# UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

**DIPARTIMENTO DI SCIENZE ECONOMICHE ED AZIENDALI "M.FANNO"**

**DIPARTIMENTO DI MATEMATICA**

**CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA**


**PROVA FINALE**

## "EQUILIBRIO DI NASH OPEN LOOP IN UN MODELLO DI ADVERTISING DINAMICO"


**RELATORE:**

**CH.MO PROF. LUCA GROSSET**

**LAUREANDA: LAURA TRAMARIN**

**MATRICOLA N. 1137633**



**ANNO ACCADEMICO 2018 – 2019**

Il candidato, sottoponendo il presente lavoro, dichiara sotto la propria personale responsabilità, che il lavoro è originale e che non è già stato sottoposto, in tutto o in parte, dal candidato stesso o da altri soggetti in altre Università italiane o straniere al fine del conseguimento di un titolo accademico. Il candidato dichiara altresì che tutti i materiali utilizzati ai fini della predisposizione dell'elaborato, sono stati opportunamente citati nel testo e riportati nella sezione finale "Bibliografia" e che le eventuali citazioni testuali sono individuabili attraverso l'esplicito richiamo al documento originale.

# Introduzione

Il presente elaborato avrà lo scopo di analizzare un modello matematico di *advertising* dinamico inserito all'interno di un contesto commerciale e verrà applicata la Teoria dei Giochi differenziali cooperativi e non cooperativi.

Un gioco differenziale è essenzialmente un gioco in forma estesa, in cui il tempo evolve continuamente e lo sviluppo delle variabili di stato è descritto da un set di equazioni differenziali [12]. Tali giochi possono essere analizzati attraverso la Teoria del Controllo Ottimo, principalmente attraverso l'utilizzo del principio di massimo di Pontryagin e della funzione Hamiltoniana.

In merito al contesto, nel suddetto elaborato verrà considerato un canale distributivo indiretto a breve, formato da un rivenditore (*retailer*) il quale, nel quadro considerato, ha la facoltà di determinare l'ammontare del costo che dovrà sostenere per intraprendere un'attività promozionale; e un produttore (*manufacturer*), che, diversamente, ha la possibilità di controllare sia l'evoluzione del valore del brand di quest'ultimo, attraverso la scelta del livello di *advertising* (sviluppato a partire dal modello di Nerlove-Arrow [12]), sia il grado di supporto alla campagna promozionale intrapresa dal dettagliante. In aggiunta, la funzione di vendite del prodotto/servizio dipenderà dal valore del brand e dal livello di promozione scelto dal *retailer*.

Il programma di cooperazione, nel modello di riferimento [1], viene analizzato lungo tre differenti contesti: un progetto di sostegno completo da parte del produttore verso l'azione pubblicitaria svolta dal rivenditore (strategia à la Stackelberg), e due programmi di supporto parziale, dove il produttore non contribuisce affatto o condivide solo in parte il costo dell' attività sostenuta dal dettagliante. Nello specifico, il presente studio si concentrerà sul differenziale non cooperativo di stato lineare e utilizzerà come strumenti matematici i risultati standard derivanti dalla risoluzione dei problemi di Equilibrio di Nash riguardanti i giochi non cooperativi. Per Equilibrio di Nash si intende una certa combinazione di mosse/strategie in cui ciascun giocatore effettua la miglior scelta possibile (strategia dominante), sulla base delle aspettative di scelta dell'altro giocatore: tale decisione diviene dunque la situazione ideale di un gioco non cooperativo dalla quale ogni individuo trae utilità massima. Analiticamente, lo scopo del modello sarà quindi quello di valutare la decisione ottimale per entrambi i giocatori, al fine di massimizzare il flusso dei loro profitti su un orizzonte temporale finito ([0,T]), attraverso la risoluzione di alcuni problemi di controllo ottimo. In particolare, verrà considerata la nozione di Equilibrio di Nash Open Loop, con la quale si vuole identificare quella condizione per cui gli individui coinvolti non hanno la possibilità di osservare lo stato del sistema né la strategia adottata dagli altri giocatori, e il solo fattore che può influenzare la scelta è il tempo. Nonostante ciò, essi non hanno interesse a modificare la loro posizione. Per l'applicazione della Teoria del Controllo Ottimo, in ambito gestionale, e i modelli di marketing riguardanti i giochi differenziali si farà riferimento al testo di Jørgensen e Zaccour [12], mentre per il modello principale si rinvia al lavoro di Buratto e Grosset [1].

Il contesto considerato è quello del marketing nel "B2B" (Business to Business), che sottintende un approccio relazionale tra gli individui coinvolti, ed identifica forme più o meno intense di collaborazione e personalizzazione. Di conseguenza, la tematica affrontata si collega direttamente al concetto di marketing strategico. La pianificazione strategica è infatti una delle attività fondamentali per tutti i soggetti che operano attorno al mondo commerciale e può essere trattata da un punto di vista analitico, attraverso l'analisi delle varie opportunità disponibili agli individui coinvolti nel gioco. Un altro aspetto fondamentale è il concetto di marketing operativo, inteso come quel complesso di iniziative volte a definire le caratteristiche del prodotto/servizio e a determinare le altre variabili del *marketing mix*.

La letteratura economica si è frequentemente confrontata con la Teoria dei Giochi Differenziali e con la Teoria del Controllo Ottimo. Essa ha infatti tentato di applicare, in maniera generale, tali argomenti a diversi contesti economici e manageriali. Si veda, ad esempio, i lavori di Case (1979) [2], il quale fu probabilmente il primo autore che contribuì alla presentazione dell'argomento; Petit (1990) [16], il quale affrontò i giochi differenziali e le loro applicazioni macroeconomiche; e Clemhout e Wan (1994) [3], i quali hanno provveduto ad un riassunto delle Teoria dei Giochi in economia. Tali scritti si riferiscono principalmente a giochi differenziali Non-Cooperativi, mentre per applicazioni economiche di giochi differenziali in presenza di collaborazione, si può far riferimento ai lavori di Leitmann (1974) [13], Petrosjan e Zenkevich (1996) [17], Dockner (2000) [4] e Jørgensen e Zaccour (2002) [11]. Tuttavia, la letteratura economica applicata a tali tematiche risulta ancora piuttosto scarna.

Questo lavoro è organizzato come segue: nel primo capitolo verrà analizzato il contesto di riferimento e verrà presentato il modello di base, funzionale alla comprensione dell'elaborato. Il Capitolo 2 si concentrerà invece su una spiegazione semplificata della Teoria dei Giochi Differenziali e del concetto di Equilibrio di Nash Open Loop. Il Capitolo 3 analizzerà quest'ultima tematica, assumendo per ipotesi che non vi sia coordinazione tra produttore e dettagliante, ragion per cui il costo promozionale sarà completamente sostenuto dal *retailer*. Il Capitolo 4 introdurrà una forma di collaborazione per la quale i due individui si accorderanno relativamente al tasso di condivisione della spesa promozionale, con lo scopo di incrementare i propri profitti. Per riepilogare, nelle Conclusioni si ultimerà l'analisi, evidenziando i legami, le differenze e il livello di convenienza nell'attuazione di una strategia comparativamente ad un'altra, riassumendo dunque i tratti salienti e i risultati ottenuti.

# Indice

# 1
# Il modello

Il presente capitolo analizzerà il contesto commerciale a cui l'elaborato farà riferimento e si delineeranno gli individui coinvolti nell'analisi. Successivamente verrà presentato il modello centrale e le assunzioni principali su cui esso si baserà, i quali formeranno il nucleo portante dello studio.

## 1.1 Marketing channel: il contesto e i soggetti coinvolti

Con il termine canale di distribuzione, nell'ambito del marketing, si è soliti indicare quel collegamento tra domanda ed offerta che costituisce una delle "4P" del *marketing mix* (*Product, Price, Place, Promotion*). Esso può essere formato da diversi attori indipendenti (produttori, dettaglianti, grossisti ed altri intermediari). Gli agenti economici, confrontandosi e concorrendo nel mercato, utilizzano una serie di strumenti di marketing al fine di influenzare le vendite, le quote di mercato e la *brand loyalty*, con lo scopo di fidelizzare i clienti. Il seguente modello si concentrerà su un canale di distribuzione composto da un produttore ($M$) ed un dettagliante ($R$), entrambi impegnati indipendentemente nella massimizzazione dei benefici derivanti dalla vendita di un certo bene o servizio.
La figura del dettagliante identifica quell'intermediario commerciale in diretto contatto con il consumatore. Esso si colloca nella fase finale del processo di distribuzione e controlla il suo livello di attività promozionale $p(t)$. La promozione delle vendite (*sales promotion*), punto fon-

damentale del *marketing mix*, a livello teorico, è quell'azione di rafforzo ed integrazione della pubblicità volta a creare una relazione immediata per mezzo di incentivi sociali rivolti al consumatore (*consumers offers* o *consumer promotion*), al rivenditore (*trade offers*) o alla forza di vendita. Essa quindi diviene un canale di comunicazione mirata, diretta ad incrementare la *brand awareness* del prodotto/servizio e stimolarne l'acquisto. Tutto ciò comporta inevitabilmente costi maggiori per il rivenditore o per il produttore, i quali dovrebbero tuttavia essere ricompensati da ricavi più elevati derivanti dai contratti futuri.

Diversamente il produttore, essendo quell'attore commerciale che crea il bene/servizio, ha la facoltà di determinare il proprio impegno pubblicitario $a(t)$ e, in accordo con il *retailer*, il grado di supporto all'azione promozionale del dettagliante. La pubblicità (*advertising*) è quella forma di comunicazione a pagamento che viene commissionata da un soggetto per diffondere la propria offerta riguardo ad un prodotto o un servizio ed influenzare le scelte del consumatore finale (target) rispetto ad esso. Attraverso i mezzi di comunicazione tradizionali - quali giornali, riviste, spot televisivi, social network etc.- il produttore è in grado di persuadere ed indirizzare il comportamento del consumatore favorendo la cosiddetta *brand loyalty* (fedeltà di marca). Dunque, la pubblicità può assolvere principalmente a due funzioni: generare consapevolezza rispetto al prodotto/servizio, riducendo le asimmetrie informative con i clienti e consentendo loro di prendere decisioni razionali, e, in secondo luogo, svolgere un'attività di differenziazione, creando valore e riducendo il grado di sostituibilità del proprio prodotto e il livello di concorrenza con esso. Non è infatti importante che il prodotto sia effettivamente differente dalla concorrenza, ciò che importa è che sia percepito come tale dai clienti finali [9]. Dal momento che la pubblicità impatta direttamente sulle scelte di acquisto dei consumatori, ma rappresenta comunque un costo per l'operatore commerciale (*manufacturer*), quest'ultimo investirà in essa cercando di ottimizzare i propri profitti.

Molti autori hanno cercato di concretizzare tale contesto economico e di modellare analiticamente la Teoria dei Giochi Differenziali in un ambito di marketing, si veda ad esempio Eliashberg e Chatterjee (1985) [5], Rao (1990) [18] e Moorthy (1993) [14]. In aggiunta, altri studiosi hanno sviluppato modelli di *advertising strategies*: Jørgensen (1982) [10], Feichtinger et al. (1994) [7] e Erickson (1995) [6].

## 1.2 Il modello

Sia $G$ il valore del brand, determinato a partire dal modello di Nerlove-Arrow, rappresentante il livello di immagine di marca del bene. L'ipotesi sottostante a tale modello risiede nell'idea che lo stock di capitale pubblicitario investito da un operatore commerciale impatti indirettamente sulla funzione di vendite attraverso tale valore. Si suppone dunque che esso sintetizzi gli effetti degli esborsi pubblicitari attuali e passati sul consumatore e quindi sulla domanda del bene [15, p. 3]. Si suppone inoltre che esso evolva nel corso del tempo secondo la relazione

$$\dot{G} = a - \delta G(t), \qquad G(0) = G_0 \geq 0, \tag{1.1}$$

Dove $a \geq 0$ è la funzione di controllo per il produttore, ovvero la spesa pubblicitaria, $G(t)$ si ipotizza positivo per ogni $t$, mentre il parametro $\delta > 0$ è il costante grado di deprezzamento del valore del brand, che prevede la probabile perdita di efficacia della campagna propagandistica con il trascorrere del tempo. Ciò può essere dovuto ad una diminuzione del tasso di persuasione comunicativa sul comportamento dei soggetti coinvolti, all'evoluzione delle preferenze dei consumatori o del target clienti stesso. Nello specifico, l'equazione (1.1) risulta avere la stessa struttura del modello di accumulazione del capitale fisico, dove il termine di sinistra fa riferimento all'investimento netto mentre i termini di destra rappresentano, rispettivamente, l'investimento lordo e il grado di decadimento.

Seguendo il modello proposto da Buratto e Grosset [1], la funzione di vendite si suppone lineare in $G$ e che dipenda dallo sforzo promozionale intrapreso dal dettagliante $p \geq 0$, quale

$$Q(p, G) = \beta p + G \tag{1.2}$$

dove $\beta > 0$ rappresenta l'effetto della campagna promozionale sulle vendite.

Si assume inoltre che entrambe le funzioni di costo per la pubblicità e per la campagna promozionale siano quadratiche rispetto alla variabile dipendente,

$$C_M(a) = k_M a^2/2, \qquad C_R(p) = k_R p^2/2. \tag{1.3}$$

Tali equazioni identificano, rispettivamente, l'onere affrontato dal produttore ($M$) e dal dettagliante ($R$), dove $k_M, k_R > 0$ sono parametri di costo.

Sia $r \in [0, 1)$ il parametro che rappresenta il grado di partecipazione del produttore alla *promotion*: quando $r = 0$ il produttore non contribuisce alla spesa promozionale. Si assuma quindi un orizzonte operativo finito $[0, T]$, dove $T$ viene ipotizzato abbastanza piccolo tale che non è necessario considerare un tasso di sconto intertemporale ($\rho = 0$). Sotto tali condizioni, la funzione obbiettivo del produttore risulta essere:

$$J_M(a,r) = \int_0^T \pi_M(\beta p + G) - k_M a^2/2 - r k_R p^2/2 dt, \tag{1.4}$$

dove il primo termine dentro l'integrale rappresenta il profitto di $M$ e $\pi_M > 0$ equivale ai suoi profitti marginali. Il secondo termine identifica invece il costo pubblicitario, e il terzo termine rappresenta la percentuale di supporto del produttore nei confronti della spesa sostenuta dal dettagliante. Si noti inoltre che il livello di partecipazione $r$ entra nell'obbiettivo funzionale del *manufacturer*.

Per quanto riguarda il soggetto rivenditore, il funzionale obbiettivo è:

$$J_R(p,r) = \int_0^T \pi_R(\beta p + G) - (1-r) k_R p^2/2 dt, \tag{1.5}$$

dove il primo termine dentro l'integrale rappresenta il guadagno derivante dalle vendite del retailer ($\pi_R > 0$ identificano i profitti marginali), il secondo termine identifica invece il costo della *promotion* sostenuto dal rivenditore, assumendo che il grado di condivisione sia uguale a $r$.

Ricapitolando, le due funzioni obiettivo (1.4) e (1.5) congiuntamente all'equazione del moto (1.1), costituiscono un gioco differenziale di stato lineare con due giocatori, tre variabili di controllo $a(t), p(t), r$, e una variabile di stato $G(t)$.

Le caratteristiche principali del modello sono:

- la presenza di due giocatori, produttore e dettagliante, orientati alla scelta della quantità *advertising*, *promotion*, con i relativi costi (1.3), e al livello di collaborazione ($r$) che massimizzi i loro profitti;
- un orizzonte temporale finito ($[0,T]$), per cui il tasso di sconto intertemporale non viene considerato;
- l'esistenza di una funzione di vendite (1.2) lineare rispetto al livello di promozione e al valore del brand;
- la presenza di funzioni obiettivo per i due giocatori (1.4) e (1.5) a partire dai quali verrà svolta l'analisi per il controllo ottimo e la selezione della strategia dominante.

# 2

# Giochi differenziali ed Equilibrio di Nash Open Loop

Questo capitolo fornisce una breve panoramica della Teoria dei Giochi Differenziali. Successivamente, dopo aver caratterizzato gli elementi di un gioco differenziale, verrà analizzato il concetto di Equilibrio di Nash Open Loop in giochi a movimento simultaneo.

La Teoria dei Giochi è identificata come lo studio delle strategie, avente lo scopo di determinare matematicamente e logicamente le azioni che i cosiddetti "giocatori" dovrebbero intraprendere per conseguire la massimizzazione della propria utilità all'interno di una vasta gamma di "giochi". Si definisce gioco strategico qualsiasi interazione tra $N$ soggetti razionali, chiamati appunto "giocatori", ciascuno dei quali dispone di un insieme di $n_i$ possibili azioni o strategie. Se ciascun giocatore $i$ sceglie una strategia si otterrà un profilo, ovvero un N-pla di strategie, a cui corrisponderà un determinato risultato. Ciascun decisore ha un proprio ordine di preferenze sull'insieme dei possibili risultati, e la relazione di preferenza di un individuo può essere espressa attraverso una funzione di utilità (o *payoff*), associata a ciascun giocatore, che fa corrispondere valori più elevati a un maggior benessere. In particolare, le scelte che ogni giocatore effettua possono influenzare (positivamente o negativamente) le decisioni degli altri soggetti coinvolti nell'azione (*strategic interdependence*).
Esistono due tipi di interdipendenza: simultanea o sequenziale. In un gioco simultaneo i parte-

cipanti agiscono nello stesso istante, inconsapevoli delle scelte degli altri giocatori. In un gioco sequenziale, invece, i soggetti agiscono in sequenza, consci delle precedenti mosse degli avversari. I giochi possono essere rappresentati in forma normale o in forma estesa, in cui i giocatori possono agire in maniera collaborativa (giochi cooperativi) o in assenza di cooperazione (giochi non-cooperativi). In molti casi, inoltre, il gioco può svolgersi in un intervallo di tempo lungo il quale i partecipanti dovranno compiere una serie di scelte. Tali situazioni vengono chiamate "giochi differenziali", i quali si distinguono dai cosiddetti *one-shot game*, in cui ogni giocatore effettua simultaneamente una sola scelta. In entrambi i casi, e specificatamente nei giochi non cooperativi, gli individui tenderanno a comportarsi strategicamente, prendendo cioè in considerazione ciò che gli altri faranno. Rispetto a ciò, ogni giocatore, al fine di massimizzare il proprio *payoff*, metterà in pratica una ponderata strategia, ovvero una determinata regola decisionale che specifica come un giocatore dovrà comportarsi in ogni possibile circostanza in cui sarà chiamato a decidere. La soluzione di un gioco sarà dunque una descrizione sistematica dei risultati che possono emergere in un determinato tipo di gioco, partendo dalle ipotesi di razionalità e intelligenza dei giocatori. Infine, il concetto di soluzione forse più significativo e importante nella teoria dei giochi non cooperativi è quello di Equilibrio di Nash.

## 2.1 Teoria dei Giochi Differenziali

Nella pianificazione di qualsiasi tipo di sforzo commerciale è importante considerare che tutti i problemi collegati al marketing sono dinamici e coinvolgono considerazioni strategiche. La maggior parte degli strumenti di marketing hanno effetti che si prolungano oltre il periodo corrente e le scelte di un operatore commerciale finiscono per influenzare anche le scelte degli altri *competitors*. La Teoria dei Giochi, poste talune ipotesi specifiche, risulta dunque adatta a concettualizzare formalmente problemi di cooperazione e predire una possibile soluzione per tali situazioni.

Stando alla definizione data da Jørgensen e Zaccour in [12, Capitolo 2 pag. 5], un gioco differenziale (o dinamico) "*essentially is a game in extensive form, being played in continuous time*". I giochi differenziali sono dunque giochi dinamici dove osservazioni e decisioni vengono prese in tempo reale e derivano il loro nome dal fatto che l'evoluzione del sistema viene modellato attraverso l'utilizzo di equazioni differenziali.

Considerando un orizzonte temporale finito $[0, T]$, e ipotizzando per semplicità il caso particolare che vede la presenza di due soli giocatori ($N = 2$), sia $x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ la funzione che descrive lo stato del sistema, la quale evolve nel tempo secondo l'equazione differenziale

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t, u_1(t), u_2(t)), \qquad x(0) = x_0, \tag{2.1}$$

dove $u_i(t)$, $i \in \{1, 2\}$, rappresenta la funzione di controllo attivata dall'i-esimo giocatore al tempo $t$. Essa rappresenta l'insieme delle azioni che quest'ultimo sceglie di intraprendere e dipende essa stessa dal tempo. L'insieme di tutte le possibili azioni disponibili al tempo $t$, se lo stato del sistema è pari a $x$, è dato da $U(x, t)$. Ciò significa che il *decision maker* dovrà obbedire al vincolo

$$u(t) \in U(x(t), t).$$

L'equazione (2.1) implica che il tasso di cambiamento dello stato del sistema dipende dalla posizione $(x(t), t)$ del sistema e dalle funzioni di controllo dei due giocatori ($u_1, u_2$). Si noti che il *payoff* del giocatore $i$ dipenderà non solo dalla propria funzione di controllo, ma anche dalla traiettoria di controllo scelta dal suo avversario. Ciò delinea una delle caratteristiche fondamentali della Teoria dei Giochi: l'esistenza di un certo grado di interdipendenza strategica tra giocatori che emerge in ogni possibile gioco.

Data la posizione $(x(t), t)$ e la scelta da parte di ogni partecipante del proprio controllo $u_i(t)$, il giocatore $i$ riceverà un *payoff* pari a

$$L_i(x(t), t, u_1(t), u_2(t)).$$

In particolare, tale funzione può essere considerata un'utilità, un ricavo o un costo. Quest'ultima, nell'ambito dei giochi differenziali, non risulta una variabile esogena precedentemente data, ma dipende dalle strategie degli avversari.

Ipotizzando che il tasso di sconto intertemporale sia pari a zero ($\rho = 0$), ogni giocatore $i$ mira a massimizzare il proprio benessere funzionale, descritto dall'equazione

$$J_i(u_1(\cdot), u_2(\cdot)) = \int_0^T L_i(x(t), t, u_1(t), u_2(t))dt + S_i(x(T)), \tag{2.2}$$

dove il termine $S_i(x(T))$ rappresenta un valore terminale, che identifica il valore ottenuto dallo stato al tempo finale $T$. Tale termine viene incluso al fine di considerare un tempo finito, che si interromperà al tempo $T$. Ciò significa che ogni evento successivo non influenzerà le decisioni di nessun giocatore.

Ogni giocatore $i$ desidererà, dunque, massimizzare il suo funzionale obiettivo, dato da (2.2), attraverso la scelta di un controllo ottimo $u_i(\cdot)$ per $t \in [0, T]$.

Al fine di descrivere completamente l'azione, è necessario specificare la disponibilità informativa di cui ogni giocatore è in possesso al tempo $t$ e su quali informazioni l'azione è basata. Pertanto, strutture informative differenti avranno come risultato un'ampia gamma di giochi differenziali.

In ogni istante temporale, il giocatore $i$ è tenuto a scegliere un valore per la sua variabile di controllo $u_i(\cdot)$, e si suppone che quest'ultimo agisca conformemente ad una determinata strategia, ovvero ad una regola decisionale che permette di selezionare un'azione in relazione alle informazioni disponibili, e che verrà indicata con $\varphi_i$. Tale scelta strategica si ipotizza verrà delineata al tempo $t = 0$.

Di seguito, verranno descritti due casi differenti, i quali si distinguono in base alle informazioni possedute da ogni partecipante, in particolare e rispettivamente, l'attuale stato del sistema e le variabili di controllo adottate dagli altri giocatori.

**CASO 1 (Strategie Markoviane o Feedback):** Il giocatore $i$ ha la possibilità di osservare lo stato del sistema $x(t)$, tuttavia non possiede ulteriori informazioni riguardo le strategie degli altri giocatori e, in particolare, non è in grado di prevedere le azioni future dei suoi concorrenti. Esso sceglierà dunque la sua strategia in accordo con la relazione $u_i(t) = \varphi_i(x(t), t)$. Ciò significa che il giocatore $i$ osserverà la posizione $(x(t), t)$ del sistema, e successivamente sceglierà la propria azione in accordo con la regola decisionale $\varphi_i$.

**CASO 2 (Strategie Open Loop):** In questo caso il giocatore non ha la possibilità di osservare né lo stato del sistema, né le strategie intraprese dai propri avversari. Tale strategia è definita dunque *Open Loop*, per cui l'unico fattore che può influenzare la scelta è il tempo, unica variabile, in aggiunta alle condizioni iniziali, di cui ogni agente è a conoscenza. Di conseguenza, la funzione di controllo dipenderà solo dall'istante temporale ($u_i(t) = \varphi_i(t)$) e la sua scelta sarà predeterminata per ogni $t$.

Una strategia *Open Loop* è dunque una degenerazione del caso precedente ed è caratterizzata da una minore flessibilità, dal momento che necessita di un maggior grado di impegno.

## 2.2 Equilibrio di Nash Open Loop

Tale sezione farà riferimento al lavoro di Grosset [8].

La soluzione fondamentale di un gioco differenziale non-cooperativo è chiamata Equilibrio di Nash. Questo concetto modella sostanzialmente una sorta di "stato stazionario" ottimale, rispetto al quale nessun giocatore ha interesse a deviare unilateralmente. In generale, in tale equilibrio, la strategia scelta da ogni agente è la migliore risposta alle strategie effettivamente scelte dagli altri giocatori. Quando il giocatore $i$ si aspetta che gli altri $N-1$ giocatori adottino le loro strategie ideali, in accordo con l'Equilibrio di Nash, allora l'$i$-esimo giocatore non potrà far altro che scegliere esso stesso la sua strategia ottimale alla Nash.

Si ipotizzi di studiare un gioco differenziale non cooperativo con due partecipanti, definito da (2.2), dove lo stato del sistema si evolve secondo l'equazione (2.1).

**Definizione 2.2.1** *Una combinazione di funzioni di controllo dipendenti solo dal tempo* $(u_1^N(t),$ $u_2^N(t))$ *costituisce un Equilibrio di Nash se e soltanto se per ogni possibile controllo* $u_i(t)$

$$J_i[u_i^N(t), u_j^N(t)] \geq J_i[u_i(t), u_j^N(t)], \tag{2.3}$$

*vale per* $i, j \in \{1, 2\}$ *e* $i \neq j$.

La definizione (2.2.1) dimostra che nessun giocatore può aumentare il proprio benessere alterando marginalmente la propria strategia: nel caso specifico analizzato in questo elaborato, dove $N = 2$, è necessario risolvere simultaneamente due problemi di ottimo per ottenere un Equilibrio di Nash. Tuttavia, non sempre è possibile individuare un punto che rispetti che condizioni precedentemente descritte.

In un gioco differenziale non cooperativo viene introdotto inoltre il concetto di Equilibrio di Nash Open Loop ("ONLE" in breve), che identifica quella determinata combinazione di strategie ottime per ogni giocatore, le quali vengono determinate in un contesto interattivo dove i partecipanti non sono in grado di osservare ciò che verrà scelto dai propri avversari, e l'unica variabile che può influenzare le loro decisioni è il tempo.

Il Principio di Massimo di Pontryagin ("PMP") [4, Capitolo 3 p. 46], quando soddisfatto, fornisce le condizioni necessarie per dimostrare l'ottimalità delle soluzioni e può trovare diverse applicazioni in campo economico e della scienza manageriale. Tale principio tuttavia, nonostante assicuri che la funzione di controllo $u(\cdot)$ soddisfi le condizioni di primo ordine - tali per cui la derivata prima della funzione obiettivo $(\partial H_i / \partial u_i)$ si annulla nel punto di massimo -, non implica necessariamente che identifichi un percorso ottimale per il giocatore. Conseguentemente, il "PMP" non garantisce un requisito di sufficienza per l'ottimalità delle soluzioni, ma solo delle

condizioni necessarie.
In seguito verranno riportati analiticamente i passaggi per la risoluzione dei controlli di ottimo.

Si assuma che, per ogni $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^N$ e per ogni $i, j \in \{1, 2\}$ sia data la funzione Hamiltoniana del giocatore $i$

$$H_i(t, x, u_i, \lambda_i; u_j) = L_i(t, x, u_i, u_j) + \lambda_i f(t, x, u_1, u_2). \tag{2.4}$$

Tale funzione obiettivo, secondo il Principio di Massimo di Pontryagin, deve necessariamente raggiungere un punto di minimo o massimo tra tutti i controlli ammissibili, in relazione al tipo di problema e alla convenzione sul segno utilizzato per definire la funzione.

Il primo passo da compiere è trovare la funzione Hamiltoniana massima per ogni giocatore:

$$u_i^{\#}(t, x, \lambda_i; u_j) = \arg\max_{u_i} H_i(t, x, u_i, \lambda_i; u_j). \tag{2.5}$$

Quest'ultima rappresenta l'insieme di tutti i valori per cui $H_i$ raggiunge i suoi valori massimi, e tale operazione introduce una funzione $u_i^{\#}$ ben definita. Inoltre, l'equazione (2.5) delinea il fatto che, per ogni istante $t$, ogni giocatore sceglie la propria strategia al fine di ottimizzare il proprio guadagno istantaneo, e questa scelta è unica.
Successivamente, al fine di sviluppare il problema di ottimizzazione, è necessario definire il controllo ottimo $u_i^{\#}$ per ogni giocatore nonché la corrispondente traiettoria. Lo step successivo, dunque, sarà la risoluzione del seguente sistema

$$\begin{cases} u_i = u_i^{\#}(t, x, \lambda_i; u_j) \\ u_j = u_j^{\#}(t, x, \lambda_j; u_i) \end{cases} \tag{2.6}$$

dove $u_i$ e $u_j$ risultano sconosciute.
Tale sistema avrà come unica soluzione

$$(u_i^{OL}(t, x, \lambda_i, \lambda_j), u_j^{OL}(t, x, \lambda_i, \lambda_j)), \tag{2.7}$$

ovvero l'intersezione tra i due problemi di massimizzazione, in quanto, al fine di ottenere la soluzione ottimale, è necessario che entrambi i giocatori ottimizzino le proprie funzioni di controllo, anche in relazione all'interdipendenza strategica tra i concorrenti.
In seguito, dati $i, j \in \{1, 2\}$ e $i \neq j$, sarà costruito il seguente problema del valore limite a due

punti (*Two-point Boundary Value Problem*)

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, u_1^{OL}(t, x, \lambda_i, \lambda_j), u_2^{OL}(t, x, \lambda_i, \lambda_j)) \\ x(0) = x_0 \\ \dot{\lambda}_i = -\frac{\partial H_i}{\partial x}(t, x, u_i^{OL}(t, x, \lambda_i, \lambda_j), \lambda_i; u_j^{OL}(t, x, \lambda_i, \lambda_j)) \\ \lambda_i(T) = \frac{\partial S_i}{\partial x}(x(T)) \end{cases} \tag{2.8}$$

Tale problema si compone di $2n$ equazioni differenziali ordinarie con $n$ condizioni iniziali e finali (nel caso specifico dell'elaborato, il sistema si comporrà di quattro equazioni). In aggiunta, se si considera un orizzonte temporale finito $T$, non esistono valori di recupero e il valore di $x(T)$ non risulta vincolato, la condizione trasversale per la variabile aggiunta $\lambda_i$ diviene $\lambda_i(T) = 0$. La soluzione di tale sistema sarà unica, tale $(x^*(t), \lambda_1^*(t), \lambda_2^*(t))$.
I sistemi (2.5), (2.6), (2.8), rappresentano le condizioni necessarie per il conseguimento di un Equilibrio di Nash Open Loop.

Infine, è essenziale definire una condizione necessaria ma sufficiente per il conseguimento di un "OLNE": la concavità della funzione $H_i(t, x, u_i, \lambda_i^*(t); u_j^{OL}(t, \lambda_i^*(t), \lambda_j^*(t)))$, che deve valere per ogni $t \in [0, T]$ e per ogni $i, j \in \{1, 2\}$ con $i \neq j$. Tale requisito risulta necessario al fine di stabilire se una determinata coppia $(x(t), u(t))$, candidata ad essere una soluzione ottima, sia effettivamente la scelta ideale per la massimizzazione della funzione Hamiltoniana di ogni giocatore.

Nella determinazione di un Equilibrio di Nash Open Loop la struttura informativa del gioco differenziale è implicitamente conosciuta. Per questo motivo si assume che ogni giocatore conosca lo stato iniziale del sistema $x_0$, ma che non abbia la possibilità di osservare lo stesso dopo tale istante temporale.

Riassumendo, per ottenere un Equilibrio di Nash Open Loop è fondamentale che

- valga la condizione di massimizzazione delle funzioni Hamiltoniane. Ossia, per ogni $i, j \in \{1, 2\}$ e per ogni istante $t \in [0, T]$ in cui tutti i controlli sono continui, sia:

$$u_i(t) \in \arg\max_{u_i} H_i(t, x, u_i, \lambda_i; u_j);$$

- per ogni $i, j \in \{1, 2\}$ e per ogni istante $t \in [0, T]$, sia

$$\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial H_i}{\partial x}(t, x, u_i^{OL}(t, x, \lambda_i, \lambda_j), \lambda_i; u_j^{OL}(t, x, \lambda_i, \lambda_j));$$

- per ogni $i, j \in \{1, 2\}$ valga
$$\lambda_i(T) = \frac{\partial S_i}{\partial x}(x(T));$$
- la funzione $H_i(t, x, u_i, \lambda_i^*(t); u_j^{OL}(t, \lambda_i^*(t), \lambda_j^*(t)))$ sia differenziabile con continuità e concava per ogni $i, j \in \{1, 2\}$ e per ogni $t \in [0, T]$.

In tal modo, la soluzione risultante sarà un Equilibrio di Nash Open Loop.

# 3

# Assenza di cooperazione

Come dichiarato da J$\phi$rgensen e Zaccour in [12, Capitolo 1, pag. 2] "*A noncooperative game is a strategic situation in which decision makers (players) do not make binding agreements to cooperate; they act independently and are concerned only with the satisfaction of their individual objectives*". Tale definizione chiarisce il fatto che, in un gioco non cooperativo, si assume che la semplice comunicazione fra giocatori non sia permessa e questi ultimi non stipulino accordi vincolanti fra di loro, ma agiscano indipendentemente l'uno dall'altro, a prescindere dal fatto che i loro obiettivi siano confliggenti o comuni e possano quindi avere interesse ad accordarsi. Questa struttura di giochi differenziali non cooperativi, in generale, può essere osservata in molti problemi di marketing, in quanto la base teorica e la sua applicazione, alla luce di particolari supposizioni, riescono ad interpretare in maniera puntuale la realtà di tali situazioni conflittuali. La letteratura economica si è confrontata spesso con tali tematiche, tentando di applicare, in maniera generale, la Teoria dei Giochi Differenziali a diversi contesti economici e manageriali. Si veda, ad esempio, il lavoro di Case (1979) [2], il quale fu probabilmente il primo autore che contribuì alla presentazione dell'argomento; Petit (1990) [16], il quale affrontò i giochi differenziali e le loro applicazioni macroeconomiche; e Clemhout e Wan (1994) [3], i quali hanno provveduto ad un riassunto delle Teoria dei Giochi in economia. Tali lavori si riferiscono principalmente a giochi differenziali non cooperativi, anche se, tuttavia, esiste ancora un ampio margine di studio.

Di seguito, facendo riferimento alla definizione data nella sezione (2.1) di gioco differenziale, questo capitolo si concentrerà nello specifico sui giochi non cooperativi e, più precisamente, si assumerà che ogni partecipante (*retailer* e *manufacturer*) determini indipendentemente la propria strategia propagandistica. Di conseguenza, il produttore non attuerà alcuno sforzo al fine di supportare l'impegno pubblicitario del dettagliante.

## 3.1 Giochi non cooperativi: brevi cenni

L'unità di analisi di un gioco non cooperativo è il singolo giocatore, il quale, in maniera autonoma, mira a compiere le scelte migliori per sé stesso al fine di massimizzare la propria utilità date le regole del gioco e i vincoli posti dall'interazione strategica con gli avversari. Conseguentemente, non è possibile stabilire *ex-ante* accordi vincolanti fra partecipanti che *ex-post* potrebbero essere infranti.
Per descrivere correttamente un gioco non cooperativo è necessario conoscere:

- il numero dei giocatori (cioè degli individui coinvolti);
- le regole del gioco: chi decide, le opzioni disponibili, le informazioni a disposizione dei partecipanti ecc…
- il *payoff* ottenuto da ciascun giocatore, in termini di utilità, per ogni possibile esito del gioco.

Uno degli esempi più classici per questa tipologia di giochi è il cosiddetto "Dilemma del prigioniero", proposto negli anni cinquanta del XX secolo da Albert Tucker. Di seguito verrà proposta una breve descrizione di quest'ultimo per una migliore comprensione della teoria appena illustrata.

**Esempio 3.1.1** (Il Dilemma del prigioniero)

Due individui, accusati di aver commesso un reato sono detenuti in celle separate, senza la possibilità di comunicare fra di loro. Ad ognuno di essi vengono concesse due scelte: collaborare ($C$), o non collaborare ($NC$). La scelta di ciascuno dei due influenzerà anche il destino dell'altro: se entrambi confessano, saranno condannati a 5 anni di prigione; se solo uno dei due confessa, accusando l'altro, al primo verrà concessa la libertà, mentre il secondo dovrà scontare 10 anni di carcere; infine, se nessuno dei due non collabora, la pena sarà ridotta per entrambi a 1 anno. La situazione può essere schematizzata attraverso la seguente bimatrice:

| $\downarrow 1 \quad \overrightarrow{2}$ | $C$ | $NC$ |
|---|---|---|
| $C$ | $(5,5)$ | $(0,10)$ |
| $NC$ | $(10,0)$ | $(1,1)$ |

**Tabella 3.1:** Rappresentazione del gioco

In questo esempio risulta chiaro come in una situazione di non cooperazione i due prigionieri siano portati razionalmente a scegliere entrambi per il confessare, anche se, potendo collaborare, a entrambi sarebbe convenuta la strategia alternativa.

## 3.2 Assenza di cooperazione: soluzioni ottime

Riprendendo il modello descritto inizialmente nella sezione (1.2), verrà ora assunto che il *manufacturer* ($M$) non provveda a contribuire finanziariamente allo sforzo pubblicitario compiuto dal rivenditore ($R$). Conseguentemente, il costo promozionale $p(t)$ sarà sostenuto interamente dal *retailer*. Ciò significa che il grado di partecipazione alla pubblicità $r$ sarà un valore costante uguale a zero nelle formule (1.4) e (1.5). In tal modo, le decisioni dei due giocatori divengono funzione solamente dello stato del sistema, ovvero dell'equazione di vendita (1.2), e dunque del valore del brand $G$.
Dato un intervallo di tempo finito $[0, T]$ e un fattore di sconto intertemporale nullo ($\rho = 0$), il problema di ottimizzazione diviene il seguente:

$$\begin{aligned}
&\max J_M(a,r) = \int_0^T \pi_M(\beta p + G) - k_M a^2/2dt \\
&\max J_R(p,r) = \int_0^T \pi_R(\beta p + G) - k_R p^2/2dt \\
&\text{s.t.} \quad \dot{G} = a - \delta G(t), \quad G(0) = G_0 \geq 0
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Dato tale problema, in assenza di ogni collaborazione fra i due soggetti coinvolti, si riuscirà ad ottenere un Equilibrio di Nash Open Loop così come caratterizzato nella seguente proposizione.

**Proposizione 3.2.1** *Si consideri il problema (3.1). Esso identifica un gioco differenziale non cooperativo tra produttore (M) e dettagliante (R), dove $M$ determina il proprio grado di advertising $a \in L^2([0,T],[0,+\infty])$, al fine di massimizzare il suo funzionale obbiettivo $J_M(a,0)$, e $R$ determina la propria funzione di costo per la promozione del suo brand $p \in L^2([0,T],[0,+\infty])$, per massimizzare $J_R(p,0)$. Allora, l'unico Equilibrio di Nash Open Loop in assenza di coope-*

*razione risulta essere:*

$$a^{NC}(t) = \frac{\pi_M}{k_M}\frac{(1 - e^{\delta(T-t)})}{\delta}, \tag{3.2}$$

$$p^{NC}(t) = \frac{\pi_R}{k_R}\beta. \tag{3.3}$$

Nel seguito della sezione verranno riportati i passaggi matematici che portano alla definizione dell'equilibrio (3.2) e (3.3).

**Dimostrazione.** Si consideri il problema di ottimizzazione (3.1) e si analizzi tale problema per il primo giocatore (produttore $M$) definendone la funzione Hamiltoniana

$$H_M = \pi_M(\beta p(t) + G) - k_M\frac{a^2}{2} + \lambda_M(a - \delta G), \tag{3.4}$$

differenziabile con continuità e strettamente concava in $a$ per ogni $t \in [0, T]$. Da quest'ultima si ricavi la derivata parziale rispetto ad $a$:

$$\frac{\partial H_M}{\partial a} = -k_M a + \lambda_M.$$

Successivamente, applicando le condizioni del primo ordine, la funzione Hamiltoniana risulterà avere un unico punto di massimo, corrispondente a

$$a^{NC} = \frac{\lambda_M(t)}{k_M}, \tag{3.5}$$

dove l'equazione aggiunta del produttore $\lambda_M$ soddisfa il problema differenziale del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_M = -\frac{\partial H_M}{\partial G} = -(\pi_M - \lambda_M\delta) \\ \lambda_M(T) = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

La primitiva del coefficiente di $\lambda_M(t)$, chiamato $\psi(t)$, è una funzione $\Psi(t)$ tale per cui $\Psi(t)' = \psi(t)$, ovvero, nello specifico

$$\psi(t) = -\delta$$
$$\Psi(t) = \int \psi(t)dt = -\int \delta dt = -\delta t.$$

La famiglia di funzioni che risolve l'equazione differenziale risulta quindi essere:

$$\begin{aligned}\lambda_M(t) &= e^{\delta t}[c + \int -\pi_M e^{-\delta t} dt] \\ &= e^{\delta t}[c - \pi_M \int e^{-\delta t} dt] \\ &= e^{\delta t} c - \frac{\pi_M}{\delta}.\end{aligned}$$

Risolvendo il sistema per $\lambda(T) = 0$, verrà definita la variabile incognita $c$, specifica per tale problema

$$e^{\delta T} c - \frac{\pi_M}{\delta} = 0,$$

da cui risulta $c = \frac{\pi_M}{\delta} e^{-\delta T}$.
In tal modo si otterrà la funzione $\lambda_M(t) = \frac{\pi_M}{\delta}(e^{\delta(t-T)} - 1)$, la quale, sostituita in (3.5) condurrà all'equilibrio (3.2) precedentemente riportato. Quest'ultimo risulterà strettamente decrescente a causa dell'orizzonte infinito.
Dal momento che la concavità dell'Hamiltoniana (3.4) in $(a, G)$ è rispettata, in quanto la sua Hessiana è costante e uguale a

$$\begin{pmatrix} -k_M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

allora le condizioni necessarie risultano anche sufficienti alla definizione dell'unico punto di massimo e quindi dell'equilibrio.
Analogamente, si consideri ora l'Hamiltoniana del rivenditore ($R$):

$$H_R = \pi_R(\beta p + G) - k_R \frac{p^2}{2} + \lambda_R(a(t) - \delta G), \tag{3.7}$$

strettamente concava sia in $p$, sia rispetto allo stato del sistema $G$. Successivamente, per le condizioni del primo ordine, risulterà:

$$\frac{\partial H_R}{\partial p} = \beta \pi_r - k_R p = 0,$$

da cui si ricaverà la soluzione (3.3) il quale appare indipendente da $\lambda_R$. Tale risultato è ottimo in quanto, data la concavità di (3.7) in $(p, G)$ e considerando l'Hessiana

$$\begin{pmatrix} -k_R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

le condizioni necessarie divengono anche sufficienti.

Successivamente, al fine di risolvere il problema di ottimizzazione, sarà necessario sviluppare il sistema composto dalle equazioni (3.2) e (3.3). Tuttavia queste ultime appaiono indipendenti fra di loro, in quanto non esistono costanti $c_1, c_2$ non tutte nulle tali per cui $c_1 a(t) = 0$ e $c_2 p(t) = 0$. Conseguentemente, da ciò deriva che le due soluzioni trovate rappresentano un Equilibrio di Nash Open Loop.

## 3.3 Assenza di cooperazione: conclusioni

In riferimento al modello descritto, in assenza di un accordo di ripartizione della spesa pubblicitaria si è dimostrato che il gioco differenziale tra produttore e dettagliante degenera in una coppia di problemi di controllo ottimo totalmente distinti l'uno dall'altro. Ciò significa che ogni individuo sceglierà il proprio ammontare di spesa promozionale o pubblicitaria senza considerare la strategia adottata dal proprio avversario, ma facendo riferimento solo al profitto che da essa ne potrà ricavare. In particolare, mentre per il dettagliante la spesa promozionale sarà costante, il *manufacturer* sarà condizionato dall'andamento del valore del brand ($G$). Questo risultato potrebbe essere dovuto al fatto che, in tale contesto, grazie alla pubblicità, esso riuscirebbe a raggiungere direttamente i consumatori attraverso informazioni chiare e trasparenti su prezzi e qualità del prodotto. Egli è dunque influenzato dalla percezione di quest'ultimo da parte del cliente. In relazione alle ipotesi del modello, potrebbe quindi esistere una correlazione tra potere di mercato e pubblicità: grandi imprese che dedicano cospicui capitali per la promozione dei propri prodotti tenderanno a rimanere grandi nel mercato, ovvero aumentare la spesa pubblicitaria al crescere del valore del proprio marchio, e viceversa per le piccole e medie imprese.
Una forma propagandistica che si è diffusa largamente negli ultimi anni è il *direct marketing*, ovvero un sistema interattivo di marketing che utilizza il canale elettronico per fidelizzare i propri clienti, in modo da comunicare loro informazioni sui prodotti e sull'organizzazione, così che essi possano acquistarli tramite *e-commerce*. Tale processo potrebbe eliminare la necessità di fare ricorso ad intermediari commerciali, ponendosi in diretto contatto con il consumatore e tagliando i costi aggiuntivi che la vendita dei prodotti comporterebbe.
Di conseguenza i rivenditori si trovano ora in una posizione difficile: da un lato hanno il presen-

timento che le promozioni danneggino la marginalità e generino un lavoro extra per l'impresa, tuttavia, dall'altro temono che ridurre gli sconti deprima i volumi di vendita. Le dinamiche promozionali legate allo sconto percentuale o al prodotto omaggio non sono più sufficienti e le offerte *mass market* calibrate sulla totalità dei consumatori, non individualmente sul singolo cliente, stanno perdendo gradualmente di efficacia. *Retail Marketing* significa oggi comprendere e interpretare gli effetti della trasformazione digitale e padroneggiarne le dinamiche, evitare di focalizzarsi sul singolo prodotto e concentrarsi sulla valorizzazione del brand. Il costo promozionale per il dettagliante infatti sarà costante e, nel modello, l'unico modo per incrementare la propria utilità sarà aumentare il fatturato attraverso la stimolazione delle vendite ($Q(p, G)$).

Osservando la realtà economica che ci circonda, la pubblicità e la promozione pertanto potrebbero divenire delle armi di competizione tra soggetti economici. Per tale ragione, è necessario che tali dinamiche non sfocino in una sorta di "guerra", poiché esse porterebbero solamente ad uno spreco di profitti: ogni giocatore punterebbe unicamente a sovrastare l'altro, generando un livello eccessivo di pubblicità/promozione. Come risultato, ciò non genererebbe alcun vantaggio, né per i concorrenti né per i consumatori finali. L'*advertising* e la *promotion*, nel caso specifico dell'elaborato, dovrebbero dunque essere rivolte solamente alla valorizzazione del marchio, in modo tale da applicare prezzi più elevati, e non a sottrarre clientela al proprio avversario.
Tale dinamica verrà analizzata più concretamente nel capitolo 4.

# 4
# Collaborazione

Negli ultimi anni è emersa un'assidua necessità di allargare il raggio d'azione nel proprio mercato di riferimento in modo tale da mantenere la propria posizione e farsi strada tra la concorrenza sempre più incalzante. Nasce dunque da qui l'esigenza di affidarsi a figure di supporto per la gestione della vendita diretta dei propri prodotti (strategia *push*) per aumentare le vendite, attirare nuovi clienti e mantenere la fidelizzazione con i vecchi.
Nel seguito del capitolo verrà descritto una rete del valore per la quale produttore e dettagliante collaborano fra di loro, condividendo lo sforzo promozionale del rivenditore.

## 4.1 Strategia *push*

Nell'era moderna del *digital marketing* diretto diviene essenziale sapere come promuovere nella maniera più diretta ed efficace i propri prodotti e servizi per avere un business di successo. Ciò significa individuare le strategie di marketing più adatte alla valorizzazione del proprio brand, ovvero l'insieme combinato delle azioni mirate ad analizzare le offerte del mercato, le variabili ambientali e le risorse interne disponibili. Si tratta dunque di incentivare la spinta promozionale per attirare nuovi clienti.
Esistono due *marketing strategies* principali: la *pull strategy* e la *push strategy*. La prima di queste ultime consiste nell'orientamento della promozione del prodotto/servizio direttamente verso il cliente finale con lo scopo di fidelizzarlo. Diversamente, una strategia *push* si concen-

tra sulla promozione del proprio business tramite l'ausilio di alcuni intermediari commerciali. Nel marketing, la promozione delle vendite è considerata l'azione di rafforzo e di integrazione alla pubblicità e alla vendita stessa nei modelli strategici di tipo *push*. Esistono due tipologie di promozione che si distinguono in base al destinatario, a seconda cioè che siano rivolte al consumatore (con l'obbiettivo dell'acquisto del prodotto) o al rivenditore. Ciò viene commpiuto al fine di piazzare il prodotto nei vari punti vendita o di ottenere una forma di collaborazione con l'esercente. Esempi di *push strategy* sono: il *telemarketing/teleselling*, il *direct e-mail marketing* o la visita personale. Tali approcci - *pull* e *push strategy* - non si escludono a vicenda ma dovrebbero essere utilizzate in maniera equilibrata.

L'elaborato si concentrerà su una strategia di tipo *push* in quanto considera un canale distributivo indiretto a breve, formato da un produttore e un dettagliante. Questi ultimi si suppone collaborino per la valorizzazione del target. Tale scenario potrebbe risultare particolarmente indicato per le *start up*, le quali hanno necessità di farsi conoscere e di costruirsi una solida rete attorno al proprio brand, o per quelle imprese che lavorano con prodotti ad alta commerciabilità e che devono quindi far risaltare la propria proposta di business.
I vantaggi di questa tipologia di canale di distribuzione, che si avvale dell'intermediazione di un dettagliante, sono:

- un contatto più diretto con il mercato, che consente di seguire da vicino il consumatore;
- maggior pressione di vendita del proprio prodotto;
- assunzione di specialisti, propensi alla collaborazione, che si occupano di prezzi, promozioni, merchandising, controllo delle scorte e previsioni di vendita;
- spese di gestione contenute;
- maggior controllo del prodotto/servizio.

Perciò, se per l'impresa produttrice l'obbiettivo principale è quello di gestire adeguatamente il canale distributivo dei prodotti creando relazioni durature e stabili con le varie tipologie di intermediari commerciali nel lungo periodo, il fine ultimo della vendita al dettaglio è acquistare beni/servizi direttamente dal produttore per poi rivenderli al consumatore finale ricavandone il maggior profitto. Il ruolo del dettagliante consiste dunque nello organizzare al meglio la vendita dei prodotti e/o dei servizi offerti, cercando di promuovere al meglio il brand.
Tuttavia, questa categoria di vendita, comporta anche numerosi costi che potrebbero ripercuotersi sul consumatore finale e, in aggiunta, la concorrenza in tale ambiente è molto agguerrita.

## 4.2 Collaborazione

In un gioco cooperativo gli individui mirano a collaborare al fine di ottenere un risultato che giovi ad ognuno di essi [12]. Tale sarà dunque l'ipotesi sottostante alla seguente dimostrazione: produttore e dettagliante coordinano le proprie funzioni di costo al fine di massimizzare i propri profitti. Il *manufacturer* contribuisce alla promozione del prodotto, venduto al dettaglio dal *retailer*, attraverso un certo tasso fisso $r \in (0, 1)$. Si assume inoltre che l'accordo fra i due giocatori sia vincolante e venga stilato da una terza parte, estranea al contratto. Se per entrambi i partecipanti collaborare comporterà un maggior benessere, e quindi maggiori profitti, rispetto ad un'ipotesi di mancato accordo, essi sottoscriveranno il contratto e instaureranno una *parternship* promozionale.
Tale affermazione può essere sintetizzata come segue: dato un intervallo di tempo finito $[0, T]$ e un fattore di sconto intertemporale nullo ($\rho = 0$), nell'ipotesi in cui il produttore supporti la *promotion* ($p$) del rivenditore ad un tasso fisso $r \neq 0$, il problema di ottimizzazione diviene:

$$\begin{aligned}
&\max J_M(a, r) = \int_0^T \pi_M(\beta p + G) - k_M a^2/2 - r k_R p^2/2 dt \\
&\max J_R(p, r) = \int_0^T \pi_R(\beta p + G) - (1 - r) k_R p^2/2 dt \\
&\text{s.t.} \quad \dot{G} = a - \delta G(t), \quad G(0) = G_0 \geq 0
\end{aligned} \tag{4.1}$$

**Proposizione 4.2.1** *Si consideri il problema (4.1). Esso identifica un gioco differenziale non cooperativo tra produttore ($M$) e dettagliante (R), dove $M$ determina il proprio grado di advertising $a \in L^2([0, T], [0, +\infty])$, al fine di massimizzare il suo funzionale obbiettivo $J_M(a, r)$, e $R$ determina la propria funzione di costo per la promozione del suo brand $p \in L^2([0, T], [0, +\infty])$, per massimizzare $J_R(p, r)$. Allora, l'unico Equilibrio di Nash Open Loop in assenza di cooperazione è*

$$a^C(t) = \frac{\pi_M}{k_M} \frac{(1 - e^{\delta(T-t)})}{\delta}, \tag{4.2}$$

$$p^C(t) = \frac{\pi_R}{k_R} \frac{\beta}{(1 - r)}. \tag{4.3}$$

*L'accordo migliorerà sempre il benessere del rivenditore, in quanto egli sopporta minori costi, mentre i profitti del produttore aumenteranno se e soltanto se*

$$r < (1 - \pi_R/2\pi_M) \tag{4.4}$$

Nel seguito della sezione verranno riportati i passaggi matematici che conducono alla definizione (4.2.1).

**Dimostrazione.** Si consideri l'Hamiltoniana del produttore ($M$)

$$H_M = \pi_M(\beta p(t) + G) - k_M \frac{a^2}{2} - r k_R \frac{p(t)^2}{2} + \lambda_M(a - \delta G), \tag{4.5}$$

la quale dipende sia dal costo pubblicitario sostenuto dal *manufacturer* stesso ($a$), sia dalla spesa promozionale stabilita dal rivenditore.
Calcolandone la derivata parziale rispetto ad $a$ ($\partial H_M/\partial a$) e applicando le condizioni del primo ordine, per le quali $\partial H_M/\partial a = 0$, il risultato rispetto a (3.2) rimarrà invariato.

Diversamente, se si considera la funzione Hamiltoniana del dettagliante ($R$)

$$H_R = \pi_R(\beta p(t) + G) - (1 - r) k_R \frac{p^2}{2} + \lambda_R(a - G), \tag{4.6}$$

continua a differenziabile per ogni $t \in [0, T]$.
Sviluppando il problema di ottimizzazione, calcolando quindi la derivata parziale rispetto a $p$ e applicando le condizioni del primo ordine, la funzione $H_R$ risulterà avere come candidato al punto di massimo

$$p^C = \frac{\pi_R}{k_R} \frac{\beta}{(1 - r)}. \tag{4.7}$$

Quest'ultimo, data la concavità della funzione (4.6) in $(p, G)$, andrà a coincidere ance con il punto di ottimo per il problema di massimizzazione.
A questo punto è necessario chiedersi se i punti d'equilibrio (4.2) e (4.3) siano preferibili alle soluzioni trovate precedentemente in assenza di collaborazione. In primo luogo, la presenza di un accordo fra le parti, migliorerà incondizionatamente i profitti del *retailer*, in quanto, dato (4.3), l'esistenza di un livello di supporto $r > 0$ ridurrà inequivocabilmente il costo che egli dovrà sostenere per la spesa promozionale: al crescere di $r$, la funzione di controllo $p$ si riduce. Ciò significa che la disequazione $J_R(p^C, r) - J_R(p^{NC}, r) > 0$ vale per ogni $r \in (0, 1)$.
Al contrario, è necessario calcolare sotto quali condizioni il produttore riceverà un beneficio dalla collaborazione. Si tratterà quindi di stabilire per quali valori di $r$ vale la seguente condizione:

$$J_M(a^C, r) - J_M(a^{NC}, r) > 0. \tag{4.8}$$

La condizione (4.8) traduce la circostanza per la quale la funzione obbiettivo del produttore assume valori maggiori in presenza di un accordo tra le parti rispetto al benessere ottenuto in assenza di collaborazione, e la differenza tra i due *payoff* risulta quindi essere positiva. Date le funzioni obbiettivo, calcolate nei corrispondenti punti di equilibrio

$$
\begin{aligned}
J_M(a^C, r) &= \int_0^T \pi_M\left(\frac{\pi_R}{k_R}\frac{\beta^2}{(1-r)}\right) - k_M\left(\frac{\pi_M}{k_M}\frac{(1-e^{\delta(T-t)})}{\delta}\right)^2 - \frac{k_R r}{2}\left(\frac{\pi_R}{k_R}\frac{\beta}{(1-r)}\right)^2 dt,\\
J_M(a^{NC}, r) &= \int_0^T \pi_M\left(\frac{\pi_R}{k_R}\beta^2 + G\right) - k_M\left(\frac{\pi_M}{k_M}\frac{(1-e^{\delta(T-t)})}{\delta}\right)^2 dt,
\end{aligned}
$$

si sostituiscano queste ultime nella disequazione (4.8). Eseguendo gli opportuni calcoli, si arriverà alla condizione

$$
J_M(a^C, r) - J_M(a^{NC}, r) = \frac{rTk_R\pi_R\beta^2(2\pi_M(1-r) - \pi_R)}{2k_R(1-r)^2} > 0,
$$

dove i termini $(rTk_R\pi_R\beta^2)$ e $(2k_R(1-r)^2)$ risultano essere sempre maggiori di zero, in quanto formati da parametri positivi. Conseguentemente, la condizione (4.8) è soddisfatta se e soltanto se $2\pi_M(1-r) - \pi_R > 0$, dunque

$$
r < 1 - \frac{\pi_R}{2\pi_M}. \tag{4.9}
$$

In conclusione, il *payoff* del produttore in presenza di un accordo con il rivenditore sarà maggiore di quello ottenuto in caso di indipendenza tra le parti se e soltanto se vale la condizione (4.9). Diversamente, se $r > 1 - \frac{\pi_R}{2\pi_M}$, $M$ non accetterà l'accordo, mentre se $r = 1 - \frac{\pi_R}{2\pi_M}$ egli sarà indifferente alla scelta.

## 4.3 Collaborazione: conclusioni

In questa sezione si è dimostrato sotto quali condizioni di $r$, conformemente ad ipotesi specifiche, per un produttore possa essere conveniente contribuire allo sforzo promozionale di un rivenditore al fine di consolidare il valore del brand e ottenere maggior benessere. Tale requisito andrà a dipendere dai profitti marginali di entrambi i giocatori. Tali profitti, all'interno di un contesto economico, per definizione, dipenderanno dalla quota di mercato (*market share*) dei due individui, ovvero dal potere di mercato che essi riescono ad esercitare tra la concorrenza. Con potere di mercato si intende la possibilità di fissare il prezzo di vendita di un bene/servizio

al di sopra del suo costo marginale. Ciò sta a significare che maggiore è la *market share* di un soggetto economico, maggiori saranno anche i suoi profitti marginali. Nel caso specifico del modello, se un produttore possiede una grossa fetta di mercato, questo porterà conseguentemente ad un incremento della soglia di indifferenza tra cooperazione e non cooperazione, e viceversa, se la quota di mercato posseduta dal *manufacturer* è molto piccola, la convenienza a supportare il rivenditore si ridurrà, in quanto, essendo piccolo nel mercato, non riuscirebbe ad affrontare un costo elevato per la pubblicità e preferirà agire da solo, cercando di farsi strada tra la concorrenza per ottenere una quota di mercato più grande.
In considerazione del modello generale, per quanto riguarda il *retailer*, le condizioni si capovolgono: elevato potere di mercato significherebbe minor necessità di essere sostenuti nella spesa promozionale, mentre essere piccoli tra la concorrenza (ovvero ottenere profitti marginali inferiori) richiederebbe un grado più elevato di supporto da parte del produttore, richiedendo un maggiore sforzo da parte di quest'ultimo e alzando il grado di soglia di indifferenza.

In un gioco differenziale *Open Loop* - diversamente ad un gioco à la Stackelberg - non esistono giocatori *follower* o *leader*, ogni partecipante agisce contemporaneamente ai propri avversari. Nessuno può prevedere la strategia che verrà adottata dall'altro giocatore e l'unica variabile che può influenzare le scelte di questi ultimi è il tempo. Tuttavia, nell'ultimo scenario rappresentato, il produttore e il dettagliante stilano un accordo vincolante su $r$, e, mentre il rivenditore non esiterà a firmare, in quanto il supporto ridurrà in ogni caso il costo entrante nella funzione di profitto, il *manufacturer* valuterà la decisione in base al valore dello stesso $r$ propostogli in sede di accettazione del contratto.

In una rappresentazione semplificata e generale della realtà, come quella proposta dal modello, la promozione potrebbe non soltanto portare ad un incremento di profitti per entrambi gli individui, ma, investire in essa, permetterebbe inoltre di costruirsi una rete commerciale più ampia, incrementando il volume di vendita sia per il produttore, che venderà un maggior numero di prodotti ai diversi punti vendita o, attraverso l'*e-commerce*, anche al consumatore finale, sia per il dettagliante, il quale spenderebbe meno nella promozione, ma vedrebbe aumentare i ricavi totali derivanti dalle vendite, acquistando più merci dal produttore. Per cui: comunicare per vendere e per mantenere tale dittico nel lungo periodo.
Per concludere dunque, la condivisione di un'azione promozionale potrebbe essere vantaggiosa in quanto:

- incrementerebbe la *brand awareness* (conoscenza del prodotto/servizio): attraverso l'utilizzo dei media sarebbe possibile rendere note tutte le caratteristiche e le qualità del proprio brand;

- si diffonderebbero informazioni più trasparenti ed appropriate;
- si allargherebbe la rete e il target dei consumatori: più si promuove, più i clienti diventando consapevoli di ciò che acquistano e diventano maggiormente interessati al prodotto. Così facendo si creerebbe un passaparola operante esso stesso da pubblicità;
- fidelizzerebbe il cliente e quindi assicurerebbe vendite e acquisti stabili nel tempo ed economie di scala;
- creerebbe un rapporto di collaborazione duraturo e robusto tra produttore e dettagliante.

Tali sono dunque i vantaggi che, sotto determinate ipotesi, potrebbero derivare da una collaborazione tra le due parti prese in considerazione: nonostante i costi di gestione della rete del valore potrebbero essere più elevati, i giocatori riuscirebbero a ricavare un maggior guadagno/benessere e ottenere in tal modo un miglioramento ‘‘paretiano”, ovvero un aumento del *payoff* di un giocatore senza che questo vada a peggiorare il benessere dell’altro individuo. Nella realtà economica esistono diversi accordi di cooperazione che possono essere intrapresi tra produttori e dettaglianti, i quali hanno come scopi vari obbiettivi commerciali e comprendono chiaramente anche quello propagandistico. Un esempio di ciò possono essere le *slotting allowances* o *slotting fees*, o le quote *pay-to-stay*, ovvero delle tariffe applicate ai produttori da parte dei dettaglianti per vendere i loro prodotti, mantenerli all’interno dei propri negozi e, per l’appunto, per la promozione di questi ultimi.

# 5

# Conclusioni

Nel presente elaborato si è sviluppato, attraverso l'utilizzo di alcuni strumenti matematici concepiti per la risoluzione dei problemi di Controllo Ottimo, un modello economico di *advertising*, facendo perno sulla Teoria dei Giochi e, specificatamente, sui giochi differenziali.
Il modello descritto può essere annoverato tra i cosiddetti "*Toy Models*"- letteralmente "Modelli Giocattolo"- ovvero dei modelli semplificati della realtà, che permettono di manipolare più facilmente il mondo che ci circonda e di comprendere, in generale, meccanismi concretamente più complicati. Conseguentemente, tale lavoro permette di intuire a quale livello una cooperazione pubblicitaria, intrapresa tra produttore e dettagliante, possa essere proficua per entrambi i giocatori e quindi maggiormente vantaggiosa rispetto ad una condizione di indipendenza strategica alla luce di determinate e specifiche condizioni iniziali. Lo scopo di tale lavoro è stato dunque quello di analizzare, alla luce di diverse assunzioni, come possono cambiare le decisioni economiche dei singoli individui a seconda dei differenti scenari presi in considerazione. Ciò risulta particolarmente interessante poiché, se tali supposizioni vengono rispettate, si riuscirebbe a fornire analiticamente una risposta semplificata e generale ad un problema economico particolarmente attuale, quale la scelta del canale di distribuzione ottimale per la promozione pubblicitaria di un determinato brand.
Il Capitolo 1 ha presentato il modello generale, a cui rinvia l'intero elaborato, riprendendo i punti fondamentali del modello di Nerlow-Arrow e soffermandosi sull'introduzione del contesto economico di riferimento: un canale distributivo indiretto a breve. Nel secondo Capitolo,

differentemente, si è voluto descrivere brevemente il concetto di giochi differenziali e, più nello specifico, di Equilibrio di Nash Open Loop, per una comprensione integrale del modello. Ciò che è opportuno sottolineare, è che ci si è trovati di fronte ad un gioco differenziale dinamico, in cui un fattore fondamentale è l'evoluzione nel tempo del valore del brand, legata principalmente al rendimento decrescente dello sforzo pubblicitario. La campagna propagandistica può infatti perdere la sua efficacia persuasiva nei confronti dei consumatori, facendo dunque deprezzare proporzionalmente il valore del brand. I Capitoli successivi hanno lo scopo di descrivere i passaggi matematici che conducono alle scelte ottimali per i soggetti coinvolti, rispettivamente, in assenza di collaborazione e all'interno di un contesto cooperativo. I risultati ottenuti dimostrano che, a prescindere dal livello di supporto scelto dal produttore, la soluzione migliore per il *retailer* all'interno del modello sarà quella di collaborare. Tale esito non sorprende in quanto l'aiuto da parte del *manufacturer*, qualora non sia uguale a zero, diminuirà sistematicamente i costi che il suo avversario dovrà sostenere, aumentandone indirettamente i profitti. Contrariamente, la scelta del produttore dipenderà dal livello di sostegno alla campagna propagandistica del rivenditore ($r$): se inferiore ad una certa soglia, egli preferirà cooperare, in caso contrario la miglior alternativa sarà operare indipendentemente e affrontare unicamente un costo per pubblicizzare il proprio marchio. In aggiunta, egli sarà indifferente alla scelta se e soltanto se il grado di supporto promozionale sarà esattamente pari a tale valore limite. Quest'ultimo dipende esclusivamente dai profitti marginali di entrambi i giocatori, i quali risultano direttamente collegati con il potere di mercato dei due individui. Per il produttore, maggiore potere di mercato significa anche maggiore capacità di far fronte anche ad una spesa promozionale. Viceversa, se il rivenditore possiede una grossa fetta di mercato, non necessiterà di un aiuto eccessivo da parte del produttore, per cui quest'ultimo abbasserà il proprio livello di indifferenza nel supportare o meno l'azione promozionale del *retailer*.

Grazie alla descrizione di tale modello si è riusciti a rappresentare, indicativamente e in maniera generalizzata, come una decisione economica concreta possa essere gestita matematicamente e in modo analitico, rendendo più semplice il raggiungimento della scelta ottimale e della massimizzazione dei profitti per gli individui coinvolti.

# Bibliografia


[1] Buratto, A. & Grosset, L. (2019). Advertising and promotion in a marketing channel. *Applied Mathematical Sciences*, *13*(9), 405–413.

[2] Case, J. H. (1979). *Economics and the competitive process*. New York: New York University Press.

[3] Clemhout, S. & Wan Jr, H. Y. (1994). Differential games - economic applications. In R. Aumann & S. Hart (Eds.), *Handbook of game theory with economic applications*, volume 2 (pp. 801–825). Amsterdam: Elsevier.

[4] Dockner, E. J., Jorgensen, S., Van Long, N., & Sorger, G. (2000). *Differential games in economics and management science*. Cambridge: Cambridge University Press.

[5] Eliashberg, J. & Chatterjee, R. (1985). Analytical models of competition with implications for marketing: issues, findings, and outlook. *Journal of Marketing Research*, *22*(3), 237–261.

[6] Erickson, G. M. (1995). Differential game models of advertising competition. *European Journal of Operational Research*, *83*(3), 431–438.

[7] Feichtinger, G., Hartl, R. F., & Sethi, S. P. (1994). Dynamic optimal control models in advertising: recent developments. *Management Science*, *40*(2), 195–226.

[8] Grosset, L. (2014). A note on open loop nash equilibrium in linear-state differential games. *Applied Mathematical Sciences*, *8*(145), 7239–7248.

[9] Huang, J., Leng, M., & Liang, L. (2012). Recent developments in dynamic advertising research. *European Journal of Operational Research*, *220*(3), 591–609.

[10] Jørgensen, S. (1982). A survey of some differential games in advertising. *Journal of Economic Dynamics and Control*, *4*, 341–369.

[11] Jørgensen, S. & Zaccour, G. (2002). Time consistency in cooperative differential games. In G. Zaccour (Ed.), *Decision & control in management science: essays in honor of Alain Haurie*, volume 4 (pp. 349–366). Boston: Kluwer.

[12] Jørgensen, S. & Zaccour, G. (2004). *Differential games in marketing*. Boston: Kluer Academic.

[13] Leitmann, G. (1974). *Cooperative and non-cooperative many players differential games*. New York: Springer-Verlag.

[14] Moorthy, K. S. (1993). Competitive marketing strategies: Game-theoretic models. In J. Eliashberg & G. L. Lilien (Eds.), *Handbooks in operations research and management science*, volume 5 (pp. 143–190). Amsterdam: Elsevier.

[15] Nerlove, M. & Arrow, K. J. (1962). Optimal advertising policy under dynamic conditions. *Economica*, *29*(114), 129–142.

[16] Petit, M. L. et al. (1990). *Control theory and dynamic games in economic policy analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.

[17] Petrosjan, L. A. & Zenkevich, N. A. (1996). *Game theory*. Singapore: World Scientific.

[18] Rao, R. C. (1990). Impact of competition on strategic marketing decisions. In W. B. Day, G. & R. Wensley (Eds.), *The interface of marketing and strategy* (pp. 101–152). Greenwich: JAI Press.