Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Fisica e Astronomia

Corso di Laurea in Fisica

Rottura spontanea di simmetria

Laureando:
Riccardo Antonelli

Relatore:
Prof. Marco Matone

Anno accademico 2013/2014

Indice

Introduzione

In presenza di rottura spontanea di simmetria e sotto ipotesi di covarianza e località il teorema di Goldstone prevede inevitabilmente l'esistenza di scalari senza massa. Tuttavia, se a subire la rottura è una simmetria locale i bosoni di Goldstone non sono presenti nello spettro e simultaneamente il campo di gauge risulta massivo. La riconciliazione di queste due conclusioni apparentemente contraddittorie costituisce il cosiddetto meccanismo di Higgs. Tipicamente ne viene fornita un'interpretazione informale, radicata in una prospettiva classica, secondo la quale i bosoni di Nambu-Goldstone sono "assorbiti" come modi longitudinali dei vettori di gauge. Sebbene questa lettura evidenzi importanti aspetti fisici non è una modalità valida di evadere le conclusioni del teorema di Goldstone.

È possibile tuttavia salvaguardare lo spettro fisico di una QFT di gauge con rottura spontanea di simmetria dalle eccitazioni $p^2 = 0$ con una trattazione quantistica completa. Un'analisi dettagliata della rottura spontanea e dell'invarianza di gauge in termini del problema della rappresentazione dell'algebra generata dai campi locali chiarifica la validità del teorema nelle gauge covarianti e anche come tali modi massless non siano presenti nello spettro energetico in termini di quantità osservabili.

L'ispirazione per il teorema di Goldstone venne da un modello di fermioni massless considerato insieme a Jona-Lasinio per le interazioni nucleari [9]. Questa teoria sviluppa una rottura spontanea di una simmetria chirale globale: come conseguenza viene generata una massa per i nucleoni, ma nello spettro sono presenti eccitazioni senza massa corrispondenti alle oscillazioni del parametro d'ordine nella direzione della simmetria. Risultava chiaro che questo era un aspetto generale. I quanti delle oscillazioni del parametro d'ordine, nel limite $k \to 0$, sono eccitati dal vuoto dalla carica che genera la simmetria; dunque dall'invarianza della lagrangiana risulta che anche l'energia di tali quanti tende a zero; questo andamento indica che essi non hanno massa. Il teorema fu dimostrato in un contesto relativistico da Goldstone, Weinberg & Salam nel 1962 [5]. Questo risultato si configurava come un ostacolo apparentemente insormontabile all'applicazione del meccanismo di generazione della massa mediante rottura spontanea di simmetria nel contesto di una teoria di gauge, perché non era possibile identificare i bosoni di Goldstone.

Dopo l'introduzione delle teorie di gauge non abeliane sul gruppo $SU(N)$ da parte di Yang e Mills [16], nacque mano mano la consapevolezza che le interazioni deboli scaturissero da una teoria di gauge che includesse anche il gruppo $U(1)$ dell'elettromagnetismo. Divenne chiaro che il fotone, i bosoni W^+ e W^- che mediavano il decadimento β, e un bosone addizionale neutro Z^0, erano i vettori di gauge di una teoria unificata sotto il gruppo $SU(2) \times U(1)$ (modello di Glashow, Weinber e Salam, [10]). Il corto raggio della forza debole implicava però masse notevoli per i mediatori, incompatibili con l'invarianza di gauge. Un meccanismo di rottura spontanea $SU(2) \times U(1)_Y \to U(1)_Q$ poteva spiegare l'emergenza di una matrice di massa, ma il teorema di Goldstone prevedeva particelle spin-0 senza massa. Sperimentalmente questi modi senza massa non venivano riscontrati. La rottura esplicita dell'invarianza di gauge con dei termini di massa per i vettori non era invece contemplabile, perché comprometteva la rinormalizzabilità della teoria quantistica.

Che si potesse avere rottura spontanea di simmetrie locali e conseguente generazione di masse per i bosoni senza l'emergenza di modi di Goldstone era in realtà già noto nel caso non relativistico; nel modello per la superconduttività di Landau-Ginzburg un condensato di coppie di Cooper bosoniche cariche rompeva l'invarianza di gauge e lo spettro elettromagnetico risultava costituito di fotoni massivi, il nuovo modo longitudinale fornito dalle oscillazioni della fase del condensato intorno al valore medio, esattamente ciò che sarebbe dovuto essere il bosone di Goldstone, che non compariva nello spettro. L'idea di un'applicazione alla fisica delle alte energie era però soppressa dalla credenza diffusa che tali fenomeni fossero permessi esclusivamente perché la presenza di un sistema di riferimento privilegiato - quello del condensato - rompesse la covarianza, ovvero una delle ipotesi del teorema, e che un meccanismo analogo non fosse possibile in una teoria relativistica. (L'informazione chiave è che l'ipotesi essenziale del teorema di Goldstone non è la covarianza relativistica, ma una qualche forma di localizzazione delle interazioni, perciò è possibile dimostrarlo anche in un'algebra di campo non covariante ma sufficientemente locale).

La versione relativistica di questa costruzione fu scoperta indipendentemente da Englert e Brout [3], Higgs [8], e Guralnik, Hagen e Kibble [7]. In una teoria di gauge relativistica, la rottura spontanea del gruppo di gauge ad un sottogruppo in conseguenza della condensazione di un multipletto scalare carico (campo di Higgs) sembrava evadere (almeno a livello classico) il teorema riassorbendo i bosoni di Goldstone nei campi di gauge divenuti massivi. Questa scoperta, concettualmente difficile da inquadrare alla luce del teorema, fu tuttavia essenziale per la realizzazione dell'unificazione elettrodebole. Il meccanismo di Higgs per la rottura del gruppo di gauge unificato era il tassello mancante per una descrizione completa del settore elettrodebole e in un certo senso del modello standard. Quando 't Hooft e Veltman dimostrarono la rinormalizzabilità del modello GWS rotto da uno scalare (premio Nobel 1999), rimaneva poca esitazione nell'annunciare la questione conclusa. L'accordo sperimentale straordinario, partendo dalla misura di interazioni fra correnti neutrali (test per l'esistenza dello Z) nel 1973, passando dalla misura diretta dei bosoni W e Z nel 1983, e concludendosi con la misura nel 2012 di un bosone scalare compatibile con il modo radiale del campo di Higgs (bosone di Higgs), ha decretato il successo della teoria elettrodebole. Nel 2013 Higgs ed Englert sono stati insigniti del premio Nobel per la scoperta del meccanismo di Higgs relativistico.

Ciononostante, l'inconsistenza formale della sparizione dei bosoni massless in netta contraddizione con il teorema rimane. In un articolo [6] del febbraio 2014 Guralnik e Hagen contestano la seguente affermazione del comitato del Nobel 2013:

> "The Goldstone theorem holds in the sense that the Nambu-Goldstone mode is there but it gets absorbed into the third component of a massive vector field."

ed esibiscono un modello di rottura spontanea di simmetria di gauge nel quale i bosoni di Goldstone restano presenti nello spettro; in [7] (assieme a Kibble) avevano già dimostrato, per lo stesso modello, che tali particelle non erano però misurabili in termini di quantità *fisiche*.

Lo scopo di questa tesi è uno studio della rottura spontanea di simmetrie di gauge in una teoria di campo quantistica con l'obiettivo di elucidare sul paradosso delineato sopra nel caso generale di una teoria di Yang-Mills.

Dopo una sintesi della costruzione e dei concetti essenziali di una teoria di gauge sul gruppo $SU(N)$, e una serie di realizzazioni in teoria di campo classica del meccanismo di Higgs, si tratta la formalizzazione della rottura di simmetria in un sistema quantistico. Si esamina innanzitutto il rapporto che intercorre fra simmetrie degli operatori e simmetrie degli stati, e di come tale rapporto possa essere profondamente modificato in una teoria a infiniti gradi di libertà attraverso la comparsa di rappresentazioni inequivalenti. Questo fenomeno si riconosce essere una caratterizzazione generale della rottura spontanea di simmetria. Si introduce poi una versione del teorema di Goldstone per teorie non relativistiche ma che possiedono una specifica proprietà di località. Appurato che la validità del teorema non richiede necessariamente la covarianza relativistica, se ne studia la versione per teorie relativistiche che rispettano la causalità einsteiniana; ipotesi più stringenti implicano conclusioni più dettagliate sui modi massless di Goldstone.

Vengono poi studiati alcuni aspetti generali di una teoria di gauge quantistica con attenzione particolare alle ambiguità generate dall'invarianza di gauge e all'identificazione degli stati fisici. L'introduzione di un particolare vincolo cinematico sulla corrente, l'equivalente quantistico di $j_\nu = \partial^\mu F_{\mu\nu}$, consente la conclusione dello studio generale del meccanismo di Higgs. In particolare si mostra che

- l'applicabilità del teorema di Goldstone dipende dal gauge fixing.
- laddove il teorema è valido, i bosoni di Goldstone sono sempre artefatti di gauge, e non sono osservabili.

infine, sempre sfruttando questo vincolo, si dimostra il fenomeno della superselezione delle cariche di gauge, e se ne commenta la rilevanza nel contesto della rottura spontanea e della giustificazione dell'ipotesi di unicità per il vuoto.

Capitolo 1

Elementi di teorie di gauge

1.1 Teorie di Yang-Mills

Le interazioni fondamentali nell'ambito del modello standard si configurano come teorie di gauge su gruppi unitari speciali. Si presenta ora una costruzione standard di un tale modello[2].

Sia G un gruppo di Lie semisemplice compatto. In particolare

$$G = \begin{cases} U(1) & \text{se } N = 1 \\ SU(N) & \text{se } N > 1 \end{cases}$$

G è non abeliano se $N > 1$.

L'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è composta dalle matrici $N \times N$ antihermitiane e a traccia nulla, o semplicemente i reali se $N = 1$. Si fissi un certo set di $N^2 - 1$ (uno nel caso di $U(1)$) generatori T^a ($a = 1, \ldots, N^2 - 1$) e si definiscano le costanti di struttura

$$[T^a, T^b] = iC^{abc}T^c$$

C^{abc} è antisimmetrico in ab; in realtà si possono scegliere le T^a in modo che sia totalmente antisimmetrico.

Si consideri un N-upletto $\boldsymbol{\phi}(x)$ di campi complessi classici che trasformano sotto la rappresentazione fondamentale di $SU(N)$:

$$\boldsymbol{\phi}(x) \to U\, \boldsymbol{\phi}(x) \qquad\qquad U \in SU(N) \tag{1.1}$$

La (1.1) è una trasformazione globale e *interna* (nel senso che commuta con le trasformazioni di Poincaré.) Sia la dinamica di $\boldsymbol{\phi}$ descritta da una densità di lagrangiana che abbia tali trasformazioni come simmetrie. Ad esempio

$$\mathscr{L}_{CF} = \partial_\mu \boldsymbol{\phi}^\dagger \partial^\mu \boldsymbol{\phi} - m^2 \boldsymbol{\phi}^\dagger \boldsymbol{\phi} - V(\boldsymbol{\phi}^\dagger \boldsymbol{\phi})$$

è una teoria di N bosoni con simmetria globale $SU(N)$. A quest'ultima corrisponde la corrente

$$J_a^\nu = -i(\boldsymbol{\phi}^\dagger \cdot T_a \boldsymbol{\pi}^\nu - (\boldsymbol{\pi}^\nu)^\dagger \cdot T_a \boldsymbol{\phi}) = -i(\boldsymbol{\phi}^\dagger \cdot T_a \partial^\nu \boldsymbol{\phi} - \partial^\nu \boldsymbol{\phi}^\dagger \cdot T_a \boldsymbol{\phi}) \tag{1.2}$$

dove $\boldsymbol{\pi}^\nu := \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\nu \boldsymbol{\phi}}$ è il campo coniugato a $\boldsymbol{\phi}$. Se valgono le equazioni di Eulero-Lagrange, allora le correnti sono conservate:

$$\partial_\nu J_a^\nu = 0$$

Si immagini di voler promuovere la simmetria globale ad una simmetria *locale*, dove la trasformazione dipenda dalle coordinate:

$$\boldsymbol{\phi}(x) \to U(x)\, \boldsymbol{\phi}(x)$$

Immediatamente si riconosce che questa trasformazione non commuta con le derivate rispetto alle coordinate:

$$\partial_\mu (U(x)\boldsymbol{\phi}) = U(x)\partial_\mu \boldsymbol{\phi} + \partial_\mu U(x)\boldsymbol{\phi}$$

e chiaramente si è persa l'invarianza della lagrangiana. Risulterebbe dunque desiderabile modificare quest'ultima, presumibilmente sostituendo ∂_μ con un nuovo operatore D_μ (derivata covariante), in modo da renderla invariante sotto trasformazioni locali.

Il termine cinetico (quello problematico) trasforma come:

$$D_\mu \boldsymbol{\phi}^\dagger D^\mu \boldsymbol{\phi} \to D_\mu(\boldsymbol{\phi}^\dagger U^{-1}) D^\mu (U\boldsymbol{\phi})$$

perciò D_μ dovrebbe trasformare sotto la rappresentazione aggiunta del gruppo:

$$D_\mu \to U D_\mu U^{-1}$$

ovvero, poiché $\boldsymbol{\phi}' = U\boldsymbol{\phi}$

$$(D_\mu \boldsymbol{\phi})' = U D_\mu \boldsymbol{\phi} \tag{1.3}$$

Se si impone che $D_\mu \boldsymbol{\phi}$ contenga al più derivate prime, allora in generale si scrive, se D_μ agisce su un campo che trasforma sotto la rappresentazione fondamentale:

$$D_\mu = \partial_\mu + A_\mu \tag{1.4}$$

per un qualche campo A_μ di matrici. Sostituendo la (1.4) nella (1.3) e derivando $UU^{-1} = 1$, si osserva che A_μ trasforma come:

$$A'_\mu = UA_\mu U^{-1} + U\partial_\mu U^{-1} \tag{1.5}$$

Si nota che questa trasformazione preserva la caratteristica di appartenere all'algebra $\mathfrak{g}$, per cui si impone $A_\mu \in \mathfrak{g}$. Dunque $A_\mu =: -igA^a_\mu T^a$, dove g è una qualche costante detta di accoppiamento e A^a_μ è un vettore che prende il nome di campo di gauge. Riassumendo

$$D_\mu = \partial_\mu - igA^a_\mu T^a$$

A questo punto risulta naturale elevare A^a_μ al ruolo di campo dinamico, costruendo un relativo termine cinetico. Si consideri il commutatore

$$F_{\mu\nu} := [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$$

Si definisce $F^a_{\mu\nu}$ mediante

$$F_{\mu\nu} =: -igF^a_{\mu\nu} T^a$$

cioè

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gC^{abc} A^b_\mu A^c_\nu$$

$F^{\mu\nu}$ *non* è in generale invariante di gauge come nel caso abeliano. Ciononostante, la traccia $\mathrm{Tr}((T^a F^{a\mu\nu})(T^a F^a_{\mu\nu}))$ è gauge-invariante, scalare di Poincaré, e proporzionale a

$$F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu}$$

È ragionevole dunque ipotizzare che il termine cinetico del campo di gauge sia

$$\mathscr{L}_{GF} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu}$$

La teoria costruita per i campi $\boldsymbol{\phi}$ e A_μ, caratterizzata dalla lagrangiana

$$\mathscr{L}_{YM} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + D_\mu\boldsymbol{\phi}^\dagger D^\mu\boldsymbol{\phi} - m^2\boldsymbol{\phi}^\dagger\boldsymbol{\phi} - V(\boldsymbol{\phi}^\dagger\boldsymbol{\phi}) \tag{1.6}$$

è detta teoria di Yang-Mills sul gruppo $SU(N)$.

La corrente (1.2) (corrente di densità di materia) è ora, sostituendo il nuovo $\boldsymbol{\pi}^\nu$ e moltiplicando per g:

$$J^\nu_a = -ig(\boldsymbol{\phi}^\dagger \cdot T_a D^\nu\boldsymbol{\phi} - D^\nu\boldsymbol{\phi}^\dagger \cdot T_a\boldsymbol{\phi})$$

ma questa non è più la corrente associata alla simmetria di gauge, e non è conservata. La corrente che genera la simmetria (corrente elettrica) si ricava considerando le variazioni sotto una trasformazione di gauge infinitesima e applicando il teorema di Nöther. Risulta[11]

$$j^\nu_a = J^\nu_a - ig[A^a_\mu, F^{a\mu\nu}]$$

e $\partial_\nu j^\nu_a = 0$. In realtà, la conservazione della corrente j^ν_a è, come si vedrà più avanti, un vincolo cinematico che si verifica indipendentemente dalle equazioni del moto.

La stessa costruzione si può ripetere sostituendo a $\boldsymbol{\phi}$, che è uno scalare sotto Lorentz, un campo con spin qualsiasi; ad es. un fermione ψ; la lagrangiana finale risulta (tralasciando autointerazioni di ψ):

$$\mathscr{L}_{YM} = \mathscr{L}_{GF} + \bar{\psi}^a(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi^a$$

ψ^a è, ovviamente, un N-upletto di spinori che trasforma sotto $SU(N)$.

Il caso abeliano di $U(1)$ è precisamente l'elettrodinamica:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi$$

Una nota sulla definizione di cariche abeliane

Un'importante generalizzazione è considerare $\boldsymbol{\phi}$ che trasforma sotto una qualche rappresentazione (*carica*) del gruppo di gauge. Nel caso abeliano, le possibili cariche non sono altro che gli interi, poiché tutte le rappresentazioni complesse irriducibili di $U(1)$ sono 1-dimensionali e date da:

$$\pi_k : U(1) \to \mathbb{C} \qquad\qquad \pi_k(\theta) = e^{ik\theta}$$

indicizzate da $k \in \mathbb{Z}$. I campi che trasformano secondo queste rappresentazioni si verificano avere cariche multiple di una fondamentale. (La discretizzazione della carica è in effetti prova che il gruppo di gauge dell'elettromagnetismo è $U(1)$, compatto, e non $\mathbb{R}$). È chiaro a questo punto che in una teoria $U(1)$ esiste un'ambiguità nella definizione della carica, dal momento che non esiste una scelta univoca di quella minima. Ad esempio nell'elettromagnetismo prima della scoperta dei quark si è identificata la carica fondamentale con quella dell'elettrone; una volta chiaro che esistevano particelle di carica multipla di $\frac{1}{3}e$, si è preferito riscalare la carica (e dunque il generatore) Q in modo da mantenere $Q_e = 1$. Questo è in sostanza il motivo per cui si possono incontrare cariche non intere, ed è esclusivamente un artefatto di scelte convenzionali.

1.2 Particolarità delle cariche non abeliane

Sotto una trasformazione di gauge globale, nell'elettromagnetismo, il potenziale A_μ e la corrente J^μ_a sono invarianti. Se il gruppo di gauge è non abeliano, invece, A_μ e J^μ_a trasformano sotto la rappresentazione aggiunta:

$$A_\mu \to U A_\mu U^{-1} \qquad J^\mu_a \to U J^\mu_a U^{-1}$$

Similmente $F_{\mu\nu}$ non è più invariante di gauge e trasforma allo stesso modo sempre sotto U globali:

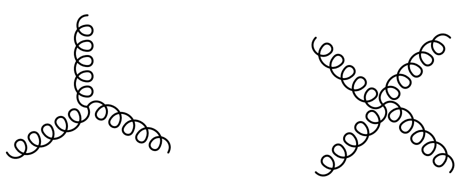
$$F_{\mu\nu} \to U F_{\mu\nu} U^{-1}$$

La corrente j^a_μ, invece, non è né invariante né covariante di gauge.

Le equazioni del moto di un campo di gauge non abeliano, anche in assenza di sorgenti, sono nonlineari. Infatti la lagrangiana cinetica

$$\mathscr{L}_{GF} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} \qquad\qquad F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g C^{abc} A^b_\mu A^c_\nu$$

contiene termini addizionali del terzo e quart'ordine rispetto alla lagrangiana libera del caso abeliano. Questi sono vertici di interazione rispettivamente fra tre e quattro bosoni di gauge:



e corrisponderanno a nonlinearità nell'equazione del moto. Ciononostante, non sono presenti termini del second'ordine che accoppiano A^a_μ con se stesso. Nel limite di ampiezza piccola

A^a_μ è quindi un campo libero senza massa, almeno a livello classico. La teoria quantistica invece presenta probabilmente un mass gap nello spettro energetico a causa del fenomeno di confinamento di colore; la dimostrazione della presenza di tale massa minima, insieme con un teorema di esistenza per la teoria in generale, costituisce uno dei problemi per il millennio del Clay Institute.

1.3 Equazioni del moto e conservazione delle cariche

La variazione dell'azione $S = \int \mathrm{d}^4x\, \mathscr{L}_{YM}$ restituisce le equazioni del moto per il campo di gauge:

$$\nabla^\mu F^a_{\mu\nu} = J^a_\nu \tag{1.7}$$

con $\nabla_\mu \cdot\ = \partial_\mu\ \cdot + [A_\mu, \cdot\,]$ la derivata covariante nella rappresentazione aggiunta (D_μ invece agisce su oggetti che trasformano sotto la fondamentale). Si può verificare che vale

$$\nabla^\mu \nabla^\nu F^a_{\mu\nu} = 0$$

da cui risulta l'equazione di continuità covariante per la corrente di materia

$$\nabla^\nu J^a_\nu = 0$$

Sostituendo la relazione $j^\nu_a = J^\nu_a - ig[A^a_\mu, F^{a\mu\nu}]$ nella (1.7) i commutatori si annullano e resta:

$$j^a_\nu = \partial^\mu F^a_{\mu\nu} \tag{1.8}$$

Questa implica chiaramente la conservazione $\partial^\nu j^a_\nu = 0$. Integrando la componente 0 della (1.8) su un volume a tempo costante, si ottiene un'espressione per la carica contenuta nel volume stesso in termini del flusso del campo elettrico attraverso la frontiera.

$$\int \mathrm{d}^3x\, j^a_0 = \oint \mathrm{d}\sigma^i F^a_{0i}$$

Si vede dunque che la (1.8), ovvero che la corrente sia la divergenza di un tensore antisimmetrico, è una proprietà più forte della semplice conservazione. Questa caratteristica, estremamente importante per la trattazione quantistica dei fenomeni di rottura spontanea della simmetria di gauge, è in realtà un fatto cinematico e può essere dimostrata senza far riferimento alle equazioni del moto.

1.4 Aspetti geometrici e osservabili

In uno spazio-tempo curvo, le derivate parziali delle componenti di un vettore ($\partial_\mu V^\nu$) non formano in genere un oggetto covariante. La ragione si intuisce se si immagina lo spaziotempo immerso in uno spazio piatto di dimensione superiore. Un vettore tangente $\boldsymbol{V}$ è dato da

$$\boldsymbol{V} = V^\rho \boldsymbol{e}_\rho$$

e le componenti della derivata parziale da:

$$D_\mu V^\nu := \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x^\mu} \cdot \boldsymbol{e}^\nu \neq \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\mu} \tag{1.9}$$

proprio perché i vettori di base $\boldsymbol{e}^\nu$ non sono costanti. In generale la correzione dovuta alla variazione della tetrade sarà lineare in V^ν e la forma completa della derivata covariante è data da

$$D_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu - \Gamma^\nu{}_{\mu\rho} V^\rho$$

Dove $\Gamma^\nu{}_{\mu\rho}$ è la connessione, data dalle componenti delle derivate dei vettori di base. La variazione $\delta V^\nu = -\Gamma^\nu{}_{\mu\rho} V^\rho \mathrm{d}x^\mu$ è quella dovuta al cosiddetto trasporto parallelo del vettore lungo un percorso $\mathrm{d}x^\mu$. Questa variazione non è direttamente osservabile, perché i vettori ai due capi del cammino appartengono a spazi tangenti diversi. Per confrontarli, è necessario trasportare $\boldsymbol{V}$ lungo un cammino chiuso. Ad esempio, se il circuito è infinitesimo, vale

$$\Delta V_\mu = \delta V_\mu = R^\nu{}_{\mu\alpha\beta} V_\nu \sigma^{\alpha\beta}$$

dove $\sigma^{\alpha\beta}$ è l'elemento d'area sulla superficie delimitata dal circuito. (Il contributo di $\partial_\mu V^\nu$ si annulla su un circuito). Il tensore di curvatura $R^\nu{}_{\mu\alpha\beta}$ è una combinazione lineare di derivate della connessione.

Confrontando la derivata covariante in relatività generale (1.9) con quella di una teoria di gauge in rappresentazione fondamentale:

$$D_\mu \phi^a = \partial_\mu \phi^a + (A_\mu)^a_{\ b}\, \phi^b$$

si riconosce immediatamente che è possibile identificare A_μ come la connessione sullo spazio interno della rappresentazione fondamentale. La variazione infinitesima (differenziale covariante) di ϕ:

$$D\phi = \partial_\mu \phi \, dx^\mu + \delta\phi$$

si decompone in un termine dovuto sostanzialmente alla variazione nello spazio fisico di ϕ come campo (ovvero l'usuale differenziale $\mathrm{d}\phi$), e in uno dovuto al trasporto parallelo sotto la connessione di gauge:

$$\delta\phi = -dx^\mu A_\mu \phi$$

La variazione totale lungo un cammino γ è data dunque da

$$\phi' = \mathcal{P}\left\{\exp\left(-\int_\gamma A_\mu \mathrm{d}x^\mu\right)\right\}\phi = \mathcal{P}\left\{\exp\left(ig\int_\gamma \mathrm{d}x^\mu A^a_\mu T^a\right)\right\}\phi =: P(\gamma)\phi \tag{1.10}$$

Dove $\mathcal{P}\{\exp(\cdot)\}$ indica l'esponenziale ordinato sul cammino, e si è definito l'operatore di trasporto parallelo $P(\gamma)$. Si consideri ora l'effetto del trasporto parallelo attorno ad un elemento d'area infinitesimo $a^\mu b^\nu$.

$$P(\circlearrowleft_{ab}) = P(x \to x+a)P(x+a \to x+a+b)P(x+a+b \to x+b)P(x+b \to x)$$

Usando $e^{\tau A}e^{\tau B} = e^{\tau(A+B)+\frac{\tau^2}{2}[A,B]} + \mathcal{O}(\tau^3)$ si ottiene la seguente espressione per il trasporto parallelo lungo un loop infinitesimo, al prim'ordine nell'area:

$$\begin{aligned} P(\circlearrowleft_{ab}) =& \exp\Big(-(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu])a^\mu b^\nu\Big) = \exp\Big(-F_{\mu\nu}a^\mu a^\nu\Big) \\ =& \exp\Big(igF^a_{\mu\nu}T^a a^\mu b^\nu\Big) \end{aligned}$$

Questa identità suggerisce l'identificazione di $F_{\mu\nu}$ come tensore di curvatura. Una teoria di Yang-Mills si legge dunque come una teoria geometrica dello spazio di rappresentazione fondamentale di G. Questa visuale è utile per l'identificazione delle osservabili di una teoria di gauge. Si afferma talvolta che le osservabili gauge invarianti dell'elettromagnetismo si esauriscano nel campo elettromagnetico $F_{\mu\nu}(x)$; in realtà, è necessario anche tener conto della presenza eventuale di osservabili globali.

A tal proposito, si consideri un'esperimento di interferenza di particelle cariche in presenza di un solenoide infinito. Un fascio coerente di particelle viene separato per percorrere due cammini diversi da un lato e dall'altro del solenoide, in regioni dove il campo magnetico è nullo. I due fasci vengono poi fatti convergere per produrre una figura di interferenza. La differenza di fase nella funzione d'onda comprenderà un contributo dipendente dal percorso e uno dovuto al trasporto parallelo come nella (1.10):

$$\Delta\theta = e\int_{\gamma_1} \mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A} - e\int_{\gamma_2} \mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A} = e\oint_\gamma \mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A}$$

Dove γ è il circuito ottenuto concatenando $\gamma_1 \circ \gamma_2^{-1}$. Disattivando e attivando il campo magnetico, è possibile isolare questa componente e misurare $e^{i\Delta\theta}$. Notare che con il teorema di Stokes l'integrale si riscrive

$$\Delta\theta = e\int \mathrm{d}^2x\, \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}$$

che è gauge invariante. La presenza di un flusso magnetico concatenato al percorso di una particella ha indotto un effetto misurabile, nonostante essa non sia mai entrata a contatto con un campo elettromagnetico non nullo (effetto di Aharonov-Bohm). Questa, si enfatizza, non è un'interazione non locale con il campo magnetico del solenoide, ma un effetto globale. È cruciale che il dominio D su cui $\nabla\times\boldsymbol{A}=0$ non sia semplicemente connesso e γ sia non nullomotopo su D. L'interpretazione dell'effetto in termini di sole osservabili non è possibile a meno che non si accetti di estendere la classe delle osservabili per includere le fasi sui possibili circuiti (loop di Wilson):

$$\left\{P(\gamma) = \exp\left(ie\oint_\gamma A^\mu \mathrm{d}x_\mu\right) : \gamma \text{ è un circuito}\right\}$$

In effetti si verifica che questo set da solo genera tutte le osservabili. Volendo estendere questa costruzione al caso non abeliano, bisogna notare che le P definite nella (1.10) valutate su un circuito (linee di Wilson) non sono più invarianti di gauge, come per l'elettromagnetismo. Sotto una trasformazione di gauge locale $U(x)$, trasformano piuttosto come:

$$P(y \xrightarrow{\gamma} y) \to U(y)P(y \xrightarrow{\gamma} y)U(y)^{-1}$$

Si può dunque definire il loop di Wilson gauge invariante come la traccia della corrispondente linea. Le osservabili in una teoria di Yang-Mills libera sono dunque generati dal set

$$\left\{\mathrm{Tr}\,\mathcal{P}\left\{\exp\left(ig\oint_\gamma A^a_\mu T^a\right)\right\} : \gamma \text{ è un circuito}\right\}$$

Capitolo 2

Modelli classici del meccanismo di Higgs

Questo capitolo è dedicato alla presentazione di alcuni modelli classici di teorie di campo che presentano rottura spontanea di una simmetria di gauge da parte di un campo scalare carico, terminando nella teoria dell'interazione elettrodebole di Glashow-Weinberg-Salam. Si vedrà che quest'ultima è in grado di riprodurre la fenomenologia del Modello Standard ad energie inferiori all'unificazione elettrodebole.

2.1 Modello di Landau-Ginzburg

Si consideri un condensato di Bose-Einstein non relativistico di scalari di carica[1] e. Si definisca $\Psi(x) := \langle 0 \,|\, \psi(x) \,|\, 0 \rangle$, dove $\psi(x)$ è il campo che descrive i bosoni. Ψ è un c-numero non osservabile che segue l'equazione di Schrödinger come equazione di campo:

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{(-i\boldsymbol{\nabla} - e\boldsymbol{A})^2}{2m}\Psi + V(|\Psi|)$$

dove si è incluso un potenziale V che dipende solo dal modulo di Ψ e che rappresenta un'interazione fra i bosoni. Questa, nonostante l'origine, è una teoria di campo classica. La parte rilevante della densità di hamiltoniana di campo è

$$\mathscr{H}_\Psi = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2m} + V = \frac{1}{2m}\,|(-i\boldsymbol{\nabla} - e\boldsymbol{A})\Psi|^2 + V(|\Psi|)$$

dove $\boldsymbol{P}$ è il momento meccanico. La teoria (includendo anche la dinamica del campo magnetico) possiede un'invarianza di gauge:

[1] il modello nasce come teoria di campo delle coppie di Cooper per lo studio della superconduttività. Dunque e deve essere interpretata come la carica di *due* elettroni.

$$\Psi \to e^{ie\alpha(x)}\Psi \qquad\qquad \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\alpha$$

Se V ha il minimo in un punto $\rho \neq 0$, allora Ψ sarà $\Psi(x) = \rho e^{i\theta(x)}$. Il termine cinetico di Ψ diventa:

$$\mathscr{H}_{\Psi,\text{cin.}} = \frac{\rho^2}{2m} |\boldsymbol{\nabla}\theta - e\boldsymbol{A}|^2$$

La trasformazione di gauge con $\alpha(x) = -\frac{1}{e}\theta(x)$ annulla la fase del condensato. Questa scelta comporta la rinuncia alla simmetria. L'energia sopra diventa:

$$\Delta\mathscr{H} = \frac{\rho^2 e^2 \boldsymbol{A}^2}{2m} \tag{2.1}$$

che è un termine di massa per $\boldsymbol{A}$, e rende le interazioni elettromagnetiche a corto raggio. L'hamiltoniana di campo per $\boldsymbol{A}$, nel limite $\boldsymbol{k} \to 0$, con l'aggiunta di (2.1) è

$$\mathscr{H}_A = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Pi}^2 + \frac{\rho^2 e^2}{2m}\boldsymbol{A}^2$$

dove $\boldsymbol{\Pi} = \dot{\boldsymbol{A}}$ è il campo coniugato ad $\boldsymbol{A}$. In questo limite di momento nullo le equazioni di Hamilton per $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{\Pi}$ implicano che $\boldsymbol{A}$ oscilla con frequenza

$$\omega = \frac{\rho e}{\sqrt{m}}$$

Una frequenza non nulla nel limite $\boldsymbol{k} \to 0$ indica la presenza di modi massivi.

La trasformazione di gauge ha eliminato dalle dinamiche il campo θ, che viene assorbito da $\boldsymbol{A}$ come modo longitudinale.

2.2 Meccanismo di Higgs abeliano

È ben noto che nell'elettromagnetismo (che è una teoria di gauge $U(1)$) la simmetria di gauge implica necessariamente che il fotone abbia massa nulla. Infatti, un termine di massa del tipo $A_\mu A^\mu$ è chiaramente non gauge invariante. Si vuole ora evidenziare come sia possibile un meccanismo di generazione di un termine di massa che non preveda una rottura esplicita dell'invarianza di gauge. L'idea è di mantenere una lagrangiana invariante ma tale che il termine di massa compaia *spontaneamente* nella dinamica mediante l'accoppiamento con un campo scalare che assuma un valor medio[2] non simmetrico.

[2] nella formulazione quantistica questo oggetto sarà sostituito dal valore di aspettazione nel vuoto, $\langle 0 \,|\, \phi \,|\, 0 \rangle$

Si prenda dunque un fotone per ora massless accoppiato ad un campo scalare[3]

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - V(\phi)$$

In particolare si prenda per V il potenziale[4]

$$V(\phi) = -\mu^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2$$

che per essere limitato inferiormente deve avere $\lambda > 0$. Se $\mu^2 < 0$, si riconosce subito che ϕ è un normale campo di bosoni scalari di massa $\sqrt{-\mu^2}$ interagenti mediante il termine quartico. Se invece, ed è il caso di interesse, $\mu^2 > 0$, la situazione è drasticamente diversa. Si pone V nella forma più congeniale ($v := \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$):

$$V(\phi) = \lambda\left(\phi^*\phi - \frac{v^2}{2}\right)^2$$

La configurazione $\phi = 0$ non è un equilibrio stabile; inoltre il potenziale ammette una varietà di minimi $\left\{\phi : |\phi| = \frac{v}{\sqrt{2}}\right\}$.

Ad ogni punto $\boldsymbol{x}$, il campo tenderà a lasciare la configurazione instabile $\phi = 0$ per assumere una delle configurazioni stabili $\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{v}{\sqrt{2}}e^{i\theta(\boldsymbol{x})}$ per un qualche θ. La teoria ammette dunque un insieme di vuoti diversi e non simmetrici legati tutti dalla simmetria $U(1)$. Questo è un esempio di rottura spontanea di simmetria in una teoria di campo classica e $\frac{v}{\sqrt{2}}e^{i\theta}$ è il parametro d'ordine. Scelto uno degli equilibri, senza perdità di generalità $\phi_0 := \frac{v}{\sqrt{2}}$, si vuole espandere la lagrangiana in termini di $\phi' = \phi - \phi_0$.

Più precisamente, si può effettuare un cambio di coordinate su ϕ che renda più chiara l'interpretazione fisica:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v+h)e^{i\frac{\chi}{v}}$$

e mantenendo solo termini fino al second'ordine nei campi A^μ,h,χ risulta:

$$|D^\mu\phi|^2 \approx \frac{1}{2}\partial_\mu h\,\partial^\mu h + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\,\partial^\mu\chi + \frac{e^2v^2}{2}A^\mu A_\mu - ev\partial^\mu\chi A_\mu$$

[3] $U(1)$ si rappresenta ovviamente su $\mathbb{C}$ come la moltiplicazione per un complesso unitario; dunque ϕ ha una singola componente complessa.

[4] il potenziale in questione è in realtà l'unico compatibile con l'invarianza di gauge e, con un occhio alla eventuale quantizzazione, con la rinormalizzabilità.

$$V(\phi) \approx \mu^2 h^2$$

e dunque, finalmente:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \mathscr{L}_h + \mathscr{L}_\chi + \mathscr{L}_A + \mathscr{L}_{A\text{-}\chi} \\
\mathscr{L}_h &= \frac{1}{2}\,\partial_\mu h\,\partial^\mu h - \mu^2 h^2 \\
\mathscr{L}_\chi &= \frac{1}{2}\,\partial_\mu \chi\,\partial^\mu \chi \\
\mathscr{L}_A &= -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{e^2 v^2}{2} A_\mu\, A^\mu \\
\mathscr{L}_{A\text{-}\chi} &= -ev A_\mu \partial^\mu \chi
\end{aligned} \tag{2.2}$$

È evidente che se si ignora il termine di interazione insolito fra χ e il campo di gauge, il bilancio è questo: il bosone di gauge ha acquisito una massa $m_A = \frac{ev}{\sqrt{2}}$, è presente uno scalare massivo h, e un singolo scalare massless χ. χ è il cosiddetto bosone di Goldstone corrispondente alla simmetria di gauge $\phi \to e^{i\theta}\phi$.

Ora, operando la trasformazione di gauge (gauge unitaria)

$$A^\mu \to A^\mu - \frac{1}{ev}\partial^\mu \chi$$

risulta che il campo χ viene completamente eliminato dalla lagrangiana

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_h + \mathscr{L}_A$$

Questo modello presenta dunque una rottura spontanea della simmetria di gauge: sotto una certa temperatura il campo ϕ condensa in uno stato non simmetrico e emerge un bosone di Goldstone senza massa per ogni generatore della simmetria rotta (in questo caso, uno solo); per ottenere i gradi di libertà fisici è necessaria una trasformazione che riassorbe il bosone di Goldstone nel campo di gauge, che infine risulta aver acquisito massa.

Un conteggio rapido dei gradi di libertà mostra che essi si sono conservati durante la rottura:

$$\begin{array}{lll} 2 & \phi & \text{scalare complesso} \\ 2 & A & \text{vettore massless} \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{lll} 1 & h & \text{scalare reale} \\ 3 & A & \text{vettore massivo} \end{array}$$

i.e., A^μ ha assorbito χ come suo modo longitudinale[5]. Il bosone massivo h, corrispondente alle

[5] Ci si potrebbe chiedere come è possibile che nella lagrangiana (2.2) A^μ abbia già acquisito il termine di massa, ma sia ancora sprovvisto di componente longitudinale. Il punto è che la teoria prima di imporre la gauge unitaria non è una teoria di campo libero al second'ordine nei campi, proprio per la presenza del termine $A^\mu\partial_\mu\chi$.

oscillazioni radiali di ϕ, risulta in questo caso neutro e prende il nome di bosone di Higgs.

2.3 Modello di Glashow-Weinberg-Salam

È possibile ora generalizzare la costruzione abeliana per studiare se sia possibile, mediante un meccanismo di rottura spontanea della simmetria come quello visto in precedenza, conferire massa a parte dei bosoni di gauge ($W^\pm$ e Z^0) ma preservare il fotone con il sottogruppo di simmetria associato. Si parte da una teoria di Yang-Mills:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{\text{gauge}} + (D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) - V(\phi)$$

Il gruppo di gauge originale è $SU(2) \times U(1)_Y$, dove il pedice Y è per distinguere questa copia di $U(1)$ da quella dell'elettromagnetismo, $U(1)_Q$. L'interazione relativa ad $SU(2)$ è l'isospin debole, $U(1)_Y$ è invece l'ipercarica debole.

Siano T^i, Y i quattro generatori, e W^i_μ, B_μ i campi di gauge. Come base per l'algebra di $SU(2)$ si prendono le matrici di Pauli, $T^i = \frac{1}{2}\sigma^i$; le regole di commutazione leggono:

$$[T^i, T^j] = i\epsilon^{ijk} T^k \qquad\qquad [T^i, Y] = 0$$

La lagrangiana del campo di gauge (1.6) si scrive

$$\mathscr{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4}(G^{a\mu\nu} G^a_{\mu\nu} + F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})$$

$$G^a_{\mu\nu} := \partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu - g\epsilon^{abc} W^b_\mu W^c_\nu \qquad\qquad F_{\mu\nu} := \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$

Si introduce come nel caso abeliano un campo scalare carico. Il campo ϕ è ora un doppietto complesso della rappresentazione fondamentale dell'isospin debole, e ha ipercarica $Y(\phi) = \frac{1}{2}$. La derivata covariante a fronte della ϕ sarà dunque:

$$D_\mu = \partial_\mu + igT^i W^i_\mu + i\frac{g'}{2} B_\mu = \partial_\mu + \frac{i}{2}(g\sigma^i W^i_\mu + g' B_\mu)$$

ove g e g' sono le costanti di accoppiamento rispettivamente dell'isospin debole e dell'ipercarica.

L'invarianza di gauge e la rinormalizzabilità fissano il potenziale nella forma:

Non ha dunque senso parlare di soluzioni del tipo $A^\mu = \epsilon^\mu e^{ik^\rho x_\rho}$ per il solo campo di gauge, e quindi nemmeno discutere la mass-shell e il rapporto di quest'ultima con la presenza del modo longitudinale.

$$V(\phi) = -\mu^2\phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2$$

e ϕ acquisisce un valore medio non-nullo: $\langle\phi\rangle = \phi_0$ con $\phi_0^\dagger\phi_0 = \frac{v^2}{2}$. Senza perdita di generalità si effettua una trasformazione $SU(2)\times U(1)$ per portare ϕ_0 in

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

e il cambio di coordinate da ϕ a ϕ' definito come:

$$\phi = \phi_0 + \phi' \quad \langle\phi'\rangle = 0$$

e si espande la lagrangiana. Si prendono in considerazione solo i termini quadratici che accoppiano i campi di gauge fra di loro, per identificare le nuove masse. Queste scaturiscono esclusivamente dal termine cinetico di ϕ:

$$(D^\mu\phi)^\dagger(D_\mu\phi) = \left|\left(\partial_\mu + \frac{i}{2}(g\sigma^i W_\mu^i + g'B_\mu)\right)\phi\right|^2 \underset{\text{(solo termini di massa)}}{=}$$
$$= \frac{v^2}{8}\left|(g\sigma^i W_\mu^i + g'B_\mu)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|^2 =$$
$$= \frac{v^2}{8}\left(g^2\left((W_\mu^1)^2 + (W_\mu^1)^2\right) + \left(gW_\mu^3 - g'B_\mu\right)^2\right)$$

Si può diagonalizzare la matrice delle masse cambiando base:

$$W_\mu^\pm = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2\right) \quad Z_\mu = \tfrac{1}{\sqrt{g^2+g'^2}}\left(gW_\mu^3 - g'B_\mu\right) \quad A_\mu = \tfrac{1}{\sqrt{g^2+g'^2}}\left(g'W_\mu^3 + gB_\mu\right)$$

e i termini di massa diventano:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{gv}{2}\right)^2 W^{+\mu}W_\mu^- \quad + \quad \frac{1}{2}\left(\frac{v}{2}\sqrt{g^2+g'^2}\right)^2 Z^\mu Z_\mu$$

$$m_{W^\pm} = \tfrac{gv}{2} \quad m_{Z^0} = \tfrac{v}{2}\sqrt{g^2+g'^2} \quad m_\gamma = 0$$

In analogia col caso abeliano, il campo ϕ si decompone in un campo radiale h e tre (tanti quanti i generatori della parte rotta della simmetria) bosoni di Goldstone χ^a. Le masse di questi campi sono del tutto identiche al caso abeliano:

$$m_{H^0} = \sqrt{2}\mu \qquad m_\chi = 0$$

Per eliminare i χ^a e assorbirli come modi longitudinali dei $W^\pm$ e Z^0, è ancora possibile imporre la gauge unitaria. Questo fissa tre parametri su quattro della simmetria di gauge; il generatore non rotto è:

$$T^3 + Y =: Q$$

e difatti si verifica subito che questa combinazione lascia il VEV invariante:

$$e^{i\theta(Y+T^3)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{i\theta/2} \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Q si riconosce essere la carica elettrica. Il sottogruppo che genera è $U(1)_Q \neq U(1)_Y$, ovvero il gruppo di gauge dell'elettromagnetismo. In sintesi, la rottura spontanea della simmetria elettrodebole e il successivo riordinamento dei gradi di libertà si riassume nello schema:

$$SU(2) \times U(1)_Y \longrightarrow U(1)_Q \tag{2.3}$$

4	ϕ	doppietto scalare complesso		1	h	scalare reale
6	W^a	vettori massless	$\longrightarrow$	9	$W^\pm$, Z^0	vettori massivi
2	B	vettore massless		2	A	vettore massless

Il sistema appena costruito è detto modello di Glashow-Weinberg-Salam, ed è l'esempio più semplice di rottura spontanea della simmetria elettrodebole sullo schema (2.3). Come visto, esso riproduce i tre bosoni massivi fisici $W^\pm$ e Z^0, una simmetria di gauge residua $U(1)_Q$ il cui bosone associato si riconosce come il fotone fisico, e prevede un'unica particella addizionale H^0 (corrispondente al campo h) di spin 0[6], carica elettrica nulla[7], e massa dell'ordine dell'energia termica alla temperatura di condensazione di ϕ.

La particella identificata nel giugno 2012 al CERN di massa $\sim 126\,\text{GeV}$ è compatibile con queste ed altre proprietà previste dal modello costruito sopra e da varianti di esso. È chiaro che la particella in questione è un bosone di Higgs, sebbene è possibile che sia relativo ad un meccanismo di SSB più complesso.

[6] h è uno scalare di Poincaré banalmente in quanto funzione di un altro scalare, ϕ.

[7] h si può scrivere in funzione di $\phi^\dagger\phi$, che è invariante sotto l'intero gruppo di gauge originale, e dunque sotto Q.

Capitolo 3

Rottura spontanea di simmetria in quantistica

I modelli costruiti nel precedente capitolo sono tutti da intendersi in un contesto *classico*. La questione di se e come il meccanismo chiave di tali processi, la rottura spontanea di simmetria (SSB), si configuri in meccanica quantistica è non triviale. Diventerà chiaro nel corso di un'analisi generale della SSB quantistica che la differenza fra sistemi a finiti e infiniti gradi di libertà è cruciale. Quest'ultima classe comprende le teorie quantistiche di campo; e un ruolo privilegiato sarà fornito dalle teorie di campo che presentano un qualche tipo di localizzazione. Un'attenzione particolare sarà dedicata alla rottura spontanea delle simmetrie di gauge.

3.1 Simmetrie e i teoremi di Wigner e Von Neumann

Si prenda un sistema quantistico con spazio degli stati $\mathcal{H}$ e spazio dei raggi $P(\mathcal{H})$. Si denoti con $\mathcal{A}$ la $*$-algebra degli operatori.

Una simmetria esatta in meccanica quantistica si può definire come una trasformazione $T : P(\mathcal{H}) \to P(\mathcal{H})$, $\underset{\sim}{\Phi} \mapsto \underset{\sim}{\Phi}'$ che preservi le probabilità di transizione [13]

$$\left|\left\langle \underset{\sim}{\Phi} \,\middle|\, \underset{\sim}{\Psi} \right\rangle\right|^2 = \left|\left\langle \underset{\sim}{\Phi}' \,\middle|\, \underset{\sim}{\Psi}' \right\rangle\right|^2 \tag{3.1}$$

Il seguente teorema classico garantisce un'implementazione di T unitaria o anti-unitaria sullo spazio degli stati:

Teorema 1 (Wigner)**.** *[1] Dati due spazi di hilbert $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$, sia $T : P(\mathcal{H}) \to P(\mathcal{H}')$ tale che*

$$\left|\left\langle T\underset{\sim}{\Phi} \,\middle|\, T\underset{\sim}{\Psi} \right\rangle\right| = \left|\left\langle \underset{\sim}{\Phi} \,\middle|\, \underset{\sim}{\Psi} \right\rangle\right| \quad \forall\, \underset{\sim}{\Phi}, \underset{\sim}{\Psi} \in P(\mathcal{H})$$

Allora esiste un'unica $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ *unitaria oppure anti-unitaria*[1] *tale che:*

$$\Psi \in \underset{\sim}{\Psi} \Rightarrow U\Psi \in T\underset{\sim}{\Psi}$$

Quindi alla simmetria esatta T sui raggi si fa corrispondere U:

$$\Phi' = U\Phi$$

Affinché si mantengano gli elementi di matrice $\langle \Phi \,|\, A \,|\, \Psi \rangle$ per gli operatori, è necessario presupporre che anch'essi trasformino, in particolare come:

$$A \to A' = UAU^{-1} \tag{3.2}$$

È evidente che la trasformazione (3.2) preserva le relazioni algebriche fra gli operatori, inclusi l'aggiunto e le regole di commutazione. È dunque quello che si dice uno $*$-automorfismo di $\mathcal{A}$, ovvero un automorfismo di algebre che preserva anche l'operazione di aggiunto.

Considerando che in genere le simmetrie in origine classiche che si vogliono tradurre in ambito quantistico sono fornite proprio in termini di $*$-automorfismi di $\mathcal{A}$ (che sono propriamente simmetrie delle equazioni del moto), la speranza sarebbe di poter risalire questo diagramma fino a ricostuire l'implementazione della simmetria - esatta - su $\mathcal{H}$.

In effetti, in meccanica quantistica a finiti gradi di libertà, il teorema di Stone-Von Neumann [14] garantisce il successo di questo programma. Si parte da una $*$-algebra generata da un insieme finito q_i, p_i di variabili canoniche - ovvero che rispettano le relazioni di commutazione canoniche (CCR): $[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$, $[q_i, q_j] = 0$, $[p_i, p_j] = 0$. Ci si limiti ora alle possibili rappresentazioni continue irriducibili di questa algebra come operatori agenti su un qualche spazio di Hilbert $\mathcal{H}$.

Siccome si può dimostrare che un $\mathcal{H}$ su cui agisce una tale rappresentazione non può essere finito-dimensionale e le q_i e p_i non possono essere operatori limitati, è chiaro che si incontreranno problemi di dominio. Ha senso dunque riformulare le CCR in termini dei cosiddetti operatori di Weyl

$$U_i(\alpha) = \exp(iq_i\alpha) \quad V_i(\beta) = \exp(ip_j\beta)$$

e le CCR leggono

$$U_iV_j = V_jU_i \exp(i\delta_{ij}\alpha\beta)$$

[1] sebbene non sia difficile costruire trasformazioni che ammettano solo implementazione anti-unitaria (ad esempio, l'inversione temporale) per la maggior parte delle simmetrie rilevanti U è unitaria. In particolare, se la simmetria appartiene ad un gruppo di Lie connesso è chiaro che ammetterà implementazione unitaria.

E ci si restringe alle rappresentazioni per cui questi operatori esistono e le CCR valgono nella forma di Weyl. Allora vale

Teorema 2 (Stone-Von Neumann)**.** *Tutte le rappresentazioni continue irriducibili di $\mathcal{A}$ sono unitariamente equivalenti.*

E quindi, siccome le variabili trasformate $\{p', q'\}$ soddisfano le stesse relazioni di commutazione di $\{p, q\}$ (per ipotesi) allora data una rappresentazione irriducibile π di $\mathcal{A}$ come operatori su un qualche $\mathcal{H}$, costruita[2] la π' data da

$$\pi'(P(q,p)) = \pi(P(q',p'))$$

per ogni polinomio P delle variabili canoniche, allora π e π' sono unitariamente equivalenti. Con questo si intende che $\exists U$ unitario tale che

$$\langle U\Psi \,|\, \pi(P(q,p)) \,|\, U\Psi\rangle = \left\langle \Psi \,\middle|\, \pi(P(q',p')) \,\middle|\, \Psi \right\rangle$$

Ma questa è precisamente l'implementazione unitaria della simmetria in $\mathcal{H}$, cioè la simmetria esatta. Ovvero: in quantistica a finiti gradi di libertà, ogni simmetria delle equazioni del moto, cinematica, si traduce in una simmetria dello spazio degli stati, dinamica.

3.2 Rottura spontanea di simmetria in QM_∞

Si consideri d'ora in poi la classe ristretta di simmetrie che lasciano l'hamiltoniana invariante, ovvero che commutano con le traslazioni temporali. In questo caso agendo sul vuoto $|0\rangle$ con l'operatore unitario che rappresenta la simmetria si ottiene uno stato anch'esso di energia nulla:

$$H\,U\,|0\rangle = UH\,|0\rangle = 0$$

Dunque esistono due possibilità: o $U\,|0\rangle$ rappresenta lo stesso stato di $|0\rangle$ (ovvero $U\,|0\rangle = e^{i\theta}\,|0\rangle$), oppure lo stato fondamentale è *degenere*, e U agisce come un automorfismo in esso mandando i vuoti non simmetrici l'uno nell'altro.

In meccanica quantistica infinita, il teorema di Stone-Von Neumann non si applica [14] (non si può decomporre $\mathcal{A}$ in un numero finito di sistemi generati da coppie (p, q) di variabili coniugate) e non è detto che U esista. Esistono in generale diverse rappresentazioni inequivalenti delle CCR e dunque potrebbe essere impossibile indurre da una simmetria delle equazioni del moto una trasformazione corrispondente su $P(\mathcal{H})$ che preservi le probabilità di transizione. In quel caso, la simmetria si direbbe rotta spontaneamente. Per quanto visto nella sezione precedente,

[2] π', così come π, è definita sull'insieme, per definizione denso, dei polinomi (finiti) delle variabili canoniche.

questo fenomeno non può esistere in sistemi quantistici a finiti gradi di libertà.

In una teoria di campo quantistica, si fa difficilmente a meno dell'ipotesi di unicità del vuoto. Da qui in poi si imporrà dunque questa condizione. (Una giustificazione a posteriori di questa scelta nel contesto della rottura di simmetria è data dalle regole di superselezione, discusse nella sezione 3.8).

Se la simmetria *non* è rotta, ed è implementata come $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, allora

$$H|0\rangle = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad UHU^{-1}U|0\rangle = HU|0\rangle = 0$$

E dunque per unicità di $|0\rangle$, $|0\rangle$ stesso deve essere simmetrico:

$$U|0\rangle = e^{i\vartheta}|0\rangle$$

È importante notare che vale il seguente:

Teorema 3 (simmetria esatta $\Leftrightarrow$ preserva i VEV)**.** *Dato uno $*$-automorfismo $\alpha : A \mapsto A'$ di $\mathcal{A}$ che commuta con le traslazioni temporali, α descrive una simmetria esatta in una rappresentazione con un unico vuoto ciclico*[3] *se e solo se per ogni A polinomio delle variabili canoniche il VEV di A è preservato dalla simmetria:*

$$\left\langle 0 \,\middle|\, A' \,\middle|\, 0 \right\rangle = \langle 0 \,|\, A \,|\, 0\rangle \tag{3.3}$$

Dimostrazione. Se la simmetria è esatta, il teorema di Wigner implica l'esistenza di U unitaria tale che $A' = UAU^{-1}$. Allora vale (3.2) e dunque chiaramente vale (3.3).

Viceversa, se vale (3.3), si costruisce la trasformazione (notare l'uso della ciclicità di $|0\rangle$):

$$|0\rangle \to |0\rangle \qquad\qquad |\Psi\rangle = A|0\rangle \to A'|0\rangle$$

definita sull'insieme denso $\{A|0\rangle \,|\, A \in \mathcal{A}\}$. La trasformazione preserva le ampiezze di transizione:

$$\left\langle \Psi' \,\middle|\, \Phi' \right\rangle = \left\langle 0 \,\middle|\, A'^{\dagger} B' \,\middle|\, 0 \right\rangle \underset{(3.3)}{=} \left\langle 0 \,\middle|\, A^{\dagger} B \,\middle|\, 0 \right\rangle = \langle \Psi \,|\, \Phi \rangle$$

E dunque per il teorema di Wigner ammette implementazione unitaria su $\mathcal{H}$.

[3] che $|0\rangle$ sia ciclico significa che l'insieme dei vettori $A|0\rangle$ per $A \in \mathcal{A}$ è denso in $\mathcal{H}$.

$\square$

Come corollario, una caratterizzazione concisa e particolarmente pratica della rottura spontanea di una simmetria è l'esistenza di almeno un operatore (parametro d'ordine) il cui VEV non è invariante:

$$\left\langle 0 \,\middle|\, A' \,\middle|\, 0 \right\rangle \neq \langle 0 \,|\, A \,|\, 0 \rangle \tag{3.4}$$

3.3 Teorema di Goldstone nonrelativistico

Gli automorfismi di $\mathcal{A}$ che maggiormente interessano la fisica delle particelle sono quelli che fanno parte di gruppi di Lie e che sono generati dalla carica di Nöther corrispondente. Ignorando problemi di convergenza, per una trasformazione di simmetria infinitesima si potrebbe scrivere, ad un tempo t

$$\delta A_t = i[Q, A_t] \tag{3.5}$$

dove

$$Q = \int \mathrm{d}^3 x \, j_0(x,t) \tag{3.6}$$

e j_μ è la corrente di Nöther conservata ($\partial^\mu j_\mu = 0$) associata alla simmetria[4]. Il problema è che l'operatore Q è mal definito, visto che la (3.6) può non convergere. Ha senso tentare di riscrivere (3.5) come

$$\delta A_t = i \lim_{R\to\infty} \int \mathrm{d}^3 x \, f_R(\boldsymbol{x}) \, [j_0(x,t), A]$$

con $f_R(\boldsymbol{x}) = f\left(\frac{\boldsymbol{x}}{R}\right)$ e $f \in \mathscr{C}^\infty$ a supporto compatto e $\equiv 1$ in un intorno di 0. In effetti, l'integrale del commutatore converge molto più facilmente della carica stessa, e in realtà la sua convergenza è garantita in una teoria di campo quantistica locale.

In questo contesto, esiste una riscrittura ancora più utile della condizione di simmetria non rotta (3.4). Avendo definito $Q_R = \int \mathrm{d}^3 x f_R(\boldsymbol{x}) j_0$, la condizione si riformula come

$$\lim_{R\to\infty} \langle 0 \,|\, [Q_R, A] \,|\, 0 \rangle = 0 \qquad\qquad \forall A \in \mathcal{A} \tag{3.7}$$

[4] questo assume che valga $U\,|0\rangle = |0\rangle$. In realtà, se la simmetria è non rotta, è sempre possibile ridefinire la carica in modo che il vuoto abbia carica nulla. La (3.2) implica

$$Q\,|0\rangle := \lim_{R\to\infty} Q_R\,|0\rangle \propto |0\rangle$$

Allora $Q' := Q - \langle 0 \,|\, Q \,|\, 0 \rangle$ è una carica sotto la quale $Q'\,|0\rangle = 0$, e la differenza $Q' - Q$ contribuisce solo una fase globale nella trasformazione degli stati. Si assumerà dunque d'ora in poi che il vuoto non sia carico.

Se la simmetria è appunto esatta, si può costruire l'operatore Q. Sull'insieme denso dei vettori $A\,|0\rangle$ si definisce:

$$Q\ A\,|0\rangle := \lim_{R\to\infty} Q_R\, A\,|0\rangle = \lim_{R\to\infty} [Q_R, A]\,|0\rangle \tag{3.8}$$

Se invece la simmetria è rotta spontaneamente dal parametro d'ordine A, è ragionevole interrogarsi su eventuali oscillazioni di A intorno al suo VEV nella direzione dei generatori rotti e dei quanti corrispondenti. Quest'ultimi sarebbero chiaramente delle particelle senza massa[5], i cosiddetti bosoni di Goldstone (GB). Questi bosoni, intuitivamente, dovrebbero essere eccitabili dal vuoto mediante le cariche locali Q_R. Più precisamente, ci si aspetterebbe che nel limite $R \to \infty$ applicare $Q_R\,|0\rangle$ è pari a creare un bosone di Goldstone nel limite $\boldsymbol{k} \to 0$ (ovvero $\omega \to 0$).

La questione in realtà è profondamente più delicata di quanto queste considerazioni informali potrebbero suggerire. L'esistenza di eccitazioni discrete del tipo descritto sopra è l'oggetto del teorema di Goldstone nelle sue varie forme. Qui si presenta una versione per il caso non relativistico, e più avanti per un'ampia classe di teorie che include QFT relativistiche. Sorprendentemente, diventerà chiaro che il caso relativistico è molto più agevole; soprattutto perché un'ipotesi relativistica di causalità implica anche una certa condizione di *località*, ovvero di compatibilità di operatori a grandi distanze spaziali.

Teorema 4 (Goldstone per sistemi non relativistici)**.** *Si consideri una simmetria continua α tale che*

1. *α commuta con le traslazioni temporali: $\alpha T_t = T_t \alpha$*

2. *esiste una corrente conservata $\partial^\mu j_\mu = 0$ che genera la simmetria; ovvero per ogni A*

$$\delta A_t = i \lim_{R\to\infty} \int \mathrm{d}^3x\, f_R(x)\ [j_0(x,0), A_t] = i \lim_{R\to\infty} [Q_R(0), A] \tag{3.9}$$

dove f_R e Q_R sono definiti come sopra, $A_t := T_t A$, e il limite in questa identità si deve intendere nel senso delle distribuzioni nella variabile t.

Allora, se α è spontaneamente rotta secondo la terminologia introdotta prima, cioè (eq. (3.7)) per un qualche A vale

$$\langle \delta A \rangle_0 = i \lim_{R\to\infty} \langle [Q_R(0), A] \rangle_0 \neq 0$$

allora lo spettro energetico non ha un gap sopra lo stato fondamentale.

[5] classicamente: i χ sono i modo nelle direzioni tangenti alla varietà degli equilibri nel punto dove si sceglie di fare l'espansione, quindi il potenziale deve essere nullo fino al second'ordine in χ. Per cui rimane, come si è visto nel caso dell'Higgs abeliano, solo il termine cinetico $\partial^\mu \chi \partial_\mu \chi$

Dimostrazione. Usando le condizioni 1. e 2. su α

$$
\begin{aligned}
&\lim_{R\to\infty}[Q_R(t),A] \\
&=\lim_{R\to\infty}T_t\left([Q_R(0),A_{-t}]\right)=-iT_t\,\delta A_{-t}=-i\delta A \\
&=\lim_{R\to\infty}[Q_R(0),A]
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Dunque è indipendente dal tempo il commutatore

$$
C_t:=\lim_{R\to\infty}\langle[Q_R(t),A]\rangle_0=C_0:=C \tag{3.11}
$$

Si definisce la funzione $\tilde{J}_0$

$$
\tilde{J}_0(\boldsymbol{k},\omega)=\int e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}\,\langle[j_0(x,t),A]\rangle_0\,\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}t
$$

e invertendo la trasformata di Fourier

$$
J_0(\boldsymbol{x},t):=\langle[j_0,A]\rangle_0=\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{i\omega t-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\tilde{J}_0(\boldsymbol{k},\omega)\,\mathrm{d}^4k
$$

La (3.11) legge

$$
\begin{aligned}
C&=\lim_{R\to\infty}\langle[Q_R,A]\rangle_0=\lim_{R\to\infty}\int\mathrm{d}^3x\,f_R\,\langle[j_0,A_t]\rangle_0= \\
&=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^4}\int\mathrm{d}^3xf_R\int\mathrm{d}^4ke^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}e^{i\omega t}\tilde{J}_0=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^4}\int R^3\tilde{f}(R\boldsymbol{k})\,e^{i\omega t}\,\tilde{J}_0\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}^3k
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Dove $\tilde{f}$ è la trasformata (3D) di f, e si è usato che la trasformata di $f(\boldsymbol{x}/R)$ è $R^3\tilde{f}(R\boldsymbol{k})$. Per svolgere il limite, sono necessarie alcune considerazioni preliminari. Innanzitutto:

$$
\lim_{R\to\infty}f\left(\frac{\boldsymbol{x}}{R}\right)=1 \qquad\Longrightarrow\qquad \lim_{R\to\infty}R^3\tilde{f}(R\boldsymbol{k})=(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{k})
$$

Per cui si vede che l'integrale (3.12) si riscrive come:

$$
\frac{1}{2\pi}\lim_{\boldsymbol{k}\to0}\int e^{-i\omega t}\,\tilde{J}_0(\boldsymbol{k},\omega)\,\mathrm{d}\omega
$$

Risulta che è possibile, nel senso delle distribuzioni, spostare il limite dentro l'integrale e quindi scrivere finalmente

$$\frac{1}{2\pi}\int e^{i\omega t}\tilde{J}_0(0,\omega)d\omega = C \qquad \Longrightarrow \qquad \tilde{J}_0(0,\omega) = C\delta(\omega) \tag{3.13}$$

Si introduca una base completa di stati $|\boldsymbol{q},\omega_\alpha(\boldsymbol{q})\rangle$ indicizzati dal momento $\boldsymbol{q}$ e da un ulteriore indice α; e di energia $\omega_\alpha(\boldsymbol{q})$. Si ha:

$$1 = \sum\!\!\!\!\!\!\int d\alpha \int d^3q \left|\boldsymbol{q},\omega_\alpha(\boldsymbol{q})\right\rangle \left\langle \boldsymbol{q},\omega_\alpha(\boldsymbol{q})\right|$$

e inoltre

$$\begin{aligned}
&\left\langle 0\right| j_0(x,t) \left|\boldsymbol{q},\omega_\alpha(\boldsymbol{q})\right\rangle \left\langle \boldsymbol{q},\omega_\alpha(\boldsymbol{q})\right| A \left|0\right\rangle \\
&= e^{-i(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}-\omega_\alpha(\boldsymbol{q})t)} \left\langle 0\right| j_0(0,0) \left|\boldsymbol{q},\omega_\alpha(\boldsymbol{q})\right\rangle \left\langle \boldsymbol{q},\omega_\alpha(\boldsymbol{q})\right| A \left|0\right\rangle \\
&=:\ e^{-i(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}-\omega_\alpha(\boldsymbol{q})t)}\, C_\alpha(\boldsymbol{q})
\end{aligned} \tag{3.14}$$

dove si sono usate le proprietà di trasformazione degli autostati di momento ed energia sotto traslazioni spazio-temporali, e nell'ultima riga si è definito il simbolo $C_\alpha(\boldsymbol{q})$. Una procedura simile si svolge per

$$\begin{aligned}
&\left\langle 0\right| A \left|\boldsymbol{q},\omega_\alpha(\boldsymbol{q})\right\rangle \left\langle \boldsymbol{q},\omega_\alpha(\boldsymbol{q})\right| j_0(x,t) \left|0\right\rangle = \\
&= e^{i(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}-\omega_\alpha(\boldsymbol{q})t)}\, C^*_\alpha(\boldsymbol{q})
\end{aligned}$$

Allora si scrive

$$\langle 0\,|\,[j_0(x,t),A]\,|\,0\rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\int d\alpha\, e^{-i(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}-\omega_\alpha(\boldsymbol{q})t)}\, C_\alpha(\boldsymbol{q}) - e^{i(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}-\omega_\alpha(\boldsymbol{q})t)}\, C^*_\alpha(\boldsymbol{q})$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_0(\boldsymbol{k},\omega) &= 2i\,\mathrm{Im} \sum\!\!\!\!\!\!\int d\alpha \int e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{x}} e^{-i(\omega-\omega_\alpha(\boldsymbol{q}))t}\, C_\alpha(\boldsymbol{q})\, d^3x\, dt\, d^3q \\
&= 2i(2\pi)^3\,\mathrm{Im} \sum\!\!\!\!\!\!\int d\alpha \int e^{-i(\omega-\omega_\alpha(\boldsymbol{k}))t}\, C_\alpha(\boldsymbol{k})\, dt \\
&= 2i(2\pi)^4\,\mathrm{Im} \sum\!\!\!\!\!\!\int d\alpha\, \delta(\omega-\omega_\alpha(\boldsymbol{k}))C_\alpha(\boldsymbol{k})
\end{aligned}$$

Infine, usando la (3.13)

$$\lim_{\boldsymbol{k}\to 0}\tilde{J}_0(\boldsymbol{k},\omega) = i(2\pi)^4\,\mathrm{Im}\lim_{\boldsymbol{k}\to 0} \sum\!\!\!\!\!\!\int d\alpha\, \delta(\omega-\omega_\alpha(\boldsymbol{k}))C_\alpha(\boldsymbol{k}) = C\delta(\omega) \tag{3.15}$$

L'esistenza di un gap sopra il livello fondamentale è chiaramente in contraddizione con la (3.15).

□

Si noti che l'ipotesi (3.9) del teorema riguarda l'abilità della carica al tempo $t = 0$ di generare la simmetria anche su operatori a tempi diversi. Verificare questa proprietà richiede in genere la conoscenza delle dinamiche; da identità cinematiche è possibile tipicamente dedurla solo per operatori $A\{t\}$ localizzati nello stesso tempo di Q_R:

$$\delta A\{t\} = i \lim_{R\to\infty} [Q_R(t), A\{t\}] \tag{3.16}$$

Se vale una certa ipotesi sull'algebra (località asintotica):

$$\lim_{|a|^2\to\infty} |a|^2 [A_{\boldsymbol{a}}, B] = 0 \tag{3.17}$$

dove $A_{\boldsymbol{a}} = e^{i\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{a}} A$ è il traslato di A, allora è possibile estendere la (3.16) a tempi diseguali:

$$\delta A\{t\} = i \lim_{R\to\infty} [Q_R(t+t'), A\{t\}] \tag{3.18}$$

e quest'ultima implica[6] l'ipotesi (3.9), e dunque il teorema. Questo riduce le ipotesi del teorema di Goldstone non relativistico alla commutazione di T_t ed α, alla generazione a tempi uguali (3.16), e alla località asintotica.

Teorema 5 (località implica commutazione a tempi ineguali)**.** *Se vale la località asintotica (3.17), la generazione di α dalla carica a tempi uguali (3.16) e l'equazione di continuità, allora la carica genera α anche a tempi diversi (3.18).*

Dimostrazione. Si prenda la differenza fra i commutatori a tempi uguali (3.16) e a tempi diversi (3.18):

$$i \lim_{R\to\infty} \int_t^{t+t'} \mathrm{d}\tau \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} Q_R(\tau), A\{t\} \right]$$

l'integrando vale

$$\lim_{R\to\infty} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} Q_R(\tau), A\{t\} \right] = \lim_{R\to\infty} - \int \mathrm{d}^3 x f_R(\boldsymbol{x}) \nabla \cdot [\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}, \tau, A\{t\}] =$$

$$= - \lim_{R\to\infty} \int \mathrm{d}^3 y f(y) R^2 \nabla_y \cdot [\boldsymbol{j}(R\boldsymbol{y}, t), A] = \lim_{R\to\infty} \int \mathrm{d}^3 y \nabla_y f(\boldsymbol{y}) \, [\boldsymbol{j}(R\boldsymbol{y}, t), A] \, R^2$$

∇f è a supporto compatto, quindi basta dimostrare che il resto dell'integrando si annulla nel limite. Questo è evidente, fissato $\boldsymbol{y}$, usando la località asintotica.

□

[6] Dato un qualunque operatore A non localizzato nel tempo, si può scomporre $A = \int dt\, \alpha(t) A\{t\}$ con gli $A\{t\}$ localizzati nel tempo.

Bisogna prestare particolare attenzione al fatto che l'inesistenza di un gap non implica di per sé l'esistenza di GB (cioè modi con $\omega \xrightarrow{\boldsymbol{k}\to 0} 0$). La loro presenza è garantita se per $\boldsymbol{k} \to 0$ solo valori discreti di α contribuiscono alla (3.15) e se $C_\alpha(\boldsymbol{k})$ è abbastanza regolare.

Anche in presenza di modi di Goldstone, non è vero in generale nel caso non relativistico che c'è una corrispondenza biunivoca fra i GB e i generatori rotti. Il conteggio esatto del numero dei GB, n_{GB}, è un problema aperto. Watanabe, Haruki & Brauner hanno dimostrato [15]

$$n_{BS} - n_{GB} \leq \frac{1}{2}\,\mathrm{rk}\left(\lim_{R\to\infty} R^{-3}\left\langle [Q_R^a, Q_R^b]\right\rangle_0\right)_{a,b} \tag{3.19}$$

dove n_{BS} è il numero di simmetrie rotte. Hanno inoltre congetturato che la (3.19) valga con l'uguaglianza.

In ambito relativistico, questo problema non sussiste e si ha sempre $n_{GB} = n_{BS}$, e inoltre la relazione di dispersione è lineare ($\omega = |\boldsymbol{k}|$).

3.4 Teorema di Goldstone per teorie locali

Le difficoltà si eliminano in realtà nel caso di una teoria locale, e nello specifico nel caso relativistico. Per località si intende la commutazione[7] di operatori di campo a eventi separati da un intervallo di tipo spazio:

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0 \quad \text{se} \quad (x-y)^2 < 0 \tag{3.20}$$

In realtà, dal punto di vista formale, è possibile dimostrare che sotto alcune ipotesi apparentemente ragionevoli su ϕ (covarianza sotto traslazioni, positività dell'energia e della massa, e la (3.20)) non si può impedire che $\phi(x)$ sia un operatore triviale. L'algebra delle variabili canoniche $\phi(x)$, $\pi(x)$ si può sostituire con quella generata dalla versione regolarizzata nello spazio-tempo del campo:

$$\phi(f) = \int \mathrm{d}^4x\, \phi(x) f(x)$$

per ogni $f(x)$ liscia a supporto compatto. L'algebra costruita è meglio rappresentabile ed è detta *algebra di campo*, in particolare è detta *algebra di campo locale* se

$$[\phi(f), \phi(g)] = 0 \tag{3.21}$$

[7] anticommutazione, nel caso fermionico.

se $\operatorname{supp} f$ è di tipo spazio rispetto a $\operatorname{supp} g$, ovver che $(x-y)^2 < 0$ per ogni $x \in \operatorname{supp} f$ e $y \in \operatorname{supp} g$. Una teoria di campo quantistica locale è dunque specificata da un'algebra di campo locale $\mathcal{A}$ e da una rappresentazione di $\mathcal{A}$ con un unico vuoto invariante per traslazioni e ciclico rispetto ai polinomi nelle $\phi(f)$.

Più precisamente, si preferisce includere nella definizione alcune ipotesi di covarianza. In quest'ottica, una teoria di campo quantistica locale (LQFT) può essere definita a partire da una rappresentazione irriducibile di un'algebra di campo che rispetta gli assiomi di Wightman

1. Esiste un'implementazione unitaria del gruppo di Poincaré $(a, \Lambda) \mapsto U(a, \Lambda)$ sullo spazio degli stati.

2. Il vuoto $|0\rangle$ è unico e invariante per traslazioni.

3. Vale la condizione spettrale sul 4-momento (inteso come generatore delle traslazioni)

$$\left\langle P^2 \right\rangle_\Psi \geq 0 \qquad\qquad \left\langle P^0 \right\rangle_\Psi \geq 0 \tag{3.22}$$

4. I campi sono covarianti sotto il gruppo di Poincaré.

5. I campi locali $\phi(f)$ soddisfano la condizione di località (3.21).

Si introduce ora il teorema di Goldstone per questa classe di teorie. È necessario definire preliminarmente una versione regolarizzata anche nel tempo delle cariche locali:

$$Q_{R,\alpha} = \int \mathrm{d}^3x \, \mathrm{d}t \, f_R(\boldsymbol{x}) \alpha(t) j_0(\boldsymbol{x}, t)$$

con $f_R(\boldsymbol{x}) = f(\frac{x}{R})$, $f \in \mathscr{C}^\infty$ a supporto compatto e $\equiv 1$ in un intorno dell'origine, $\alpha(t)$ liscia, a supporto compatto e $\int \alpha \, \mathrm{d}t = 1$.

Come si vedrà, i soli assiomi 2., 3., e .5, più un'implementazione unitaria del solo gruppo delle traslazioni sono sufficienti per la dimostrazione del teorema di Goldstone. In particolare, non è necessario che il parametro d'ordine sia covariante sotto una qualche rappresentazione del gruppo di Poincaré. Questo fisicamente vuol dire che la simmetria può essere rotta non solo da un campo di particelle puntiformi, ma anche eventualmente di oggetti estesi.

Lemma 6 (Rappresentazione di Jost-Lehmann-Dyson (JLD))**.** *Se A è un operatore dell'algebra locale, vale:*

$$\langle [Q_{R,\alpha}, A] \rangle_0 = i \int_0^\infty \mathrm{d}m^2 \Bigg(\int \mathrm{d}^3 y\, \rho_1(m^2, \boldsymbol{y}) \left(\int \mathrm{d}^4 x \Delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, x_0; m^2) f_R(\boldsymbol{x}) \alpha(x_0) \right) \\ + \int \mathrm{d}^3 y\, \rho_2(m^2, \boldsymbol{y}) \left(\int \mathrm{d}^4 x f_R(\boldsymbol{x}) \alpha(x_0) \partial_0 \Delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, x_0; m^2) \right) \Bigg) \tag{3.23}$$

dove ρ_1, ρ_2 sono distribuzioni temperate a supporto compatto in $\boldsymbol{y}$. Δ è la funzione di Pauli-Jordan[8] *per l'equazione di Klein-Gordon $(\Box^2 + m^2) f = 0$:*

$$\Delta(\boldsymbol{x}, t; m^2) = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}^4 p\, (\theta(p_0) - \theta(-p_0))\, \delta(p^2 - m^2) e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} - ip_0 t} \tag{3.24}$$

nel senso che il problema alle condizioni iniziali $f(\boldsymbol{y}, 0) = \rho_2(\boldsymbol{y})$ e $\partial_0 f(\boldsymbol{y}, 0) = \rho_1(\boldsymbol{y})$ ha soluzione

$$f(\boldsymbol{x}, t) = -\int \mathrm{d}^3 y \rho_1(\boldsymbol{y}) \Delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) + \rho_2(\boldsymbol{y}) \partial_0 \Delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$$

Dimostrazione. Si dimostra ora che una funzione $F(x)$ con trasformata $\tilde{F}(p)$ nulla per p di tipo spazio ammette la rappresentazione (3.23). Si può decomporre:

$$\tilde{F}(p) = \int_0^\infty \mathrm{d}m^2\, \tilde{F}(p)\, \delta(p^2 - m^2) \; =: \int_0^\infty \mathrm{d}m^2\, \tilde{\rho}(m^2, p)$$

Siccome $\tilde{\rho}$ contiene un $\delta(p^2 - m^2)$ allora la trasformata $\rho(m^2, x)$ soddisfa la Klein-Gordon

$$(\Box^2 + m^2)\, \rho(m^2, x) = 0$$

e questo implica la (3.23) per $F(x)$.

Ora la funzione $\langle j_0(\boldsymbol{x}, t)\, A \rangle_0$ ha chiaramente trasformata nulla per $p^2 < 0$ in conseguenza della condizione spettrale. Infatti

$$\langle 0 \,|\, j_0(x) A \,|\, 0 \rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\int \mathrm{d}q\, \langle 0 \,|\, j_0(x) \,|\, q \rangle \langle q \,|\, A \,|\, 0 \rangle = \sum\!\!\!\!\!\!\int \mathrm{d}q\, e^{-iq^\mu x_\mu} \langle 0 \,|\, j_0(0) \,|\, q \rangle \langle q \,|\, A \,|\, 0 \rangle$$

questa somma comprende solo termini $p^2 \geq 0$. Dal confronto con l'espansione in modi di Fourier (e se si vuole, dall'unicità della trasformata di Fourier) si deduce che quest'ultima si annulla su momenti di tipo spazio. Ugualmente si può dire di $\langle A\, j_0(\boldsymbol{x}, t) \rangle_0$. Questo è sufficiente per dedurre la rappresentazione voluta per il commutatore $J_0(x)$ e per il suo integrale su tutto lo spazio.

[8] la relazione fra la $\Delta(x; m^2)$ e uno scalare che soddisfa la Klein-Gordon è $\Delta(x; m^2) = -i \langle [\phi(x), \phi(0)] \rangle_0$ (senza ordinamento temporale)

Inoltre, se $(\boldsymbol{x}, t)$ è di tipo spazio rispetto alla regione di localizzazione di A, allora $J_0(\boldsymbol{x}, t) = 0$ per la condizione di località. Quindi a t fissato J_0 è a supporto compatto in $\boldsymbol{x}$, che implica che $\rho_i(m^2, \boldsymbol{y})$ è a sua volta a supporto compatto in $\boldsymbol{y}$. $\square$

Teorema 7 (Goldstone per teorie di campo quantistiche locali)**.** *Si consideri una simmetria continua di una LQFT generata da una corrente conservata, nel senso che per ogni polinomio B dei campi locali:*

$$\delta B = i \lim_{R \to \infty} [Q_{R,\alpha}, B]$$

Se la simmetria è rotta, ovvero se esiste un A tale che:

$$\langle \delta A \rangle_0 \neq 0$$

allora esistono degli stati con $P^2 = 0$ (modi di Goldstone).

Dimostrazione. Si osservi che $[Q_{R,\alpha_1} - Q_{R,\alpha_2}, A] = 0$, che è l'analogo regolarizzato nel tempo della (3.11). Infatti, $\alpha := \alpha_1 - \alpha_2$ è a supporto compatto e di integrale nullo, e definendo:

$$\beta = \int_{-\infty}^{t} \alpha(\tau) \mathrm{d}\tau$$

si ha che $\beta \in C^\infty$ ha supporto compatto e

$$[Q_{R,\alpha_1} - Q_{R,\alpha_2}, A] = \left[Q_{R,d\beta/dt}, A\right] = \int \mathrm{d}^3x \, \mathrm{d}t \; (\partial_i f_R) \; \beta \; [j_i(\boldsymbol{x}, t), A] \tag{3.25}$$

dove si è usato nell'ordine integrazione per parti in t, l'equazione di continuità, e di nuovo integrazione per parti in $\boldsymbol{x}$. La (3.25 è nulla nel limite $R \to \infty$; difatti per R sufficientemente grande, la regione in cui f_R è identicamente 1 contiene la regione in cui A è localizzato; allora laddove il commutatore è non nullo, è nullo $\boldsymbol{\nabla} f_R$. Dunque si annulla l'integrale.

Il valore di aspettazione del commutatore (come si è appena visto, indipendente da α nel limite $R \to \infty$) $\langle [Q_{R,\alpha}, A] \rangle_0$ ammette la rappresentazione JLD (Lemma 6).

Si noti inoltre che le ρ_i si possono scrivere:

$$\rho_i(m^2, \boldsymbol{y}) = \bar{\rho}_i(m^2) \delta^3(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}_i(m^2, \boldsymbol{y}) \tag{3.26}$$

con $\bar{\rho}(m^2) = \int d^3y \, \rho_i(m^2, \boldsymbol{y})$ e per una qualche $\boldsymbol{\sigma}_i$ a supporto compatto; una possibile scelta semplice di $\boldsymbol{\sigma}_i$ è data da

$$\sigma_i^1(m^2, \boldsymbol{y}) = \int_{-\infty}^{y^1} \mathrm{d}u \Big(\rho_i(m^2, u, y^2, y^3) - \delta(u) \int \mathrm{d}v \, \rho_i(m^2, v, y^2, y^3) \Big) \tag{3.27}$$

σ_i^1 è a supporto compatto perché l'integrando è a sua volta a supporto compatto e di integrale nullo. Vale quindi

$$\rho = \delta(y^1) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}v \, \rho_i(m^2, v, y^2, y^3) + \partial_1 \sigma_i^1 =: R^1 + \partial_1 \sigma^1$$

R^1 è anch'esso a supporto compatto, dunque si può reiterare la procedura (3.27) costruendo σ_i^2, con la sostituzione $\rho \to R^1$ e integrando stavolta in y^2. Si reitera infine a y^3 e si ottiene dunque la forma (3.26).

Si sostituisca la (3.26) nella rappresentazione JLD per il commutatore; si vede che il termine $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}_i$ non contribuisce per $R \to \infty$ alla (3.23), perché si può spostare il $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{y}}$ da $\boldsymbol{\sigma}$ a Δ, cambiarlo in $-\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}}$, e poi passarlo su f_R. Dunque la (3.23) prende la forma

$$\begin{aligned} i \int_0^{\infty} \mathrm{d}m^2 \Bigg(\bar{\rho}_1(m^2) \left(\int \mathrm{d}^4x \, \Delta(\boldsymbol{x}, x_0; m^2) f_R(\boldsymbol{x}) \alpha(x_0) \right) \\ + \bar{\rho}_2(m^2) \left(\int \mathrm{d}^4x \, \partial_0 \, \Delta(\boldsymbol{x}, x_0; m^2) f_R(\boldsymbol{x}) \alpha(x_0) \right) \Bigg) \end{aligned} \tag{3.28}$$

sostituendo la (3.24) gli integrali interni si risolvono esplicitamente

$$\int \frac{\mathrm{d}^3p}{2\omega} \, \tilde{f}_R(\boldsymbol{p}) \left(\tilde{\alpha}(\omega) - \tilde{\alpha}(-\omega) \right) \qquad\qquad \frac{i}{2} \int \mathrm{d}^3p \; \tilde{f}_R(\boldsymbol{p}) \left(\tilde{\alpha}(\omega) + \tilde{\alpha}(-\omega) \right)$$

dove $\omega := \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$. Se si sceglie α reale il primo integrale si annulla; nel limite $R \to \infty$, siccome si è visto che il commutatore non dipende da α, si può trascurare questo integrale. Quindi per R grande ($\tilde{f}_R(\boldsymbol{p}) = \delta^3(\boldsymbol{p})$) la (3.28) si riduce a

$$\langle [Q_{R,\alpha}, A] \rangle_0 \underset{R \to \infty}{=} - \int_0^{\infty} \mathrm{d}m^2 \, \bar{\rho}_2(m^2) \, \tilde{\alpha}(\sqrt{m^2}\,) \tag{3.29}$$

È stato dimostrato che il commutatore è costante per tutte le α con $\tilde{\alpha}(0) = 1$. È però chiaro che il medesimo ragionamento poteva essere ripetuto per $\tilde{\alpha}(0) = C$ per qualunque C. Dunque per quanto riguarda la dipendenza da α, dipende solo da $\tilde{\alpha}(0)$, e quindi confrontando con la (3.29) si deduce

$$\bar{\rho}_2(m^2) = a\delta(m^2) \tag{3.30}$$

e chiaramente si deve avere $a \neq 0$ per la condizione di simmetria rotta.

Ora, si vuole procedere inserendo nel commutatore, come nel caso nonrelativistico, un set completo di autovettori del quadrimomento. Per il primo termine $\langle Q_{R,\alpha} A \rangle_0$

$$\begin{aligned}\langle 0 \,|\, Q_{R,\alpha} A \,|\, 0 \rangle &= \sum\!\!\!\!\!\!\int \mathrm{d}n \, \langle 0 \,|\, Q_{R,\alpha} \,|\, n \rangle \, \langle n \,|\, A \,|\, 0 \rangle \\ &= \int \mathrm{d}^4 x \, f_R \, \alpha \, \sum\!\!\!\!\!\!\int \mathrm{d}n \, \langle 0 \,|\, j_0(x) \,|\, n \rangle \, \langle n \,|\, A \,|\, 0 \rangle \\ &= \int \mathrm{d}^4 x \, f_R \, \alpha \, \sum\!\!\!\!\!\!\int \mathrm{d}n \, e^{-ip_n^\mu x_\mu} \, \langle 0 \,|\, j_0(0) \,|\, n \rangle \, \langle n \,|\, A \,|\, 0 \rangle \\ &= \int \mathrm{d}^4 x \, f_R \, \alpha \, \sum\!\!\!\!\!\!\int \mathrm{d}n \, e^{-ip_n^\mu x_\mu} C_n \end{aligned} \tag{3.31}$$

il termine $\langle A \, Q_{R,\alpha} \rangle_0$ è assolutamente analogo. La (3.31) evidenzia una forma del tipo

$$\sum\!\!\!\!\!\!\int dn \; \delta^4(p - p_n) C_n \tag{3.32}$$

per la trasformata di Fourier del commutatore. Ma le considerazioni fatte sopra culminanti nella (3.30) restituiscono

$$\langle [Q_{R,\alpha}, A] \rangle_0 = ia \int \mathrm{d}^4 x \, f_R \alpha \, \partial_0 \Delta(x; 0)$$

e dalla definizione di Δ (3.24) è chiaro che quest'altra rappresentazione del commutatore avrà un $\delta(p^2)$ nella trasformata di Fourier. L'unica possibilità è dunque che esistano degli n per cui $p_n^2 = 0$. Inoltre affinché gli $|n\rangle$ contribuiscano alla somma (3.32) è necessario che l'overlap $\langle 0 \,|\, j_0(0) \,|\, n \rangle$ sia non nullo, questa è una caratterizzazione equivalente dei modi di Goldstone.

□

3.5 Rottura di simmetrie di gauge

Alla luce del teorema appena visto i risultati ottenuti nelle sezioni 2.2 e 2.3 possono generare perplessità. Questi modelli di rottura di simmetria soddisfano le ipotesi del teorema di Goldstone, con un parametro d'ordine ϕ con $\langle 0 \,|\, \phi \,|\, 0 \rangle$ non invariante; ciononostante nello spettro fisico non sono presenti le eccitazioni massless previste dal teorema[9], anzi, i quanti dei campi di gauge hanno acquisito massa.

Prima di imporre la gauge unitaria, in effetti, si è visto come compaiano dei campi χ che corrispondono intuitivamente ai modi di oscillazione del parametro d'ordine nella direzione delle simmetrie; questi campi non hanno termine di massa e sarebbero i giusti candidati per

[9]il fotone nel modello di GWS non è un bosone di Goldstone (non è un'oscillazione del parametro d'ordine, ma solo il bosone di gauge della parte della simmetria *non* coinvolta nella rottura).

identificare i GB (*would-be Goldstone bosons*). Tuttavia, l'accoppiamento atipico fra χ e il campo di gauge

$$A_\mu \partial^\mu \chi$$

rende impossibile dedurre l'esistenza di stati senza massa. Il passaggio alla gauge unitaria per eliminare questo termine, in quanto trasformazione di gauge, non può cambiare lo spettro energetico; e in questa gauge i GB non compaiono nello spettro *fisico* - sono stati, come si usa dire - "mangiati" dai bosoni di gauge come modi longitudinali, e diventa manifesto che non c'è modo di creare un'eccitazione massless.

Si è già detto che nei limiti $\vec{k} \to 0$, $R \to \infty$, i GB possono essere eccitati dal vuoto con la carica. Ma la carica in questo caso effettua semplicemente una trasformazione di gauge. Perciò eccitando i GB dal vuoto non si sta generando uno stato *fisico* diverso, in termini di osservabili gauge-invarianti. L'algebra di campo locale è costruita sui campi non invarianti di gauge e dunque è chiaro che nelle sue rappresentazioni questi appaiano come stati differenti.

Si potrebbe immaginare di ripetere la costruzione della teoria quantistica sulla base delle sole quantità gauge-invarianti, considerando dunque l'algebra $\mathcal{A}_{\text{inv}} \subset \mathcal{A}$ e le sue rappresentazioni. Chiaramente la trasformazione di gauge in questa formulazione è triviale, e inoltre non esiste il parametro d'ordine asimmetrico. La condizione di rottura spontanea (3.4) non è verficata e il teorema di Goldstone non si applica. Il diffetto principale di tale visuale è che in una rappresentazione della $\mathcal{A}_{\text{inv}}$ in generale il vuoto non è ciclico rispetto all'algebra e che la rappresentazione stessa è riducibile [13].

L'interesse è diretto quindi a procedere a lavorare nell'algebra non gauge-invariante generata dai campi e conciliare le conclusioni del teorema di Goldstone con l'assenza delle eccitazioni $\delta(p^2)$ dallo spettro energetico, evidenziando come i GB sono sì presenti nella teoria, ma non fisici in termini di quantità osservabili. Questo fenomeno è il meccanismo di Higgs.

Diventa quindi necessario dare una formulazione precisa di cosa si intende per stato fisico. È invitante definire uno stato fisico come un funzionale $\Psi : \mathcal{O} \mapsto \langle \mathcal{O} \rangle_\Psi$ che manda le osservabili nei loro valori di aspettazione. È però necessario stabilire un legame fra questa visuale e lo spazio degli stati $\mathcal{H}$; in particolare si vorrebbe realizzare una immersione sensibile dell'insieme di questi funzionali come un sottospazio di $\mathcal{H}$. Ogni $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ è mappato in un tale funzionale, ma la mappa non è iniettiva ed è necessario scegliere un raggio rappresentativo nella fibra di Ψ che rivesta il ruolo di rappresentazione dello stato fisico Ψ come ket. Si assume l'esistenza di tale sottospazio degli stati fisici come postulato di una teoria di campo [12]. Precisamente, esiste un sottospazio $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$ tale che

- $\langle \Psi \mid \Psi \rangle \geq 0$ se $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}'$
- esiste $D' \subset \mathcal{H}'$ denso in $\mathcal{H}'$ invariante sotto Lorentz: $U(a, \Lambda)D' \subset D'$
- $|0\rangle \in D'$

Gli elementi di $\mathcal{H}'$ sono detti stati fisici; gli altri vettori sono detti pura gauge, o artefatti di gauge.

La quantizzazione di una teoria di campo si svolge fissando l'algebra di campo e imponendo regole di commutazione come vincoli algebrici. Affinché questa procedura sia ben definita, è necessario che siano identificate le variabili indipendenti per generare l'algebra degli operatori. Nel caso di una teoria di gauge, è dunque obbligatorio fissare una gauge prima di quantizzare.

Si ritorni ora al modello abeliano della sezione 2.2. Se, prima di effettuare la quantizzazione, si impone la gauge di Coulomb

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = 0$$

si perde la causalità relativistica - e dunque la località - della teoria (le osservabili, gauge invarianti, sono ovviamente ancora locali). Il teorema di Goldstone non si applica e i GB non sono nello spettro. In effetti si è visto che l'ipotesi cruciale è la località dell'algebra; nella gauge di Coulomb la (3.21) viene compromessa. Esplicitamente, il fallimento della dimostrazione del teorema sta nell'invarianza temporale dei commutatori della carica $Q(t) = \int d^3x j_0(\boldsymbol{x}, t)$ con gli operatori. (Si ignori ora il problema non essenziale della regolarizzazione spaziale). La conservazione $\partial_\mu j^\mu = 0$ implica

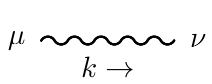
$$\partial^\mu \left\langle [j_\mu(\vec{x}, t), A] \right\rangle_0 = 0$$

E dunque

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} [Q, A] = \int \mathrm{d}^3x \partial_i \left[j_i(\vec{x}, t), A \right] = \int_\infty \mathrm{d}^2x \, n_i \left[j_i(\vec{x}, t), A \right] \tag{3.33}$$

ora, nella dimostrazione del teorema si è sfruttata la località per garantire l'annullarsi della (3.33). Senza la località viene meno la costanza del commutatore nel limite $R \to \infty$ e quindi cade il resto del teorema. La carica perde la capacità di generare la simmetria di gauge.

Se invece si impone una gauge che mantenga la covarianza manifesta, ad esempio le gauge R_ξ, con propagatore del fotone nello spazio dei momenti [2]



$$= \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left(\eta^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right)$$

Questa famiglia di gauge include la gauge unitaria descritta nella sezione 2.2, per $\xi \to \infty$. La teoria di campo è covariante e causale (e dunque locale), ma sono presenti gradi di libertà spuri[10], ovvero i modi longitudinali del fotone. Il teorema si applica, ma i bosoni di Goldstone sono pura gauge, e non sono eccitazioni fisiche [7].

L'intenzione è dunque di impedire la comparsa dei bosoni di Goldstone nello spettro fisico limitatamente alle gauge covarianti e locali. La proprietà generale delle teorie di gauge che le variabili di campo A^a_μ non sono indipendenti si interpreta come la presenza di un vincolo cinematico del quale si fornisce ora una riscrittura utile.

3.6 Legge di Gauss locale

Finora si è fatto riferimento implicitamente al solo gruppo G ad N parametri delle trasformazioni di gauge globali:

$$\phi \to e^{ig\,\theta^a T_a} \phi \qquad\qquad A^a_\mu \to A^a_\mu$$

che da sole (ovvero senza le equazioni del moto) implicano solo la conservazione globale delle cariche $Q^{\,a} = \int d^3x j^a_0(\boldsymbol{x}, t)$. L'estensione al gruppo infinito-dimensionale delle trasformazioni locali $\mathcal{G}$ è necessaria per la conservazione locale:

$$\partial^\mu j^{\,a}_\mu(x) = 0 \tag{3.34}$$

è interessante, e rilevante, notare che la (3.34) può essere ricavata senza sfruttare le equazioni del moto. Si prenda ad esempio il caso abeliano. Fissata una Λ, l'invarianza della Lagrangiana sotto il gruppo di trasformazioni ad un parametro

$$\phi(x) \to e^{ig\varepsilon\Lambda(x)} \phi(x) \qquad\qquad A_\mu \to A_\mu + \varepsilon \partial_\mu \Lambda$$

porta alle infinite correnti conservate, indicizzate da Λ:

[10]dal punto di vista formale il problema delle gauge covarianti non è semplicemente l'introduzione di stati non fisici, ma anche l'inesistenza di un prodotto hermitiano sesquilineare definito positivo su $\mathcal{H}$. Ad esempio, la gauge di Feynman o Gupta-Bleuler, che si ottiene con $\xi = 1$, ha un propagatore $\propto \eta_{\mu\nu}$. Quindi la norma dello stato $A_\mu(x)\left|0\right\rangle \propto \eta_{\mu\mu}$, il che implica che o le polarizzazioni spaziali, o quella temporale, hanno norma negativa. Questo non si rivela problematico alla luce del fatto che ristretto al sottospazio degli stati fisici il prodotto è definito positivo.

$$-\mathcal{J}^{\mu}_{\Lambda} = \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta \partial_\nu \phi} ig\Lambda\phi + \text{c.c.} + \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta \partial_\nu A_\mu} \partial_\mu \Lambda$$

Definita $j_\mu := ig\phi\,\pi_\mu + \text{c.c.}$ le infinite leggi di conservazione forniscono

$$\partial^\mu j_\mu \Lambda + j^\mu \partial_\mu \Lambda + \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathscr{L}}{\delta \partial_\mu A_\nu} \right) \partial_\nu \Lambda + \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta \partial_\mu A_\nu} \partial_\mu \partial_\nu \Lambda = 0$$

L'arbitrarietà di Λ ci permette di ottenere un'equazione per ogni ordine di derivate di Λ, ovvero:

$$\partial^\mu j_\mu = 0 \tag{3.35a}$$

$$j_\mu = -\partial^\nu \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta \partial_\nu A_\mu} =: -\partial^\nu F_{\mu\nu} \tag{3.35b}$$

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \tag{3.35c}$$

Quindi le infinite leggi di conservazioni sono in realtà equivalenti alle sole tre equazioni (3.35); in realtà le tre non sono indipendenti - (3.35b) e (3.35c) implicano (3.35a). Nel caso non abeliano questa informazione si generalizza in una espressione del tipo

$$j^a_\mu(x) = \partial^\nu G^a_{\nu\mu}(x) \tag{3.36}$$

per delle $G^a_{\mu\nu}$ antisimmetriche, una per generatore (legge di Gauss locale). La (3.36) implica la conservazione locale *automaticamente*, indipendentemente dalle equazioni del moto e dunque dalle dinamiche. La corrente j_μ è superconservata, nel senso che l'equazione di continuità è un fatto meramente cinematico.

La carica totale Q^a, sotto l'ipotesi della legge di Gauss locale (LGL), si può scrivere mediante un'integrale su una superficie all'infinito:

$$Q^a = \int \mathrm{d}^3x\, \partial^i G^a_{i\,0} = \oint_\infty \mathrm{d}\sigma^i G^a_{i\,0}$$

e il comportamento dei campi all'infinito è stabile per evoluzione temporale. Dunque la carica Q^a assume caratteristiche tipiche di una carica topologica, dipendendo solamente dall'andamento dei campi all'infinito.

Trasferendo la questione nel contesto quantistico, la LGL non vale in generale come equazione fra operatori. Vale piuttosto in termini di elementi di matrice su stati fisici, nel senso

$$\left\langle \Psi \,\middle|\, j^a_\mu(x) - \partial^\nu G^a_{\nu\mu}(x) \,\middle|\, \Phi \right\rangle = 0$$

È dunque ovvio che è possibile indebolirla nella seguente forma operatoriale:

$$j_\mu = \partial^\nu G^a_{\nu\mu} + \Gamma_\mu$$

con Γ_μ pura gauge, ovvero $\langle\Phi\,|\,\Gamma_\mu\,|\,\Psi\rangle = 0$ sugli stati fisici $|\Phi\rangle$, $|\Psi\rangle$. È chiaro che la (3.6) è equivalente al verificarsi della LGL come elementi di matrice sugli stati fisici.

Viste le considerazioni fatte sulla natura topologica della carica di gauge, è ragionevole pensare che in presenza di una LGL e un'algebra di campo locale sia impossibile eccitare uno stato carico dal vuoto con un operatore. In realtà, siccome l'esistenza della carica globale e la sua validità come generatore della simmetria cadono in presenza di rottura spontanea, si vedrà che questo ha senso solo se la simmetria è esatta; in generale si può però affermare che i campi locali non sono carichi. Si noti innanzitutto che se la LGL valesse sugli operatori, un operatore locale avrebbe carica identicamente nulla ($[Q^a, A] = 0$):

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\left[Q^a_{R,\alpha}, A\right] &= \lim_{R\to\infty}\int \mathrm{d}^3x\,(f_R\alpha)\left[\partial^\mu G^a_{\mu\,0}, A\right]\\ = \lim_{R\to\infty}\int \mathrm{d}^3x\,\partial_i f_R\,\alpha\,[G^a_{i\,0}, A] &= 0\end{aligned} \tag{3.37}$$

Questa espressione si annulla perché $\partial_i f_R$ è nullo in una palla di raggio proporzionale ad R, la quale per R molto grande include la regione di localizzazione di A. Se la LGL vale in termini di elementi di matrice sugli stati fisici, allora anche la (3.37) vale nello stesso senso:

$$\lim_{R\to\infty}\langle\Psi\,|\,[(\partial G)_{R,\alpha}, A]\,|\,\Phi\rangle = 0 \tag{3.38}$$

dove $(\partial G)_{R,\alpha} := \int \mathrm{d}^3x f_R\alpha\,\partial^\nu G^a_{\nu\,0}$.

Si consideri dunque il valore di aspettazione della carica su uno stato fisico eccitato da un operatore locale $|\Psi\rangle = A\,|0\rangle$:

$$\begin{aligned}&\lim_{R\to\infty}\left\langle\Psi\,\middle|\,Q^a_{R,\alpha}\,\middle|\,\Psi\right\rangle = \lim_{R\to\infty}\langle\Psi\,|\,(\partial G)_{R,\alpha}\,|\,\Psi\rangle = \lim_{R\to\infty}\left\langle 0\,\middle|\,A^\dagger(\partial G)_{R,\alpha}A\,\middle|\,0\right\rangle\\ &= \lim_{R\to\infty}\left(\left\langle 0\,\middle|\,A^\dagger\,[(\partial G)_{R,\alpha}, A]\,\middle|\,0\right\rangle + \left\langle 0\,\middle|\,A^\dagger A\,(\partial G)_{R,\alpha}\,\middle|\,0\right\rangle\right)\end{aligned}$$

Si sono automaticamente omessi gli elementi di matrici includenti Γ_μ. Il primo termine si annulla per quanto visto sopra; il secondo si elimina se la simmetria è esatta perché $Q_{R,\alpha}\,|0\rangle \to 0$.

La conclusione è che in presenza di una legge di Gauss debole per eccitare stati carichi da un vuoto non carico bisogna disporre necessariamente di un'algebra nonlocale. Intuitivamente si riconosce che la ragione è il carattere cinematico della conservazione della carica.

3.7 Meccanismo di Higgs

L'equazione (3.6) è l'informazione cruciale per risolvere il paradosso delineato nella sezione 3.5 relativamente all'assenza dallo spettro fisico delle eccitazioni di Goldstone. Può essere infatti letta, piuttosto che come un'informazione sul comportamento dei campi locali sugli stati fisici, come, al contrario, una condizione necessaria per la fisicità di uno stato. Vale

Teorema 8 (Meccanismo di Higgs). *In una LQFT che soddisfa le ipotesi del teorema di Goldstone relativistico (teorema 7) e nella quale valga la legge di Gauss locale debole (3.6) le singolarità $\delta(p^2)$ nella trasformata di Fourier di $\langle j_\mu A \rangle_0$ previste dal teorema non corripondono a stati fisici.*

Dimostrazione. La presenza dei modi di Goldstone è equivalente all'esistenza di stati $|p\rangle$ ($p^2 = 0$) con sovrapposizione non nulla con $j_\nu(x)\,|0\rangle$, $\langle 0\,|\,j_\nu(x)\,|\,p\rangle \neq 0$. Applicando la legge di Gauss locale debole:

$$0 \neq \partial^\mu \langle 0\,|\,G_{\mu\nu}(x)\,|\,p\rangle + \langle 0\,|\,\Gamma_\nu\,|\,p\rangle \tag{3.39}$$

il primo elemento di matrice si annulla se vale la legge di Gauss. Infatti

$$\langle 0\,|\,G_{\mu\nu}(x)\,|\,p\rangle = e^{iPx}\,\langle 0\,|\,G_{\mu\nu}(0)\,|\,p\rangle =: e^{iPx} g_{\mu\nu}(p)$$

Ora, $|0\rangle$ è invariante sotto Lorentz. Siccome $|p\rangle$ è uno stato massless spin-0, trasformerà come:

$$U(\Lambda)\,|p\rangle = |\Lambda p\rangle$$

e $G_{\mu\nu}$ come un tensore:

$$U(\Lambda) G_{\mu\nu}(x) U(\Lambda)^\dagger = \tilde{\Lambda}_\mu{}^\rho \tilde{\Lambda}_\nu{}^\sigma G_{\rho\sigma}(\Lambda x)$$

allora risulta

$$g_{\mu\nu}(p) \to \tilde{\Lambda}_\mu{}^\rho \tilde{\Lambda}_\nu{}^\sigma g_{\rho\sigma}(\Lambda p)$$

da cui si conclude che $g_{\mu\nu}$ è un tensore di Lorentz. L'unica quantità covariante presente è p^μ e dunque g deve avere la forma

$$g_{\mu\nu} = (\eta_{\mu\nu} A(p^2) + p_\mu p_\nu B(p^2))(a\theta(p_0) + b\theta(-p_0))$$

che è simmetrica; dunque l'antisimmetria di $G_{\mu\nu}$ permette di concludere $g_{\mu\nu} = 0$.

Tornando alla (3.39), siccome il vuoto è fisico, e gli elementi di matrice di Γ si annullano sugli stati fisici, la

$$\langle 0 \,|\, \Gamma_\nu \,|\, p \rangle \neq 0$$

dimostra che $|p\rangle$ non è fisico.

$\square$

Questo conclude dunque l'analisi del meccanismo di Higgs nelle gauge che soddisfano le ipotesi del teorema di Goldstone.

È importante enfatizzare che non è corretto affermare che i bosoni di Goldstone sono stati "mangiati" come modi longitudinali di un vettore massivo. Le eccitazioni massless sono sempre esplicitamente presenti in una gauge covariante e locale, sebbene siano pura gauge. Questo appare a prima vista in piena contraddizione con la trattazione vista nella sezione 2.2, dove il passaggio alla gauge unitaria (covariante e locale, perché una delle gauge R_ξ) sembrava avere uno spettro manifestamente privo di modi massless. Le equazioni del moto classiche risultanti

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m_A^2 A^\nu = 0 \tag{3.40}$$

sono, con la chiara identificazione $j^\nu \leftrightarrow -m_A^2 A^\nu$, nient'altro che una legge di Gauss locale. È dunque ragionevole pensare che valga solo in senso debole:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m_A^2 A^\nu = \Gamma^\nu \qquad\qquad \langle \Psi \,|\, \Gamma^\nu \,|\, \Phi \rangle = 0$$

e il campo Γ^ν permette i modi massless e assicura che siano non fisici.

Si evidenzia dunque come, nonostante la lagrangiana (2.2) nel meccanismo di Higgs abeliano in gauge unitaria sia (salvo interazioni di ordine superiore) identica a quella della teoria di campo libero di un vettore e uno scalare massivi, le due visuali corrispondono a due rappresentazioni inequivalenti nel contesto quantistico. Nonostante solo una presenti i modi di Goldstone che testimoniano la rottura spontanea di una simmetria, gli spettri fisici delle osservabili sono identici.

3.8 Regole di superselezione

Data una hamiltoniana H, due stati si dicono separati da una regola di selezione se

$$\langle \Phi \,|\, H \,|\, \Psi \rangle = 0$$

che implica che non è possibile la transizione da $|\Psi\rangle$ a $|\Phi\rangle$ sotto l'evoluzione temporale e^{-iHt}. Generalmente, H è una hamiltoniana perturbativa che comprende solo termini al prim'ordine in un qualche parametro perturbativo ε; ad esempio, le regole di selezione su ΔJ e ΔM_J nelle transizioni atomiche valgono in approssimazione di transizioni ottiche (il parametro piccolo è il rapporto fra il raggio atomico e la lunghezza d'onda). Includendo termini di ordine superiore nel parametro ε le transizioni risultano permesse, sebbene con probabilità soppressa da potenze del parametro stesso.

Se invece si verifica che per ogni *osservabile* A, per due stati fisici vale

$$\langle \Phi \,|\, A \,|\, \Psi \rangle = 0 \tag{3.41}$$

si parla di regola di superselezione. Il prefisso super, in analogia con la superconservazione, vuole evidenziare il carattere cinematico del vincolo (3.41), indipendente dagli aspetti dinamici e dunque dalla scelta dell'hamiltoniana [4].

Sia $|\Psi_+\rangle$ una combinazione lineare non triviale di due stati $|\Psi_1\rangle$ e $|\Psi_2\rangle$ separati da superselezione, ad esempio $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\Psi_1\rangle + |\Psi_2\rangle\right)$. Allora $\langle A\rangle_+$ si scrive come

$$\langle \Psi_+ \,|\, A \,|\, \Psi_+ \rangle = \frac{1}{2}\big(\langle \Psi_1 \,|\, A \,|\, \Psi_1 \rangle + \langle \Psi_2 \,|\, A \,|\, \Psi_2 \rangle\big)$$

questo valore di aspettazione si potrebbe scrivere come $\mathrm{Tr}(\rho A)$ se si definisse $\rho = \frac{1}{2}(|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| + |\Psi_2\rangle\langle\Psi_2|)$. Questa è la matrice densità *effettiva* per $|\Psi_+\rangle$, nel senso che è valida se ci si limita alle sole osservabili; definendo uno stato quantistico come un funzionale sulle osservabili che fornisce il valore di aspettazione, allora la rappresentazione ρ è esatta a tutti gli effetti. Il punto è che la forma di ρ, che è una combinazione convessa non triviale di stati puri, è uno stato misto. In generale, combinazioni non triviali di stati separati da superselezione non sono mai coerenti.

Uno spazio di Hilbert con regole di superselezione in generale si separa formalmente come somma diretta di sottospazi detti settori di superselezione

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{H}_\lambda$$

con $\mathcal{H}_\lambda$ tali che $|\Psi_\alpha\rangle \in \mathcal{H}_\alpha$, $|\Psi_\beta\rangle \in \mathcal{H}_\beta$ sono separati da superselezione se e solo se $\alpha \neq \beta$. L'insieme degli stati puri è il più piccolo $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{H}_\lambda$. Nel caso specifico di selezione indotta da una simmetria continua, i settori di superselezione sono tipicamente parametrizzati in uno spazio di misura (Λ, μ), e alle osservabili A, agendo essi separatamente su ogni settore, si possono far corrispondere funzioni $\lambda \mapsto A(\lambda)$ con $A(\lambda)$ la restrizione di A a $\mathcal{H}_\lambda$

$$\mathcal{H} = \int_\Lambda \mathrm{d}\mu \, \mathcal{H}_\lambda \qquad\qquad A = \int_\Lambda \mathrm{d}\mu \, A(\lambda)$$

La fisica di un settore è completamente scollegata da quella negli altri settori. Non è possibile misurare la fase relativa degli stati misti e le componenti dello stato nei diversi $\mathcal{H}_\lambda$ evolvono indipendentemente. Allora i settori differenti da quello in cui si trova l'osservatore sono non misurabili e dunque non fisici; un principio di semplicità impone dunque di restringersi ad un unico settore.

Nelle pagine precedenti, questa scelta è stata fatta implicitamente imponendo l'unicità del vuoto. Infatti, nello spazio di Hilbert "completo" $\mathcal{H}$ relativo ad un sistema invariante, costruibile abbandonando questa ipotesi di unicità, esistono più vuoti parametrizzati da λ, ognuno contenuto in $\mathcal{H}_\lambda$ e ciclico per esso, e legati (in questo caso non più formalmente) dalla simmetria. Si vuole ora mostrare che la legge di Gauss locale induce una regola di superselezione per le cariche; quest'ultima giustifica per le considerazioni appena fatte l'ipotesi di unicità del vuoto e la restrizione ad un unico settore.

Teorema 9 (Regola di superselezione per la carica)**.** *Siano $|q_1\rangle$, $|q_2\rangle$ autostati fisici con autovalori q_1, q_2 diversi di un generatore Q di una simmetria di gauge. Se vale la legge di Gauss locale (3.6) allora per ogni osservabile A*

$$\langle q_1 \,|\, A \,|\, q_2 \rangle = 0$$

Dimostrazione. Siccome $q_1 - q_2 \neq 0$ si ha

$$0 \neq \langle q_1 \,|\, A \,|\, q_2 \rangle \Leftrightarrow 0 \neq (q_1 - q_2) \, \langle q_1 \,|\, A \,|\, q_2 \rangle = \langle q_1 \,|\, [Q, A] \,|\, q_2 \rangle$$

Ma questa espressione si scrive

$$\lim_{R\to\infty} \langle q_1 \,|\, [(\partial G)_{R,\alpha}, A] \,|\, q_2 \rangle = \lim_{R\to\infty} \int \mathrm{d}^3x \, \partial_i f_R \, \alpha \, \langle q_1 \,|\, [G^a_{i\,0}, A] \,|\, q_2 \rangle$$

E dal momento che $\partial_i f$ è nullo in una palla centrata in 0 di raggio proporzionale ad R, la quale per R abbastanza grande contiene la regione di localizzazione di A, l'integrale si annulla.

□

La superselezione delle cariche di gauge ha una profonda interpretazione in presenza di rottura spontanea di simmetria da parte di un parametro d'ordine ϕ: non sono possibili sovrapposizioni coerenti di ϕ. La presenza eventuale di altri settori non è misurabile in termini di operatori locali, e quindi di osservabili.

Appendice A

Convenzioni

Nelle precedenti pagine erano sottintese le seguenti scelte convenzionali:

- La segnatura della metrica è $(+, -, -, -)$.
- Il generatore dell'ipercarica è definito in modo che valga $T^3 + Y = Q$. Di conseguenza, l'ipercarica del multipletto di Higgs nel modello standard è $Y(\phi) = \frac{1}{2}$.
- Nelle trasformate di Fourier i fattori $(2\pi)^d$ accompagnano sempre gli integrali nel momento.
- Si fa uso di unità di misura con $\epsilon_0 = \mu_0 = c = \hbar = 1$.
- $\theta(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(y) \mathrm{d}y$ è la funzione a gradino di Heaviside.

Bibliografia

[1] V. Bargmann. Note on Wigner's theorem on symmetry operations. *J. Math. Phys.*, 5:862–868, 1964.

[2] T. P. Cheng and L. F. Li. *Gauge Theory of elementary particle physics.* Oxford University Press, 1988.

[3] F. Englert and R. Brout. Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons. *Phys. Rev. Lett.*, 13:321–323, 1964.

[4] D. Giulini. Superselection rules. In D. Greenberger, K. Hentschel, and F. Weinert, editors, *Compendium of Quantum Physics*, pages 771–779. Springer Berlin Heidelberg, 2009.

[5] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg. Broken symmetries. *Phys. Rev.*, 127:965–970, Aug 1962.

[6] G. S. Guralnik and C. R. Hagen. Where have all the Goldstone bosons gone? *Mod. Phys. Lett.*, A29:1450046, 2014.

[7] G. S. Guralnik, C. R. Hagen, and T. W. B. Kibble. Global conservation laws and massless particles. *Phys. Rev. Lett.*, 13:585–587, Nov 1964.

[8] P. W. Higgs. Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons. *Phys. Rev. Lett.*, 13:508–509, 1964.

[9] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. *Phys. Rev.*, 122:345–358, Apr 1961.

[10] A. Salam. Weak and Electromagnetic Interactions. *Proc. of the Nobel symposium 1968*, C680519:367–377, 1968.

[11] A. Salmela. *Gauss's law in Yang-Mills theory.* PhD thesis, University of Helsinki, Finland, 2005.

[12] F. Strocchi. Spontaneous symmetry breaking in local gauge quantum field theory: the Higgs mechanism. *Commun. Math. Phys.*, 56:57, 1977.

[13] F. Strocchi. *Elements of quantum mechanics of infinite systems.* World Scientific, 1985.

[14] S. Summers. On the Stone-von Neumann uniqueness theorem and its ramifications. In M. Rédei and M. Stöltzner, editors, *John von Neumann and the Foundations of Quantum Physics*, volume 8 of *Vienna Circle Institute Yearbook [2000]*, pages 135–152. Springer Netherlands, 2001.

[15] H. Watanabe and T. Brauner. On the number of Nambu-Goldstone bosons and its relation to charge densities. *Phys.Rev.*, D84:125013, 2011.

[16] C.-N. Yang and R. L. Mills. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance. *Phys. Rev.*, 96:191–195, 1954.