

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA  
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INDUSTRIALE

LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA AEROSPAZIALE

*SISTEMA DI NAVIGAZIONE BASATO SUL FILTRO DI  
KALMAN PER UNA PIATTAFORMA D'ASSETTO A  
TRE ASSI*

*SVILUPPO SOFTWARE, HARDWARE E TEST*

*Kalman filter based navigation system for a three-axes  
attitude platform*

*Software and hardware development and testing*

RELATORE: PROF. ENRICO LORENZINI

CORRELATORE: ING. ANDREA VALMORBIDA

LAUREANDO: FABIO SCIBONA

MATRICOLA: 1058180

Anno accademico 2014-2015



# Abstract

In these years, the Group for Measurements and Space Technology at the Center of Studies and Activities for Space "Giuseppe Colombo" (CISAS) and the Department of Industrial Engineering of the University of Padova has been involved in the development of the hardware simulator called SPARTANS, which is a cooperating spacecraft testbed for autonomous proximity operations experiments.

In its final configuration, the SPARTANS testbed consists of two or more spacecraft simulators representing the units cooperating with each other and an external Control Station. Each Simulator is made of an Attitude Module (AM) with three rotational degrees of freedom provided by mechanical gimbals and a Translational Module (TM) with two position degrees of freedom that translates on a glass-covered table using a low friction air cushion system.

This separated vehicles testbed will be as much as possible a representative dynamic environment for the development and verification on the ground of relative navigation sensors and coupled position and attitude proximity control algorithm, including Satellite Formation Flight (SFF) and Rendezvous and Docking (R&D).

The main contribution of this work to the SPARTANS project is the development and validation of a Navigation System for the Attitude Module based on low cost MEMS inertial sensors and an extended formulation of the Kalman Filter algorithm. In particular, two separate scenarios were considered: a typical space scenario and a typical terrestrial scenarios. In the space scenario, the KF combines measurements provided by three gyroscopes and a star sensor, which was simulated using quadrature encoders that directly measure roll pitch and yaw angles. In the terrestrial scenario, the AM attitude is estimated using gyroscopes, accelerometers and magnetometers measurements.

Random noises of the inertial sensors were first characterized through the Allan variance analysis, and a standard calibration procedure was then implemented to compensate sensors deterministic error sources due to misalignments, scale factors and bias.

Numerical simulations conducted in Matlab were carried out to evaluate the KF performance for different operative frequencies and for an approximated formulation of the attitude dynamics equations in order to reduce the computational cost of the algorithm when run in a real time application.

A navigation unit was realized using an Arduino Due microcontroller that receives measurements from sensors and implements the KF algorithm. Several experimental tests were conducted to validate the proposed Navigation System for both scenarios. Experimental results showed that, for the space scenario, the estimation accuracy on the Euler angles and angular velocity is  $0.5^\circ$  and  $0.5^\circ/\text{s}$ , respectively, and for an imposed motion particularly irreg-

ular. Similar estimation accuracies were obtained for roll and pitch angles in the terrestrial scenario. The yaw angle was estimated with a reduced accuracy mainly because of interfering electromagnetic disturbances that degrade the magnetometer measurements.

# Indice

<i>Abstract</i>	iii
<i>Indice</i>	v
<i>Elenco delle figure</i>	ix
<i>Elenco delle tabelle</i>	xiii
<b>1 Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1 Obiettivo della tesi . . . . .	1
1.2 Outline della tesi . . . . .	2
<b>2 Il modulo di assetto</b>	<b>3</b>
2.1 Sottosistema strutturale . . . . .	3
2.2 Sottosistema propulsivo . . . . .	5
2.3 Sottosistema elettrico e di potenza . . . . .	6
2.4 Sottosistema di determinazione e controllo d'assetto . . . . .	7
2.5 Sottosistema di comunicazione e gestione dei dati . . . . .	8
<b>3 La determinazione dell'assetto</b>	<b>9</b>
3.1 Sistemi di coordinate . . . . .	9
3.2 Gli angoli di Eulero . . . . .	9
3.3 I quaternioni . . . . .	11
3.4 Il filtro di Kalman . . . . .	14
3.4.1 Il filtro di Kalman discreto . . . . .	14
3.4.2 Il filtro di Kalman discreto con formulazione estesa . . . . .	17
<b>4 I sensori per la dinamica d'assetto</b>	<b>21</b>
4.1 Il giroscopio . . . . .	21
4.1.1 Principio di funzionamento del giroscopio MEMS . . . . .	22
4.2 L'accelerometro . . . . .	23
4.2.1 Principio di funzionamento dell'accelerometro MEMS . . . . .	24
4.3 Il magnetometro . . . . .	24
4.3.1 Principio di funzionamento del magnetometro MR . . . . .	25
4.4 Il sensore MPU-6050 . . . . .	26

4.5	Il sensore HMC5883L . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Il rumore nei sensori</b>	<b>31</b>
5.1	Modello matematico del rumore . . . . .	31
5.2	La varianza di Allan . . . . .	32
5.2.1	Rumore di quantizzazione . . . . .	34
5.2.2	Angle Random Walk (A.R.W.) . . . . .	34
5.2.3	Instabilità di Bias . . . . .	35
5.2.4	Rate Random Walk (R.R.W.) . . . . .	36
5.3	Deviazione di Allan di MPU-6050 e HMC5883L . . . . .	37
5.3.1	Frequenza di taglio del filtro passa basso . . . . .	38
5.3.2	Deviazione di Allan del giroscopio . . . . .	41
5.3.3	Deviazione di Allan dell'accelerometro . . . . .	42
5.3.4	Deviazione di Allan del magnetometro . . . . .	43
5.4	Simulazione dei sensori in MATLAB . . . . .	44
<b>6</b>	<b>La calibrazione dei sensori</b>	<b>45</b>
6.1	Gli errori deterministici . . . . .	45
6.1.1	Fattore di scala . . . . .	45
6.1.2	Bias . . . . .	46
6.1.3	Non perfetta ortogonalità degli assi di sense e disallineamenti . . . . .	46
6.2	Modello matematico giroscopio e accelerometro . . . . .	47
6.3	Calibrazione del giroscopio . . . . .	48
6.3.1	Risultati calibrazione giroscopio . . . . .	50
6.4	Calibrazione accelerometro . . . . .	52
6.4.1	Risultati calibrazione accelerometro . . . . .	53
6.5	Calibrazione del magnetometro . . . . .	54
6.5.1	Risultati calibrazione magnetometro . . . . .	56
6.6	Sensibilità alle variazioni di temperatura . . . . .	57
<b>7</b>	<b>Descrizione del filtro per la stima dell'assetto</b>	<b>61</b>
7.1	Modello matematico del giroscopio . . . . .	61
7.2	Equazione di stato del filtro . . . . .	62
7.3	Integrazione di ordine zero . . . . .	62
7.4	Equazione di stato dell'errore a tempo continuo . . . . .	63
7.5	Equazione di stato dell'errore a tempo discreto . . . . .	64
7.6	Equazione di misura . . . . .	65
7.6.1	Star tracker . . . . .	66
7.6.2	Accelerometro e magnetometro . . . . .	66
7.7	Il loop del filtro di Kalman . . . . .	68
7.7.1	Inizializzazione . . . . .	68
7.7.2	Predict phase . . . . .	68
7.7.3	Measurement update phase . . . . .	69

<b>8</b>	<b>Implementazione del filtro nel microcontrollore</b>	<b>73</b>
8.1	La scelta del microcontrollore . . . . .	73
8.1.1	Riduzione del costo computazionale dell'algoritmo . . . . .	74
8.2	La lettura degli encoder con il microcontrollore . . . . .	75
8.2.1	Gli encoder incrementali rotativi . . . . .	75
8.2.2	L'interrupt . . . . .	75
8.2.3	Algoritmo di lettura . . . . .	76
8.2.4	Procedura di start degli encoder . . . . .	77
8.2.5	Simulazione dello star tracker tramite encoder . . . . .	77
8.3	La comunicazione del microcontrollore con i sensori . . . . .	78
8.3.1	Il protocollo $I^2C$ . . . . .	78
8.3.2	Read / Write dei registri . . . . .	79
8.3.3	Procedura di inizializzazione . . . . .	80
8.4	Il modulo di comunicazione Wi-Fi . . . . .	81
8.5	La scheda di acquisizione dati . . . . .	82
<b>9</b>	<b>Risultati numerici e sperimentali</b>	<b>83</b>
9.1	Simulazioni numeriche in MATLAB . . . . .	83
9.1.1	Scenario spaziale, simulazione numerica . . . . .	84
9.1.2	Scenario terrestre, simulazione numerica . . . . .	85
9.2	Esecuzione del filtro OFF-Line . . . . .	86
9.2.1	Scenario spaziale, esecuzione OFF-Line . . . . .	87
9.2.2	Scenario terrestre, esecuzione OFF-Line . . . . .	91
9.3	Risultati sperimentali, esecuzione ON-Line del filtro . . . . .	95
9.3.1	Scenario spaziale, esecuzione ON-Line . . . . .	95
9.3.2	Scenario terrestre, esecuzione ON-Line . . . . .	96
9.4	Considerazioni sui tempi di elaborazione del filtro . . . . .	97
<b>10</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>101</b>
	<i>Bibliografia</i>	<b>103</b>



# Elenco delle figure

2.1	Struttura del modulo di assetto. . . . .	4
2.2	Giunto cardanico. . . . .	4
2.3	Schema del sottosistema propulsivo. . . . .	5
2.4	Schema elettrico ripartizione tensioni. . . . .	7
2.5	Configurazione di montaggio per l'elettronica di bordo. . . . .	8
3.1	Il processo ricorsivo del filtro di Kalman [11]. . . . .	14
3.2	Algoritmo del filtro di Kalman. . . . .	17
3.3	Algoritmo del filtro di Kalman esteso. . . . .	20
4.1	Azione della forza di Coriolis agente su una massa $m$ . . . . .	22
4.2	Principio di funzionamento del giroscopio MEMS. . . . .	23
4.3	Principio di funzionamento dell'accelerometro capacitivo [7]. . . . .	24
4.4	Magnetizzazione Permalloy [10]. . . . .	25
4.5	Principio funzionamento della configurazione burber-pole [10]. . . . .	26
4.6	La scheda GY-521. . . . .	28
4.7	Schema elettrico della scheda GY-521. . . . .	28
4.8	La scheda GY-273. . . . .	29
4.9	Schema elettrico della scheda GY-273. . . . .	29
5.1	Calcolo delle medie nei cluster per $\tau = 2s$ . . . . .	33
5.2	Rappresentazione dei diversi termini di rumore nella deviazione di Allan. . . . .	33
5.3	Rumore di quantizzazione nella deviazione di Allan. . . . .	34
5.4	Angle Random Walk nella deviazione di Allan. . . . .	35
5.5	Instabilità di Bias nella deviazione di Allan. . . . .	36
5.6	Rate Random Walk nella deviazione di Allan. . . . .	37
5.7	Deviazioni di Allan ricavate alle diverse frequenze di taglio del filtro. . . . .	39
5.8	Noise Error in funzione della frequenza di taglio del filtro. . . . .	39
5.9	Delay Error in funzione della frequenza di taglio del filtro. . . . .	40
5.10	Giroscopio. Deviazione di Allan. . . . .	41
5.11	Accelerometro. Deviazione di Allan. . . . .	42
5.12	Magnetometro. Deviazione di Allan. . . . .	43
5.13	Magnetometro. Valori di rumore dichiarati dal produttore [3]. . . . .	43
5.14	Confronto tra velocità angolari simulate e reali. . . . .	44

5.15	Confronto deviazioni di Allan tra dati simulati e reali. . . . .	44
6.1	Disallineamenti tra gli assi di sense e gli assi della terna body [6]. . . . .	47
6.2	Posizionamento del sensore MPU-6050 nel simulatore meccanico. . . . .	49
6.3	Giroscopio. Confronto tra misure calibrate e non calibrate. . . . .	51
6.4	Giroscopio. Errore nelle misure calibrate e non calibrate. . . . .	51
6.5	Strumenti utilizzati per la regolazione del piano di appoggio. . . . .	52
6.6	Accelerometro. Confronto tra misure calibrate e non calibrate. . . . .	53
6.7	Accelerometro. Errore nelle misure calibrate e non calibrate. . . . .	54
6.8	Posizionamento del sensore HMC5883L nel simulatore meccanico. . . . .	55
6.9	Magnetometro. Confronto tra misure calibrate e non calibrate. . . . .	56
6.10	Magnetometro. Errore nelle misure calibrate e non calibrate. . . . .	57
6.11	Setup per l'acquisizione delle misure al variare della temperatura. . . . .	58
6.12	Giroscopio. Curve di correlazione al variare della temperatura. . . . .	58
6.13	Accelerometro. Curve di correlazione al variare della temperatura. . . . .	59
7.1	Algoritmo del filtro di Kalman esteso utilizzato . . . . .	71
8.1	Schema di collegamento degli encoder [2]. . . . .	75
8.2	Canali A e B di un encoder in quadratura. . . . .	76
8.3	Escursioni angolari per l'asse di roll. . . . .	77
8.4	Condizioni di START e STOP nel bus I <sup>2</sup> C[4]. . . . .	79
8.5	L'acknowledge ACK nel bus I <sup>2</sup> C[4]. . . . .	79
8.6	Esempio di trasferimento dati nel bus I <sup>2</sup> C[4]. . . . .	80
8.7	Modulo Wi-Fi per l'alloggiamento dell'XBee. . . . .	81
8.8	Schema elettrico del modulo Wi-fi. . . . .	81
8.9	Scheda di acquisizione dati. . . . .	82
8.10	Il modulo di navigazione completo. . . . .	82
9.1	Profilo di accelerazione imposto lungo l'asse z. . . . .	84
9.2	Profilo angolo di yaw. . . . .	84
9.3	Scenario spaziale. Errore relativo al quaternion $q_3$ . . . . .	85
9.4	Scenario spaziale. Confronto tra gli errori di rms relativi a $q_3$ alle diverse frequenze operative del filtro. . . . .	85
9.5	Scenario terrestre. Errore relativo al quaternion $q_3$ . . . . .	86
9.6	Scenario terrestre. Confronto tra gli errori di rms relativi a $q_3$ alle diverse frequenze operative del filtro. . . . .	86
9.7	Scenario terrestre, esecuzione OFF-Line. Angoli di Eulero. . . . .	88
9.8	Scenario spaziale, esecuzione OFF-Line. Errore del quaternion TEST 1 . . . .	88
9.9	Scenario spaziale, esecuzione OFF-Line. Correzioni dello stato del sistema TEST 1. . . . .	89
9.10	Scenario spaziale, esecuzione OFF-Line. Andamento del bias TEST 1. . . . .	89
9.11	Scenario spaziale, esecuzione OFF-Line. Errore relativo alle velocità angolari TEST 1. . . . .	90

9.12	Analisi di Montecarlo. Sommatoria degli errori rms del quaternione al variare del parametro $k$ . . . . .	91
9.13	Analisi di Montecarlo. Errori di rms nel quaternione al variare del parametro $k$ . . . . .	92
9.14	Scenario terrestre, esecuzione OFF-Line. Errore del quaternione TEST 1. . . . .	92
9.15	Scenario terrestre, esecuzione OFF-Line. Correzioni dello stato del sistema TEST 1. . . . .	93
9.16	Scenario terrestre, esecuzione OFF-Line. Andamento del bias nei primi 10 secondi di funzionamento TEST 1. . . . .	93
9.17	Scenario terrestre, esecuzione OFF-Line.. Errore relativo alle velocità angolari TEST 1. . . . .	94
9.18	Scenario spaziale, esecuzione ON-Line. Errore negli angoli di Eulero. . . . .	96
9.19	Scenario terrestre, esecuzione ON-Line. Errore negli angoli di Eulero. . . . .	97
9.20	Scenario spaziale. Tempi di acquisizione ed elaborazione dati. . . . .	99
9.21	Scenario terrestre. Tempi di acquisizione ed elaborazione dati. . . . .	99



# Elenco delle tabelle

5.1	MPU-6050. Frequenze di taglio selezionabili nel filtro passabasso [5]. . . . .	38
5.2	Rumore bianco alle diverse frequenze di taglio del filtro. . . . .	39
5.3	Giroscopio. Coefficienti di rumore ricavati. . . . .	41
5.4	Giroscopio. Valori di rumore dichiarati dal produttore. . . . .	41
5.5	Accelerometro. Coefficienti di rumore ricavati. . . . .	42
5.6	Accelerometro. Valori di rumore dichiarati dal produttore . . . . .	42
5.7	Magnetometro. Coefficienti di rumore ricavati. . . . .	43
6.1	Fattori di scala dei sensori. . . . .	46
6.2	Giroscopio. Errori di rms prima e dopo la calibrazione. . . . .	52
6.3	Accelerometro. Errori di rms prima e dopo la calibrazione. . . . .	54
6.4	Magnetometro. Errori di rms prima e dopo la calibrazione. . . . .	57
6.5	MPU-6050. Coefficienti di correlazione al variare della temperatura. . . . .	60
8.1	Specifiche tecniche Arduino UNO & Arduino Due. . . . .	74
8.2	Matrice per il conteggio degli encoder. . . . .	76
8.3	Indirizzo dei sensori nel bus $I^2C$ . . . . .	80
8.4	Indirizzo dei registri e valori impostati. . . . .	81
9.1	Esecuzione OFF-Line. Test effettuati. . . . .	87
9.2	Scenario spaziale, esecuzione OFF-Line. Errori nella determinazione dell' assetto. . . . .	90
9.3	Scenario spaziale, esecuzione OFF-Line. Errori nella determinazione della velocità angolare. . . . .	91
9.4	Scenario terrestre, esecuzione OFF-Line. Errori nella determinazione dell' assetto. . . . .	94
9.5	Scenario terrestre, esecuzione OFF-Line. Errori nella determinazione della velocità angolare. . . . .	95
9.6	Scenario spaziale, esecuzione ON-Line. Test effettuati. . . . .	95
9.7	Scenario spaziale, esecuzione ON-Line. Errori nella determinazione dell' assetto. . . . .	96
9.8	Scenario terrestre, esecuzione ON-Line. Test effettuati. . . . .	97
9.9	Scenario terrestre, esecuzione ON-Line. Errori nella determinazione dell' assetto. . . . .	97
9.10	Tempi di acquisizione dati nel bus $I^2C$ . . . . .	98
9.11	Tempi di elaborazione nel filtro. . . . .	98



# Capitolo 1

## Introduzione

Nell'ultimo decennio si è ampiamente diffuso in ambito accademico lo sviluppo di veicoli spaziali di ridotte dimensioni, quali nanosatelliti o picosatelliti. Questi sistemi, oltre a fornire la possibilità a studenti e ricercatori di acquisire il know-how necessario alla progettazione di componenti che operano in ambiente spaziale, hanno costituito un punto di partenza per l'idea di sostituire satelliti dalle dimensioni e costi onerosi con più satelliti di dimensioni contenute in grado di cooperare in formazione. I principali vantaggi del volo spaziale in formazione risiedono in una maggiore flessibilità operativa, nella riduzione dei rischi di failure e in un notevole abbattimento dei costi di missione. Si impone tuttavia lo sviluppo di nuove tecnologie di miniaturizzazione e strategie di controllo, volte a ridurre il consumo di propellente per il mantenimento della formazione orbitale. In quest'ottica il Centro di Ateneo di Studi e Attività Spaziali (CISAS) e il Dipartimento di Ingegneria Industriale (DII) dell'Università degli Studi di Padova hanno dato vita a un progetto finalizzato alla costruzione di un simulatore hardware che fornisca la possibilità a studenti e ricercatori di sviluppare, progettare, validare, algoritmi di navigazione e controllo d'assetto per il volo spaziale in formazione, manovre di docking e rendez-vous. Tale progetto prende il nome di SPARTANS ovvero SPACeRaft Testbed for Autonomous proximity operatiONs experimentS e pone come obiettivo la creazione di un simulatore meccanico a tre gradi di libertà rotazionali e due gradi di libertà traslazionali che permettano di riprodurre, seppur parzialmente, le condizioni di moto a basso attrito tipiche di un ambiente spaziale.

### 1.1 Obiettivo della tesi

Il lavoro presente all'interno di questa tesi costituisce un piccolo contributo all'attività svolta fino ad ora nel progetto SPARTANS e in particolare è focalizzato allo sviluppo di un sistema di navigazione per il modulo d'assetto.

Nei seguenti capitoli verranno presentate le diverse fasi di progettazione, simulazione, costruzione e test di un sistema in grado di determinare l'orientazione angolare del simulatore meccanico, usufruendo di sensori e componenti facilmente reperibili nel mercato consumer.

L'obiettivo finale è quello di raggiungere i requisiti di accuratezza definiti inizialmente in [9], corrispondenti a  $0.5^\circ$  in termini di posizione angolare e  $0.5^\circ/\text{s}$  in termini di velocità angolare.

## 1.2 Outline della tesi

Il presente elaborato è strutturato in modo da fornire al lettore, all'inizio di ogni capitolo, il background teorico necessario alla comprensione dei risultati ottenuti.

La tesi è organizzata nei seguenti 9 capitoli:

- Capitolo 1: presentazione del modulo di assetto e dei diversi sottosistemi hardware che lo compongono.
- Capitolo 2: descrizione dei principali metodi di rappresentazione dell'assetto e introduzione teorica al principio di funzionamento del filtro di Kalman.
- Capitolo 3: principio di funzionamento dei sensori utilizzati per la determinazione dell'assetto, presentazione della piattaforma inerziale MPU-6050 e del magnetometro HMC5883L.
- Capitolo 4: studio del rumore presente nelle misure dei sensori mediante il metodo della deviazione di Allan e presentazione dei risultati relativi ai campionamenti eseguiti.
- Capitolo 5: studio delle componenti di errore deterministico nelle misure dei sensori, descrizione delle procedure di calibrazione e presentazione dei risultati.
- Capitolo 6: descrizione del filtro di Kalman esteso utilizzato per la determinazione dell'assetto.
- Capitolo 7: implementazione del filtro nel microcontrollore, con particolare riferimento alle modalità con cui i sensori forniscono le informazioni al microcontrollore e alle strategie con cui vengono da questo elaborate.
- Capitolo 8: presentazione dei risultati numerici e sperimentali relativi al funzionamento del filtro, rappresentando due possibili scenari operativi.
- Capitolo 9: conclusioni sul lavoro svolto e possibili sviluppi futuri.

## Capitolo 2

# Il modulo di assetto

Nel presente capitolo si descrivono le principali caratteristiche del modulo di assetto per il quale è stato sviluppato il sistema di navigazione. Il modulo è costituito da cinque sottosistemi principali che permettono di eseguire in completa autonomia le manovre di assetto:

- sottosistema strutturale;
- sottosistema propulsivo;
- sottosistema elettrico e di potenza;
- sottosistema di determinazione e controllo d'assetto;
- sottosistema di comunicazione e gestione dei dati.

### 2.1 Sottosistema strutturale

Il modulo di assetto (Fig. 2.1) è costituito da un parallelepipedo a base quadrata di lato pari a 540 mm e altezza 400 mm. La struttura è realizzata mediante profilati di alluminio, in grado di collegarsi tra loro attraverso apposite scanalature, evitando la necessità di eseguire fori e la rigidità complessiva della struttura è garantita dalla presenza di quattro piastre orizzontali in alluminio, necessarie al supporto dei componenti e da ulteriori quattro piastre disposte verticalmente per l'alloggiamento dei thrusters.

La movimentazione del modulo è resa possibile da un sistema a giunto cardanico (Fig. 2.2) appositamente progettato, composto da tre cerniere cilindriche disposte ortogonalmente tra loro e avente il centro di rotazione coincidente all'intersezione dei tre assi. La costruzione meccanica del giunto permette di movimentare liberamente la struttura attorno l'asse di yaw, ma limita le rotazioni degli assi di roll e pitch in un range di  $[-40^\circ; +40^\circ]$ . La presenza di un supporto verticale in alluminio collegato alla base, permette di mantenere il centro di rotazione della struttura sollevato di 40 cm rispetto al piano orizzontale, evitando in tal modo che si verifichino urti.

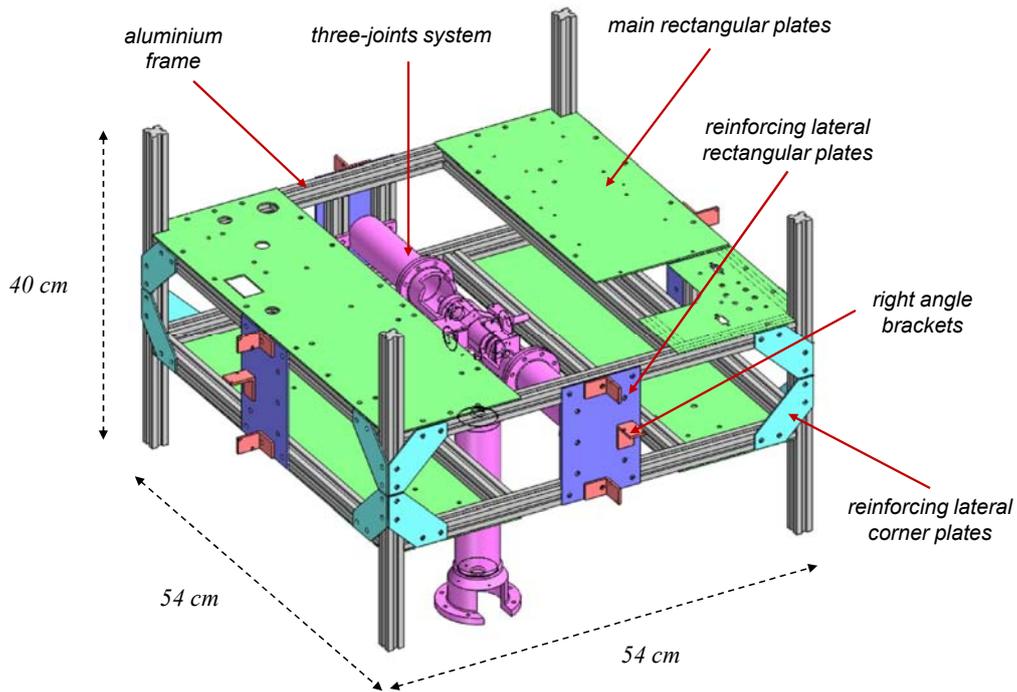


Figura 2.1: Struttura del modulo di assetto.

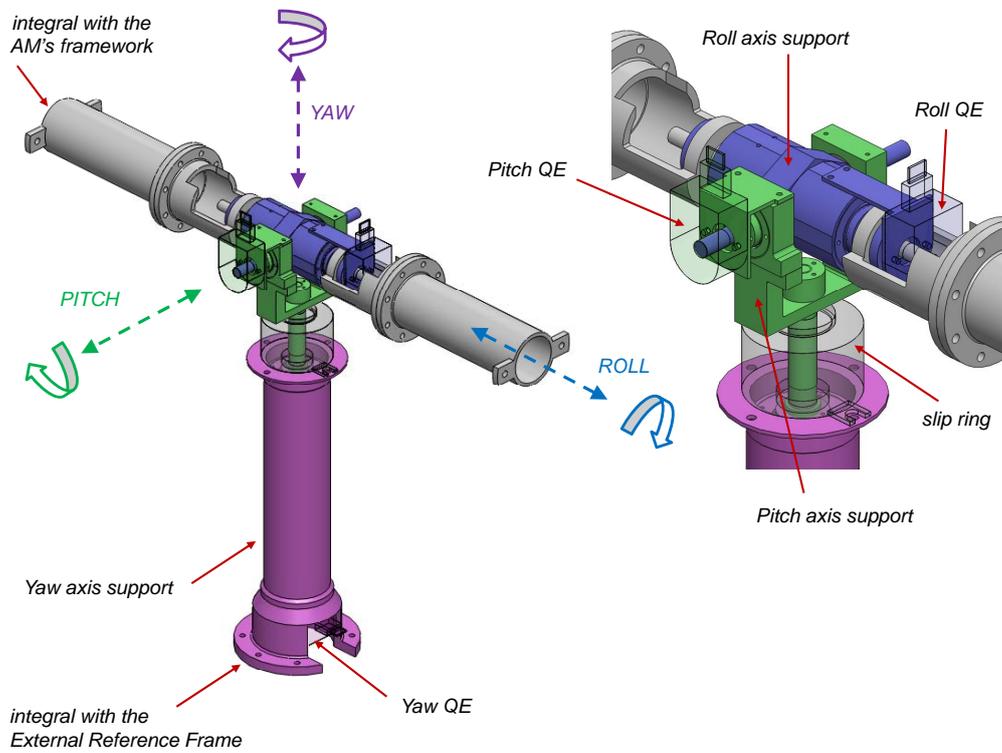


Figura 2.2: Giunto cardanico.

## 2.2 Sottosistema propulsivo

Il sottosistema propulsivo (Fig. 2.3) consente l'attuazione delle elettrovalvole posizionate sulle piastre laterali del modulo d'assetto. La disposizione dei thrusters permette a ciascuna coppia di attuatori l'erogazione di un momento positivo o negativo.

Il sottosistema è composto da un circuito pneumatico di alta pressione a cui appartengono i seguenti segmenti:

- due serbatoi CFRP che permettono di immagazzinare 1 Lt. di aria compressa ciascuno, ad una pressione massima di 200 bar;
- un sistema di valvole e condutture per la distribuzione, il riempimento e lo svuotamento del fluido;
- un regolatore che permette di ridurre la pressione al valore operativo delle elettrovalvole, pari a 10 bar.

e un circuito di bassa pressione costituito da:

- due collettori a sei vie che dividono il flusso in arrivo dal regolatore di pressione per alimentare i thrusters;
- sei coppie di thrusters per attuare le azioni di controllo;
- condotti a sezione variabile in materiale plastico per interconnettere diversi segmenti del circuito di bassa pressione.

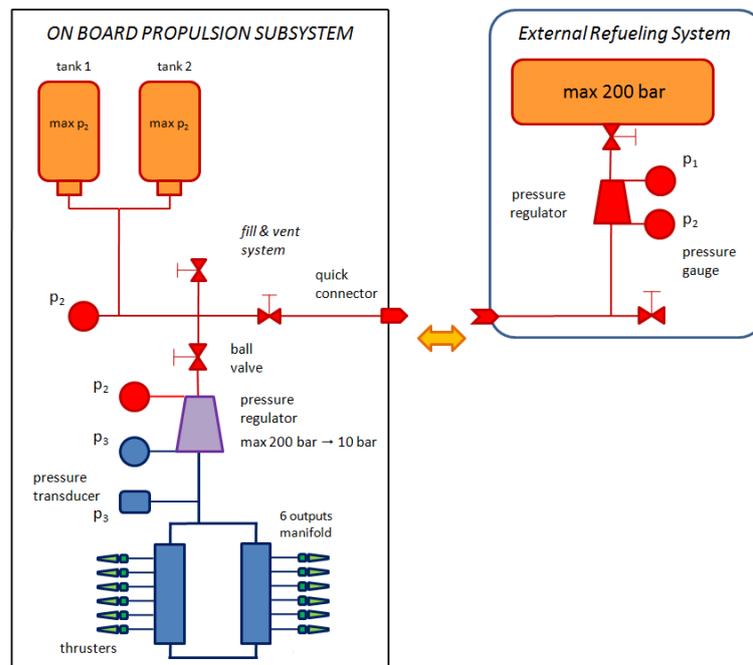


Figura 2.3: Schema del sottosistema propulsivo.

Ogni thrusters è costituito da una elettrovalvola solenoidale e da un ugello convergente con diametro della sezione di uscita pari a 0.75 mm. L'attuazione dell'azione di controllo

viene eseguita comandando la tensione ai capi dell'elettrovalvola in modalità on/off mediante un apposito circuito appartenente al sottosistema di determinazione e controllo d'assetto. Quando l'elettrovalvola si apre, il fluido viene espanso nell'ugello generando una spinta e conseguentemente una coppia attorno al relativo asse.

A seguito di test sperimentali eseguiti in precedenza è stata misurata la massima spinta erogabile da un singolo thruster alla pressione operativa di 10 bar:

$$S = (0.389 \pm 0.007) N \quad (2.1)$$

Considerando il braccio fisso  $b = 30 \text{ cm}$  a cui sono posizionati i thrusters, la coppia massima erogabile corrisponde a:

$$\tau_{max} = S \cdot b = 0.1167 N \cdot m \quad (2.2)$$

La modulazione PWM permette di approssimare un'azione di controllo mediante impulsi di coppia di ampiezza  $\tau_{max}$  agenti per un tempo  $t$ , corrispondente al tempo di apertura dell'elettrovalvola.

Il rapporto tra il tempo di apertura  $t$  e il periodo del segnale  $T_c$ , definisce il duty cycle dell'onda quadra:

$$\delta = \frac{t}{T_c} \quad (2.3)$$

e la coppia effettivamente erogata può esser calcolata mediante la seguente relazione:

$$\tau = \delta \tau_{max} \quad (2.4)$$

Al microcontrollore appartenente al sottosistema di determinazione e controllo d'assetto è affidato il compito di modulare il duty cycle  $\delta = f(\tau)$  dell'onda quadra in funzione della coppia di attuazione  $\tau$  che si desidera erogare.

## 2.3 Sottosistema elettrico e di potenza

La potenza elettrica necessaria al modulo è fornita da 2 batterie ricaricabili al Ni-Cd da 12 VDC connesse in serie tra loro e aventi ciascuna una capacità di 4 Ah. Mediante un'apposita scheda provvista di convertitori DC/DC la tensione viene convertita nei diversi livelli operativi necessari al funzionamento di ogni singolo apparato secondo lo schema riportato in (Fig. 2.4).

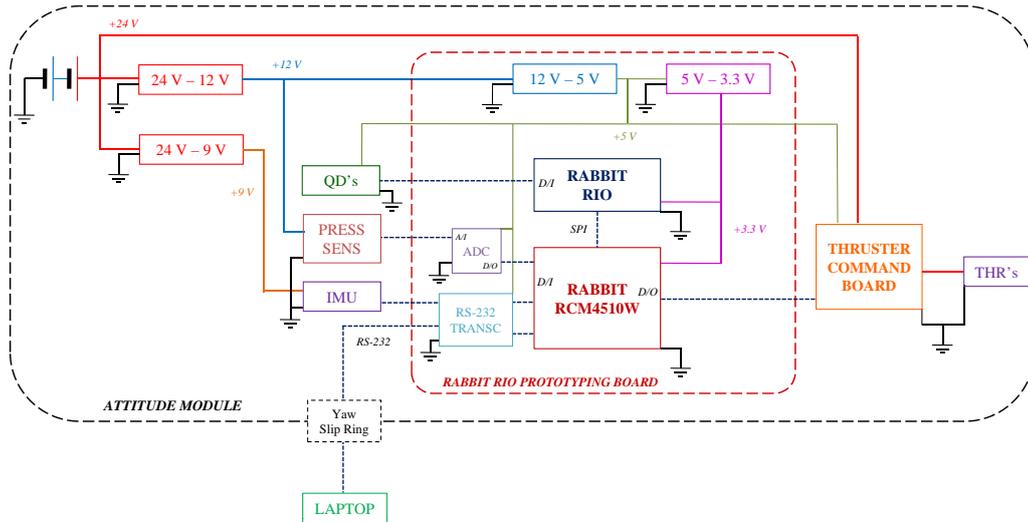


Figura 2.4: Schema elettrico ripartizione tensioni.

## 2.4 Sottosistema di determinazione e controllo d'assetto

Il Sistema di Determinazione & Controllo dell'Assetto (ADCS) integra i sensori necessari a determinare l'orientazione del modulo di assetto e un sistema elettronico (Fig. 2.5) per elaborare le informazioni acquisite e comandare l'attuazione delle elettrovalvole.

Il sistema elettronico è costituito da una scheda di prototipazione Rabbit, dotata di un microcontrollore Rabbit RCM 4510W e un chip Rabbit RIO per la lettura degli encoder.

Allo stato iniziale del progetto, il modulo era composto da due tipologie di sensori per determinare l'assetto:

- Tre encoder incrementali rotativi HEDM 5500-B13 da 500 cicli/giro della Avago Technologies, posizionati in corrispondenza degli snodi del giunto cardanico (Fig. 2.2) e in grado di misurare le rotazioni attorno agli assi di roll, pitch e yaw con una risoluzione pari a  $0.09^\circ$ .
- Una piattaforma inerziale 3DM-GX1 della Microstrain, al cui interno sono integrati tre sensori per la determinazione dell'assetto: giroscopio, accelerometro e magnetometro.

Nel lavoro proposto in questa tesi la piattaforma inerziale 3DM-GX1 verrà sostituita da un sistema progettato appositamente per il modulo d'assetto, cercando di migliorare l'accuratezza e rendendo il sistema il più indipendente possibile dalle misure di posizione angolare degli encoder.

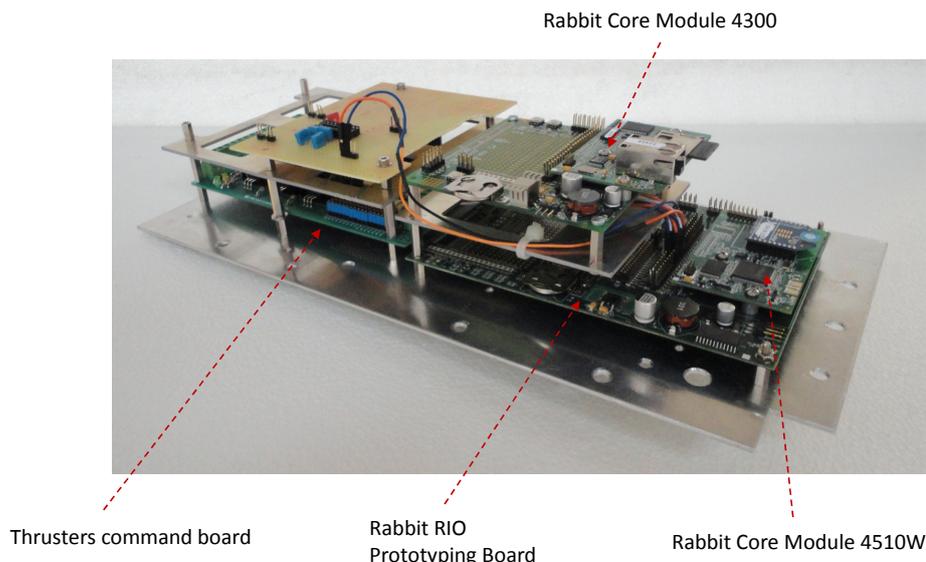


Figura 2.5: Configurazione di montaggio per l'elettronica di bordo.

## 2.5 Sottosistema di comunicazione e gestione dei dati

La comunicazione dei dati tra il modulo di assetto e il PC avviene mediante interfaccia seriale RS-232 utilizzando lo slip ring posizionato sul giunto di yaw. In tal modo il modulo può inviare i dati di telemetria e configurazione dell'assetto e ricevere le informazioni per eseguire le manovre attraverso un protocollo di scambio dati dedicato. Ogni pacchetto dati è costituito da un header di 5 byte contenente informazioni riguardanti i dati trasmessi, un corpo di dimensione variabile da n-byte e 2 byte finali per l'esecuzione del checksum e la detezione di eventuali errori.

Il software di bordo è scritto in Dynamic C ed è organizzato in sei moduli, corrispondenti ai principali processi che devono essere gestiti dal microcontrollore. Ad ogni modulo è associata la relativa libreria:

- sensori (SENS);
- determinazione della posizione e dell'assetto (PADS);
- calcolo delle azioni di controllo (CTRL);
- propulsione (PROP);
- comunicazione (COMM);
- house keeping (HKP).

Il loop di controllo è eseguito con frequenza prefissata e prevede la lettura dei sensori di posizione, la determinazione dello stato cinematico e il calcolo delle azioni di controllo.

## Capitolo 3

# La determinazione dell'assetto

Nel presente capitolo verrà presentata una panoramica dei principali metodi adottati per descrivere l'orientazione spaziale di un oggetto e rappresentarne l'assetto. Si introdurrà inoltre a livello teorico uno dei filtri maggiormente utilizzati per la determinazione dell'assetto: il filtro di Kalman.

### 3.1 Sistemi di coordinate

Per rappresentare l'orientazione dello spacecraft, due principali sistemi di riferimento (s.d.r.) verranno presi in considerazione in questa tesi:

- **s.d.r. NAVIGATION:** è un sistema di riferimento inerziale la cui origine coincide con il centro di rotazione del giunto cardanico del simulatore. Costituisce un riferimento fisso nello spazio, adatto a stabilire l'orientazione della terna body. Questa orientazione viene misurata mediante tre encoder incrementali, posizionati in corrispondenza dei tre assi del giunto, i quali forniscono la misura degli angoli di Eulero. Indicheremo nei prossimi capitoli la terna di navigazione con la lettera N.
- **s.d.r. BODY:** è un sistema di riferimento non inerziale, solidale al corpo, la cui origine coincide con il centro di rotazione del giunto cardanico del simulatore. Tale centro di rotazione è a sua volta coincidente con il centro di massa della piattaforma d'assetto stessa, al fine di permettere il bilanciamento dei momenti dovuti all'accelerazione di gravità. Tutte le misure acquisite dai sensori, quali: giroscopio, accelerometro, magnetometro e star tracker verranno espresse in questo sistema di riferimento che indicheremo nei prossimi capitoli con la lettera B.

### 3.2 Gli angoli di Eulero

La parametrizzazione dell'assetto mediante angoli di Eulero prevede l'utilizzo di tre parametri:  $\phi, \theta, \psi$  denominati rispettivamente roll, pitch e yaw. Questi termini definiscono una sequenza di tre rotazioni che permettono di stabilire l'orientazione della terna body B rispetto la terna di navigazione N. Le singole rotazioni possono essere eseguite in diverse combinazioni, una delle sequenze maggiormente adottate nei problemi di assetto è l'ordine 3-2-1 .

Ogni rotazione può esser rappresentata mediante una matrice ortogonale e considerando la sequenza 3-2-1, le matrici associate rispettivamente alle rotazioni di  $\psi, \theta, \phi$  sono:

$$\mathbf{R}_3(\psi) = \begin{bmatrix} c(\psi) & s(\psi) & 0 \\ -s(\psi) & c(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{R}_2(\theta) = \begin{bmatrix} c(\theta) & 0 & -s(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ s(\theta) & 0 & c(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{R}_1(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c(\phi) & s(\phi) \\ 0 & -s(\phi) & c(\phi) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

in cui:

- $\mathbf{R}_3$  rappresenta la rotazione di un angolo  $\psi$  attorno all'asse  $z_N$ ;
- $\mathbf{R}_2$  rappresenta la rotazione di un angolo  $\theta$  attorno all'asse della terna intermedia  $y_1$ ;
- $\mathbf{R}_1$  rappresenta la rotazione di un angolo  $\phi$  attorno all'asse della terna intermedia  $x_2$ .

La matrice di rotazione che permette il cambio di coordinate dal s.d.r. N al s.d.r. B si ottiene moltiplicando opportunamente le tre matrici sopra elencate:

$${}^B_N\mathbf{R} = \mathbf{R}_1(\phi)\mathbf{R}_2(\theta)\mathbf{R}_3(\psi) \quad (3.4)$$

e in forma estesa risulta:

$${}^B_N\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c(\psi)c(\theta) & c(\theta)s(\psi) & -s(\theta) \\ c(\psi)s(\phi)s(\theta) - c(\phi)s(\psi) & c(\phi)c(\psi) + s(\phi)s(\psi)s(\theta) & c(\theta)s(\phi) \\ s(\phi)s(\psi) + c(\phi)c(\psi)s(\theta) & c(\phi)s(\psi)s(\theta) - c(\psi)s(\phi) & c(\phi)c(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Le matrici  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3$  permettono inoltre di esprimere la velocità angolare nel s.d.r. B a partire dai valori di velocità angolare  $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$  orientati rispettivamente lungo gli assi  $z_N, y_1, x_2$ :

$${}^B\boldsymbol{\omega} = \mathbf{R}_1 \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2\mathbf{R}_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

la quale in forma matriciale compatta risulta:

$${}^B\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s(\theta) \\ 0 & c(\phi) & s(\phi)c(\theta) \\ 0 & -s(\phi) & c(\phi)c(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

La parametrizzazione tramite angoli di Eulero, seppure di facile interpretazione fisica, risulta tuttavia computazionalmente onerosa e poco efficiente. La presenza di numerose funzioni trigonometriche e la possibilità che si verifichino singolarità numeriche la rendono infatti poco adatta ad esser utilizzata negli algoritmi per la determinazione dell'assetto. Per questo motivo, gli angoli di Eulero verranno utilizzati unicamente per misurare l'orientazione del simulatore mediante gli encoder e per l'esposizione grafica degli andamenti dell'assetto.

### 3.3 I quaternioni

I quaternioni d'assetto o parametri di Eulero, sono entità matematiche introdotte da William Rowan Hamilton nel 1843 come estensioni dei numeri complessi e vengono tutt'oggi utilizzati per rappresentare l'assetto di un corpo o di una terna di riferimento nello spazio tridimensionale. La loro definizione deriva dalla seguente proposizione, meglio nota come Teorema di Mozzi:

*In un atto di moto rigido è sempre possibile individuare un asse di istantanea rotazione e l'atto di moto può esser sempre ricondotto ad una rotazione attorno a tale asse.*

Definendo l'asse di istantanea rotazione come un versore di tre componenti che identifica una direzione nello spazio:

$$\hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

e la rotazione attorno a tale asse con l'angolo  $\theta$ , il quaternione può esser definito nel modo seguente:

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ k_y \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ k_z \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

in cui  $q_1, q_2, q_3$  possono essere considerate componenti di un vettore  $\mathbf{q}$  appartenente allo spazio euclideo, mentre  $q_4$  rappresenta la parte scalare del quaternione. Insieme verificano la seguente condizione che vincola  $\bar{q}$  a muoversi su un'ipersfera di raggio unitario:

$$|\bar{q}| = \sqrt{|\mathbf{q}|^2 + q_4^2} = 1 \quad (3.10)$$

Il quaternione può essere inoltre interpretato come estensione in più dimensioni dei numeri complessi e lo si definisce in maniera del tutto equivalente nel seguente modo:

$$\bar{q} = q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} + q_4 \quad (3.11)$$

ove  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  sono i numeri immaginari che soddisfano le condizioni:

$$\mathbf{i}^2 = -\mathbf{1}, \quad \mathbf{j}^2 = -\mathbf{1}, \quad \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1},$$

$$-\mathbf{ij} = \mathbf{ij} = \mathbf{k}, \quad -\mathbf{jk} = \mathbf{kj} = \mathbf{i}, \quad -\mathbf{ki} = \mathbf{ik} = \mathbf{j}$$

Si noti che è stata adottata la notazione della mano sinistra per il prodotto vettoriale, in accordo con la convenzione proposta dallo standard JPL.

Per combinare le rotazioni di un corpo mediante i quaternioni, si usufruisce dell'operatore di moltiplicazione quaternionica, indicato solitamente con il simbolo  $\otimes$ .

Se si considerano ad esempio i quaternioni  $\bar{q}$  e  $\bar{p}$ , la moltiplicazione quaternionica tra i due è definita come:

$$\bar{q} \otimes \bar{p} = (q_4 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k})(p_4 + p_1 \mathbf{i} + p_2 \mathbf{j} + p_3 \mathbf{k}) \quad (3.12)$$

$$= \begin{bmatrix} q_4 p_1 + q_3 p_2 - q_2 p_3 + q_1 p_4 \\ -q_3 p_1 + q_4 p_2 + q_1 p_3 + q_2 p_4 \\ q_2 p_1 - q_1 p_2 + q_4 p_3 + q_3 p_4 \\ -q_1 p_1 - q_2 p_2 - q_3 p_3 + q_4 p_4 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

e corrisponde al prodotto scalare di due vettori contenenti gli elementi dei quaternioni.

La moltiplicazione può in alternativa essere scritta sotto forma di prodotto tra matrici; per fare questo si introduce l'operatore antisimmetrico  $[\mathbf{q} \times]$ :

$$[\mathbf{q} \times] = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

da cui il prodotto vettoriale delle componenti immaginarie di  $\bar{q}$  e  $\bar{p}$  risulta:

$$\mathbf{q} \times \mathbf{p} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

La moltiplicazione quaternionica può ora esser riscritta sotto forma di prodotto tra matrici nella forma più compatta:

$$\bar{q} \otimes \bar{p} = \begin{bmatrix} q_4 \mathbf{I}_{3 \times 3} - [\mathbf{q} \times] & \mathbf{q} \\ -\mathbf{q}^T & q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ p_4 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Conoscendo il quaternione dell'assetto attuale  $\bar{q}(t)$  e la velocità angolare del sistema  $\boldsymbol{\omega}$  è inoltre possibile determinare la derivata temporale del quaternione, mediante la seguente relazione:

$$\dot{\bar{q}}(t) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}) \bar{q}(t) \quad (3.17)$$

in cui l'operatore  $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega})$  corrisponde a:

$$\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

La parametrizzazione dell'assetto tramite i quaternioni risulta molto più efficiente da un punto di vista computazionale rispetto all'uso degli angoli di Eulero, seppur svantaggioso per l'interpretazione fisica. E' possibile infatti descrivere le rotazioni attraverso relazioni lineari, evitando le numerose funzioni trigonometriche e riducendo gli errori nel processo di integrazione numerica. Questo ne giustifica la loro larga diffusione in tutte le applicazioni in cui è di fondamentale importanza determinare l'orientazione spaziale.

Per completezza, si riportano di seguito le formule utili ad eseguire la conversione tra angoli di Eulero e quaternioni:

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{atan2}(2(q_4 q_1 + q_2 q_3), 1 - 2(q_1^2 + q_2^2)) \\ \arcsin(2(q_4 q_2 - q_3 q_1)) \\ \text{atan2}(2(q_4 q_3 + q_1 q_2), 1 - 2(q_2^2 + q_3^2)) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\bar{q} = \bar{q}(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} c\left(\frac{\phi}{2}\right) c\left(\frac{\theta}{2}\right) c\left(\frac{\psi}{2}\right) + s\left(\frac{\phi}{2}\right) s\left(\frac{\theta}{2}\right) s\left(\frac{\psi}{2}\right) \\ s\left(\frac{\phi}{2}\right) c\left(\frac{\theta}{2}\right) c\left(\frac{\psi}{2}\right) - c\left(\frac{\phi}{2}\right) s\left(\frac{\theta}{2}\right) s\left(\frac{\psi}{2}\right) \\ c\left(\frac{\phi}{2}\right) s\left(\frac{\theta}{2}\right) c\left(\frac{\psi}{2}\right) + c\left(\frac{\phi}{2}\right) c\left(\frac{\theta}{2}\right) s\left(\frac{\psi}{2}\right) \\ c\left(\frac{\phi}{2}\right) c\left(\frac{\theta}{2}\right) s\left(\frac{\psi}{2}\right) - s\left(\frac{\phi}{2}\right) s\left(\frac{\theta}{2}\right) c\left(\frac{\psi}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

### 3.4 Il filtro di Kalman

Nel 1960 Rudolf Emil Kálmán pubblicò il suo famoso paper in cui descriveva un metodo ricorsivo per determinare lo stato di un processo. Tutt'oggi molto utilizzato, tale procedimento è conosciuto con il nome di filtro di Kalman e costituisce un efficiente metodo per eseguire una stima di eventi passati, presenti e futuri in un processo. Questa stima, basata sulla minimizzazione dell'errore tra il modello matematico e le misure, si compone di due fasi ben distinte:

- **TIME UPDATE o PREDICTION PHASE:** in questa fase si esegue una previsione dello stato e della covarianza dell'errore, basandosi sul modello matematico del sistema. Questa stima viene solitamente definita con il termine di stima a priori del sistema.
- **MEASUREMENT UPDATE o CORRECTION PHASE:** in questa fase si esegue una correzione dello stato a priori attraverso una misura esterna. Si ottiene in tal modo una migliore stima dello stato, definita con il termine di stima a posteriori del sistema.

Il filtro di Kalman opera quindi come un algoritmo predictor-corrector, applicando il procedimento sopra esposto in maniera ricorsiva (Fig. 3.1).

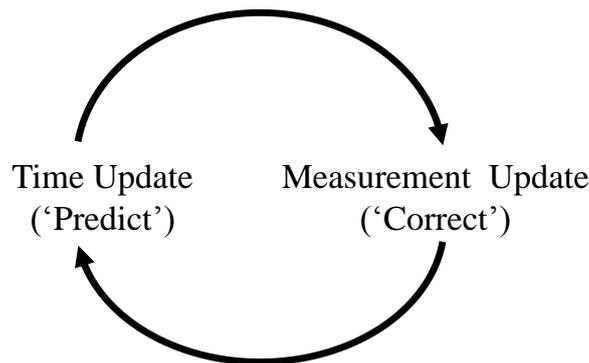


Figura 3.1: Il processo ricorsivo del filtro di Kalman [11].

#### 3.4.1 Il filtro di Kalman discreto

Lo scopo del filtro di Kalman discreto è quello di determinare lo stato di un processo governato da un'equazione stocastica lineare alle differenze finite:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{W}_{k-1} \mathbf{w}_{k-1} \quad (3.21)$$

e un' equazione di misura:

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{V}_k \mathbf{v}_k \quad (3.22)$$

in cui:

- $\mathbf{x}_k$  è il vettore dello stato del sistema;
- $\mathbf{u}_k$  è il vettore dell'input di controllo del sistema;
- $\mathbf{A}_k$  è la matrice che lega lo stato del sistema  $\mathbf{x}_{k-1}$  con lo stato  $\mathbf{x}_k$ ;
- $\mathbf{B}_k$  è la matrice che lega l'input  $\mathbf{u}$  con con lo stato del sistema  $\mathbf{x}_k$ ;
- $\mathbf{W}_k$  è la matrice che lega il rumore  $\mathbf{w}$  allo stato del sistema  $\mathbf{x}_k$ ;
- $\mathbf{w}_k$  è il rumore bianco Gaussiano avente media nulla  $E[\mathbf{w}_k] = 0$  e covarianza nota  $E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_i^T] = \mathbf{Q}_k$  se  $i = k$ , zero altrimenti;
- $\mathbf{z}_k$  è il vettore di misura;
- $\mathbf{H}_k$  è la matrice che lega lo stato del sistema alla misura  $\mathbf{z}_k$ ;
- $\mathbf{V}_k$  è la matrice che lega il rumore  $\mathbf{v}$  alla misura  $\mathbf{z}_k$ ;
- $\mathbf{v}_k$  è il rumore bianco Gaussiano avente media nulla  $E[\mathbf{v}_k] = 0$  e covarianza nota  $E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_i^T] = \mathbf{R}_k$  se  $i = k$ , zero altrimenti.

Si assume inoltre che i rumori  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{v}$  nelle due equazioni siano tra loro non correlati, di conseguenza le matrici di covarianza  $\mathbf{Q}_k$  ed  $\mathbf{R}_k$  risultano tra loro indipendenti.

Definendo con  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  lo stato a priori del nostro sistema allo step  $k$  e  $\hat{\mathbf{x}}_k^+$  lo stato a posteriori del nostro sistema allo step  $k$ , possiamo stimare l'errore a priori e l'errore a posteriori nel seguente modo:

$$\mathbf{e}_k^- = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^- \quad (3.23)$$

$$\mathbf{e}_k^+ = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^+ \quad (3.24)$$

Le cui matrici di covarianza, associate rispettivamente all'errore di stima dello stato a priori e a posteriori risultano:

$$\mathbf{P}_k^- = E[\mathbf{e}_k^- \mathbf{e}_k^{-T}] \quad (3.25)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = E[\mathbf{e}_k^+ \mathbf{e}_k^{+T}] \quad (3.26)$$

Lo stato a posteriori  $\mathbf{x}_k^+$  è calcolato come combinazione lineare dello stato a priori con una differenza ponderata tra l'attuale misura  $\mathbf{z}_k$  e la misura prevista  $\mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-$ :

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad (3.27)$$

in cui:

- $(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-)$  è il termine che riflette la discrepanza tra l'attuale misura  $\mathbf{z}_k$  e la misura prevista  $\mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-$  e viene solitamente definito residuo;
- $\mathbf{K}_k$  è il guadagno di Kalman.

Il guadagno di Kalman corrisponde a quel fattore che permette di minimizzare la matrice di covarianza  $\mathbf{P}_k$  e viene calcolato mediante la seguente relazione:

$$\mathbf{K}_k = \frac{\mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T}{(\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{V}_k \mathbf{R}_k \mathbf{V}_k^T)} \quad (3.28)$$

Osservando la (3.27) e la (3.28) si può notare come  $\mathbf{K}_k$  pesi in misura maggiore il valore del residuo se la matrice di covarianza di misura  $\mathbf{R}_k$  tende a zero.

$$\lim_{\mathbf{R}_k \rightarrow 0} \mathbf{K}_k = \mathbf{H}_k^{-1} \implies \hat{\mathbf{x}}_k^+ \rightarrow \mathbf{H}_k^{-1} \mathbf{z}_k \quad (3.29)$$

In ugual modo,  $\mathbf{K}_k$  pesa in misura minore il residuo se la matrice di covarianza dello stato a priori  $\mathbf{P}_k^-$  tende a zero.

$$\lim_{\mathbf{P}_k^- \rightarrow 0} \mathbf{K}_k = 0 \implies \hat{\mathbf{x}}_k^+ \rightarrow \hat{\mathbf{x}}_k^- \quad (3.30)$$

Il guadagno di Kalman permette quindi di eseguire la stima ottimale dello stato di un sistema, pesando il valore della misura in maniera proporzionale al suo grado di affidabilità. Questo grado di affidabilità viene definito dal confronto tra la covarianza della misura prevista mediante il modello matematico e la covarianza della misura realmente acquisita.

Una volta determinato lo stato del sistema a posteriori  $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ , una nuova matrice di covarianza viene calcolata mediante:

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- \quad (3.31)$$

concludendo in tal modo la fase di MEASUREMENT UPDATE.

Nella fase di TIME UPDATE, si determina il nuovo stato a priori  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-$  basandosi sul modello matematico del sistema, definito dall'equazione di processo:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_k^+ + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k \quad (3.32)$$

e la nuova matrice di covarianza dello stato a priori viene calcolata mediante:

$$\mathbf{P}_{k+1}^- = \mathbf{A}_k \mathbf{P}_k^+ \mathbf{A}_k^T + \mathbf{W}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{W}_k^T \quad (3.33)$$

Il funzionamento completo del filtro è riportato in (Fig. 3.2).

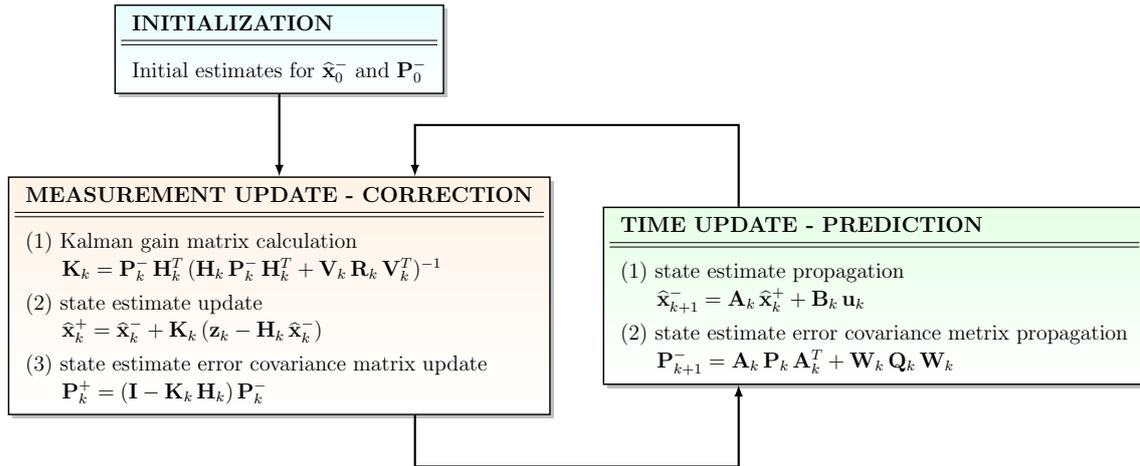


Figura 3.2: Algoritmo del filtro di Kalman.

### 3.4.2 Il filtro di Kalman discreto con formulazione estesa

La formulazione estesa del filtro di Kalman EKF viene adottata quando il processo da stimare e/o la relazione che lega la misura allo stato del sistema è di tipo non lineare. L'equazione differenziale che esprime il legame tra lo stato del sistema allo step  $k - 1$  con quelle allo step  $k$  è:

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}) \quad (3.34)$$

e l'equazione di misura:

$$\mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) \quad (3.35)$$

in cui:

- $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{v}$  sono i rumori, rispettivamente di processo e di misura;
- $f$  è la funzione non lineare che lega lo stato  $\mathbf{x}_{k-1}$  allo stato  $\mathbf{x}_k$ ;
- $h$  è la funzione non lineare che lega lo stato  $\mathbf{x}_k$  alla misura  $\mathbf{z}_k$ .

Nella pratica, è impossibile conoscere i valori di  $\mathbf{w}_{k-1}$  e  $\mathbf{v}_k$  ad ogni time step. Tuttavia si può approssimare il vettore di stato (3.34) e di misura (3.35) nel seguente modo:

$$\bar{\mathbf{x}}_k = f(\bar{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, 0) \quad (3.36)$$

$$\bar{\mathbf{z}}_k = h(\bar{\mathbf{x}}_k, 0) \quad (3.37)$$

Queste due equazioni rappresentano l'evoluzione dello stato del sistema in assenza del rumore che agisce come termine perturbativo, introducendo una componente di errore.

L'errore dello stato del sistema può essere quindi definito come:

$$\delta \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k \quad (3.38)$$

e l'errore di misura:

$$\delta \mathbf{z}_k = \mathbf{z}_k - \bar{\mathbf{z}}_k \quad (3.39)$$

Assumendo che  $\delta \mathbf{x}$  sia piccolo ed espandendo in serie di Taylor  $f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1})$  rispetto ad  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{w}$  in  $\bar{\mathbf{x}}_{k-1}$  con  $\mathbf{w}_{k-1} = 0$ , la (3.34) risulta:

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1}) = \quad (3.40)$$

$$= f(\bar{\mathbf{x}}_k, \mathbf{u}_{k-1}, 0) + \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, 0} \delta \mathbf{x}_k + \dots \quad (3.41)$$

$$+ \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, 0} \delta \mathbf{w}_{k-1} + h.o.t. \quad (3.42)$$

$$= \bar{\mathbf{x}}_k + \mathbf{A}_{k-1} \delta \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{W}_{k-1} \mathbf{w}_{k-1} + h.o.t. \quad (3.43)$$

da cui, assumendo trascurabili i termini di ordine superiore, si ottiene l'equazione linearizzata di propagazione per l'errore  $\delta \mathbf{x}$

$$\delta \mathbf{x}_k = \mathbf{A}_{k-1} (\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1}) + \mathbf{W}_{k-1} \mathbf{w}_{k-1} \quad (3.44)$$

in cui:

- $\mathbf{A}$  è la matrice Jacobiana contenente le derivate parziali di  $f$  rispetto a  $\mathbf{x}$  e corrisponde a:

$$\mathbf{A}_{k-1} = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}_{k-1}, 0} \quad (3.45)$$

- $\mathbf{W}$  è la matrice Jacobiana contenente le derivate parziali di  $f$  rispetto a  $\mathbf{w}$  e corrisponde a:

$$\mathbf{W}_{k-1} = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{w}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}_{k-1}, 0} \quad (3.46)$$

Eseguendo lo stesso procedimento per  $\delta \mathbf{z}$ , espandendo in serie di Taylor  $h(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  rispetto ad  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{v}$  in  $\bar{\mathbf{x}}_k$  con  $\mathbf{v}_k = 0$ , la (3.35) risulta:

$$\mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) = \quad (3.47)$$

$$= f(\bar{\mathbf{x}}_k, 0) + \left. \frac{\partial h(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}_k, 0} \delta \mathbf{x}_k + \dots \quad (3.48)$$

$$+ \left. \frac{\partial h(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}_k, 0} \delta \mathbf{v}_k + h.o.t. \quad (3.49)$$

$$= \bar{\mathbf{z}}_k + \mathbf{H}_k \delta \mathbf{x}_k + \mathbf{V}_k \mathbf{v}_k + h.o.t. \quad (3.50)$$

Da cui, assumendo trascurabili i termini di ordine superiore, si ottiene l'equazione linearizzata di propagazione per l'errore  $\delta \mathbf{z}$ :

$$\delta \mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \delta \mathbf{x}_k + \mathbf{V}_k \mathbf{v}_k \quad (3.51)$$

in cui:

- $\mathbf{H}$  è la matrice Jacobiana contenente le derivate parziali di  $h$  rispetto a  $\mathbf{x}$  e corrisponde a:

$$\mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial h(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}_k, 0} \quad (3.52)$$

- $\mathbf{V}$  è la matrice Jacobiana contenente le derivate parziali di  $h$  rispetto a  $\mathbf{v}$  e corrisponde a:

$$\mathbf{V}_k = \left. \frac{\partial h(\mathbf{x}, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}_k, 0} \quad (3.53)$$

La (3.44) e (3.51) possono inoltre esser riscritte nel seguente modo:

$$\delta \mathbf{x}_k \approx \mathbf{A}_k \delta \mathbf{x}_{k-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_k \quad (3.54)$$

$$\delta \mathbf{z}_k \approx \mathbf{H}_k \delta \mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}_k \quad (3.55)$$

in cui:

- $\boldsymbol{\varepsilon}_k$  è la variabile indipendente del rumore presente nella stima dell'errore di processo, avente media nulla e matrice di covarianza  $\mathbf{W}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{W}_k^T$  con  $\mathbf{Q}_k$  definito come in (3.4.1);
- $\boldsymbol{\eta}_k$  è la variabile indipendente del rumore presente nell'errore di misura, avente media nulla e matrice di covarianza  $\mathbf{V}_k \mathbf{R}_k \mathbf{V}_k^T$  con  $\mathbf{R}_k$  definito come in (3.4.1).

Si noti come le equazioni (3.54) e (3.55) risultino ora lineari e siano analoghe alle equazioni (3.32) e (3.33) viste precedentemente. La principale differenza consiste nel fatto che la formulazione estesa esegue la propagazione dell'errore  $\delta \mathbf{x}$  e  $\delta \mathbf{z}$  per poter stimare lo stato del sistema non lineare. Questo comporta un aumento del costo computazionale del filtro in quanto ad ogni step devono esser calcolate le matrici dello Jacobiano per linearizzare le equazioni e al contempo aumenta il rischio che il filtro diverga nel caso in cui lo stato reale del sistema si discosti molto da quello stimato.

La stima del filtro viene completata applicando il procedimento del filtro di Kalman lineare alle (3.54) e (3.55) e lo schema del funzionamento completo è riportato in (Fig. 3.3).

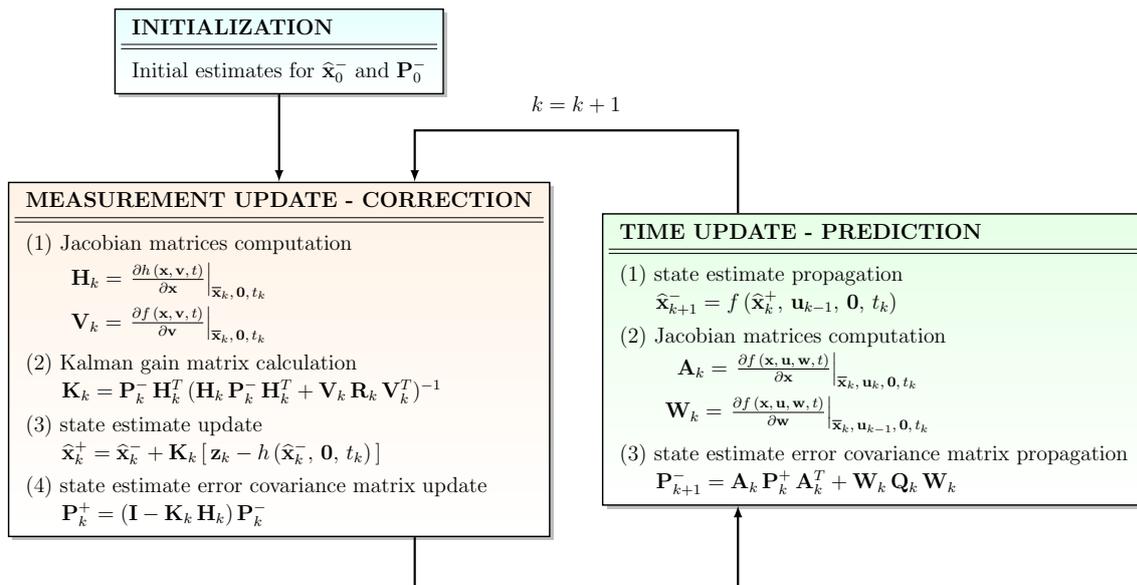


Figura 3.3: Algoritmo del filtro di Kalman esteso.

## Capitolo 4

# I sensori per la dinamica d'assetto

Nel presente capitolo vengono analizzati i principi di funzionamento dei sensori utilizzati per determinare l'assetto del simulatore meccanico, con particolare riferimento ad accelerometri e giroscopi MEMS (Micro Electro Mechanical System) e magnetometri MR (Magneto Resistivi). Verrà inoltre eseguita una panoramica sulle principali caratteristiche della piattaforma inerziale MPU-6050 e del magnetometro HMC5883L.

### 4.1 Il giroscopio

Il giroscopio è un dispositivo in grado di misurare la velocità di rotazione di un corpo rispetto ad un sistema di riferimento inerziale. Originariamente inventato nel 1800 da Jean Bernard Leon Foucault per dimostrare la rotazione della terra attorno al proprio asse, il giroscopio ha subito nel corso degli anni continui sviluppi e perfezionamenti sia per quanto riguarda il principio fisico operativo che le tecnologie costruttive adottate per la sua fabbricazione e miniaturizzazione.

I campi di applicazione di tale sensore sono molteplici, alcuni esempi possono essere:

- settore automotive: controllo di stabilità e d'assetto, navigazione, controllo delle sospensioni, sistemi anticollisione;
- settore consumer: periferiche del computer, controller per i giochi, equipaggiamento sportivo, videocamere, giocattoli;
- settore industriale: navigazione autonoma di robot, controllo di sistemi idraulici, stabilizzazione di piattaforme di macchinari pesanti, trasporto umano, controllo di yaw dei mulini a vento;
- settore aerospaziale: avionica, stabilizzazione nei sistemi di puntamento per antenne, UAV, sistemi di navigazione inerziale.

I giroscopi MEMS all'interno di questi settori occupano una fetta di mercato appartenente alla fascia low-cost, che non necessita di elevate precisioni. Tuttavia il loro campo di applicazione è destinato ad ampliarsi in futuro, in virtù della loro facilità di integrazione e del tasso di incremento delle loro performance che aumentano di un fattore pari a 10 ogni 2 anni.

#### 4.1.1 Principio di funzionamento del giroscopio MEMS

Questa tipologia di giroscopio usufruisce di piccole masse vibranti per misurare le velocità angolari. Il vantaggio di tale configurazione costruttiva è l'assenza di corpi posti in rotazione e dei relativi giunti che, unito all'utilizzo di avanzate tecniche di microlavorazione del silicio ha permesso di miniaturizzare il sensore, raggiungendo oggi dimensioni nell'ordine del micrometro. Il principio alla base del suo funzionamento è la forza di Coriolis che si genera per effetto del moto del sensore rispetto ad un sistema di riferimento non inerziale.

Si consideri un corpo di dimensioni trascurabili in moto con velocità costante  $v$  rispetto ad un riferimento non inerziale (Fig. 4.1); se il sistema di riferimento relativo ruota con una velocità angolare  $\Omega$  rispetto al sistema di riferimento inerziale, sul corpo agisce una forza, definita forza di Coriolis:

$$F_{coriolis} = -2m\Omega \wedge v \quad (4.1)$$

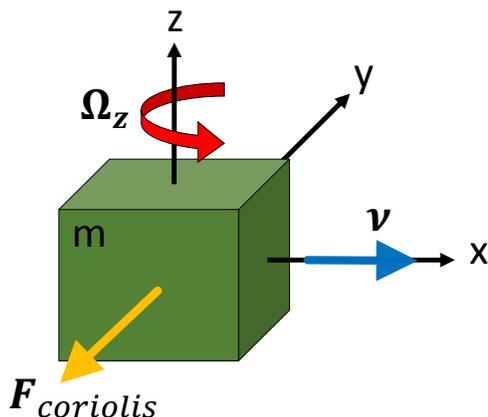


Figura 4.1: Azione della forza di Coriolis agente su una massa  $m$ .

Il sensore MEMS per misurare tale forza usufruisce delle seguenti componenti:

- una massa di drive, costantemente posta in rapida oscillazione lungo la direzione  $x$  alla sua frequenza propria (Fig. 4.2) per mezzo di pettini capacitivi, con controllo in retroazione;
- una massa di sense, che viene eccitata lungo la direzione  $y$  dalla forza di Coriolis quando risulta applicata una velocità angolare al giroscopio.

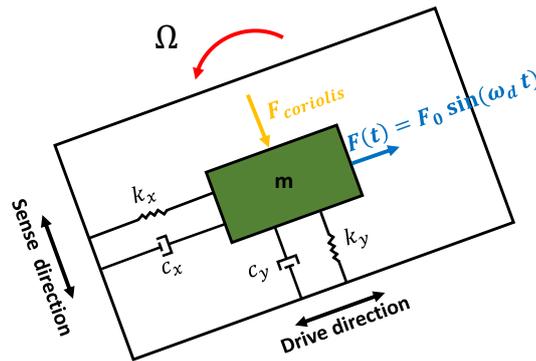


Figura 4.2: Principio di funzionamento del giroscopio MEMS.

La forza di Coriolis genera uno spostamento della massa di sense in una direzione perpendicolare alla velocità  $v$  della massa di drive. Tale spostamento è linearmente correlato alla velocità angolare e viene letto come una variazione di carica elettrica tramite dei pettini capacitivi che circondano la massa (comunemente chiamati pickoff), posti lungo l'asse di attuazione. Successivamente il circuito elettronico all'interno del MEMS converte tale valore di capacità in un potenziale elettrico che viene digitalizzato da un convertitore ADC.

## 4.2 L'accelerometro

L'accelerometro è un dispositivo in grado di misurare l'inerzia di una massa sottoposta ad un'accelerazione. Il principio alla base del funzionamento di quasi tutti gli accelerometri, nella sua forma più semplice, è la misura dello spostamento relativo nella direzione dell'asse sensibile di una massa di prova (proof mass), collegata al telaio mediante un'opportuna rigidità. Tale spostamento risulta direttamente proporzionale all'accelerazione agente sul corpo se la rigidità non varia in funzione delle condizioni operative.

Quello che contraddistingue principalmente le diverse tecnologie costruttive del sensore è la modalità con cui viene generato il segnale elettrico a partire dallo spostamento della massa di prova. Di seguito è riportata una breve classificazione degli accelerometri in base al meccanismo di trasduzione impiegato:

- accelerometro estensimetrico (resistivo);
- accelerometro LVDT (Linear Variable Differential Transformer);
- accelerometro piezoelettrico;
- accelerometro termico;
- accelerometro laser;
- accelerometro capacitivo.

Si possono inoltre suddividere gli accelerometri in due macro-categorie:

- accelerometri per misure di accelerazione statica: adatti a rilevare accelerazioni continue e statiche come ad esempio l'accelerazione di gravità. Possono quindi esser usati come

sensori di tilt, per determinare l'orientazione di un oggetto, misurando la proiezione del vettore accelerazione di gravità sugli assi appartenenti alla terna del sensore.

- accelerometri per misure di accelerazione dinamica: in grado di rilevare solo le accelerazioni che variano nel tempo, come quelle generate da urti o vibrazioni.

#### 4.2.1 Principio di funzionamento dell'accelerometro MEMS

L'accelerometro MEMS rientra nella categoria degli accelerometri capacitivi. Questa tecnologia usufruisce della variazione di carica elettrica di un condensatore, associata alla distanza tra le sue armature, per misurare lo spostamento di una o più masse di prova. La massa di prova, realizzata con materiale conduttivo, costituisce una delle due armature del sensore e si interfaccia mediante dei pettini interdigitali con l'armatura fissata alla struttura del dispositivo. La massa è mantenuta sospesa per mezzo di un elemento elastico per evitare che le due armature entrino in contatto tra loro e l'applicazione di una forza al sensore ne provoca lo spostamento, generando una variazione di capacità (Fig. 4.3).

Tale variazione di capacità, viene prima convertita in una differenza di potenziale da un apposito circuito elettronico e successivamente digitalizzata da un convertitore ADC.

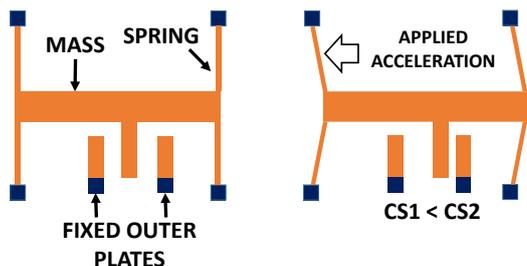


Figura 4.3: Principio di funzionamento dell'accelerometro capacitivo [7].

### 4.3 Il magnetometro

Il magnetometro è un sensore vettoriale che fornisce sia la direzione che il modulo del vettore del campo magnetico  $H$  usufruendo di tre unità sensibili posizionate ortogonalmente tra loro. Sono sensori costruttivamente semplici che non presentano al proprio interno parti in moto a differenza di accelerometri e giroscopi e il principio alla base del loro utilizzo è la determinazione dell'orientazione del vettore di magnetizzazione terrestre.

Tale vettore varia in funzione della latitudine, longitudine e altitudine, tuttavia può essere considerato costante nel caso in cui si operi localmente in assenza di disturbi elettromagnetici esterni generati da periferiche elettroniche o magneti permanenti. L'insieme di tutti questi cofattori contribuisce negativamente alla stima dell'assetto che risulta solitamente limitata a  $\pm 1^\circ$  nei magnetometri. Nei satelliti la metodologia più adottata per migliorare tale stima è quella di usufruire di appendici estensibili esterne (booms) per allontanarli dai campi elettrici generati dall'elettronica di bordo. Tali appendici permettono di posizionare il magnetometro ad una distanza di compromesso tra errore di posizionamento (dovuto alla limitata rigidità dell'appendice) ed errore indotto dal disturbo magnetico del satellite stesso.

Le principali tecnologie costruttive permettono di classificare i magnetometri di uso più comune in 4 categorie:

- magnetometri a spira;
- magnetometri fluxgate;
- magnetometri ad effetto hall;
- magnetometri magnetoresistivi MR o AMR.

### 4.3.1 Principio di funzionamento del magnetometro MR

I magnetometri magneto-resistivi (MR o AMR da Anisotropic Magneto-Resistance) sono sensori dalle dimensioni molto contenute e largamente impiegati all'interno di periferiche quali smartphone o navigatori satellitari. E' composto solitamente da quattro magneto-resistori collegati in configurazione a ponte di Wheatstone che permette di massimizzare la sensibilità, minimizzare la deriva termica e facilitare la taratura durante la fase costruttiva. Il suo principio di funzionamento è basato sulla variazione di resistenza degli elementi disposti lungo la direzione delle linee di flusso del campo magnetico. Queste variazioni provocano lo sbilanciamento del ponte generando una tensione di uscita proporzionale all'intensità del campo magnetico rilevato. L'elemento sensibile è un conduttore avente elevata permeabilità magnetica e magneto-resistenza anisotropica costituito in una particolare lega, denominata Permalloy, composta all'80% di nickel e al 20% di ferro. In assenza del campo magnetico esterno il vettore di magnetizzazione interno si mantiene parallelo al flusso della corrente nel conduttore; mentre quando viene applicato un campo magnetico perpendicolare al flusso di corrente, il vettore di magnetizzazione interno subisce una rotazione  $\alpha$  proporzionale all'intensità del campo magnetico (Fig. 4.4).

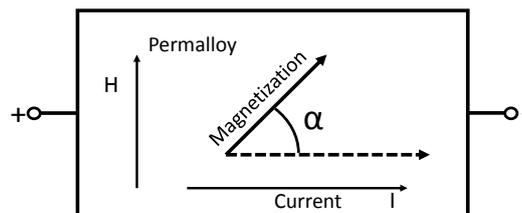


Figura 4.4: Magnetizzazione Permalloy [10].

L'effetto di tale rotazione è una variazione di resistenza al passaggio della corrente che può essere quantificata nel seguente modo:

$$R - R_0 = \Delta R_0 \cos^2 \alpha \quad (4.2)$$

in cui:

- $R_0$  è la resistenza della striscia di Permalloy in assenza di campo magnetico;
- $\alpha$  è l'angolo di cui viene ruotato il vettore di magnetizzazione all'interno del materiale;

- $\Delta R_0$  è una costante che dipende dal tipo di materiale.

La relazione (4.2) può esser riscritta anche nel modo seguente:

$$R = R_0 + \Delta R_0 \left[ 1 - (H_{ext}/H_0)^2 \right] \quad (4.3)$$

in cui:

- $H_{ext}$  è il campo magnetico applicato esternamente;
- $H_0$  è il campo magnetico interno del materiale ferromagnetico, ortogonale ad  $H_{ext}$ .

Dall'equazione (4.2) si può notare che nella relazione ingresso-uscita del sensore non vi è linearità del valore di  $R$  in funzione dell'angolo  $\alpha$  e inoltre si è incapaci di riconoscere il segno di  $\alpha$  e conseguentemente del vettore  $H$ . Entrambe sono caratteristiche non desiderabili per uno strumento di misura e per questo motivo si ricorre alla tecnica detta a barber-pole, che consiste nel depositare sulla superficie del permalloy delle strisce di alluminio posizionate a  $45^\circ$ . Essendo l'alluminio materiale non ferromagnetico, la corrente prende il cammino più corto ortogonale alle strisce del barber-pole (Fig. 4.5), con il vantaggio di modificare la dipendenza tra resistenza e campo magnetico esterno. In questo modo la relazione tra direzione del campo e valore di resistenza del Permalloy diviene univoca e l'uscita risulta linearizzata.

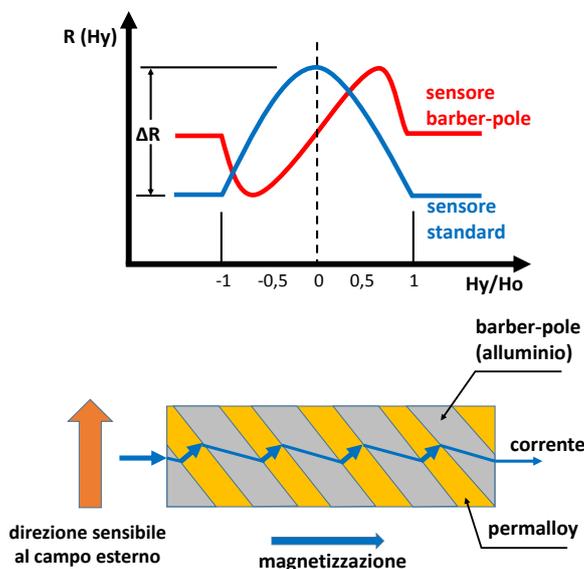


Figura 4.5: Principio funzionamento della configurazione burber-pole [10].

#### 4.4 Il sensore MPU-6050

La MPU-6050 è una piattaforma inerziale a basso costo e dalle dimensioni contenute (4x4x0.9 mm) prodotta da Invensense nel 2010. Integra al proprio interno un giroscopio a tre assi, un accelerometro a tre assi ed un Digital motion Processor, ovvero un microprocessore in grado di eseguire il sensor fusion tra questi due sensori. Tutto questo è asservito da 6 convertitori analogico digitali, in grado di garantire una risoluzione minima di  $61\mu g$  per l'accelerometro

e  $0.0076^\circ/\text{s}$  per il giroscopio . La comunicazione con i registri interni del sensore avviene tramite un bus  $I^2C$  ad una velocità massima di 400 KHz ed ulteriori funzionalità sono la presenza di un sensore di temperatura e di un filtro passa basso, la cui frequenza di taglio può essere selezionata dall'utente tra diverse opzioni.

Le principali caratteristiche della MPU-6050 sono di seguito elencate per fornire una panoramica più chiara delle funzionalità di ogni singolo sensore:

Giroscopio capacitivo MEMS:

- misura delle velocità angolari in formato digitale per gli assi X, Y, Z, con un range massimo selezionabile dall'utente di:  $\pm 250$ ,  $\pm 500$ ,  $\pm 1000$  e  $\pm 2000$   $^\circ/\text{s}$ ;
- convertitore analogico digitale a 16 bit;
- filtro passa basso programmabile a: 256, 188, 98, 42, 20, 10, 5 Hz;
- corrente operativa assorbita: 3.6 mA;
- sensibilità termica (da  $-40^\circ\text{C}$  a  $+85^\circ\text{C}$ ):  $\pm 2\%$ .

Accelerometro capacitivo MEMS:

- misura delle accelerazioni in formato digitale per gli assi X, Y, Z, con un range selezionabile dall'utente di:  $\pm 2g$ ,  $\pm 4g$ ,  $\pm 8g$  e  $\pm 16g$ ;
- convertitore analogico digitale a 16 bit;
- filtro passa basso programmabile a: 260, 184, 94, 44, 21, 10, 5 Hz;
- corrente operativa assorbita:  $500 \mu\text{A}$ ;
- sensibilità termica (da  $-40^\circ\text{C}$  a  $+85^\circ\text{C}$ ):  $\pm 0.02\% / ^\circ\text{C}$ .

Altre caratteristiche del sensore:

- l'algoritmo del Digital Motion Processor (DMP) permette di eseguire il sensor fusion tra giroscopio, accelerometro e magnetometro (se connesso);
- comunicazione tramite bus  $I^2C$  ad una velocità massima pari a 400 KHz;
- presenza di un bus  $I^2C$  ausiliario per permettere la lettura di un sensore esterno (magnetometro);
- VDD operativa compresa tra 2.375 V e 3.46 V;
- bassa sensibilità incrociata tra gli assi del giroscopio e dell'accelerometro (cross axis sensitivity);
- sensore di temperatura interno;
- tolleranza agli shock massima di 10000 g;

- interrupt programmabile e registro FIFO per permettere la lettura veloce dei dati in uscita dal DMP;
- presenza di un generatore di clock interno con bassa sensibilità alla temperatura in tutto il range operativo del sensore;
- possibilità di usufruire di un segnale di clock esterno.

L'integrato MPU-6050 è saldato all'interno della scheda GY-521 (Fig. 4.6), la quale integra l'elettronica di base, un convertitore DC/DC, le resistenze di pull-up per il bus  $I^2C$  e le piazzole necessarie ad interfacciarsi facilmente con un microcontrollore. Lo schema elettrico del circuito è riportato in (Fig. 4.7). Per le complete specifiche tecniche della MPU-6050 si rimanda al datasheet del sensore [4].



Figura 4.6: La scheda GY-521.

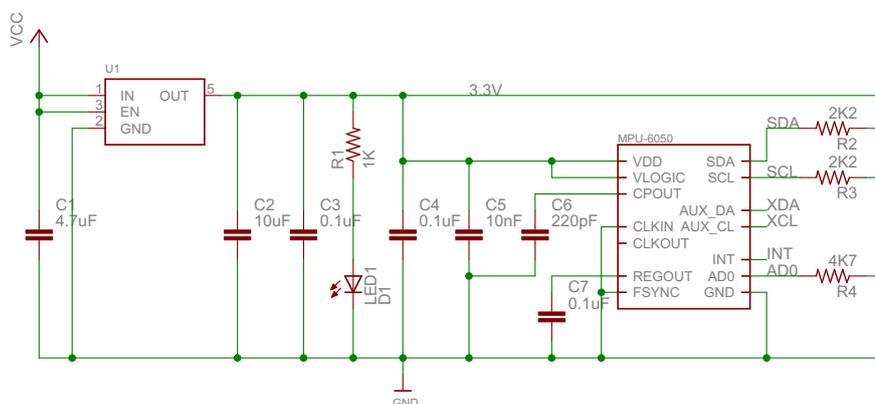


Figura 4.7: Schema elettrico della scheda GY-521.

## 4.5 Il sensore HMC5883L

L' HMC5883L è un magnetometro a basso costo dalle dimensioni contenute (3.0x3.0x0.9 mm) prodotto da Honeywell nel 2013. Progettato per misure di campi magnetici deboli è adatto ad esser utilizzato per determinare il vettore di magnetizzazione terrestre. Al suo interno sono presenti sensori magneto-resistivi ad alta risoluzione e l'elettronica necessaria ad amplificare, filtrare, rimuovere l'offset di misura. La presenza di tre convertitori ADC a 12 bit, uno per ciascun canale di lettura, garantisce una risoluzione minima inferiore a 1 *mGauss*. Il sensore

è in grado di funzionare ad una frequenza massima di 75Hz in polling mode e permette di scambiare facilmente i dati con un microcontrollore attraverso il protocollo  $I^2C$ .

Le principali caratteristiche funzionali del magnetometro sono di seguito riportate:

- misura di intensità del campo magnetico in formato digitale per gli assi X, Y, Z, con un range selezionabile dall'utente di:  $\pm 0.88$ ,  $\pm 1.3$ ,  $\pm 1.9$ ,  $\pm 2.5$ ,  $\pm 4.0$ ,  $\pm 4.7$ ,  $\pm 5.6$ ,  $\pm 8.1$  Gauss;
- convertitore analogico digitale ADC a 12 bit;
- VDD operativa compresa tra 2.16 V e 3.6 V;
- corrente operativa assorbita:  $100 \mu A$ ;
- output data rate programmabile a: 0.75, 1.5, 3, 7.5, 15, 30, 75 Hz;
- velocità massima  $I^2C$  : 400 KHz;
- sensibilità termica:  $-0.3 \%/^{\circ}C$ .

L'integrato HMC5883L è saldato all'interno della scheda GY-273 (Fig. 4.8), la quale integra l'elettronica di base, un convertitore DC/DC, le resistenze di pull-up per il bus  $I^2C$  e le piazzole necessarie ad interfacciarsi al microcontrollore. Lo schema elettrico del circuito è riportato in (Fig. 4.9). Per le complete specifiche tecniche del HMC5883L si rimanda al datasheet del sensore [3].

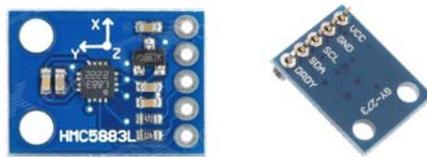


Figura 4.8: La scheda GY-273.

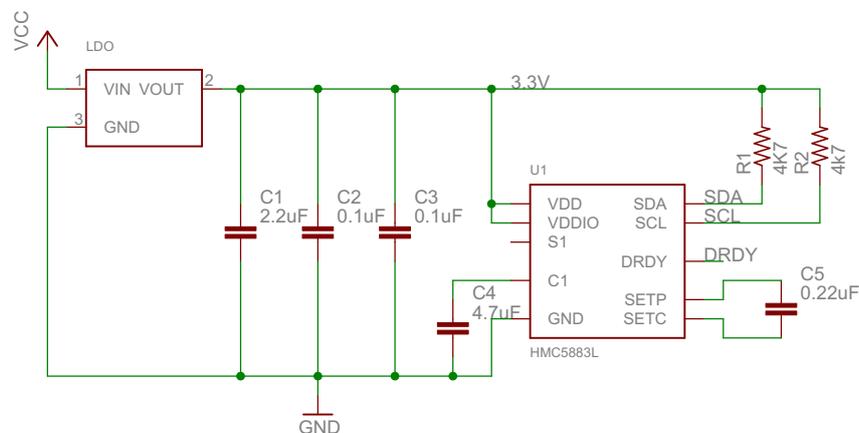


Figura 4.9: Schema elettrico della scheda GY-273.



## Capitolo 5

# Il rumore nei sensori

Nel presente capitolo viene analizzato il rumore presente all'interno dei sensori, adottando un semplice ma realistico modello analitico per determinare le componenti di errore aventi natura stocastica nella piattaforma inerziale MPU-6050 e nel magnetometro HMC5883L. Il procedimento adottato si basa sul metodo della deviazione di Allan definito nell'IEEE STD 647-206 [1].

### 5.1 Modello matematico del rumore

Un semplice modello che si presta facilmente a descrivere il rumore presente nei sensori è il seguente:

$$\Omega_m = \Omega_{true} + \beta + n_w \quad (5.1)$$

in cui:

- $\Omega_m$  è la misura rilevata, affetta da rumore;
- $\hat{\Omega}_{true}$  è il valore vero;
- $\beta$  è il bias;
- $n_w$  è il rumore bianco Gaussiano avente media nulla e varianza  $\sigma_w^2$ .

Il valore del bias non può essere considerato statico, ma varia nel tempo e può essere modellato come un processo di Gauss-Markov, rappresentante il rumore esponenzialmente correlato, la cui equazione è:

$$\dot{\beta} = -\frac{\beta}{\tau_b} + n_b \quad (5.2)$$

in cui:

- $\tau_b$  è il tempo di correlazione;
- $n_b$  è il rumore bianco Gaussiano avente media nulla e varianza  $\sigma_b^2$ .

Il corrispondente modello a tempo discreto del bias risulta:

$$\beta_{k+1} = A_d \beta_k + B_d n_b \quad (5.3)$$

in cui:

- $A_d = \exp\left(-\frac{\Delta t_s}{\tau_b}\right)$ ;
- $B_d = \int_0^{\Delta t_s} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_b}\right) d\tau$ ;
- $\Delta t_s$  è il tempo di campionamento pari all'inverso della frequenza di campionamento  $f_s$ ;
- $\Delta t_b$  è il tempo di correlazione.

Solitamente il tempo di correlazione  $\Delta t_b$  nelle piattaforme inerziali è molto maggiore del tempo di campionamento  $\Delta t_s$  e si possono eseguire le seguenti semplificazioni:

$$A_d \approx 1 \quad (5.4)$$

$$B_d = \int_0^{\Delta t_s} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_b}\right) dt = \left[-\tau_b \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_b}\right)\right]_0^{\Delta t_s} \approx \Delta t_s \quad (5.5)$$

Il modello a tempo discreto si semplifica di conseguenza in:

$$\beta_{k+1} = \beta_k + \Delta t_s n_b \quad (5.6)$$

in cui  $\beta_k$  per  $k = 0$  corrisponde al valore del bias statico.

Nei prossimi paragrafi si ricaveranno i valori della deviazione standard relativi al rumore bianco  $\sigma_w$  e al rumore di bias  $\sigma_b$ , usufruendo delle curve di deviazione di Allan relative a dati sperimentali campionati dai sensori.

## 5.2 La varianza di Allan

La varianza di Allan è una metodologia di analisi nel dominio del tempo inizialmente sviluppata per determinare la stabilità in frequenza degli oscillatori. Può essere inoltre facilmente applicata allo studio del rumore presente all'interno dei sensori permettendo di individuare e distinguere facilmente le diverse componenti.

Si considerino  $N$  dati campionati da un sensore con tempo di campionamento pari a  $\tau_0$ . L'intero intervallo di campionamento dei dati può essere suddiviso in intervalli (comunemente chiamati cluster) le cui durate sono multiple del tempo di campionamento:  $\tau_0, 2\tau_0, 3\tau_0, \dots, i\tau_0$  in cui  $i = \text{floor}(N/\tau_0)$ .

La varianza di Allan si ricava calcolando le medie dei valori presenti all'interno di ogni cluster (Fig. 5.1) ed esprimendo la varianza delle medie dei cluster in funzione della loro lunghezza temporale  $\tau$ .

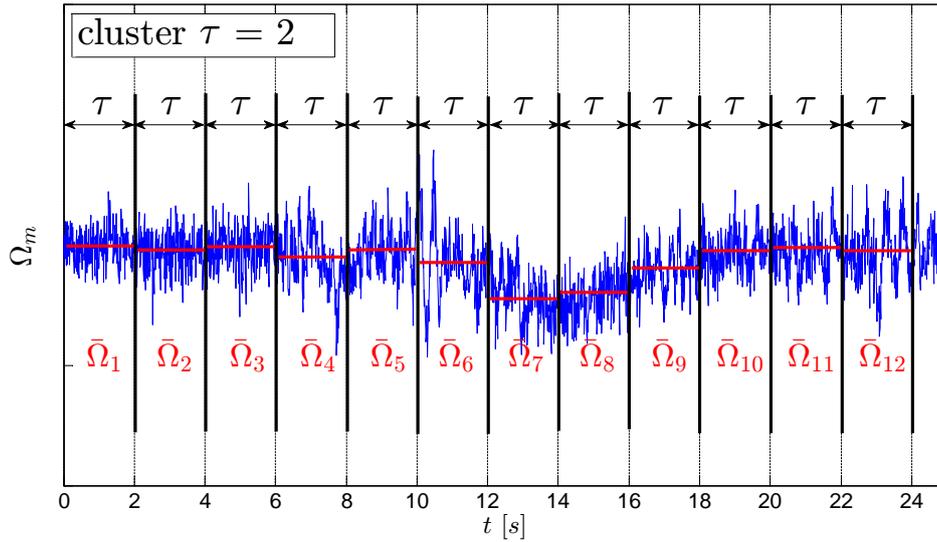


Figura 5.1: Calcolo delle medie nei cluster per  $\tau = 2s$ .

L'espressione matematica del suddetto procedimento risulta:

$$\sigma_A^2(\tau) = \frac{1}{2(K-1)} \sum_{i=1}^{K-1} (\bar{\Omega}_{i+1} - \bar{\Omega}_i)^2 \quad (5.7)$$

in cui:

- $K$  è il numero di cluster presenti all'interno dell'intervallo dati;
- $\tau$  è la dimensione del cluster in secondi;
- $\bar{\Omega}_i$  è la media dei valori presenti nell' $i$  esimo cluster.

Solitamente si fa riferimento alla radice quadrata della varianza di Allan, ovvero alla deviazione di Allan  $\sigma_A(\tau)$  per rappresentarne i valori in un grafico con scala doppio logaritmica.

Un tipico andamento della curva di Allan, è rappresentato in (Fig. 5.2).

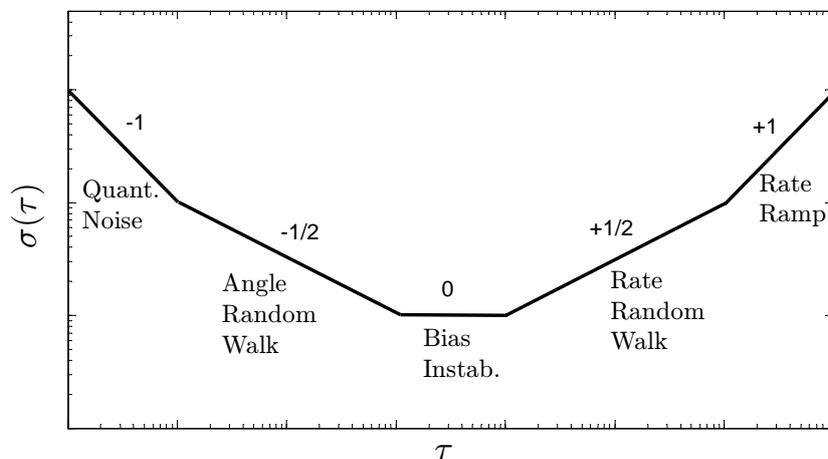


Figura 5.2: Rappresentazione dei diversi termini di rumore nella deviazione di Allan.

In questa tesi in particolare si farà sempre riferimento alla deviazione di Allan in scala doppio logaritmica e verranno analizzati i seguenti termini di rumore:

- Rumore di quantizzazione
- Angle Random Walk (A.R.W.)
- Instabilità di bias
- Rate Random Walk (R.R.W.)

### 5.2.1 Rumore di quantizzazione

Questo termine è strettamente correlato alla natura digitale delle uscite del sensore e alla risoluzione del convertitore analogico digitale interno.

Nella curva di Allan è rappresentato da un tratto con pendenza negativa pari -1 (Fig. 5.3).

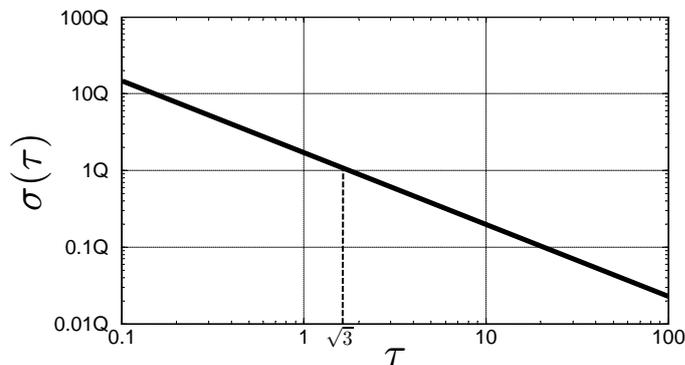


Figura 5.3: Rumore di quantizzazione nella deviazione di Allan.

Il coefficiente che caratterizza questo termine di rumore può essere individuato direttamente dalla curva, prendendo il valore di deviazione in corrispondenza a  $\tau = \sqrt{3}$  oppure può essere ricavato mediante la seguente espressione:

$$Q = \frac{\tau}{\sqrt{3}} \sigma(\tau) \quad (5.8)$$

in cui  $Q$  è il coefficiente del rumore di quantizzazione, il cui limite teorico corrisponde a:  $LSB/\sqrt{12}$  ove  $LSB$  è la risoluzione del giroscopio.

Nella caratterizzazione dei sensori MPU-6050 e HMC5883L non verrà calcolato il coefficiente  $Q$  in quanto la copresenza di un convertitore analogico digitale ad alta risoluzione e di un filtro passa basso permettono di considerare questo rumore di tipo bianco e Gaussiano; di conseguenza il suo contributo rientrerà all'interno del termine di Angle Random Walk.

### 5.2.2 Angle Random Walk (A.R.W.)

Supponiamo di acquisire le misure di un giroscopio mantenuto fermo in un s.d.r. inerziale e di integrare le misure di velocità in uscita dal sensore per ottenere la posizione angolare

del nostro sistema. Osservando l'andamento temporale della posizione angolare, nonostante il sistema giaccia in uno stato di quiete, viene registrato uno spostamento (drift) il quale tende ad aumentare con il trascorrere del tempo. Questo fenomeno, definito anche come "camminata aleatoria" è causato dall'integrazione del rumore bianco, una tipologia di rumore caratterizzata da assenza di periodicità e potenza costante su tutto lo spettro di frequenze.

Nella curva di Allan la presenza di questo termine di rumore è individuabile da un tratto con pendenza negativa pari a  $-1/2$  (Fig. 5.4).

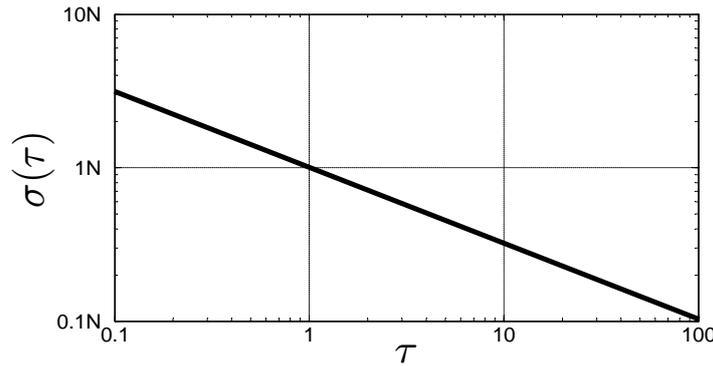


Figura 5.4: Angle Random Walk nella deviazione di Allan.

Il coefficiente di Angle Random Walk può esser direttamente identificato in corrispondenza al valore di  $\tau = 1$  oppure può esser calcolato mediante la seguente formula:

$$N = \sigma(\tau) \sqrt{\tau} \quad (5.9)$$

in cui  $N$  è il coefficiente di Angular Random Walk.

La varianza del rumore bianco per un segnale campionato ad una frequenza  $f_s$  risulta di conseguenza:

$$\sigma_w^2 = N^2 f_s = \frac{N^2}{\Delta t_s} \quad (5.10)$$

### 5.2.3 Instabilità di Bias

L'origine di questo termine è dovuto alla presenza di rumore a bassa frequenza nelle componenti elettroniche che costituiscono il sensore.

Questa tipologia di rumore, solitamente definito anche con il termine di rumore di flicker, rumore rosa o rumore  $1/f$ , è caratterizzato da uno spettro in cui le componenti a bassa frequenza hanno potenza maggiore.

L'andamento nella deviazione di Allan (Fig. 5.5) risulta quindi caratterizzato da una rampa iniziale e da un tratto a pendenza nulla, solitamente definito con il termine di plateau, floor, punto di stabilità di bias o punto di instabilità di bias.

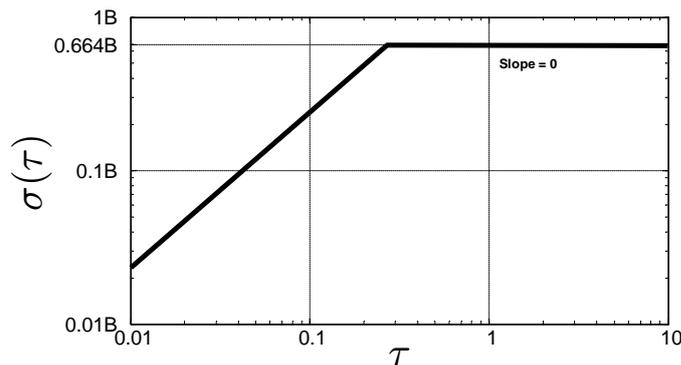


Figura 5.5: Instabilità di Bias nella deviazione di Allan.

Il plateau della deviazione viene raggiunto in corrispondenza al valore di  $\tau$  pari all'inverso della frequenza di taglio del rumore di flicker presente nel sensore.

Si precisa che nelle curve della deviazione di Allan illustrate in questa tesi, non sarà possibile individuare la rampa ascendente in quanto la presenza del rumore bianco nelle componenti ad alta frequenza (relative all'Angular Random Walk) coprono questa fascia e non la rendono distinguibile.

A differenza dell'Angular Random Walk o del rumore di quantizzazione, non è possibile eliminare o ridurre il contributo di questo termine usufruendo di un filtro passa basso, poiché si rimuoverebbero componenti in frequenza appartenenti alla banda passante del sistema. Un metodo indiretto per ridurre il contributo da parte dell'utente dovrebbe invece basarsi sulla stabilizzazione della tensione o della temperatura operativa del sensore.

Il coefficiente di instabilità di bias può essere ricavato conoscendo il valore della deviazione di Allan in corrispondenza del tratto a pendenza nulla nel seguente modo:

$$B = \frac{\sigma(\text{slope} = 0)}{0.664} \quad (5.11)$$

in cui:

- $B$  è il coefficiente di instabilità di bias;
- $\sigma(\text{slope} = 0)$  è il valore di deviazione standard del tratto a pendenza nulla nella curva di Allan.

#### 5.2.4 Rate Random Walk (R.R.W.)

Questo fenomeno è dovuto a processi di natura aleatoria aventi origine incerta, ed è rilevabile con buona accuratezza solo eseguendo acquisizioni di lunga durata. Può essere descritto come un rumore esponenzialmente correlato (detto anche processo di Gauss Markov) avente un tempo di correlazione molto lungo.

Nella curva di Allan la presenza di questo termine di rumore è individuabile da un tratto con pendenza positiva pari a  $+1/2$  (Fig. 5.6).

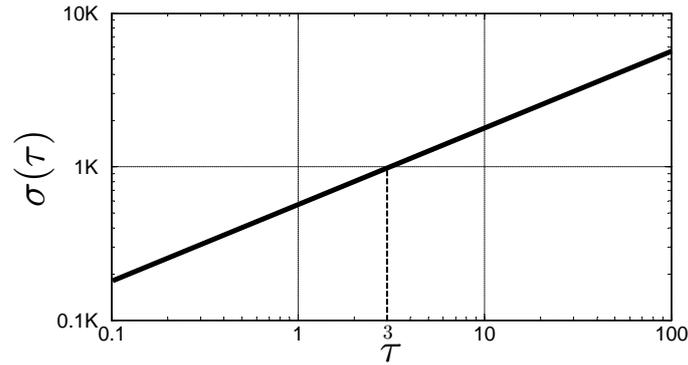


Figura 5.6: Rate Random Walk nella deviazione di Allan.

Il coefficiente caratteristico può essere individuato direttamente all'interno del diagramma prendendo il valore di  $\sigma(\tau)$  in corrispondenza a  $\tau = 3$  o calcolandolo tramite la seguente formula:

$$K = \sqrt{\left(\frac{3}{\tau}\right)} \sigma(\tau) \quad (5.12)$$

in cui  $K$  è il coefficiente di Rate Random Walk.

La varianza del rumore di bias  $n_b$  per un segnale campionato ad una frequenza  $f_s$  risulta:

$$\sigma_b^2 = K^2 f_s = \frac{K^2}{\Delta t_s} \quad (5.13)$$

### 5.3 Deviazione di Allan di MPU-6050 e HMC5883L

Nel presente paragrafo verranno mostrate le curve di Allan relative ai dati campionati con le seguenti configurazioni operative per i sensori:

Giroscopio:

- frequenza operativa = 1 KHz;
- frequenza di campionamento = 100 Hz;
- frequenza di taglio del filtro passa basso interno = 188 Hz.

Accelerometro:

- frequenza operativa = 1 KHz;
- frequenza di campionamento = 100 Hz;
- frequenza di taglio del filtro passa basso interno = 184 Hz.

Magnetometro:

- frequenza operativa = 75 Hz;
- frequenza di campionamento = 75 Hz.

### 5.3.1 Frequenza di taglio del filtro passa basso

La frequenza di taglio del filtro passa basso per giroscopi ed accelerometri viene impostata al medesimo valore poiché i sensori condividono lo stesso registro di configurazione DLPF\_CFG. Questo registro permette di scegliere la frequenza di taglio desiderata tra 5 valori preimpostati, riportati in (Tabella 5.1).

DLP_CFG	Gyroscope		
	Bandwidth	Delay	Fs
	[Hz]	[ms]	[KHz]
0	256	0.98	8
1	188	1.9	1
2	98	2.8	1
3	42	4.8	1
4	20	8.3	1
5	10	13.4	1
6	5	18.6	1
7	RESERVED		8

Tabella 5.1: MPU-6050. Frequenze di taglio selezionabili nel filtro passabasso [5].

Le considerazioni che hanno portato alla scelta dell'impostazione 1 sono state dettate dal compromesso tra due componenti di errore: Noise error e Delay Error.

**Noise Error.** E' l'errore introdotto a causa dell'integrazione del rumore bianco presente nelle misure giroscopiche e può esser calcolato nel seguente modo:

$$Error_{noise} = \sigma_w \cdot \Delta t_s \quad (5.14)$$

in cui:

- $\sigma_w$  corrisponde alla deviazione standard del rumore bianco (5.10);
- $\Delta t_s$  è l'intervallo di integrazione.

Il termine  $\sigma_w$  può esser ricavato dalle curve di Allan (Fig. 5.7) e come si può osservare dalla (Tabella 5.2) risulta direttamente proporzionale al valore della frequenza di taglio del filtro.

Nella (Fig. 5.8) sono riportati gli andamenti dell'errore dovuto all'integrazione di rumore bianco, in funzione delle diverse frequenze di taglio del filtro; non conoscendo a priori come evolva il rumore in condizioni dinamiche, si sono considerate anche le curve a  $2\sigma$  e  $3\sigma$ .

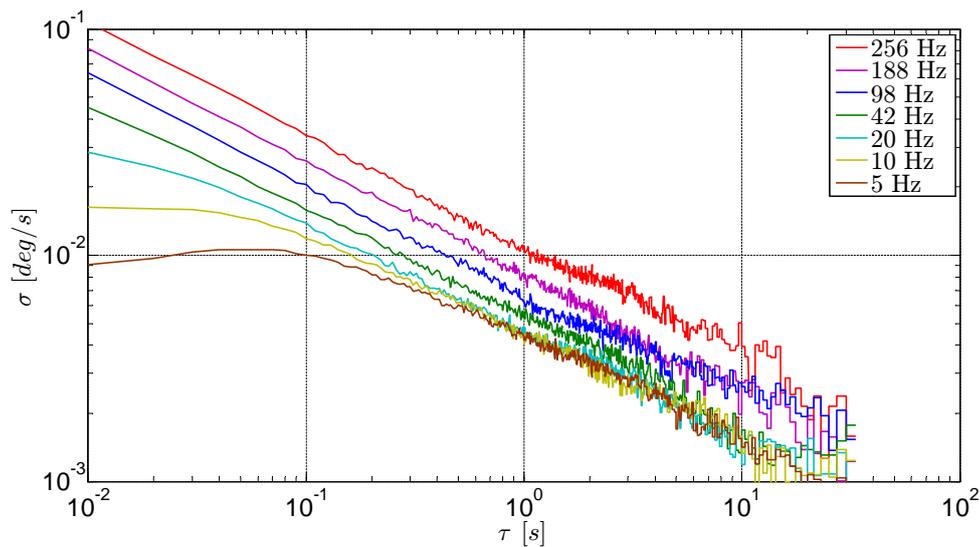


Figura 5.7: Deviazioni di Allan ricavate alle diverse frequenze di taglio del filtro.

$f_{cut}$ [Hz]	256	188	98	42	20	10	5
$N$ [(°/s)/√Hz]	0.0110	0.0083	0.0069	0.0055	0.0046	0.0045	0.0044
$\sigma_w$ [°/s]	0.110	0.083	0.069	0.055	0.046	0.045	0.044

Tabella 5.2: Rumore bianco alle diverse frequenze di taglio del filtro.

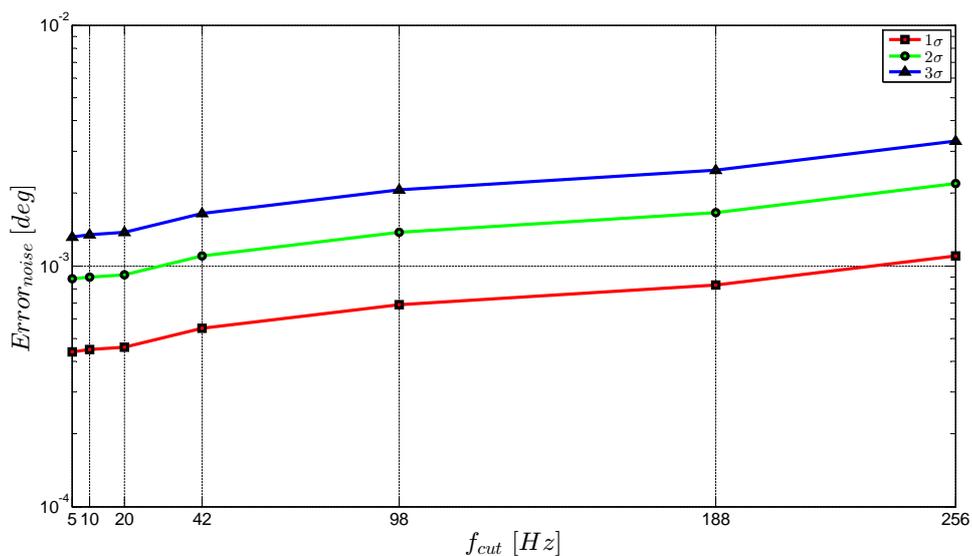


Figura 5.8: Noise Error in funzione della frequenza di taglio del filtro.

**Delay Error.** E' l'errore introdotto dal ritardo che impone il filtro passa basso e può esser calcolato nel seguente modo:

$$Error_{delay} = \omega \cdot \Delta t_{delay} \quad (5.15)$$

in cui:

- $\omega$  è la velocità angolare con cui il sistema sta ruotando;
- $\Delta t_{delay}$  è il ritardo imposto dal filtro passa basso riportato in (Tabella. 5.1).

Tale errore risulta quindi direttamente proporzionale alla velocità angolare del sistema e considerando un range di velocità operative compreso tra  $0.1^\circ/\text{sec}$  e  $40^\circ/\text{sec}$ , si sono ricavati gli andamenti dell'errore in funzione delle possibili frequenze di taglio selezionabili dall'utente (Fig. 5.9).

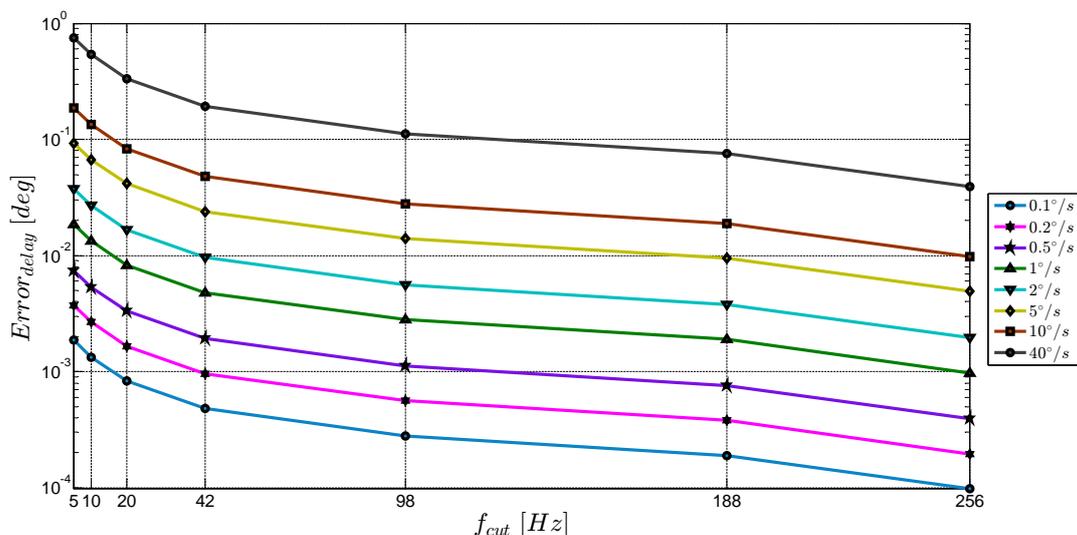


Figura 5.9: Delay Error in funzione della frequenza di taglio del filtro.

Confrontando gli andamenti delle curve di errore relative al rumore (Fig. 5.8) con quelle relative al ritardo imposto dal filtro (Fig. 5.9) si può dedurre che una riduzione della frequenza di taglio al di sotto dei 42 Hz possa contribuire solo negativamente alla stima della misura.

Una frequenza di taglio di 188Hz è stata ritenuta un buon compromesso tra errore a bassa e ad alta velocità angolare e tale impostazione verrà adottata nel corso di tutte le successive prove esposte in questa tesi.

### 5.3.2 Deviazione di Allan del giroscopio

Le curve (Fig. 5.10) sono state ricavate campionando per un periodo di 4 ore le uscite del giroscopio, mantenendo il sensore in stato di quiete in un ambiente a temperatura stabile di 23°C ed elaborando successivamente i dati in MATLAB.

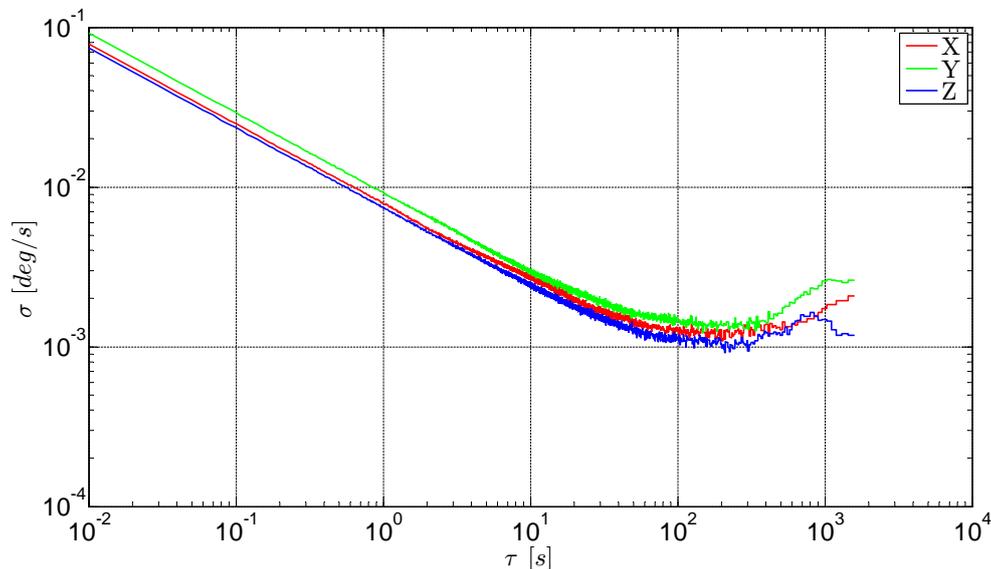


Figura 5.10: Giroscopio. Deviazione di Allan.

MPU-6050	Asse	N	B	K
		$[(^{\circ}/s)/\sqrt{Hz}]$	$[^{\circ}/s]$	$[(^{\circ}/s)\sqrt{Hz}]$
Giroscopio	X	7.867E-3	1.241E-3	1.111E-4
	Y	9.281E-3	1.418E-3	1.389E-4
	Z	7.389E-3	1.117E-3	1.111E-4

Tabella 5.3: Giroscopio. Coefficienti di rumore ricavati.

I valori risultano in linea con quelli dichiarati nel datasheet del sensore [4], tenendo in considerazione che il produttore fornisce un valore di rumore rms pari a 0.05 °/s con funzionamento a 100Hz e filtro passa-basso impostato a 98Hz (Tabella 5.4).

GYROSCOPE NOISE PERFORMANCE	FS_SEL=0	TYP	UNITS
Total RMS noise	DLPCFG = 2	0.050	°/s-rms
Low-frequency RMS noise	Bandwidth 1Hz to 10Hz	0.033	°/s-rms
Rate Noise Spectral Density	At 10 Hz	0.005	$(^{\circ}/s)/\sqrt{Hz}$

Tabella 5.4: Giroscopio. Valori di rumore dichiarati dal produttore.

### 5.3.3 Deviazione di Allan dell'accelerometro

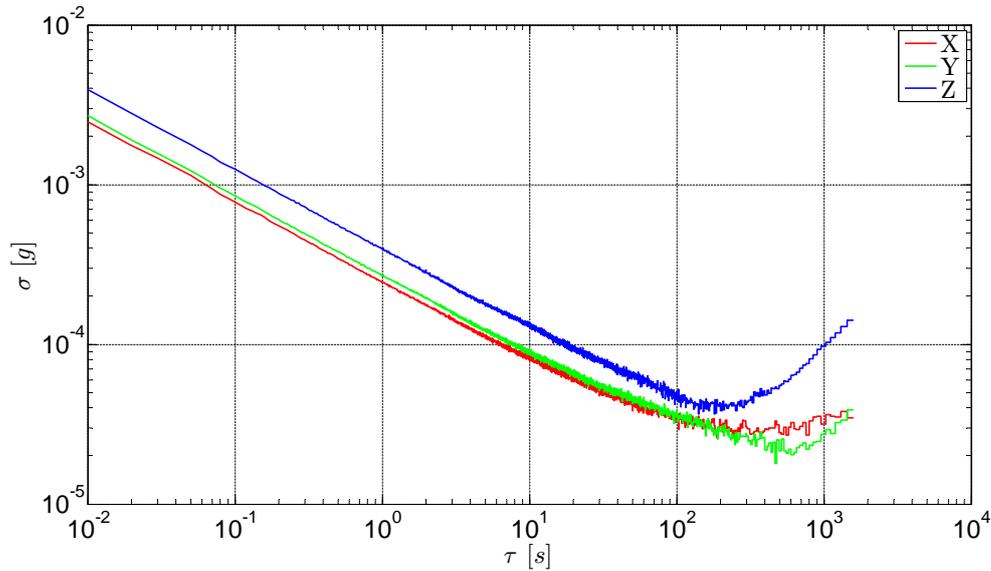


Figura 5.11: Accelerometro. Deviazione di Allan.

MPU-6050	Asse	N	B	K
		$[g/\sqrt{Hz}]$	$[g]$	$[g\sqrt{Hz}]$
Accelerometro	X	2.426E-4	-	-
	Y	2.685E-4	-	-
	Z	3.920E-4	4.280E-5	-

Tabella 5.5: Accelerometro. Coefficienti di rumore ricavati.

I valori ricavati risultano in linea con quelli dichiarati nel datasheet del sensore [4], tenendo in considerazione che per l'accelerometro il produttore fornisce un valore di Power Spectral Density per misure acquisite a 10Hz, scale range impostato a  $\pm 2g$  (AFS\_SEL=0) ed Output Data Rate (ODR) di 1KHz (Tabella 5.6).

ACCELEROMETER NOISE PERFORMANCE	CONDITION	TYP	UNITS
Power Spectral Density	@10Hz AFS_SEL=0 ODR=1KHz	400	$[\mu g/\sqrt{Hz}]$

Tabella 5.6: Accelerometro. Valori di rumore dichiarati dal produttore .

## 5.3.4 Deviazione di Allan del magnetometro

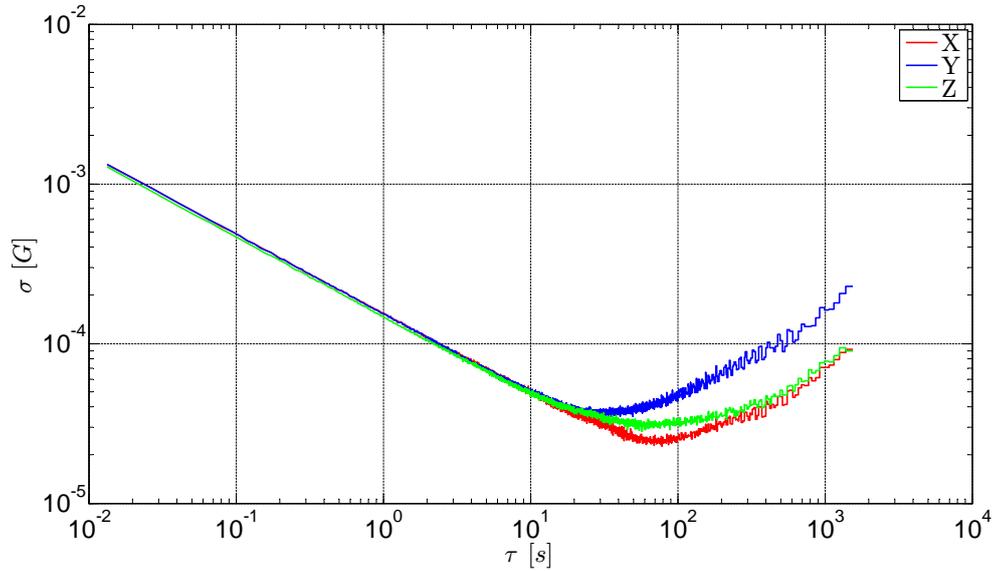


Figura 5.12: Magnetometro. Deviazione di Allan.

HMC5883L	Asse	N	B	K
		$[G/\sqrt{Hz}]$	$[G]$	$[G\sqrt{Hz}]$
Magnetometro	X	1.559E-4	2.531E-5	2.0E-6
	Y	1.473E-4	3.234E-5	2.0E-6
	Z	1.537E-4	3.790E-5	4.0E-6

Tabella 5.7: Magnetometro. Coefficienti di rumore ricavati.

I valori ricavati per i coefficienti del rumore bianco N risultano in linea con quanto dichiarato nel datasheet del sensore [3] tenendo in considerazione che il produttore fornisce un valore di deviazione standard del rumore compreso tra 1.1 mG e 2.25 mG (Fig. 5.14).

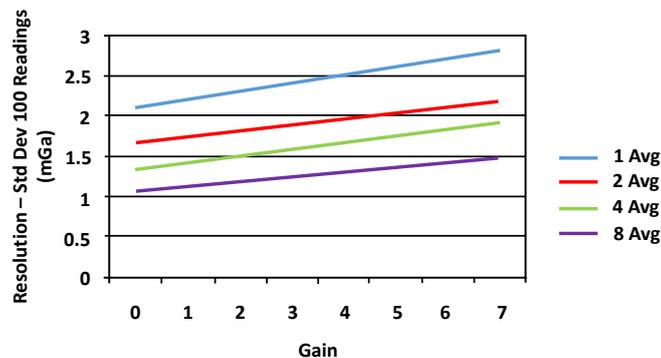


Figura 5.13: Magnetometro. Valori di rumore dichiarati dal produttore [3].

## 5.4 Simulazione dei sensori in MATLAB

I coefficienti ricavati tramite le curve di deviazione di Allan permettono di simulare il funzionamento dei sensori in ambiente MATLAB. La simulazione dei sensori sarà utile successivamente per ricavare delle stime numeriche a priori sul funzionamento del filtro di Kalman.

Un confronto tra rumore bianco presente nell'asse Y del giroscopio e rumore simulato è rappresentato in (Fig. 5.14).

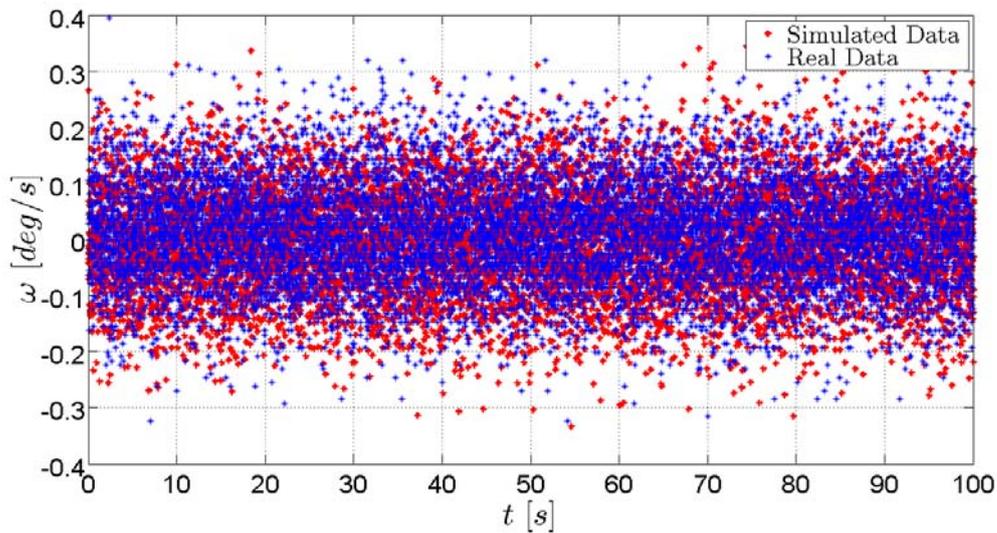


Figura 5.14: Confronto tra velocità angolari simulate e reali.

Tramite la curva di Allan (Fig. 5.15) è inoltre possibile verificare la corrispondenza dei valori del Rate Random Walk tra dati simulati e reali.

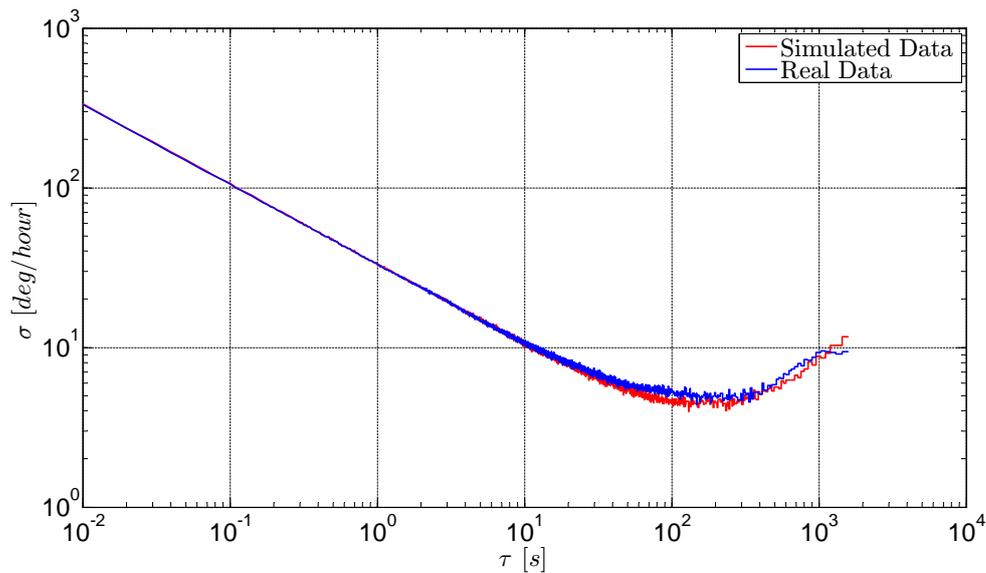


Figura 5.15: Confronto deviazioni di Allan tra dati simulati e reali.

## Capitolo 6

# La calibrazione dei sensori

Nel presente capitolo si analizzano le diverse componenti di errore, aventi natura deterministica, solitamente presenti nelle misure dei sensori inerziali. Tramite il processo di calibrazione si ricaveranno i parametri ottimali volti a rimuovere tali errori e correggere la stima delle misure di giroscopio, accelerometro e magnetometro. La procedura adottata per eseguire la calibrazione è tratta da [6].

### 6.1 Gli errori deterministici

Adottando un modello che descriva accuratamente il processo di misura ed eseguendo correttamente la procedura di calibrazione, gli errori di tipo deterministico possono essere calcolati e rimossi completamente dalle misure del sensore.

In questa tesi per la stima di tali errori, lo stesso modello lineare di misura viene adottato per giroscopio e accelerometro; il magnetometro usufruisce invece di un modello differente e sarà illustrato in (6.5). Lo scopo di tale modello è descrivere il processo di misura che ha origine dalle grandezze fisiche e termina in un valore di tensione solitamente digitalizzato da un convertitore analogico-digitale.

Il modello prende in considerazione i seguenti termini:

- Fattore di scala
- Bias
- Non perfetta ortogonalità degli assi di sense e disallineamenti

#### 6.1.1 Fattore di scala

Il fattore di scala corrisponde al coefficiente di proporzionalità che lega direttamente la grandezza fisica misurata e l'output del sensore. E' un valore che può variare in funzione della temperatura operativa, ma in prima approssimazione verrà considerato costante; successivamente in (6.6) si prenderà in considerazione la sua variabilità in un range di temperature operativo compreso tra i 20°C e i 40°C.

La matrice dei fattori di scala può esser definita come:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

in cui  $k_i$  è il fattore di scala dell' $i$ -esimo asse del sensore.

I valori dei fattori di scala del giroscopio, accelerometro e magnetometro dichiarati per il range di temperatura operativo utilizzato in questa tesi sono riportati in (Tabella 6.1). Mediante la calibrazione sarà possibile verificare se il valore del fattore di scala, rientra nel range di tolleranza dichiarato.

Sensore	Fattore di scala k dichiarato	Tolleranza dichiarata
Giroscopio	131 [ $LSB/deg$ ]	$\pm 3\%$
Accelerometro	16384 [ $LSB/g$ ]	$\pm 3\%$
Magnetometro	1090 [ $LSB/G$ ]	$\pm 5\%$

Tabella 6.1: Fattori di scala dei sensori.

### 6.1.2 Bias

Nelle misure di un sensore è spesso presente un bias, quantificabile come un offset nella misura rispetto al valore vero di riferimento. Nel modello utilizzato tale offset è assunto costante durante l'intervallo di campionamento per la calibrazione.

Questo termine viene definito come:

$${}^S \mathbf{b} = [{}^S b_x, {}^S b_y, {}^S b_z]^T \quad (6.2)$$

in cui  ${}^S \mathbf{b}$  corrisponde al vettore contenente le componenti del bias, nel s.d.r. del sensore  $S$ .

### 6.1.3 Non perfetta ortogonalità degli assi di sense e disallineamenti

Questo fattore prende in considerazione la non perfetta ortogonalità presente tra gli assi di sense della piattaforma inerziale ed al contempo il disallineamento dovuto a imprecisioni di montaggio del sensore. Le misure acquisite nel s.d.r. del sensore  $S$  possono essere trasformate in misure acquisite nel s.d.r. body  $B$  mediante la seguente relazione:

$${}^B \mathbf{s} = {}^B_S \mathbf{T} {}^S \mathbf{s}, \quad {}^B_S \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_{yx} & \alpha_{zy} \\ \alpha_{xz} & 1 & -\alpha_{zx} \\ -\alpha_{xy} & \alpha_{yx} & 1 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

in cui:

- ${}^B \mathbf{s}$  è la misura nel s.d.r. body;
- ${}^S \mathbf{s}$  è la misura nel s.d.r. del sensore;
- $\alpha_{ij}$  è la rotazione dell' $i$ -esimo asse di senso attorno al  $j$ -esimo asse del s.d.r. B (Fig. 6.1).

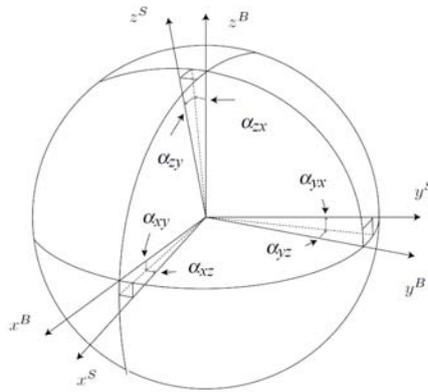


Figura 6.1: Disallineamenti tra gli assi di senso e gli assi della terna body [6].

## 6.2 Modello matematico giroscopio e accelerometro

A partire dalla formula inversa della (6.3) :

$${}^S \mathbf{s} = {}^B_S \mathbf{T}^{-1} {}^B \mathbf{s} \quad (6.4)$$

il seguente modello per entrambi i sensori può esser ricavato:

$$\mathbf{y}^M = \mathbf{K} {}^S \mathbf{s} + {}^S \mathbf{b} \quad (6.5)$$

$$= \mathbf{K} {}^B_S \mathbf{T}^{-1} {}^B \mathbf{s} + {}^S \mathbf{b} \quad (6.6)$$

in cui  $\mathbf{y}^M$  è la differenza di potenziale che il sensore fornisce come output di misura.

Per ottenere mediante un'unica operazione i valori in coordinate body già compensati dal bias, l'equazione (6.6) può esser riscritta nel seguente modo :

$${}^B \mathbf{s} = {}^B_S \mathbf{T} \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{y}^M - {}^S \mathbf{b}) \quad (6.7)$$

La (6.7) scritta in forma matriciale risulta:

$$\begin{bmatrix} B_{S_x} \\ B_{S_y} \\ B_{S_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ S \end{bmatrix} \mathbf{TK}^{-1}, -\begin{bmatrix} B \\ S \end{bmatrix} \mathbf{TK}^{-1} S \mathbf{b} \begin{bmatrix} y_x^M \\ y_y^M \\ y_z^M \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

in cui:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} B \\ S \end{bmatrix} \mathbf{TK}^{-1}, -\begin{bmatrix} B \\ S \end{bmatrix} \mathbf{TK}^{-1} S \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 & \beta_8 \\ \beta_9 & \beta_{10} & \beta_{11} & \beta_{12} \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

corrisponde alla matrice di calibrazione contenente le combinazioni dei 12 parametri di calibrazione:

$$k_x, k_y, k_z, b_x, b_y, b_z, \alpha_{xz}, \alpha_{xy}, \alpha_{yx}, \alpha_{yz}, \alpha_{zx}, \alpha_{zy} \quad (6.10)$$

Tali parametri possono essere calcolati a partire dai coefficienti  $\beta_i$  nel modo seguente:

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{1}{\beta_1}, & k_x &= \frac{1}{\beta_6}, & k_x &= \frac{1}{\beta_{11}} \\ \alpha_{yx} &= -\frac{\beta_2}{\beta_6}, & \alpha_{zy} &= \frac{\beta_3}{\beta_{11}}, & \alpha_{xz} &= \frac{\beta_5}{\beta_1} \\ \alpha_{zx} &= -\frac{\beta_7}{\beta_{11}}, & \alpha_{xy} &= -\frac{\beta_9}{\beta_1}, & \alpha_{yx} &= \frac{\beta_{10}}{\beta_6} \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\begin{bmatrix} S b_x \\ S b_y \\ S b_z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 \\ \beta_9 & \beta_{10} & \beta_{11} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \beta_4 \\ \beta_8 \\ \beta_{12} \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

### 6.3 Calibrazione del giroscopio

La calibrazione è stata eseguita dopo aver montato stabilmente la piattaforma MPU-6050 nel simulatore meccanico tramite biadesivo 3M a presa forte ed attendendo 30 minuti di warm-up del sensore prima di iniziare la procedura. Si sono acquisite simultaneamente tramite seriale le uscite del giroscopio e gli angoli di Roll, Pitch e Yaw misurati dagli encoder in 10 prove della durata di 25 secondi ciascuna. In ogni prova il sistema è stato ruotato a bassa velocità attorno ai 3 assi secondo una sequenza di rotazioni casuale. I dati sono stati successivamente elaborati off-line tramite MATLAB eseguendo una regressione lineare con il metodo dei minimi quadrati.

La scelta della zona di montaggio del sensore è stata dettata dai seguenti fattori:

- accessibilità della piattaforma inerziale da parte dei cavi di collegamento al microcontrollore;
- presenza di una superficie piana e di uno spigolo a  $90^\circ$  che permettessero l'allineamento degli assi della piattaforma con gli assi della terna body del simulatore meccanico;
- vicinanza al centro di rotazione, al fine di ridurre le componenti di accelerazione centripeta e tangenziale che possono influire nell'accuratezza di misura.

Il compromesso migliore è stato individuato nella zona adiacente la staffa di montaggio per il bloccaggio degli assi di roll e pitch (Fig. 6.2).

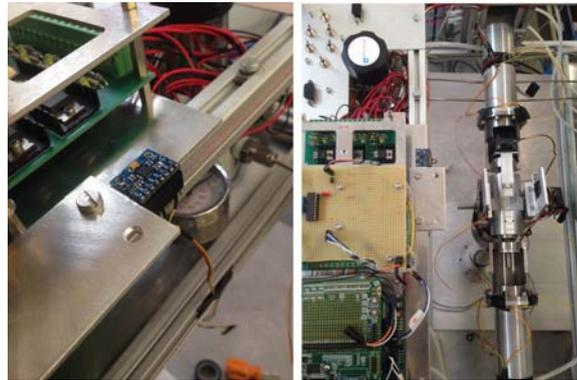


Figura 6.2: Posizionamento del sensore MPU-6050 nel simulatore meccanico.

L'algoritmo di calibrazione necessita dei seguenti dati di input:

- misure campionate dal sensore;
- velocità angolari di riferimento degli assi appartenenti alla terna body.

I valori di velocità angolare relativi alla terna body del simulatore meccanico, sono stati ottenuti tramite il seguente procedimento:

1. rimozione delle discontinuità del primo tipo mediante spline dalle misure di  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  acquisite con gli encoder;
2. calcolo delle velocità angolari  $\dot{\phi}_{spl}$ ,  $\dot{\theta}_{spl}$ ,  $\dot{\psi}_{spl}$  derivando le misure filtrate con la spline.
3. calcolo dei valori di riferimento  ${}^B\omega_{x,ref}$ ,  ${}^B\omega_{y,ref}$ ,  ${}^B\omega_{z,ref}$  mediante (6.13).

$$\begin{bmatrix} {}^B\omega_{x,ref} \\ {}^B\omega_{y,ref} \\ {}^B\omega_{z,ref} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s(\theta_{spl}) \\ 0 & c(\phi_{spl}) & s(\phi_{spl})c(\theta_{spl}) \\ 0 & -s(\phi_{spl}) & c(\phi_{spl})c(\theta_{spl}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_{spl} \\ \dot{\theta}_{spl} \\ \dot{\psi}_{spl} \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

I parametri appartenenti alla (6.8) possono quindi esser scritti nella forma seguente:

$$\begin{bmatrix} B_{\omega_{x,ref}} \\ B_{\omega_{y,ref}} \\ B_{\omega_{z,ref}} \end{bmatrix} = Y_i \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{12} \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

in cui:

$$Y_i = \begin{bmatrix} S_{y_{i,x}} & S_{y_{i,y}} & S_{y_{i,z}} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{y_{i,x}} & S_{y_{i,y}} & S_{y_{i,z}} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{y_{i,x}} & S_{y_{i,y}} & S_{y_{i,z}} & 1 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

è una matrice  $3i \times 12$  contenente i valori acquisiti dal giroscopio. Il numero di righe della matrice cresce all'aumentare del numero di misurazioni acquisite.

Il vettore di calibrazione  $\beta$  viene infine calcolato con il metodo dei minimi quadrati:

$$\beta = (Y^T Y)^{-1} Y^T B_{\omega_{ref}} \quad (6.16)$$

### 6.3.1 Risultati calibrazione giroscopio

Nella matrice di calibrazione (6.17) i valori riportati sono quelli adatti ad eseguire le correzioni a partire dalle misure già espresse in [rad]. Si noti dalla diagonale della sottomatrice  $3 \times 3$  come tutti i fattori di scala rientrino pienamente all'interno del range di tolleranza dichiarato dal produttore, con uno scostamento massimo inferiore al 2%.

$$\mathbf{C}_{gyro} = \begin{bmatrix} 0.9822 & -0.0003 & -0.0072 & 0.0188 \\ -0.0021 & 0.9836 & 0.0143 & -0.0680 \\ 0.0093 & 0.0039 & 1.0002 & 0.0028 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

Nonostante l'algoritmo permetta di calcolare i parametri con precisione, la presenza di una componente all'interno del bias che varia ad ogni riavvio del dispositivo non permette di usufruire dell'ultima colonna della matrice (6.17) dopo lo spegnimento del sensore.

Per ovviare a questa problematica, ed ottenere misure perfettamente calibrate, l'algoritmo caricato nel microcontrollore eseguirà ad ogni riavvio del dispositivo una stima del bias statico presente negli assi di sense, campionando per due secondi i valori in uscita dal giroscopio ed eseguendo la media di tali valori  ${}^S \mathbf{b}_{mean}$ .

Questo procedimento, oltre ad aumentare la precisione del filtro, permetterà di impostare il primo valore di bias con cui inizializzare il filtro di Kalman  ${}^B \mathbf{b}_0$ .

$${}^B \mathbf{b}_0 = \mathbf{C}_{gyro_{3 \times 3}} {}^S \mathbf{b}_{mean} \quad (6.18)$$

Un confronto tra misure calibrate, non calibrate e valore di riferimento è riportato in (Fig. 6.3), mentre nella (Fig. 6.4) sono riportati gli errori nelle misure prima e dopo la calibrazione, rispetto al valore di riferimento. Si noti come la componente principale dell'errore sia la presenza del bias, che nell'asse Y del giroscopio raggiunge valori prossimi a  $4^\circ/\text{s}$ .

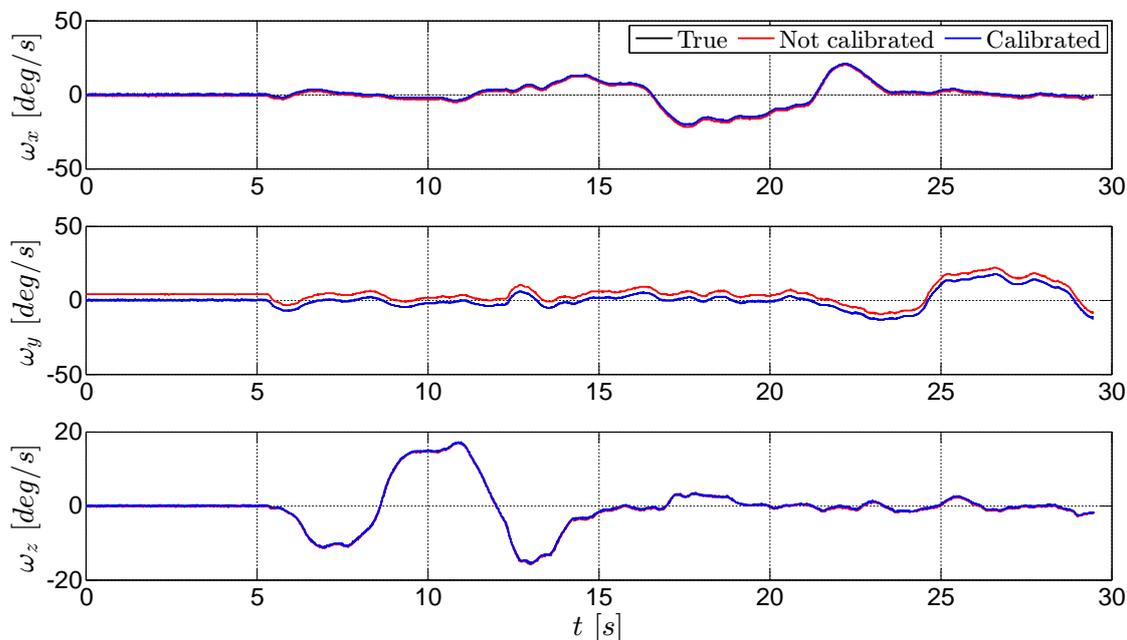


Figura 6.3: Giroscopio. Confronto tra misure calibrate e non calibrate.

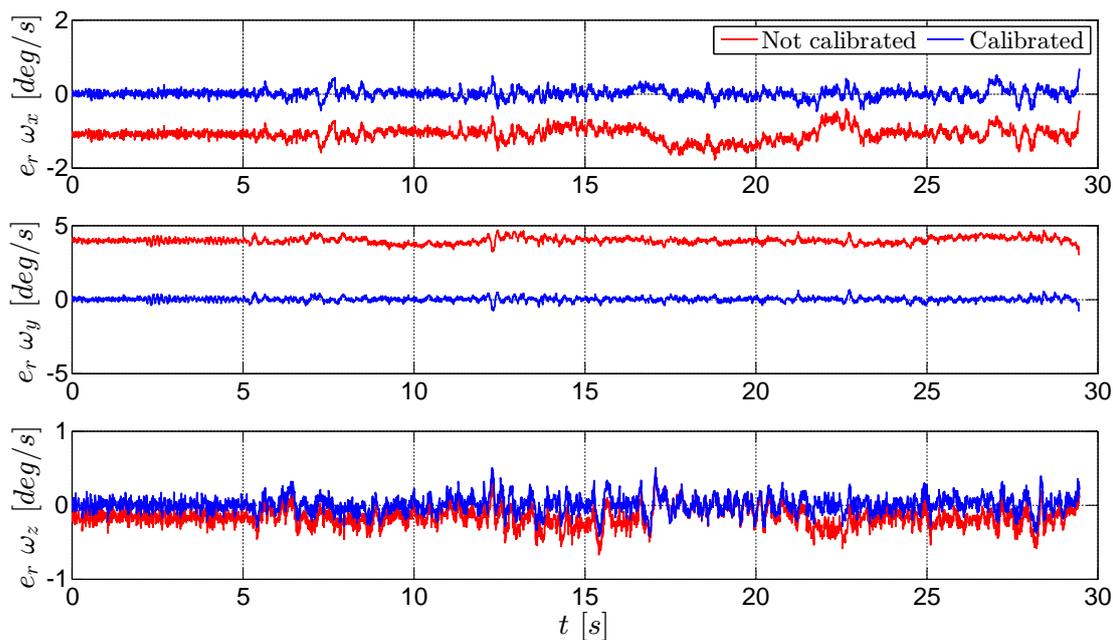


Figura 6.4: Giroscopio. Errore nelle misure calibrate e non calibrate.

<b>Giroscopio MPU-6050</b>	<b>Senza matrice di calibrazione</b>	<b>Con matrice di calibrazione</b>
$RMS [Error \omega_x]$	1.116 °/s	0.128 °/s
$RMS [Error \omega_y]$	3.977 °/s	0.146 °/s
$RMS [Error \omega_z]$	0.215 °/s	0.115 °/s

Tabella 6.2: Giroscopio. Errori di rms prima e dopo la calibrazione.

## 6.4 Calibrazione accelerometro

La calibrazione dell'accelerometro usufruisce del vettore accelerazione di gravità per stimare i parametri d'errore presenti nelle misure. Il procedimento si basa sull'ipotesi che l'asse di yaw sia perfettamente parallelo al vettore accelerazione di gravità; è quindi necessario verificarne il corretto allineamento ed eseguire eventuali regolazioni del piano d'appoggio prima della calibrazione. Per fare questo si è usufruito di una livella graduata, avente precisione pari a 0.02 mm per metro, in grado di registrare inclinazioni nell'ordine del millesimo di grado.



Figura 6.5: Strumenti utilizzati per la regolazione del piano di appoggio.

La calibrazione del sensore consiste nel ruotare il sistema meccanico in differenti configurazioni, sollecitando in tal modo ogni singolo asse del sensore ed acquisendo simultaneamente le misure di accelerazione e gli angoli di roll, pitch, yaw registrati dagli encoder. Usufruento degli angoli di Eulero, si determina l'accelerazione di gravità di riferimento nel s.d.r. body B secondo la (6.19).

$${}^B \mathbf{a}_{ref} = {}^B \mathbf{R}^N \mathbf{a} \quad (6.19)$$

in cui:

- ${}^B \mathbf{a}_{ref}$  corrisponde all'accelerazione di gravità di riferimento, misurata nel s.d.r. body B;
- ${}^B \mathbf{R}$  è la matrice di rotazione (3.5) dall's.d.r. di navigazione N al s.d.r. body B;

- ${}^N \mathbf{a}$  è l'accelerazione di gravità espressa nel s.d.r. inerziale  ${}^N \mathbf{a} = [0 \ 0 \ -1]^T g$ .

L'algoritmo di calibrazione esegue la regressione lineare con il metodo dei minimi quadrati e il procedimento coincide con quello adottato per i giroscopi a partire dalla (6.14).

### 6.4.1 Risultati calibrazione accelerometro

Nella matrice di calibrazione (6.20) i valori riportati sono quelli adatti ad eseguire una compensazione a partire dalle misure già espresse in [g] appartenenti all's.d.r. di sense S della piattaforma. Dalla diagonale della sottomatrice  $3 \times 3$  si può notare come il fattore di scala relativo all'asse Z non rientri all'interno del range di tolleranza dichiarato dal costruttore, con una percentuale di errore pari al 3.27% rispetto al  $\pm 3\%$  dichiarato.

$$\mathbf{C}_{acc} = \begin{bmatrix} 0.9941 & 0.0025 & -0.0123 & -0.0163 \\ 0.0015 & 0.9896 & 0.0000 & 0.0404 \\ 0.0073 & -0.0035 & 0.9673 & -0.0875 \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

Un confronto tra misure calibrate e non calibrate calibrazione e i relativi errori rispetto al riferimento è riportato in (Fig. 6.6) e (Fig. 6.7).

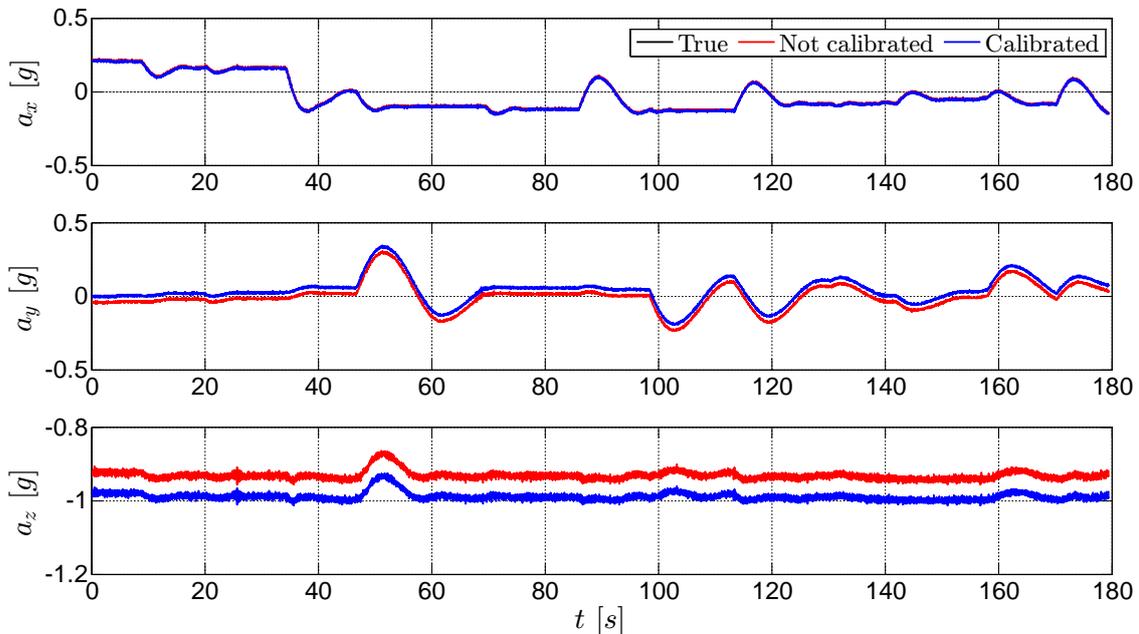


Figura 6.6: Accelerometro. Confronto tra misure calibrate e non calibrate.

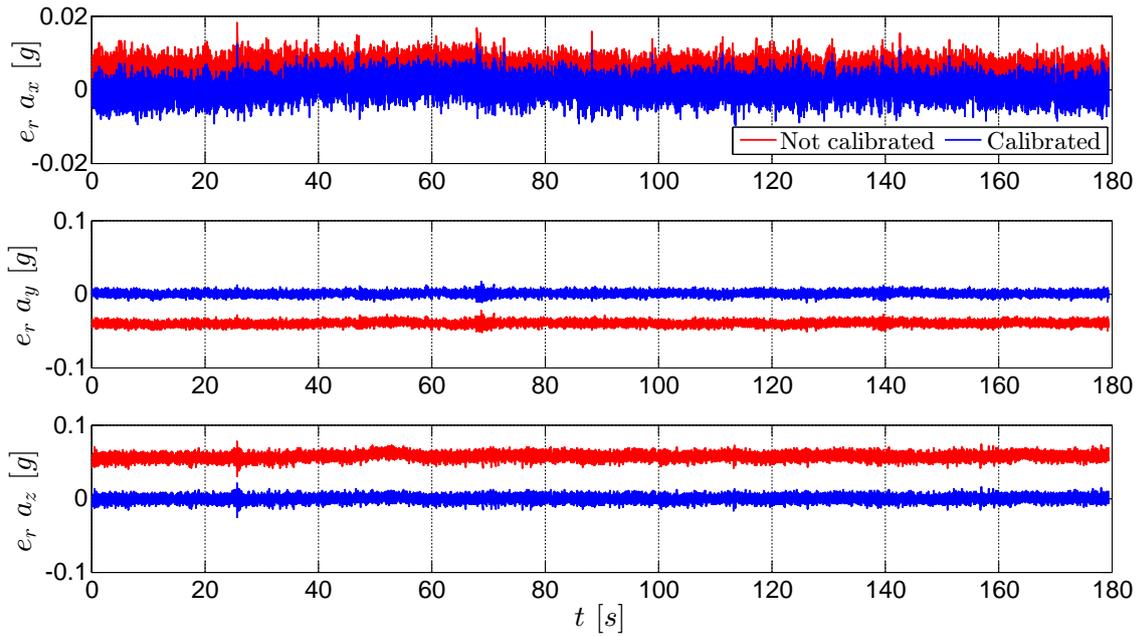


Figura 6.7: Accelerometro. Errore nelle misure calibrate e non calibrate.

Accelerometro MPU-6050	Senza matrice di calibrazione	Con matrice di calibrazione
$RMS [Error a_x]$	5.670E-3 g	2.720E-3 g
$RMS [Error a_y]$	4.001E-2 g	2.916E-3 g
$RMS [Error a_z]$	5.711E-2 g	3.679E-3 g

Tabella 6.3: Accelerometro. Errori di rms prima e dopo la calibrazione.

## 6.5 Calibrazione del magnetometro

Oltre agli errori di natura deterministica presentati ad inizio capitolo, il magnetometro è soggetto ai fenomeni di Soft-Iron ed Hard-Iron, derivanti dalla presenza di oggetti metallici e campi magnetici indotti solidali alla terna di riferimento del sensore. Eseguendo delle rotazioni spaziali 3D, il campo magnetico misurato dal sensore può esser idealmente rappresentato da una sfera centrata nell'origine e avente raggio unitario pari al modulo del vettore di magnetizzazione terrestre. La presenza dei disturbi possono alterare la posizione e la forma di suddetta sfera nei seguenti modi:

- **Disturbo di Hard-Iron:** è un disturbo interferente dovuto alla presenza di campi magnetici che si sommano al campo magnetico terrestre. Tale disturbo agisce come un

bias, causando la presenza di un offset nelle misure e può esser rappresentato come uno scostamento del centro della sfera dall'origine degli assi.

- **Disturbo di Soft-Iron:** è un disturbo modificante, dovuto alla presenza di materiali ferromagnetici che producono una distorsione o concentrazione delle linee del campo magnetico. Il Soft-Iron agisce modificando il modulo del vettore di campo magnetico visto dal sensore, causando la deformazione della sfera in un ellisse.

Per attenuare gli errori dovuti ai suddetti fattori si sfruttano solitamente i seguenti accorgimenti:

- si posiziona il sensore lontano da materiali metallici ferritici o martensitici (serie AISI 4XX) e dai circuiti elettrici (in particolar modo da trasformatori o induttori);
- si utilizzano viti per il montaggio composte in materiale avente bassa permeabilità magnetica (quali alluminio o acciai austenitici serie AISI 2XX o 3XX).

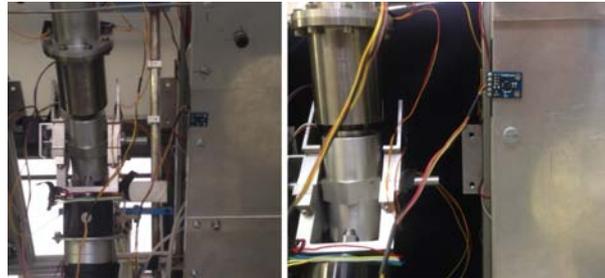


Figura 6.8: Posizionamento del sensore HMC5883L nel simulatore meccanico.

Nel caso in cui non sia possibile rimuovere completamente le perturbazioni del campo magnetico è necessario eseguire una calibrazione del sensore che tenga conto dell'effetto di Soft Iron e Hard Iron nelle misure acquisite.

Il modello adottato per la calibrazione del magnetometro in questa tesi è:

$${}^B \mathbf{s} = {}^B_S \mathbf{T} \mathbf{M}_{s.i.} \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{y}^M - \mathbf{b}_{h.i.}) \quad (6.21)$$

in cui:

- $\mathbf{M}_{s.i.}$  è la matrice di trasformazione  $3 \times 3$  contenente i termini per la calibrazione di Soft-Iron che permettono di trasformare l'ellissoide in una sfera di raggio unitario;
- $\mathbf{b}_{h.i.}$  è il vettore  $3 \times 1$  contenente i termini per la calibrazione di Hard-Iron.

La calibrazione avviene in maniera analoga a quella dell'accelerometro, ruotando il sistema meccanico in differenti configurazioni ed acquisendo simultaneamente le misure del sensore e gli angoli di roll, pitch, yaw registrati dagli encoder.

Usufruendo degli angoli di Eulero, si determina il vettore di magnetizzazione di riferimento nel s.d.r. body B secondo la:

$${}^B \mathbf{h}_{ref} = {}^B_N \mathbf{R}^N \mathbf{h} \quad (6.22)$$

in cui:

- ${}^B\mathbf{h}_{ref}$  corrisponde al vettore di campo magnetico di riferimento, misurato nel s.d.r. body B;
- ${}^B_N\mathbf{R}$  è la matrice di rotazione (3.5) dall's.d.r. di navigazione N al s.d.r. body B;
- ${}^N\mathbf{h}$  corrisponde al vettore di magnetizzazione terrestre, che per la città di Padova ( $45^\circ 24' 57'' 96$  N ,  $11^\circ 52' 58'' 08$  E) è pari a  ${}^N\mathbf{h} = [0.225 \quad 0 \quad 0.418]^T$  Gauss.

### 6.5.1 Risultati calibrazione magnetometro

Nella matrice di calibrazione i valori riportati sono quelli adatti ad eseguire una compensazione a partire dalle misure già espresse in [G] appartenenti all's.d.r. di sense S del magnetometro. Dalla diagonale della sottomatrice  $3 \times 3$  si può notare come i fattori di scala rientrino tutti all'interno del range di tolleranza, con una percentuale di errore massimo pari al 4.25% rispetto al  $\pm 5\%$  dichiarato da costruttore.

$$\mathbf{C}_{mag} = \begin{bmatrix} 0.9875 & -0.0168 & -0.1961 & -0.0280 \\ -0.0290 & 1.0277 & -0.0307 & 0.0161 \\ -0.0980 & -0.0001 & 1.0425 & -0.0170 \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

Un confronto tra misure calibrate e non calibrate e i relativi errori rispetto al riferimento è riportato in (Fig. 6.9) e (Fig. 6.10).

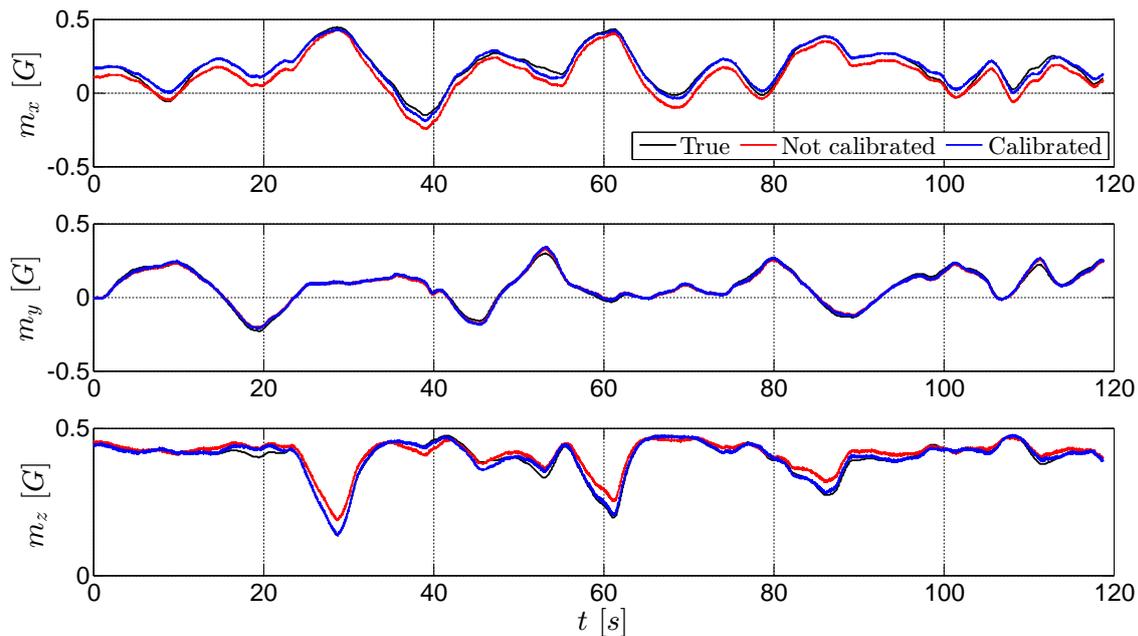


Figura 6.9: Magnetometro. Confronto tra misure calibrate e non calibrate.

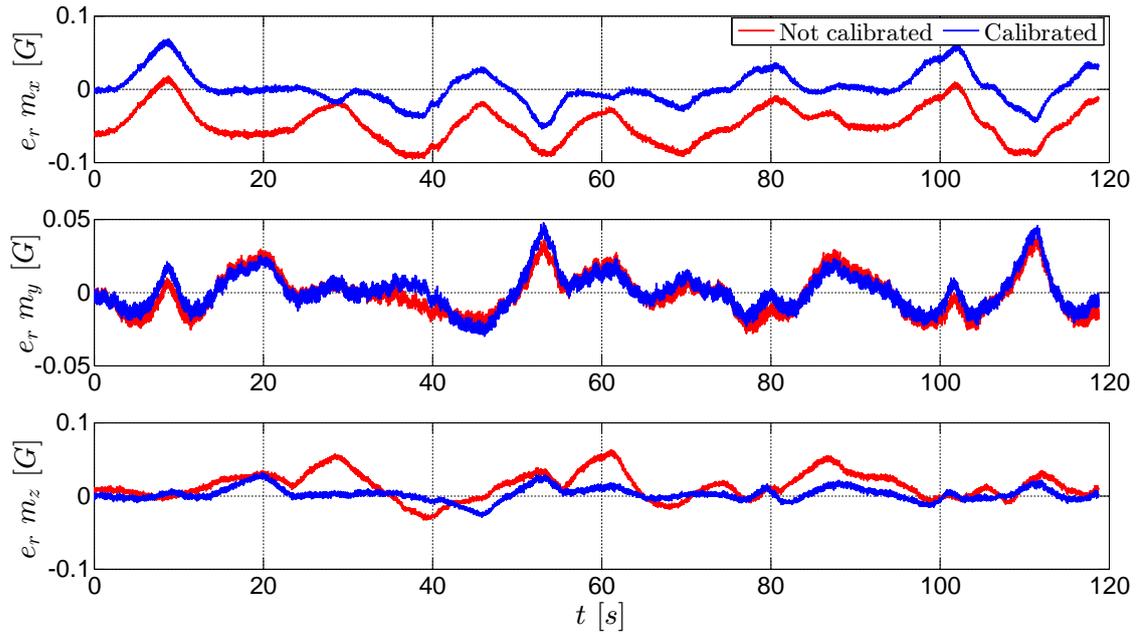


Figura 6.10: Magnetometro. Errore nelle misure calibrate e non calibrate.

Magnetometro HMC5883L	Senza matrice di calibrazione	Con matrice di calibrazione
$RMS [Error m_x]$	5.402E-2 G	2.189E-2 G
$RMS [Error m_y]$	1.367E-2 G	1.303E-2 G
$RMS [Error m_z]$	2.280E-2 G	0.927E-2 G

Tabella 6.4: Magnetometro. Errori di rms prima e dopo la calibrazione.

## 6.6 Sensibilità alle variazioni di temperatura

Le variazioni di temperatura operativa possono influenzare il fattore di scala e il bias del sensore e ridurre di conseguenza la precisione di misura.

Per la piattaforma inerziale MPU-6050, il seguente set-up sperimentale (Fig. 6.11) è stato impostato, con l'intento di registrare variazioni del bias statico in condizioni di temperatura variabile.

Il setup di misura è costituito dai seguenti componenti:

- microcontrollore Arduino UNO;
- dissipatore di calore in alluminio;
- saldatore a stagno per componenti elettroniche;
- nastro di kapton;
- computer per l'acquisizione dei dati.

Due prove della durata di 10 minuti ciascuna sono state eseguite a distanza di 24 ore l'una dall'altra. In ogni prova si sono acquisiti tramite seriale i valori di velocità angolare, accelerazione e temperatura.

La temperatura è stata acquisita attraverso il sensore interno della MPU-6050, avente risoluzione nell'ordine del millesimo di grado.

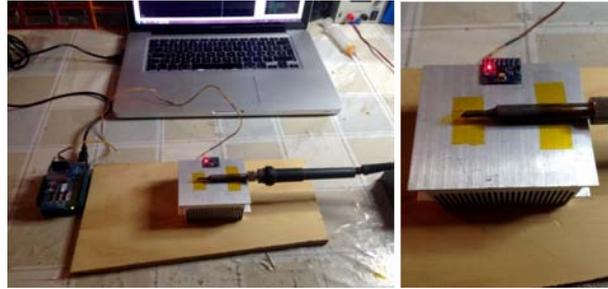


Figura 6.11: Setup per l'acquisizione delle misure al variare della temperatura.

Le curve di correlazione ottenute per il giroscopio e l'accelerometro sono riportate rispettivamente in (Fig. 6.12) e (Fig. 6.13).

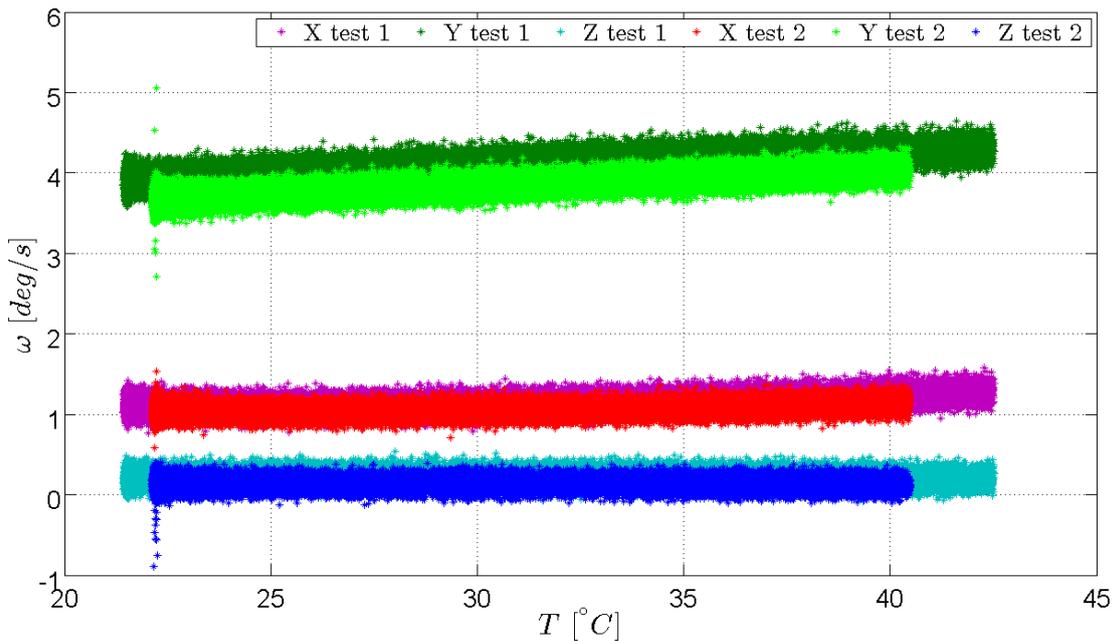


Figura 6.12: Giroscopio. Curve di correlazione al variare della temperatura.

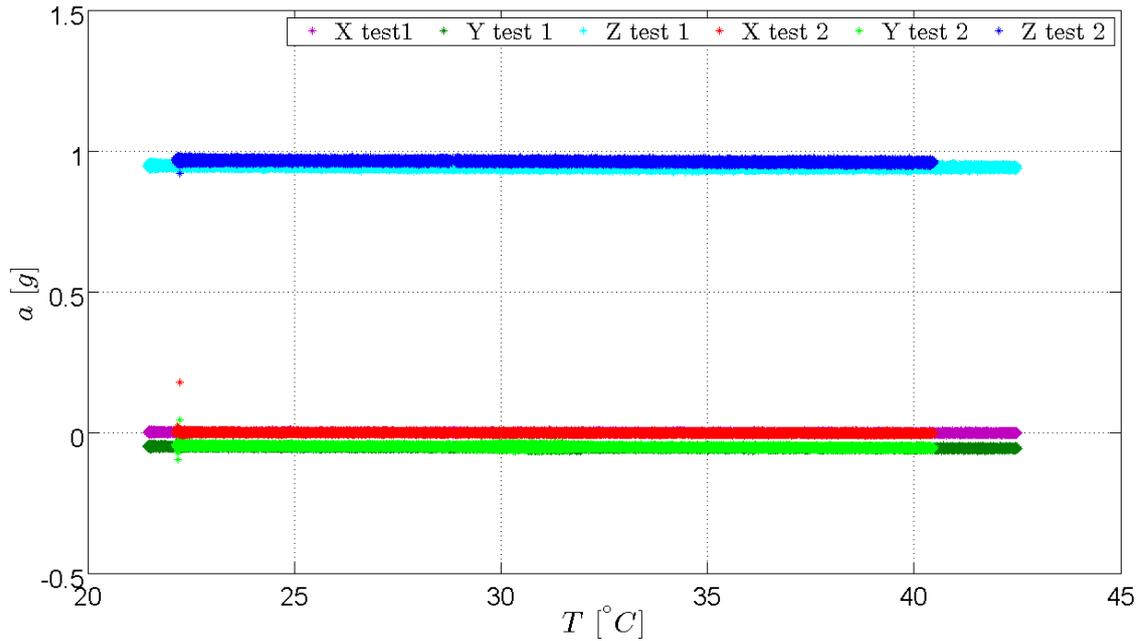


Figura 6.13: Accelerometro. Curve di correlazione al variare della temperatura.

Dagli andamenti riportati, si noti come il giroscopio, ed in particolare l'asse Y, risulti visibilmente il più sensibile.

Eseguendo la regressione lineare con i dati acquisiti, si sono ricavati i coefficienti che legano il bias statico alla temperatura operativa del sensore (Tabella 6.5) secondo il seguente modello lineare:

$$s_{b_{0,i}} = p1 \cdot T + p2 \quad (6.24)$$

in cui:

- $s_{b_{0,i}}$  è il bias statico dell' $i$ -esimo asse del sensore;
- $T$  è la temperatura operativa del sensore in  $^{\circ}\text{C}$ ;
- $p1$  è il coefficiente angolare della retta di regressione in  $[\text{deg}/^{\circ}\text{C}]$ ;
- $p2$  è il termine noto in  $^{\circ}\text{C}$ .

Nonostante l'asse Y del sensore giroscopico risenta maggiormente delle variazioni di temperatura, la procedura di calibrazione del bias statico ad ogni turn-on del dispositivo e l'algoritmo di compensazione del bias interno al filtro di Kalman risultano sufficienti a garantire la totale immunità del filtro da tali variazioni.

Il basso valore dei coefficienti angolari  $p1$  rilevati in entrambe le prove e una variabilità massima della temperatura ambientale pari ad un grado, non rendono quindi necessaria l'implementazione di un algoritmo di compensazione.

MPU-6050	Asse	TEST 1		TEST 2	
		$p1[deg/^\circ C]$	$p2[^\circ C]$	$p1[deg/^\circ C]$	$p2[^\circ C]$
Giroscopio	X	4.339E-3	0.934	7.787E-3	0.907
	Y	2.039E-2	3.216	1.896E-2	3.515
	Z	-5.197E-4	0.153	-3.976E-4	4.5986-3
Accelerometro	X	-1.860E-4	4.705E-3	-3.539E-4	-4.2167E-2
	Y	-4.892E-4	-3.554E-2	-3.539E-4	-4.2167E-2
	Z	-4.576E-4	0.977	-3.593E-4	0.954

Tabella 6.5: MPU-6050. Coefficienti di correlazione al variare della temperatura.

## Capitolo 7

# Descrizione del filtro per la stima dell'assetto

Il filtro di Kalman utilizzato in questa tesi adotta la formulazione estesa illustrata in [8] e usufruisce delle misure di un sensore giroscopico per eseguire la stima a priori dello stato del sistema.

Due differenti modalità operative verranno invece prese in considerazione per la fase di measurement update:

- Configurazione spaziale: la correzione dello stato del sistema viene eseguita usufruendo delle misure di uno star tracker.
- Configurazione terrestre: la correzione dello stato del sistema viene eseguita usufruendo delle misure di un accelerometro e di un magnetometro.

### 7.1 Modello matematico del giroscopio

Il sensore giroscopico fornisce le misure di velocità angolare attorno ai 3 assi del s.d.r.  $S$  solida al corpo del sensore ad una frequenza molto elevata. Tuttavia le sue misure sono affette da errori di tipo stocastico e deterministico che rendono la stima dell'assetto eseguita mediante integrazione sempre più inaffidabile al trascorrere del tempo. Tali termini di errore devono essere tenuti in considerazione all'interno del modello matematico.

Per correlare le misure acquisite dal sensore  $\omega_m$  con le informazioni di velocità angolare del simulatore  $\omega$  si adotta il seguente modello:

$$\omega = C_{gyro_{3 \times 3}} \omega_m - \mathbf{b} - \mathbf{n}_w \quad (7.1)$$

$$\dot{\mathbf{b}} = \mathbf{n}_b \quad (7.2)$$

in cui:

- $\omega$  è la velocità angolare del sistema espressa nel s.d.r.  $B$ ;
- $C_{gyro_{3 \times 3}}$  è la sottomatrice  $3 \times 3$  della matrice di calibrazione del giroscopio (6.17);

- $\boldsymbol{\omega}_m$  è il vettore contenente le misure di velocità angolare acquisite dal giroscopio nel s.d.r. S;
- $\mathbf{b}$  è il bias espresso nel s.d.r. B;
- $\mathbf{n}_w$  è il rumore di misura bianco Gaussiano definito in (5.10);
- $\mathbf{n}_b$  è il rumore di bias bianco Gaussiano definito in (5.13).

## 7.2 Equazione di stato del filtro

Il filtro stima ad ogni time step l'orientazione del simulatore e il bias presente nelle misure del giroscopio. Lo stato del sistema è quindi costituito da un vettore di sette componenti:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \bar{q}(t) \\ \mathbf{b}(t) \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

Utilizzando la definizione di derivata del quaternionione (3.17) e il modello matematico del giroscopio (7.1) possiamo definire le equazioni differenziali che governano lo stato del sistema:

$$\frac{B}{N} \dot{\bar{q}}(t) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}) \frac{B}{N} \bar{q}(t) \quad (7.4)$$

$$\dot{\mathbf{b}} = \mathbf{n}_b \quad (7.5)$$

Rimuovendo la componente stocastica, in accordo con la formulazione estesa del filtro illustrata in (3.4.2), le equazioni di predizione dello stato risultano:

$$\frac{B}{N} \dot{\hat{q}}(t) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(\hat{\boldsymbol{\omega}}) \frac{B}{N} \hat{q}(t) \quad (7.6)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{b}}} = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (7.7)$$

in cui:

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{C}_{3 \times 3} \boldsymbol{\omega}_m - \hat{\mathbf{b}} \quad (7.8)$$

## 7.3 Integrazione di ordine zero

Usufruendo di un passo di integrazione sufficientemente piccolo, possiamo considerare la velocità angolare e il bias costanti durante l'intervallo  $\Delta t$ . Di conseguenza  $\boldsymbol{\Omega}$  non dipende dal tempo e possiamo integrare il quaternionione con un integratore di ordine zero.

Considerando inoltre che il filtro lavora a tempo discreto, l'equazione (3.17) risulta (si rimanda alle equazioni 110-122 di [8] per i passaggi completi):

$$\hat{B}_N \hat{q}_{k+1|k} = \begin{bmatrix} \frac{\hat{\omega}}{|\hat{\omega}|} \sin\left(\frac{|\hat{\omega}|}{2} \Delta t\right) \\ \cos\left(\frac{|\hat{\omega}|}{2} \Delta t\right) \end{bmatrix} \otimes B_N \bar{q}_{k|k} \quad (7.9)$$

in cui il prodotto quaternionico rappresenta la rotazione di un angolo pari a  $|\hat{\omega}| \Delta t$  attorno all'asse di istantanea rotazione definito da  $\frac{\hat{\omega}}{|\hat{\omega}|}$ .

## 7.4 Equazione di stato dell'errore a tempo continuo

L'errore tra l'assetto vero e l'assetto stimato del sistema, può esser considerato come una rotazione  $\frac{B}{\hat{B}} \delta \bar{q}$  :

$$\frac{B}{\hat{B}} \delta \bar{q} = B_N \bar{q} \otimes \hat{B}_N \hat{q}^{-1} \quad (7.10)$$

in cui:

- $B_N \bar{q}$  è il quaternione dell'assetto vero;
- $\hat{B}_N \hat{q}$  è il quaternione dell'assetto stimato.

Usufruento della definizione di quaternione (3.9) e assumendo che la rotazione  $\delta \theta$  associata all'errore quaternionico  $\delta \bar{q}$  sia infinitesima:

$$\delta \bar{q} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{q} \\ \delta q_4 \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{k}} \sin(\delta \theta / 2) \\ \cos(\delta \theta / 2) \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

$$\approx \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \delta \theta \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

in cui  $\delta \theta$  è un vettore avente dimensione  $3 \times 1$ .

Analogamente, l'errore  $\Delta \mathbf{b}$  tra il bias vero e il bias stimato può esser calcolato mediante:

$$\Delta \mathbf{b} = \mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}} \quad (7.14)$$

Lo stato del sistema può essere ora espresso attraverso un vettore di sei componenti:

$$\delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta \theta \\ \Delta \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

e le relative equazioni di propagazione dell'errore a tempo continuo, scritte in forma matriciale (si rimanda alle equazioni 165-178 del [...] per i passaggi completi) risultano:

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta\theta} \\ \dot{\Delta\mathbf{b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[\hat{\boldsymbol{\omega}} \times] & -\mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\theta} \\ \Delta\mathbf{b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{n}_r \\ \mathbf{n}_w \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

Raggruppando opportunamente i termini, la (7.16) può essere riscritta come:

$$\dot{\delta\mathbf{x}} = \mathbf{F}_c \cdot \delta\mathbf{x} + \mathbf{G}_c \cdot \mathbf{n} \quad (7.17)$$

in cui:

- $\mathbf{F}_c$  è la matrice di stato a tempo continuo;
- $\mathbf{G}_c$  è la matrice del rumore a tempo continuo;
- $\delta\mathbf{x}$  è l'errore relativo allo stato del sistema;
- $\mathbf{n}$  è il vettore contenente le componenti del rumore.

Considerando le componenti del rumore  $\mathbf{n}_w$  e  $\mathbf{n}_b$  tra loro indipendenti, la matrice di covarianza del rumore a tempo continuo  $\mathbf{Q}_c$  viene definita nel modo seguente:

$$\mathbf{Q}_c = \mathbf{G}_c \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_w & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{N}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_w^2 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \sigma_b^2 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

e l'equazione di stato dell'errore a tempo continuo in definitiva risulta:

$$\dot{\delta\mathbf{x}} = \mathbf{F}_c \cdot \delta\mathbf{x} + \mathbf{Q}_c \quad (7.19)$$

## 7.5 Equazione di stato dell'errore a tempo discreto

Per poter usufruire dell'equazione (7.19) all'interno del microcontrollore è necessario esprimerla a tempo discreto attraverso la matrice di transizione di stato  $\Phi(t + \Delta t, t)$ . Questa matrice ha il compito di correlare lo stato del sistema all'istante  $t$  con lo stato all'istante  $t + \Delta t$ .

Essendo  $\mathbf{F}_c$  costante durante l'intervallo di integrazione, possiamo definirla come:

$$\Phi(t + \Delta t, t) = \exp(\mathbf{F}_c \Delta t) \quad (7.20)$$

$$= \mathbf{I}_x + \mathbf{F}_c \Delta t + \frac{1}{2!} \mathbf{F}_c^2 \Delta t^2 + \dots \quad (7.21)$$

e in accordo con la notazione adottata da Trawny e Roumeliotis, la matrice di transizione ha la seguente struttura:

$$\Phi(t + \Delta t, t) = \begin{bmatrix} \Theta & \Psi \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

in cui  $\Theta$  e  $\Psi$ , dopo l'espansione in serie e diverse semplificazioni (si rimanda alle equazioni 188-197 di [8] per i passaggi completi) corrispondono a:

$$\Theta = \cos(|\hat{\omega}| \Delta t) \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} - \sin(|\hat{\omega}| \Delta t) \cdot \left[ \frac{\hat{\omega}}{|\hat{\omega}|} \times \right] + (1 - \cos(|\hat{\omega}| \Delta t)) \cdot \frac{\hat{\omega}}{|\hat{\omega}|} \frac{\hat{\omega}^T}{|\hat{\omega}|} \quad (7.23)$$

$$\Psi = -\mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t + \frac{1}{|\hat{\omega}|^2} (1 - \cos(|\hat{\omega}| \Delta t)) [\hat{\omega} \times] - \frac{1}{|\hat{\omega}|^3} (|\hat{\omega}| \Delta t - \sin(|\hat{\omega}| \Delta t)) [\hat{\omega} \times]^2 \quad (7.24)$$

La covarianza del rumore a tempo discreto può esser calcolata usufruendo della (7.22) nel seguente modo:

$$\mathbf{Q}_d = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi \mathbf{Q}_c \Phi^T d\tau \quad (7.25)$$

da cui, in accordo con la notazione adottata da Trawny e Roumeliotis (si rimanda alle equazioni 202-207 di [8] per i passaggi completi), risulta:

$$\mathbf{Q}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix} \quad (7.26)$$

in cui:

$$\mathbf{Q}_{11} = N^2 \Delta t \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} + K^2 \cdot \left( \mathbf{I}_{3 \times 3} \frac{\Delta t^3}{3} + \frac{(|\hat{\omega}| \Delta t)^3}{3} + \frac{2 \sin(|\hat{\omega}| \Delta t) - 2 |\hat{\omega}| \Delta t}{|\hat{\omega}|^5} \cdot [\hat{\omega} \times]^2 \right) \quad (7.27)$$

$$\mathbf{Q}_{12} = -K^2 \cdot \left( \mathbf{I}_{3 \times 3} \frac{\Delta t^2}{2} + \frac{|\hat{\omega}| \Delta t - \sin(|\hat{\omega}| \Delta t)}{|\hat{\omega}|^3} \cdot [\hat{\omega} \times] + \frac{(|\hat{\omega}| \Delta t)^2}{2} + \frac{\cos(|\hat{\omega}| \Delta t) - 1}{|\hat{\omega}|^4} \cdot [\hat{\omega} \times]^2 \right) \quad (7.28)$$

$$\mathbf{Q}_{22} = K^2 \Delta t \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (7.29)$$

## 7.6 Equazione di misura

In questo paragrafo deriveremo i modelli matematici dell'equazione di misura per i seguenti sensori:

- star tracker;
- accelerometro;
- magnetometro.

### 7.6.1 Star tracker

Lo star tracker è in grado di definire l'orientazione dello spacecraft rispetto ad un riferimento inerziale usufruendo di un catalogo stellare interno e fornisce l'informazione di assetto sotto forma di quaternione.

Assumendo che la differenza tra la misura acquisita dallo star tracker  $\bar{q}_{s.t.}$  e la stima attuale dell'assetto  $\hat{q}$  sia piccola:

$$\delta\bar{q} = \bar{q}_{s.t.} \otimes \hat{q}^{-1} \approx \begin{bmatrix} \delta\mathbf{q} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\theta} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7.30)$$

esprimeremo il legame tra la misura dello star tracker e il vettore di stato nel seguente modo:

$$\delta\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\theta} \\ \Delta\mathbf{b} \end{bmatrix} + \mathbf{n}_m \quad (7.31)$$

La matrice di misura  $\mathbf{H}$  è di conseguenza costante e corrisponde a:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.32)$$

### 7.6.2 Accelerometro e magnetometro

Nonostante i due sensori differiscano da un punto di vista costruttivo, accelerometro e magnetometro usufruiscono dello stesso modello di misura per fornire l'informazione dell'assetto. In entrambi si misura infatti la proiezione di un vettore avente idealmente orientazione assoluta in un s.d.r. inerziale.

La relazioni che legano il valore del vettore accelerazione di gravità o di magnetizzazione terrestre con le misure acquisite nel s.d.r. del sensore S sono:

$$\mathbf{a}^S = {}^S_N\mathbf{R}^N \mathbf{a} \quad (7.33)$$

$$\mathbf{h}^S = {}^S_N\mathbf{R}^N \mathbf{h} \quad (7.34)$$

in cui:

- ${}^S\mathbf{a}$  e  ${}^S\mathbf{h}$  sono rispettivamente il vettore accelerazione e il vettore di magnetizzazione, misurati nel s.d.r. del sensore S;

- ${}^N \mathbf{a}$  e  ${}^N \mathbf{h}$  sono rispettivamente il vettore accelerazione di gravità e il vettore di magnetizzazione terrestre, assunti fissi nel s.d.r. inerziale N.

La matrice di rotazione  ${}^S_N \mathbf{R}$  può essere inoltre scomposta nel seguente modo:

$${}^S_N \mathbf{R} = {}^S_B \mathbf{R} {}^B_N \mathbf{R} \quad (7.35)$$

in cui:

- ${}^S_B \mathbf{R}$  è la matrice di rotazione tra il s.d.r. body B e il s.d.r. del sensore S. Questa matrice dipende da come il sensore è posizionato rispetto la terna body B del simulatore. Ha valore costante ed è già contenuta all'interno della matrice di calibrazione.
- ${}^B_N \mathbf{R}$  è la matrice di rotazione tra il s.d.r. di navigazione N e il s.d.r. del simulatore B. Questa matrice è funzione dell'orientazione spaziale del simulatore, definita dal quaternion di assetto  $\bar{q}$ ;

La misura di entrambi i sensori è affetta da un rumore  $\mathbf{n}_m$  e l'equazione di misura generalizzata può esser scritta nel seguente modo:

$$\mathbf{z} = {}^S_B \mathbf{R} {}^B_N \mathbf{R} {}^N \mathbf{r}_\odot + \mathbf{n}_m \quad (7.36)$$

in cui:

- $\mathbf{z}$  è il vettore di misura del sensore e corrisponde a:  ${}^S \mathbf{a}$  o  ${}^S \mathbf{h}$ ;
- ${}^N \mathbf{r}_\odot$  è il vettore avente orientazione fissa rispetto al s.d.r. inerziale N:  ${}^N \mathbf{a}$  o  ${}^N \mathbf{h}$ ;
- $\mathbf{n}_m$  è il rumore di misura, assunto bianco, Gaussiano, con media nulla  $E[\mathbf{n}_m] = \mathbf{0}$  e covarianza nota  $E[\mathbf{n}_m \mathbf{n}_m^T] = \mathbf{R}$ .

E' possibile ora derivare l'equazione che lega l'errore di misura al vettore di stato nel modo seguente:

$$\delta \mathbf{z} = \mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}} = {}^S_N \mathbf{R} \left( {}^B_N \mathbf{R}(\bar{q}) - \hat{{}^B_N \mathbf{R}}(\hat{q}) \right) \cdot {}^N \mathbf{r}_\odot + \mathbf{n}_m \quad (7.37)$$

da cui, in accordo con le equazioni (223-231) di [8], usufruendo dell'approssimazione per piccoli angoli risulta:

$$\delta \mathbf{z} \approx \left[ {}^S_B \mathbf{R} \left[ \hat{{}^B_N \mathbf{R}}(\hat{q}) {}^N \mathbf{r}_\odot \times \right] \quad \mathbf{0} \right] \cdot \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\theta} \\ \Delta \mathbf{b} \end{bmatrix} + \mathbf{n}_m \quad (7.38)$$

La matrice di misura  $\mathbf{H}$  per accelerometro e magnetometro deve quindi esser calcolata all'inizio della fase di measurement update e corrisponde a:

$$\mathbf{H} = \left[ {}^S_B \mathbf{R} \left[ \hat{{}^B_N \mathbf{R}}(\hat{q}) {}^N \mathbf{r}_\odot \times \right] \quad \mathbf{0} \right] \quad (7.39)$$

## 7.7 Il loop del filtro di Kalman

Definite le equazioni di stato dell'errore, l'equazione di misura e le matrici di covarianza del rumore, è possibile implementare il loop del filtro di Kalman. Nei seguenti capitoli verranno sequenzialmente esposte le fasi necessarie a rendere operativo e funzionante il filtro:

- inizializzazione;
- time update phase o predict phase;
- measurement update phase.

### 7.7.1 Inizializzazione

Nella fase di inizializzazione si definiscono lo stato iniziale del sistema  $\hat{\mathbf{x}}_0$  e il valore di covarianza del sistema  $\mathbf{P}_0$  con cui avviare il filtro. La scelta di tali valori è strettamente correlata alla frequenza di measurement update e influenza marcatamente la velocità di convergenza del filtro nei primi istanti di funzionamento.

Nella configurazione terrestre la fase di measurement update viene eseguita ad una frequenza prossima a quella di time update, di conseguenza non si impongono particolari vincoli ai valori della matrice di covarianza dello stato e di bias iniziali:

$$\hat{\mathbf{b}}_0 = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (7.40)$$

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (7.41)$$

Nella configurazione spaziale invece, la fase di measurement update viene eseguita ad una frequenza 300 volte inferiore a quella di time update e questo impone al filtro di esser inizializzato con un valore del bias prossimo al valore vero per evitare problemi di convergenza. Questa condizione è stata soddisfatta assumendo il bias iniziale del filtro pari al bias statico presente nelle misure del giroscopio:

$$\hat{\mathbf{b}}_0 = \mathbf{C}_{3 \times 3}^S \mathbf{b}_0 \quad (7.42)$$

La matrice di covarianza dello stato è stata invece inizializzata con un valore nettamente inferiore rispetto a (7.41), per permettere una convergenza non troppo lenta del filtro.

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 1E7 \sigma_w^2 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & 1E5 \sigma_b^2 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (7.43)$$

### 7.7.2 Predict phase

La fase di propagazione del filtro ha inizio acquisendo le misure del sensore giroscopico  $\boldsymbol{\omega}_{m_{k+1}}$  e usufruisce della stima dell'assetto  $\hat{\mathbf{q}}_{k|k}$ , della stima del bias  $\hat{\mathbf{b}}_{k|k}$  e della matrice di covarianza dello stato  $\mathbf{P}_{k|k}$  calcolati allo step precedente.

Il procedimento completo è di seguito riportato:

1. Assumendo il bias costante durante l'intervallo di integrazione, si esegue la propagazione del bias:

$$\hat{\mathbf{b}}_{k+1|k} = \hat{\mathbf{b}}_{k|k} \quad (7.44)$$

2. A partire dalle misure acquisite dal giroscopio e dalla stima del bias, si calcola la stima della velocità angolare del sistema:

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{k+1|k} = \mathbf{C}_{3 \times 3} \boldsymbol{\omega}_{m_{k+1}} - \hat{\mathbf{b}}_{k+1|k} \quad (7.45)$$

3. Si propaga il quaternione mediante l'integratore di ordine zero:

$$\hat{B}_N \hat{q}_{k+1|k} = \begin{bmatrix} \frac{\hat{\boldsymbol{\omega}}}{|\hat{\boldsymbol{\omega}}|} \sin\left(\frac{|\hat{\boldsymbol{\omega}}|}{2} \Delta t\right) \\ \cos\left(\frac{|\hat{\boldsymbol{\omega}}|}{2} \Delta t\right) \end{bmatrix} \otimes \hat{B}_N \hat{q}_{k|k} \quad (7.46)$$

4. Si calcola la matrice di transizione dello stato  $\Phi$  (7.22) e la matrice del rumore  $\mathbf{Q}_d$  (7.26):
5. Si calcola la matrice di covarianza dello stato a priori

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \Phi \mathbf{P}_{k|k} \Phi^T + \mathbf{Q}_d \quad (7.47)$$

### 7.7.3 Measurement update phase

La fase di measurement update ha inizio acquisendo le misure dal sensore di posizione (star tracker, accelerometro o magnetometro) e usufruisce della stima a priori del quaternione  $\hat{B}_N \hat{q}_{k+1|k}$ , della stima a priori del bias  $\hat{\mathbf{b}}_{k+1|k}$  e della covarianza dello stato  $\mathbf{P}_{k+1|k}$  calcolati nella fase di propagazione.

Il procedimento completo è di seguito riportato:

1. Calcolo della matrice di misura  $\mathbf{H}$  (7.32)(7.39) in funzione del sensore utilizzato. Nello star tracker tale matrice è costante; non è quindi necessario calcolarla ad ogni ciclo.
2. Calcolo del residuo  $\mathbf{r}$ , ovvero della discrepanza tra la misura acquisita  $\mathbf{z}$  e la stima della misura  $\hat{\mathbf{z}}$ :

$$\mathbf{r} = \mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}} \quad (7.48)$$

3. Calcolo della covarianza del residuo  $\mathbf{S}$ :

$$\mathbf{S} = \mathbf{H} \mathbf{P} \mathbf{H}^T + \mathbf{R} \quad (7.49)$$

4. Calcolo del guadagno di Kalman:

$$\mathbf{K} = \mathbf{P} \mathbf{H}^T \mathbf{S}^{-1} \quad (7.50)$$

5. Calcolo della correzione  $\Delta\hat{\mathbf{x}}(+)$

$$\Delta\hat{\mathbf{x}}(+)=\begin{bmatrix} \delta\hat{\boldsymbol{\theta}}(+)\cr \Delta\hat{\mathbf{b}}(+)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\cdot\delta\hat{\mathbf{q}}(+)\cr \Delta\hat{\mathbf{b}}(+)\end{bmatrix}=\mathbf{K}\mathbf{r}\quad (7.51)$$

6. Correzione della stima del quaternion di assetto:

$$\hat{\mathbf{q}}_{k+1|k+1}=\delta\hat{\mathbf{q}}\otimes\hat{\mathbf{q}}_{k+1|k}\quad (7.52)$$

assumendo:

$$\delta\hat{\mathbf{q}}=\left[\frac{\delta\hat{\mathbf{q}}(+)}{\sqrt{1-\delta\hat{\mathbf{q}}(+)^T\delta\hat{\mathbf{q}}(+)}}\right]\quad (7.53)$$

oppure se  $\delta\hat{\mathbf{q}}(+)^T\delta\hat{\mathbf{q}}(+)>1$ :

$$\delta\hat{\mathbf{q}}=\frac{1}{\sqrt{1-\delta\hat{\mathbf{q}}(+)^T\delta\hat{\mathbf{q}}(+)}}\cdot\begin{bmatrix} \delta\hat{\mathbf{q}}(+)\cr 1\end{bmatrix}\quad (7.54)$$

7. Correzione della stima del bias:

$$\hat{\mathbf{b}}_{k+1|k+1}=\hat{\mathbf{b}}_{k+1|k}+\Delta\hat{\mathbf{b}}(+)\quad (7.55)$$

8. Correzione della stima della velocità angolare usufruendo della nuova stima del bias:

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{k+1|k+1}=\boldsymbol{\omega}_{m_{k+1}}-\hat{\mathbf{b}}_{k+1|k+1}\quad (7.56)$$

9. Calcolo della nuova matrice di covarianza dello stato:

$$\mathbf{P}_{k+1|k+1}=(\mathbf{I}_{6\times 6}-\mathbf{K}\mathbf{H})\mathbf{P}_{k+1|k}(\mathbf{I}_{6\times 6}-\mathbf{K}\mathbf{H})^T+\mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{K}^T\quad (7.57)$$

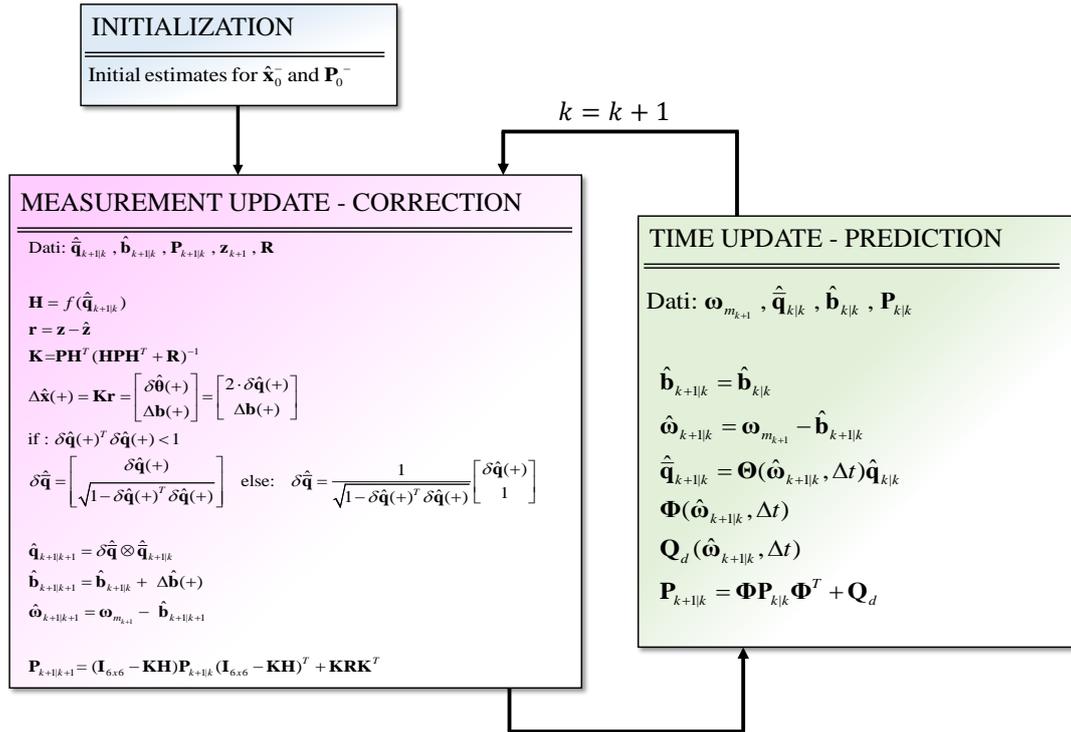


Figura 7.1: Algoritmo del filtro di Kalman esteso utilizzato



## Capitolo 8

# Implementazione del filtro nel microcontrollore

Nel presente capitolo vengono illustrate le modalità con cui i sensori elettronici forniscono le informazioni di assetto e le strategie con cui il microcontrollore elabora tali informazioni. Verranno inoltre descritte le diverse fasi di progettazione che hanno permesso la creazione della scheda elettronica per la lettura degli encoder e il trasferimento delle informazioni via Wi-fi.

### 8.1 La scelta del microcontrollore

A causa della limitata capacità di calcolo del microcontrollore già presente nel simulatore, l'utilizzo di un microcontrollore esterno a basso costo ha costituito l'unica alternativa in attesa di un prossimo aggiornamento dell'hardware elettronico che consentirà di ricentralizzare l'esecuzione di tutte le task in un unico microcomputer.

La scelta del microcontrollore per l'esecuzione del filtro risulta comunque vincolata ai seguenti parametri:

- la velocità di elaborazione dei dati deve consentire l'esecuzione del filtro ad una frequenza prossima ai 100 Hz;
- dimensioni e peso contenuti;
- presenza di un bus  $I^2C$  per la comunicazione con la piattaforma inerziale MPU-6050 e il magnetometro HMC5883L;
- presenza di 6 pin di I/O con funzionalità di interrupt per la lettura degli encoder incrementali.

Inizialmente si era deciso di utilizzare un Arduino UNO, una tra le piattaforme embedded più economiche e facili da programmare conosciute in ambito consumer. Tuttavia la presenza di una memoria SRAM limitata in questo microcontrollore non ha permesso l'allocazione di tutte le variabili globali necessarie all'esecuzione del filtro. L'Arduino Due ha costituito quindi la scelta definitiva in grado di soddisfare a pieno tutti i requisiti necessari. In (Tabella 8.1) è riportato un confronto tra i due microcontrollori.

	Arduino UNO	Arduino Due
<b>Operating voltage</b>	5 V	3.3 V
<b>Input voltage</b>	7-12 V	7-12 V
<b>Flash memory</b>	32 KB	512 KB
<b>SRAM</b>	2 KB	96 KB
<b>EEPROM</b>	1 KB	-
<b>Clock speed</b>	16 MHz	84 MHz
<b>Power consumption</b>	240 mW	410 mW
<b>Weight</b>	25 g	36 g
<b>Size</b>	(68.6x 53.4)mm	(101.5 x 53.4)mm
<b>Interrupt pin (default)</b>	2	All

Tabella 8.1: Specifiche tecniche Arduino UNO &amp; Arduino Due.

### 8.1.1 Riduzione del costo computazionale dell'algoritmo

Per velocizzare l'elaborazione del filtro all'interno di un microcontrollore si è ritenuto necessario ridurre il costo computazionale dell'algoritmo. Assumendo un  $\Delta t$  di integrazione nell'ordine dei 10 ms e una velocità massima del sistema di 40 deg/s si sono approssimate le espansioni in serie di Taylor ad ordini inferiori, riducendo notevolmente il numero di operazioni necessarie da eseguire nella fase di propagazione.

Le componenti  $\Theta$  e  $\Psi$  della state transition matrix sono state approssimate a partire dalle equazioni (7.23) e (7.24) nel seguente modo:

$$\Theta = \mathbf{I}_{3 \times 3} - \Delta t [\hat{\omega} \times] \quad (8.1)$$

$$\Psi = -\mathbf{I}_{3 \times 3} \Delta t \quad (8.2)$$

Le componenti  $\mathbf{Q}_{11}$ ,  $\mathbf{Q}_{12}$ ,  $\mathbf{Q}_{22}$  della matrice di covarianza del rumore sono state approssimate a partire dalle equazioni (7.28), nel seguente modo:

$$\mathbf{Q}_{11} = \sigma_w^2 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} + \sigma_b^2 \frac{\Delta t^2}{3} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (8.3)$$

$$\mathbf{Q}_{12} = -\sigma_b^2 \frac{\Delta t}{2} \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (8.4)$$

$$\mathbf{Q}_{22} = \sigma_b^2 \cdot \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (8.5)$$

A seguito delle suddette semplificazioni, risulterà necessario calcolare ad ogni time step unicamente il valore di  $[\hat{\omega} \times]$ , mentre tutte le restanti componenti potranno esser calcolate a priori nella fase di inizializzazione del filtro.

Eseguendo un confronto in MATLAB tra le prestazioni del filtro con e senza approssimazioni non si sono riscontrati particolari cambiamenti nella precisione del filtro. I risultati di tale confronto sono riportati nel capitolo relativo alle simulazioni numeriche (Fig. 9.4, 9.6).

## 8.2 La lettura degli encoder con il microcontrollore

### 8.2.1 Gli encoder incrementali rotativi

Gli encoder incrementali rotativi (Fig. 8.1) sono trasduttori in grado di fornire la posizione angolare relativa di un organo mobile e vengono solitamente impiegati in numerose applicazioni di automazione quali stampanti, robot e macchine utensili. Il principio di funzionamento di questi dispositivi è basato sulla trasmissione di un fascio luminoso da un led trasmettitore ad un fotodiode ricevitore tra cui è interposta una maschera fissata all'organo mobile (Fig. 8.2). Tale maschera, tramite un'alternanza di zone trasparenti e opache equispaziate di un angolo  $\lambda$ , consente o impedisce il passaggio del fascio luminoso, modulando la posizione angolare dell'elemento mobile in un segnale elettrico ad onda quadra. La risoluzione angolare nell'encoder dipende quindi dal numero di alternanze presenti nella maschera e il livello logico alto o basso dell'onda quadra è associato rispettivamente alle zone di trasparenza/opacità (o viceversa). La posizione angolare viene ricavata per via incrementale, contando il numero di transizioni presenti nel canale di lettura, solitamente definito canale A. Per ottenere l'informazione del verso di rotazione è presente un secondo trasduttore fotoelettrico ed una maschera sfasata di un angolo pari a  $n\lambda + \lambda/4$  rispetto la prima; il canale collegato al secondo trasduttore fotoelettrico è denominato canale B. Quando il canale A è a livello logico alto, il canale B può assumere livello logico alto o basso e permette in tal modo di determinare il verso di rotazione dell'encoder. Tale configurazione, denominata lettura in quadratura, usufruendo delle fasi di transizione di livello logico nelle onde quadre, permette inoltre di aumentare la risoluzione fino a quattro volte il numero di cicli/giro dichiarati dal costruttore.

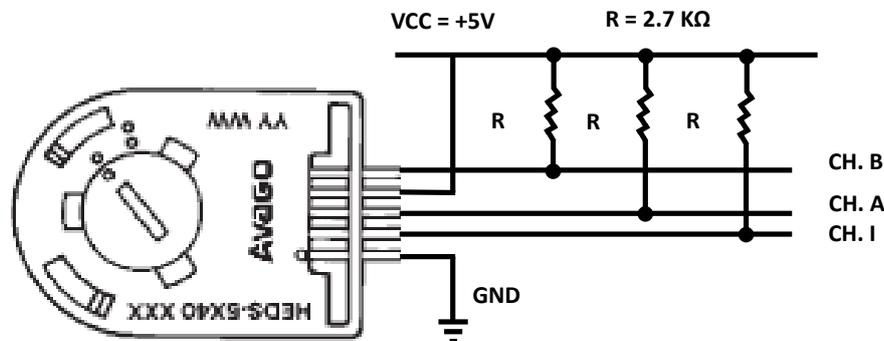


Figura 8.1: Schema di collegamento degli encoder [2].

### 8.2.2 L'interrupt

Il microcontrollore si interfaccia ad ogni encoder attraverso i canali A e B, a ciascuno dei quali è associata una routine di interrupt. L'interrupt corrisponde ad una richiesta di servizio immediato da parte del microcontrollore ed è necessaria per la lettura dell'encoder in quanto il conteggio può avvenire in qualsiasi istante di funzionamento del filtro. Durante l'esecuzione della memoria programma tale richiesta di servizio costituisce un salto della memoria di stack

alla locazione in cui è contenuta la subroutine di interrupt, terminata la quale, il programma riprende la normale esecuzione. L'eventuale situazione in cui più richieste di interrupt avvengono contemporaneamente viene gestita dal microcontrollore attraverso un registro FIFO, permettendo di eseguirle sequenzialmente una alla volta. In tal modo non avviene alcuna perdita di informazione se un interrupt avviene mentre il microcontrollore è già impegnato a gestirne un altro.

### 8.2.3 Algoritmo di lettura

Lo scopo dell'algoritmo di lettura implementato nel microcontrollore è quello di rilevare la sequenza con la quale si manifesta la variazione di stato logico nei canali A e B e definire se tale variazione contribuisca ad incrementare, decrementare o mantenere inalterato il conteggio angolare dell'encoder.

Ogni volta che avviene una transizione di stato logico in uno dei due canali, la routine di interrupt esegue la lettura dei livelli logici presenti all'interno di entrambi i canali A e B, confronta lo stato attuale con lo stato appartenente al conteggio precedente e mediante la (Tabella 8.2) definisce se il contatore debba essere incrementato (inc), decrementato (dec), o mantenuto inalterato (X). Al termine di ogni routine il valore dello stato attuale viene salvato per il futuro conteggio. Lo stato X oltre a permettere di escludere fenomeni di rimbalzo, dovuti al posizionamento incerto della maschera in una zona di transizione, tutela il conteggio da errori dovuti alla eventuale presenza di spike di rumore all'interno del canale di lettura.

	Stato precedente	1	2	3	4
Stato attuale	AB	11	10	00	01
1	11	X	dec	X	inc
2	10	inc	X	dec	X
3	00	X	inc	X	dec
4	01	dec	X	inc	X

Tabella 8.2: Matrice per il conteggio degli encoder.

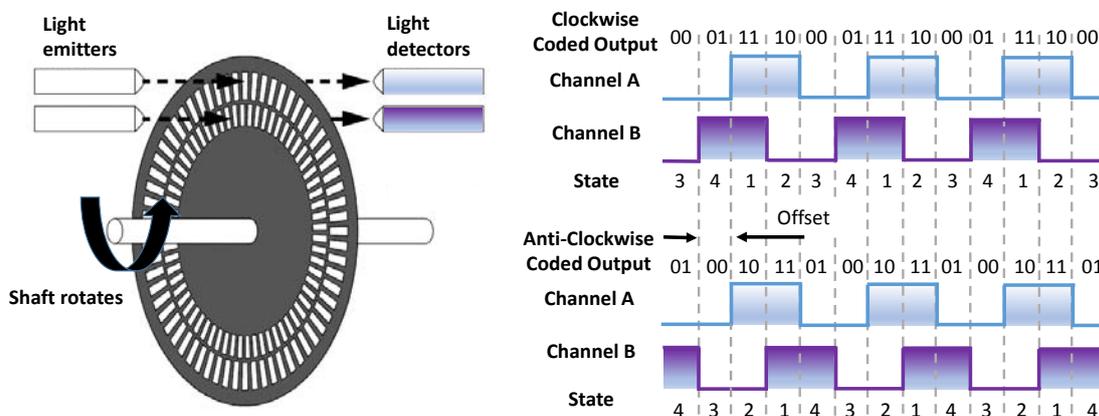


Figura 8.2: Canali A e B di un encoder in quadratura.

### 8.2.4 Procedura di start degli encoder

L'encoder incrementale permette di misurare l'angolo di rotazione relativo del giunto meccanico rispetto la configurazione iniziale di partenza, di conseguenza non consente di conoscere la rotazione iniziale del s.d.r. body B rispetto al s.d.r. di navigazione N, dopo ogni spegnimento/riavvio del dispositivo. Per risolvere tale problematica, un'apposita procedura di start è stata programmata nel microcontrollore, con la funzione di determinare l'offset relativo alla posizione di partenza.

Tale procedura sfrutta la simmetria costruttiva del giunto e consiste nel posizionare manualmente il simulatore nelle configurazioni di massima escursione  $[+40^\circ; -40^\circ]$  relative agli assi di roll e pitch. Ad esempio, prendendo in considerazione l'asse di roll, conoscendo il valore dell'escursione positiva massima  $\phi(+)$  e dell'escursione negativa massima  $\phi(-)$  (Fig. 8.3) è possibile determinare l'offset iniziale  $\phi_{OFFSET}$  tra il piano orizzontale del simulatore  $\overline{EF}$  e la bisettrice dell'angolo  $\widehat{AOB}$  mediante la seguente espressione:

$$\phi_{OFFSET} = \frac{\phi(+)+\phi(-)}{2} \quad (8.6)$$

Il procedimento per l'asse di pitch è del tutto analogo, mentre l'asse di yaw non necessita di tale procedura in quanto componente indipendente nella sequenza di rotazioni 3-2-1 (yaw-pitch-roll).

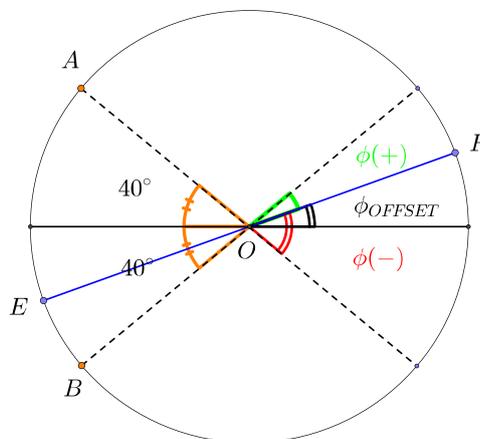


Figura 8.3: Escursioni angolari per l'asse di roll.

### 8.2.5 Simulazione dello star tracker tramite encoder

Lo star tracker utilizzato nella fase di update dal filtro viene simulato mediante i tre encoder ottici incrementali HEDM 5500-B13 posizionati in corrispondenza delle cerniere del giunto cardanico. La loro disposizione permette di misurare gli angoli di eulero  $\phi, \theta, \psi$  e per convertire tale informazione nel quaternione d'assetto si usufruisce della (8.7) :

$${}^B_N\bar{q}_{s.t.} = \begin{bmatrix} c\left(\frac{\phi}{2}\right) c\left(\frac{\theta}{2}\right) c\left(\frac{\psi}{2}\right) + s\left(\frac{\phi}{2}\right) s\left(\frac{\theta}{2}\right) s\left(\frac{\psi}{2}\right) \\ s\left(\frac{\phi}{2}\right) c\left(\frac{\theta}{2}\right) c\left(\frac{\psi}{2}\right) - c\left(\frac{\phi}{2}\right) s\left(\frac{\theta}{2}\right) s\left(\frac{\psi}{2}\right) \\ c\left(\frac{\phi}{2}\right) s\left(\frac{\theta}{2}\right) c\left(\frac{\psi}{2}\right) + c\left(\frac{\phi}{2}\right) c\left(\frac{\theta}{2}\right) s\left(\frac{\psi}{2}\right) \\ c\left(\frac{\phi}{2}\right) c\left(\frac{\theta}{2}\right) s\left(\frac{\psi}{2}\right) - s\left(\frac{\phi}{2}\right) s\left(\frac{\theta}{2}\right) c\left(\frac{\psi}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (8.7)$$

Come in tutti i sensori, anche la misura angolare fornita dall'encoder è affetta da un errore dovuto alla risoluzione finita del sensore. Tale errore può essere interpretato come l'errore di quantizzazione di un segnale digitalizzato a seguito di un convertitore analogico digitale, costituito in questo caso dall'encoder stesso. Assumendo l'LSB pari alla risoluzione angolare dell'encoder, tale errore ha distribuzione normale pari a:

$$\sigma_{enc} = \frac{LSB}{\sqrt{12}} \quad (8.8)$$

Usufruento dell'approssimazione per piccoli angoli, il valore di covarianza associato alla misura angolare viene convertito in un valore di covarianza relativa al quaternione:

$$\sigma_{s.t.} = \frac{\sigma_{enc}}{2} \quad (8.9)$$

da cui la matrice di covarianza dello star tracker risulta:

$$\mathbf{R}_{s.t.} = \begin{bmatrix} \sigma_{s.t.}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{s.t.}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{s.t.}^2 \end{bmatrix} \quad (8.10)$$

## 8.3 La comunicazione del microcontrollore con i sensori

### 8.3.1 Il protocollo I<sup>2</sup>C

Abbreviazione di Inter Integrated Circuit, I<sup>2</sup>C è un protocollo di comunicazione seriale originariamente sviluppato dalla Philips nel 1982 per ridurre il numero di collegamenti necessari ad interfacciare tra loro le periferiche. Questo protocollo usufruisce di un bus di comunicazione a due linee, denominate SDA (Serial Data) e SCL (Serial Clock) per permettere la comunicazione tra una periferica principale, denominata master e costituita nel nostro caso dal microcontrollore Arduino Due e una o più periferiche secondarie, denominate slave, costituite nel nostro caso da MPU-6050 e HMC5883L.

La comunicazione ha inizio quando il master dispone in condizione di START il bus attraverso una transizione dal livello logico alto a livello logico basso della linea di SDA mentre la linea di SCL è a livello logico alto (Fig. 8.4). Dopo tale condizione il bus rimane occupato fintanto che il master dispone la condizione di STOP attraverso una transizione dal livello logico basso a livello logico alto di SDA mentre la linea SCL è a livello logico alto. Il bus rimane occupato anche se un'altra condizione di START viene generata.

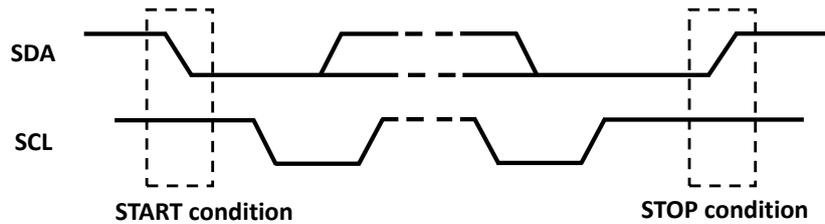


Figura 8.4: Condizioni di START e STOP nel bus  $I^2C$ [4].

Il formato di trasferimento dei dati nella comunicazione  $I^2C$  avviene in pacchetti della lunghezza di 1 bytes, ovvero 8 bit. Tuttavia non esiste alcuna restrizione al numero di bytes che possono essere trasmessi fintanto che il bus risulta occupato. Il trasferimento di ogni singolo byte deve essere seguito da un segnale di riconoscimento comunemente definito acknowledge ACK (Fig. 8.5). Il clock per il segnale di acknowledge è generato dalla periferica master, mentre la periferica slave genera il segnale di ACK forzando il livello logico basso nella linea SDA e mantenendolo a tale valore fintanto che il livello logico del clock di ACK rimane alto.

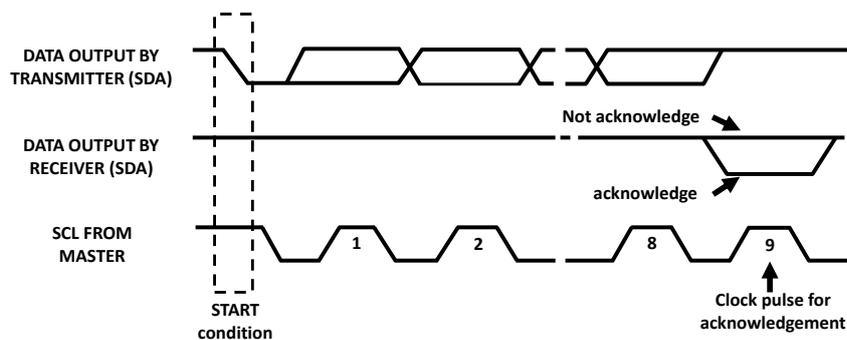


Figura 8.5: L'acknowledge ACK nel bus  $I^2C$ [4].

### 8.3.2 Read / Write dei registri

La comunicazione con i sensori può avvenire in lettura, nel caso in cui si debbano acquisire le misure, oppure in scrittura nel caso in cui si desideri impostare la frequenza di taglio del filtro o agire su altri parametri funzionali.

La lettura dei dati dal sensore avviene sequenzialmente nel seguente modo (Fig. 8.6):

1. il master inizia la comunicazione ponendo il bus in condizione di START;
2. il master invia nel bus l'indirizzo a 7 bit della periferica seguito da un bit a livello logico alto se il master ha intenzione di leggere dalla periferica (in scrittura questo bit è a livello logico basso);
3. Il master rilascia la linea SDA e attende il segnale di acknowledge ACK dalla periferica slave;
4. Il master invia nel bus l'indirizzo del registro della periferica slave che ha intenzione di leggere;

5. Il master rilascia la linea SDA e attende il segnale di acknowledge ACK dalla periferica slave;
6. La periferica slave trasmette il byte seguito da un segnale di acknowledge ACK. Ogni singolo bit che compone il byte viene trasmesso in sincronia al clock della linea SCL;
7. Il master ora può concludere la comunicazione con la periferica ponendo il bus in condizione di STOP o può continuare a fornire il clock nella linea di SCL per leggere i registri successivi. La periferica slave in tal caso incrementerà automaticamente l'indirizzo del registro e trasmetterà il dato come al punto 6.

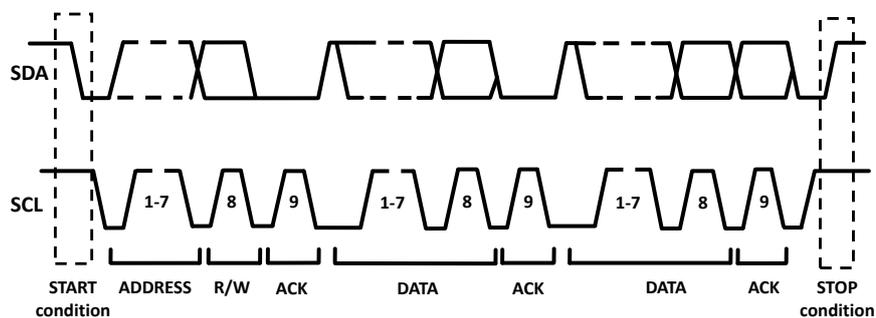


Figura 8.6: Esempio di trasferimento dati nel bus I<sup>2</sup>C[4].

### 8.3.3 Procedura di inizializzazione

Nella fase di inizializzazione della piattaforma inerziale MPU-6050 e dell'HMC5883L vengono scritti all'interno di appositi registri i valori necessari ad impostare parametri quali: frequenza operativa del sensore, frequenza di taglio, accensione del sensore e altre impostazioni di funzionamento.

Per impostare correttamente i parametri le seguenti informazioni sono state ricavate da [5, 3]:

- indirizzo delle periferiche per l'identificazione nel bus I<sup>2</sup>C (Tabella 8.3);
- indirizzo dei registri e valori da impostare (Tabella 8.4).

Periferica	Indirizzo	Descrizione
	(Hex)	
MPU-6050	0x68	Indirizzo della periferica nel bus
HMC5883L	0x1E	Indirizzo della periferica nel bus

Tabella 8.3: Indirizzo dei sensori nel bus I<sup>2</sup>C.

	Registro	Indirizzo	Valore	Descrizione
		(Hex)	(Hex)	
MPU-6050	PWR_MGMT_1	0x6B	0x00	accensione sensore
	CONFIG	0x1A	0x01	frequenza di taglio
HMC5883L	Config Register A	0x00	0x18	frequenza output rate
	Mode Register	0x02	0x00	continuous mode

Tabella 8.4: Indirizzo dei registri e valori impostati.

## 8.4 Il modulo di comunicazione Wi-Fi

Per consentire al simulatore meccanico di ricreare le condizioni di assenza d'attrito proprie dell'ambiente spaziale è necessario che la trasmissione dei dati elaborati dal filtro al computer venga eseguita senza collegamenti cablati diretti. La trasmissione delle informazioni avviene tramite Wi-Fi, mediante l'utilizzo di un apposito modulo (Fig. 8.7) che permette l'alloggiamento di un XBee Serie 2 il quale comunica con il microcontrollore attraverso lo standard seriale ad una velocità di 115200baud. Lo schema elettrico della scheda di alloggiamento per il modulo XBee è riportato in (Fig. 8.8).

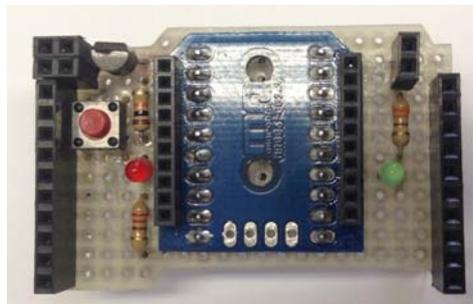


Figura 8.7: Modulo Wi-Fi per l'alloggiamento dell'XBee.

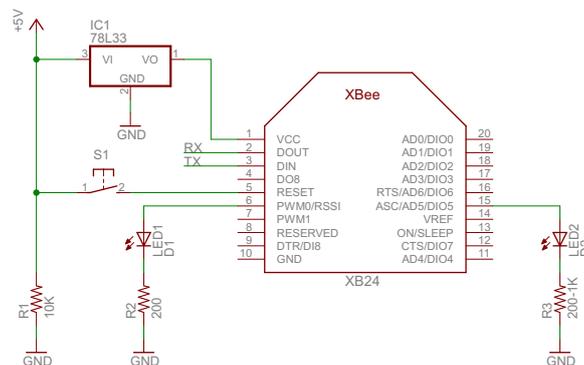


Figura 8.8: Schema elettrico del modulo Wi-fi.

## 8.5 La scheda di acquisizione dati

La scheda di acquisizione dati (Fig. 8.9) viene utilizzata per integrare i principali collegamenti necessari ad interfacciare gli encoder incrementali, la piattaforma inerziale e il magnetometro al microcontrollore. La scheda può essere utilizzata con Arduino UNO o Arduino Due e a tale scopo è inserito uno switch per permettere la commutazione della tensione operativa degli encoder da 5V a 3.3V in funzione della logica del microcontrollore utilizzato. Oltre al normale tasto di reset, posizionato come in tutte le schede Arduino in alto a sinistra è presente un ulteriore tasto centrale che permette di comunicare al microcontrollore quando è terminata la procedura di start per gli encoder.

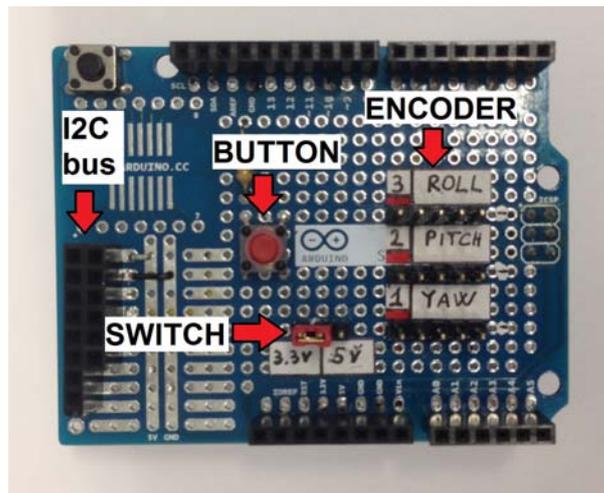


Figura 8.9: Scheda di acquisizione dati.

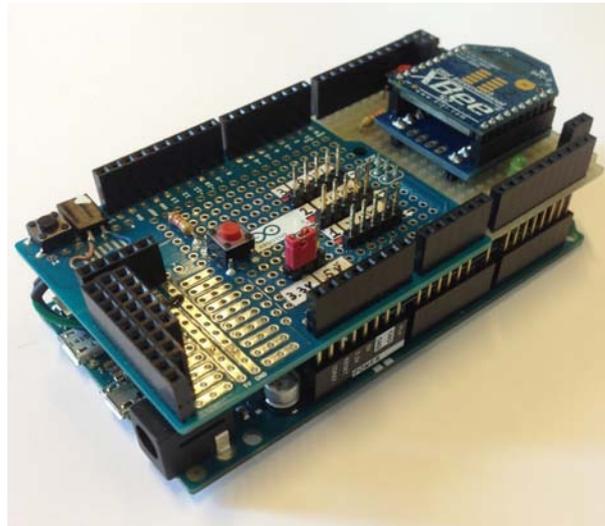


Figura 8.10: Il modulo di navigazione completo.

## Capitolo 9

# Risultati numerici e sperimentali

In questo capitolo vengono esposti i risultati numerici delle simulazioni del filtro eseguite attraverso MATLAB, le esecuzioni OFF-Line con i dati acquisiti dai sensori e i risultati definitivi relativi alle elaborazioni del filtro ON-Line eseguite in tempo reale dal microcontrollore.

Due principali scenari verranno presi in considerazione per le simulazioni numeriche e per i test sperimentali:

- **Scenario spaziale:** in questo scenario la correzione dell'assetto avviene usufruendo delle misure di uno star tracker. Il funzionamento dello star tracker è simulato ad una frequenza di 0.33 Hz, equivalente ad un tempo di acquisizione pari a 3s. Tale scelta permette di verificare come si propaga l'errore nelle misure del giroscopio e testare il corretto funzionamento del filtro in condizioni di maggiore indipendenza dalle misure degli encoder.
- **Scenario terrestre:** in questo scenario la correzione dell'assetto avviene usufruendo delle misure dell'accelerometro e del magnetometro. La determinazione dei vettori di accelerazione gravitazionale e campo magnetico permette di determinare univocamente l'assetto dello spacecraft ed eseguire la compensazione del bias presente nelle misure giroscopiche.

### 9.1 Simulazioni numeriche in MATLAB

Per ogni sensore è stata creata un'apposita classe che permette di simulare le misure con gli stessi livelli di rumore ricavati in (5). Essendo la precisione del filtro legata alla frequenza operativa, nelle simulazioni numeriche si è focalizzata l'attenzione nel determinare la minima frequenza in grado di garantire un errore di rms dell'assetto inferiore alla deviazione standard a  $\pm 3\sigma$  dello stato del sistema.

Per individuare tale valore si è studiata la risposta del sistema nella condizione di maggiore criticità, costituita dal momento in cui viene erogata la coppia massima dai thrusters. Tale coppia viene fornita da due thruster per ogni singolo asse, ne consegue che il valore di coppia massima risulta:

$$2 \cdot \tau_{max} = 0.22 [N \cdot m] \quad (9.1)$$

alla quale corrisponde per l'asse z, un'accelerazione angolare pari a:

$$\ddot{\vartheta}_z = \frac{2 \cdot \tau_{max}}{I_{zz}} = \frac{0.22}{1.4186} = 0.1551 \left[ \frac{rad}{s^2} \right] \quad (9.2)$$

Il profilo di accelerazione (Fig. 9.1) è stato imposto lungo l'asse z dopo un intervallo di 50 secondi, sufficienti al filtro per raggiungere la completa convergenza. Tale profilo ricrea la condizione in cui la coppia è erogata per un periodo di 2.5 s nel verso orario e 2.5 s in verso antiorario.

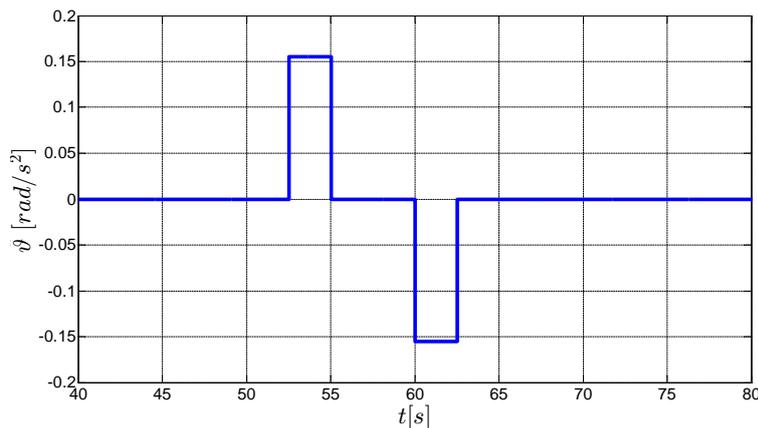


Figura 9.1: Profilo di accelerazione imposto lungo l'asse z.

### 9.1.1 Scenario spaziale, simulazione numerica

In (Fig. 9.2) e (Fig. 9.3) sono riportati rispettivamente l'andamento dell'angolo di yaw e l'errore relativo al quaternion  $q_3$  alle diverse frequenze operative del filtro.

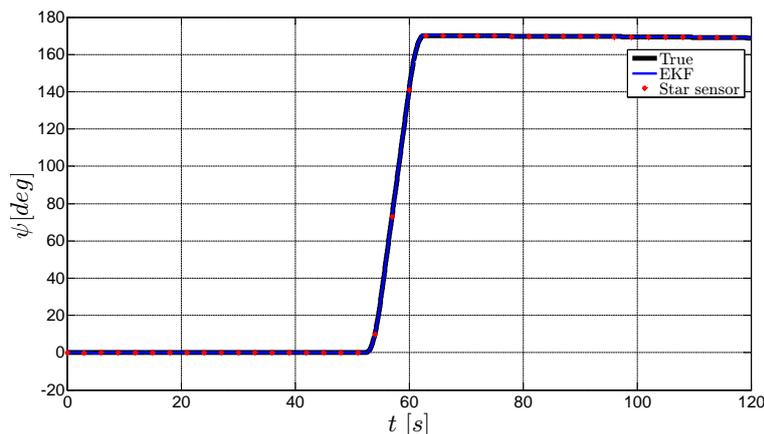


Figura 9.2: Profilo angolo di yaw.

Dalla (Fig. 9.3) è possibile osservare come all'aumentare della frequenza l'errore si riduca gradualmente e per frequenze operative superiori ai 50 Hz rientri e all'interno della curva di deviazione standard a  $\pm 3\sigma$ . Si nota inoltre come la formulazione approssimata (v2) poco si discosti da quella non approssimata (v1). Si potrà dunque usufruire della formulazione approssimata per ridurre il costo computazionale del filtro nel microcontrollore.

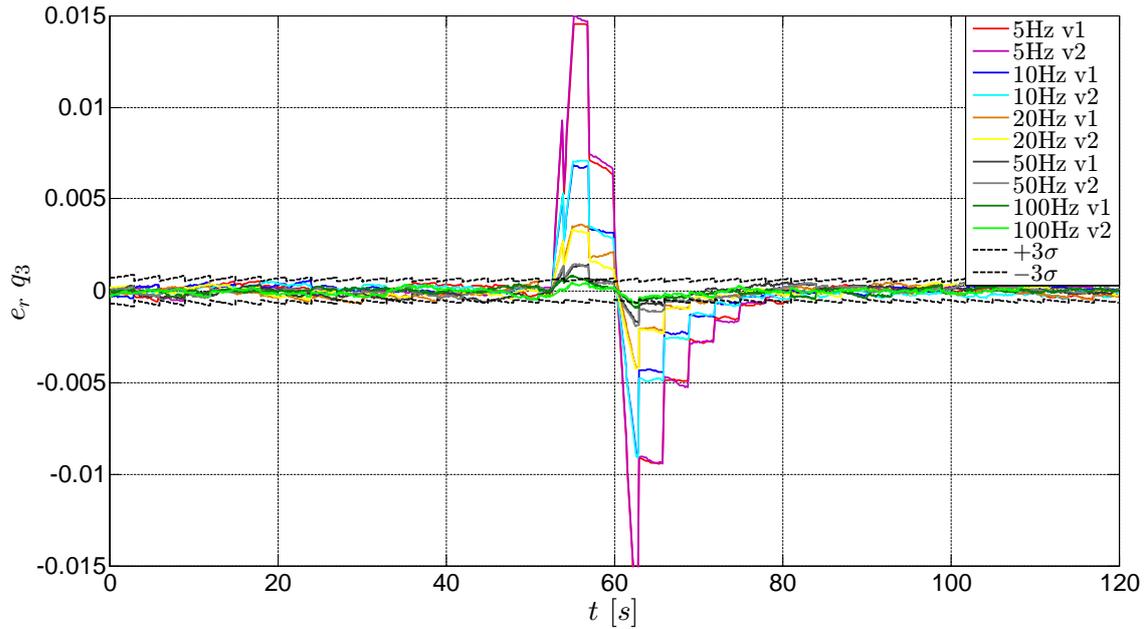


Figura 9.3: Scenario spaziale. Errore relativo al quaternione  $q_3$ .

Un completo confronto tra gli errori di rms relativi al quaternione  $q_3$  per le diverse frequenze e configurazioni operative del filtro è riportato in (Fig. 9.4).

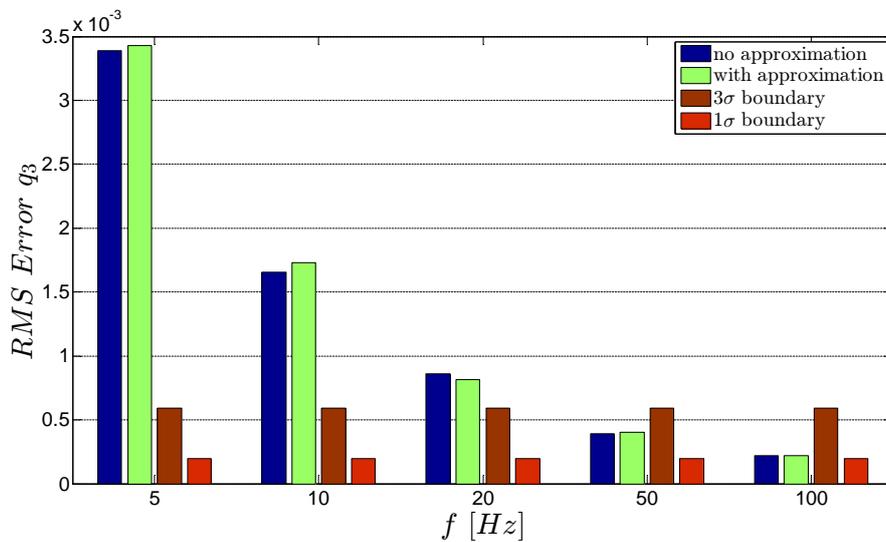


Figura 9.4: Scenario spaziale. Confronto tra gli errori di rms relativi a  $q_3$  alle diverse frequenze operative del filtro.

### 9.1.2 Scenario terrestre, simulazione numerica

In (Fig. 9.5) è riportato l'andamento dell'errore relativo al quaternione  $q_3$  per le diverse frequenze operative del filtro. In (Fig. 9.6) è invece riportato un confronto tra il funzionamento del filtro con e senza approssimazioni. Si noti come anche in questo caso un funzionamento del filtro a frequenze superiori a 50 Hz garantisca all'errore di rientrare all'interno della fa-

scia di deviazione standard a  $\pm 3\sigma$  e la formulazione approssimata si discosti minimamente rispetto a quella non approssimata.

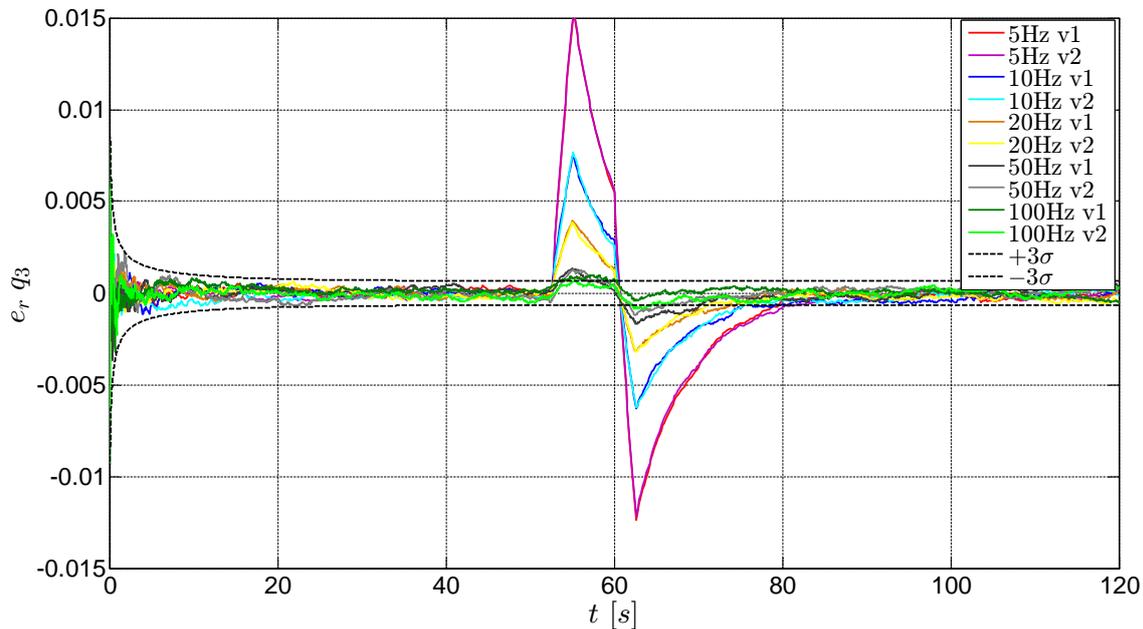


Figura 9.5: Scenario terrestre. Errore relativo al quaternione  $q_3$ .

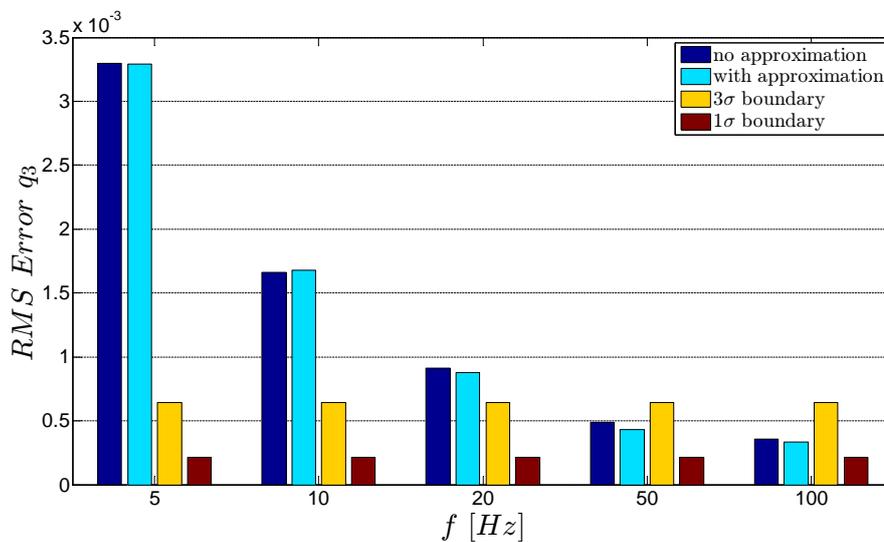


Figura 9.6: Scenario terrestre. Confronto tra gli errori di rms relativi a  $q_3$  alle diverse frequenze operative del filtro.

## 9.2 Esecuzione del filtro OFF-Line

Nelle esecuzioni del filtro OFF-Line si esegue il campionamento delle misure di giroscopio, accelerometro, magnetometro ed encoder ad una frequenza pari a 100 Hz movimentando il sistema manualmente. I dati acquisiti, successivamente importati in MATLAB, consentono di simulare il funzionamento del filtro e individuare i parametri di covarianza ottimali che

permettono di raggiungere i migliori livelli di accuratezza nella stima dell'assetto. I parametri ricavati mediante tali simulazioni verranno successivamente impiegati all'interno del micro-controllore per l'elaborazione in tempo reale del filtro. Nelle movimentazioni manuali si è posta particolare attenzione nell'eseguire rotazioni attorno a tutti e 3 gli assi del simulatore e i range di velocità imposti al sistema, seppur di natura casuale, variano entro un range di  $\pm 40$  °/s.

Nei prossimi paragrafi i risultati relativi a quattro test verranno analizzati, prendendo in considerazione gli errori di rms della stima dell'assetto e delle velocità angolari. La spline delle misure ricavate dagli encoder costituirà il riferimento fiduciario per stimare tali errori.

In (Tabella 9.1) sono riportate alcune caratteristiche relative alle prove effettuate, quali: tempo di durata, valori di velocità angolare massimi e di rms per ogni singolo asse. Si noti come nelle prime tre prove i valori di velocità massima e di rms risultino visibilmente superiori rispetto alla quarta prova. Nella quarta prova il sistema è stato mosso solo inizialmente e successivamente mantenuto in completa quiete. Lo scopo dell'ultima prova è quello di verificare che il sistema non diverga nel corso di lunghi intervalli di tempo.

	Durata	Velocità angolari massime			Velocità angolare RMS		
		$ \omega_{x,max} $	$ \omega_{y,max} $	$ \omega_{z,max} $	$\omega_x$	$\omega_y$	$\omega_z$
<b>TEST 1 off-line</b>	180 s	15.13 °/s	21.41 °/s	20.85 °/s	4.00 °/s	7.33 °/s	8.09 °/s
<b>TEST 2 off-line</b>	180 s	27.49 °/s	33.27 °/s	40.53 °/s	7.05°/s	8.56°/s	12.84°/s
<b>TEST 3 off-line</b>	180 s	20.19 °/s	20.88 °/s	39.69 °/s	5.11 °/s	5.50 °/s	11.08 °/s
<b>TEST 4 off-line</b>	600 s	16.77 °/s	19.43 °/s	23.87 °/s	2.28°/s	2.27°/s	3.84°/s

Tabella 9.1: Esecuzione OFF-Line. Test effettuati.

### 9.2.1 Scenario spaziale, esecuzione OFF-Line

In questo scenario la fase di propagazione del filtro avviene a 100 Hz mentre la fase di measurement update viene eseguita ad una frequenza di 0.33 Hz, corrispondente ad un tempo di acquisizione dati dello star tracker pari a 3 secondi. La covarianza del sistema si assesta ad un valore di compromesso tra la propagazione dell'errore dovuto al rumore di processo  $\mathbf{Q}$  e la covarianza relativa allo star tracker, definita nella matrice di misura  $\mathbf{R}$ .

La propagazione dell'errore nella stima dell'assetto (dovuto alla presenza del rumore bianco e del rumore di bias nel giroscopio) all'interno di un intervallo di tre secondi cresce rapidamente, rendendo la covarianza del sistema  $\mathbf{P}$  più elevata della covarianza relativa allo star tracker. La correzione operata dalle misure dello star tracker nella fase di measurement update permette di riportare istantaneamente la covarianza del sistema ad un valore inferiore e causa di conseguenza un andamento discontinuo delle curve di deviazione standard a  $\pm 3\sigma$ .

L'andamento dell'assetto del simulatore è riportato in (Fig. 9.7) per il TEST 1, mettendo in evidenza in rosso gli istanti in cui avviene il measurement update con le misure dello star tracker. In (Fig. 9.8) e (Fig. 9.9) sono riportate invece le curve relative all'errore del quaternion e alla correzione dello stato sempre per il medesimo test.

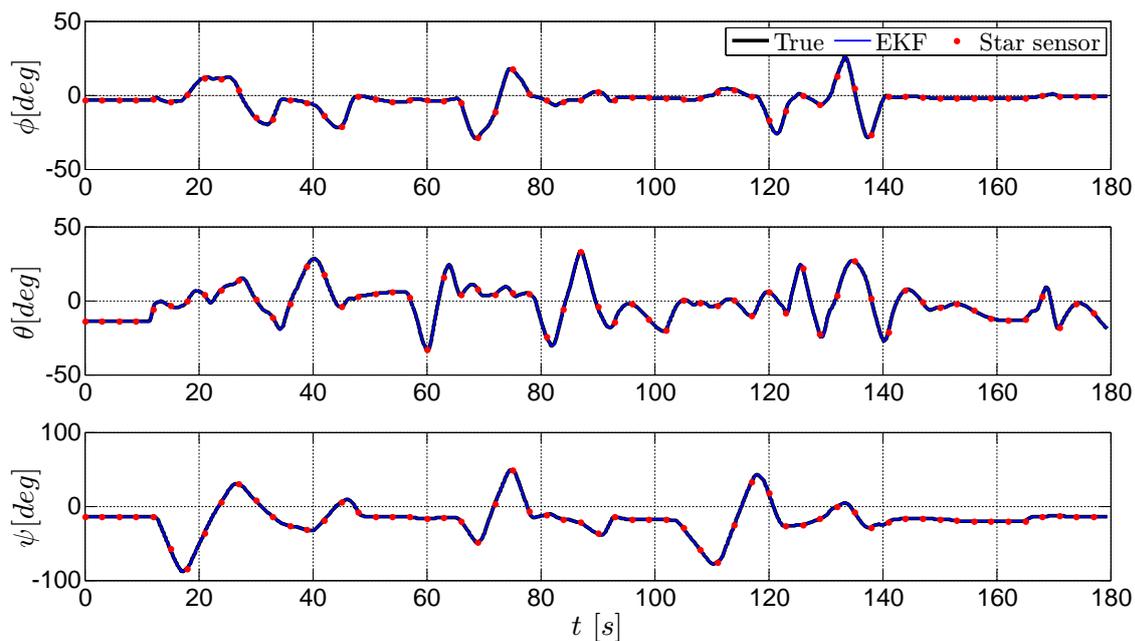


Figura 9.7: Scenario terrestre, esecuzione OFF-Line. Angoli di Eulero.

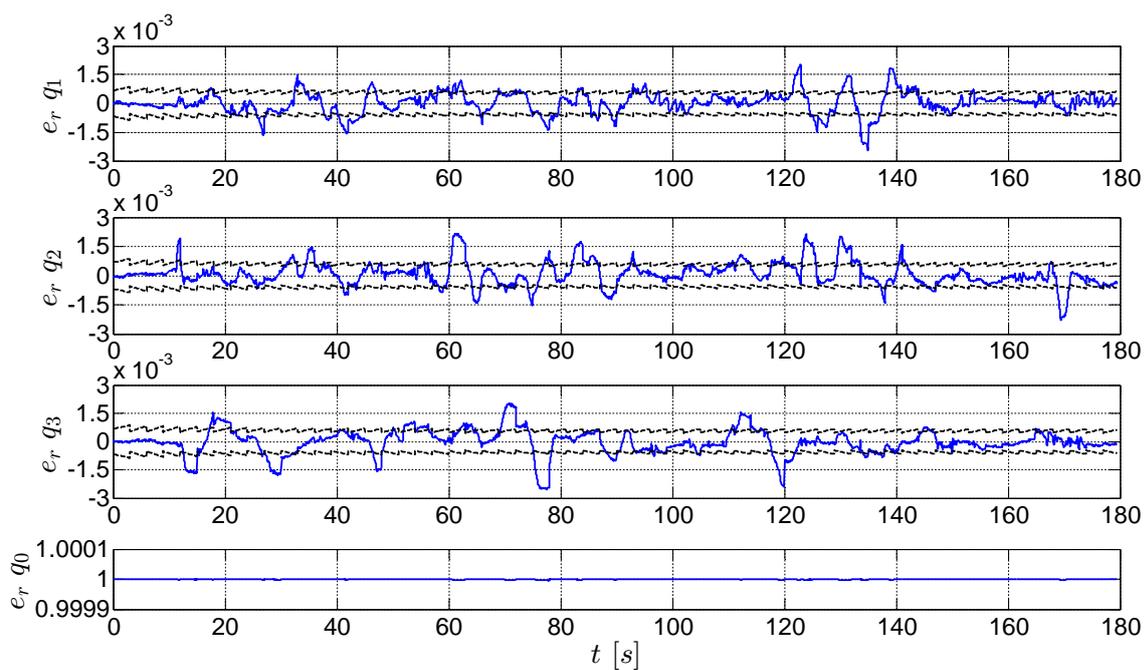


Figura 9.8: Scenario spaziale, esecuzione OFF-Line. Errore del quaternion TEST 1

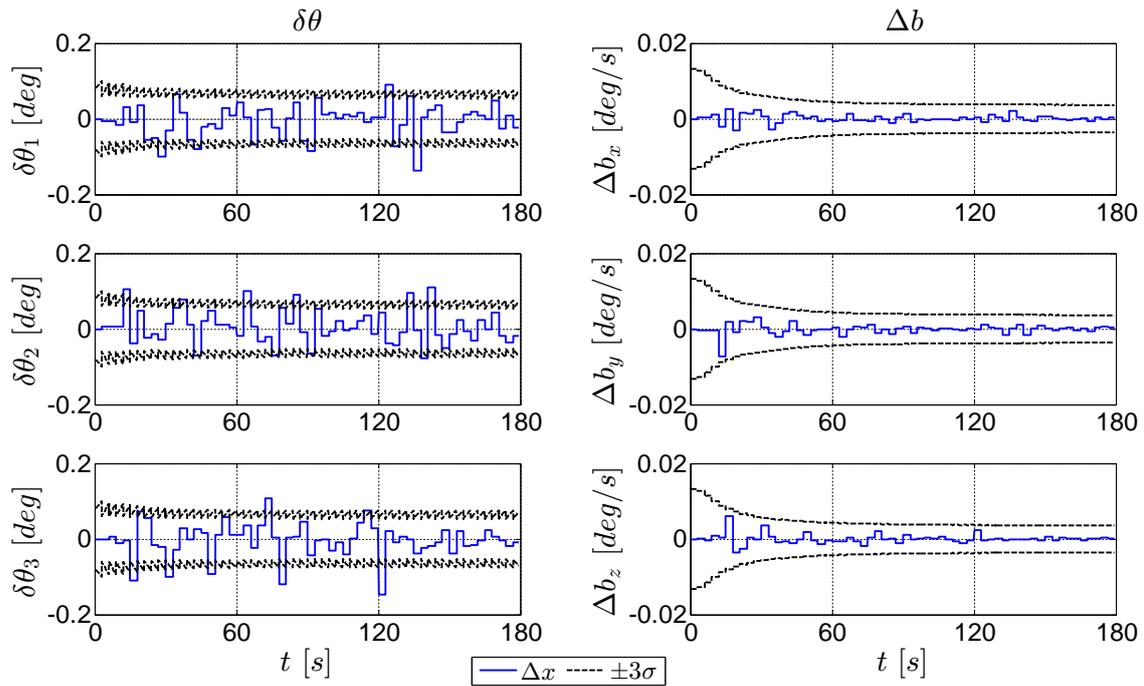


Figura 9.9: Scenario spaziale, esecuzione OFF-Line. Correzioni dello stato del sistema TEST 1.

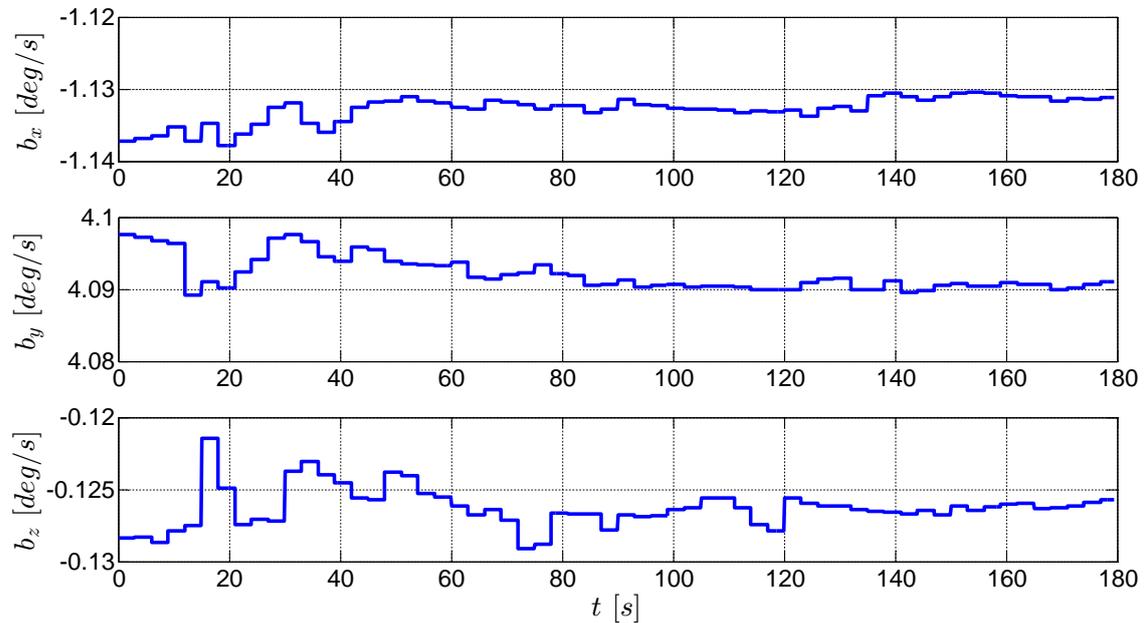


Figura 9.10: Scenario spaziale, esecuzione OFF-Line. Andamento del bias TEST 1.

La curva di deviazione standard a  $3\sigma$  relativa allo stato del sistema (Fig. 9.9) risulta inizialmente più elevata a causa dell'elevato valore di  $\mathbf{P}_0$  imposto nella fase di inizializzazione del filtro e si stabilizza dopo un intervallo di 50 secondi. Si può quindi ritenere che il filtro raggiunga la completa convergenza in 50 secondi e per questo motivo nei risultati relativi agli errori di rms riportati nei prossimi paragrafi verrà escluso tale intervallo di convergenza. L'errore rms relativo ai primi istanti di funzionamento del filtro nello scenario spaziale risulta

contenuto poiché il bias iniziale viene inizializzato eseguendo un campionamento del segnale in uscita dai giroscopi per un intervallo di tempo pari a 1 secondo in condizioni di completa quiete del sistema. Tale scelta è stata operata per garantire una rapida convergenza del filtro nonostante la ridotta frequenza di measurement update. Dall'andamento del bias calcolato dal filtro (Fig. 9.10), è possibile osservare come questo si mantenga costante all'interno dell'intervallo di propagazione e venga corretto in corrispondenza della fase di measurement update.

In (Tabella 9.2) sono riportati gli errori di rms relativi al quaternion e agli angoli di Eulero nelle 4 prove effettuate. Si noti come nelle prime 3 prove, in cui il sistema è stato continuamente mantenuto in moto, gli errori risultino visibilmente più elevati rispetto alla quarta; indice che la velocità angolare del sistema influenza marcatamente la precisione del filtro.

SPACE SCENARIO	RMS error Quaternion			RMS error Euler Angle		
	$q_{1,error}$	$q_{2,error}$	$q_{3,error}$	$\phi_{error}$	$\theta_{error}$	$\psi_{error}$
TEST 1 off-line	5.839E-4	6.947E-4	6.570E-4	0.071°	0.079°	0.077°
TEST 2 off-line	7.260E-4	7.431E-4	1.021E-3	0.080°	0.086°	0.117°
TEST 3 off-line	5.791E-4	3.933E-4	7.715E-4	0.066°	0.046°	0.089°
TEST 4 off-line	2.713E-4	2.162E-4	1.670E-4	0.030°	0.025°	0.019°

Tabella 9.2: Scenario spaziale, esecuzione OFF-Line. Errori nella determinazione dell'assetto.

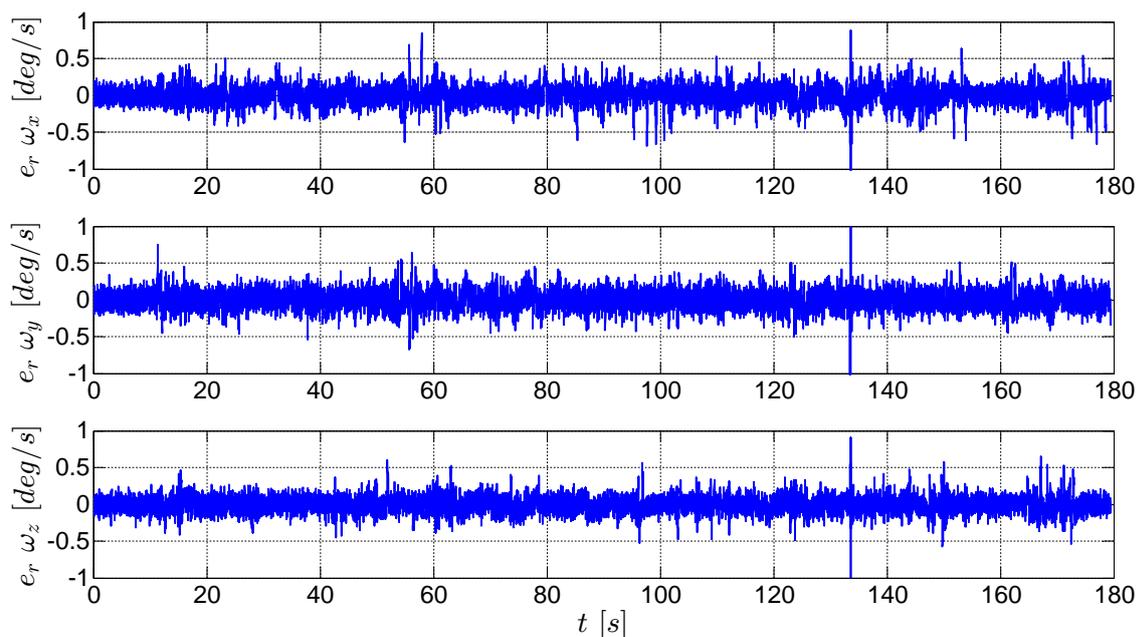


Figura 9.11: Scenario spaziale, esecuzione OFF-Line. Errore relativo alle velocità angolari TEST 1.

SPACE SCENARIO	RMS error Angular Velocity		
	$\omega_{x,error}$	$\omega_{y,error}$	$\omega_{z,error}$
TEST 1 off-line	0.140 °/s	0.137 °/s	0.117 °/s
TEST 2 off-line	0.189 °/s	0.165 °/s	0.137 °/s
TEST 3 off-line	0.126 °/s	0.124 °/s	0.112 °/s
TEST 4 off-line	0.090 °/s	0.105 °/s	0.077 °/s

Tabella 9.3: Scenario spaziale, esecuzione OFF-Line. Errori nella determinazione della velocità angolare.

### 9.2.2 Scenario terrestre, esecuzione OFF-Line

Nello scenario terrestre la fase di previsione dello stato e di measurement update vengono eseguite alla medesima frequenza di 100 Hz. La stima dell'assetto è il risultato del compromesso tra la propagazione dell'errore nelle misure del giroscopio e l'errore presente nelle misure di accelerometro e magnetometro.

Accelerometro e magnetometro individuano due vettori che mantengono idealmente tra loro un'inclinazione di 28.9°. La ridotta inclinazione del vettore di magnetizzazione terrestre  $H_{Earth}$  rispetto la verticale, permette di determinare con limitata accuratezza la componente orizzontale in grado di definire l'angolo di declinazione del sistema.

Per evitare che la limitata accuratezza dell'orientazione fornita dal magnetometro influisca negativamente nella determinazione dell'assetto relativa agli assi di roll e pitch, un'analisi di Montecarlo è stata condotta con l'intento di individuare il valore di deviazione standard ottimale del magnetometro  $\sigma_m$  che contribuisca a minimizzare l'errore rms relativo alle tre componenti del quaternion. In questa analisi la deviazione standard relativa all'accelerometro non verrà variata poiché si è osservato unicamente un peggioramento della precisione del filtro all'aumentare del suo valore.

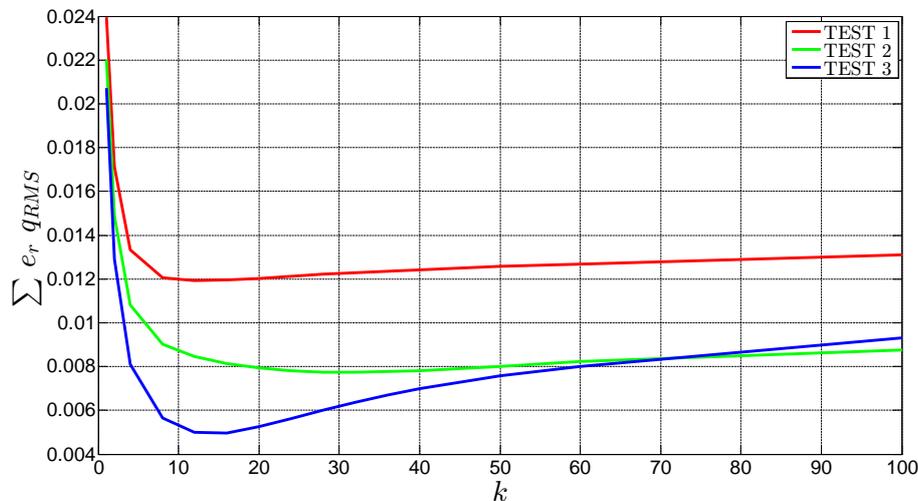


Figura 9.12: Analisi di Montecarlo. Sommatoria degli errori rms del quaternion al variare del parametro k.

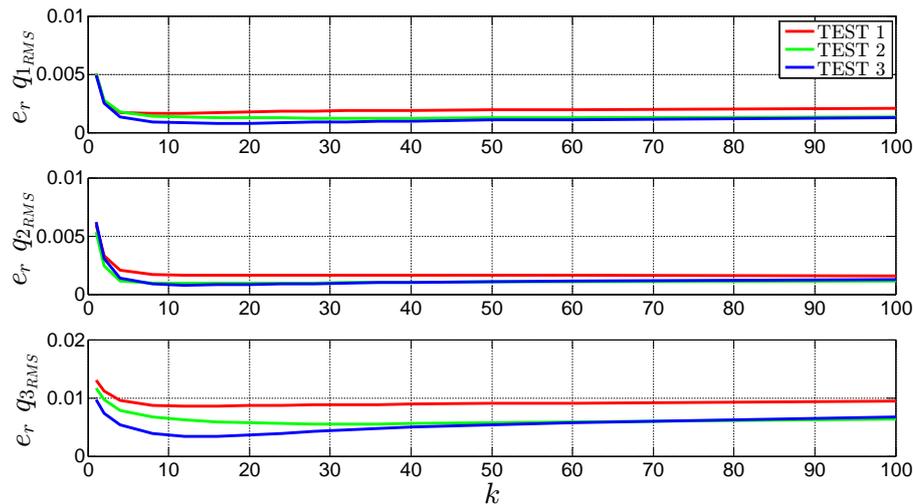


Figura 9.13: Analisi di Montecarlo. Errori di rms nel quaternione al variare del parametro  $k$ .

In (Fig. 9.12) è riportato l'andamento della sommatoria degli errori rms presenti nei quaternioni e in (Fig. 9.13) gli errori di rms relativi alle singole componenti del quaternione al variare di un parametro  $k$ . Tale parametro costituisce il coefficiente moltiplicativo per la deviazione standard  $\sigma_m$  relativa alle misure del magnetometro. Si osservi come per valori di  $k$  superiori a 10 l'errore di rms si riduca drasticamente, permettendo di ottenere livelli ottimali di accuratezza del filtro. Un valore di  $k$  pari a 20 è stato ritenuta la scelta di migliore compromesso tra i risultati delle tre analisi di Montecarlo e verrà utilizzato per le successive prove e nell'implementazione del filtro nel microcontrollore.

In (Fig. 9.14) e (Fig. 9.15) sono riportate le curve relative all'errore del quaternione e alla correzione dello stato per il TEST 1 nella configurazione operativa terrestre.

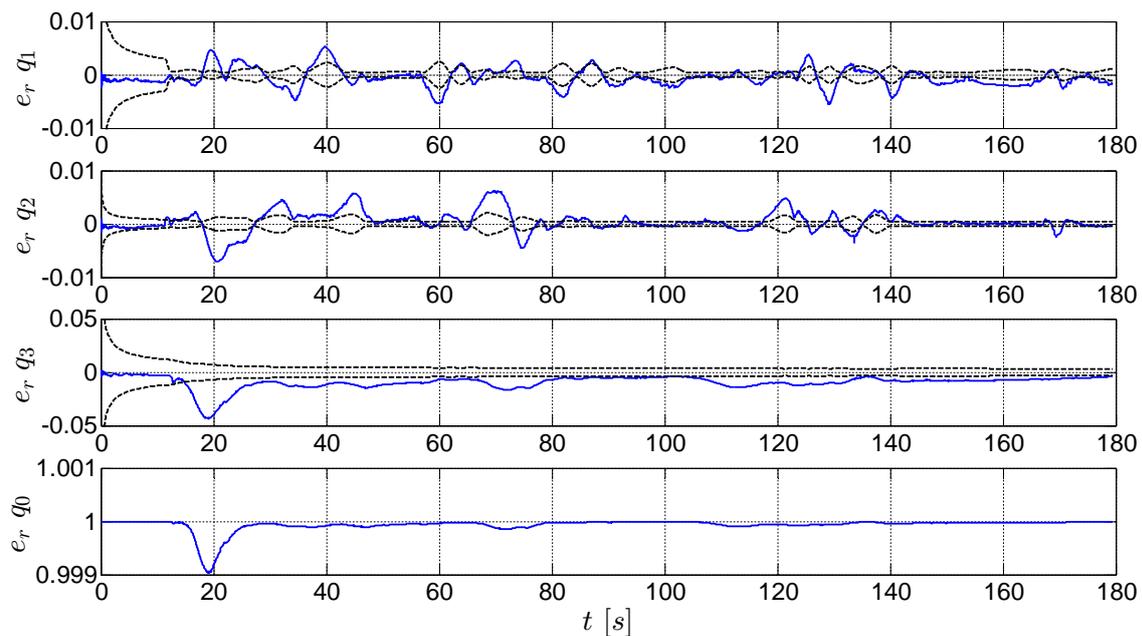


Figura 9.14: Scenario terrestre, esecuzione OFF-Line. Errore del quaternione TEST 1.

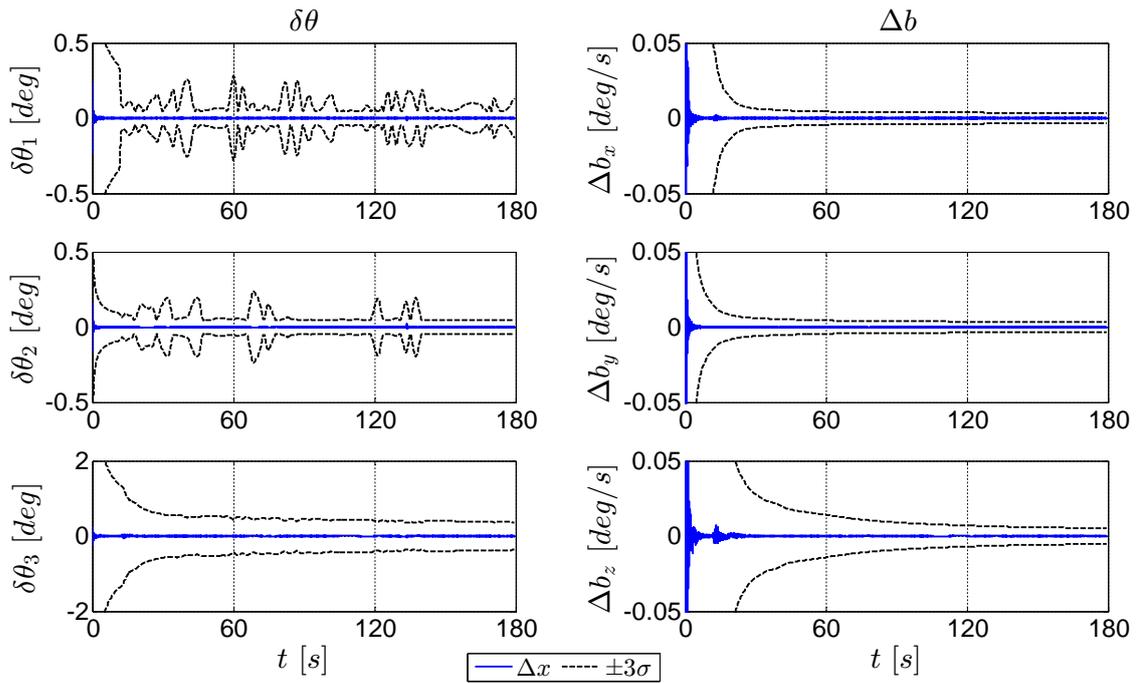


Figura 9.15: Scenario terrestre, esecuzione OFF-Line. Correzioni dello stato del sistema TEST 1.

Si noti come nei primi istanti di funzionamento le compensazioni  $\Delta b$  operate dal filtro risultino elevate poiché il sistema cerca di raggiungere rapidamente la convergenza usufruendo delle misure di accelerometro e magnetometro per determinarlo. Tali compensazioni si traducono in un andamento del bias fortemente instabile nei primi secondi di funzionamento (Fig. 9.16).

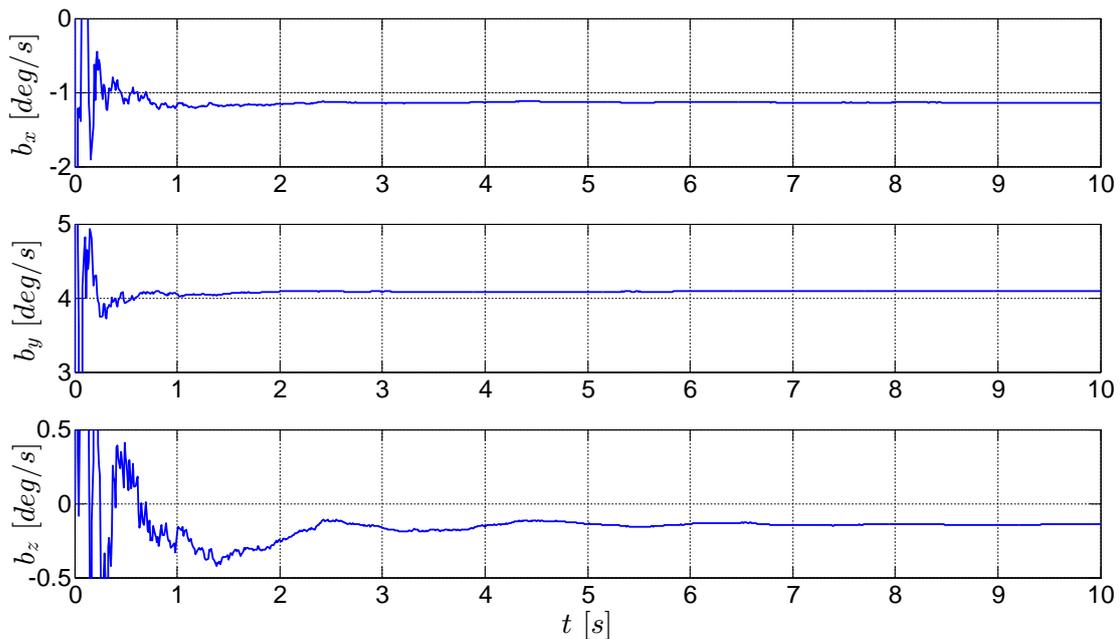


Figura 9.16: Scenario terrestre, esecuzione OFF-Line. Andamento del bias nei primi 10 secondi di funzionamento TEST 1.

Dai risultati relativi agli errori riportati in (Tabella 9.4) si può osservare come il filtro riesca a mantenere limitato l'errore relativo alle componenti del quaternione ortogonali al vettore di accelerazione di gravità, mentre l'errore aumenti di un ordine di grandezza per la componente  $q_3$ . Tale errore è dovuto al fatto che l'argomento  $q_3$  del quaternione è fortemente vincolato alla determinazione della componente azimutale del vettore di magnetizzazione terrestre che risulta però stimabile con bassa accuratezza dal magnetometro. Risulta quindi elevato anche l'errore nella determinazione della componente di yaw  $\psi$  che definisce l'angolo di declinazione dello spacecraft.

TERRESTRIAL SCENARIO	RMS error Quaternion			RMS error Euler Angle		
	$q_{1,error}$	$q_{2,error}$	$q_{3,error}$	$\phi_{error}$	$\theta_{error}$	$\psi_{error}$
TEST 1 off-line	1.663E-3	1.668E-3	8.549E-3	0.091°	0.072°	1.012°
TEST 2 off-line	1.452E-3	9.721E-4	6.880E-3	0.096°	0.100°	0.804°
TEST 3 off-line	7.974E-4	7.072E-4	2.795E-3	0.081°	0.067°	0.328°
TEST 4 off-line	2.538E-3	1.128E-3	1.141E-2	0.127°	0.033°	1.324°

Tabella 9.4: Scenario terrestre, esecuzione OFF-Line. Errori nella determinazione dell'assetto.

Confrontando l'errore nella determinazione della velocità angolare relativa alla terna body nello scenario terrestre (Fig. 9.17) con lo scenario spaziale e trascurando i primi istanti di funzionamento del filtro è possibile osservare che gli andamenti risultano identici, sinonimo del fatto che in entrambe le formulazioni la compensazione del bias operata dal filtro funziona correttamente.

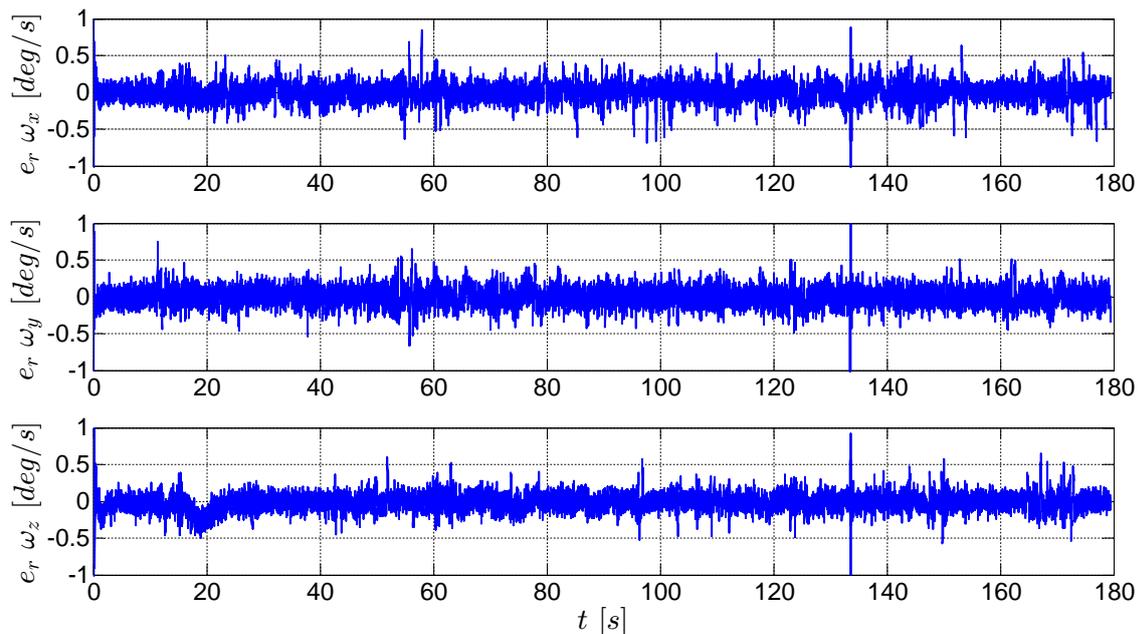


Figura 9.17: Scenario terrestre, esecuzione OFF-Line.. Errore relativo alle velocità angolari TEST 1.

TERRESTRIAL SCENARIO	RMS error Angular Velocity		
	$\omega_{x,error}$	$\omega_{y,error}$	$\omega_{z,error}$
TEST 1 off-line	0.140 °/s	0.137 °/s	0.117 °/s
TEST 2 off-line	0.189 °/s	0.165 °/s	0.137 °/s
TEST 3 off-line	0.126 °/s	0.124 °/s	0.113 °/s
TEST 4 off-line	0.090 °/s	0.105 °/s	0.077 °/s

Tabella 9.5: Scenario terrestre, esecuzione OFF-Line. Errori nella determinazione della velocità angolare.

### 9.3 Risultati sperimentali, esecuzione ON-Line del filtro

Nell'esecuzione ON-Line del filtro i dati acquisiti dai sensori sono direttamente elaborati dal microcontrollore, all'interno del quale è caricato l'algoritmo del filtro di Kalman programmato in linguaggio C. L'algoritmo permette di eseguire in tempo reale la stima dell'assetto, rendendola subito disponibile ad un eventuale controllore PID per l'esecuzione di manovre di station keeping o di inseguimento del target. In ogni prova eseguita il sistema è stato movimentato manualmente e sono stati acquisiti mediante seriale i dati relativi al quaternioni di assetto elaborato dal filtro e le misure degli encoder.

#### 9.3.1 Scenario spaziale, esecuzione ON-Line

Per permettere un confronto con le prove relative all'esecuzione del filtro OFF-Line sono riportate in (Tabella 9.6) i dati relativi alle velocità angolari massime e ai valori di velocità angolare rms registrati nel corso delle quattro prove effettuate. In (Tabella 9.18) sono invece riportati gli andamenti dell'errore relativo agli angoli di Eulero, in funzione del tempo, per tutte le 4 prove eseguite.

SPACE SCENARIO	Durata	Velocità angolari massime			Velocità angolare RMS		
		$ \omega_{x,max} $	$ \omega_{y,max} $	$ \omega_{z,max} $	$\omega_x$	$\omega_y$	$\omega_z$
TEST 1 on-line	180 s	18.061	16.786	19.443	5.475°	6.904°	6.969°
TEST 2 on-line	180 s	22.008	18.893	20.137	5.141°	7.073°	6.040°
TEST 3 on-line	180 s	17.366	21.748	17.519	5.827°	7.294°	6.359°
TEST 4 on-line	180 s	22.328	22.504	26.128	6.807°	7.922°	8.070°

Tabella 9.6: Scenario spaziale, esecuzione ON-Line. Test effettuati.

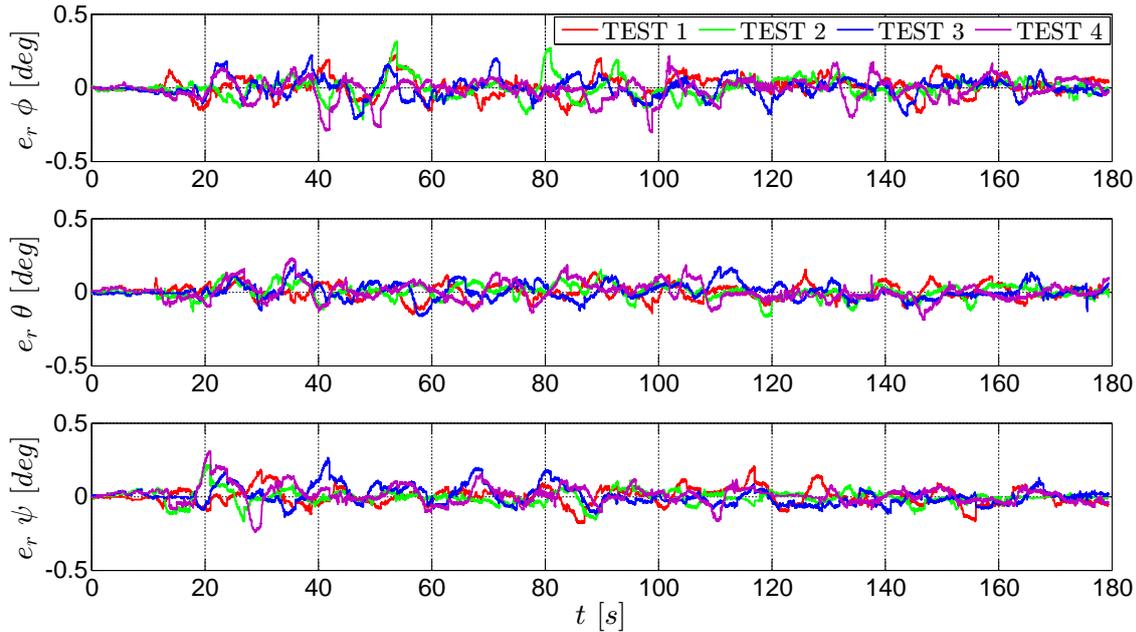


Figura 9.18: Scenario spaziale, esecuzione ON-Line. Errore negli angoli di Eulero.

SPACE SCENARIO	RMS error Quaternion			RMS error Euler Angle		
	$q_{1,error}$	$q_{2,error}$	$q_{3,error}$	$\phi_{error}$	$\theta_{error}$	$\psi_{error}$
<b>TEST 1 on-line</b>	5.336E-4	4.122E-4	5.148E-4	0.062°	0.049°	0.058°
<b>TEST 2 on-line</b>	5.528E-4	4.133E-4	3.367E-4	0.063°	0.048°	0.039°
<b>TEST 3 on-line</b>	5.322E-4	4.353E-4	5.047E-4	0.059°	0.052°	0.057°
<b>TEST 4 on-line</b>	6.019E-4	5.027E-4	4.065E-4	0.068°	0.058°	0.047°

Tabella 9.7: Scenario spaziale, esecuzione ON-Line. Errori nella determinazione dell'assetto.

### 9.3.2 Scenario terrestre, esecuzione ON-Line

Per permettere un confronto con le prove relative all'esecuzione del filtro OFF-Line sono riportate in (Tabella 9.8) i dati relativi alle velocità angolari massime e ai valori di velocità angolare rms registrati nel corso delle quattro prove effettuate. In (Tabella 9.19) sono invece riportati gli andamenti dell'errore in funzione del tempo nelle 4 prove eseguite.

TERRESTRIAL SCENARIO	Durata	Velocità angolari massime			Velocità angolare RMS		
		$ \omega_{x,max} $	$ \omega_{y,max} $	$ \omega_{z,max} $	$\omega_x$	$\omega_y$	$\omega_z$
TEST 1 on-line	180 s	18.130°/s	21.435°/s	18.252°/s	6.136°	7.709°	6.392°
TEST 2 on-line	180 s	18.130°/s	19.313°/s	19.183°/s	5.550°	7.816°	6.761°
TEST 3 on-line	180 s	17.435°/s	20.802°/s	18.092°/s	4.398°	7.342°	7.503°
TEST 4 on-line	180 s	13.183°/s	17.908°/s	21.137°/s	3.901°	6.00°	7.662°

Tabella 9.8: Scenario terrestre, esecuzione ON-Line. Test effettuati.

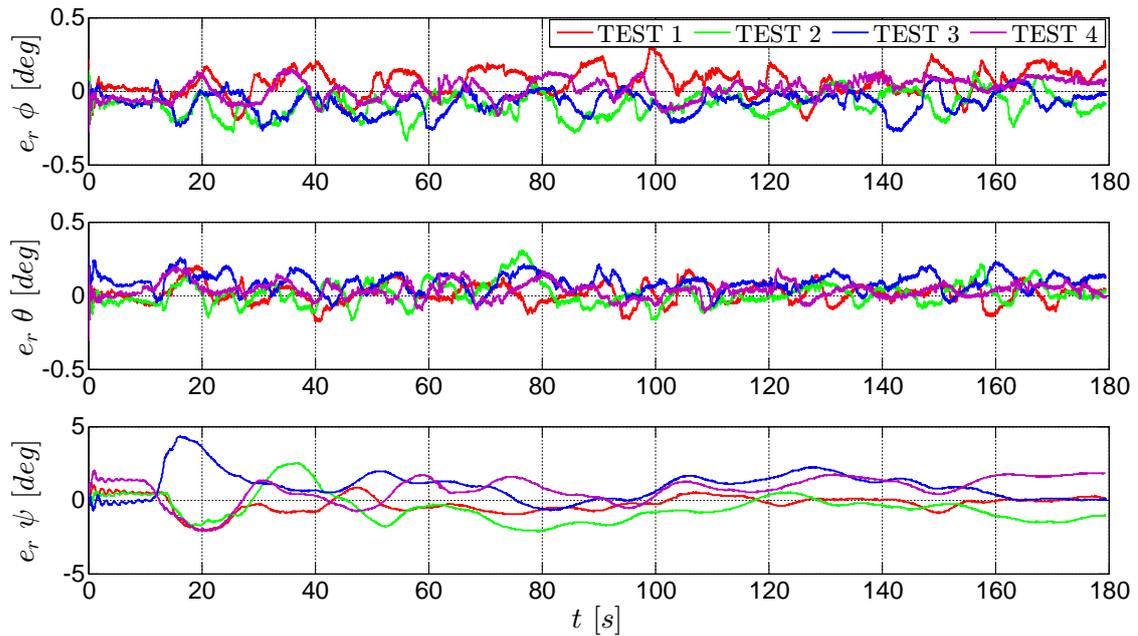


Figura 9.19: Scenario terrestre, esecuzione ON-Line. Errore negli angoli di Eulero.

TERRESTRIAL SCENARIO	RMS error Quaternion			RMS error Euler Angle		
	$q_{1,error}$	$q_{2,error}$	$q_{3,error}$	$\phi_{error}$	$\theta_{error}$	$\psi_{error}$
TEST 1 on-line	1.410E-3	9.795E-4	3.517E-3	0.116°	0.065°	0.421°
TEST 2 on-line	2.105E-3	2.650E-3	8.736E-3	0.111°	0.082°	1.074°
TEST 3 on-line	1.9267E-3	1.576E-3	9.057E-3	0.099°	0.106°	1.067°
TEST 4 on-line	2.200E-3	1.620E-3	9.699E-3	0.067°	0.061°	1.155°

Tabella 9.9: Scenario terrestre, esecuzione ON-Line. Errori nella determinazione dell'assetto.

## 9.4 Considerazioni sui tempi di elaborazione del filtro

Al fine di determinare i principali fattori che influenzano la precisione del filtro, un'analisi relativa ai tempi di elaborazione è stata eseguita, prendendo in considerazione entrambi gli

scenari e due possibili frequenze di funzionamento del bus  $I^2C$ . Questa frequenza è impostata di default a 100 KHz per tutte le periferiche Arduino ma può esser aumentata a 400 KHz modificando il parametro TWI clock frequency, presente all'interno del file Wire.h:

- static const uint32\_t TWI\_CLOCK = 400000

Operando tale modifica sarà possibile ridurre ad un quarto i tempi di acquisizione dati di ogni singolo sensore, il quale necessita di 82 giri di clock del bus per la comunicazione degli indirizzi di periferica, di registro, high byte e low byte. Più veloce sarà il tempo di acquisizione, minori saranno le propagazioni degli errori dovute alla latenza del bus e maggior tempo si avrà a disposizione per l'elaborazione delle fasi di predict e measurement update del filtro.

In (Tabella 9.10) sono riportati i tempi di acquisizione per un singolo sensore alle diverse frequenze operative del bus  $I^2C$ , mentre in (Tabella 9.11) sono riportati i tempi di elaborazione dati per le fasi di predict e measurement update del filtro.

Frequenza $I^2C$	Tempi di acquisizione
100 KHz	0.860 ms
400 KHz	0.215 ms

Tabella 9.10: Tempi di acquisizione dati nel bus  $I^2C$ .

Descrizione	Tempi di elaborazione	Cicli macchina
Predict phase	0.796 ms	66864
Update scenario spaziale	1.893 ms	159012
Update scenario terrestre	4.728 ms	397152

Tabella 9.11: Tempi di elaborazione nel filtro.

Come si può osservare, la fase di measurement update dello scenario terrestre risulta computazionalmente la più onerosa. La presenza di due sensori aumenta infatti le dimensioni della matrice di misura e di conseguenza il numero di operazioni necessarie per il calcolo del guadagno di Kalman e dello stato a posteriori del sistema.

Di vitale importanza, per eseguire il filtro a 100 Hz, risulta inoltre verificare che il tempo di elaborazione complessiva di un ciclo del filtro si mantenga inferiore a 10 ms. A tal proposito sono riportati in (Fig. 9.20) e (Fig. 9.21) i profili temporali in un ciclo per entrambi gli scenari.

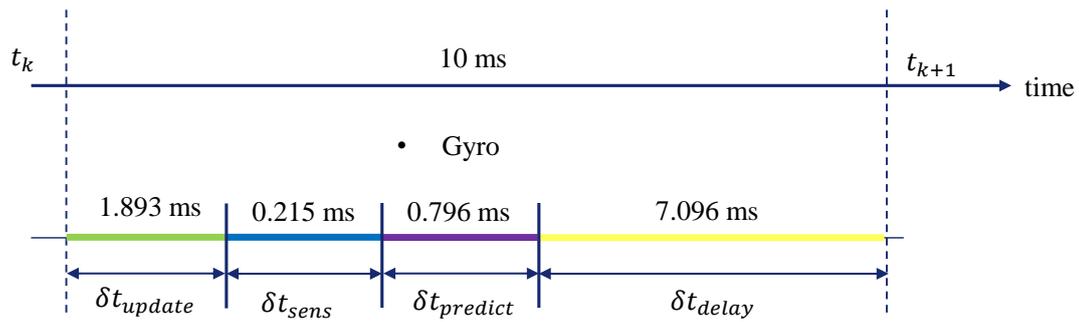


Figura 9.20: Scenario spaziale. Tempi di acquisizione ed elaborazione dati.

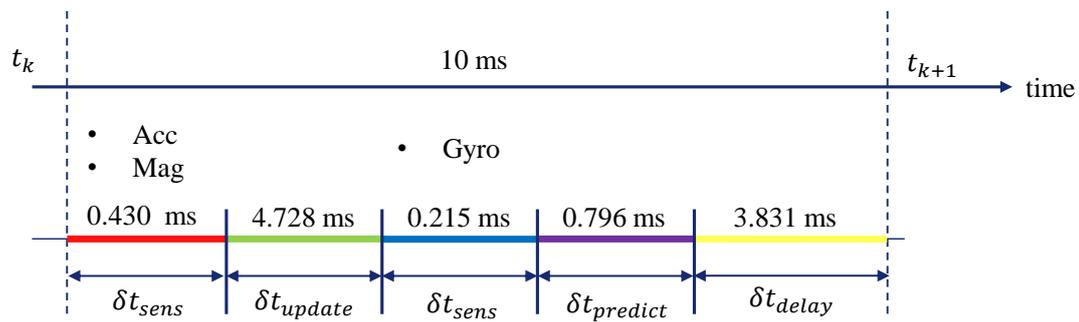


Figura 9.21: Scenario terrestre. Tempi di acquisizione ed elaborazione dati.

Si noti che nello scenario spaziale non è riportata la fase di acquisizione  $\delta t_{sens}$  relativa allo star sensor, in quanto la lettura dei conteggi degli encoder può avvenire in qualsiasi istante di funzionamento del filtro grazie all'utilizzo degli interrupt. La relativa subroutine di interrupt ha tempo di esecuzione inferiore ai  $10\mu s$  e può essere di conseguenza trascurata.



# Capitolo 10

## Conclusioni

Il lavoro svolto in questa tesi ha permesso lo sviluppo software e hardware di un sistema di navigazione per una piattaforma d'assetto a tre gradi di libertà. Il sistema di navigazione è basato sul filtro di Kalman indiretto e due possibili scenari operativi sono stati presi in considerazione per la sua applicazione: uno spaziale ed uno terrestre.

Le fasi di progettazione del sistema di navigazione possono essere riassunte nei seguenti step:

1. analisi delle componenti di rumore presenti nei sensori e creazione delle classi in ambiente MATLAB per simularne le misure con i medesimi livelli di rumore;
2. creazione di una classe in MATLAB per l'esecuzione del filtro di Kalman all'interno del loop di controllo, in grado di simulare la dinamica d'assetto della piattaforma;
3. posizionamento e calibrazione dei sensori nella piattaforma d'assetto;
4. campionamento dei sensori, esecuzione del filtro OFF-Line e conduzione di un'analisi con il metodo Montecarlo;
5. programmazione del filtro in linguaggio C e caricamento dell'algoritmo nel microcontrollore Arduino Due;
6. creazione del modulo Wi-Fi per la comunicazione delle informazioni elaborate dal microcontrollore, in assenza di collegamenti cablati;
7. esecuzione dei test sperimentali, acquisendo i dati elaborati dal filtro in tempo reale.

In fase di simulazione numerica si è ottenuta una stima della minima frequenza necessaria per il corretto funzionamento del filtro e si è convalidato l'utilizzo di una formulazione approssimata, utile a ridurre il costo computazionale dell'algoritmo.

Nella fase di calibrazione, una procedura standardizzata è stata sviluppata per rimuovere gli errori deterministici dalle misure e l'esecuzione OFF-Line del filtro ha permesso di ricavare i parametri di covarianza in grado di minimizzare gli errori nella stima d'assetto.

L'algoritmo è stato infine implementato all'interno di un Arduino Due e l'acquisizione dei dati elaborati in tempo reale dal microcontrollore ha permesso di verificare, nello scenario spaziale, il raggiungimento dei requisiti di accuratezza definiti in partenza ( $0.5^\circ$ ,  $0.5^\circ/\text{s}$ ).

Nello scenario terrestre tali requisiti di accuratezza sono stati soddisfatti solo per gli assi di roll e pitch, mentre l'asse di yaw risulta limitato ad un accuratezza di  $3^\circ$  a causa dalla presenza di disturbi elettromagnetici interferenti, i quali influenzano la determinazione della proiezione nel piano orizzontale del vettore di magnetizzazione terrestre, unico riferimento utile per determinare la declinazione del sistema.

In conclusione, l'hardware sviluppato nel corso di questa tesi rappresenta un sistema completo e indipendente che può esser utilizzato, apportando le opportune modifiche, in numerose altre applicazioni, quali: quadcopter, droni, o qualsiasi altro dispositivo che necessiti di conoscere la propria orientazione angolare. Si sottolinea inoltre che il moto imposto in tutte le prove effettuate è di tipo vario, di conseguenza i requisiti di accuratezza sono stati raggiunti per condizioni di moto particolarmente sfavorevoli e questo è indice di robustezza del sistema.

Eventuali sviluppi futuri nel progetto SPARTANS, potranno riguardare la progettazione di un sistema ottico dual camera, in grado di determinare il quaternion di assetto attraverso l'utilizzo di opportuni algoritmi di image processing.

# Bibliografia

- [1] IEEE Std 647-2006. *IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Laser Gyros*. 2006.
- [2] Technologies Avago. Hedm-55xx/560x & heds-55xx/56xx quick assembly two and three channel optical encoders, 2014.
- [3] Honeywell. 3-axis digital compass ic hmc5883l, 2013.
- [4] Invensense. Mpu-6000 and mpu-6050 product specification revision 3.4, 2013.
- [5] Invensense. Mpu-6000 and mpu-6050 register map and descriptions revision 4.2, 2013.
- [6] B. Peter. Development of an automatic imu calibration system. Master's thesis, Swiss Federal Institute of Technology, 2011.
- [7] Alex Khenkin Rob O.Reilly and Kieran Harney. Using mems accelerometers as acoustic pickups in musical instruments. *Analog Dialogue 43-02*, 2009.
- [8] Nikolas Trawny and Stergios I Roumeliotis. Indirect kalman filter for 3d attitude estimation. *University of Minnesota, Dept. of Comp. Sci. & Eng., Tech. Rep*, 2, 2005.
- [9] Andrea Valmorbida, Francesco Scarpa, Mattia Mazzucato, Sergio Tronco, Stefano Debei, and Enrico C Lorenzini. Attitude module characterization of the satellite formation flight testbed. In *Metrology for Aerospace (MetroAeroSpace), 2014 IEEE*, pages 73–78. IEEE, 2014.
- [10] Paolo De Vittor. Sensori magnetoresistivi per le bussole elettroniche. *Elettronica Oggi*, pages 2–10, 7 2008.
- [11] Greg Welch and Gary Bishop. An introduction to the kalman filter. 2006. *University of North Carolina: Chapel Hill, North Carolina, US*.



# Ringraziamenti

*Il mio ringraziamento va al Prof. Enrico Lorenzini per avermi concesso la possibilità di svolgere questa attività di tesi, consentendomi di sviluppare la passione per l'elettronica ed i microcontrollori. All' Ing. Andrea Valmorbida, per avermi guidato, fornendomi al contempo piena libertà operativa e di scelta. Mi auguro di aver ricambiato la fiducia concessa.*

*Ringrazio inoltre i miei familiari che in questi anni mi hanno supportato nello studio e sopportato nei momenti di difficoltà, i miei compagni di studio con cui ho condiviso tutte le fatiche, i momenti di gioia e le soddisfazioni di questa esperienza e tutti gli amici che nonostante le mie prolungate assenze continuano a volermi bene.*