Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Fisica e Astronomia
"Galileo Galilei"

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Modello analitico per il conteggio dei crateri all'equilibrio

Relatore: **Prof. Francesco Marzari**
Laureando: **Vito Squicciarini**

Anno Accademico 2016/2017

Indice

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Cenni storici

L'esplorazione del Sistema Solare, cominciata una notte d'autunno di sessanta anni fa, ci ha regalato e continua a regalarci nuove, straordinarie immagini di mondi lontani: dall'accidentata e scabra superficie di Mercurio alle imponenti Valles Marineris marziane, dalla superficie ghiacciata di Europa ai laghi d'idrocarburi di Titano, i *fly-by* delle sonde spaziali ci hanno permesso di ampliare enormemente le nostre conoscenze sul Sistema Solare. L'intera sua storia è scritta, suggestivamente, su pagine di roccia, pronte ad essere decifrate dall'indagine scientifica: le fotografie delle superfici forniscono informazioni sui processi geologici esogeni ed endogeni che le hanno plasmate; la presenza ubiqua di crateri da impatto consente di ottenere, sotto particolari assunzioni, stime sull'età delle superfici, sulle loro caratteristiche fisiche nonché sulle popolazioni di meteoriti e sulle loro evoluzioni temporali. Non è un mistero, dunque, che la ricerca nel campo dell'*impact cratering* abbia assunto negli ultimi decenni un ruolo di primo piano nell'ambito degli studi planetari.

La moderna disciplina dell'*impact cratering* nasce dalla confluenza di tre distinti settori di studi. Il primo di questi, in termini cronologici, è lo studio dell'origine dei crateri lunari. Quando, nel 1609, Galileo Galilei puntò il telescopio verso l'alto cominciando, per mezzo di *"sensate esperienze e necessarie dimostrazioni"*, l'opera di distruzione della fisica e della cosmologia aristotelica, egli giunse presto

"... alla convinzione che la superficie della luna non è affatto liscia, uniforme e di sfericità esattissima, come di essa luna e degli altri corpi celesti una numerosa schiera di filosofi ha ritenuto, ma al contrario, diseguale, scabra, ripiena di cavità e di sporgenze, non altrimenti che la faccia stessa della terra, la quale si differenzia qua per catene di monti, là per profondità di valli." [1]

Lo scienziato pisano non si pronunciò sull'origine di tali strutture; ben presto però la comunità degli astronomi si convinse della loro natura vulcanica. Il primo a proporre un'origine esogena dei crateri fu Robert Hooke (1665), sulla base di osservazioni di impatti di proiettili su terreni argillosi; ipotesi comunque ben presto accantonata, "poiché sarebbe difficile immaginare da dove questi corpi dovrebbero provenire" [2]. L'ipotesi di un'origine vulcanica, sostenuta da personalità del calibro di Kant e Herschel, rimase predominante per due secoli. Solamente sul finire dell'Ottocento gli studi di G. K. Gilbert (1893) e in seguito di A. C. Gifford (1924 e 1930) dimostrarono che tutte

le caratteristiche osservate nei crateri lunari potevano essere spiegate da impatti di oggetti con velocità di qualche decina di km/s.

Il secondo contributo deriva dall'accettazione, da parte della comunità scientifica, dell'esistenza delle meteoriti. Quantunque nelle storie popolari e nelle cronache antiche si parlasse di palle di fuoco cadute dal cielo, gli scienziati non diedero mai troppo peso a simili affermazioni fino agli inizi dell'Ottocento, quando il fisico E. F. Chladni suggerì l'associazione con oggetti metallici o rocciosi caduti dallo spazio. Il rinvenimento di strane rocce presso i siti di recenti impatti, unito alla scoperta dei primi asteroidi, diede una prova a favore delle sue affermazioni. Perché i due settori venissero collegati rimaneva da individuare un collegamento tra un impatto da meteorite e un cratere terrestre. Esso fu trovato da D. M. Barringer e B. C. Tilghman, che riconobbero in seguito a minuziosi studi geologici sul Meteor Crater, in Arizona, esattamente ciò che si aspettavano da un impatto di una meteorite. Negli anni successivi molte strutture analoghe furono individuate. Dal punto di vista teorico, partendo dall'analisi dei crateri terrestri, i lavori di E. M. Shoemaker negli anni sessanta diedero un contributo fondamentale alla comprensione della fisica dell'*impact cratering*.

Il terzo contributo è lo studio sistematico, stimolato inizialmente da motivi bellici, della fisica di impatti ed esplosioni: un'analisi rigorosa e profonda, destinata a rivoluzionare il settore. C. W. Lampson (1950) e M. D. Nordyke (1961) stabilirono leggi di scala che collegavano le dimensioni di un cratere con l'energia dell'esplosione. Esperimenti in laboratorio e simulazioni numeriche contribuirono a una comprensione più estesa di tali fenomeni.

Lo sviluppo dell'esplorazione spaziale portò, assieme a una mole immensa di dati, nuovi interrogativi a cui rispondere. La domanda cui questa trattazione cercherà di dare risposta è la seguente: in quali condizioni il numero di crateri osservabili su una superficie planetaria raggiunge l'equilibrio, ossia cessa di crescere nel tempo? Per studiare questo problema, D. E. Gault condusse simulazioni raffinate presso l'Ames Research Center della NASA. Bombardando una superficie di sabbia di quarzo di lato 2,5 m e profonda 30 cm con proiettili di diversa dimensione e velocità, egli riuscì a riprodurre le condizioni d'equilibrio osservate nelle aree lunari densamente craterizzate. Gli importanti risultati da lui conseguiti, alla base di tutti gli studi successivi, saranno richiamati più volte in queste pagine.

Sarà presentato un nuovo modello capace di spiegare, con un numero limitato di assunzioni, in quali condizioni una superficie raggiunge uno stato d'equilibrio. I processi erosivi, modellizzati attraverso un parametro di degradazione, saranno incorporati in un'equazione differenziale del primo ordine, la cui soluzione analitica descriverà l'evoluzione temporale della popolazione di crateri. Si ricaverà che, in particolari condizioni, l'equilibrio è indipendente dalla funzione di produzione di crateri. Quanto trovato sarà infine applicato a dei casi concreti, ottenendo una serie di informazioni fisicamente interessanti.

1.2 Il problema dell'equilibrio

1.2.1 Datazione di superfici mediante conteggio di crateri

La determinazione dell'età delle superfici dei corpi celesti del Sistema Solare è foriera di informazioni inerenti la loro storia geologica.[1] In assenza di campioni prelevati *in situ*, tale datazione non

[1] L'età di una superficie è il tempo trascorso dall'ultima solidificazione o rimodellamento. Non è dunque da confondere con l'età del relativo corpo celeste, che è sempre di ∼4,6 Gyr.

può ovviamente basarsi su tecniche radiometriche. Esiste tuttavia un secondo metodo d'indagine, sviluppato a partire dagli anni '60, basato sul conteggio del numero dei crateri.

L'idea di fondo è concettualmente semplice: una superficie più vecchia tenderà ad avere un maggior numero di crateri rispetto ad una più giovane. È dunque possibile ricavare, per confronto, le età relative di diverse superfici dello stesso corpo celeste; noto il tasso medio di produzione di crateri, sarà possibile ottenerne una datazione assoluta. [3] Basandosi su quest'approccio, Ernst Öpik (1960) stimò per primo che l'età del Mare Imbrium sulla Luna fosse di 4,5 miliardi di anni.[2] [4] Il metodo fu sviluppato ulteriormente da Gene Shoemaker, Robert Baldwin e Bill Hartmann: quest'ultimo, in particolare, concluse che i mari lunari hanno 3,6 miliardi di anni, risultato che si rivelò in seguito incredibilmente accurato. [5]

L'analisi radiometrica dei campioni lunari prelevati dalle missioni Apollo permise di calibrare le datazioni effettuate tramite *crater counting*, fornendo di conseguenza informazioni sul tasso di formazione di crateri. Fu dunque possibile estrapolare una cronologia per tutte le altre regioni lunari. Emersero ben presto alcuni fatti rilevanti:

-Le superfici più vecchie di circa 4 miliardi di anni presentavano così tanti impatti che i nuovi crateri si sovrapponevano a quelli vecchi, rendendo impossibile ogni datazione; tale fatto era inoltre incompatibile con l'ipotesi di un tasso di formazione di crateri costante per tutta la storia del Sistema Solare;
-Superfici più giovani avevano, in molti casi, leggi di scala distinte per i crateri grandi e piccoli; il raggio di transizione tra i due regimi aumentava nel corso del tempo.

Per il primo punto, Gerhard Neukum ha mostrato che, nonostante il tasso di impatti sia variato, la forma complessiva della crater size-frequency distribution non è cambiata negli ultimi 4 miliardi di anni. Questo fatto suggerisce una popolazione di impattori stabile in questo lasso di tempo e giustifica le datazioni relative. [6] Quest'ultima, per inciso, presenta caratteristiche compatibili con quelle degli asteroidi della fascia principale. [7] Per quanto riguarda il periodo precedente, vi sono forti evidenze che le popolazioni di crateri e dunque di impattori pre-mari differiscano significativamente da quelle post-mari. Inoltre, il flusso di impattori sembra di molti ordini di grandezza superiore a quello attuale. [8]

Il secondo punto suggerisce l'esistenza di fenomeni che allontanano la distribuzione dei crateri osservati da quella dei crateri prodotti: è il cosiddetto problema dell'equilibrio, legato essenzialmente a processi erosivi e che costituirà l'argomento di questa trattazione.

1.2.2 Formulazione matematica del problema

Presentiamo i concetti fondamentali per lo studio del problema dell'equilibrio. Definiamo lo stato di equilibrio nel conteggio dei crateri (CCE, *crater count equilibrium*) come la configurazione nella quale il tasso di formazione di nuovi crateri eguaglia quello di erosione dei vecchi, di modo che il numero totale di crateri osservabili rimanga costante. [9] Introduciamo poi il concetto di distribuzione dimensioni-frequenza (SFD, *size-frequency distribution*). Una *size-frequency distribution* è la rappresentazione grafica dell'insieme di classi di frequenze assolute di crateri (teorici od osservati, a seconda dei casi) aventi diametro compreso tra due limiti D_a e D_b. La scelta dell'intervallo è

[2] La sua stima si è rivelata, a posteriori, poco accurata. Sulla base dei campioni della missione Apollo 15 si è infatti dedotta per il mare Imbrium un'età di 3,7∼3,9 Gyr.

arbitraria e distorce, in una certa misura, la natura del campione. Si preferisce in genere scegliere un intervallo variabile di estremi D e $\sqrt{2D}$ per gestire efficacemente le diverse scale a cui si manifesta il processo, ma rimane il problema della scelta del diametro iniziale.

In questa trattazione useremo un diverso tipo di rappresentazione: la distribuzione cumulativa dimensioni-frequenza (CSFD, *cumulative size-frequency distribution*). Fissato r_0, associamo ad esso tutti i crateri con dimensione r $> r_0$, ossia tutti gli elementi compresi nelle classi a destra di r_0. Una CSFD è dunque una funzione decrescente, che dal punto di vista matematico rappresenta -nel limite continuo della SFD- la funzione integrale della SFD[3]. Se una generica distribuzione segue una legge di potenza del tipo:

$$y = Cx^{-a}, \tag{1.1}$$

applicando il logaritmo a entrambi i membri si ottiene:

$$log(y) = log(C) - alog(x). \tag{1.2}$$

Di conseguenza, plottando i dati in rappresentazione log-log, essi si dispongono lungo una retta di pendenza $-a$. Nel seguito della trattazione il termine "pendenza" indicherà sempre l'esponente di una legge di potenza.

1.3 Processi erosivi

L'esistenza di uno stato d'equilibrio implica necessariamente la presenza, all'interno delle equazioni differenziali che governano l'evoluzione temporale della CSFD, di termini che bilanciano la produzione continua di nuovi crateri. Dal momento che la nostra analisi è fatta su corpi celesti privi -o quasi- di atmosfera, possiamo escludere l'erosione dovuta agli agenti atmosferici (che, peraltro, complicherebbe decisamente le equazioni). Non terremo conto neppure dei processi vulcanici, pur determinanti nella storia geologica planetaria, poiché sono fenomeni che tendono a rimodellare pesantemente le superfici, resettando il numero di crateri. L'erosione dei crateri sarà dunque da additare agli stessi impattori.

I processi nei quali i nuovi crateri erodono i vecchi sono i seguenti:

-*cookie-cutting*, ossia il processo per cui un nuovo cratere si forma dove ce n'era un altro, nascondendolo. Se la sovrapposizione non è completa, saremo ancora in grado di distinguere il vecchio cratere. Si tratta di un semplice processo geometrico, dipendente soltanto dall'area dei crateri. Essendo i crateri depressioni tridimensionali, il processo è inefficiente quando un piccolo cratere si forma in una depressione più grande;
-*sandblasting*, che tiene conto degli effetti 3D di cui sopra. Quando tanti piccoli crateri si formano dove ce n'è uno grande, questi possono cancellare collettivamente la depressione alterando la conformazione verticale precedente del terreno. Si tratta di un processo diffusivo;
-*blanketing by ejecta*, cioè lo spianamento delle vecchie depressioni causato dall'accumulo di polveri espulse dai nuovi crateri vicini. È un fenomeno abbastanza inefficiente, schematizzabile come un puro processo geometrico.

L'approccio classico al problema consiste nell'implementazione di simulazioni Monte Carlo. Molte di queste rappresentano i crateri come semplici cerchi bidimensionali (Woronow, 1977, 1978;

[3] A patto di prendere l'integrale da r a ∞ anziché da 0 a r.

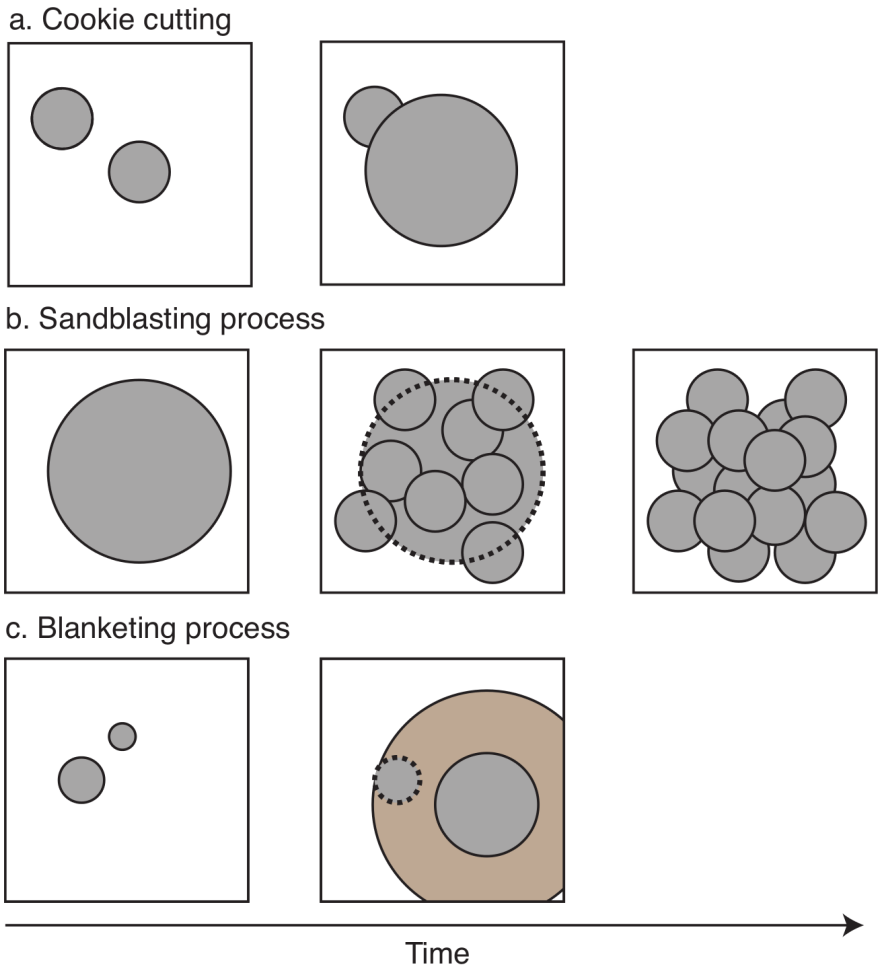

Figura 1.1: I tre processi attraverso cui i nuovi crateri occultano quelli preesistenti: a. Cookie-cutting; b. Sandblasting; c. Blanketing by ejecta. In marrone è indicata la regione influenzata significativamente dal processo. I cerchi grigi con circonferenza continua indicano i nuovi crateri, quelli con contorni tratteggiati si riferiscono a crateri parzialmente degradati.

Chapman and McKinnon, 1986; Marchi et al., 2014): trascurano, pertanto, i processi diffusivi legati alla tridimensionalità del problema. Tali effetti divengono importanti nel tempo, come mostrato da C. I. Fassett e B. J. Thomson. [10] L'aggiunta della terza dimensione risolve questo problema (Hartmann and Gaskell, 1997; Minton et al., 2015); tuttavia, comporta un costo computazionale elevato.

Il modello qui presentato, creato da M. Hirabayashi, D. A. Minton e C. I. Fassett [11], incorpora i tre processi erosivi definiti sopra e descrive il problema analiticamente, risultando più efficace nello studio di un elevato numero di parametri rispetto alle tecniche numeriche.

Capitolo 2

Il modello

La popolazione di crateri su una superficie planetaria è determinata da quella di meteoriti che la colpisce. La relazione sussistente tra le due non è banale: la dimensione del cratere finale è infatti funzione della velocità e dell'angolo d'impatto, della composizione del proiettile e del suolo e di molti altri fattori. La determinazione di tale relazione tra le CSFD, al di fuori degli scopi di questa trattazione, è modellizzata da leggi di scala che permettono di confrontare, entro certi limiti, le popolazioni di crateri dei diversi corpi del Sistema Solare.[1]

Il flusso di meteoriti su una superficie si traduce in un qualche tasso di produzione di crateri, funzione del loro diametro. Un numero sempre maggiore di crateri si accumula a mano a mano che essa, inizialmente suppostane priva, invecchia. Definiamo dunque la *crater production function* (CPF), che descrive idealmente quanti crateri di raggio fissato dovrebbero formarsi su un terreno per unità di tempo e superficie a causa del bombardamento meteoritico. Essa esprime, attraverso una legge di potenza, la relazione tra le frequenze assolute dei crateri e i rispettivi diametri.

La sua forma cumulativa (CSFD) è espressa tramite la formula [12]:

$$P_{(\geq r)} = \sigma \hat{x} r^{-\eta} \tag{2.1}$$

Dove $P_{(\geq r)}$ rappresenta il numero di crateri con raggio $\geq$ r generati nell'unità di tempo e superficie, η è la pendenza, definita positiva, della legge di potenza, σ è una costante con dimensioni $[m^{\eta-2}s^{-1}]$ e $\hat{x}$ è la *cratering chronology function*, adimensionale, che lega direttamente il numero di crateri prodotti all'età della superficie fornendone, appunto, una cronologia. Essa esprime, convenzionalmente, il numero di crateri con diametro > 1 km che si formano in un secondo ad una data epoca.

Integrando nel tempo la CPF e moltiplicando per l'area della superficie otteniamo la*production population*, definita come il numero totale di crateri di raggio $\geq$ r prodotti al tempo t:

$$C_{t(\geq r)} = A\sigma r^{-\eta} \int_0^t \hat{x}\, dt = A\xi r^{-\eta} \int_0^t x\, dt = A\xi X r^{-\eta} \tag{2.2}$$

dove abbiamo definito le variabili

$$\xi = \sigma \int_0^{t_s} \hat{x}\, dt \tag{2.3}$$

[1] Si guardino, ad esempio, le leggi di scala di Gault, Nordyke e Schmidt-Holsapple riportate in Melosh, H. J., Impact Cratering, A Geologic Process. Oxford University Press, pg 120-121.

$$x = \frac{\hat{x}}{\int_0^{t_s} \hat{x}\, dt} \tag{2.4}$$

$$X = \int_0^t x\, dt \tag{2.5}$$

e t_s è un parametro che, se $\hat{x}$ è costante, può essere scelto arbitrariamente. È conveniente fissarlo in modo da riprodurre la CSFD dei dati per X=1. L'istante iniziale può essere posto =0 senza perdere di generalità.

La funzione integrale della $\hat{x}$ rappresenta il numero di crateri con diametro > 1 km presenti all'epoca t: in altri termini, essa quantifica la traslazione verso l'alto della CSFD in funzione del tempo. Qualora nota, essa definisce delle isocrone mediante le quali è possibile convertire le frequenze cumulative in datazioni assolute.

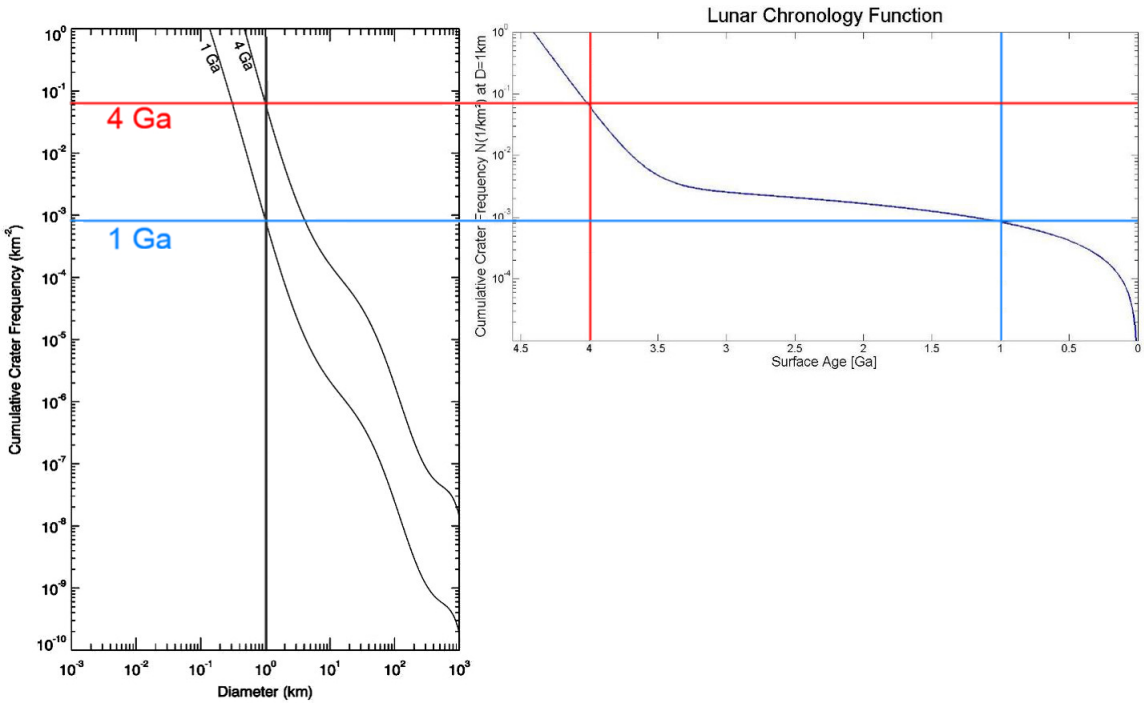

Figura 2.1: Relazione tra popolazione prodotta e (integrale della) chronology function. L'asse verticale è il medesimo; la proiezione sull'asse delle ascisse del punto della chronology function avente medesima ordinata del punto della production population relativa a un diametro di 1 km dà un'indicazione precisa dell'età della superficie. L'esempio di chronology function qui riportato è tratto da Neukum e Ivanov (1994).

Altrettanto importante è una seconda popolazione, quella dei crateri C_c effettivamente presenti sulla superficie all'istante t. Se tutti i crateri generati dalla CPF fossero visibili, C_c coinciderebbe con C_t; l'esistenza di processi erosivi farà invece sì che C_c<C_t. Possiamo pensare al processo nel modo seguente. Detto N_i^s il numero di crateri di dimensione i al passo s (scelto in modo che il tasso di impatti sia esattamente pari a 1/passo):

$$N_i^s = N_i^{s-1} + 1, \tag{2.6}$$

se non ci fosse erosione.

La degradazione parziale viene schematizzata tramite numeri frazionari. Se ad esempio N_i^2=1,5, il secondo impatto ha degradato il primo cratere del 50%[2]. I diversi effetti di degradazione (cancellazione del bordo, riempimento della depressione) non sono distinti: il modello non considera cioè le caratteristiche topologiche della superficie. In presenza di erosione dunque $N_i^s < N_i^{s-1} + 1$. In formule:

$$N_i^s = N_i^{s-1} + 1 - \Omega_i k_i^{s-1} N_i^{s-1} \tag{2.7}$$

dove k_i^s rappresenta il parametro di degradazione, che, moltiplicato per N_i^{s-1}, descrive quanti crateri perdono la propria identità (totale o parziale) al passo s e Ω_i è una costante che incorpora una serie di dipendenze per ora ignote. Mediamo ora i k_i^s in modo da eliminare la dipendenza da s:

$$k_i = \frac{\sum_{s=1}^{s_{max}} k_i^s N_i^{s-1}}{\sum_{s=1}^{s_{max}} N_i^{s-1}} \tag{2.8}$$

L'operazione è lecita in quanto, trattandosi essenzialmente di un processo statistico, il parametro di degradazione, pur variabile nel singolo impatto, per grandi numeri svela la dipendenza del processo da una qualche caratteristica del sistema.

2.1 Un caso semplificato

Studiamo ora un caso concreto, il più semplice. L'analisi sarà concettualmente simile a quella di Gault et al. (1974) [13], a patto di ragionare in termini di numero di crateri piuttosto che di frazione di superficie craterizzata. Sia dunque A l'area di un terreno, inizialmente senza crateri, in cui si formano e si cancellano crateri tutti uguali di raggio r_i. n_i è il numero di crateri prodotti dalla CPF, N_i quello dei crateri effettivamente presenti in un certo istante, $N_{0,i}$ il numero massimo di crateri che ci possono essere sulla superficie:

$$N_{0,i} = \frac{Aq}{\pi r_i^2}, \tag{2.9}$$

con q detto fattore di saturazione geometrica[3]; esso esprime la più alta densità di crateri teoricamente possibile qualora questi fossero disposti nel modo più efficiente possibile (a struttura esagonale). Nel nostro caso di crateri circolari tutti uguali q=$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx$ 0,907. Il numero di crateri visibili, N_i, cresce nel tempo: inizialmente in maniera proporzionale a n_i, successivamente a un tasso reso inferiore dal fattore erosivo -$\Omega_i k_i N_i$. In particolare:

$$\Omega_i = \frac{dn}{dt}\frac{1}{N_{0,i}}, \tag{2.10}$$

di modo che il termine

$$k_i \frac{dn}{dt}\frac{N_i}{N_{0,i}} \tag{2.11}$$

sia proporzionale al tasso di impatti dn/dt, legato alla probabilità $N_i/N_{0,i}$ che un nuovo cratere si sovrapponga a uno vecchio, tale da cancellare esattamente k_i crateri nella condizione di saturazione geometrica. Se k_i<1, sono necessari più crateri per cancellarne uno vecchio, se k_i>1 un nuovo cratere ne cancella più di uno vecchio. Abbiamo cioè l'equazione differenziale:

$$\frac{dN_i}{dt} = \dot{n} - k_i \dot{n}_i \frac{N_i}{N_{0,i}} \tag{2.12}$$

[2]Ovviamente, essendo la superficie priva di crateri per t=0, N_i^0=0, N_i^1=1.

[3]Diversi autori chiamano *saturazione* lo stato qui detto d'equilibrio e *equilibrio* un processo più generale, comprendente altri tipi d'erosione geologica in aggiunta all'impatto. In queste pagine si adotterà sempre la terminologia originaria di Gault.

che, risolta con condizione iniziale N_i(t=0) =0, dà:

$$N_i = \frac{N_{0,i}}{k_i}\Big[1 - exp\Big(-\frac{k_i n_i}{N_{0,i}}\Big)\Big] = \frac{Aq}{k_i \pi r_i^2}\Big[1 - exp\Big(-\frac{k_i \pi r_i^2 n_i}{Aq}\Big)\Big]. \tag{2.13}$$

La dipendenza temporale di N_i è nascosta in n_i. Se t $\to \infty$, n_i pure $\to \infty$, l'esponenziale si annulla e $N_i \to N_{0,i}/k_i$. In particolare, dovendo essere $N_{0,i}/k_i \leq N_{0,i}$, $k_i \geq 1$.

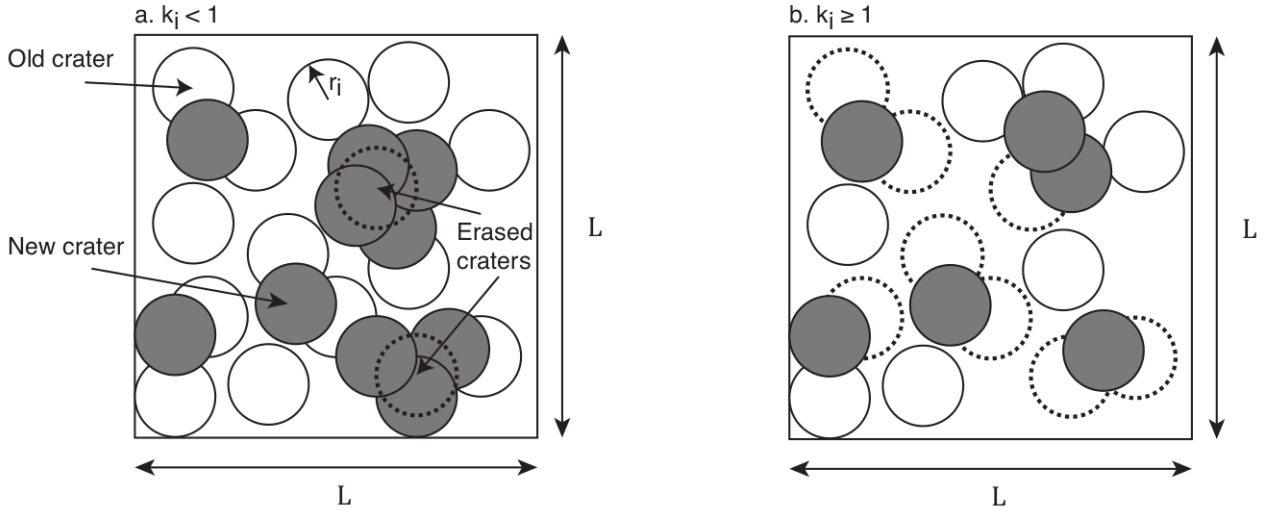

Figura 2.2: Significato fisico del parametro di degradazione nel caso semplificato. I cerchi grigi rappresentano i nuovi crateri, quelli bianchi i vecchi. I cerchi con contorno tratteggiato indicano i crateri ormai invisibili. a. 2 soli crateri vengono cancellati in seguito a 10 impatti ($k_i < 1$). b. 6 nuovi crateri erodono molti vecchi crateri, 8 dei quali completamente ($k_i \geq 1$).

La condizione di saturazione geometrica, dunque, non viene mai raggiunta: l'equilibrio sopraggiunge ben prima.[4] Il valore d'equilibrio, tuttavia, non è strettamente insuperabile, come parrebbe mostrare l'equazione (2.13). Si ricordi che il parametro di degradazione è una media statistica dei k_i^s associati ai singoli impatti s. Questi sono, a rigore, degli eventi casuali e casuale è la loro posizione sulla superficie. Non è dunque impossibile che, in condizioni di equilibrio, un impatto porti a un incremento netto della superficie craterizzata. La natura statistica del processo, tuttavia, controlla le oscillazioni rispetto all'equilibrio e le modera nel tempo, ottimizzando la configurazione geometrica dei crateri. È in questo senso che si deve intendere l'equazione per N_i.

2.2 Il caso generale

Siamo pronti ad estendere la nostra analisi al caso in cui i crateri prodotti siano di diverse dimensioni. In analogia con l'equazione (2.12) del caso semplificato, potremo scrivere un'equazione differenziale che darà la derivata di N come differenza tra il tasso di creazione di nuovi crateri e quello di distruzione di vecchi crateri. Il processo sarà formulato inizialmente con quantità discrete, poi sarà esteso al continuo.

[4] La massima densità di crateri misurata nel Sistema Solare si trova su Mimas, satellite di Saturno, e ammonta soltanto al 13% della densità di saturazione.

Consideriamo una famiglia di crateri di raggio j: questa, qualora fosse l'unica agente sulla superficie, obbedirebbe ovviamente all'equazione (2.12). L'introduzione di una seconda famiglia di crateri di raggio i creerebbe però dei termini misti (i, j) nell'equazione del sistema, rendendo impossibile una fattorizzazione in due equazioni indipendenti formalmente uguali alla (2.12). Per ovviare a questa difficoltà, vediamo come crateri di differenti dimensioni interagiscono tra loro.

Nel caso in cui $r_{nuovo} \geq r_{vecchio}$ i nuovi crateri erodono i vecchi attraverso cookie-cutting ed ejecta-blanketing; quando invece $r_{nuovo} < r_{vecchio}$ i fenomeni dominanti sono sandblasting e ejecta-blanketing.
Consideriamo l'evoluzione della popolazione di raggio i spezzando i contributi dovuti all'accumulazione e alla degradazione: $\mathrm{d}N_i/\mathrm{dt} = (dN_i/dt)_{acc} + (dN_i/dt)_{deg}$. Il tasso di accumulazione è dato ovviamente da:

$$\left.\frac{dN_i}{dt}\right|_{acc} = \dot{n}_i \tag{2.14}$$

Mentre il contributo al tasso di degradazione dovuto alla popolazione di raggio j assume la forma:

$$\left.\frac{dN_i}{dt}\right|_{deg,j} = -k_{ij}\dot{n}_j \frac{N_i}{N_{0,i}} \frac{r_j^2}{r_i^2} \tag{2.15}$$

Abbiamo cioè un diverso parametro di degradazione per ogni coppia di raggi i, j. La presenza nella formula del rapporto tra i raggi è motivato dal ragionamento seguente: se consideriamo, analogamente al caso semplificato, la condizione di saturazione geometrica e poniamo k_{ij}=1, il numero di vecchi crateri ricoperti è dato dal rapporto tra le aree. Sommando su tutti i valori di j, otteniamo l'equazione differenziale:

$$\frac{dN_i}{dt} = \left.\frac{dN_i}{dt}\right|_{acc} + \sum_{j=i_{min}}^{i_{max}} \left.\frac{dN_i}{dt}\right|_{deg,j} = \dot{n}_i - \frac{N_i}{N_{0,i}} \sum_{j=i_{min}}^{i_{max}} k_{ij}\dot{n}_j \frac{r_j^2}{r_i^2} \tag{2.16}$$

Integrando come sopra e imponendo la condizione N_i(t=0) =0, la soluzione è:

$$N_i = \frac{\dot{n}_i}{\frac{\pi}{Aq}\sum_{j=i_{min}}^{i_{max}} k_{ij} r_j^2 \dot{n}_j} \left[1 - exp\left(-\frac{\pi}{Aq} \sum_{j=i_{min}}^{i_{max}} k_{ij} r_j^2 n_j\right)\right] \tag{2.17}$$

A questo punto vorremmo: 1) passare al continuo; 2) scrivere tutto in funzione delle CSFD. Scriviamo allora k_{ij} come parametro continuo k, r_i e r_j diventano rispettivamente r e $\check{r}$ e, dette C_c e C_t le CSFD dei crateri effettivi e di quelli prodotti in totale:

$$N_i \sim -\frac{dC_c}{dr}dr, \qquad n_i \sim -\frac{dC_t}{dr}dr \tag{2.18}$$

Per definizione della CSFD come distribuzione cumulativa[5]. Sostituendo queste relazioni nella (2.15), trasformando la sommatoria su j in integrale in $d\check{r}$ e dividendo ambo i membri per dr, otteniamo:

$$\frac{dC_c}{dr} = -\frac{\frac{d\dot{C}_t}{dr}}{\frac{\pi}{Aq}\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{d\dot{C}_t}{d\check{r}} k\check{r}^2\, d\check{r}} \left[1 - exp\left(\frac{\pi}{Aq}\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dC_t}{d\check{r}} k\check{r}^2\, d\check{r}\right)\right] \tag{2.19}$$

[5]Il segno − è dovuto alla scelta fatta allora degli estremi di integrazione. Si veda la nota a pag. 5.

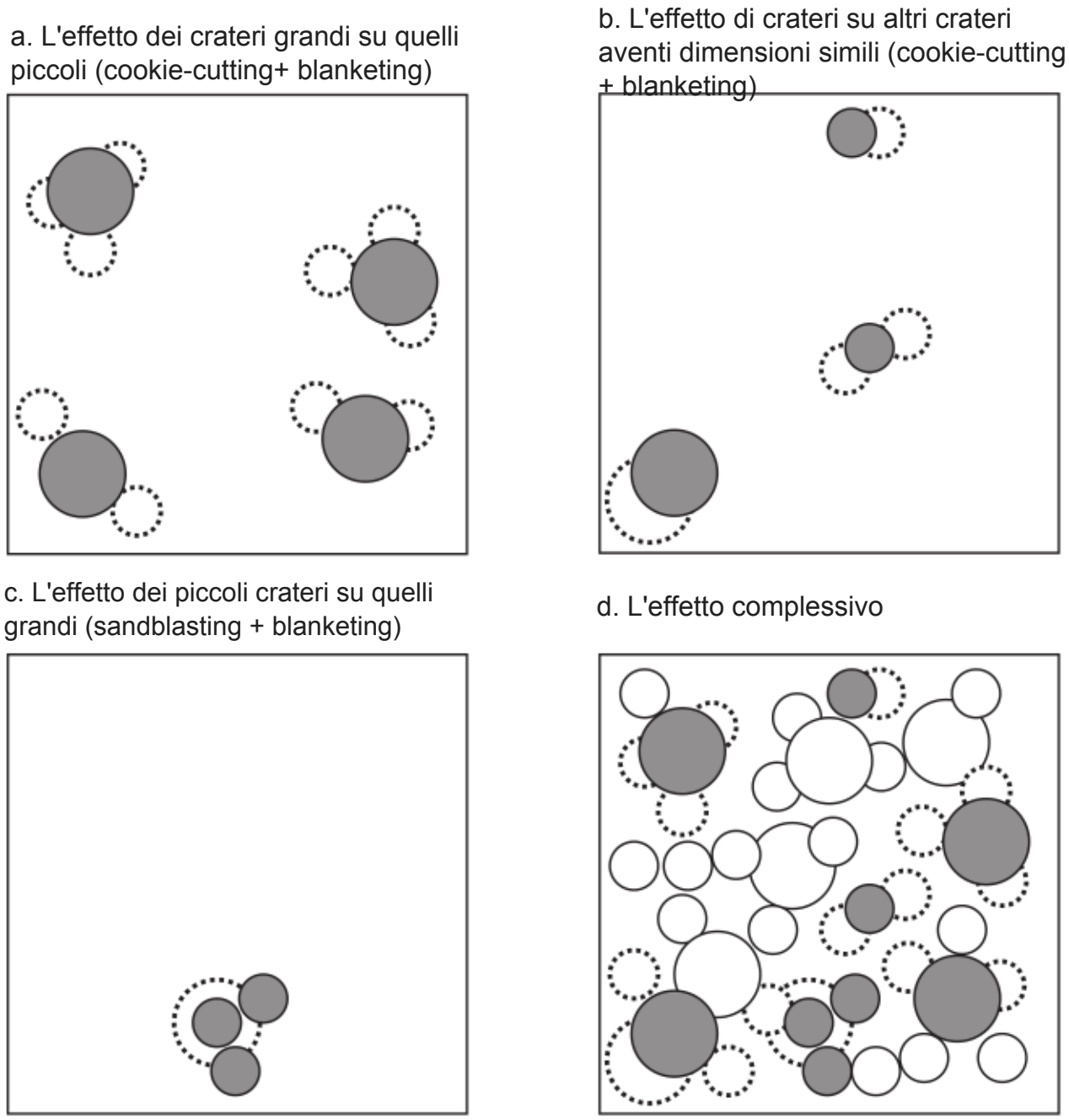

Figura 2.3: Degradazione per una funzione di produzione con due popolazioni di crateri. a. L'effetto dei crateri grandi su quelli piccoli; b. L'effetto dei crateri della medesima dimensione. c, L'effetto dei piccoli crateri su quelli grandi; d. Effetto totale del processo di degradazione operato dai nuovi crateri, ottenuto sommando i contributi a. b. e c. I cerchi grigi sono i nuovi crateri, i cerchi bianchi con contorno continuo rappresentano gli antichi crateri ancora visibili, i cerchi bianchi con contorno tratteggiato indicano quelli ormai invisibili.

Che è la forma cercata. L'equazione è simile a quella di Marcus (1964) [14]. I tassi di creazione λ e distruzione μ sono legati rispettivamente a

$$-\frac{d\dot{C}_t}{dr} \tag{2.20}$$

e

$$\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dC_t}{d\check{r}} k\check{r}^2 \, d\check{r} \tag{2.21}$$

e diventano ora slegati da una serie di complesse considerazioni geometriche, con elevata incertezza, che si erano rese necessarie nel suo studio, permettendo una caratterizzazione più precisa dello stato d'equilibrio.

2.3 Soluzione analitica

2.3.1 Modellizzazione del parametro di degradazione

L'equazione trovata dipende esplicitamente dal parametro di degradazione k, sulla cui natura non abbiamo ancora indagato.

Il parametro k varia, chiaramente, in funzione di $\check{r}$. Fissato r, abbiamo stabilito nella sezione precedente che, se $\check{r} > r$, i processi erosivi predominanti sono *cookie-cutting* e *ejecta-blanketing*, che abbiamo supposto puramente geometrici. Il *cookie-cutting* rappresenta una semplice sovrapposizione geometrica, pertanto k (che, come detto, rappresenta il "guadagno") vale esattamente 1. L'*ejecta-blanketing*, d'altra parte, fornisce un (piccolo) contributo aggiuntivo costante α_{eb}.

Se invece $\check{r} < r$, i processi importanti sono *ejecta-blanketing* e *sandblasting*. Quest'ultimo varia come funzione di ř/r: è ragionevole supporre che, diminuendo $\check{r}$, i tempi scala di erosione del cratere di raggio r crescano. Trattiamo questa proporzionalità come una legge di scala, introducendo un esponente, per ora ignoto, $b(r)$. Ricapitolando abbiamo:

$$k = \begin{cases} (1+\alpha_{eb})(\frac{\check{r}}{r})^{b(r)} & se \;\; \check{r} < r \\ 1+\alpha_{eb} & se \;\; \check{r} \geq r \end{cases} \tag{2.22}$$

Dove la costante (1+ α_{eb}) moltiplica anche la prima relazione in modo da avere la continuità di k per $\check{r} = r$.

2.3.2 La CSFD dello stato d'equilibrio

A questo punto, sostituendo nell'integrale che si trova nell'argomento dell'esponenziale dell'equazione (2.19) l'espressione di C_t ricavata nel primo paragrafo e qui riportata per comodità

$$C_{t(\geq r)} = A\xi X r^{-\eta} \tag{2.23}$$

E spezzando in due l'integrale in modo da considerare i due diversi k, otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dC_t}{d\check{r}} k\check{r}^2 \, d\check{r} &= -\eta A\xi X(1+\alpha_{eb}) \left[\int_{r_{min}}^{r} \left(\frac{\check{r}}{r}\right)^{b(r)} \check{r}^{-\eta+1} \, d\check{r} + \int_{r}^{r_{max}} \check{r}^{-\eta+1} \, d\check{r} \right] \\ &= -\eta A\xi X(1+\alpha_{eb}) \Big[\frac{r^{-\eta+2}}{-\eta+2+b(r)} \Big\{ 1 - \Big(\frac{r_{min}}{r}\Big)^{-\eta+2+b(r)} \Big\} + \frac{r^{-\eta+2}}{\eta-2} \Big\{ 1 - \Big(\frac{r_{max}}{r}\Big)^{-\eta+2} \Big\} \Big] \end{aligned} \tag{2.24}$$

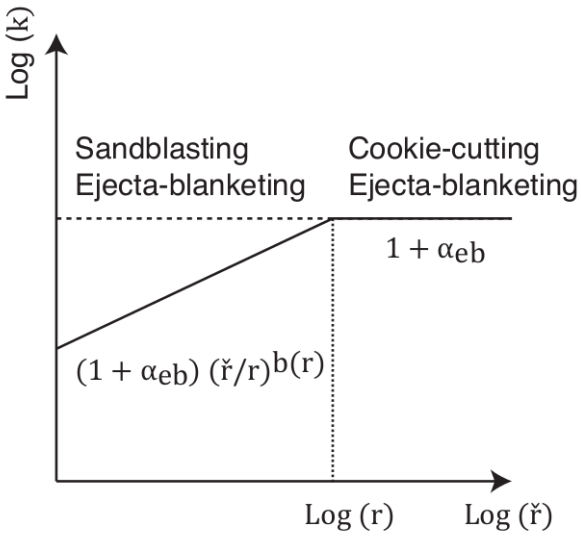

Figura 2.4: Rappresentazione schematica del parametro di degradazione k nello spazio log-log. Se $\check{r} \geq r$, k vale sempre $1+\alpha_{eb}$ poiché agiscono prevalentemente i contributi geometrici di cookie-cutting e ejecta-blanketing. Se $\check{r} < r$, i processi dominanti sono sandblasting e ejecta-blanketing. In questo caso, k è descritto dalla legge di potenza: $k = (1+\alpha_{eb})(\frac{\check{r}}{r})^{b(r)}$.

Per l'integrale a denominatore fuori dalla parentesi il risultato è identico, a patto di sostituire X con $\hat{x}$.

L'integrazione svolta ha senso se -$\eta + 2$ e -$\eta + 2 + b(r)$ sono diversi da 0. Vediamo come questo si traduce in ulteriori semplificazioni quando r_{min} e r_{max} tendono, rispettivamente, a 0 e ∞.

L'ultimo dei quattro addendi dell'equazione, se $\eta > 2$, è senz'altro <1. Perciò, se $r_{max}\to\infty$, esso si annulla. Il secondo degli addendi è tale che: $b(r) > 0$, -$\eta + 2 < 0$. Quindi, la loro somma può essere >0 o <0. Se fosse <0, il termine andrebbe all'∞ quando $r_{min}\to 0$. Questo equivale a dire che l'azione erosiva dei micrometeoriti, che sappiamo giocare un ruolo importante nell'evoluzione del numero di crateri [15], non dovrebbe lasciare alcuna traccia di crateri sulle superfici. Non essendo così, necessariamente -$\eta + 2 + b(r)$>0. L'addendo si annulla dunque nel limite $r_{min}\to 0$. L'equazione si semplifica:

$$\int_0^\infty \frac{dC_t}{d\check{r}} k\check{r}^2 \, d\check{r} = -\eta A \xi X (1+\alpha_{eb}) \left(\frac{1}{-\eta + 2 + b(r)} + \frac{1}{\eta - 2} \right) \tag{2.25}$$

A questo punto facciamo un'ulteriore assunzione: lo stato d'equilibrio, visto come funzione di r, segue una legge di potenza.[6] Dunque poniamo:

$$\alpha_{sc} r^\beta = \frac{1}{-\eta + 2 + b(r)} + \frac{1}{\eta - 2} \tag{2.26}$$

Con α_{sc} e β costanti. Rovesciando questa relazione si trova un'espressione per $b(r)$:

$$b(r) = \frac{\alpha_{sc} r^\beta (\eta - 2)^2}{\alpha_{sc} r^\beta (\eta - 2) - 1} \tag{2.27}$$

[6]Per un approfondimento riguardo la legittimità di tale assunzione si rimanda al capitolo *Conclusioni*.

In questa maniera possiamo scrivere

$$\int_0^\infty \frac{dC_t}{d\check{r}} k\check{r}^2 \, d\check{r} = -\eta A \xi X (1+\alpha_{eb}) \alpha_{sc} r^{-\eta+2+\beta} \tag{2.28}$$

e un'analoga espressione (con $\hat{x}$ al posto di X) vale per il denominatore del termine fuori dalla parentesi nell'eq. (2.19). Per t→∞, dato che X→∞, l'esponenziale della (2.19) si annulla e l'equazione si riduce a:

$$\frac{dC_c^\infty}{dr} = \frac{\frac{d\dot{C}_t}{dt}}{\frac{\pi}{Aq}\int_0^\infty \frac{d\dot{C}_t}{d\check{r}} k\check{r}^2 \, d\check{r}} = -\frac{Aq}{\pi(1+\alpha_{eb})\alpha_{sc}} r^{-3-\beta} \tag{2.29}$$

Integrando da r a ∞ si trova C_c^∞, cioè la CSFD dei crateri osservati a t=∞:

$$C_c^\infty = \frac{Aq}{\pi(1+\alpha_{eb})\alpha_{sc}(2+\beta)} r^{-2-\beta} \tag{2.30}$$

che coincide, ovviamente, con lo stato d'equilibrio del sistema.
La pendenza[7] di C_c^∞ è $2+\beta$, che è esattamente uguale a 2 quando $b(r)$ è costante.

Siamo giunti a un risultato importante. La pendenza dello stato d'equilibrio (o, in altri termini, l'esponente di scala della distribuzione *size-frequency* dei crateri osservati nelle condizioni d'equilibrio) è indipendente da ξ e da η, i parametri da cui dipende la *production function* (cfr. Gault, 1970 [16]; Gault et al., 1974 [17].). Tale configurazione dipende solo da β, legato a sua volta a $b(r)$, cioè, in ultima istanza, a caratteristiche del terreno. Dalla conoscenza di k possiamo cioè desumere informazioni fisiche sulla superficie. Tutto ciò è valido, ribadiamo, se e solo se $\eta - 2 > 0$.

Cosa succede quando $\eta - 2 < 0$? Abbiamo una CSFD con pendenza lieve, cioè in cui i grandi crateri sono, rispetto al caso precedente, maggiormente rappresentati. In questo caso il *cookie-cutting* diventa il processo erosivo più importante, come mostrato da J. Richardson (2009) [18]. Riprendendo l'equazione (2.24) e notando che, quando r_{max} diviene molto grande, il termine dominante è il quarto addendo, è lecito scrivere:

$$\int_0^{r_{max} \gg r} \frac{dC_t}{d\check{r}} k\check{r}^2 \, d\check{r} \propto r_{max}^{-\eta+2}, \tag{2.31}$$

costante. Dall'equazione (2.30) ricaviamo allora che $C_c^\infty \propto C_t$: la pendenza dell'equilibrio dipende da quella della CSFD dei crateri prodotti.

2.4 Evoluzione temporale della CSFD dei crateri prodotti

Abbiamo determinato la CSFD dei crateri prodotti in condizioni d'equilibrio, cioè nel limite t→∞. Per trovare la forma della CSFD al generico tempo finito t, ripartiamo dall'equazione (2.19), qui riportata per comodità:

$$\frac{dC_c}{dr} = -\frac{\frac{d\dot{C}_t}{dr}}{\frac{\pi}{Aq}\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{d\dot{C}_t}{d\check{r}} k\check{r}^2 \, d\check{r}} \Big[1 - exp\Big(\frac{\pi}{Aq}\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dC_t}{d\check{r}} k\check{r}^2 \, d\check{r}\Big)\Big] \tag{2.32}$$

[7] In valore assoluto.

Prendendo come prima i limiti $r_{max}\to\infty$, $r_{min}\to 0$, il termine fuori dalla parentesi diventa, come nel caso dell'equilibrio:

$$-\frac{\frac{d\dot{C}_t}{dr}}{\frac{\pi}{Aq}\int_0^\infty \frac{d\dot{C}_t}{d\check{r}} k\check{r}^2\, d\check{r}} = -\frac{Aq}{\pi(1+\alpha_{eb})\alpha_{sc}} r^{-3-\beta}, \tag{2.33}$$

mentre l'integrale nell'argomento dell'esponenziale si può scrivere come:

$$\int_0^\infty \frac{dC_t}{d\check{r}} k\check{r}^2\, d\check{r} = -\eta A\xi X(1+\alpha_{eb})\alpha_{sc} r^{-\eta+2+\beta}. \tag{2.34}$$

Complessivamente si ha:

$$\frac{dC_c}{dr} = -\frac{Aq}{\pi(1+\alpha_{eb})\alpha_{sc}} r^{-3-\beta}\Big[1 - exp\Big\{-\frac{\pi\eta\xi X}{q}(1+\alpha_{eb})\alpha_{sc} r^{-\eta+2+\beta}\Big\}\Big]. \tag{2.35}$$

Integrando quest'equazione troviamo:

$$C_c = \frac{Aq}{\pi(1+\alpha_{eb})\alpha_{sc}(2+\beta)} r^{-2-\beta} + \frac{Aq}{\pi(1+\alpha_{eb})\alpha_{sc}} \int_r^\infty \tilde{r}^{-3-\beta} exp\Big\{-\frac{\pi\eta\xi X}{q}(1+\alpha_{eb})\alpha_{sc}\tilde{r}^{-\eta+2+\beta}\Big\}\, d\tilde{r}. \tag{2.36}$$

L'integrale nell'ultima riga non è banale. Per risolverlo, cerchiamo di ricondurci alla funzione gamma di Eulero:

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t}\, dt. \tag{2.37}$$

Introduciamo la funzione gamma incompleta:

$$\Gamma(a, Z) = \int_Z^{+\infty} \tilde{z}^{a-1} e^{-\tilde{z}}\, d\tilde{z} \tag{2.38}$$

e la funzione gamma incompleta inferiore:

$$\gamma(a, Z) = \int_0^Z \tilde{z}^{a-1} e^{-\tilde{z}}\, d\tilde{z} \tag{2.39}$$

legate dalla relazione:

$$\Gamma(a, Z) + \gamma(a, Z) = \Gamma(a). \tag{2.40}$$

Detta allora:

$$f = \int_r^\infty r^{-3-\beta} exp(-\chi r^{-\eta+2+\beta})\, dr, \tag{2.41}$$

con

$$\chi = \frac{\pi\eta\xi X}{q}(1+\alpha_{eb})\alpha_{sc}, \tag{2.42}$$

effettuiamo il cambio di variabile:

$$Z = \frac{\chi}{r^{\eta-2-\beta}}, \tag{2.43}$$

da cui:

$$r = \Big(\frac{\chi}{Z}\Big)^{\frac{1}{\eta-2-\beta}}. \tag{2.44}$$

f assume allora la forma:

$$f = -\frac{1}{\eta-2-\beta}\left(\frac{1}{\chi}\right)^{\frac{2+\beta}{\eta-2-\beta}} \int_Z^0 Z^{\frac{2+\beta}{\eta-2-\beta}-1} exp(-Z)\, dZ$$
$$= -\frac{1}{\eta-2-\beta}\left(\frac{1}{\chi}\right)^{\frac{2+\beta}{\eta-2-\beta}} \gamma\left(\frac{2+\beta}{\eta-2-\beta}, Z\right). \quad (2.45)$$

La soluzione finale è:

$$C_c = \frac{Aq}{\pi(1+\alpha_{eb})\alpha_{sc}}\frac{1}{2+\beta}r^{-2-\beta} + \frac{Aq}{\pi(1+\alpha_{eb})\alpha_{sc}}\frac{1}{\eta-2-\beta}\left(\frac{1}{\chi}\right)^{\frac{2+\beta}{\eta-2-\beta}} \gamma\left(\frac{2+\beta}{\eta-2-\beta}, Z\right). \quad (2.46)$$

Inizialmente, entrambi i termini contribuiscono a C_c, che non differisce di molto da C_t. Col passare del tempo X aumenta e il secondo addendo diviene sempre più piccolo. Dunque C_c si avvicina sempre più a C_c^∞.

Capitolo 3

Esempio di applicazione pratica del modello

Avendo sviluppato, nelle pagine precedenti, un modello analitico per lo studio del problema dell'equilibrio, vorremmo applicarlo ora a dei casi concreti. Consideriamo dunque le CSFD dei crateri visibili di due regioni lunari[1]: 1) Sinus Medii, 2) sito di allunaggio dell'Apollo 15. Ricaveremo una stima del parametro $b(r)$ caratteristico del sandblasting, nonché, attraverso α_{sc}, β e η, delle CSFD di equilibrio e di produzione.

Riprendiamo anzitutto l'espressione di C_c nella sua forma integrale data dalla (2.36) e studiamone il comportamento atteso per piccoli e grandi r.

$$C_c = \frac{Aq}{\pi(1+\alpha_{eb})\alpha_{sc}(2+\beta)} r^{-2-\beta} + \frac{Aq}{\pi(1+\alpha_{eb})\alpha_{sc}} \int_r^\infty \tilde{r}^{-3-\beta} exp\Big\{-\frac{\pi\eta\xi X}{q}(1+\alpha_{eb})\alpha_{sc}\tilde{r}^{-\eta+2+\beta}\Big\}\, d\tilde{r}. \tag{3.1}$$

Vediamo cosa accade per piccoli r. Tipicamente $2+\beta > 0$ e $-\eta+2+\beta < 0$. Il primo termine, divergente per r→0, tende a divenire dominante sul secondo, che rimane finito a causa dell'esponenziale. Dunque C_c diviene sostanzialmente uguale a C_c^∞.

A grandi r l'argomento dell'esponenziale si avvicina a 0, perciò possiamo sviluppare in serie di Taylor:

$$\begin{aligned} C_c &\approx \frac{Aq}{\pi(1+\alpha_{eb})\alpha_{sc}(2+\beta)} r^{-2-\beta} + \frac{Aq}{\pi(1+\alpha_{eb})\alpha_{sc}} \int_r^\infty \tilde{r}^{-3-\beta}\Big\{1-\frac{\pi\eta\xi X}{q}(1+\alpha_{eb})\alpha_{sc}\tilde{r}^{-\eta+2+\beta}\Big\}\, d\tilde{r} \\ &= \frac{Aq}{\pi(1+\alpha_{eb})\alpha_{sc}(2+\beta)} r^{-2-\beta} + \frac{Aq}{\pi(1+\alpha_{eb})\alpha_{sc}}\Big\{\frac{-1}{(2+\beta)} r^{-2-\beta} + \frac{\pi\eta\xi X}{q\eta}(1+\alpha_{eb})\alpha_{sc} r^{-\eta}\Big\} \end{aligned} \tag{3.2}$$

che corrisponde a C_t, cumulativa della funzione di produzione. Nella regione centrale ci aspettiamo un comportamento intermedio, a causa della contemporanea presenza di entrambi gli addendi:

[1] La Luna è il corpo celeste del Sistema Solare interno che meglio conserva le tracce della sua storia craterica. A differenza di Mercurio, Marte e Venere, le aree lunari più intensamente craterizzate non sono state modificate significativamente dall'attività endogena e dunque preservano le prove degli antichi bombardamenti meglio di qualunque pianeta terrestre. Inoltre, la presenza dei mari separa nettamente gli impatti della fase caotica del *Late Heavy Bombardment* da quelli dell'epoca successiva a $\hat{x}$ pressappoco costante. Data la sua vicinanza alla Terra, sono infine disponibili migliori osservazioni delle superfici, nonché campioni di rocce che ne facilitano datazioni assolute.

potremo, in particolare, individuare un raggio di transizione tra i due regimi R_{tr}. Compiamo ora una traslazione temporale, aumentando il valore del parametro X e lasciando invariati gli altri: il secondo termine, come visto nel paragrafo *Soluzione Analitica*, decresce mentre il primo, indipendente da X, rimane invariato. R_{tr} si sposta verso destra: l'equilibrio viene raggiunto da crateri di dimensioni via via più grandi.

Siamo ora pronti ad analizzare i dati derivanti dalle osservazioni.

3.1 Sinus Medii

Gault [19], basandosi sulle immagini delle sonde Lunar Orbiter, ottenne la CSFD dei crateri osservati in questa regione equatoriale del satellite. Egli sfruttò il cosiddetto *nesting counting method*, consistente nell'individuare i grandi crateri da fotografie a grande campo e di bassa risoluzione, i piccoli da immagini ad alta risoluzione di piccole superfici.

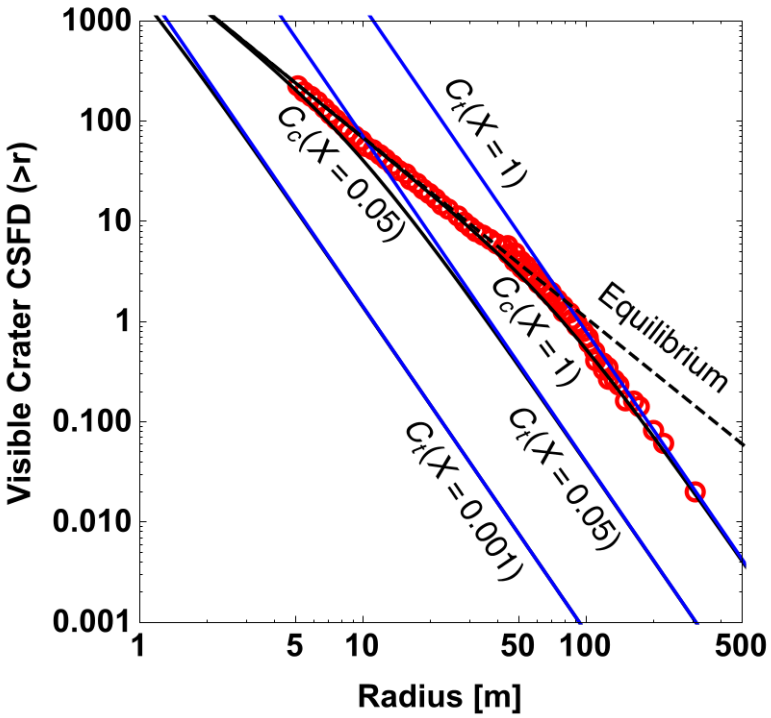

Figura 3.1: Applicazione del modello ai dati della regione Sinus Medii raccolti da Gault (1970), indicati come cerchietti rossi. L'area di riferimento è pari a 1 km^2. Le curve nere e le rette blu indicano rispettivamente le CSFD dei crateri visibili, C_c, e dei crateri prodotti, C_t. I tre valori di X, X = 0,001, 0,05 e 1 si riferiscono a tre diverse epoche. Col passare del tempo, un intervallo sempre maggiore di dimensioni di crateri raggiunge l'equilibrio.

Notiamo immediatamente che la CSFD -riferita a una superficie di area A=1 km^2- combina, come atteso, due comportamenti nettamente distinti. Interpolando linearmente i due gruppi di dati otteniamo:

$$C_t = 2,5 \times 10^6 m^{3,25} r^{-3,25} \tag{3.3}$$

$$C_c^{\infty} = 4,3 \times 10^3 m^{1,8} r^{-1,8} \tag{3.4}$$

Ci troviamo effettivamente nel caso $\eta > 2$, dunque possiamo proseguire nell'analisi. Confrontando C_t con la sua espressione teorica e scelto, per convenienza, il parametro libero t_s di modo che X=1, ricaviamo subito che

$$\xi = 2,5\, m^{1,25} \tag{3.5}$$

Variando X otteniamo una traslazione di C_t. Il raggio di transizione si sposta, in accordo con le considerazioni fatte in precedenza.

Dall'espressione di C_c^{∞} possiamo ricavare due informazioni importanti:

1) essendo $-2 - \beta = -1,8$, $\beta = -0,2$;
2) trascurando il contributo dovuto all'ejecta blanketing (α_{eb}=0), abbiamo una stima dell'unica incognita, α_{sc}:

$$4,3 \times 10^3 [m^{1,8}] = \frac{Aq}{\pi(2+\beta)\alpha_{sc}} = \frac{10^6 [m^2] \times 0,907}{\pi(2-0,2)\alpha_{sc}[m^{0,2}]}, \tag{3.6}$$

da cui

$$\alpha_{sc} = 37,3 [m^{0,2}]. \tag{3.7}$$

A questo punto, possiamo individuare l'intervallo di valori assunti dall'esponente di sandblasting, $b(r)$, dati da:

$$b(r) = \frac{\alpha_{sc} r^{\beta} (\eta - 2)^2}{\alpha_{sc} r^{\beta} (\eta - 2) - 1}. \tag{3.8}$$

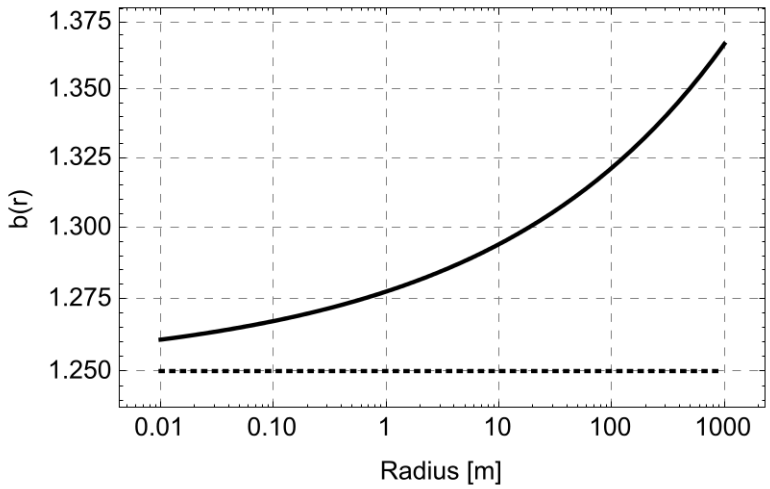

Figura 3.2: Variazione di $b(r)$ nel caso della regione Sinus Medii. $b(r)$ è rappresentato dalla curva in grassetto, sempre al di sopra del valore limite dato da $\eta - 2 = 1,25$.

Essi sono riportati in figura, in funzione di r. Si noti che la condizione su b imposta nello sviluppo della teoria, $b(r) > \eta - 2$, è sempre rispettata. I dati mostrano chiaramente che, come ci aspetteremmo intuitivamente, quanto più piccoli sono i nuovi crateri, tanto meno sono efficaci nell'eroderne uno grande.

Calcoliamo il punto di transizione tra i due regimi mettendo a sistema le equazioni per C_t e C_c^∞: [20]

$$2,5 \times 10^6 m^{3,25} r^{-3,25} = 4,3 \times 10^3 m^{1,8} r^{-1,8} \tag{3.9}$$

Da cui $R_{tr} = 80,6\,m$.

Studiamo ora il rapporto tra la densità di craterizzazione dello stato d'equilibrio e quella, limite, di saturazione geometrica. La CSFD per unità di superficie relativa alla saturazione geometrica è data da [21]:

$$C_{sat} = 1,54 \times d^{-2} = 0,385 \times r^{-2}. \tag{3.10}$$

Confrontando C_{sat} e C_{eq} per r=10 m:

$$\frac{C_{eq}}{C_{sat}}(r = 10m) = \frac{4,3 \times 10^3}{0,385 \times 10^6} \times 10^{0,2} = 1,77 \times 10^{-2} \tag{3.11}$$

L'equilibrio è raggiunto ben prima del limite di saturazione geometrica, in accordo con i dati provenienti da altre osservazioni e con le simulazioni di Gault [22].

3.2 Sito di allunaggio dell'Apollo 15

Applichiamo il modello a una seconda superficie: il sito di allunaggio dell'Apollo 15. I dati sono stati ricavati da uno degli autori del modello, C. I. Fassett, sulla base delle immagini del Lunar Reconnaissance Orbiter.[23]
Studiamo le due CSFD, normalizzate ad una superficie di area A=1 km^2 in modo da ricavare parametri direttamente confrontabili con quelli del caso precedente. La regione a pendenza ripida si estende all'incirca da 50 m a 131 m (raggio del massimo cratere). Il fit restituisce la legge di potenza:

$$C_t = 2,2 \times 10^6 m^{3,25} r^{-3,25}, \tag{3.12}$$

consistente -η è il medesimo- con la sua omologa del Sinus Medii. Scelto X=1, ricaviamo immediatamente:

$$\xi = 2,2\,m^{1,25} \tag{3.13}$$

Il fit della zona d'equilibrio restituisce invece:

$$C_c^\infty = 4,6 \times 10^3 m^{1,8} r^{-1,8}, \tag{3.14}$$

Da cui immediatamente $\beta = -0,2$, come nel caso precedente. Supponendo che α_{eb} sia trascurabile, ricaviamo α_{sc}:

$$\alpha_{sc} = 34,9\,m^{-0,2}. \tag{3.15}$$

L'intervallo di valori assunto da $b(r)$ è mostrato in grafico. I risultati sono, ancora una volta, paragonabili ai precedenti.
Ricaviamo infine il raggio di transizione:

$$2,2 \times 10^6 m^{3,25} r^{-3,25} = 4,6 \times 10^3 m^{1,8} r^{-1,8}, \tag{3.16}$$

Da cui $R_{tr} = 70,5\,m$.

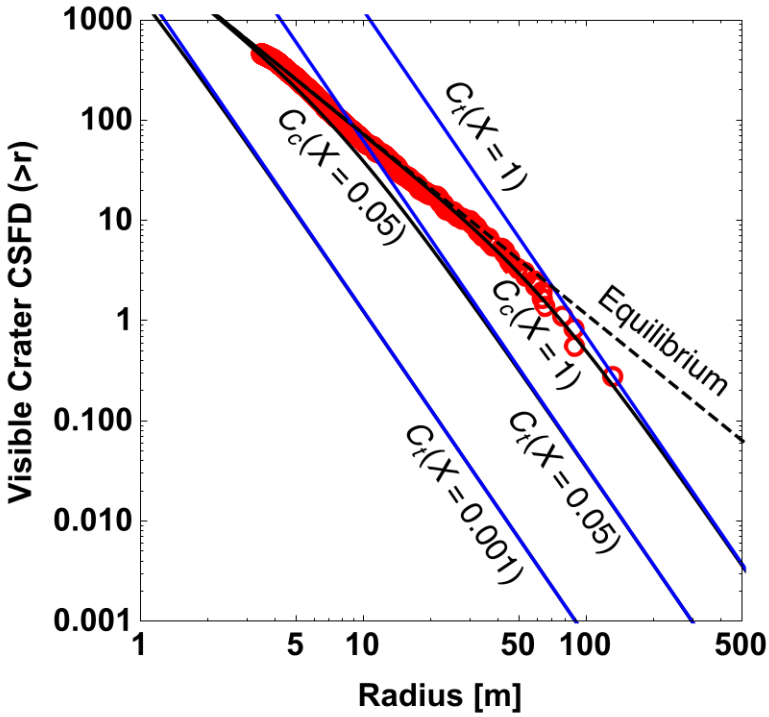

Figura 3.3: Applicazione del modello ai dati relativi alla regione dell'allunaggio di Apollo 15, raccolti da Robbins et al. (2014). Per il significato delle diverse curve si faccia riferimento alla figura 3.1.

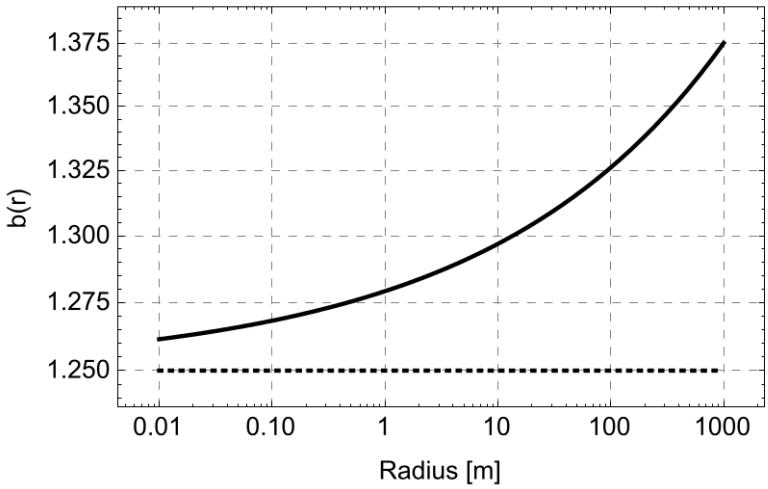

Figura 3.4: Variazione di $b(r)$ nel caso del sito di allunaggio di Apollo 15.

3.3 Stima delle datazioni relative e del flusso di impattori

La dipendenza temporale -nascosta in X- di R_{tr} ci permetterebbe di dedurre una datazione assoluta della superficie studiata, qualora fossimo in possesso di un'ulteriore informazione: una stima ragionevole della *production function*, definita nella (2.1). Mostriamo comunque che è possibile ricavare una valutazione affidabile della datazione relativa. Mettiamo ancora a sistema le equazioni per C_t e C_c^∞, scritte stavolta esplicitando tutte le dipendenze dai parametri:

$$A\sigma\hat{x}tr^{-\eta} = \frac{Aq}{\pi\alpha_{sc}(2+\beta)}r^{-2-\beta} \tag{3.17}$$

$$\iff R_{tr}^{\eta-2-\beta} = \frac{\sigma\hat{x}t\pi\alpha_{sc}(2+\beta)}{q} \tag{3.18}$$

Dove si è fatta l'ipotesi di chronology function costante nel tempo.[2]

Calcolando quest'ultima espressione per ognuna delle due superfici e facendone il rapporto, si elide la dipendenza da $\sigma\hat{x}$:

$$\frac{t_2}{t_1} = \left(\frac{R_{tr,2}}{R_{tr,1}}\right)^{1,45} \times \frac{37,3}{34,9} = 0,878, \tag{3.19}$$

laddove le quantità di Sinus Medii sono indicate col pedice 1, le quantità di Apollo 15 col 2. Confrontiamo la stima con i dati sperimentali. H. Hiesinger et al (2010) stimano l'età dei basalti della regione Sinus Medii in 3,63-3,79 miliardi di anni [24]. I campioni prelevati dalla missione Apollo 15 mostrano un'età, misurata con tecniche radiometriche, più giovane, compresa tra 3,30 e 3,35 miliardi di anni. Risulta dunque:

$$\frac{t_{2,sper}}{t_{1,sper}} = \frac{3,325Gyr}{3,710Gyr} = 0,897, \tag{3.20}$$

che differisce dalla nostra stima di circa il 2%.

Concludiamo la nostra trattazione andando a fare un esempio di calibrazione del modello sulla base del conteggio dei crateri e delle datazioni assolute. Riprendiamo le formule della *production function* e della *production population*:

$$P_{(\geq r)} = \sigma\hat{x}r^{-\eta} \tag{3.21}$$

$$C_{t(\geq r)} = A\xi Xr^{-\eta} \tag{3.22}$$

Dal momento che il fit dei dati sperimentali ci ha permesso di ottenere una stima di ξ, la cui espressione esplicita è data da:

$$\xi = \sigma\int_0^{t_s} \hat{x}\,dt \tag{3.23}$$

E supponendo, come sopra, $\hat{x} = cost$, $\xi = \sigma\hat{x}t$ e dunque P:

$$P_{(\geq r)} = \frac{\xi}{t}r^{-\eta} = 6,62\times10^{-10}\times r^{-\eta}, \tag{3.24}$$

[2] Il problema della ricostruzione della chronology function, ossia dell'evoluzione del tasso di impatti nella storia del Sistema Solare interno, è stato già accennato al paragrafo 1.2.1. Dall'analisi delle superfici lunari è noto che, a seguito di un'intensa fase di bombardamento nota come *Late Heavy Bombardment*, avvenuta tra 4,1 e 3,8 miliardi di anni fa, il flusso di impattori si è stabilizzato su un andamento regolare, sebbene leggermente decrescente nel tempo. Nuovi impattori giungono continuamente nel Sistema Solare interno dalla fascia degli asteroidi a causa della combinazione di influenze solari (effetto Yarkovsky, effetto YORK) e gioviane (risonanze). Non è insensato allora considerare, per i nostri scopi, un valore medio costante di $\hat{x}$.

dove la costante moltiplicativa ha unità di misura $m^{\eta-2}yr^{-1}$. Scelto, ad esempio, r=500 m, otteniamo il flusso di impattori aventi dimensione ≥500 m:

$$P = 1,12 \times 10^{-18} m^{-2} yr^{-1}, \tag{3.25}$$

sostanzialmente identico al flusso medio ricavabile dall'espressione di Hartmann et al. (2009).[3] [26]

[3]Tasso di produzione di Hartmann (crateri di D>1 km/km^2 per 200 Myr) $= 4,66 \times 10^{-5}T + 5,59 \times 10^{-5}$, T misurato in Gyr. Posto T=3,325, $P_{Hartmann} = 1,04 \times 10^{-18} m^{-2} yr^{-1}$.

Capitolo 4

Conclusioni

Il modello sviluppato nel corso di questa trattazione riesce a cogliere diverse caratteristiche salienti del processo d'equilibrio, basandosi su un numero limitato di assunzioni. In assenza di processi erosivi atmosferici, la degradazione dei vecchi crateri presenti su una superficie è additabile unicamente alla formazione di nuovi crateri. L'evoluzione temporale della CSFD dei crateri osservati è data da un'equazione differenziale del primo ordine avente un termine di accumulazione, essenzialmente legato alla production function, e uno di degradazione, regolato da un parametro di degradazione k che quantifica l'efficienza del processo erosivo. La soluzione analitica mostra un chiaro comportamento asintotico verso uno stato d'equilibrio, caratterizzato da una densità di craterizzazione decisamente inferiore a quella di saturazione. Il parametro k, che da considerazioni geometriche sappiamo essere maggiore di 1, tiene conto di tre distinti processi erosivi: cookie-cutting, ejecta blanketing e sandblasting. I primi due, che dominano quando il raggio del nuovo cratere è maggiore di quello del vecchio, sono puramente geometrici nell'ipotesi, ragionevole, di superficie fisicamente omogenea; quando invece $r_{nuovo} < r_{vecchio}$, il meccanismo di sandblasting, diffusivo, diviene importante e ciò si traduce in una legge di scala per k con esponente dipendente da r.

Proseguendo nello sviluppo della soluzione analitica, abbiamo ipotizzato che l'equilibrio sia caratterizzato da un'unica legge di scala. Questa scelta si accorda spesso coi dati osservativi ma, come mostrato da Robbins et al. (2014)[25], può verificarsi che la pendenza dell'equilibrio vari con r. In questi casi si rende doverosa la ricerca di forme più raffinate per l'equazione (2.26).

Abbiamo motivato analiticamente un importante risultato, noto già ad altri autori: la pendenza dello stato d'equilibrio è indipendente dalla production function quando la pendenza di quest'ultima è >2. Se invece questa è più lieve, quella ne diviene dipendente. L'intervallo di dimensioni di crateri considerato è stato esteso a [0, ∞] per cancellare due termini nell'equazione (2.24). Non si è tenuto conto, tuttavia, di effetti di cutoff legati sia alle dimensioni del corpo celeste, sia alla scelta arbitraria dei confini dell'area da investigare. L'influenza dello sperimentatore emerge altresì nel processo stesso di *crater counting*, assieme a una serie di fattori come l'illuminazione solare, le condizioni superficiali e la risoluzione delle immagini. Una certa arbitrarietà è intrinseca nella quantificazione della degradazione di un cratere. Il modello, a tal proposito, non distingue degradazione e cancellazione, né tantomeno effetti tridimensionali (riempimento delle depressioni) e bidimensionali (cancellazione del bordo).

Abbiamo successivamente applicato il modello ai dati osservativi provenienti da due regioni lunari. La CSFD dei crateri osservati, plottata in scala doppiamente logaritmica, mostra chiaramente due diversi comportamenti per piccoli e grandi raggi, interpolabili da due rette distinte. Tale risultato è ricavabile dal comportamento asintotico della CSFD del modello per piccoli e grandi raggi, che tende a coincidere, rispettivamente, con le CSFD dell'equilibrio e della production function. Il raggio di transizione tra i due regimi si sposta verso destra col passare del tempo: l'equilibrio viene raggiunto via via da crateri di dimensioni sempre maggiori. Per $t \to \infty$, la CSFD dei crateri osservati viene cioè a coincidere con l'equilibrio.

Ottenute le due stime del parametro di degradazione k -a patto di trascurare gli effetti dell'ejecta blanketing- e delle pendenze delle diverse leggi di scala, se ne è accertata la compatibilità. Si è stimata correttamente, da confronto dei raggi di transizione, l'età relativa delle due superfici: nota la funzione di produzione, il modello è dunque capace di effettuare datazioni assolute.

Bibliografia

[1] Galilei, G., 1610. *Sidereus Nuncius*, pg. 119-120.

[2] Hooke, R., 1666. *Micrographia*, Observ. LX Of the Moon.

[3] Neukum, G., Ivanov, B. A., Gehrels, T., *Hazards due to Comets and Asteroids*, 1994 Tucson University of Arizona Press, pg. 359-416.

[4] Öpik, E., Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 1960, vol. 120 (pg. 404-11).

[5] Hartmann, W. K., Icarus, 1965, vol. 4, pg. 157-165.

[6] Neukum, G., Ivanov, B. A., Gehrels, T., op. cit.

[7] Neukum, G., Ivanov, B. A., Hartmann, W. K., 2001. *Cratering records in the inner solar system in relation to the lunar reference system.*

[8] Melosh, H. J., 1989. *Impact cratering: A geologic process.* Oxford University Press, pg 190.

[9] Melosh, H. J., op. cit.

[10] Fassett, C. I., Thomson, B. J., 2014. *Crater degradation on the lunar maria: Topographic diffusion and the rate of erosion on the moon.*

[11] Hirabayashi, M., Minton, D. A., Fassett, C. I., 2017. *An analytical model of crater count equilibrium.*

[12] Crater Analysis Techniques Working Group, 1979. *Standard techniques for presentation and analysis of crater size-frequency data.* Icarus 37 (2), 467–474.

[13] Gault, D. E., Hörz, F., Brownlee, D., Hartung, J., 1974. *Mixing of the lunar regolith* In: *Lunar and Planetary Science Conference Proceedings.* Vol. 5. pp. 2365–2386.

[14] Marcus, A., 1964. *A Stochastic Model of the Formation and Survival of Lunar Craters: I. Distribution of Diameter of Clean Craters.* Icarus 3, 460–472.

[15] Melosh, H. J., 2011. *Planetary surface processes.* Vol. 13. Cambridge University Press.

[16] Gault, D. E., Hörz, F., Brownlee, D., Hartung, J., op. cit..

[17] Gault, D. E., 1970. *Saturation and equilibrium conditions for impact cratering on the lunar surface: Criteria and implications.* Radio Science 5 (2), 273–291.

[18] Richardson, J. E., 2009. *Cratering saturation and equilibrium: A new model looks at an old problem.* Icarus 204 (2), 697–715

[19] Gault, D. E., 1970, op. cit.

[20] Melosh, H. J., 1989, op. cit., pag. 194

[21] Melosh, H. J., 1989, op. cit., pag. 192

[22] Melosh, H. J., 1989, op. cit., pag. 192

[23] Robbins, S. J., Antonenko, I., Kirchoff, M. R., Chapman, C. R., Fassett, C. I., Herrick, R. R., Singer, K., Zanetti, M., Lehan, C., Huang, D., et al., 2014. *The variability of crater identification among expert and community crater analysts.* Icarus 234, 109–131.

[24] Hiesinger, H., Head III, J. W., Wolf, U., Jaumann, R., Neukum, G., 2010. *Ages and stratigraphy of lunar mare basalts in Mare Frigoris and other nearside maria based on crater size-frequency distribution measurements*, Journal of Geophysical Research, Volume 115, Issue E3, March 2010

[25] Robbins, S. J., Antonenko, I., Kirchoff, M. R., Chapman, C. R., Fassett, C. I., Herrick, R. R., Singer, K., Zanetti, M., Lehan, C., Huang, D., et al., op. cit.

[26] Hartmann, W.K., Quantin, C., Mangold, N., 2007: Possible long-term decline in impact rates. 2. Lunar impact-melt data regarding impact history. Icarus 186, 11-23.