UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI TECNICA E GESTIONE DEI SISTEMI INDUSTRIALI
CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN INGEGNERIA MECCATRONICA

TESI DI LAUREA TRIENNALE

Introduzione all'analisi degli FMS attraverso reti di Petri

Relatore: Prof. Mauro Gamberi

Laureando: Vladimir Mogildea
1051945-IMC

ANNO ACCADEMICO: 2015-16

SOMMARIO

Le Reti di Petri sono un ottimo strumento per lo studio dei sistemi ad eventi discreti. Per poterlo utilizzare al meglio è necessario conoscere le proprietà e le condizioni sotto le quali possono essere applicate. Il seguente elaborato ha come scopo quello di introdurre le diverse tipologie di Reti di Petri con particolare attenzione al loro utilizzo nell'analisi dei sistemi flessibili di produzione. Inoltre sono stati considerati i casi particolari o quelli a loro riconducibili e due tipologie di rappresentazione: grafica e matriciale. Il tutto è stato adornato con numerosi esempi chiarificatori.

Chi è pronto a dar via le proprie libertà fondamentali per comprarsi briciole di sicurezza, non merita né la libertà né la sicurezza.
Benjamin Franklin (1706-1790)

RINGRAZIAMENTI

Ringrazio chi mi è stato accanto.

INDICE

ELENCO DELLE FIGURE

1 INTRODUZIONE

Oggigiorno ormai riconosciamo il capitalismo come unico sistema economico possibile. Questo impone un confronto quotidiano con i vantaggi e gli svantaggi che esso racchiude in sé. Ad esempio la globalizzazione che impone una continua ed affannosa corsa verso il progresso. A causa dell'adozione di nuove tecnologie, della diversificazione dei prodotti e della diminuzione della vita utile di un impianto, i cambiamenti nel sistema produttivo sono veloci e frequenti. Le grandi industrie come anche le PMI devono continuare a innovare mezzi e metodi produttivi se vogliono mantenere la competitività sul mercato globale. Questo richiede spesso investimenti di capitale considerevoli.

Una delle soluzioni che ha portato ad enormi risultati sul campo è stata l'introduzione dell'automazione. Questo però ha aperto nuove problematiche, molte delle quali sono tuttora in discussione. Spesso per determinare la soluzione migliore si ricorre alla simulazione. Sono dunque necessari modelli di calcolo per visualizzare le possibili dinamiche del sistema, permettendo così un risparmio di tempo e denaro.

I sistemi di produzione flessibili (FMS) sono un ottimo modo per aumentare la produttività, tenere sotto controllo la qualità, garantire un'ampia gamma di prodotti e ridurre al minimo i tempi morti.

Un FMS è un sistema ad eventi discreti asincroni. Un modello a tempo continuo o a tempo discreto non può fornire una rappresentazione completa. Si preferiscono in questi casi altri strumenti come le reti di Petri (in seguito verranno indicate con RP) che permettono di eliminare la dipendenza temporale del sistema. Le RP sono un formalismo utile per descrivere, analizzare e implementare procedure di controllo per FMS [7]. In seguito verrà descritto lo stretto rapporto tra i FMS e RP focalizzando l'attenzione sulla funzione descrittiva delle RP . Si tenga presente che le RP offrono molti vantaggi come la modellizzazione, la generazione di codice, l'analisi qualitativa e delle prestazioni. Trovano largo impiego in campi come l'automazione, l'informatica e in qualsiasi ambito dove la condivisione di risorse e la risoluzione degli stalli sia importante.

2 DEFINIZIONE DEI SISTEMI FMS

2.1 DEFINIZIONE E STORIA

Un **sistema di produzione flessibile (FMS)** è un raggruppamento di macchinari produttivi interconnessi da un sistema di trasporto e coordinati da un computer centrale. Sono dotati di alcuni gradi di libertà che permettono di realizzare in modo automatico una gamma di prodotti e di reagire in caso di cambiamenti, siano essi prevedibili oppure no. [1]

L'invenzione degli FMS si attribuisce a Theo Williamson, che ne realizzò il primo prototipo all'inizio degli anni '70. Costui notò come molte imprese lavorassero con piccoli lotti e fossero dunque costrette a cambiare assetto produttivo molto spesso. [9] Questo richiede un sistema con flessibilità a breve termine, cioè con la capacità di produrre una grande gamma di prodotti e diminuire l'incidenza dei tempi di setup. Il secondo tipo di flessibilità che si vuole in un sistema è la flessibilità a lungo termine che determina quanto sia facile mettere una nuova gamma in produzione. Per soddisfare contemporaneamente le due condizioni, l'FMS deve necessariamente avere:

- un gruppo di macchine flessibili
- un sistema di trasporto automatico
- un sistema decisionale capace di assegnare priorità, risolvere stalli e decidere cosa va fatto e su quale macchina in caso di molteplici soluzioni

Di seguito verranno elencati vantaggi e svantaggi di un sistema flessibile di produzione.

VANTAGGI

- costo di produzione ridotto
- alta produttività del lavoro umano
- alta efficienza delle macchine
- aumento della qualità
- compatibilità con operazioni CAD/CAM
- elevato tasso di saturazione dell'impianto
- ridotto tempo di inattività per manutenzione

1 Definizione: National Institute of Standards and Technology

SVANTAGGI

- costo di realizzazione
- complessità del sistema
- necessità di operai altamente specializzati

Da come si è potuto osservare sul campo, gli FMS trovano il loro migliore impiego nella produzione a piccoli lotti piuttosto che in una produzione di massa. Lo sviluppo tecnologico della microelettronica, informatica e dei sistemi di controllo sono stati fattori cruciali per rendere competitiva l'istallazione di questi sistemi. Inoltre non sono da trascurare aspetti come la possibilità di funzionare in presenza di guasti (failure tolerant), funzionamento a ciclo continuo e bassi tempi di setup.

2.2 COMPONENTI

Un FMS consiste, come detto, di unità che comunicano tra di loro. Le più frequenti sono: macchine flessibili, operai specializzati, robot industriali, sistemi per la movimentazione delle materie prime e dei prodotti finiti, macchine a controllo numerico (CNC), sensori, unità di calcolo, strumentazione ausiliaria e sistemi di diagnostica. Per aumentare l'affidabilità (a discapito dei costi) si introducono delle ridondanze nel sistema.

Le macchine flessibili dispongono del proprio set di utensili che vengono automaticamente equipaggiati all'occorrenza. I sistemi di movimentazione sono di vitale importanza dato che, a differenza di una catena di montaggio, non esiste un percorso prestabilito fisso per tutti i prodotti da un'operazione alla successiva. Il tutto sarebbe inutile senza un adeguato sistema di controllo capace di convogliare i prodotti secondo le proprie destinazioni, gestire i guasti riorganizzando la sequenza delle operazioni, modificare le priorità di esecuzione, ottimizzare l'utilizzo delle macchine etc.

Per garantire il funzionamento del sistema si implementa una rete locale (LAN) per le comunicazioni tra sistema di controllo e unità periferiche e un Data Base per la conservazione dell'informazione. L'obbiettivo finale è quello di ottenere sistemi di controllo in grado di garantire simultaneamente flessibilità e ottimizzazione delle risorse. Sfortunatamente le due richieste sono spesso in contraddizione.

Prima di procedere con l'analisi del problema, bisogna disporre di un appropriato modello concettuale. Questo permetterà successivamente non solo di acquisire consapevolezza sulle prestazioni e limiti del sistema in esame, ma anche di scrivere il codice per il software di controllo. Quest'ultimo potrà essere sviluppato con l'ausilio di linguaggi di programmazione specifici per tale scopo, oppure linguaggi general-purpose orientati agli oggetti, come C++ [1].

Per studiare dal punto di vista teorico i sistemi FMS si possono adoperare alcuni strumenti tra i quali le Reti di Petri. Un'applicazione industriale delle Reti di Petri può diventare complessa arrivando ad avere 10-200 sotto-reti con un totale di 50-1000 posti/transizioni e 10-200 tipi di variabili [3]. Per studiare strutture così complesse si ricorre all'ausilio di software, che sono di solito di proprietà dell'azienda data la loro importanza strategica.

3 DEFINIZIONE DELLE RETI DI PETRI

3.1 INTRODUZIONE

Le reti di Petri, proposte da Carl Adam Petri nel 1962, suppliscono al bisogno di modellizzare sistemi a eventi discreti (DES, Discrete Event Systems). Derivano dagli automi a stati finiti, ma presentano differenze enormi da questi. Le reti di Petri possono rappresentare in modo compatto e con raffigurazioni grafiche molto intuitive concetti come la condivisione di risorse, sincronizzazione tra processi, il succedersi asincrono di eventi e operazioni concorrenti.

A differenza di un automa dove ad ogni stato corrisponde un nodo, in una rete di Petri lo stato del sistema è funzione degli stati dei singoli nodi che compongono la rete. Questo permette di rappresentare un numero infinito di stati usando un numero finito di nodi. In una rete di Petri sia lo stato che la transizione sono concetti "distribuiti". Il sistema risulta come composto da più sottostati. Una transizione può influenzare solo una parte del sistema, lasciando la possibilità che un'altra transizione non concorrente possa scattare. A parte la rappresentazione grafica semplice e di immediata interpretazione, una RP ha anche una rappresentazione matematica (attraverso l'uso delle matrici).

3.2 DEFINIZIONI

Per la definizioni formali si è fatto uso del testo di L. Ferrarini [2].

Definizione 3.1 (Rete)**.**
Una rete non marcata è una tripletta $N = (P, T; F)$ dove P è l'insieme dei posti, T è l'insieme delle transizioni ed F è la relazione di flusso. Gli insiemi P e T sono finiti. Inoltre:

1. $P \cap T = \emptyset$;
2. $P \cup T \neq \emptyset$;
3. $F \subseteq P \times T \cup T \times P$

Dove '$\times$' rappresenta l'operazione di prodotto cartesiano.

Una rete può essere rappresentata tramite un grafo bipartito, cioè composto da due tipi diversi di nodi (posti e transizioni). Nella simbologia più diffusa i posti vengono indicati con cerchi, le transizioni con quadrati o barrette e le loro interconnessioni con archi orientati (vedi

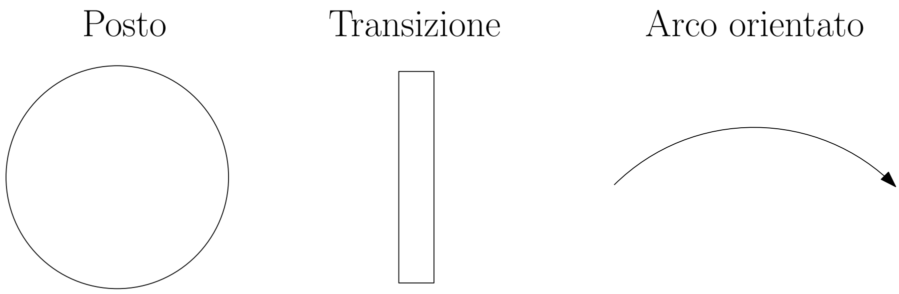

Figura 3.1: Simbologia Reti di Petri

Figura 3.1). Per ottenere strutture più complesse vengono combinati e ripetuti adeguatamente i tre elementi base della rete.

La relazione F lega tra di loro posti e transizioni e transizioni e posti, ma non permette passaggi tra due posti o tra due transizioni (vedi Figura 3.2).

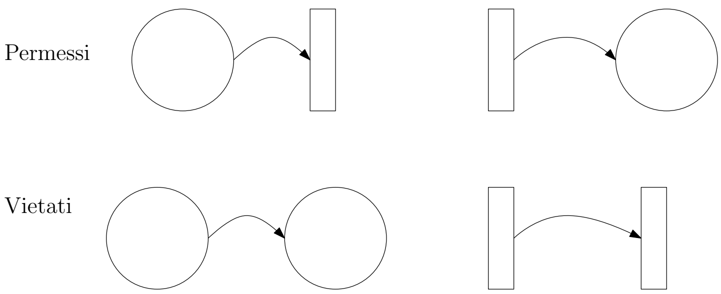

Figura 3.2: Passaggi permessi e vietati

I posti contengono l'informazione sullo stato del sistema, mentre le transizioni rappresentano eventi che modificano lo stato del sistema.

Per ogni posto o transizione della rete si può definire l'insieme degli elementi collegati indicando anche la direzione del flusso. A questo scopo si usano le funzioni di Pre e Post definite sotto.

Definizione 3.2 (Preset e Postset)**.**
Sia $X = P \cup T$. Si definisce preset di un elemento $\alpha \in X$ l'insieme così definito:

$$\mathtt{Pre}(\alpha) = \{\delta \in X \mid (\delta, \alpha) \in F\}. \tag{3.2.1}$$

Si definisce postset di un elemento $\alpha \in X$ l'insieme così definito:

$$\mathtt{Post}(\alpha) = \{\delta \in X \mid (\alpha, \delta) \in F\}. \tag{3.2.2}$$

L'insieme Preset è composto da tutti gli elementi collegati a monte e Postset da tutti quelli collegati a valle. Esiste anche una notazione compatta per indicare il preset e il postset (Equazione 3.2.3).

$$\bullet\alpha = \mathtt{Pre}(\alpha), \qquad \alpha\bullet = \mathtt{Post}(\alpha). \tag{3.2.3}$$

AD esempio nella rete di Figura 3.3 abbiamo che: $\bullet t_1 = \{p_1, p_2\}$, $t_1\bullet = \{p_3\}$, $p_1\bullet = p_2\bullet = \{t_1\}$.

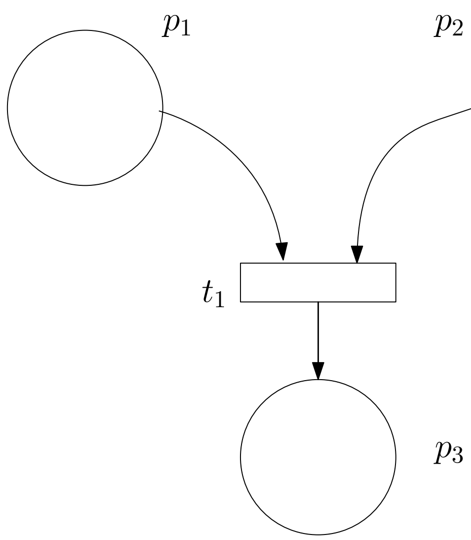

Figura 3.3: Esempio di rappresentazione grafica di una rete

Definizione 3.3 (Rete Posti-Transizioni)**.**
Una rete Posti-Transizioni è una quintupla $PT = (P, T, F, W, M_0)$ dove P, T ed F definiscono una rete e W ed M_0 sono le seguenti funzioni:

- $W : F \to N - \{0\}$ detta funzione peso, associa ad ogni elemento della relazione di flusso un numero intero positivo.
- $M_0 : P \to N$ detta funzione marcatura iniziale della rete, associa ad ogni posto un numero intero non negativo.

Il fatto di avere una marcatura iniziale della rete fa presagire che essa sarà sottoposta ad un'evoluzione, che dipenderà non solo dagli input che verranno forniti, ma anche dalle condizioni iniziale dei nodi appunto.

Nella rappresentazione grafica, la funzione peso W viene indicata da un'etichetta posta posta sul arco corrispondente. Se il peso vale 1, si può omettere l'etichetta. La funzione marcatura si rappresenta con pallini neri detti marche o token che vengono posizionati all'interno dei posti corrispondenti. Una rete si dice ordinaria se ha tutti i pesi degli archi uguali a uno.

3.3 EVOLUZIONE DELLA RETE

L'evoluzione di una rete posti-transizioni è legata alla possibilità che un evento accada (si abilita una transizione) e alle conseguenze del dato evento. Lo stato del sistema è dato dalla marcatura complessiva della rete. Se un evento si verifica, la marcatura complessiva va rivalutata.

Definizione 3.4 (Abilitazione di una transizione)**.**
Una transizione t si dice abilitata allo scatto nella marcatura M se e solo se:

$$\forall p \in \bullet t, M(p) \geqslant W(p,t). \tag{3.3.1}$$

La condizione necessaria affinché una transizione sia abilitata e che tutti i posti a monte devono avere un numero di token almeno pari al peso degli archi chi li collega alla transizione.

Definizione 3.5 (Scatto di una transizione)**.**
Data la marcatura M, lo scatto di una transizione t abilitata in M produce una nuova marcatura M' tale che:

$$\begin{array}{ll} \forall p \in \bullet t - t\bullet & M'(p) = M(p) - W(p,t) \\ \forall p \in t\bullet - \bullet t & M'(p) = M(p) + W(t,p) \\ \forall p \in t\bullet \cap \bullet t & M'(p) = M(p) - W(p,t) + W(t,p) \\ altrove & M'(p) = M(p) \end{array} \tag{3.3.2}$$

Nella prima colonna sono indicati rispettivamente: i posti che sono solo a monte della transizione, i posti solo a valle, i posti sia a monte che a valle e i posti ne a monte ne a valle della data transizione t. In pratica, lo scatto della transizione t provoca la rimozione da ogni posto a monte e l'aggiunta ad ogni posto a valle di t di un numero di token pari al peso degli archi interessati.

La regola di scatto stabilisce un trasferimento di token tra i posti coinvolti. Si fa attenzione che il numero iniziale di token può essere diverso dal numero finale a causa dei diversi pesi degli archi orientati. Inoltre lo scatto di una qualsiasi transizione della rete ha effetti solo locali alla rete stessa e non induce effetti collaterali in parti di rete non direttamente collegate alla transizione in esame.

3.3.1 *Non determinismo*

La regola di scatto definita sopra non copre tutti i possibili casi. Infatti può accadere che in una certa configurazione le transizioni abilitate allo scatto siano più di una. L'approccio più semplice per risolvere il problema è quello di scegliere a caso un elemento dell'insieme degli stati S. Una volta che una transizione abilitata scatta, per decidere quale sarà la successiva transizione abilitata a scattare, si deve rivalutare la rete, in quanto la nuova marcatura creata in seguito allo scatto può aver disabilitato alcune transizioni ed abilitato delle nuove.

La scelta casuale ha senso nell'implementazione concettuale di un problema, ma non ha senso nelle applicazioni pratiche. Una regola alternativa stabilisce che le transizioni abilitate ma non in conflitto scattino tutte. Per quelle in conflitto ci sono possibilità diverse: scelta casuale, priorità, etc.

3.3.2 *Esempio: Sistema produttori/consumatori*

Un esempio molto frequente in letteratura è quello del sistema produttore/consumatore. Il suo successo è dato dal fatto che è un modello standard che si adatta a molteplici casi reali. Il sistema è costituito da uno o più "produttori", che hanno il compito di produrre "oggetti" e di metterli in un buffer condiviso, e uno o più "consumatori", che prelevano gli "oggetti" dal buffer e li consumano.

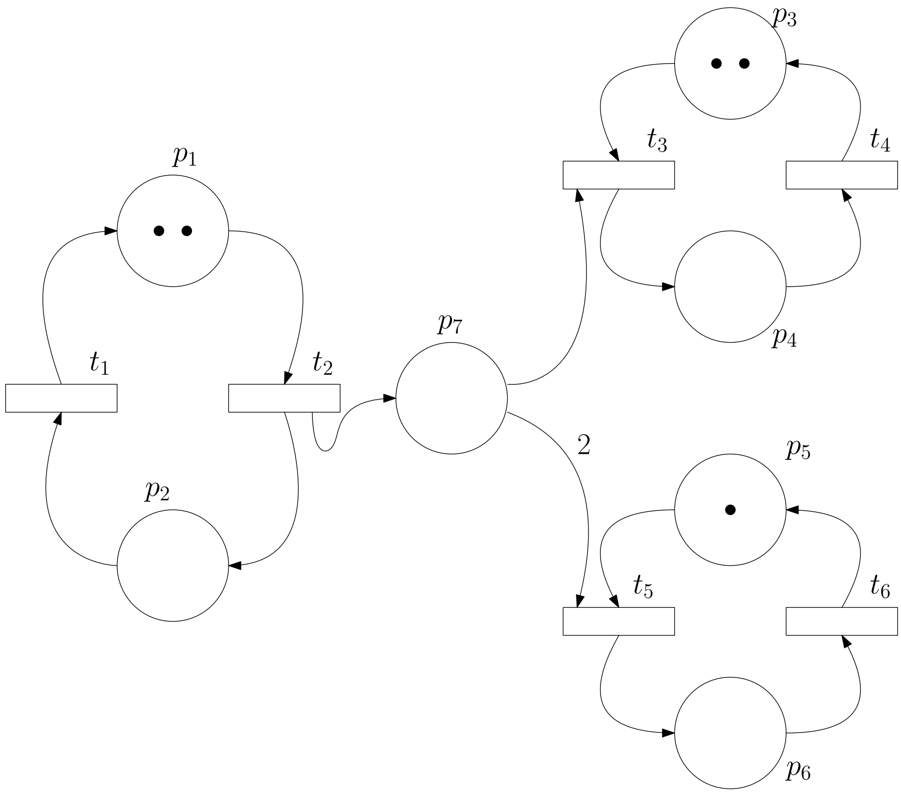

Figura 3.4: Esempio di sistema produttori/consumatori

Nello schema di Figura 3.4 si possono distinguere le due sotto retti composte nel seguente modo:

Produttori	**Consumatori**
p_1 prodotto pronto da consegnare	p_3, p_5 consumatore in attesa dei prodotti
p_2 produttore pronto a produrre	p_4, p_6 consumatore pronto per consumare
t_1 rifornimento di materie prime e produzione	t_3, t_5 prelievo prodotti dal buffer
t_2 consegna	t_4, t_6 consumo prodotti

I produttori sono due,come indicato dal numero di token nel posto p_1.I consumatori sono tre, due nel posto p_3 ed uno nel posto p_5. Il posto p_7 rappresenta il buffer. Analizzando la marcatura della rete, t_2

risulta l'unica transizione abilitata. Quando t_2 scatta, viene rimosso un token dal posto p_1, un token viene depositato nel posto p_2 ed uno in p_7. Nella marcatura raggiunta sono quattro le transizioni abilitate: t_2 (produzione), t_1 (rifornimento di materie prime), t_3 (consumo da parte del primo consumatore) e t_5 (consumo da parte del secondo consumatore). Il sistema arresta la sua evoluzione quando tutti i prodotti vengono consumati e non vengono prodotti dei nuovi.

Osserviamo l'elevata adattabilità di una RP vista nell'esempio. Si supponga che il numero dei produttori passi da due a tre. Basterà aggiungere un token nel posto p_1. Si supponga anche che si desidera eliminare il secondo consumatore. Basterà eliminare i posti p_5 e p_6, le transizioni t_5 e t_6 ed i relativi archi orientati. Sotto questo aspetto si possono apprezzare i vantaggi di una RP rispetto ad un automa a stati finiti.

3.3.3 *Strutture modellistiche fondamentali*

In seguito saranno illustrate quattro strutture che sono alla base di qualunque modello di un sistema ad eventi discreti.

Due transizioni t_1 e t_2 si dicono in **sequenza** e t_1 precede t_2 in una data marcatura M quando, con t_1 abilitata e t_2 non abilitata, lo scatto di t_1 abilita t_2. Una situazione tipica è riportata in Figura 3.5.

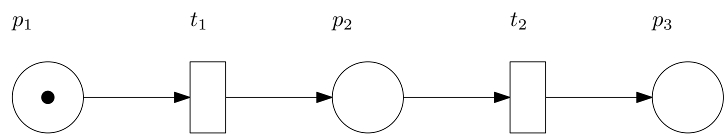

Figura 3.5: Transizioni in sequenza

Due transizioni t_1 e t_2 si dicono in **conflitto strutturale** se e solo se hanno almeno un posto d'ingresso in comune. Tuttavia, questa configurazione non è sufficiente per decidere se due transizioni sono realmente in conflitto tra loro. Due transizioni t_1 e t_2 si dicono in **conflitto effettivo** nella marcatura M, se sono in conflitto strutturale, se sono entrambe abilitate in M ed il numero di gettoni contenuti nei loro posti di ingresso non è sufficiente a soddisfare contemporaneamente tutti i pesi degli archi che li collegano alle due transizioni. In tal caso lo scatto di una transizione disabilita l'altra. Il conflitto strutturale dipende dalla topologia della rete. Quello effettivo anche dalla marcatura corrente. Un esempio di conflitto effettivo è mostrato in Figura 3.6.

Due transizioni t_1 e t_2 sono fra loro in **concorrenza strutturale** quando non condividono alcun posto di ingresso, cioè quando lo scatto di una delle due non disabilita l'altra. Due transizioni t_1 e t_2

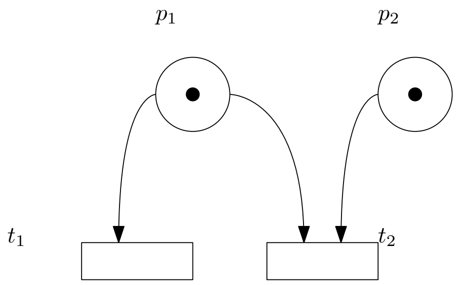

Figura 3.6: Transizioni in conflitto effettivo

si dicono in **concorrenza effettiva** nella marcatura M se sono abilitate entrambe in M. La concorrenza strutturale implica quella effettiva. Un esempio di concorrenza effettiva si trova in Figura 3.7.

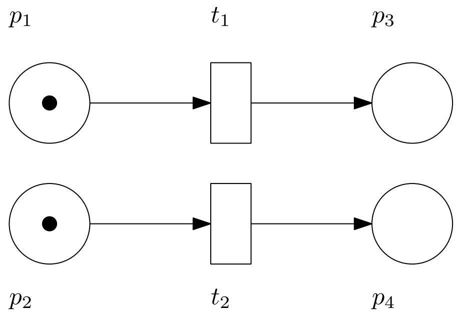

Figura 3.7: Transizioni in concorrenza effettiva

Infine in Figura 3.8 sono presentate due situazioni legate al concetto di concorrenza. La prima è la **transizione di sincronizzazione** che presenta una transizione con più posti a monte. La seconda è detta **inizio concorrenza** e presenta una transizione con più posti a valle. Tipicamente, due sequenze concorrenti sono attivate dallo scatto di una transizione di inizio concorrenza e terminano con una transizione di sincronizzazione.

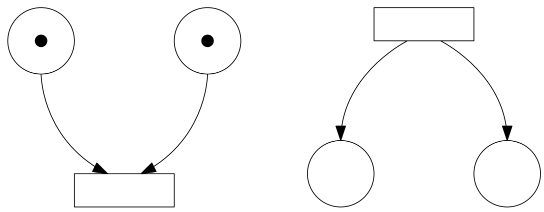

Figura 3.8: Sincronizzazione ed inizio concorrenza

3.4 PROPRIETÀ BASE DELLE RETI DI PETRI

Le proprietà base sono utili in applicazioni di modellizzazione e controllo.

Sia M_0 una marcatura e M_1 la marcatura ottenuta da M_0 applicando la transizione t. Allora si scrive: $M_0[t > M_1$.

3.4.1 *Raggiungibilità*

Definizione 3.6 (Raggiungibilità).
Una marcatura M_1 si dice **raggiungibile** a partire da una determinata marcatura M_0 se esiste almeno un sequenza di transizioni che facendole scattate a partire da M_0 si ottenga M_1.

Si definisce **insieme di raggiungibilità** $R(N, M_0)$ di una rete N con marcatura iniziale M_0 l'insieme più piccolo di marcature tale che:

- $M_0 \in R(N, M_0)$, e
- se $M_1 \in R(N, M_0)$ e $\exists t \in T$ tale che $M_1[t > M_2$, allora $M_2 \in R(N, M_0)$

Può tornare utile studiare la raggiungibilità di una certa marcatura in caso di blocchi di sistema (deadlock). Si prende la marcatura che porta al blocco e si verifica se essa è raggiungibile a partire dagli stati del sistema.

3.4.2 *Reversibilità e home state*

Nei sistemi reali, come per esempio i sistemi produttivi e importante poter ripristinare una condizione di funzionamento nominale dopo un guasto , errore o blocco. Oppure può essere chiesto al sistema di compiere attività cicliche che prevedono il ritorno alla configurazione di partenza. Le proprietà di reversibilità e home state sono strettamente connesse con questi casi.

Definizione 3.7 (Reversibilità).
Una rete di Petri N con marcatura iniziale M_0 si dice **reversibile** se $\forall M \in R(N, M_0)$, M_0 è raggiungibile da M.

Definizione 3.8 (Home state).
Uno stato della rete di Petri M_i è detto essere **home state** se $\forall M \in R(N, M_0)$ si ha che M_i è raggiungibile da M.

3.4.3 *Limitatezza*

Nei modelli reali i token sono spesso associati a oggetti o stati. Diventa di fondamentale importanza controllare che i token non superino un certo numero in un determinato posto. La proprietà delle RP che consente di identificare l'esistenza di situazioni anomale di accumulo indesiderato di token è detta **limitatezza**.

Definizione 3.9 (Posto k-limitato)**.**
Un posto di una rete si dice **k-limitato** se in tutte le marcature raggiungibili a partire da una marcatura iniziale il numero di gettoni presenti nel posto non supera mai un valore prefissato **k**.

Definizione 3.10 (Rete k-limitata e limitata)**.**
Una rete si dice **k-limitata** se tutti i posti sono k-limitati. Una rete si dice **limitata** se è k-limitata per qualche valore finito di k.

Se una rete è limitata, non può avere un numero illimitato di marcature distinte. Dal punto di vista astratto equivale ad un automa a stati finiti.

Un caso particolare delle reti limitate si ha per $k = 1$ e viene detta binaria (o safe in inglese). Tali reti si distinguono per la loro semplicità e trovano impiego nel descrivere sistemi che presentano solo stati binari, come per esempio una macchina utensile che può essere libera oppure occupata. Affinché una rete sia binaria deve presentare tutte le marcature raggiungibili compresa quella iniziale composte solo di "0" o "1".

In genere si può rendere limitata una RP aggiungendo opportuni posti detti complementari.

3.4.4 *Vivezza*

Spesso si ha l'esigenza di sapere se una rete può continuare ad evolvere a partire da qualunque stato in cui esso possa trovarsi. Tale condizione è chiamata vivezza.

Definizione 3.11 (Transizione viva)**.**
Una **transizione** t si dice **viva** se e solo se per ogni marcatura M raggiungibile dalla marcatura iniziale esiste una marcatura M^* raggiungibile da essa tale che t è abilitata in M^*.

Definizione 3.12 (Marcatura viva)**.**
Una **marcatura** M si dice **viva** se e solo se per ogni transizione t esiste una marcatura M^* raggiungibile da M tale che t è abilitata in M^*.

Definizione 3.13 (Rete viva)**.**
Una **rete** si dice **viva** se e solo se tutte le sue transizioni sono vive.
Una **rete** si dice **viva** se e solo se tutte le marcature raggiungibili dalla marcatura iniziale sono vive.

Si deduce che in una rete viva tutte le transizioni possono scattare infinite volte qualunque sia la marcatura iniziale della rete. la vivezza rappresenta una condizione molto forte e non è possibile stabilire condizioni necessarie e sufficienti per reti generiche che implichino la vivezza.

Definizione 3.14 (Marcatura morta)**.**
Una **marcatura** M si dice **morta** se e solo se nessuna transizione è abilitata in M.

Reversibilità, limitatezza e vivezza sono proprietà indipendenti. Quindi i casi possibili date le loro combinazioni sono otto. Di seguito verranno proposti alcuni esempi di RP dovuti a Murata [6].

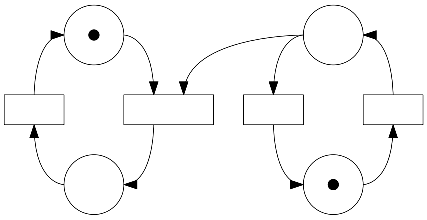

Figura 3.9: Esempio 1 RP

In Figura 3.9 viene rappresentata un esempio di RP limitata, non viva e non reversibile.

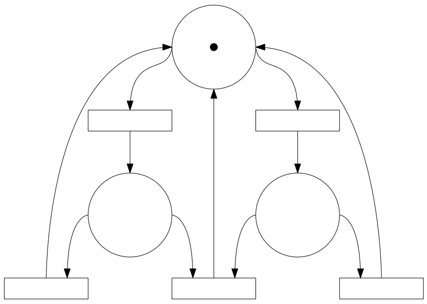

Figura 3.10: Esempio 2 RP

In Figura 3.10 viene rappresentata un esempio di RP limitata, non viva e reversibile.

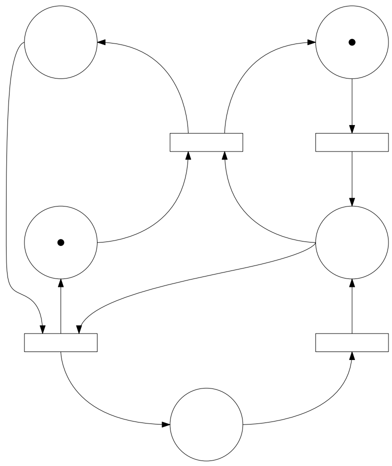

Figura 3.11: Esempio 3 RP

In Figura 3.11 viene rappresentata un esempio di RP limitata, viva e non reversibile.

Per i 5 casi rimanenti si rimanda all'articolo di T. Murata [6].

3.5 rappresentazione matriciale

Oltre alla comoda rappresentazione grafica, le RP sono dotate anche di una rappresentazione matematica. Tale rappresentazione, detta matriciale o algebrica, può essere utile per eseguire analisi automatiche della rete, al fine di verificare alcune proprietà di base. Con tale rappresentazione si può descrivere l'evoluzione di una RP in termini di equazione di stato, cioè in modo molto simile a quanto fatto per un sistema dinamico qualunque.

Inoltre la rappresentazione matriciale consente l'uso di software di calcolo come per esempio MATLAB [1] o GNU Octave [2] aumentando il potere di analisi delle reti per quanto riguarda il numero di nodi trattati.

3.5.1 *Matrici di ingresso, di uscita, di incidenza*

Vengono definite due matrici, dette di ingresso (I) e di uscita (O) che riassumono la topologia della rete. Nella matrice I vanno messi i pesi degli archi che vanno dai posti alle transizioni, nella matrice O vanno messi i pesi degli archi che vanno dalle transizioni ai posti.

Per distinguere nomi e transizioni ormai è consolidata la notazione formata da una lettera (p per indicare un posto e t per una transizione) seguito da un indice progressivo. Si avrà allora $p_1, p_2, p_3....p_{|P|}$ e $t_1, t_2, t_3....t_{|T|}$ dove $|P|$ e $|T|$ sono le cardinalità dei due insiemi.

Definizione 3.15 (Matrici di ingresso e di uscita)**.**
Le matrici di ingresso I e di uscita O sono così definite:

- $I_{|P|,|T|}$ con $I(k,j) = W(p_k, t_j), \forall (p_k, t_j) \in F)$, mentre $I(k,j) = 0$, $\forall (p_k, t_j) \notin F$.
- $O_{|P|,|T|}$ con $O(k,j) = W(t_j, p_k), \forall (t_j, p_k) \in F)$, mentre $O(k,j) = 0$, $\forall (t_j, p_k) \notin F$.

Le matrici I e O sono rettangolari con dimensioni $|P| \times |T|$. Le informazioni sulle righe sono legate ai posti. Quelle sulle colonne sono legate alle transizioni. In particolare un generico elemento $I(k,j)$ (con $1 \leqslant k \leqslant |P|$ e $1 \leqslant j \leqslant |T|$) è un numero intero non negativo e rappresenta il peso dell'arco entrante che connette il k-esimo posto alla j-esima transizione. $I(k,j) = 0$ se l'arco non esiste. Un esempio renderà tutto più chiaro.

Si può inoltre introdurre una matrice detta **matrice di incidenza** C. I suoi elementi sono interi relativi ottenuti nel seguente modo: il

1 MATLAB, The MathWorks, Inc., Natick, Massachusetts, United States. http://it.mathworks.com

2 GNU Octave, John W. Eaton and others, http://www.octave.org

peso delle connessioni uscenti dalle transizioni è convenzionalmente positivo, quello delle connessioni entranti è negativo.

Definizione 3.16 (Matrice di incidenza)**.**
Si definisce matrice di incidenza la matrice data dalla relazione:

$$C = O - I \tag{3.5.1}$$

dove I e O sono le matrici di ingresso e uscita della rete.

Si può notare come la matrice C non contenga tutte le informazioni contenute nelle matrici O ed I. Per come è stata definita, se per esempio un posto i ed una transizione j fossero collegati da archi in entrambe le direzioni tale che i pesi degli archi entranti in i provenienti da j risultino uguali ai pesi entranti in j provenienti da i, il valore $C(i, j)$ risulterebbe nullo come nel caso dell'assenza di archi che collegano il dato posto con la transizione.

La struttura costituita da un posto ed una transizione collegate da archi con direzione opposta si definisce **autoanello**. Le reti prive di autoanelli sono dette **pure**. Per esse non esiste alcuna ambiguità nella matrice C, che contiene le stesse informazioni delle matrici O ed I.

3.5.2 *Vettore marcatura*

Per rappresentare la marcatura di ua rete si può usare un vettore. Ciò torna utile se si vuole una notazione compatta compatibile con la rappresentazione matriciale.

Definizione 3.17 (Vettore marcatura)**.**
Data una rete con marcatura M, si definisce vettore marcatura m il vettore colonna di dimensione |P| le cui componenti sono valori interi non negativi che rappresentano il numero di gettoni di ogni posto:

$$m = [m_1 m_2 ... m_{|P|}]', con m_i = M(p_i), \forall i = 1, 2, ...|P|. \tag{3.5.2}$$

I concetti di abilitazione e di scatto di una transizione possono essere riformulati sfruttando le definizioni di matrice di incidenza e di vettore marcatura. Consideriamo le tre matrici O, I e C composte dai loro vettori colonna nel seguente modo:

$I = [I_1 I_2 ... I_{|T|}], O = [O_1 O_2 ... O_{|T|}], C = [C_1 C_2 ... C_{|T|}]$, dove i vettori I_i, O_i, C_i sono vettori colonna di dimensione |P|.

La condizione di abilitazione della transizione i-esima nella marcatura M è data dalla relazione: $M \geqslant I_i$.

Si ricorda che una transizione t_i è abilitata in una marcatura M se i posti di ingresso a t_i contengono un numero di gettoni almeno uguale al peso degli archi che gli collegano a t_i. Si può dunque scrivere la condizione di abilitazione in funzione della matrice di ingresso e della matrice di uscita, che per reti pure diventa funzione della matrice di incidenza. La scrittura compatta diventa:

$$M + O_i \geqslant I_i, M + O_i - I_i \geqslant 0, M + C_i \geqslant 0 \tag{3.5.3}$$

Lo scatto di una transizione t_i che porta il sistema da una marcatura M a una nuova marcatura M^* data da:

$$M^* = M + O_i + I_i = M + C_i \tag{3.5.4}$$

3.5.3 *Esempio rappresentazione matriciale*

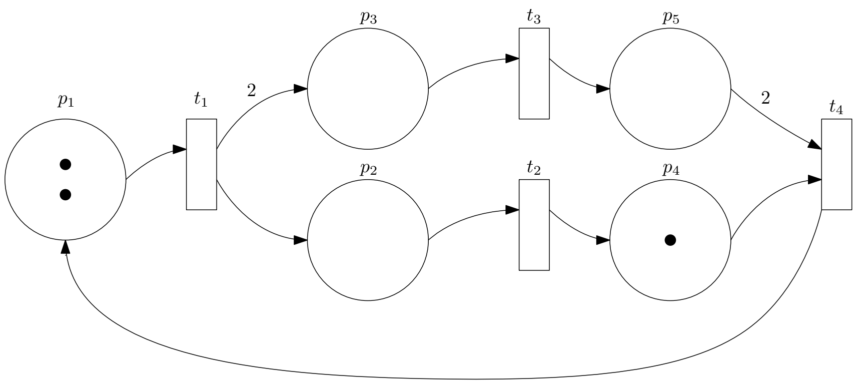

Figura 3.12: Esempio di RP per la rappresentazione matriciale

Seguendo le convenzioni adottate sopra, per la rete di Figura 3.12 si costruiscono le seguenti matrici O, I e C ed il relativo vettore marcatura m. Vengono numerate in ordine progressivo le transizioni ed i posti della rete. Sulle colonne delle matrici vengono messe le transizioni della rete, sulle righe i posti. A partire dalla rete vengono stabiliti gli elementi delle singole matrici. Il vettore marcatura, invece contiene il numero dei token disponibili per ogni posto della rete.

$$O = \begin{array}{c} \\ p_1 \rightarrow \\ p_2 \rightarrow \\ p_3 \rightarrow \\ p_4 \rightarrow \\ p_5 \rightarrow \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \; I = \begin{array}{c} \\ p_1 \rightarrow \\ p_2 \rightarrow \\ p_3 \rightarrow \\ p_4 \rightarrow \\ p_5 \rightarrow \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$C = \begin{array}{c} \\ p_1 \rightarrow \\ p_2 \rightarrow \\ p_3 \rightarrow \\ p_4 \rightarrow \\ p_5 \rightarrow \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \end{array}, \; m = \begin{array}{c} p_1 \rightarrow \\ p_2 \rightarrow \\ p_3 \rightarrow \\ p_4 \rightarrow \\ p_5 \rightarrow \end{array} \!\!\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.5.4 *Sequenza di scatti e vettore delle occorrenze*

L'evoluzione di una rete, come detto sopra, è dovuta allo scatto successivo delle transizioni. Per rappresentare questo concetto in modo conciso si definisce la sequenza di scatti.

Definizione 3.18 (Sequenza di scatti)**.**
Una sequenza S di scatti abilitata in una marcatura M_0 è una sequenza di transizioni t_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $n \in N - \{0\}$ tali che t_1 è abilitata in M_0 e lo scatto di t_i porta in una marcatura dove t_{i+1} è abilitata: $S = t_1 t_2 ... t_n$.

Con riferimento all'esempio di Figura 3.12 la notazione per la sequenza di scatti è la seguente:

$$M_1[t_1 > M_2, M_2[t_2 > M_3 \Rightarrow M_1[t_1 t_2 > M_3, \tag{3.5.5}$$

oppure

$$M_1[S > M_3, \tag{3.5.6}$$

con $S = t_1 t_2$.

Si può osservare che una sequenza di transizioni arbitrarie non implica necessariamente l'esistenza della relativa sequenza di scatti. Infatti non è detto che si riesca a trovare una sequenza di marcature abilitanti le transizioni della sequenza sotto esame. Si parlerà dunque di sequenza di scatti ammissibile oppure non ammissibile.

La variazione di una marcatura della rete dovuta allo scatto di una transizione dipende solo dalla transizione considerata e non dalla marcatura iniziale della rete. Infatti si può scrivere:

$$\Delta M = M^* - M = C_i \tag{3.5.7}$$

La marcatura finale invece dipenda da quella iniziale.

Si deduce che le RP sono esempi di sistemi dinamici che presentano forti analogie con i sistemi lineari tempo-invarianti. Se si scrive la marcatura in funzione dei token e la si associa allo stato della rete, si può scrivere lo stato futuro in funzione dello stato corrente. Le marcature della rete raggiungibili dalla marcatura corrente dipendono solo da quest'ultima e non dalle marcature passate (anche se la marcatura corrente dipende da quelle passate). L'evoluzione dello stato è determinato dalla matrice di incidenza, che a sua volta dipende solo dal grafo della rete ed è indipendente dalla marcatura oppure dal tempo.

Definizione 3.19 (Vettore delle occorrenze)**.**
Il vettore delle occorrenze s, associato ad una sequenza si scatti S, è un vettore colonna di dimensioni $|T|$, la cui componente generica s_i è pari al numero delle occorrenze della transizione t_i nella sequenza S.

3.5.5 *Equazione di stato*

Diventa utile a questo punto introdurre l'equazione di stato per un sistema a eventi discreti descritto attraverso RP. Si supponga infatti di avere M_0 come marcatura corrente della rete e C la matrice di incidenza. Si supponga inoltre che la rete sia pura e che sia possibile applicare una sequenza di scatti S con vettore delle occorrenze s. Sia M_1 la marcatura raggiunta dopo l'applicazione della sequenza S, cioè $M_0[S > M_1$. Si definisce equazione di stato la seguente espressione:

$$M_1 = M_0 + Cs \tag{3.5.8}$$

L'equazione 3.5.8 non dipende dalla verifica di ammissibilità della sequenza di scatti. Ciò significa che l'equazione di stato è una condizione necessaria, ma non sufficiente per l'esistenza di una sequenza S ammissibile di cui s è il vettore delle occorrenze.

4 ANALISI RETI DI PETRI

4.1 INTRODUZIONE

Nel presente capitolo verranno affrontati alcune tecniche di analisi base. Alcune di queste tecniche si basano sulla semplificazione della rete, altre prevedono lo studio della matrice di incidenza.

4.2 SEMPLICI REGOLE DI RIDUZIONE

Come evidenziato nell'introduzione, le RP aumentano la loro complessità con l'aumentare del numero dei nodi nella rete. Diventa dunque di fondamentale importanza la formulazione di regole che permettano una semplificazione del problema, ma nello stesso tempo conservino tutte le proprietà della rete di partenza. Per esempio siano (N, M_0) e (N', M_0') le reti prima e dopo la semplificazione. Allora (N', M_0') sarà viva, reversibile o limitata se e solo se lo è (N, M_0).

4.2.1 *Fusione dei posti in serie*

Quando si hanno due posti in serie con una transizione tra di loro (vedi Figura 4.1) si può eliminare la transizione generando un unico posto che prende in ingresso gli archi dei due posti di partenza.

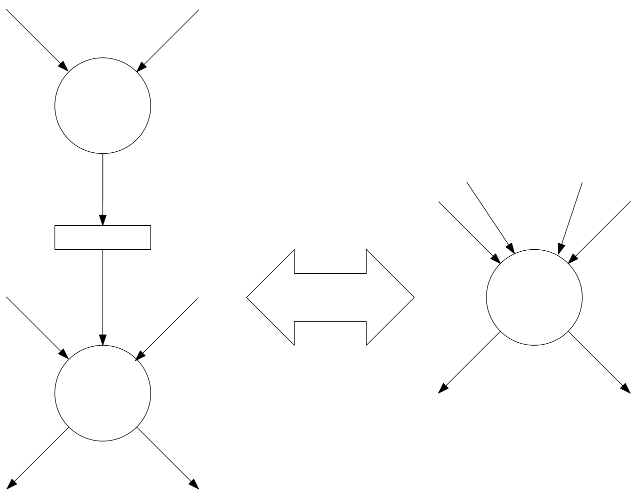

Figura 4.1: Fusione dei posti in serie

4.2.2 *Fusione delle transizioni in serie*

Quando si hanno due transizioni in serie con un posto tra di loro (vedi Figura 4.2) si può eliminare il posto generando un'unica transizione che prende in ingresso gli archi delle due di partenza.

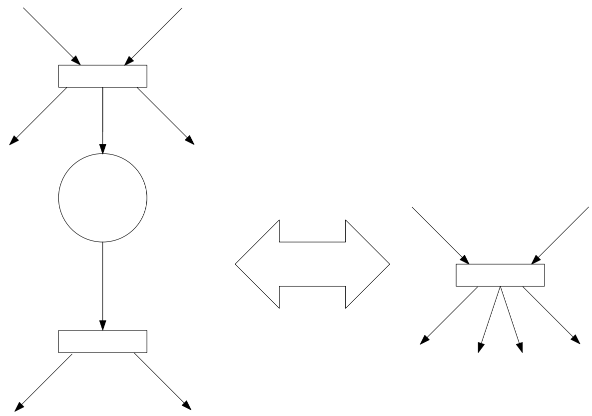

Figura 4.2: Fusione dei posti in serie

4.2.3 *Fusione dei posti in parallelo*

Se tra due transizioni troviamo due posti in parallelo come in Figura 4.3 possiamo sostituire il parallelo con un solo posto equivalente.

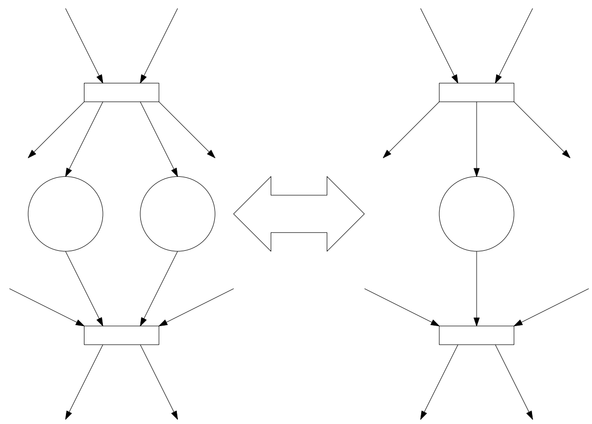

Figura 4.3: Fusione dei posti in parallelo

4.2.4 *Fusione delle transizioni in parallelo*

Se tra due posti troviamo due transizioni in parallelo come in Figura 4.4 possiamo sostituire il parallelo con una sola transizione equivalente.

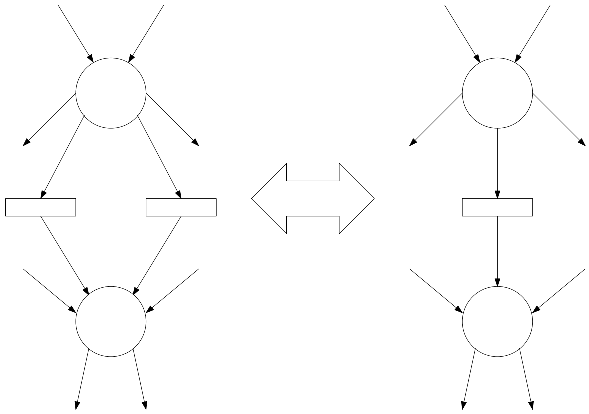

Figura 4.4: Fusione delle transizioni in parallelo

4.2.5 *Eliminazione auto-anello*

Se nella configurazione topografica troviamo un auto-anello possiamo eliminarlo in fase di studio delle proprietà della rete. In particolare si vedano la Figura 4.5 per quanto riguarda i posti e la Figura 4.6 per quanto riguarda le transizioni.

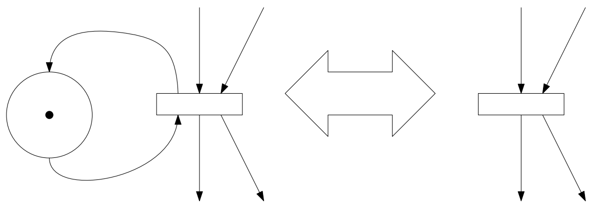

Figura 4.5: Eliminazione auto-anello (Posti)

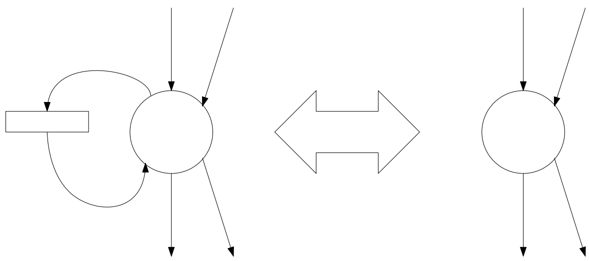

Figura 4.6: Eliminazione auto-anello (Transizioni)

4.3 insieme e graffo di raggiungibilità

Per stabilire l'insieme di raggiungibilità di una rete ri può procedere in modo iterativo trovando tutte le possibili marcature che la rete assume. Le transizioni vanno abilitate una per volta ed in caso di possibilità multiple, tutti gli scenari possibili dovranno essere studiati. L'insieme così ottenuto si chiama insieme di raggiungibilità.

Definizione 4.1 (Insieme di raggiungibilità)**.**
Si definisce insieme di raggiungibilità $R(N, M_0)$ di una rete N con marcatura iniziale M_0 l'insieme più piccolo delle marcature tale che:

$$M_0 \in R(N, M_0), \tag{4.3.1}$$

e

$$M^* \in R(N, M_0), \exists t \in T | M^*[t > M^{**} \in R(N, M_0) \tag{4.3.2}$$

L'equazione 4.3.1 ci dice che M_0 deve appartenere all'insieme di raggiungibilità. La 4.3.2 invece afferma che una marcatura raggiungibile da un'altra contenuta nell'insieme di raggiungibilità è essa stessa contenuta nel suddetto insieme.

Definizione 4.2 (Grafo di raggiungibilità)**.**
Si definisce grafo di raggiungibilità di una rete N con marcatura iniziale M_0 il grafo i cui nodi sono associati agli elementi di $R(N, M_0)$ ed i cui archi sono associati alle transizioni che portano da una marcatura ad un'altra di $R(N, M_0)$.

Un grafo ha un numero di stati non necessariamente finito. Per ottenere un grafo con un numero finito di nodi anche a partire d una rete non limitata si può introdurre un simbolo per indicare un numero intero non limitato ω di gettoni in un posto.

A questo punto diventa utile un esempio per chiarire i concetti trattati sopra.

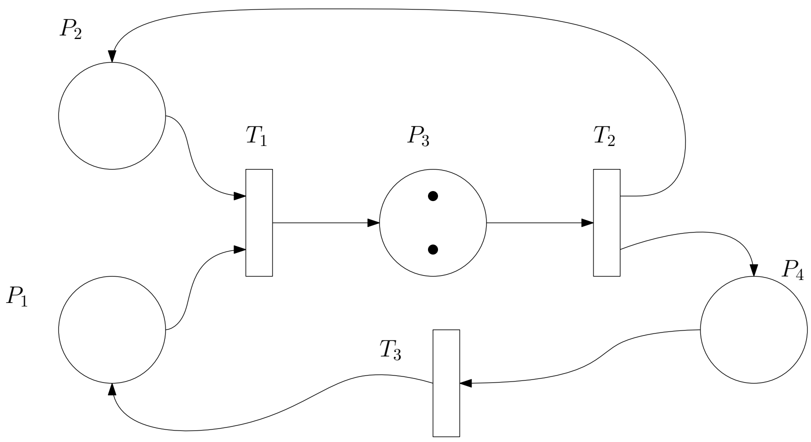

Figura 4.7: Rete di Petri per lo studio del grafo di raggiungibilità

In Figura 4.8 ogni stato della rete è rappresentato mediante il vettore riga delle marcature della rete. Le transizioni sono rappresentate dagli archi orientati. In questo caso l'insieme di raggiungibilità contiene sei elementi.

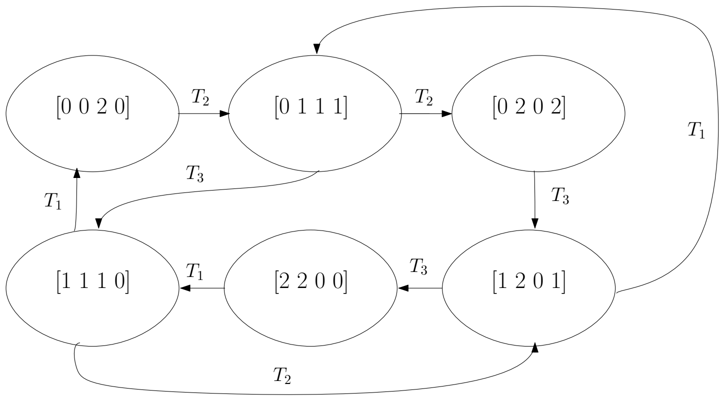

Figura 4.8: Graffo di raggiungibilità per la rete di figura 4.7

4.4 analisi matriciale

Un metodo di natura diversa per l'analisi della rete si basa sullo studio della matrice di incidenza. Questo approccio permette di caratterizzare la rete in funzione della sua topologia, e non della marcatura. Questo insieme di caratteristiche strutturali non sarà sufficiente per l'analisi della rete. Anche il comportamento dinamico dovrà essere analizzato.

4.4.1 *P-invarianti*

Definizione 4.3 (P-invariante)**.**
Si definisce P-invariante di una rete N un vettore colonna x di dimensione $|P|$ tale che $\forall M \in R(N, M_0)$:

$$x'M = x'M_0 \tag{4.4.1}$$

L'equazione 4.4.1 dice che un vettore è P-invariante se la somma pesata secondo i pesi del vettore dato e una marcatura generica della rete rimane costante.

Moltiplicando l'equazione 3.5.8 a sinistra per x' si ottiene:

$$x'M = x'M_0 + x'Cs \tag{4.4.2}$$

valida $\forall s$ ammissibile non vuoto. Sottraendo la 4.4.1 alla 3.5.8 si ottiene:

$$x'Cs = 0, \forall s \neq 0 \tag{4.4.3}$$

Pertanto per la legge dell'annullamento del prodotto, gli invarianti della rete si trovano risolvendo l'equazione:

$$x'C = 0 \tag{4.4.4}$$

L'equazione 4.4.4 ha infinite soluzioni. Infatti se un vettore x soddisfa la relazione, la soddisfa anche un vettore kx con $k \in \mathbb{N}$. Inoltre dati due P-invarianti x_1 e x_2, anche la loro somma $x = x_1 + x_2$ è un P-invariante. Infatti:

$$x_1'C = 0, x_2'C = 0 \Rightarrow x_1'C + x_2'C = (x_1 + x_2)'C = x'C = 0 \quad (4.4.5)$$

Pertanto una combinazione lineare di P-invarianti è ancora un P-invariante.

Definizione 4.4 (Supporto di un P-invariante).
Il supporto di un P-invariante x è l'insieme, denotato con $||x||$, dei posti corrispondenti ad elementi non nulli di x.

Definizione 4.5 (P-invariante a supporto minimo).
Un P-invariante è detto a supporto minimo se il suo supporto non contiene quello di nessun ltro P-invariante della rete.

Definizione 4.6 (P-invariante canonico). Un P-invariante è detto canonico se il massimo comune divisore dei suoi elementi non nulli è pari a 1.

Un P-invariante serve a stabilire una relazione tra i token di un gruppo di posti. Se gli elementi di un P-invariante sono non negativi si può calcolare un massimo ed un minimo di token che si possono accumulare in ciascun posto.

Definizione 4.7 (Generatore di P-invarianti positivi).
Un insieme generatore di P-invarianti positivi è il più piccolo insieme di P-invarianti positivi PI_k, $1 \leqslant k \leqslant q$, tali che ogni altro P-invariante della rete è ottenibile tramite combinazione lineare degli invarianti PI_k. Gli elementi dell'insieme generatore sono detti P-invarianti minimi.

Proposizione 4.1.
Un P-invariante è minimo, cioè appartiene all'insieme generatore dei P-invarianti, se e solo se è canonico e a supporto minimo.

Proposizione 4.2.
L'insieme generatore di P-invarianti è finito ed unico.

Definizione 4.8 (Rete coperta da P-invarianti).
Una rete si dice coperta da P-invarianti se ogni posto della rete appartiene al supporto di almeno un P-invariante.

Definizione 4.9 (Rete conservativa).
Una rete si dice conservativa se è coperta da P-invarianti non negativi, cioè:
$\forall p \in P$, $\exists$ un P-invariante $x \mid p \in ||x||$ e $x(p) > 0$

Proposizione 4.3.
Una rete conservativa è limitata.

Se una rete è coperta da P-invarianti non negativi, il numero dei token non può mai aumentare infinitamente. Quindi tale rete è limitata. Il viceversa non è vero, cioè il fatto che una rete sia limitata non implica la conservatività di tale rete.

4.4.2 *T-invarianti*

In modo analogo a quanto detto per i P-invarianti, i T-invarianti sono invarianti di tipo transizione, che, se applicati alla rete, la riportano alla marcatura iniziale.

Definizione 4.10 (T-invarianti)**.**
Si definisce T-invariante di una rete N un vettore colonna y di dimensione $|T|$ soluzione della seguente equazione:

$$Cy = 0 \tag{4.4.6}$$

Combinando l'equazione 4.4.6 con la 3.5.8 si ottiene:

$$M = M_0 + Cy = M_0 \tag{4.4.7}$$

L'esistenza di un T-invariante è condizione necessaria, ma non sufficiente per poter ritornare alla marcatura iniziale. Infatti potrebbe accadere che una transizione non abbia un numero adeguato di token in ingresso per scattare.

Una proprietà utile si può dedurre dal confronto dell'equazione 4.4.6 e della 4.4.4. L'ultima si può anche scrivere come $C'x = 0$. In questo caso i T-invarianti di una rete con matrice di incidenza C coincidono con i P-invarianti di una rete con matrice di incidenza C', e viceversa. Si può ottenere una rete con matrice di incidenza C' da una con C trasformando i posti in transizioni e le transizioni in posti mantenendo il pedice numerico costante e invertendo il verso degli archi orientati.

4.4.3 *Sifoni*

Un insieme di posti che complessivamente tende a perdere token durante l'evoluzione della rete si chiama sifone.

Definizione 4.11 (Sifone)**.**
Un insieme di posti S è u sifone se e solo se:

$$\bullet S \subseteq S\bullet \tag{4.4.8}$$

Dalla 4.4.8 si deduce che se una transizione è di ingresso per un sifone, lo è anche d'uscita, ma non viceversa. Inoltre se un sifone perde tutti i token non è più in grado di acquistarne altri.

Definizione 4.12 (Sifone minimo)**.**
Un sifone S è detto minimo se e solo se non esiste un altro sifone S' tale che $S' \subset S$.

Proposizione 4.4.
L'unione dei sifoni è un sifone.

Definizione 4.13 (Sifone di base)**.**
Un sifone di base è un sifone che non può essere ottenuto come unione di altri sifoni.

Proposizione 4.5. *Se S è un sifone privo di gettoni in una certa marcatura M, allora è privo di gettoni in ogni marcatura raggiungibile $M' \in [M >$.*

In presenza di un sifone non marcato, tutte le transizioni di $S\bullet$ sono morte.

4.4.4 *Trappole*

Un insieme di posti che complessivamente acquista token durante l'evoluzione della rete si chiama trappola.

Definizione 4.14. Un insieme di posti S è una trappola se e solo se:

$$S\bullet \subseteq \bullet S \tag{4.4.9}$$

Dalla 4.4.9 si deduce che se una transizione è di uscita per una trappola, lo è anche di ingresso, ma non viceversa. Inoltre se una trappola acquista almeno un token non è più in grado di perderlo.

Proposizione 4.6.
L'unione di trappole è una trappola

Proposizione 4.7.
Se S è una trappola marcata in una cera marcatura M, allora rimane marcata in ogni marcatura raggiungibile $M' \in [M >$.

Proposizione 4.8.
Il supporto di un P-invariante con elementi non negativi è un sifone e una trappola

Ciò implica che ci sono alcuni sifoni che non compromettono la vivezza della rete. Il legame tra sifone e vivezza non è immediato.

Proposizione 4.9.
Sia M una marcatura morta. Allora, l'insieme dei posti privi di gettoni $S = p \in P|M(p) = 0$ è un sifone non marcato.

Proposizione 4.10.
Se ogni sifone contiene una trappola marcata in una marcatura M, allora non esiste in $[M >$ una marcatura morta.

4.5 CLASSI PARTICOLARI DI RETI DI PETRI

Quando si decide di applicare le RP per lo studio di un particolare sistema ad eventi discreti si può agire un due diverse direzioni. la prima è quella di aggiungere restrizioni alla rete per aumentare la sua possibilità di ottenere risultati di analisi (condizioni necessarie e sufficienti) , ma così facendo diminuisce il potere rappresentativo. La seconda strategia prevede l'aumento del potere rappresentativo, cioè il modello rappresenta una classe più vasta di sistemi con più attributi di una semplice RP, ma questo procedimento complica notevolmente le possibilità di ricavare informazioni da un analisi.

4.5.1 *Macchine a stati finiti*

Una macchina a stati finiti (o automa) è una particolare RP nella quale ogni transizione ha esattamente un solo ingresso ed una sola uscita.

Definizione 4.15 (Macchina a stati)**.**
Una macchina a stati è una RP tale che $\forall t_j \in T$, $|\bullet t_j| = 1$ e $|t_j \bullet| = 1$.

La macchina a stati gode di proprietà aggiuntive rispetto alle RP:

- è strettamente conservativa (il numero di token non cambia mai)
- rappresenta un sistema finito
- ha graffo di raggiungibilità finito
- se la marcatura iniziale contiene un solo gettone, è una rete binaria
- è viva solo se fortemente connessa ed ha almeno un gettone

Proposizione 4.11.
Una rete è fortemente connessa se si può andare da un nodo qualunque ad un altro nodo qualunque seguendo la relazione di flusso.

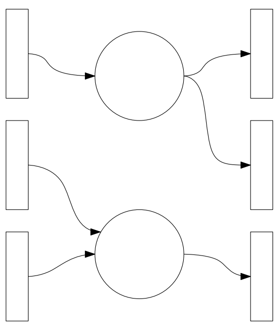

Figura 4.9: Esempio di macchina a stati

4.5.2 *Grafi marcati*

Un grafo marcato è una particolare RP nella quale ogni posto ha esattamente un solo ingresso ed una sola uscita.

Definizione 4.16. Un grafo marcato è una rete di Petri tale che $\forall p_i \in P, |\bullet p_i| = 1$ e $|p_i \bullet| = 1$.

Una macchina a stati può modellare conflitti, ma non può modellare simultaneità e sincronizzazione. Al contrario un grafo marcato può rappresentare situazioni di simultaneità e sincronizzazione, ma non quelle di conflitto e di decisione dipendente dai dati.

Anche un grafo marcato ha delle proprietà aggiuntive rispetto alle RP:

- è vivo se e solo se ogni suo ciclo contiene almeno un posto marcato

Proposizione 4.12.
Un ciclo è una sequenza di posti ottenuta seguendo la relazione di flusso dove la transizione di ingresso al primo posto è anche di uscita dall'ultimo. Una sequenza di posti è un insieme ordinato nel quale una transizione di uscita da un posto p_j e da nessun altro posto è di ingresso al posto p_{j+1} e a nessun altro posto.

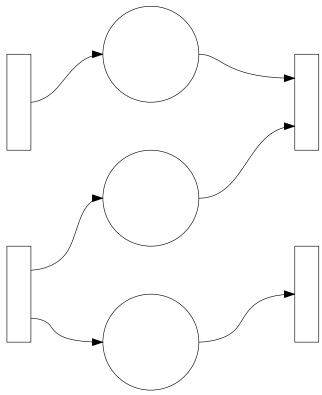

Figura 4.10: Esempio di grafo marcato

4.5.3 *Scelta libera*

Per rappresentare sia i conflitti sia la simultaneità si introduce una classe di RP in grado di gestire gli effetti collaterali di tale combinazione di vantaggi. Può verificarsi, infatti, una situazione detta confusione.

In Figura 4.11 la confusione sta nel fatto che non si riesce a stabilire a priori quale delle due transizioni scatterà. Le transizioni t_1, t_2 e t_3 risultano abilitate, ma si può notare che lo scatto di t_1 oppure t_3 disabilitano t_2 e viceversa.

Le reti a scelta libera non sono soggette a situazioni di confusione, garantendo l'evoluzione della rete.

Definizione 4.17 (Scelta libera)**.**
Una rete a scelta libera è una RP tale che $\forall t_j \in T$ e $p_i \in \bullet t_j$, succede che o $\bullet t_j = \{p_i\}$ oppure $p_i \bullet = \{t_j\}$.

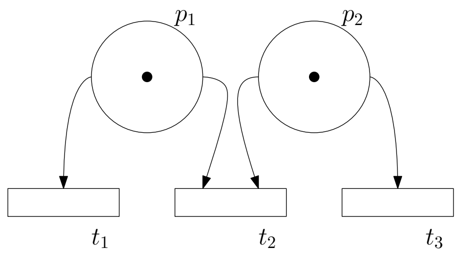

Figura 4.11: Esempio di confusione

La definizione dice che per ogni arco orientato da un posto ad una transizione o il posto in ingresso è unico o è unica la transizione in uscita.

In questo modo i conflitti sono permessi in modo controllato. Se un posto è in ingresso a più di una transizione, sarà anche l'unico posto in ingresso a queste transizioni. Quindi le transizioni saranno o bloccate tutte, o tutte permesse. Infine si fa notare che l'insieme delle macchine a stati e quello dei grafi marcati sono contenuti nell'insieme delle reti a scelta libera.

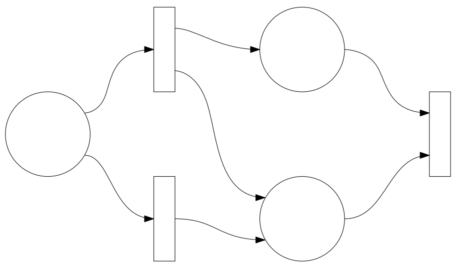

Figura 4.12: Esempio di rete a scelta libera

Definizione 4.18 (Scelta asimmetrica)**.**
Una rete a scelta libera asimmetrica è una RP tale che $p_i \bullet \cap p_j \bullet \neq \emptyset \leftarrow p_i \bullet \subseteq p_j \bullet$ oppure $p_j \bullet \subseteq p_i \bullet$

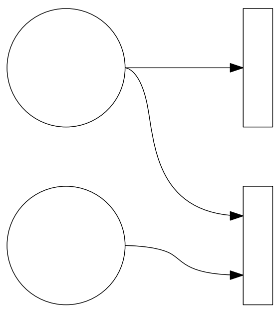

Figura 4.13: Esempio di rete a scelta libera asimmetrica

Proposizione 4.13.
Una rete a scelta asimmetrica è viva se tutti i suoi sifoni contengono una trappola marcata.

4.5.4 *Insiemi delle varie classi delle Reti di Petri*

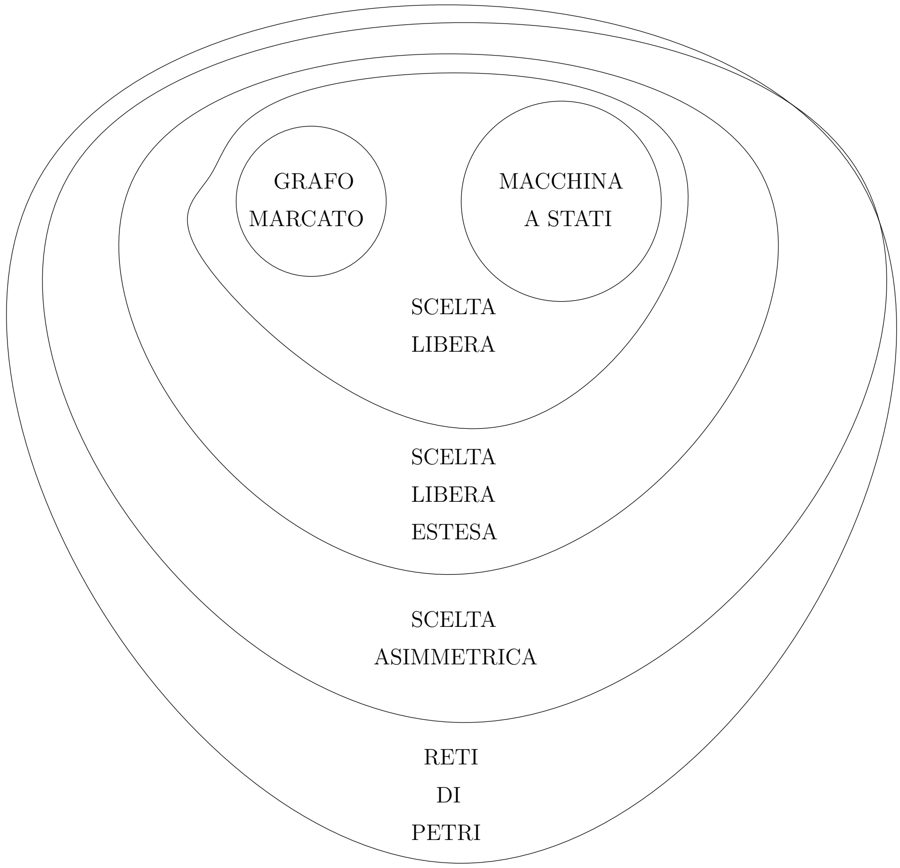

Figura 4.14: Rappresentazione grafica delle classi di RP

5 ESTENSIONI DELLE RETI DI PETRI

5.1 INTRODUZIONE

Spesso il potere rappresentativo delle PR non è sufficiente a descrivere completamente un sistema. Per questo motivo sono state introdotte e studiate estensioni destinate a migliorare la capacità modellistica delle RP.

5.2 RETI COLORATE

Il desiderio di sviluppare linguaggi di modellizzazione sempre più potenti che abbiano allo stesso tempo una solida base teorica accompagnata da una implementazione pratica versatile ha spinto alla ricerca di nuove soluzioni nell'ambito delle RP. Per arrivare all'obiettivo sono state combinate la forza delle PR con quella dei linguaggi di programmazione. Le RP apportano modelli per la descrizione della sincronizzazione e condivisione delle risorse, mentre i linguaggi di programmazione definiscono i tipi di dati e i metodi per la loro elaborazione. Il connubio prende il nome di Reti di Petri colorate [3].

Il nome colorate ha origine nel fatto che all'inizio si usavano token di colore diverso all'interno della rete per indicare oggetti o valori diversi tra di loro (diversamente da quanto fatto nelle RP classiche, dove non c'è distinzione tra i diversi token). Successivamente si è realizzato che l'insieme dei tipi di token può essere arbitrariamente grande e rappresentare entità molto diverse tra loro.

I pesi degli archi vengono sostituiti con espressioni, che fanno scattare la transizione solo quando queste risultano tutte vere.

Anche per le RP colorate valgono le proprietà ed i teoremi visti sopra. In particolare è possibile costruire il grafo di raggiungibilità, che però ha livelli di complessità [4] che richiedono l'utilizzo di strumenti software per l'analisi.

I posti, le transizioni ed gli archi sono definiti con appositi parametri.

Posti:

- Nome (come per le RP, ogni posto deve avere un nome univoco)
- Set di colori (indica i tipi di token che il dato posto può contenere)
- Marcatura iniziale (indica l'insieme iniziale di token nel dato posto)

Transizioni:

- Nome (come per le RP, ogni transizione deve avere un nome univoco)
- Sentinella (un espressione booleana che mette in relazione le variabili)

Archi:

- Espressione dell'arco (contenente alcune variabili)

Quando l'espressione dell'arco viene valutata, esso trasferisce un insieme di token da un posto ad una transizione o viceversa.
Per la definizione formale delle RPC si rimanda all'Appendice A.

5.2.1 *Esempio*

Per chiarire meglio i concetti legati alle RP colorate si introduce un esempio. In Figura 5.1 è rappresentato il caso più semplice di una RPC. Una persona deve andare dalla pianura in collina e ha due alternative a disposizione: può andarci a piedi o prendere la macchina. Il posto iniziale "$Pianura$" ha come set di token:

$$\Sigma = \{Macchina, Patente, Benzina, Forza, Abilità\}. \tag{5.2.1}$$

L'arco che collega "$Pianura$" con "$Cammina$" ha bisogno dei token "$Forza$" e "$Abilità$" per far scattare la transizione. Il secondo arco necessita dei tre token rimanenti. Come per le RP, se la condizione viene soddisfatta, la transizione può scattare e nel nostro caso permettere alla persona di arrivare in collina secondo una delle due modalità.

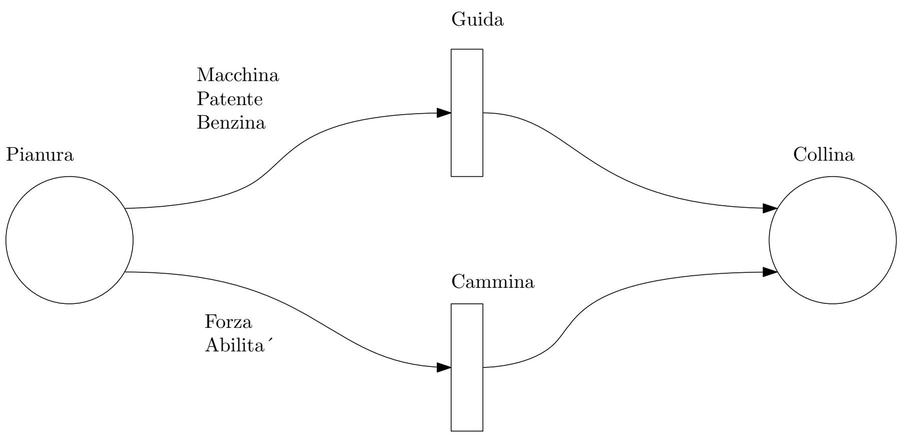

Figura 5.1: Esempio rete colorata

5.3 RETI TEMPORIZZATE

Per descrivere i sistemi dinamici in modo più completo si ha bisogno di introdurre il tempo. Solo quantificando il tempo si possono esprimere proprietà temporali come la durata di una attività, il tempo di risposta o il ritardo. Le RP come già detto forniscono un modello indipendente dal tempo. La loro evoluzione in questa direzione sono le Reti di Petri temporizzate (RPT).

In letteratura si trovano diversi approcci al problema, tutti però sono d'accordo il progettista ha la libertà di scegliere la posizione dei ritardi ed il loro tipo.

5.3.1 *Posizione dei ritardi*

I ritardi in una RPT possono essere collocati seguendo diverse strategie. La prima è quella di associare i ritardi alle transizioni. Quando una transizione scatta, i token risultanti vengono generati dopo un certo tempo. La seconda è quella di associare il ritardo ai posti. Questo fa si che quando arrivano dei nuovi token, questi rimangono non disponibili per un certo intervallo di tempo, bloccando di fatto le transizioni a valle. La terza possibilità è quella di associare il ritardo ai token, che dopo una transizione rimangono in uno stato di indisponibilità per la durata prestabilita.

5.3.2 *Tipo dei ritardi*

Anche per il tipo dei ritardi la scelta è ampia. Si può scegliere tra ritardi fissi, ritardi stocastici e ritardi definiti da un intervallo. In natura i ritardi solitamente non sono costanti. Per esempio la consegna di un ordine da parte del corriere è un evento di Poisson, che è stocastico per definizione. Purtroppo lavorare con eventi stocastici introduce problematiche computazionali che aumentano all'aumentare del numero di eventi. Inoltre considerare nell'analisi i singoli eventi con le loro rispettive probabilità può rivelarsi errato in quanto gli eventi spesso non sono tra loro indipendenti. Come compromesso tra velocità e affidabilità dei risultati si preferisce rappresentare i ritardi tramite intervalli [8].

5.4 RETI STOCASTICHE

Per descrivere eventi concreti come per esempio la lavorazione di un prefabbricato in una macchina utensile le RP risultano inadeguate per il fatto che la durata dell'operazione può essere variabile. Per ovviare al problema sono state introdotte le Reti di Petri Stocastiche (RPS).

Nelle RPS le transizioni non scattano in modo arbitrario, ma con una determinata probabilità. Inoltre il tempo viene considerato discreto con passo di campionamento $\Delta\tau$. (Le considerazioni valgono anche per il tempo continuo facendo tendere $\Delta\tau$ a zero.) Può accadere che nello stesso istante ci siano più di una transizione abilitata. Le definizioni di conflitto e concorrenza valgono ancora, dunque come per le RP si fanno scattare tutte le transizioni non in conflitto. Per le transizioni in conflitto si deve calcolare la probabilità condizionata. Tale calcolo aumenta di complessità all'aumentare del numero delle transizioni appartenenti allo stesso gruppo di conflittualità [5].

6 ESEMPIO APPLICATIVO

6.1 esempio fms

Per mostrare l'applicazione delle RP si propone un esempio tratto da un tema di esame del Prof. Gamberi. L'esercizio prevedeva il dimensionamento di un FMS. In questa sede il dato FMS verrà analizzato dal punto di vista strutturale.

Il sistema tratta tre prodotti (P_1, P_2 , P_3) ed utilizza tre macchine (A, B, C). Si prendono come dati del problema le seguenti tabelle:

	Tempi di lavorazione sulle macchine [min/pz]		
Prodotto	**A**	**B**	**C**
P_1	10	8	3
P_2	5	7	4
P_3	7	7	12

		Piazzamento	
Prodotto	**Piazz. 1**	**Piazz. 2**	**Piazz. 3**
P_1	A	B,C	A
P_2	B	C	A
P_3	A	B	C

Dal dimensionamento dell'impianto, che non viene riportato, si trova che per soddisfare le richieste di produzione sono necessarie 4 macchine di tipo A, 3 di tipo B, 3 di tipo C e 17 operai addetti al carico dei pezzi (che però vanno divisi per tre turni, dunque saranno 6 al massimo per turno). Questi numeri verranno usati nella rete sotto forma di token.

Dato che l'FMS deve trattare tre prodotti distinti, il modo migliore per rappresentare il sistema è un RPC. Per distinguere i prodotti semilavorati tra le diversi fasi verrà aggiunto al pedice la lettera della macchina che ha eseguito la lavorazione.

Il set dei colori per ciascun prodotto diventa:
$\Sigma_A = \{P_1, P_{1A}, P_{1AB}, P_{1ABC}, P_{1ABCA}\}$
$\Sigma_B = \{P_2, P_{2B}, P_{2BC}, P_{2BCA}\}$

$\Sigma_C = \{P_3, P_{3A}, P_{3AB}, P_{3ABC}\}$
Il set totale dei colori è: $\Sigma = \Sigma_A \cup \Sigma_B \cup \Sigma_C$.

L'insieme dei posti è: $P = \{\mathsf{Buffer}_{MP}, \mathsf{Ordini}, \mathsf{Buffer}_{SL}, \mathsf{Free}_{piazz.}, \mathsf{Buffer}_A, \mathsf{Buffer}_B, \mathsf{Buffer}_C, \mathsf{Free}_A, \mathsf{Free}_B, \mathsf{Free}_C, \mathsf{Buffer}_{OUT}\}$.

L'insieme delle transizioni è: $T = \{Picking, Piazzamento, Lav_A, Lav_B, Lav_C\}$.

Ogni arco deve avere una sua espressione, che in questo caso di token colorati non può essere un semplice numero naturale.

Per garantire che il numero di macchine od operai attivi comtemporaneamente non superi mai il numero massimo disponibile si introduce una struttura aggiuntiva alla rete il cui prototipo è mostrato in Figura 6.1

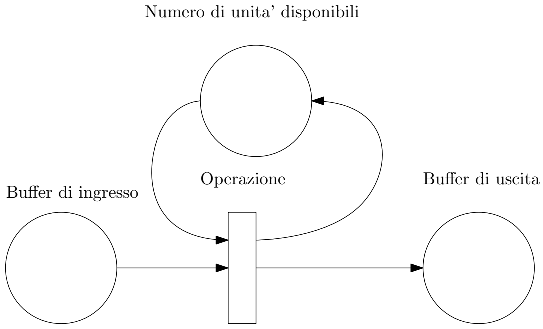

Figura 6.1: Esempio di struttura con retroazione

Per evitare confusione nella rappresentazione grafica, gli archi paralleli verranno rappresentati con un solo arco. Le espressioni degli archi verranno inserite in una tabella sempre er lo stesso motivo. [1]

Arco	**Espressione**
E_1, E_2, E_3	$P_1 \oplus P_2 \oplus P_3$
E_4	$P_1 \oplus P_{1A} \oplus P_{1ABC} \oplus P_2 \oplus P_{2B} \oplus P_{2BC} \oplus P_3 \oplus P_{3A} \oplus P_{3AB}$
E_5, E_6	$P_1 \oplus P_{1ABC} \oplus P_{2BC} \oplus P_3$
E_7	$P_{1A} \oplus P_{3A}$
E_8	$P_{1ABCA} \oplus P_{2BCA}$
E_9	$P_{2B} \oplus P_{3AB}$
E_{10}	$P_{1AB} \oplus P_{2B} \oplus P_{3AB}$
E_{11}	P_{3ABC}
E_{12}	$P_{1ABC} \oplus P_{2BC}$
E_{13}, E_{14}	$P_{1A} \oplus P_2 \oplus P_{3A}$
E_{15}	P_{1AB}
E_{16}	$P_{2B} \oplus P_{3AB}$

1 Con il simbolo $\oplus$ si indica la 'o' disgiuntiva.

Dalla tabella si può notare che l'arco E_4 è quello più sollecitato. In fase di progetto sarà un aspetto da prendere in considerazione.

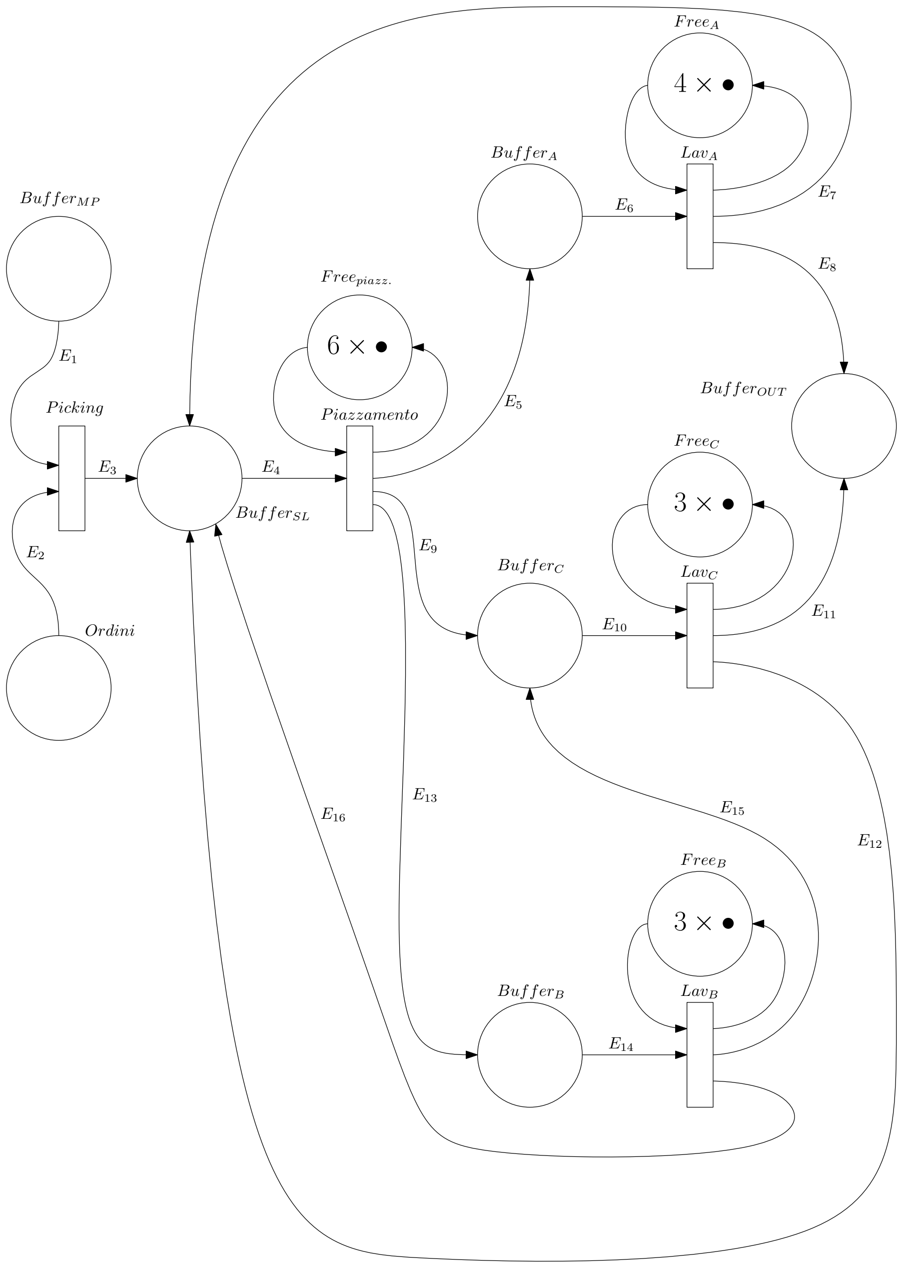

Figura 6.2: Rete di Petri colorata complessiva

Nella rete di Figura 6.2 si vede che il posto $\texttt{Buffer}_{\texttt{OUT}}$ è una trappola. Infatti si pensi ad un processo produttivo, che una volta riempito il magazzino in assenza di vendite si riempie fino a bloccare tutta la produzione. I posti $\texttt{Buffer}_{\texttt{MP}}$ e $\texttt{Ordini}$ sono dei sifoni. Nel corso dell'evoluzione della rete perderanno token che non potranno più riacquistare. Non è infatti possibile trasformare i prodotti finiti in materie prime.

La rete non è limitata, ma può diventarlo aggiungendo un posto complementare che rappresenti lo spazio disponibile a magazzino. Inoltre la rete non è viva e non è reversibile.

6.2 CONCLUSIONE

Prendendo atto delle proprietà della rete e della sua topografia si può vedere un FMS sotto un altro punto di vista. Infatti non è sufficiente dimensionare un sistema, altrettanta attenzione deve essere dedicata anche alla sua evoluzione qualitativa e quantitativa.

Questo scritto è da considerarsi come un'introduzione dato che l'argomento è talmente vasto da non poter essere riassunto in alcune decine di pagine.

APPENDICE

A

DEFINIZIONE FORMALE DELLE RETI DI PETRI COLORATE

Definizione A.1.
Una Rete di Petri Colorata è un insieme $CNP = (\Sigma, P, T, A, N, C, G, E, I)$ tale che:

- Σ è un insieme finito di elementi non nulli detto set dei colori.
- P è l'insieme finito dei posti.
- T è l'insieme finito delle transizioni:
- A è l'insieme finito degli archi tale che $P \cap T = P \cap A = T \cap A = \emptyset$.
- N è la funzione nodo definita da A in $P \times T \cup T \times P$.
- C è la funzione colore definita da P in Σ.
- G è la funzione sentinella con dominio in T e codominio in $Type(G(t)) = Bool \wedge Type(Var(G(t))) \subseteq \Sigma \ \forall t \in T$.
- E è una funzione delle espressioni degli archi definita da A in $Type(E(a)) = C(p(a))_{MS} \wedge Type(Var(E(a))) \subseteq \Sigma \ \forall a \in A$ dove $p(a)$ è un posto di $N(a)$.
- I è funzione marcatura iniziale da P in $Type(I(p)) = C(p)_{MS}$ $\forall p \in P$.

[1] Manfredi Bruccoleri, Sergio Noto La Diega, and Giovanni Perrone. An object-oriented approach for flexible manufacturing control systems analysis and design using the unified modeling language. *International Journal of Flexible Manufacturing Systems*, 15 (3):195–216, 2003. ISSN 0920-6299. doi: 10.1023/A:1026314925956. URL http://dx.doi.org/10.1023/A%3A1026314925956.

[2] L. Ferrarini. *Automazione industriale: controllo logico con reti di Petri*. Pitagora, 2002. ISBN 9788837112967. URL https://books.google.it/books?id=uPOjPQAACAAJ.

[3] Kurt Jensen. A brief introduction to coloured petri nets. In *Tools and Algorithms for Construction and Analysis of Systems, Third International Workshop, TACAS '97, Enschede, The Netherlands, April 2-4, 1997, Proceedings*, pages 203–208, 1997. doi: 10.1007/BFb0035389. URL http://dx.doi.org/10.1007/BFb0035389.

[4] Lars M. Kristensen, Soren Christensen, and Kurt Jensen. The practitioner's guide to coloured petri nets. *International Journal on Software Tools for Technology Transfer*, 2(2):98–132, 1998. ISSN 1433-2779. doi: 10.1007/s100090050021. URL http://dx.doi.org/10.1007/s100090050021.

[5] M.K. Molloy. Discrete time stochastic petri nets. *Software Engineering, IEEE Transactions on*, SE-11(4):417–423, April 1985. ISSN 0098-5589. doi: 10.1109/TSE.1985.232230.

[6] Tadao Murata. Petri nets: Properties, analysis and applications. *Proceedings of the IEEE*, 77(4):541–580, 1989.

[7] Manuel Silva and Robert Valette. Petri nets and flexible manufacturing. 2005.

[8] Willibrordus Martinus Pancratius Van der Aalst. *Timed coloured Petri nets and their application to logistics*. PhD thesis, 1992.

[9] D. T. N Williamson. System 24 - a new concept of manufacture. *Proceedings of the 8th International Machine Tool and Design Conference*, pages 327–376, 1967.