12,1
206	5,2	12,6
207	5,7	9,0
208	5,0	8,7
209	-----	5,7
210	-----	4,5

	<u>V weave</u>	<u>V capsize</u>
211	-----	3,6
212	-----	-----
213	6,3	9,1
214	5,7	8,7
215	5,9	7,5
216	5,3	7,0
217	-----	5,7
218	-----	4,5
219	-----	3,6
220	-----	-----
221	6,5	9,3
222	5,8	9,0
223	6,1	7,6
224	5,4	7,1
225	11,5	9,0
226	-----	8,6
227	8,1	6,0
228	-----	5,2
229	5,8	10,8
230	5,2	10,9
231	5,1	7,9
232	4,6	7,6
233	6,6	9,1
234	-----	8,7
235	5,9	6,0
236	-----	5,3
237	5,6	11,2
238	4,9	11,7
239	5,2	8,0
240	4,6	7,8
241	-----	6,2
242	-----	5,5
243	-----	4,2
244	-----	3,0
245	5,8	8,2
246	5,4	7,9
247	5,2	6,5
248	4,7	6,1
249	-----	6,2
250	-----	5,5
251	-----	4,2
252	-----	3,0
253	6,0	8,3
254	5,4	8,2
255	5,4	6,6
256	4,8	6,2

## **Tabella dei risultati del secondo ciclo di simulazioni**

Di seguito sono tabulati i risultati del secondo ciclo di simulazioni.

	<b><u>V weave</u></b>	<b><u>V capsiz</u></b>
<b>1</b>	8,7	7,2
<b>2</b>	-----	5,2
<b>3</b>	6,7	4,9
<b>4</b>	-----	3,5
<b>5</b>	5,3	10,6
<b>6</b>	4,7	8,6
<b>7</b>	4,9	8,3
<b>8</b>	4,3	6,9
<b>9</b>	6,8	6,9
<b>10</b>	-----	6,6
<b>11</b>	6,2	4,9
<b>12</b>	-----	3,7
<b>13</b>	5,2	11,4
<b>14</b>	4,5	9,7
<b>15</b>	5,0	8,1
<b>16</b>	4,3	7,1
<b>17</b>	12,6	4,7
<b>18</b>	-----	3,7
<b>19</b>	11,6	3,3
<b>20</b>	-----	1,7
<b>21</b>	5,2	7,3
<b>22</b>	4,7	6,9
<b>23</b>	4,9	6,1
<b>24</b>	4,4	5,4
<b>25</b>	12,5	4,8
<b>26</b>	-----	3,7
<b>27</b>	12,4	3,3
<b>28</b>	-----	1,6
<b>29</b>	5,4	7,7
<b>30</b>	4,8	7,3
<b>31</b>	5,1	6,3
<b>32</b>	4,5	5,8
<b>33</b>	6,3	7,4
<b>34</b>	-----	6,9
<b>35</b>	5,0	5,2
<b>36</b>	-----	4,4
<b>37</b>	5,1	9,1
<b>38</b>	4,5	8,2
<b>39</b>	4,6	6,9
<b>40</b>	4,1	6,0
<b>41</b>	5,5	7,6
<b>42</b>	-----	7,2
<b>43</b>	4,8	5,2
<b>44</b>	-----	4,5
<b>45</b>	4,9	9,2
<b>46</b>	4,2	8,3

	<b><u>V weave</u></b>	<b><u>V capsiz</u></b>
<b>47</b>	4,6	7,6
<b>48</b>	4,0	6,2
<b>49</b>	7,4	5,0
<b>50</b>	-----	4,4
<b>51</b>	5,0	3,6
<b>52</b>	-----	2,7
<b>53</b>	4,9	6,6
<b>54</b>	4,5	6,3
<b>55</b>	4,4	5,3
<b>56</b>	4,0	4,9
<b>57</b>	7,6	5,1
<b>58</b>	-----	4,4
<b>59</b>	6,2	3,7
<b>60</b>	-----	2,7
<b>61</b>	5,1	6,7
<b>62</b>	4,6	6,6
<b>63</b>	4,6	5,4
<b>64</b>	4,1	5,0
<b>65</b>	-----	9,2
<b>66</b>	-----	8,8
<b>67</b>	-----	6,1
<b>68</b>	-----	4,8
<b>69</b>	6,3	14,2
<b>70</b>	5,5	11,6
<b>71</b>	5,9	10,9
<b>72</b>	5,2	9,9
<b>73</b>	9,1	10,0
<b>74</b>	-----	8,6
<b>75</b>	-----	6,1
<b>76</b>	-----	4,8
<b>77</b>	6,1	11,6
<b>78</b>	5,3	12,6
<b>79</b>	6,0	12,3
<b>80</b>	5,2	9,3
<b>81</b>	-----	6,0
<b>82</b>	-----	4,7
<b>83</b>	-----	3,8
<b>84</b>	-----	1,2
<b>85</b>	6,3	9,9
<b>86</b>	5,7	10,0
<b>87</b>	6,0	8,5
<b>88</b>	5,4	7,8
<b>89</b>	-----	6,1
<b>90</b>	-----	4,6
<b>91</b>	-----	3,8
<b>92</b>	-----	1,2

	<u>V weave</u>	<u>V capsiz</u>
93	6,6	10,9
94	5,9	9,7
95	6,3	9,0
96	5,5	8,3
97	8,1	9,4
98	-----	8,9
99	6,8	6,6
100	-----	5,7
101	6,1	11,4
102	5,3	9,9
103	5,4	9,4
104	4,8	9,4
105	6,2	9,8
106	-----	10,4
107	5,6	6,8
108	-----	5,8
109	5,7	12,4
110	5,0	11,1
111	5,4	10,3
112	4,7	8,6
113	12,2	6,5
114	-----	5,6
115	10,9	4,4
116	-----	3,2
117	5,9	8,8
118	5,4	8,9
119	5,3	7,2
120	4,8	6,7
121	10,6	6,6
122	-----	5,8
123	10,7	4,4
124	-----	3,2
125	6,1	8,8
126	5,5	9,0
127	5,6	7,4
128	5,0	7,0
129	8,3	6,9
130	-----	6,2
131	15,0	4,8
132	-----	3,8
133	5,3	9,7
134	4,7	8,1
135	4,9	7,5
136	4,3	6,7
137	6,6	7,0
138	-----	6,2
139	6,0	4,9
140	-----	3,8
141	5,2	10,4
142	4,4	8,4
143	4,9	7,8
144	4,3	6,9

	<u>V weave</u>	<u>V capsiz</u>
145	12,2	4,7
146	-----	3,7
147	11,1	3,3
148	-----	1,7
149	5,3	6,9
150	4,7	6,4
151	4,9	5,9
152	4,4	5,3
153	12,2	4,7
154	-----	3,7
155	12,0	3,3
156	-----	1,7
157	5,4	7,0
158	4,8	6,6
159	5,0	5,9
160	4,5	5,4
161	6,2	7,1
162	-----	6,6
163	4,9	5,1
164	-----	4,4
165	5,1	8,9
166	4,5	8,1
167	4,6	6,7
168	4,0	6,1
169	5,4	7,2
170	-----	6,7
171	4,7	5,1
172	-----	4,4
173	4,9	9,4
174	4,2	8,4
175	4,6	6,9
176	4,0	6,2
177	7,0	5,0
178	-----	4,3
179	4,8	3,6
180	-----	2,7
181	4,9	6,3
182	4,5	5,9
183	4,4	5,2
184	4,0	4,7
185	7,1	5,0
186	-----	4,3
187	5,7	3,6
188	-----	2,7
189	5,0	6,4
190	4,5	6,0
191	4,5	5,2
192	4,0	4,8
193	-----	9,3
194	-----	8,2
195	-----	6,1
196	-----	4,7

	<u>V weave</u>	<u>V capsiz</u>
197	6,4	12,1
198	5,6	11,7
199	5,9	11,2
200	5,2	9,4
201	8,9	9,4
202	-----	8,4
203	-----	6,1
204	-----	4,7
205	6,1	12,1
206	5,3	12,4
207	5,9	12,4
208	5,1	9,9
209	-----	5,9
210	-----	4,6
211	-----	3,8
212	-----	1,2
213	6,5	9,4
214	5,8	8,7
215	6,1	8,0
216	5,4	7,1
217	-----	5,9
218	-----	4,6
219	-----	3,8
220	-----	1,2
221	6,6	9,4
222	5,9	9,0
223	6,2	8,0
224	5,5	7,3
225	7,8	9,5
226	-----	8,9

	<u>V weave</u>	<u>V capsiz</u>
227	6,6	6,4
228	-----	5,5
229	6,1	12,2
230	5,3	11,3
231	5,4	9,4
232	4,8	8,4
233	6,1	9,6
234	-----	9,1
235	5,4	6,5
236	-----	5,6
237	5,7	11,9
238	4,9	11,9
239	5,4	9,9
240	4,7	8,9
241	11,5	6,3
242	-----	5,5
243	10,2	4,3
244	-----	3,1
245	5,9	8,4
246	5,4	7,9
247	5,3	6,8
248	4,8	6,2
249	9,9	6,3
250	-----	5,6
251	10,0	4,3
252	-----	3,1
253	6,1	8,6
254	5,4	8,2
255	5,5	6,9
256	4,9	6,3

### **Tabella del terzo e del quarto ciclo di simulazioni**

Nel terzo ciclo di simulazioni c'è una modifica nei parametri considerati: la posizione verticale  $Z_B$  viene sostituita dalla rigidezza  $k_\beta$ . Di seguito è fornita la numerazione delle 256 simulazioni.

<b>Prova</b>	<b>R<sub>R</sub></b>	<b>R<sub>F</sub></b>	<b>m<sub>H</sub></b>	<b>X<sub>B</sub></b>	<b>k<sub>β</sub></b>	<b>w</b>	<b>c</b>	<b>λ</b>
<b>1</b>	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto
<b>2</b>	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso
<b>3</b>	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto
<b>4</b>	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso
<b>5</b>	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto
<b>6</b>	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso
<b>7</b>	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto
<b>8</b>	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso
<b>9</b>	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto

Prova	$R_R$	$R_F$	$m_H$	$X_B$	$k_\beta$	$w$	$c$	$\lambda$
10	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso
11	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto
12	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso
13	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto
14	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso
15	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto
16	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso
17	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto
18	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso
19	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto
20	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso
21	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto
22	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso
23	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto
24	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso
25	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto
26	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso
27	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto
28	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso
29	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto
30	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso
31	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto
32	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso
33	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto
34	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso
35	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto
36	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso
37	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto
38	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso
39	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto
40	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso
41	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto
42	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso
43	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto
44	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso
45	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto
46	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso
47	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto
48	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso
49	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto
50	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso
51	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto
52	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso
53	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto
54	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso
55	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto
56	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso
57	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto
58	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso
59	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto
60	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso
61	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto
62	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso

<b>Prova</b>	<b>R<sub>R</sub></b>	<b>R<sub>F</sub></b>	<b>m<sub>H</sub></b>	<b>X<sub>B</sub></b>	<b>k<sub>β</sub></b>	<b>w</b>	<b>c</b>	<b>λ</b>
63	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto
64	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso
65	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto
66	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso
67	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto
68	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso
69	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto
70	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso
71	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto
72	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso
73	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto
74	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso
75	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto
76	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso
77	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto
78	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso
79	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto
80	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso
81	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto
82	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso
83	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto
84	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso
85	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto
86	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso
87	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto
88	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso
89	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto
90	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso
91	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto
92	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso
93	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto
94	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso
95	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto
96	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso
97	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto
98	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso
99	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto
100	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso
101	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto
102	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso
103	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto
104	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso
105	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto
106	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso
107	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto
108	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso
109	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto
110	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso
111	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto
112	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso
113	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto
114	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso
115	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto

Prova	$R_R$	$R_F$	$m_H$	$X_B$	$k_\beta$	$w$	$c$	$\lambda$
116	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso
117	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto
118	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso
119	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto
120	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso
121	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto
122	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso
123	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto
124	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso
125	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto
126	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso
127	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto
128	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso
129	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto
130	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso
131	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto
132	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso
133	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto
134	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso
135	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto
136	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso
137	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto
138	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso
139	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto
140	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso
141	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto
142	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso
143	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto
144	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso
145	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto
146	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso
147	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto
148	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso
149	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto
150	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso
151	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto
152	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso
153	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto
154	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso
155	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto
156	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso
157	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto
158	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso
159	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto
160	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso
161	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto
162	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso
163	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto
164	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso
165	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto
166	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso
167	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto
168	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso

<b>Prova</b>	<b>R<sub>R</sub></b>	<b>R<sub>F</sub></b>	<b>m<sub>H</sub></b>	<b>X<sub>B</sub></b>	<b>k<sub>β</sub></b>	<b>w</b>	<b>c</b>	<b>λ</b>
169	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto
170	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso
171	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto
172	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso
173	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto
174	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso
175	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto
176	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso
177	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto
178	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso
179	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto
180	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso
181	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto
182	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso
183	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto
184	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso
185	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto
186	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso
187	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto
188	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso
189	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto
190	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso
191	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto
192	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso
193	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto
194	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso
195	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto
196	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso
197	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto
198	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso
199	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto
200	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso
201	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto
202	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso
203	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto
204	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso
205	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto
206	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso
207	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto
208	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso
209	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto
210	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso
211	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto
212	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso
213	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto
214	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso
215	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto
216	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso
217	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto
218	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso
219	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto
220	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso
221	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto

<b>Prova</b>	<b>R<sub>R</sub></b>	<b>R<sub>F</sub></b>	<b>m<sub>H</sub></b>	<b>X<sub>B</sub></b>	<b>k<sub>β</sub></b>	<b>w</b>	<b>c</b>	<b>λ</b>
222	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso
223	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto
224	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso
225	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Alto
226	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto	Basso
227	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Alto
228	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso	Basso
229	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Alto
230	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto	Basso
231	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Alto
232	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso	Basso
233	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Alto
234	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto	Basso
235	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Alto
236	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso	Basso
237	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Alto
238	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto	Basso
239	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Alto
240	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso	Basso
241	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Alto
242	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto	Basso
243	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Alto
244	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso	Basso
245	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Alto
246	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto	Basso
247	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Alto
248	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso	Basso
249	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Alto
250	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto	Basso
251	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Alto
252	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso	Basso
253	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Alto
254	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto	Basso
255	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Alto
256	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso	Basso

### Tabella dei risultati del terzo ciclo di simulazioni

Sono forniti i risultati del terzo ciclo di simulazioni.

	V weave	V capsiz
1	8,5	7,2
2	-----	6,4
3	7,1	4,8
4	-----	3,8
5	5,3	11,9
6	4,6	10,8
7	4,9	8,0
8	4,3	7,4
9	7,2	7,4
10	-----	6,6
11	6,2	5,1
12	-----	3,9
13	5,4	14,2
14	4,6	11,7
15	5,1	13,7
16	4,4	7,9
17	14,2	4,7
18	-----	3,7
19	13,5	3,3
20	-----	1,6
21	5,3	7,4
22	4,8	7,1
23	4,9	6,1
24	4,4	5,6
25	10,9	4,8
26	-----	3,8
27	10,3	3,4
28	-----	1,7
29	5,4	7,6
30	4,8	7,1
31	5,0	6,3
32	4,4	5,7
33	6,1	7,4
34	-----	7,0
35	5,0	5,1
36	-----	4,4
37	5,0	10,3
38	4,4	9,4
39	4,6	7,0
40	4,0	6,5
41	5,9	7,7
42	-----	7,1
43	5,0	5,3
44	-----	4,5
45	5,1	14,5
46	4,4	10,3

	V weave	V capsiz
47	4,7	8,0
48	4,1	6,9
49	8,2	5,0
50	-----	4,4
51	5,8	3,6
52	-----	2,7
53	5,0	6,6
54	4,5	6,4
55	4,5	5,3
56	4,0	4,9
57	7,3	5,1
58	-----	4,4
59	5,6	3,7
60	-----	2,8
61	5,0	6,8
62	4,5	6,4
63	4,5	5,4
64	4,0	5,0
65	-----	9,9
66	-----	9,0
67	-----	6,2
68	-----	4,7
69	6,2	20,8
70	5,4	15,0
71	5,9	19,9
72	5,2	12,1
73	-----	10,6
74	-----	9,1
75	-----	6,5
76	-----	4,9
77	6,4	15,9
78	5,5	18,6
79	6,0	15,2
80	5,2	17,7
81	-----	6,0
82	-----	4,7
83	-----	3,8
84	-----	1,1
85	6,4	10,7
86	5,8	10,5
87	6,1	8,6
88	5,4	7,9
89	-----	6,1
90	-----	4,7
91	-----	3,9
92	-----	1,3

	V weave	V capsze
93	6,5	11,1
94	5,8	10,5
95	6,1	8,9
96	5,4	8,1
97	7,5	10,3
98	-----	9,9
99	6,5	6,6
100	-----	5,7
101	5,9	21
102	5,2	18
103	5,4	10,8
104	4,8	9,4
105	7,0	11,0
106	-----	10,1
107	6,2	6,9
108	-----	5,9
109	6,0	16,1
110	5,2	18,9
111	5,6	15,4
112	4,8	12,8
113	13,2	6,5
114	-----	5,7
115	12,9	4,3
116	-----	3,1
117	6,0	9,4
118	5,5	9,3
119	5,4	7,2
120	4,8	6,7
121	10,6	6,6
122	-----	5,8
123	10,1	4,4
124	-----	3,2
125	6,1	9,7
126	5,5	9,3
127	5,5	7,4
128	4,9	6,9
129	8,2	6,9
130	-----	6,2
131	6,8	4,8
132	-----	3,7
133	5,2	9,5
134	4,6	8,6
135	4,9	7,3
136	4,3	6,6
137	7,0	7,1
138	-----	6,3
139	6,0	5,0
140	-----	3,9
141	5,3	11,5
142	4,6	8,9
143	5,0	8,4
144	4,3	7,0

	V weave	V capsze
145	13,7	4,6
146	-----	3,6
147	13,0	3,2
148	-----	1,6
149	5,3	6,9
150	4,7	6,5
151	4,9	5,9
152	4,4	5,3
153	10,6	4,7
154	-----	3,7
155	9,9	3,3
156	-----	1,7
157	5,3	7,0
158	4,8	6,5
159	5,0	6,0
160	4,4	5,5
161	6,0	7,1
162	-----	6,6
163	4,9	5,0
164	-----	4,3
165	5,0	8,8
166	4,4	8,2
167	4,5	6,6
168	4,0	6,0
169	5,8	7,3
170	-----	6,7
171	4,9	5,2
172	-----	4,4
173	5,1	9,9
174	4,4	8,4
175	4,7	7,2
176	4,1	6,3
177	7,6	4,9
178	-----	4,3
179	5,4	3,6
180	-----	2,7
181	4,9	6,3
182	4,5	5,9
183	4,4	5,1
184	4,0	4,7
185	6,9	5,0
186	-----	4,4
187	5,2	3,7
188	-----	2,8
189	5,0	6,4
190	4,5	6,0
191	4,5	5,2
192	4,0	4,8
193	-----	9,2
194	-----	8,2
195	-----	6,0
196	-----	4,6

	<b>V weave</b>	<b>V capsize</b>
<b>197</b>	6,2	14,3
<b>198</b>	5,4	12,3
<b>199</b>	5,9	10,6
<b>200</b>	5,1	9,2
<b>201</b>	-----	9,6
<b>202</b>	-----	8,4
<b>203</b>	-----	6,3
<b>204</b>	-----	4,8
<b>205</b>	6,4	14,5
<b>206</b>	5,5	12,6
<b>207</b>	6,0	14,2
<b>208</b>	5,2	10,1
<b>209</b>	-----	5,8
<b>210</b>	-----	4,6
<b>211</b>	-----	3,7
<b>212</b>	-----	1,1
<b>213</b>	6,5	9,5
<b>214</b>	5,8	8,8
<b>215</b>	6,1	7,8
<b>216</b>	5,4	7,2
<b>217</b>	-----	6,0
<b>218</b>	-----	4,6
<b>219</b>	-----	3,8
<b>220</b>	-----	1,3
<b>221</b>	6,6	9,6
<b>222</b>	5,8	8,8
<b>223</b>	6,2	8,1
<b>224</b>	5,5	7,2
<b>225</b>	7,2	9,5
<b>226</b>	-----	8,9

	<b>V weave</b>	<b>V capsize</b>
<b>227</b>	6,3	6,4
<b>228</b>	-----	5,5
<b>229</b>	5,9	12,9
<b>230</b>	5,2	11,6
<b>231</b>	5,4	9,1
<b>232</b>	4,7	8,3
<b>233</b>	6,8	9,9
<b>234</b>	-----	9,0
<b>235</b>	6,0	6,6
<b>236</b>	-----	5,7
<b>237</b>	6,0	14,9
<b>238</b>	5,2	12,0
<b>239</b>	5,5	14,5
<b>240</b>	4,8	8,9
<b>241</b>	12,4	6,3
<b>242</b>	-----	5,5
<b>243</b>	12,0	4,3
<b>244</b>	-----	3,1
<b>245</b>	6,0	8,5
<b>246</b>	5,4	8,1
<b>247</b>	5,4	6,8
<b>248</b>	4,8	6,3
<b>249</b>	10,1	6,4
<b>250</b>	-----	5,6
<b>251</b>	9,5	4,4
<b>252</b>	-----	3,2
<b>253</b>	6,1	8,6
<b>254</b>	5,5	8,1
<b>255</b>	5,4	6,9
<b>256</b>	5,4	6,3

### Tabella dei risultati del quarto ciclo di simulazioni

Sono forniti i risultati del quarto ciclo di simulazioni.

	V weave	V capsize
1	4,6	8,1
2	5,5	9,3
3	4,3	5,2
4	4,8	6,7
5	4,2	8,9
6	4,8	10,3
7	3,7	5,3
8	4,2	6,6
9	4,6	8,3
10	5,6	9,7
11	4,3	5,4
12	4,9	7,0
13	4,2	9,7
14	4,3	Mai
15	3,7	5,7
16	4,3	7,4
17	4,6	5,7
18	5,4	7,0
19	4,5	3,8
20	4,6	5,5
21	4,4	5,6
22	4,8	6,5
23	5,1	4,0
24	4,0	4,9
25	4,6	5,8
26	5,4	7,1
27	4,4	3,9
28	4,7	5,5
29	4,3	5,7
30	4,8	6,7
31	3,7	3,7
32	4,1	5,1
33	4,7	8,0
34	5,3	8,7
35	4,2	5,3
36	4,6	6,3
37	4,2	8,8
38	4,8	9,5
39	3,7	5,4
40	4,1	6,3
41	4,7	8,1
42	5,4	9,0
43	4,2	5,4
44	4,7	6,5
45	4,2	9,4
46	4,8	Mai

	V weave	V capsize
47	3,7	5,7
48	4,2	6,9
49	4,7	5,6
50	5,1	6,5
51	4,4	3,8
52	4,4	5,0
53	4,4	5,5
54	4,7	6,1
55	4,9	4,1
56	3,9	4,5
57	4,7	5,6
58	5,2	6,5
59	4,3	3,9
60	4,4	5,0
61	4,4	5,6
62	4,3	6,7
63	3,7	3,8
64	3,9	4,6
65	5,3	11,8
66	6,5	13,7
67	4,8	7,0
68	5,6	9,1
69	4,8	Mai
70	5,7	Mai
71	4,3	7,5
72	4,9	9,9
73	5,3	12,3
74	6,6	15,3
75	4,7	7,2
76	5,7	9,7
77	4,8	Mai
78	5,7	Mai
79	4,2	8,4
80	5,0	Mai
81	5,3	7,8
82	6,5	9,6
83	5,2	4,8
84	5,5	7,1
85	5,2	7,9
86	5,7	9,3
87	5,8	4,9
88	4,7	6,5
89	5,3	7,8
90	6,5	9,7
91	5,0	4,9
92	5,5	7,3

	V weave	V capsize
93	5,1	7,9
94	5,8	9,6
95	4,4	4,9
96	4,8	6,9
97	5,3	11,6
98	6,2	12,5
99	4,7	7,0
100	5,3	8,3
101	4,8	Mai
102	5,5	Mai
103	4,2	7,6
104	4,7	9,0
105	5,3	11,9
106	6,3	13,5
107	4,7	7,2
108	5,3	8,8
109	4,8	Mai
110	5,6	Mai
111	4,2	8,3
112	5,4	Mai
113	5,5	7,5
114	6,1	8,7
115	4,9	4,8
116	5,1	6,4
117	5,3	7,7
118	5,6	8,5
119	5,5	5,0
120	4,5	5,9
121	5,4	7,6
122	6,2	8,7
123	4,8	4,9
124	5,1	6,5
125	5,2	7,8
126	5,7	8,8
127	4,3	4,9
128	4,7	6,1
129	4,6	7,5
130	5,5	8,6
131	4,2	5,1
132	4,7	6,5
133	4,1	7,7
134	4,8	8,8
135	3,7	5,1
136	4,2	6,2
137	4,6	7,6
138	5,5	8,9
139	4,2	5,2
140	4,8	6,7
141	4,1	8,0
142	4,9	10,2
143	3,7	5,4
144	4,3	6,9

	V weave	V capsize
145	4,5	5,5
146	5,4	6,8
147	4,3	3,7
148	4,6	5,3
149	4,3	5,3
150	4,7	6,2
151	4,9	4,0
152	3,6	3,6
153	4,5	5,6
154	5,4	6,8
155	4,3	3,8
156	4,7	5,4
157	4,2	5,4
158	4,8	6,4
159	3,6	3,6
160	4,1	4,9
161	4,6	7,4
162	5,3	8,2
163	4,1	5,1
164	4,5	6,0
165	4,1	7,6
166	4,7	8,3
167	3,6	5,1
168	4,1	5,9
169	4,6	7,5
170	5,3	8,4
171	4,1	5,2
172	4,6	6,2
173	4,1	7,8
174	4,8	9,4
175	3,7	5,3
176	4,2	6,4
177	4,5	5,4
178	5,1	6,2
179	4,2	3,8
180	4,3	4,9
181	4,3	5,2
182	4,6	5,8
183	4,8	4,0
184	3,8	4,4
185	4,6	5,4
186	5,1	6,3
187	4,2	3,8
188	4,4	4,9
189	4,3	5,3
190	4,7	6,0
191	3,6	3,7
192	3,9	4,5
193	5,2	10,3
194	6,5	11,8
195	4,7	6,6
196	5,6	8,6

	V weave	V capsize
197	4,8	10,9
198	5,6	13,1
199	4,2	6,8
200	4,8	8,6
201	5,2	10,4
202	6,6	12,4
203	4,7	6,8
204	5,7	9,0
205	4,8	11,5
206	5,7	Mai
207	4,2	7,3
208	5,0	Mai
209	5,3	7,3
210	6,5	9,0
211	5,0	4,7
212	5,5	6,9
213	5,1	7,1
214	5,7	8,4
215	5,6	4,9
216	4,7	6,2
217	5,3	7,4
218	6,5	9,0
219	4,8	4,9
220	5,5	7,0
221	5,1	7,2
222	5,8	8,6
223	4,3	4,7
224	4,8	6,4
225	5,2	10,1
226	6,2	11,1

	V weave	V capsize
227	4,6	6,6
228	5,3	7,9
229	4,8	10,7
230	5,5	12,2
231	4,1	6,9
232	4,7	8,0
233	5,2	10,2
234	6,3	11,5
235	4,6	6,8
236	5,4	8,2
237	4,8	11,2
238	5,6	Mai
239	4,2	7,3
240	4,8	9,4
241	5,4	7,1
242	6,1	8,2
243	4,7	4,8
244	5,1	6,3
245	5,2	7,0
246	5,6	7,8
247	5,3	4,9
248	4,5	5,7
249	5,3	7,1
250	6,1	8,3
251	4,7	4,8
252	5,1	6,3
253	5,1	7,1
254	5,6	8,0
255	4,2	4,7
256	4,6	5,9

# *Ringraziamenti*

---

In primo luogo voglio ringraziare il Prof. Alberto Doria per la cortese disponibilità dimostrata in questi mesi, per tutto il materiale fornitomi e soprattutto per l'occasione che mi ha concesso nello svolgere questo lavoro.

Poi voglio dire grazie a mia madre, a mio padre e a mia sorella Monica: per il sostegno quotidiano, per avermi dato tutto, per l'amore che mi hanno sempre dimostrato.

A Irene, per ogni vittoria vissuta assieme, per ogni delusione pianta assieme. In ogni caso assieme.

Ad Ambro, Sacco, Marco, Massimo, Prada, Dosso, Luca, Furla, Jacopo, Gatto, Lucio, Cate, Benny, Cami, Marta, Martina, Sere, Anna: siamo Insgamabili e rimarremo Insgamabili; grazie per essere cresciuti con me e perché senza di voi non sarei ciò che sono.

Ai miei amici Clay e Joey per la preziosa compagnia.

Grazie.