UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Facoltà di Ingegneria

DIPARTIMENTO DI TECNICA E GESTIONE DEI SISTEMI INDUSTRIALI

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Gestionale

TESI DI LAUREA

SUL TRASPORTO OTTIMO DISCRETO: EQUIVALENZA TRA LE FORMULAZIONI DI MONGE E KANTOROVICH

Relatore: Prof.ssa Annalisa Massaccesi

Laureando: Matteo Mantovani

ANNO ACCADEMICO 2023/2024

To my optimal wife Phuong

And to my family

Abstract

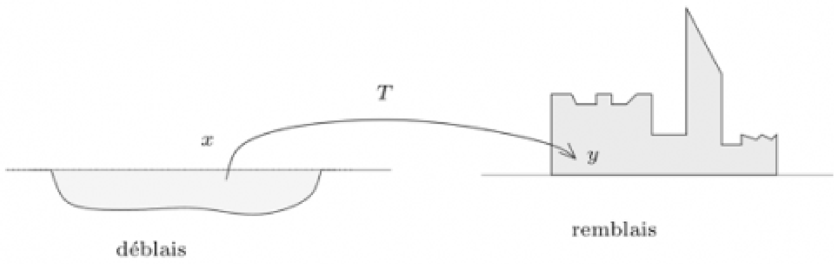
In questa tesi analizziamo il problema del trasporto ottimale discreto, ovvero il modo più efficiente di trasportare una distribuzione di massa in un'altra. Ci focalizzeremo sulle formulazioni di Monge e Kantorovich per il caso discreto e ne dimostreremo l'equivalenza. La tesi si sviluppa in tre capitoli principali: i primi due trattano concetti fondamentali di geometria convessa e culmineranno nella dimostrazione di due teoremi fondamentali per dimostrare l'equivalenza tra le formulazioni di Monge e Kantorovich; il terzo capitolo presenta il problema di Monge-Kantorovich e fornisce alcuni esempi applicativi al caso discreto.

Indice

Introduzione

In questa tesi tratteremo alcuni aspetti del problema del trasporto ottimo, che, in matematica, consiste nel capire come trasportare una distribuzione di massa su un'altra, in maniera, appunto, ottimale. In particolare cercheremo di dimostrare l'equivalenza delle formulazioni di Monge e Kantorovich del trasporto ottimo per il caso discreto.

Questo problema venne formalizzato per la prima volta dal matematico francese Gaspard Monge nel 1781 con il suo trattato *Mémoire sur la Théorie des Déblais et des Remblais* (Trattato sulla teoria degli scavi e terrapieni). Egli si chiese quale fosse la maniera ottimale di trasportare della terra per costruire delle fortificazioni, sotto l'ipotesi che il costo del trasporto (da non intendersi in senso strettamente economico) fosse proporzionale alla distanza.



Da un punto di vista matematico, il primo problema è stabilire se esiste una soluzione e se questa è unica. Un primo progresso al problema lo si deve al matematico russo Leonid Kantorovich (Nobel per l'economia nel 1975) il quale introdusse una formulazione nella quale si permette uno *splitting* della massa iniziale ed un suo conseguente spostamento su più destinazioni. Per quanto il suo lavoro avesse messo in evidenza l'importanza di questo problema in area economica, da un punto di vista matematico molte questioni rimanevano ancora aperte. Un ulteriore passo avanti verrà fatto, verso la fine degli anni ottanta, quando Yann Brenier, affrontando problemi di meccanica dei fluidi, si imbatté nel problema di Monge-Kantorovich. Per Brenier la funzione di costo non era proporzionale alla distanza ma bensì alla distanza al quadrato (una sorta di energia cinetica). Brenier dimostrò che, in questo caso, esiste un modo di trasportare materia minimizzando i costi e questo è unico. Il lavoro di Brenier fu molto importante non solo per il risultato puramente matematico ma, soprattutto, per aver mostrato una connessione con problemi legati alla meccanica dei fluidi e poiché, in generale, i problemi della fisica evolvono seguendo percorsi che richiedono un'energia minima. Con il tempo si è visto come questa teoria può essere applicata in moltissimi campi: ad esempio alla meteorologia, alle neuroscienze, alla fisica nucleare e all'astrofisica. Il presente lavoro di tesi, come detto all'inizio, si focalizzerà su problemi di tipo discreto e sarà strutturato come segue. Nei primi due capitoli verranno analizzate tematiche di geometria convessa e si arriverà, alla fine di entrambi i capitoli, a dimostrare due teoremi fondamentali per raggiungere il nostro obiettivo. Il primo teorema che dimostreremo sarà il teorema di Choquet il quale afferma che, dato un corpo convesso, è sempre possibile esprimerne un punto come combinazione convessa di punti estremali. Il secondo è il teorema di Birkhoof- von Neumann il cui enunciato afferma che i vertici del politopo di Birkhoff coincidono con le matrici di permutazione dello stesso. Nel terzo ed ultimo capitolo verrà presentato il problema di Monge-Kantorovich e verranno esposti alcuni esempi applicativi relativi al caso discreto.

Notazione

$\mathbb{R}^n$	Spazio euclideo di dimensione n
∂X	Frontiera di X
$\overline{X}$	Chiusura di X
$Int(X)$	Interno ad X
$B(u, \epsilon)$	Palla di centro u e raggio ϵ
$Ext(X)$	Punto estremale di X

Capitolo 1 Il teorema di Choquet

1.1.Nozioni generali

In questo primo capitolo ci concentreremo nell'enunciare e dimostrare il teorema di Choquet, uno strumento essenziale per arrivare a discutere l'obiettivo del presente lavoro di tesi. Diamo ora alcune definizioni fondamentali.

1.1.1.Definizione di insieme convesso

Siano V uno spazio vettoriale e $X \subseteq V$ un insieme. Diciamo che X è *convesso* se per ogni $x, y \in X$ e $\lambda \in [0,1]$ si ha $(1-\lambda)x + \lambda y \in X$, ovvero X contiene il segmento che ha per estremi x e y.

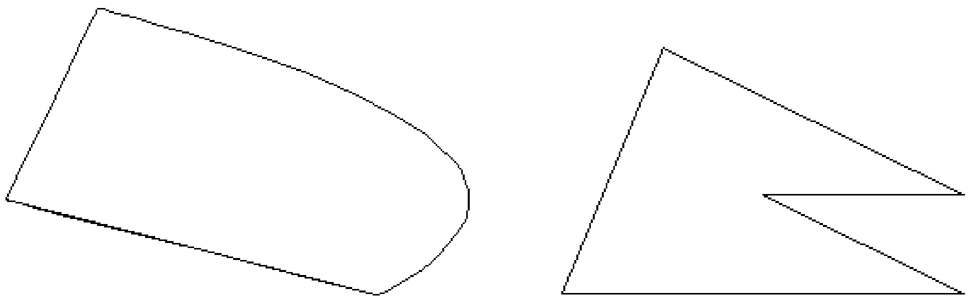


Figura 1.1: *Esempio di insieme convesso (sinistra) e non convesso (destra)*

1.1.2.Definizione di combinazione lineare convessa

Siano V uno spazio vettoriale e $X \subseteq V$ insieme convesso. Chiamiamo *combinazione lineare convessa* di elementi di X ogni somma nella forma $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ con $x_i \in X$, $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Osserviamo che $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in X$.

1.1.3.Definizione di inviluppo convesso

Siano V spazio vettoriale e $X \subseteq V$ insieme. Definiamo *inviluppo convesso* di X l'insieme di tutte le combinazioni lineari convesse di arbitrari sottoinsiemi finiti di X, è inoltre il più piccolo insieme convesso che contiene X. Indichiamo tale insieme con $conv(X)$.

1.1.4.Definizione di inviluppo affine

Siano V spazio vettoriale e $X \subseteq V$ insieme convesso. Definiamo *inviluppo affine* il più piccolo insieme affine contenente X e lo indichiamo con $Aff(X)$.

Per evidenziare la differenza tra le due definizioni appena fornite, prendiamo in considerazione un insieme di due punti e vediamo in figura 1.2 un inviluppo convesso (sinistra), in questo caso un segmento, e un inviluppo affine (destra) ovvero la retta passante per i due punti.

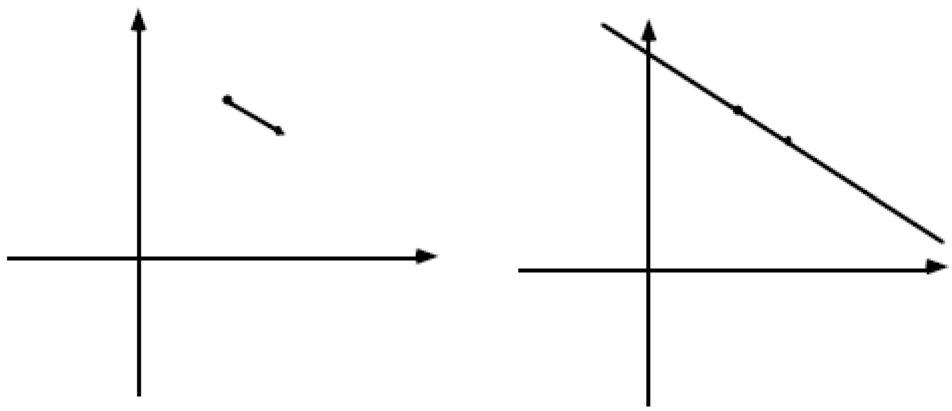


Figura 1.2

1.1.5.Definizione di corpo convesso

Un *corpo convesso* è un insieme convesso, compatto e con parte interna non vuota.

1.1.6.Definizione di punto estremale

Siano V spazio vettoriale e $X \subseteq V$ insieme convesso. Un punto $x \in X$ è un *punto estremale* di X se non è strettamente contenuto in nessun segmento interno ad X, cioè se non può essere espresso come combinazione lineare convessa $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$ con $y, z \in X$ e $\lambda \in \{0,1\}$. Indicheremo con $Ext(K)$ l'insieme dei punti estremali di un dato insieme K.

1.1.7.Definizione di isolamento

Siano V uno spazio vettoriale, $X \subset V$ un insieme e $H \subset V$ un iperpiano. Diremo che H *isola* X se X è contenuto in uno dei due semispazi chiusi $\overline{H_+}$ o $\overline{H_-}$. Diremo invece che H *isola strettamente* X se quest'ultimo è contenuto in uno dei due semispazi aperti H_+ o H_-.

1.1.8.Definizione di faccia

Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso e convesso. Un insieme $F \subset K$ è detto *faccia* di K se esiste un iperpiano H che isola K e tale che $F = K \cap H$.

1.1.9.Teorema

Sia F una faccia di K. Allora $F \subset \partial K$, $Aff(F) \cap Int(K) = \emptyset$ e $dim\, F < dim\, K$.

Dimostrazione. Sia $z \in K \cap \partial K$ e $y \in Int(K)$. Dato che $y \in Int(K)$ allora $\exists \epsilon > 0$ tale che $y_\epsilon \coloneqq y + \epsilon(y - z) \in Int(K)$. Possiamo scrivere $y = \frac{\epsilon}{(1+\epsilon)} z + \frac{\epsilon}{(1+\epsilon)} y_\epsilon$ e, se $y \in F$, per definizione di faccia si deve avere anche $z, y \in F$. Essendo questi arbitrari in K si ha che $K \subset F$ cioè $K = F$. Non essendo possibile quest'ipotesi, non può quindi essere che $y \in Int(K)$ e $y \in F$, quindi $F \subset \partial K$. Siccome F è convessa e $F \cap Int(K) = \emptyset$ allora esiste un iperpiano che separa F e $Int(K)$. Questo piano separatore contiene F in quanto $F \subset \partial K$ e quindi anche $Aff(F)$ vi è contenuto e da questo si può affermare che $dim\, F < dim\, K$.

$\square$

1.1.10.Teorema

Siano V uno spazio vettoriale, $X \subset V$ un insieme non vuoto e sia $f: V \to \mathbb{R}$ una funzione lineare.

1- Supponiamo che f abbia il suo massimo (minimo) assoluto in X in un unico punto $x \in X$ tale che $f(x) > f(y)\ \forall x \neq y, y \in X$ (rispettivamente $f(x) < f(y)$ per il minimo). Allora x è un punto estremale di X.

2- Supponiamo che f abbia il suo massimo (minimo) assoluto α in X e supponiamo che $C = \{x \in X: f(x) = \alpha\}$ sia l'insieme dove questo sia contenuto. Sia x un punto estremale di C. Allora x è punto estremale anche di X.

Dimostrazione.

Dimostreremo solo il caso del massimo, il minimo è analogo. Per la prima parte supponiamo di avere $x = \lambda_1 y + \lambda_2 z$ e quindi $f(x) = \lambda_1 f(y) + \lambda_2 f(z)$ per linearità e quindi $f(x) \geq f(y)$ e $f(x) \geq f(z)$. Di conseguenza si ha che $f(x) = f(y) = f(z) \Longrightarrow x = y = z$ perché il massimo assoluto è unico. Per la seconda parte supponiamo come prima $x = \lambda_1 y + \lambda_2 z$ con $y, z \in X$. Abbiamo che $f(x) = \alpha = \lambda_1 f(y) + \lambda_2 f(z)$ e quindi che $f(y) \leq \alpha, f(z) \leq \alpha$. Di conseguenza $y, z \in C$ perché $f(y) = f(z) = \alpha$ e quindi $x = y = z$ dato che x è punto estremale per C.

□

Grazie al secondo punto del precedente teorema possiamo mostrare agevolmente come un punto $x \in Ext(F) \subset Ext(K)$.

1.2. Teorema di Choquet

Dato un corpo convesso $K \subset \mathbb{R}^n$, è sempre possibile scrivere $x_0 \in K$ come combinazione convessa di punti estremali di K, ossia $x_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ con $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ e $x_1, \dots, x_n \in Ext(K)$.

Dimostrazione.

Procediamo alla dimostrazione utilizzando il principio di induzione. Supponiamo $n = 1$, $K \subset \mathbb{R}$ è un segmento di estremi x_1, x_2 quindi è possibile esprimere il punto $x_0 \in [x_1, x_2]$ come combinazione convessa $x_0 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) x_2$ con $\lambda_1 = \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1}$. Consideriamo l'enunciato vero per ogni convesso K in $\mathbb{R}^k$ se $k \leq n$, $1 \leq k \leq n$ e dimostriamolo nel caso $n + 1$. Consideriamo ora un corpo convesso $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$, consideriamo un punto $x_0 \in Int(K)$ ed un punto $x_1 \in Ext(K) \subset \partial K$ con $x_0 \neq x_1$, per cui $\exists!\, r$, retta affine, tale che $x_0, x_1 \in r$. Sia $\bar{\gamma}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una parametrizzazione iniettiva di r e supponiamo $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1$. Sia $d_K(x) = min\{|x - y|: y \in K\}$ la funzione distanza da K, funzione continua. Dimostriamo che $d_K(x)$ è continua: $|d_K(x) - d_K(y)| < M$ quando $d(x, y) < \delta$, per definizione di estremo inferiore abbiamo che $\forall \varepsilon > 0, \exists z \in K$ tale che $d(x, z) < d_K(x) + \varepsilon$ quindi $d_K(y) < d(z, y) \leq d(x, z) + d(x, y) < d_K(x) + \varepsilon + d(x, y)$ allora abbiamo $|d_K(x) - d_K(y)| < |\varepsilon + d(x, y)| < |\varepsilon + \delta| = M$ ed otteniamo $|d_K(x) - d_K(y)| < M$. Consideriamo ora la composizione $d \circ \bar{\gamma}: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, con $d\big(\gamma(0)\big) = d\big(\gamma(1)\big) = 0$ e per limitatezza si ha $\lim_{t \to \pm\infty} \bar{\gamma}(t) = +\infty$. Per il teorema di esistenza degli zeri $\exists t < 0$ tale che $d\big(\gamma(t)\big) = 0$. Sia $t_2 \coloneqq inf\, d\big(\gamma(t)\big) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, per il teorema di esistenza degli zeri si ha quindi $t_2 < 0 < 1$ ed essendo K un corpo convesso $\gamma(t_2) = x_2 \in \partial K$ ed è diverso da $x_1 = \gamma(1)$, inoltre è l'unico punto, oltre ad x_1, in quanto, per definizione di insieme convesso, comunque presi due punti $x_1, x_2 \in K$, anche il segmento che li congiunge deve essere interamente contenuto in K pertanto non è possibile avere un segmento che contiene più di due punti appartenenti al bordo di K.

Se $x_2 \in Ext(K)$ allora è possibile scrivere x_0 come combinazione convessa e la dimostrazione per induzione è conclusa. Se invece $x_2 \notin Ext(K)$ allora $x_2 \in F$, dove con F indichiamo una faccia di K. Grazie ai teoremi 1.11 e 1.12 abbiamo già dimostrato che $dim\ F < dim\ K$ e che $Ext(F) \subset Ext(K)$. Possiamo allora scrivere $x_2 = \sum_{i=1}^{k} \mu_k\, x_k$ per qualche $1 \leq k \leq n$, vero per ipotesi, ed infine $x_0 = \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) x_2 = \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) \sum_{i=1}^{k} \mu_k\, x_k$ il che conclude la dimostrazione per induzione.

□

Capitolo 2 Il teorema di Birkhoff - von Neumann

2.1.Nozioni generali

Il teorema di Birkhoff-von Neumann è un importante risultato, raggiunto indipendentemente da G. Birkhoff (1946) e J. Von Neumann (1953). Esso afferma che i vertici di un particolare politopo, detto appunto politopo di Birkhoff, coincidono esattamente con delle matrici di permutazione n-dimensionali. Cominciamo col dare qualche definizione di base per poi enunciare e dimostrare il teorema.

2.1.1.Definizione di poliedro

Siano $v_1, \ldots, v_m$ dei vettori nello spazio $\mathbb{R}^n$ e siano $b_1, \ldots, b_m$ degli scalari. Definiamo *poliedro* l'insieme convesso $P = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle v_i, x \rangle \leq \mathrm{b}_i \text{ con i} = 1, \ldots, \mathrm{m}\}$. Analogamente $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ dove A è la matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con v_i come colonna. Se il poliedro è limitato (e quindi compatto) allora è anche detto *politopo.*

2.1.2.Definizione di vertice

Chiameremo *vertice* un punto estremale di un generico poliedro.

Un esempio di poliedro in tre dimensioni è la piramide e i vertici della stessa corrispondono alla definizione di vertice appena citata. È immediato riconoscerli anche nella definizione di punto estremale.

Ai fini di questo lavoro di tesi d'ora in poi useremo solo il termine politopo, sottintendendo che si tratti di un poliedro limitato e generato come inviluppo convesso di un numero finito di punti.

Di importanza fondamentale per il presente capitolo è il politopo di Birkhoff, definito come l'insieme convesso di tutte le matrici $n \times n$ *bistocastiche*. Lo indicheremo con B_n.

2.1.3.Definizione di matrice bistocastica

Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è detta *bistocastica,* o *doppiamente stocastica*, se $a_{i,j} \geq 0\ \forall i,j$ e $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1, \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$. Ad esempio $\begin{pmatrix} 7/12 & 0 & 5/12 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$ è una matrice bistocastica. Detto a parole, una matrice bistocastica è una matrice in cui la somma delle righe e la somma delle colonne è sempre uguale a 1.

Un particolare tipo di matrici bistocastiche sono le matrici di permutazione, ovvero delle matrici che permettono di scambiare l'ordine degli elementi all'interno di un'altra matrice.

2.1.4.Definizione di matrice di permutazione

Sia σ una permutazione di un insieme $\{1, \dots, n\}$. Una *matrice di permutazione* è una matrice $P_\sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definita come $a_{i,j}^{\sigma} = \begin{cases} 1, se\ \sigma(\mathrm{j}) = \mathrm{i}, \\ 0, altrimenti. \end{cases}$

Un esempio di matrice di permutazione è la matrice identità I, oppure la seguente $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Supponiamo di avere una matrice $A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e facciamo la moltiplicazione tra matrici $X \times A$, il risultato sarà la matrice $B = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}$.

2.1.5.Lemma

Il politopo di Birkhoff è convesso.

Dimostrazione.

Diremo che il politopo di Birkhoff, B_n, è convesso se per ogni coppia di matrici bistocastiche $A, B \in B_n$, la combinazione convessa $\lambda A + (1 - \lambda)B$ con $\lambda \in [0,1]$, è anch'essa una matrice bistocastica. Per prima cosa vediamo che gli elementi delle matrici A e B sono tutti positivi, ovvero $a_{i,j}, b_{i,j} \geq 0$.

Da questo segue direttamente che l'elemento della matrice $C = \lambda A + (1 - \lambda)B$ è dato da $c_{i,j} = \lambda a_{i,j} + (1 - \lambda)b_{i,j}$ sempre ≥ 0.

Consideriamo ora le righe i della matrice C, abbiamo:
$\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}(\lambda a_{i,j} + (1-\lambda) b_{i,j}) = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} + (1-\lambda)\sum_{j=1}^{n} b_{i,j} = 1$,
poiché A e B sono bistocastiche $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$ e $\sum_{j=1}^{n} b_{i,j} = 1$ per ogni i.
Quindi $\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} = \lambda \cdot 1 + (1-\lambda) \cdot 1 = 1$. Con ragionamento del tutto analogo per le colonne j si arriva a mostrare che $\sum_{i=1}^{n} c_{i,j} = \lambda \cdot 1 + (1-\lambda) \cdot 1 = 1$.
Abbiamo dimostrato che la matrice C è bistocastica per ogni $\lambda \in [0,1]$ da cui segue la tesi. □

2.1.6.Teorema

Sia $P \subset \mathbb{R}^n$ un poliedro con $P = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle c_i, x\rangle \leq \beta_i \; con \; i = 1, \dots, m\}$, dove $c_i \in \mathbb{R}^n$ e $\beta_i \in \mathbb{R}$ con $i = 1, \dots, m$. Per $u \in P$ sia $I(u) = \{i : \langle c_i, x\rangle = \beta_i\}$ l'insieme delle disequazioni verificate come uguaglianza in u. Allora u è un vertice di P se e solo se l'insieme dei vettori $\{c_i \, : \, i \in I(u)\}$ genera linearmente lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$. In particolare, se u è un vertice di P, l'insieme $I(u)$ contiene almeno n indici: $|I(u)| \geq n$.

Dimostrazione.

Supponiamo che i vettori c_i, con $i \in I(u)$, non generino lo spazio $\mathbb{R}^n$. Allora ci sarà un elemento $y \in \mathbb{R}^n$ diverso da zero tale che $\langle y, c_i\rangle = 0 \; \forall i \in I(u)$. Notiamo che $\langle c_i, u\rangle < \beta_i$ per $i \notin I(u)$. Per $\epsilon > 0$ sia $u_+ = u + \epsilon y$ e sia $u_- = u - \epsilon y$. Allora $u = \frac{u_+ + u_-}{2}$, $u_+ \neq u_-$ e con un $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo, i punti u_+ e u_- appartengono al poliedro P. Segue che u non è un punto estremale di P.
Supponiamo ora che $u \in P$ e che i vettori c_i, generino lo spazio $\mathbb{R}^n$. Supponiamo che $u = \frac{v+w}{2}$ per $v, w \in P$. Allora $\langle c_i, v\rangle \leq \beta_i$ e $\langle c_i, w\rangle \leq \beta_i$. Dato che $\langle c_i, u\rangle = \beta_i$ per $i \in I(u)$, avremo per forza $\langle c_i, v\rangle = \langle c_i, w\rangle = \beta_i$ per $i \in I(u)$. Dal momento che i vettori c_i, con $i \in I(u)$, generano lo spazio $\mathbb{R}^n$, il sistema di equazioni lineari $\langle c_i, x\rangle = \beta_i$ dovrà avere un'unica soluzione.
Da cui segue $v = w = u$ e u è un punto estremale.

Procediamo ad enunciare a dimostrare il teorema di Birkhoff - von Neumann.

2.2.Teorema di Birkhoff - von Neumann

I vertici del politpo di Birkhoff B_n coincidono con le matrici di permutazione di B_n.

Dimostrazione.

Partiamo dicendo che se la matrice bistocastica $A \in B_n \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ è un punto estremale di B_n allora $A = A^\sigma$ per qualche permutazione σ. Dimostriamolo per induzione. Nel caso di $n = 1$, l'unica matrice bistocastica è, ovviamente, (1). Supponiamo $n \geq 1$. Consideriamo il sottospazio affine $V \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ formato dalle matrici $A = \left(a_{i,j}\right)$ tali che:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1\; per\; j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1\; per\; i = 1, \dots, n.$$

Affermiamo che $dim\, V = (n-1)^2$. Un punto di V, ovvero una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, viene determinato da $(n-1)^2$ elementi $a_{i,j}$ (con $i, j = 1, \dots, n-1$) scelti arbitrariamente, mentre i restanti elementi vengono ricavati da

$$a_{i,n} = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} a_{i,j} = 1\; per\; i = 1, \dots, n-1$$

$$a_{n,j} = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} a_{i,j} = 1\; per\; j = 1, \dots, n-1$$

$$a_{n,n} = (2-n) + \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{i,j}.$$

Nello spazio V, il politopo B_n è definito da n^2 disequazioni lineari $a_{i,j} \geq 0$. Se A è un punto estremale di B_n ed è una matrice bistocastica, allora devono essere verificate almeno alcune delle $(n-1)^2$ disequazioni che la definiscono. Ovvero, qualcuno degli $(n-1)^2$ elementi $a_{i,j}$ deve essere uguale a zero. Ovviamente non può esserci una riga contenente solo zeri. Inoltre, se ogni riga avesse almeno due elementi diversi da zero, allora il numero totale di elementi uguali a zero sarebbero al massimo $n(n-2) < (n-1)^2$. Di conseguenza, ci deve essere una riga, diciamo i_0 dove $a_{i_0,j} = 0$ per tutti gli elementi tranne $j = j_0$. Questo significa che $a_{i_0,j_0} = 1$ e che tutti gli altri elementi della riga i_0 e della colonna j_0 sono pari a zero. Possiamo ora cancellare le righe appena menzionate ed ottenere così una matrice bistocastica $(n-1) \times (n-1)$, la quale è un punto estremale di B_{n-1}, così da poter applicare l'ipotesi induttiva.

Dobbiamo ora dimostrare che tutte le matrici di permutazione sono punti estremali di B_n. Sia P una matrice di permutazione e supponiamo per assurdo che non sia un punto estremale di B_n.

Allora possiamo scrivere $P = \lambda A_1 + (1-\lambda)A_2$ dove $A_1, A_2 \in B_n$ sono due generiche matrici e $\lambda \in [0,1]$. Dal momento che P è una matrice di permutazione, i suoi elementi possono essere solo 0 oppure 1 ma allora l'equazione appena scritta è verificata solo se $A_1 = A_2$. Quindi P non può essere espresso da una combinazione lineare convessa, quindi è un punto estremale di B_n e ciò implica che le matrici di permutazione sono i punti estremali di B_n il che conclude la dimostrazione. □

Capitolo 3 Equivalenza tra Monge e Kantorovich

3.1.Formulazione di Monge

In questo capitolo vedremo le definizioni dei problemi di trasporto di Monge e Kantorovich e dimostreremo che nel caso discreto i due coincidono. Come anticipato nell'introduzione, il problema di Monge nasce dall'esigenza di trasportare una certa quantità di materia (massa) da un punto ad un altro cercando di minimizzarne il "costo".

Consideriamo X e Y come due spazi discreti, aventi lo stesso numero di punti i quali hanno tutti la stessa massa.

3.1.1.Definizione
Definiamo una funzione di trasporto (o mappa di trasporto) come $T: X \longrightarrow Y$ tale che $x_i \longmapsto T(x_i) \coloneqq y_{\sigma(i)}$ dove $\sigma: \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$ è una permutazione.

3.1.2.Definizione
Definiamo una funzione di costo $c: X \times Y \longrightarrow [0, +\infty]$.

L'obiettivo è quindi di trasportare la massa da un punto all'altro minimizzando la funzione c. Possiamo allora scrivere la:

3.1.3.Formula di Monge
$min\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c\left(x_i, y_{\sigma(i)}\right) : \sigma \in S_n\right\}$ dove S_n è l'insieme delle permutazioni in $\{1, \dots, n\}$.

Detto a parole, il problema di Monge sembra molto semplice: come anticipato ad inizio capitolo si tratta di spostare della materia da un punto x ad un punto y cercando di farlo nel modo più efficiente possibile.

3.2.Formulazione di Kantorovich

Il problema di Monge si rivelò ostico sotto diversi punti di vista. Quello che interessa maggiormente il nostro caso è che il problema non è sempre ben posto. Supponiamo, per esempio, di avere una bottiglia di birra e di volerla versare tutta in un bicchiere, però abbiamo a disposizione solo due bicchieri che contengono al massimo metà della bottiglia ciascuno, cosa possiamo fare? Ovviamente chiunque penserà di dividere il contenuto della bottiglia in nei due bicchieri, ma nel problema di Monge non è consentito dividere la massa iniziale, infatti abbiamo scritto che la massa che si trova in x_i (la birra dentro la bottiglia) deve essere trasportata tutta nella destinazione $T(x_i)$ (un unico bicchiere) quindi in questo caso il problema non ha soluzione. E se avessimo due bicchieri che possono entrambi contenere tutta la birra della bottiglia?

Be' in questo caso avremo due destinazioni possibili il punto è che il "costo" (il lavoro di versare la birra) sarebbe identico e quindi avremmo due soluzioni possibili ma nessuna delle due sarebbe un ottimo. A questo punto introduciamo l'approccio di Kantorovich il quale, sostanzialmente, consente di spezzare la massa di partenza e di poterla destinare in più punti. In questo caso non si parlerà più di *mappe di trasporto* bensì di *piani di trasporto*. Ovvero per Kantorovich la massa in x raggiunge la destinazione y soltanto con una certa probabilità, quantificata dal piano di trasporto $\pi(x, y)$.

Supponiamo quindi che le masse dei punti degli spazi di partenza e arrivo X e Y, chiamiamole μ e ν, siano così definite:$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}$ nello spazio $X = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ e $\nu = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{y_j}$ nello spazio $Y = \{y_j\}_{j=1}^{n}$.

3.2.1.Definizione

Definiamo l'insieme dei piani di trasporto come $\Pi(\mu,\nu) \coloneqq \{\pi \in P(X \times Y) : \pi(A \times Y) = \mu(A), \forall A \in X, \pi(X \times B) = \nu(B), \forall B \in Y\}$ dove con $\pi(A \times Y) = \mu(A)$ si indica la massa contenuta in A mentre $\pi(X \times B) = \nu(B)$ indica la massa contenuta in B.

Allora ogni piano di trasporto (o misura) $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$ può essere rappresentata con una matrice bistocastica $n \times n$.

Ricordiamo l'insieme delle matrici bistocastiche così definito

$B_n \coloneqq \left\{\pi = \left(\pi_{ij}\right)_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n} : \forall i, j, \pi_{ij} \geq 0; \forall j, \sum_{i=1}^{n} \pi_{ij} = 1, \forall i, \sum_{j=1}^{n} \pi_{ij} = 1\right\}$.

Inoltre, data una funzione di costo c definita come in (3.1.2), possiamo scrivere la:

3.2.2.Formula di Kantorovich

$min\left\{\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} \pi_{ij}\, c\left(x_i, y_j\right); \pi \in B_n\right\}$.

3.3. Equivalenza tra le formulazioni di Monge e Kantorovich

3.3.1. Teorema

Indichiamo le formulazioni di Monge e Kantorovich rispettivamente come $MP = min\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c\left(x_i, y_{\sigma(i)}\right) : \sigma \in S_n\right\}$ e $KP = min\left\{\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} \pi_{ij}\, c\left(x_i, y_j\right); \pi \in B_n\right\}$. Consideriamo $\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}$ in $X = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ e $\nu = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{y_j}$ in $Y = \left\{y_j\right\}_{j=1}^{n}$, allora $KP = MP$.

Dimostrazione.

Il problema di Kantorovich (KP) consiste sostanzialmente nel minimizzare una funzione lineare nell'insieme delle matrici bistocastiche che è un insieme convesso. Grazie al teorema di Choquet e al teorema 1.1.10 sappiamo che KP ammette una soluzione e che questa è un punto estremale di B_n. Grazie al teorema di Birkhoff sappiamo che i punti estremali di B_n sono matrici di permutazione e quindi che $MP \leq KP$. Al contrario, dal fatto che $S_n \subseteq B_n$, abbiamo $KP \leq MP$. Quindi otteniamo $KP = MP$.

□

3.4. Esempi applicativi

Vediamo alcuni esempi che rientrano nell'ambito dei problemi di *Programmazione Lineare.* Vengono così indicati i problemi di ottimizzazione in cui la funzione obiettivo è una funzione soggetta a vincoli lineari i quali possono essere disuguaglianze e/o uguaglianze.

3.4.1. Il problema del trasporto

Prendiamo in considerazione un'azienda che produce in I birrifici $B_1, \dots, B_I$, dei fusti di birra che poi dovrà inviare a J pub $P_1, \dots, P_J$. Supponiamo ora che:

- Ogni birrificio B_i conservi in magazzino una certa quantità di fusti di birra b_i con $i = 1, \dots, I$.
- Esiste un accordo tra azienda e pub dove l'azienda si impegna a fornire il pub P_j almeno di una quantità p_j di fusti, con $j = 1, \dots, J$.

Poniamo c_{ij} come il costo del trasporto di un singolo fusto da B_i a P_j.
Il problema consiste nel soddisfare le richieste dei vari pub minimizzando il costo totale del trasporto. Sia x_{ij} la quantità di fusti trasportata da B_i a P_j. Il costo totale del trasporto risulterà $\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} x_{ij} c_{ij}$.

I fusti inviati dal birrificio B_i sono $\sum_{j=1}^{J} x_{ij}$ e, dal momento che i fusti disponibili a stock sono b_i, si avrà che $\sum_{j=1}^{J} x_{ij} \le b_i$ con $i = 1, \dots, I$.

I fusti ricevuti dal pub P_j sono $\sum_{i=1}^{I} x_{ij}$ e, vista la quantità richiesta per contratto è almeno p_j, si avrà $\sum_{i=1}^{I} x_{ij} \ge p_j$ con $j = 1, \dots, J$.

Assumiamo anche come vincolo (dato dal buon senso) di non poter inviare una quantità negativa da B_i a P_j, ovvero $x_{ij} \ge 0$.

Si ottiene così un problema di programmazione linea con $N = IJ$ variabili e $M = I + J$ vincoli ai quali si aggiunge il vincolo di non negatività.

3.4.2.Il problema della dieta

Consideriamo ora il problema della dieta, un problema di programmazione lineare molto trattato in letteratura che ci aiuterà nel fare un passetto oltre il problema del trasporto.

Prendiamo in considerazione un dietologo che deve preparare un dieta ad un paziente. Si tratta sostanzialmente di determinare la quantità di cibo che una persona deve consumare quotidianamente in modo da garantire il giusto apporto di sostanze nutritive (proteine, vitamine,…). I dati a disposizione del dietologo sono:

- $S_1, \dots, S_N$ sostanze nutritive che il paziente dovrà assumere ogni giorno;
- $C_1, \dots, C_M$ tipi di cibo che il paziente può assumere;
- a_{ij} quantità di sostanza nutritiva S_i contenuta in una unità di cibo C_j;
- b_i quantità minima di sostanza nutritiva S_i che la dieta deve garantire.

Il problema del dietologo è quindi quello di determinare la quantità x_i di ogni cibo $C_i, (i = 1, \dots, N)$, che ogni paziente deve consumare quotidianamente in modo che i valori nutrizionali siano ottimali, ovvero $\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\, x_j \geq b_i$ con $i = 1, \dots, M$.

Come per il problema del trasporto, il buon senso impone il vincolo della non negatività, ovvero non è possibile assumere una quantità negativa di cibo, quindi $x_j \geq 0$ $(j = 1, \dots, N)$.

Una dieta $x = (x_1, \dots, x_N)$ che soddisfa le precedenti condizioni sarà denominata *fattibile.*

Poniamo che ad ogni unità di cibo C_j venga associato un prezzo c_j, allora il costo giornaliero della dieta viene dato da $\sum_{j=1}^{N} c_j\, x_J$. Supponiamo che il dietologo debba scegliere, tra tutte le diete fattibili, quella che minimizza il costo totale. Scriviamo il vettore delle quantità $b = (b_1, \ldots, b_M)$, il vettore dei costi $c = (c_1, \ldots, c_N)$ e la *matrice nutrizionale* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{M\times N}$, allora possiamo scrivere il problema di programmazione lineare come segue: $x^* \in X: cx^* = min_{x\in X}\, cx$ con $X = \{x \in \mathbb{R}_+^N: Ax \geq b\}$.

Fino a qui non c'è nulla di diverso dal problema del trasporto, si tratta sempre di minimizzare una funzione di costo. Se invece volessimo massimizzare una funzione di prezzo?

3.4.3.Il problema duale

Consideriamo sempre il problema della dieta ed introduciamo un nuovo attore, un farmacista. Supponiamo che il farmacista sia in grado di fornire al dietologo (come opzione) gli stessi valori delle sostanze nutritive $S_1, \ldots, S_N$ in forma di pillole e supponiamo che una unità S_i venga venduta al prezzo y_i. Il dietologo, il cui obiettivo resta quello di minimizzare i costi, sostituirà i cibi con le pillole se il cambio gli permetterà un risparmio, ovvero $\sum_{i=1}^{M} y_i\, a_{ij} \leq c_j, j = 1, \ldots, N$ con $y_i \geq 0, i = 1, \ldots, M$.

Una dieta fattibile richiederà almeno b_i unità si sostanza S_i, quindi il prezzo giornaliero di una dieta fattibile sarà $\sum_{i=1}^{M} b_i\, y_i$.

Quindi, l'obiettivo del farmacista di massimizzare il prezzo di vendita, si traduce nel seguente problema di programmazione lineare:
$y^* \in Y: by^* = max_{y\in Y} by$ con $Y = \{y \in \mathbb{R}_+^M: A^t y \leq c\}$.

Questo problema di massimo viene appunto definito *problema duale* mentre il problema di minimo viene definito *problema primale.* Si può dimostrare, grazie alla dualità di Kantorovich, che il dietologo non risparmierà rivolgendosi al farmacista in quanto, in corrispondenza dell'ottimo, le funzioni obiettivo del problema primale e duale assumono lo stesso valore, ovvero $cx^* = by^*$.

Appendice

Riportiamo di seguito alcune definizioni di geometria utilizzate all'interno dell'elaborato.

Definizione di punto interno

Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ un insieme. Un punto $x \in X$ è detto *punto interno* se $\exists \epsilon > 0$ tale che la palla aperta $B(u, \epsilon) = \{x : \|x - u\| < \epsilon\}$ centrata in u e di raggio ϵ sia contenuta in X. L'insieme di tutti i punti interni verrà indicato con $Int(X)$. L'insieme di tutti i punti non interni ad X è chiamato *bordo* e verrà indicato con ∂X.

Definizione di iperpiano

Sia V uno spazio vettoriale. Sia $f : V \to \mathbb{R}$ una funzione lineare non nulla e sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un numero. Definiamo *iperpiano* l'insieme $H = \{v \in V : f(v) = \alpha\},\ \alpha \in \mathbb{R}$.

Definizione di semispazio

Sia V uno spazio vettoriale e sia $H \subset V$ un iperpiano. Il complementare di H nello spazio V sarà l'unione di due insiemi convessi che chiameremo *semispazi*: $V \backslash H = H_+ \cup H_-$. Ad esempio prendiamo l'iperpiano come definito prima $H = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = \alpha\}, \alpha \in \mathbb{R}$, avremo uno semispazio *aperto* così definito $H_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \alpha\}$, o *chiuso* $\overline{H_+} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq \alpha\}$. Analogamente $H_- = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < \alpha\}$ e $\overline{H_-} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \alpha\}$.

Definizione di insieme strettamente convesso

Siano V uno spazio vettoriale e $X \subseteq V$ un insieme convesso. Diremo che X è *strettamente convesso* se, comunque presi due punti, il segmento che li congiunge contiene solo punti interni ad X salvo i due estremi. Ovvero per ogni $x, y \in X$ e $\lambda \in (0,1)$, si ha $(1 - \lambda)x + \lambda y \in Int(X)$.

Osservazione

Possiamo notare che nel caso di insieme strettamente convesso ci troviamo di fronte ad un insieme connesso per archi. Infatti, dato X insieme regolare e data una coppia di punti $x_0, x_1 \in X$, se esiste un arco di curva $\underline{\gamma}: [0,1] \to X$ tale che $\underline{\gamma}(0) = x_0$ e $\underline{\gamma}(1) = x_1$, l'insieme si dice connesso per archi.

Osservazione

Dalla definizione precedente di insieme strettamente convesso, si può notare anche che se gli estremi dell'arco di curva giacciono sul bordo di X questi sono punti estremali di X.

Definizione di dimensione

La *dimensione* di un insieme convesso A deriva dalla dimensione del suo inviluppo affine $Aff(A)$. A sua volta, la dimensione di un insieme affine è la dimensione del suo sottospazio generatore che è definita dalla cardinalità di una qualsiasi sua base. Per fare chiarezza diremo che un corpo convesso in $\mathbb{R}^n$ è un insieme convesso di dimensione n e che un iperpiano di un qualsiasi insieme di $\mathbb{R}^n$ avrà dimensione $n-1$.

Bibliografia

[1] Barvinok A., 2002, *A Course in Convexity, Graduate Studies in Mathematics, Volume 54,* American Mathematical Society

[2] Santambrogio F., 2015, *Optimal Transport for Applied Mathematicians. Calculus of Variations, PDEs, and Modeling,* Springer

[3] Thorpe M., 2018, “Introduction to Optimal Transport”, Centre for Mathematical Sciences, University of Cambridge

[4] Villani C., 2003, *Topics in Optimal Transportation, Graduate Studies in Mathematics, Volume 58,* American Mathematical Society

[5] Villani C., 2009, *Optimal transport, old and new*