UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei"

Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita"

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Metodi variazionali per problemi di equilibrio in elasticità non lineare

Relatore
Prof. Giulio Giusteri
Correlatore
Prof. Sandro Azaele

Laureando
Bernardo Ardini

Anno Accademico 2023/2024

Premessa

Lo scopo di questa tesi è presentare la teoria del matematico J.M. Ball sull'esistenza di soluzioni per il seguente problema di equilibrio in elasticità non lineare: determinare la deformazione di equilibrio di un corpo elastico fissate le condizioni al bordo sulla forma della superficie (*problema al bordo di piazzamento*) o sugli sforzi agenti su di essa (*problema al bordo di trazione*), oppure una combinazione delle due condizioni (*problema al bordo misto di piazzamento e trazione*).

Il problema ammette una formulazione variazionale. Essa è stata stabilita in un lavoro di Green [8] del 1839 dove viene preso in considerazione il problema al bordo di trazione nello studio della riflessione e della rifrazione della luce nell'interfaccia tra due mezzi, pensati come continui elastici. La formulazione variazionale per il problema al bordo di piazzamento, questa volta in un contesto genuinamente meccanico, è apparsa in un libro di Hadamard sulla propagazione delle onde [11] del 1903. Il problema misto si trova per la prima volta in un articolo di Hellinger [12] del 1914. Una dimostrazione dell'esistenza di soluzioni del problema variazionale nel contesto degli spazi di Sobolev è stata ottenuta da J.M. Ball [2] nel 1976 utilizzando il *metodo diretto* del Calcolo delle Variazioni.

La ricerca delle ipotesi sotto cui l'esistenza è effettivamente garantita è collegata con il problema di determinare delle restrizioni generali sulle possibili *relazioni costitutive*, ovvero le relazioni che caratterizzano il comportamento specifico di un materiale. Questo problema è stato definito da Truesdell e Noll [vedi 15, p. 47] il *principale problema aperto della teoria del comportamento dei materiali*:

> [...] constitutive equations must satisfy other basic requirements. [...] they should insure that physically reasonable problems have physical reasonable solutions. [...] To find a fully general, complete, and precise statement of these requirements we regard as the *main open problem of the theory of material behavior*.

Organizzazione del materiale

Nel Capitolo 1 vengono presentati alcuni risultati di Analisi Funzionale che verranno utilizzati per dimostrare il teorema di esistenza. Nel Capitolo 2 viene richiamata la teoria generale della statica dei corpi continui e alcuni aspetti della Teoria dell'Elasticità. La formulazione del problema variazionale su cui è incentrata la tesi è presentata nel Capitolo 3 dove viene fornita la dimostrazione del teorema di J.M. Ball sull'esistenza delle soluzioni. Il Capitolo 4 è dedicato allo studio delle equazioni di Eulero–Lagrange associate al problema variazionale. Nel Capitolo 5 vengono discusse le ipotesi del teorema di esistenza ed infine nel Capitolo 6 viene esemplificata l'applicabilità del teorema al modello di Mooney–Rivlin utilizzato per modellare materiali elastici simili alla gomma.

Convenzioni sui simboli

Gli insiemi di matrici di uso frequente verranno indicati con i simboli seguenti.

Mat	matrici 3×3
Mat^+	matrici 3×3 con determinante strettamente positivo
Sym	matrici 3×3 simmetriche
Sym^+	matrici 3×3 simmetriche con determinante strettamente positivo
Orth	matrici 3×3 ortogonali
Orth^+	matrici 3×3 di rotazione

Nello spazio Mat useremo il prodotto scalare $A \cdot B = \mathrm{tr}(A^T B)$ e la norma euclidea $|A| = \sqrt{A \cdot A}$. Chiameremo $\mathbb{R}^N_+ = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x_i > 0 \text{ per ogni } i = 1, \ldots, N\}$ e $B(y, r) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x - y| < r\}$. Utilizzeremo l'abbreviazione "q.o." intendendo che una proprietà è valida quasi ovunque rispetto alla misura di Lebesgue. Per indicare una disuguaglianza a meno di fattori positivi inessenziali useremo il simbolo $\lesssim$. Inoltre faremo uso sistematicamente della convenzione di Einstein sugli indici ripetuti.

Indice

1 Alcuni risultati di Analisi Funzionale **1**
1.1 Teoremi fondamentali in Analisi Funzionale 1
1.1.1 Convergenza debole 1
1.1.2 Spazi riflessivi 1
1.1.3 Il lemma di Mazur 2
1.1.4 Funzionali inferiormente semicontinui 2
1.1.5 Alcuni utili risultati sugli spazi L^p 2
1.2 Spazi di Sobolev 3
1.2.1 Motivazione 3
1.2.2 Lo spazio di Sobolev $W^{1,p}$ 3

2 Elementi di Meccanica dei Continui e della Teoria dell'Elasticità **5**
2.1 Statica dei corpi continui 5
2.1.1 Deformazione di un corpo continuo 5
2.1.2 Equazione di bilancio delle forze 5
2.2 Corpi elastici e relazioni costitutive 6
2.2.1 Materiali iperelastici 6
2.2.2 Teorema di decomposizione polare 7
2.2.3 Invarianti principali 7
2.2.4 Principio di indifferenza materiale 7
2.2.5 Materiali isotropi 8
2.2.6 Alcuni teoremi di rappresentazione per funzione isotrope 9

3 Teorema di esistenza per un problema di equilibrio in elasticità non lineare **10**
3.1 Descrizione del problema al bordo 10
3.2 Formulazione variazionale 10
3.3 Formulazione debole e teorema di esistenza 11
3.3.1 Alcuni lemmi tecnici 11
3.3.2 Spazio di ammissibilità 14
3.3.3 Un altro lemma tecnico 14
3.3.4 Ipotesi sul funzionale 15
3.3.5 Teorema di esistenza 16

4 Equazioni di Eulero–Lagrange **18**
4.1 Equazioni di Eulero–Lagrange in coordinate materiali 18
4.2 Equazioni di Eulero–Lagrange in coordinate spaziali 19

5 Disuguaglianze costitutive in elasticità non lineare **21**
5.1 Un'analogia con un sistema termodinamico omogeneo 21
5.2 Convessità 21
5.3 Policonvessità 22
5.4 Convessità di rango 1 22

6 Il modello di Mooney–Rivlin **24**
6.1 Densità di energia elastica del modello di Mooney–Rivlin 24
6.2 Applicabilità del teorema di esistenza 24
6.3 Applicabilità dei teoremi sulle equazioni di Eulero–Lagrange 25
6.4 Un esempio 27

Capitolo 1

Alcuni risultati di Analisi Funzionale

In questo capitolo riassumiamo alcuni risultati di Analisi Funzionale e introduciamo gli spazi di Sobolev. Questi strumenti analitici sono indispensabili nello studio dei problemi al bordo nella teoria delle equazioni differenziali alle derivate parziali e nel Calcolo delle Variazioni.

1.1 Teoremi fondamentali in Analisi Funzionale

Sia E uno spazio di Banach. Esso è dotato della *topologia forte* indotta dalla norma $\|\cdot\|$. Indicheremo con E' lo spazio duale, ovvero l'insieme dei funzionali $E \mapsto \mathbb{R}$ lineari e continui rispetto a questa topologia. Risulta conveniente introdurre una topologia ulteriore a quella forte, detta *topologia debole*, di cui ora discutiamo.

1.1.1 Convergenza debole

Nella nostra trattazione sarà in realtà sufficiente la nozione di convergenza debole per successioni. Una descrizione completa della topologia debole si può trovare in [5].

Definizione 1.1. Una successione $\{x_n\} \subset E$ converge debolmente ad $x \in E$, e si scrive $x_n \rightharpoonup x$ in E, se per ogni $f \in E'$ si ha $\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.

Proposizione 1.2. Valgono le seguenti affermazioni.

(i) La convergenza forte implica la convergenza debole.

(ii) Una successione debolmente convergente è limitata in norma.

Dimostrazione. Si veda per esempio la Proposizione 3.5 in [5]. □

Un'altra utile proprietà delle topologie deboli è la seguente.

Proposizione 1.3. Siano E ed F spazi di Banach. Un operatore lineare $T: E \to F$ è continuo rispetto alle topologie forti se e solo se lo è rispetto alle topologie deboli.

Dimostrazione. Vedi Teorema 3.10 in [5]. □

1.1.2 Spazi riflessivi

È noto che una successione limitata in $\mathbb{R}^N$ ammette una sottosuccessione convergente. Questo risultato non è più vero in generale sugli spazi di Banach. Tuttavia sotto un'ipotesi opportuna, ovvero che lo spazio di Banach sia *riflessivo*, una successione limitata in norma ammette una sottosuccessione *debolmente* convergente. L'utilità di questo fatto motiva l'introduzione della topologia debole.

Prima di presentare la definizione di spazio di Banach riflessivo, osserviamo che uno spazio di Banach E è incluso in modo naturale in E'' nel modo seguente: dato un elemento $x \in E$, ad esso corrisponde il funzionale lineare e continuo F_x che agisce su E' con $\langle F_x, f \rangle = \langle f, x \rangle$ per $f \in E'$.

Definizione 1.4. Sia E uno spazio di Banach. Esso si dice riflessivo se l'inclusione $E \hookrightarrow E''$ è suriettiva.

Il risultato che abbiamo anticipato è appunto il seguente.

Proposizione 1.5. Sia E uno spazio di Banach riflessivo. Sia $\{x_n\} \subset E$ una successione limitata in norma. Allora essa ammette una sottosuccessione debolmente convergente in E.

Idea della dimostrazione. Consideriamo il sottospazio generato dagli x_n. Questo è ovviamente separabile. Ora la separabilità è collegata con la metrizzabilità della topologia debole della palla unitaria di E'. Utilizzando la riflessività è possibile trasportare la proprietà di metrizzabilità della topologia debole della palla unitaria di E' a quella della palla unitaria di E. Da cui la tesi seguirebbe.

Si veda il Corollario 3.18 in [5] per dettagli. □

1.1.3 Il lemma di Mazur

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che da una successione limitata in uno spazio di Banach riflessivo, possiamo estrarre una sottosuccessione debolmente convergente. In generale invece non esisterà una sottosuccessione fortemente convergente.

Il lemma di Mazur garantisce però la possibilità di costruire una successione fortemente convergente a partire da una successione debolmente convergente.

Teorema 1.6 (lemma di Mazur). Sia $x_n \rightharpoonup x$ in E. Allora esiste una successione fatta di combinazioni lineari finite convesse degli x_n della forma

$$y_n = \sum_{k=n}^{N(n)} \lambda_k^{(n)} x_k \quad \text{dove } N(n) \in \mathbb{N},\ \lambda_k^{(n)} \geq 0 \text{ e } \sum_{k=n}^{N(n)} \lambda_k^{(n)} = 1,$$

che converge fortemente ad x in E.

Dimostrazione. Si veda [6, p. 6]. □

1.1.4 Funzionali inferiormente semicontinui

Definizione 1.7. Sia X uno spazio topologico. Una funzione $J\colon X \to (-\infty, \infty]$ si dice inferiormente semicontinua per successioni in X se per ogni sequenza $x_n \to x$ in X si ha

$$J(x) \leq \liminf_{n\to\infty} J(x_n).$$

Ci servirà il seguente risultato.

Proposizione 1.8. Sia E uno spazio di Banach. Se $J\colon E \to (-\infty, \infty]$ è un funzionale fortemente continuo e convesso, allora J è debolmente inferiormente semicontinuo per successioni.

Dimostrazione. Vedi Corollario 3.9 in [5]. □

1.1.5 Alcuni utili risultati sugli spazi L^p

In questo paragrafo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è un aperto e $1 \leq p < \infty$. Escludiamo sistematicamente il caso $p = \infty$. Indicheremo con $p' = \frac{p}{p-1}$ l'esponente coniugato a p.

Definizione 1.9. Chiamiamo $L^p(\Omega)$ l'insieme delle funzioni $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ Lebesgue misurabili tali che $\int_\Omega |f|^p dx < \infty$. Inoltre diremo che $f \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ se $f\chi_K \in L^p(\Omega)$ per ogni K compatto contenuto in Ω, dove χ_K indica la funzione caratteristica di K.

Nota. Due funzioni in $L^p(\Omega)$ che differiscono solo su un insieme di misura nulla vengono identificate.

Proposizione 1.10. Lo spazio $L^p(\Omega)$ dotato dello norma $\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{1/p}$ è uno spazio di Banach. È riflessivo per $p > 1$.

Dimostrazione. Vedi Teorema 4.10 in [5]. □

Dal momento che le funzioni di L^p non sono necessariamente regolari è utile poterle approssimare tramite funzioni di classe C^∞. La tecnica che di solito si utilizza a questo proposito fa uso dei *mollificatori*.

Definizione 1.11. Una successione di mollificatori è una successione $\{\rho_n\} \subset C^\infty(\mathbb{R}^N)$ con la proprietà che $\rho_n \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n dx = 1$ e $\operatorname{supp} \rho_n \subset B(0, 1/n)$.

Vale il seguente risultato.

Proposizione 1.12. Sia $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Se $\{\rho_n\}$ è una successione di mollificatori, allora, indicando con $*$ il prodotto di convoluzione, $\rho_n * f \in C^\infty(\Omega)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n * f) = \frac{\partial \rho_n}{\partial x_i} * f$. Inoltre $\rho_n * f \to f$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Dimostrazione. Si veda Teorema 4.22 in [5]. □

Faremo uso della seguente proposizione.

Proposizione 1.13 (lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni)**.** Sia $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega f\phi dx = 0 \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Allora $f = 0$ q.o. su Ω.

Dimostrazione. Vedi Corollario 4.24 in [5]. □

Riportiamo anche il seguente lemma che ci tornerà utile.

Lemma 1.14. Siano $1 \leq q < p$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto limitato. Se $f \in L^p(\Omega)$ allora $f \in L^q(\Omega)$ ed esiste $C > 0$ tale che $\|f\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^p(\Omega)}$.

Dimostrazione. Se $f \in L^p(\Omega)$ allora $|f|^q \in L^{p/q}(\Omega)$. Inoltre la funzione identicamente pari ad uno è un elemento di $L^{(p/q)'}(\Omega)$ perché Ω è limitato. Pertanto per la disuguaglianza di Hölder

$$\int_\Omega |f|^q dx \leq \left(\int_\Omega 1 dx\right)^{\frac{1}{(p/q)'}} \left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{q/p}.$$

Da cui

$$\left(\int_\Omega |f|^q dx\right)^{1/q} \leq (\operatorname{vol}\Omega)^{1-q/p} \left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{1/p},$$

che è la tesi ponendo $C = (\operatorname{vol}\Omega)^{1-q/p}$. □

Il seguente teorema caratterizza gli spazi duali degli spazi L^p.

Teorema 1.15 (Teorema di rappresentazione di Riesz)**.** Sia $F \in L^p(\Omega)'$. Allora esiste un unica $h \in L^{p'}(\Omega)$ tale che

$$\langle F, f \rangle = \int_\Omega hf dx \quad \forall f \in L^p(\Omega),$$

dove $p' = \frac{p}{p-1} = \infty$ se $p = 1$.

Dimostrazione. Si vedano Teoremi 4.11 e 4.14 in [5] □

1.2 Spazi di Sobolev

1.2.1 Motivazione

Nella teoria delle PDE è un procedimento comune quello di riformulare un problema al bordo in senso debole estendendo la ricerca delle soluzioni ad uno spazio funzionale i cui elementi sono funzioni le cui derivate sono definite in senso debole, solitamente uno *spazio di Sobolev*. Una volta stabilita l'esistenza della soluzione debole occorre dimostrare che è anche una soluzione classica cioè derivabile tante volte almeno quanto l'ordine dell'equazione differenziale: per il problema affrontato in questa tesi questo ultimo passaggio è ancora aperto e non verrà discusso.

1.2.2 Lo spazio di Sobolev $W^{1,p}$

Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto e $1 \leq p < \infty$. Indichiamo con $\mathscr{D}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni di test, cioè lo spazio delle funzioni $C^\infty(\Omega)$ con supporto compatto contenuto in Ω, e con $\mathscr{D}'(\Omega)$ lo spazio delle distribuzioni[1] sull'aperto Ω.

[1] Lo spazio $\mathscr{D}(\Omega)$ viene dotato di una topologia per cui una successione $\{\phi_n\} \subset \mathscr{D}(\Omega)$ converge a 0 se supp $\phi_n \subset K$ per ogni n, con $K \subset \Omega$ compatto e ϕ_n, così come tutte le sue derivate parziali di qualunque ordine, tende uniformemente a 0 in K. Una distribuzione $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ è dunque un funzionale lineare e continuo da $\mathscr{D}(\Omega)$ in $\mathbb{R}$.

Definizione 1.16. Lo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni $L^p(\Omega)$ con derivate distribuzionali $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ in $L^p(\Omega)$ ovvero

$$W^{1,p}(\Omega) = \Bigg\{ u \in L^p(\Omega) \,\Bigg|\, \text{esistono } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \text{ t.c. } \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \phi dx, \\ \text{per ogni } \phi \in \mathscr{D}(\Omega) \text{ e } i = 1, \dots, N \Bigg\},$$

dotato della norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} \qquad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Nota. Se $u\colon \Omega \to \mathbb{R}^M$ scrivendo $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^M)$ intenderemo che ogni sua componente è in $W^{1,p}(\Omega)$. Spesso scriveremo semplicemente $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e sarà chiaro dal contesto quale sarà l'immagine. Lo spazio $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^M)$ è dotato della norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^M \|u_i\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \right)^{1/p}.$$

I risultati sugli spazi di Sobolev riportati di seguito sono quelli che utilizzeremo nel seguito della tesi. Si possono trovare in [7] e [5].

Proposizione 1.17. $W^{1,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach. È riflessivo per $p > 1$.

Proposizione 1.18. Sia Ω limitato e $1 \le p < \infty$. Allora $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ è denso in $W^{1,p}(\Omega)$.

Proposizione 1.19. Sia $F \in C^1(\mathbb{R})$ tale che F' sia limitata. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ allora $F(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ e $\frac{\partial F(u)}{\partial x_i} = F'(u) \frac{\partial u}{\partial x_i}$ per ogni $i = 1, \dots, N$.

Il seguente teorema permette di dare senso alla restrizione sulla frontiera di una funzione di uno spazio di Sobolev, che non è in generale continua su $\overline{\Omega}$.

Teorema 1.20 (Teorema di traccia)**.** Sia $1 \le p < \infty$ e Ω limitato con frontiera di classe C^1. Allora esiste un unico operatore lineare fortemente continuo

$$T\colon W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

tale che $Tu = u|_{\partial\Omega}$ per $u \in W^{1,p} \cap C(\overline{\Omega})$. L'immagine Tu di u si chiama *traccia* di u.

Nota. In seguito, data $u \in W^{1,p}(\Omega)$ scriveremo $u|_{\partial\Omega}$ per indicare la traccia. Inoltre scrivendo $\int_{\partial\Omega} u d\sigma$ intenderemo $\int_{\partial\Omega} Tu d\sigma$.

Il teorema di Rellich–Kondrachov

Questo paragrafo è dedicato al teorema di Rellich–Kondrachov che stabilisce alcune inclusioni dello spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ in altri spazi funzionali.

Abbiamo bisogno della seguente definizione.

Definizione 1.21. Siano X ed Y due spazi di Banach. Allora una mappa lineare $F\colon X \to Y$ si dice *compatta* se è continua e inoltre per ogni successione $\{x_n\}$ limitata in X esiste una sottosuccessione di $\{F(x_n)\}$ convergente fortemente in Y.

Teorema 1.22 (Teorema di Rellich–Kondrachov)**.** Sia Ω limitato con frontiera di classe C^1. Allora

(i) se $1 \le p < N$, detto $p^* = \frac{Np}{N-p}$ l'*esponente di Sobolev*, si ha che $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ per ogni $1 \le q < p^*$ e l'immersione è compatta;

(ii) se $p = N$ si ha che $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ per ogni $q \ge p$ e l'immersione è compatta;

(iii) se $p > N$ si ha che $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ e l'immersione è compatta.

Nel seguito di questa tesi faremo uso del seguente corollario che discende immediatamente dal teorema di Rellich–Kondrachov.

Corollario 1.23. Sia Ω limitato con frontiera di classe C^1 e $\{u_n\}$ una successione limitata in $W^{1,p}(\Omega)$. Allora esiste una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ convergente fortemente in $L^p(\Omega)$.

Capitolo 2

Elementi di Meccanica dei Continui e della Teoria dell'Elasticità

In questo capitolo presentiamo brevemente la teoria generale della statica dei corpi continui (Sezione 2.1), e introduciamo alcuni elementi della Teoria dell'Elasticità (Sezione 2.2).

2.1 Statica dei corpi continui

2.1.1 Deformazione di un corpo continuo

I punti materiali di un corpo continuo tridimensionale si identificano con i punti di un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ che supponiamo avere frontiera di classe C^1. Ci riferiremo agli $x \in \Omega$ con il nome di *coordinate materiali*. Possiamo pensare Ω come la regione dello spazio occupata dal corpo in una data disposizione di riferimento. Allora una qualunque deformazione dalla disposizione di riferimento è descritta da una mappa

$$\begin{aligned} u : \Omega &\to \mathbb{R}^3 \\ x &\mapsto u(x) \end{aligned}$$

che ad ogni punto materiale $x \in \Omega$ associa la posizione $u(x) \in \mathbb{R}^3$ da esso occupata nella disposizione deformata. L'intero corpo continuo deformato occupa la regione $\mathscr{B} = u(\Omega)$ dello spazio euclideo. I punti dello spazio euclideo in cui si colloca il corpo deformato verranno indicati con $y \in \mathbb{R}^3$ e ci riferiremo ad essi con il nome di *coordinate spaziali*.

Affinché il modello escluda la compenetrazione della materia richiediamo che u sia una mappa biettiva tra Ω e $\mathscr{B}$. Inoltre in questo capitolo assumeremo che sia u che $u^{-1} : \mathscr{B} \to \mathbb{R}^3$ siano di classe C^2 e si estendano con continuità fino alla frontiera del loro dominio di definizione. Richiederemo anche che u preservi l'orientazione. Pertanto la matrice jacobiana $Du(x)$, chiamata in questo contesto *gradiente di deformazione*, soddisfa puntualmente la condizione $\det Du(x) > 0$.

Nota. Nel seguito, ometteremo spesso l'indicazione esplicita della variabile da cui le funzioni dipendono ma essa si potrà desumere dal contesto. Inoltre in questo capitolo si assume che tutti i campi che vengono introdotti siano sufficientemente regolari affinché i passaggi siano giustificabili.

2.1.2 Equazione di bilancio delle forze

Ricaviamo le equazioni che descrivono la condizione di equilibrio per un corpo continuo. Sia dunque fissata una deformazione u per il corpo Ω. Supponiamo che il corpo sia soggetto ad un campo di forze di volume per unità di massa descritto nelle coordinate spaziali dal campo

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ y &\mapsto f(y). \end{aligned}$$

Sia ora $\mathscr{b} \subset \mathscr{B}$ aperto con frontiera di classe C^1. Su $\mathscr{b}$ agiscono le forze di volume e sulla sua frontiera le forze di superficie esercitate del resto del corpo. Quindi l'equazione di bilancio delle forze su $\mathscr{b}$ è della forma

$$\int_{\mathscr{b}} \rho(y) f(y) dy + \int_{\partial \mathscr{b}} t(y, n(y)) d\sigma(y) = 0.$$

Il campo $\rho\colon \mathscr{B} \to \mathbb{R}_+$ è la densità di massa nelle coordiante spaziali e $t\colon \mathscr{B} \times \partial B(0,1) \to \mathbb{R}^3$ descrive lo sforzo (ovvero la forza per unità di superficie) in ogni punto y e in funzione del versore normale uscente n. Il teorema degli sforzi di Cauchy afferma che esiste un campo di matrici simmetriche $T\colon \mathscr{B} \to \mathrm{Sym}$, detto *tensore degli sforzi di Cauchy*, tale che $t(y,n) = T(y)n$. Il bilancio delle forze si può allora riscrivere nel modo seguente:

$$\int_{\mathscr{C}} \rho(y)f(y)dy + \int_{\partial\mathscr{C}} T(y)n(y)d\sigma(y) = 0.$$

Data l'arbitrarietà di $\mathscr{C}$ possiamo equivalentemente esprimere il bilancio delle forze in forma locale come

$$\rho(y)f(y) + \operatorname{div} T(y) = 0 \qquad \text{per ogni } y \in \mathscr{B}, \tag{2.1}$$

dove $(\operatorname{div} T)_i = \frac{\partial T_{ij}}{\partial y_j}$.

Effettuando il cambio di variabile $y = u(x)$ riscriviamo l'equazione di bilancio in coordinate materiali nel modo seguente:

$$\int_\omega \mu(x)f(u(x))dx + \int_{\partial\omega} S(x)N(x)d\sigma = \int_\omega \left[\mu(x)f(u(x)) + \operatorname{div} S(x)\right] dx = 0,$$

dove $\omega = u^{-1}(\mathscr{C})$, $\mu = (\det Du)\rho(u)$ è la densità di massa in coordinate materiali e $S = (\det Du)T(u)(Du)^{-T}$ è il *tensore degli sforzi di Piola*. Inoltre $N(x)$ denota il versore normale uscente nel punto $x \in \partial\omega$ e $(\operatorname{div} S)_i = \frac{\partial S_{i\alpha}}{\partial x_\alpha}$. L'equazione di bilancio delle forze in forma locale si ottiene tenendo conto dell'arbitrarietà di ω ed è riportata di seguito:

$$\mu(x)f(u(x)) + \operatorname{div} S(x) = 0 \qquad \text{per ogni } x \in \Omega.$$

2.2 Corpi elastici e relazioni costitutive

La condizione di equilibrio (2.1) ricavata nel paragrafo precedente è una legge generale che una coppia di campi (u,T) deve soddisfare affinché descriva una configurazione di equilibrio. Questa legge non è ovviamente sufficiente per risolvere il problema dell'equilibrio perché occorre conoscere la risposta del corpo alle deformazioni che dipende in modo specifico dal materiale di cui è costituito. Il comportamento caratteristico di un materiale viene dunque descritto limitando ulteriormente le coppie (u,T) ammissibili mediante una *relazione costitutiva*. In questa tesi prenderemo in considerazione corpi elastici che vengono modellati imponendo che

$$T(u(x)) = \hat{T}(x, Du(x)) \quad \text{per ogni } x \in \Omega, \tag{2.2}$$

dove $\hat{T}\colon \Omega \times \mathrm{Mat}^+ \to \mathrm{Sym}$ è un campo assegnato che chiameremo *funzione di risposta* associata al tensore degli sforzi di Cauchy. Se $\hat{T}$ non dipende dal punto materiale x il corpo è detto *omogeneo*.

Osserviamo che il tensore di Piola soddisfa allora una condizione analoga a quella del tensore degli sforzi:

$$S(x) = \hat{S}(x, Du(x)) = (\det Du(x))\hat{T}(x, Du(x))(Du(x))^{-T}.$$

Il campo $\hat{S}$, definito da $\hat{S}(x,F) = (\det F)\hat{T}(x,F)F^{-T}$, è la funzione di risposta associata al tensore di Piola.

2.2.1 Materiali iperelastici

Una classe di modelli utilizzata spesso in Teoria dell'Elasticità è quella dei *materiali iperelastici*. Nel seguito della tesi ci focalizzeremo esclusivamente su di essi. Questi modelli si basano sull'ipotesi che la funzione di risposta per il tensore di Piola si esprime mediante la relazione $\hat{S}_{i\alpha} = \frac{\partial W}{\partial F_{i\alpha}}$ dove il campo $W\colon \Omega \times \mathrm{Mat}^+ \to \mathbb{R}$ è detto *densità di energia elastica*. Più avanti, quando descriveremo il problema di equilibrio su cui è incentrata questa tesi, il motivo di questa denominazione verrà chiarito.

Osserviamo che nel modello iperelastico l'equazione di bilancio delle forze diviene

$$\mu(x)f_i(u(x)) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial W}{\partial F_{i\alpha}}(x, Du(x))\right) = 0$$

per ogni $x \in \Omega$.

2.2.2 Teorema di decomposizione polare

Vale il seguente risultato di algebra lineare che ci tornerà utile.

Teorema 2.1 (Teorema di decomposizione polare)**.** Sia $F \in \mathrm{Mat}^+$. Allora esistono unici $U \in \mathrm{Sym}^+$ e $R \in \mathrm{Orth}^+$ tali che $F = RU$.

Dimostrazione. Consideriamo $C = F^T F$. È immediato verificare che C è simmetrica e definita positiva. Pertanto per il teorema spettrale è ben definita $U = C^{1/2}$. Sia $R = FU^{-1}$. Essa è ortogonale perché, essendo U simmetrica

$$RR^T = FU^{-1}U^{-T}F^T = FU^{-2}F^T = F(F^TF)^{-1}F^T = \mathbb{I}.$$

Inoltre ovviamente $\det R > 0$, dunque $R \in \mathrm{Orth}^+$.

Per dimostrare l'unicità basta osservare che se $F = \tilde{R}\tilde{U}$ con $\tilde{U} \in \mathrm{Sym}^+$ e $\tilde{R} \in \mathrm{Orth}^+$ allora $F^TF = \tilde{U}^2$ da cui $\tilde{U} = C^{1/2} = U$. Inoltre $\tilde{R} = F\tilde{U}^{-1} = FU^{-1} = R$. □

Ora, fissata $F \in \mathrm{Mat}^+$ viene individuata univocamente la matrice U ed in particolare i suoi autovalori strettamente positivi $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3_+$. Essi descrivono localmente la dilatazione del corpo lungo le tre direzioni degli autospazi (ortogonali per il teorema spettrale) di U essendo che $|du|^2 = |Fdx|^2 = dx \cdot F^TFdx$ per un piccolo spostamento dx nelle coordinate materiali. Vengono pertanto chiamati *dilatazioni principali* di F.

Nota. Poiché fissata $F \in \mathrm{Mat}^+$ le matrici $C \in \mathrm{Sym}^+$, $U \in \mathrm{Sym}^+$, $R \in \mathrm{Orth}^+$ e il vettore $\lambda \in \mathbb{R}^3_+$ sono univocamente determinati, allora restano definite le seguenti funzioni:

$$\begin{aligned}\hat{C}\colon \mathrm{Mat}^+ &\to \mathrm{Sym}^+ \\ F &\mapsto C\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\hat{U}\colon \mathrm{Mat}^+ &\to \mathrm{Sym}^+ \\ F &\mapsto U\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\hat{R}\colon \mathrm{Mat}^+ &\to \mathrm{Orth}^+ \\ F &\mapsto R\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\hat{\lambda}\colon \mathrm{Mat}^+ &\to \mathbb{R}^3_+ \\ F &\mapsto \lambda.\end{aligned}$$

Spesso, per semplicità, scriveremo C, U, R o λ intendendo che essi vengono fissati da F mediante tali funzioni.

2.2.3 Invarianti principali

Definiamo adesso gli *invarianti principali*, un altro strumento di algebra lineare di cui faremo uso. Sia $A \in \mathrm{Mat}$. Il suo polinomio caratteristico $\det(A - \lambda\mathbb{I})$ si riscrive esplicitamente come

$$-\lambda^3 + I_1(A)\lambda^2 - I_2(A)\lambda + I_3(A),$$

dove $I\colon \mathrm{Mat} \to \mathbb{R}^3$ è definito da:

$$\begin{aligned}I_1(A) &= \operatorname{tr} A \\ I_2(A) &= \operatorname{tr}(\operatorname{cof} A) = \frac{(\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)}{2} \\ I_3(A) &= \det A.\end{aligned}$$

Questi sono gli invarianti principali di A. Se $A \in \mathrm{Sym}$ allora è diagonalizzabile e suoi invarianti principali si esprimono in termini degli autovalori λ_i come

$$\begin{aligned}I_1(A) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ I_2(A) &= \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2 \\ I_3(A) &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3.\end{aligned}$$

È evidente che due matrici simmetriche hanno lo stesso spettro se e solo se hanno gli stessi invarianti principali. Infatti essi individuano univocamente il polinomio caratteristico.

2.2.4 Principio di indifferenza materiale

Consideriamo due coppie di campi (u, T) e $(\tilde{u}, \tilde{T})$ che soddisfano la relazione costitutiva (2.2). Supponiamo che $\tilde{u}(x) = Qu(x)$, dove $Q \in \mathrm{Orth}^+$. È naturale richiedere che per ogni $x \in \Omega$ e $n \in S^2$

$$\tilde{T}(\tilde{u}(x))Qn = QT(u(x))n,$$

ovvero

$$\hat{T}(x, D\tilde{u}(x))Qn = Q\hat{T}(x, Du(x))n.$$

Questa condizione equivale ad affermare che mediante una rotazione rigida del corpo gli sforzi ruotano in modo solidale o, in altri termini, che la risposta del materiale è indipendente dalla scelta del sistema di riferimento. Essendo u arbitraria e valendo che $D\tilde{u} = QDu$, allora

$$\hat{T}(x, QF) = Q\hat{T}(x, F)Q^T$$

per ogni $x \in \Omega$, $F \in \mathrm{Mat}^+$ e $Q \in \mathrm{Orth}^+$. Diremo che in questo caso $\hat{T}$ soddisfa al *principio di indifferenza materiale*. Si può esprimere lo stesso fatto in modo equivalente mediante la funzione di risposta associata al tensore degli sforzi di Piola: $\hat{S}(x, QF) = Q\hat{S}(x, F)$. In termini della densità di energia elastica il principio di indifferenza materiale si formula come indicato dalla seguente proposizione.

Proposizione 2.2. La funzione di risposta $\hat{S}$ soddisfa al principio di indifferenza materiale se e solo se

$$W(x, QF) = W(x, F)$$

per ogni $x \in \Omega$, $F \in \mathrm{Mat}^+$ e $Q \in \mathrm{Orth}^+$.

Dimostrazione. La sufficienza è un semplice calcolo. Dimostriamo dunque la necessità.

Passo 1. Sia $t \mapsto P(t)$ una curva liscia a valori in Orth^+. Allora se $\hat{S}$ soddisfa al principio di indifferenza materiale $\hat{S}(x, P) \cdot \dot{P} = 0$. Infatti

$$\frac{d}{dt}[\hat{S}(x, P) \cdot P] = \frac{d}{dt}\operatorname{tr}(P^T\hat{S}(x, P)) = \frac{d}{dt}\operatorname{tr}(P^TP\hat{S}(x, \mathbb{I})) = \frac{d}{dt}\operatorname{tr}(\hat{S}(x, \mathbb{I})) = 0.$$

D'altra parte

$$\frac{d}{dt}[\hat{S}(x, P) \cdot P] = \hat{S}(x, P) \cdot \dot{P} + \operatorname{tr}(P^T\dot{P}\hat{S}(x, \mathbb{I})).$$

Ma $P^T\dot{P}$ è antisimmetrica e $\hat{S}(x, \mathbb{I}) = \hat{T}(x, \mathbb{I})$ è simmetrica, pertanto l'ultimo addendo è nullo.

Passo 2. Mostriamo che $W(x, Q) = W(x, \mathbb{I})$ per ogni $Q \in \mathrm{Orth}^+$. È sufficiente considerare la curva liscia $t \mapsto P(t)$ a valori in Orth^+ che connette $\mathbb{I}$ con Q (infatti Orth^+ è connesso per archi) e usare il risultato del passo precedente per dire

$$\hat{S}(x, P) \cdot \dot{P} = \frac{\partial W}{\partial F_{i\alpha}}(x, P) \cdot \dot{P}_{i\alpha} = \frac{d}{dt}W(x, P) = 0.$$

Passo 3. Se $\hat{S}$ soddisfa al principio di indifferenza materiale è immediato verificare che

$$\frac{\partial}{\partial F_{i\alpha}}[W(x, QF) - W(x, F)] = 0.$$

Ora, visto che Mat^+ è connesso per archi, possiamo considerare una curva liscia che connette F con $\mathbb{I}$ e ottenere così

$$W(x, QF) - W(x, F) = W(x, Q\mathbb{I}) - W(x, \mathbb{I}) = 0,$$

dove l'ultima uguaglianza vale per il passo precedente. □

Osserviamo che grazie al teorema di decomposizione polare, se W soddisfa al principio di indifferenza materiale, allora $W(x, F) = W(x, RU) = W(x, U)$. Nel seguito assumeremo sempre soddisfatta questa condizione.

2.2.5 Materiali isotropi

Consideriamo il seguente esperimento. Prendiamo un campione omogeneo costituito di un dato materiale la cui funzione di risposta è data dal campo $\hat{T} : \mathrm{Mat}^+ \to \mathrm{Sym}$ indipendente dal punto materiale x. Questo campione abbia forma sferica $B(0, 1)$ nella disposizione di riferimento. Consideriamo due coppie di configurazioni (u, T) e $(\tilde{u}, \tilde{T})$ soddisfacenti la relazione costitutiva (2.2). Supponiamo che la deformazione u sia uniforme, ossia $u(x) = Fx$ dove $F \in \mathrm{Mat}^+$. Inoltre sia $\tilde{u}(x) = u(Qx)$ dove $Q \in \mathrm{Orth}^+$ in modo che la deformazione $\tilde{u}$ si ottenga ruotando dapprima la sfera secondo la matrice Q e successivamente deformandola secondo u. Se il materiale è isotropo allora qualunque siano F e Q deve valere che $T(y) = \tilde{T}(y)$ per ogni $y \in u(B(0, 1))$. Infatti la risposta del materiale alle sollecitazioni non deve dipendere dalla direzione in cui esse sono dirette. Utilizzando (2.2) e tenendo conto del fatto che $Du = F$, $D\tilde{u} = FQ$, abbiamo che $\hat{T}(F) = \hat{T}(FQ)$.

Consideriamo adesso il caso generale in cui il corpo Ω non è omogeneo e la funzione di risposta $\hat{T}$ dipende dal punto materiale x. Diciamo allora che il materiale in $x \in \Omega$ è isotropo se per ogni $F \in \mathrm{Mat}^+$ e $Q \in \mathrm{Orth}^+$ vale

$$\hat{T}(x, FQ) = \hat{T}(x, F).$$

L'isotropia del materiale si caratterizza in modo equivalente in termini del tensore di Piola imponendo che $\hat{S}(x, FQ) = \hat{S}(x, F)Q$. Per materiali iperelastici la condizione è equivalente a $W(x, FQ) = W(x, F)$. La dimostrazione di quest'ultimo fatto si ricava ragionando come nella Proposizione 2.2.

Osserviamo che se il materiale è isotropo e soddisfa il principio di indifferenza materiale si ha $W(x, QFQ^T) = W(x, F)$ per ogni $F \in \mathrm{Mat}^+$ e $Q \in \mathrm{Orth}^+$. Una funzione che soddisfa queste proprietà si dice *funzione isotropa*. Nel prossimo paragrafo ricaviamo alcune proprietà delle funzioni isotrope.

2.2.6 Alcuni teoremi di rappresentazione per funzione isotrope

Chiariamo innanzitutto la definizione di funzione isotropa.

Definizione 2.3. Sia $\mathfrak{M}$ un insieme di matrici invariante sotto l'azione di coniugio del gruppo Orth^+, cioè $QMQ^T \in \mathfrak{M}$ per ogni $M \in \mathfrak{M}$ e $Q \in \mathrm{Orth}^+$. Allora una funzione $\kappa\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ si dice isotropa se $\kappa(QMQ^T) = \kappa(M)$ per ogni $M \in \mathfrak{M}$ e $Q \in \mathrm{Orth}^+$.

Notiamo che Mat^+ e Sym^+ sono invarianti sotto l'azione di coniugio di Orth^+.

Il seguente teorema caratterizza le funzioni isotrope nel caso $\mathfrak{M} = \mathrm{Sym}^+$.

Proposizione 2.4. Una funzione $\kappa\colon \mathrm{Sym}^+ \to \mathbb{R}$ è isotropa se e solo se esiste una funzione $\Psi\colon I(\mathrm{Sym}^+) \to \mathbb{R}$ tale che $\kappa(A) = \Psi(I(A))$ per ogni $A \in \mathrm{Sym}^+$.

Dimostrazione. Se $\kappa(A) = \Psi(I(A))$ allora è κ è isotropa perché lo sono ovviamente gli invarianti principali.

Viceversa sia κ isotropa. Dobbiamo mostrare che se A_1 e A_2 hanno gli stessi invarianti principali allora $\kappa(A_1) = \kappa(A_2)$. Ora A_1 e A_2 hanno lo stesso spettro perché gli invarianti principali individuano il polinomio caratteristico. Allora, dal momento che A_1 e A_2 sono simmetriche, esse sono coniugate da una rotazione $Q \in \mathrm{Orth}^+$, diciamo $A_2 = QA_1Q^T$. Quindi per l'isotropia di κ abbiamo $\kappa(A_1) = \kappa(A_2)$ come volevamo. □

Grazie all'indifferenza materiale possiamo sfruttare questo risultato per caratterizzare anche l'isotropia della densità di energia elastica $W\colon \mathrm{Mat}^+ \to \mathbb{R}$. Omettiamo per semplicità la dipendenza di W da x che non è importante in questa discussione. Osserviamo preliminarmente che per indifferenza materiale $W(F) = \overline{W}(\hat{U}(F))$ dove $\overline{W}\colon \mathrm{Sym}^+ \to \mathbb{R}$ è la restrizione di W a Sym^+. La caratterizzazione dell'isotropia di W è allora fornita dalla seguente proposizione.

Proposizione 2.5. Sia $W\colon \mathrm{Mat}^+ \to \mathbb{R}$ soddisfacente al principio di indifferenza materiale. Allora essa è isotropa se e solo se esiste $\Phi\colon \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}$ simmetrica nelle tre variabili, tale che $W(F) = \Phi(\hat{\lambda}(F))$ per ogni $F \in \mathrm{Mat}^+$.

Dimostrazione. Supponiamo che W sia isotropa. Siano F_1 e F_2 in Mat^+ aventi le stesse dilatazioni principali a meno di permutazioni. Dobbiamo dimostrare che $W(F_1) = W(F_2)$. Ora, $\overline{W}$ è isotropa. Quindi per la Proposizione 2.4 abbiamo che $\overline{W}(U) = \Psi(I(U))$ per una opportuna funzione $\Psi\colon I(\mathrm{Sym}^+) \to \mathbb{R}$. Adesso siano $U_1 = \hat{U}(F_1)$ e $U_2 = \hat{U}(F_2)$. Per ipotesi U_1 e U_2 hanno gli stessi autovalori. Pertanto $I(U_1) = I(U_2)$ e si conclude.

Viceversa supponiamo $W(F) = \Phi(\hat{\lambda}(F))$ con Φ simmetrica nelle tre variabili. Dobbiamo mostrare che per ogni $F \in \mathrm{Mat}^+$ e $Q \in \mathrm{Orth}^+$ si ha $W(QFQ^T) = W(F)$. Ma questo è vero perché F^TF e Q^TF^TFQ hanno gli stessi autovalori λ_1^2, λ_2^2, λ_3^2. □

Concludiamo con un'ultima osservazione che motiverà una delle ipotesi del teorema di esistenza per il problema di equilibrio (si veda l'ipotesi (W1)). Sappiamo che se W è isotropa allora

$$\overline{W}(U) = \Psi(\operatorname{tr} U, \operatorname{tr}(\operatorname{cof} U), \det U) = h(U, \operatorname{cof} U, \det U),$$

dove $h\colon \mathrm{Sym}^+ \times \mathrm{Sym}^+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ è definita dall'ultima uguaglianza. Adesso, osserviamo[1] che $(\operatorname{cof} U)^2 = \operatorname{cof}(U^2) = \operatorname{cof}(F^TF) = (\operatorname{cof} F)^T \operatorname{cof} F$ e che $\det F = \det(RU) = \det U$. Da questo deduciamo che

$$W(F) = \overline{W}(U) = h((F^TF)^{1/2}, [(\operatorname{cof} F)^T \operatorname{cof} F]^{1/2}, \det F) = g(F, \operatorname{cof} F, \det F)$$

dove $g\colon \mathrm{Mat}^+ \times \mathrm{Mat}^+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ è definita dall'ultima uguaglianza.

[1]Se A è una matrice invertibile allora $\operatorname{cof} A = (\det A)A^{-T}$. Pertanto $\operatorname{cof}(A^T) = (\operatorname{cof} A)^T$. Inoltre se B è una seconda matrice invertibile allora $\operatorname{cof}(AB) = \det(AB)(AB)^{-T} = (\operatorname{cof} A)(\operatorname{cof} B)$.

Capitolo 3

Teorema di esistenza per un problema di equilibrio in elasticità non lineare

In questo capitolo viene affrontato l'argomento centrale di questa tesi, ovvero la dimostrazione dell'esistenza di soluzioni per un problema di equilibrio in elasticità non lineare.

Nella Sezione 3.1 viene introdotto il problema di equilibrio, nella Sezione 3.2 esso viene riformulato in termini variazionali, nella Sezione 3.3 il problema variazionale viene posto in forma debole e viene fornita la dimostrazione dell'esistenza delle soluzioni.

3.1 Descrizione del problema al bordo

Sia Ω, aperto con frontiera di classe C^1, un corpo di materiale iperelastico. Siano Γ_1 e Γ_2 sottoinsiemi disgiunti di $\partial\Omega$ e relativamente aperti. L'insieme $\partial\Omega \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ abbia superficie nulla. Eventualmente Γ_1 oppure Γ_2 possono coincidere con tutto $\partial\Omega$. Siano $\overline{u}\colon \Gamma_1 \to \mathbb{R}^3$ e $\overline{s}\colon \Gamma_2 \to \mathbb{R}^3$ due funzioni assegnate. Consideriamo allora il problema di determinare una deformazione $u\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$\begin{cases} \mu f_i(u) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial W}{\partial F_{i\alpha}}(x, Du)\right) = 0 \quad \text{su } \Omega \\ u = \overline{u} \quad \text{su } \Gamma_1 \\ \frac{\partial W}{\partial F_{i\alpha}}(x, Du) N_\alpha(x) = \overline{s}_i \quad \text{su } \Gamma_2, \end{cases} \tag{3.1}$$

dove $N(x)$ denota come al solito il versore normale uscente ad Ω in $x \in \partial\Omega$. Fisicamente il problema (3.1) significa cercare una deformazione tale che i punti di Γ_1 assumano la posizione fissata da $\overline{u}$ e lo sforzo su Γ_2 sia fissato da $\overline{s}$.

Se $\Gamma_1 = \partial\Omega$ il problema è detto *problema al bordo di piazzamento*, se $\Gamma_2 = \partial\Omega$ è detto *problema al bordo di trazione*, altrimenti è detto *problema al bordo misto di piazzamento e trazione*.

3.2 Formulazione variazionale

Ci occupiamo adesso di riformulare il problema (3.1) in termini variazionali riconducendolo alla minimizzazione di un opportuno funzionale[1]. Per poter procedere occorre assumere che il campo di forze esterno f sia conservativo ovvero ammetta un potenziale $\psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che $f(y) = -\nabla_y \psi(y)$. Definiamo quindi il seguente funzionale, che descrive l'energia associata ad un data deformazione u:

$$J(u) = \int_\Omega [W(x, Du) + \mu\psi(u)]dx - \int_{\Gamma_2} \overline{s} \cdot u d\sigma. \tag{3.2}$$

Verifichiamo allora che rendendo stazionario J tra le deformazioni che soddisfano il vincolo di piazzamento, si riottiene il problema (3.1). Sia dunque $\phi\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ una variazione di u che si annulla in Γ_1.

[1] A questo livello procediamo in modo formale senza ricercare delle ipotesi che permetterebbero di giustificare i passaggi: nel Capitolo 4 approfondiremo questo aspetto.

Calcoliamo formalmente

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}J(u+\tau\phi)|_{\tau=0} &= \int_\Omega \left(\frac{\partial W}{\partial F_{i\alpha}}(x,Du)\frac{\partial \phi_i}{\partial x_\alpha} + \mu\frac{\partial \psi}{\partial y_i}(u)\phi_i\right)dx - \int_{\Gamma_2} \overline{s}\cdot\phi d\sigma = \\
&= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial W}{\partial F_{i\alpha}}\phi_i\right)dx - \int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial W}{\partial F_{i\alpha}}\right) - \mu\frac{\partial \psi}{\partial y_i}\right]\phi_i dx - \int_{\Gamma_2}\overline{s}\cdot\phi d\sigma = \\
&= -\int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial W}{\partial F_{i\alpha}}\right) - \mu\frac{\partial \psi}{\partial y_i}\right]\phi_i dx + \int_{\Gamma_2}\left(\frac{\partial W}{\partial F_{i\alpha}}N_\alpha - \overline{s}_i\right)\phi_i d\sigma.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato il teorema della divergenza e che ϕ si annulla in Γ_1. Imponiamo che u renda stazionario J, ovvero che $\frac{d}{d\tau}J(u+\tau\phi)|_{\tau=0} = 0$ per tutte le variazioni ϕ che si annullano in Γ_1: scegliendo ϕ a supporto compatto su Ω si ottiene la prima condizione in (3.1), quindi scegliendo ϕ generica si ottiene la terza condizione.

Riformuliamo allora il problema di equilibrio come segue: determinare u^* minimizzante *globale* di J tra tutte le deformazioni che rispettano il vincolo di piazzamento $u = \overline{u}$ su Γ_1.

Nota. Naturalmente possono esistere anche altre soluzioni di equilibrio corrispondenti a minimi locali oppure a massimi locali. Tuttavia per dimostrare l'esistenza di almeno una soluzione di equilibrio è sufficiente dimostrare l'esistenza di un minimizzante globale.

3.3 Formulazione debole e teorema di esistenza

Rimane da indagare l'esistenza delle soluzioni del problema variazionale a cui ci siamo ricondotti. Lo spazio $\mathfrak{V}$ nel quale si cercano le soluzioni classiche è lo spazio delle mappe $u\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}$ iniettive tali che:

(ii) u soddisfa la condizione al bordo $u|_{\Gamma_1} = \overline{u}$;

(i) sia u che $u^{-1}\colon u(\Omega) \to \Omega$ sono di classe C^2 e si estendono con continuità fino al bordo del dominio di definizione;

(iii) u preserva l'orientazione.

È ancora un problema aperto stabilire l'esistenza di soluzioni in $\mathfrak{V}$. Il teorema di esistenza che dimostreremo in questo capitolo si riferisce pertanto al problema formulato in senso debole.

Per formulare il problema in senso debole occorre stabilire lo spazio di ammissibilità $\mathfrak{A}$ nel quale cercare le soluzioni. Prenderemo come $\mathfrak{A}$ un opportuno sottoinsieme di uno spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ dove p verrà fissato più avanti. Se $u \in \mathfrak{A}$ esso deve soddisfare le condizioni riportate di seguito.

(i) Affinché le soluzioni soddisfino le condizioni al bordo di piazzamento richiediamo che $u|_{\Gamma_1} = \overline{u}$, dove $u|_{\Gamma_1}$ è definita restringendo la traccia di u all'aperto Γ_1. Perché la richiesta abbia senso imponiamo che $\overline{u} \in L^p(\Gamma_1)$.

(ii) La condizione che la deformazione sia iniettiva e preservi l'orientazione è delicata da riformulare per gli elementi di $W^{1,p}$ perché non sono in generale funzioni lisce. Pertanto imponiamo la condizione più semplice da gestire che $\det Du > 0$ q.o. È tuttora un problema aperto quello di stabilire se le soluzioni sono effettivamente iniettive.

Nota. La condizione al bordo sulla trazione è già inclusa nell'espressione del funzionale e dunque non viene introdotta in $\mathfrak{A}$.

Per poter decidere quali ulteriori condizioni è opportuno introdurre per completare la definizione di $\mathfrak{A}$ dobbiamo affrontare uno studio più approfondito delle proprietà di $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^3)$.

3.3.1 Determinante e matrice dei cofattori del gradiente di deformazione in $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^3)$

Se $F \in \text{Mat}$ si verifica facilmente che $(\operatorname{cof} F)_{i\alpha} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}F_{j\beta}F_{k\gamma}$ e che

$$\det F = \frac{1}{6}\epsilon_{ijk}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}F_{i\alpha}F_{j\beta}F_{k\gamma} = \frac{1}{3}F_{i\alpha}(\operatorname{cof} F)_{i\alpha}.$$

Quindi data $u \in C^2(\Omega;\mathbb{R}^3)$ abbiamo

$$(\operatorname{cof} Du)_{i\alpha} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial u_j}{\partial x_\beta}\frac{\partial u_k}{\partial x_\gamma} \tag{3.4}$$

$$\det Du = \frac{1}{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}(\operatorname{cof} Du)_{i\alpha}. \tag{3.5}$$

Usando l'antisimmetria del simbolo di Levi-Civita si ottiene

$$(\operatorname{cof} Du)_{i\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}u_j\frac{\partial u_k}{\partial x_\gamma}\right) \tag{3.6}$$

$$\det Du = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{1}{3}u_i(\operatorname{cof} Du)_{i\alpha}\right). \tag{3.7}$$

Nel caso in cui $u \in W^{1,p}(\Omega)$ possiamo ancora definire la matrice dei cofattori e il determinante del gradiente di deformazione mediante (3.4) e (3.5). Vorremmo estendere anche la validità di (3.6) e (3.7).

Iniziamo con il seguente lemma.

Lemma 3.1. Sia $2 \le p < \infty$. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ allora $\operatorname{cof} Du \in L^{p/2}(\Omega)$. Inoltre se $\operatorname{cof} Du \in L^q(\Omega)$ e $q \ge \frac{p}{p-1} = p'$ allora $\det Du = \frac{1}{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}(\operatorname{cof} Du)_{i\alpha} \in L^1(\Omega)$.

Dimostrazione. In generale se $f, g \in L^p(\Omega)$ con $p \ge 2$ allora $fg \in L^{p/2}(\Omega)$. Infatti

$$|fg| \le \frac{|f|^2 + |g|^2}{2} \le C\left(|f|^p + |g|^p\right)^{2/p} \in L^{p/2}(\Omega).$$

Per cui $\operatorname{cof} Du \in L^{p/2}$. Inoltre se $\operatorname{cof} Du \in L^q$ allora per il Lemma 1.14 abbiamo che che $\operatorname{cof} Du \in L^{p'}$ e si conclude per Hölder. □

La proposizione che segue dà significato alle identità (3.6) e (3.7).

Lemma 3.2. Sia $2 \le p < \infty$.

(i) Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ allora (3.6) vale nel senso delle distribuzioni.

(ii) Se inoltre $\operatorname{cof} Du \in L^q(\Omega)$ con $q \ge p'$ allora (3.7) vale nel senso delle distribuzioni.

Dimostrazione. (i) Sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Dobbiamo mostrare che

$$\int_\Omega (\operatorname{cof} Du)_{i\alpha}\phi\, dx = -\int_\Omega \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}u_j\frac{\partial u_k}{\partial x_\gamma}\frac{\partial \phi}{\partial x_\beta}dx$$

per ogni $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Questo è banalmente vero se $u \in C^\infty(\Omega)$ e si estende per $u \in W^{1,p}(\Omega)$ usando la Proposizione 1.18. Infatti sia $u^{(n)} \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ tale che $u^{(n)} \to u$ in $W^{1,p}$. É sufficiente verificare che

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_\beta}\frac{\partial u_k}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial u_j^{(n)}}{\partial x_\beta}\frac{\partial u_k^{(n)}}{\partial x_\gamma}\right)\frac{\partial \phi}{\partial x_\beta} \to 0 \quad \text{e} \quad \int_\Omega \left(u_j\frac{\partial u_k}{\partial x_\gamma} - u_j^{(n)}\frac{\partial u_k^{(n)}}{\partial x_\gamma}\right)\frac{\partial \phi}{\partial x_\beta} \to 0.$$

Il primo limite si verifica mediante la stima

$$\left|\int_\Omega \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_\beta}\frac{\partial u_k}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial u_j^{(n)}}{\partial x_\beta}\frac{\partial u_k^{(n)}}{\partial x_\gamma^{(n)}}\right)\right| \le$$

$$\le M\left\|\frac{\partial u_j}{\partial x_\beta}\right\|_{p'}\left\|\frac{\partial u_k}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial u_k^{(n)}}{\partial x_\gamma}\right\|_p + M\left\|\frac{\partial u_j}{\partial x_\beta} - \frac{\partial u_j^{(n)}}{\partial x_\beta}\right\|_p\left\|\frac{\partial u_k^{(n)}}{\partial x_\gamma}\right\|_{p'} \to 0,$$

dove M è il massimo di $\frac{\partial \phi}{\partial x_\beta}$. Essendo $p' \le p$, si fa uso del Lemma 1.14 per stabilire la limitatezza delle due norme in $L^{p'}$. Si procede in modo del tutto analogo per verificare il secondo limite.

(ii) Occorre mostrare che se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $\operatorname{cof} Du \in L^q(\Omega)$ con $q \ge p'$ allora

$$\int_\Omega \frac{1}{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}(\operatorname{cof} Du)_{i\alpha}\phi\, dx = -\int_\Omega \frac{1}{3}u_i(\operatorname{cof} Du)_{i\alpha}\frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha}dx.$$

Per semplicità chiamiamo $H_{i\alpha} = (\operatorname{cof} Du)_{i\alpha}$.

Osserviamo preliminarmente che se $u \in C^\infty(\Omega)$ allora per l'antisimmetria del simbolo di Levi-Civita $\frac{\partial H_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0$. Da cui

$$\int_\Omega H_{i\alpha}\frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha}dx = 0 \quad \text{per ogni } \phi \in \mathscr{D}(\Omega). \tag{3.8}$$

Quest'ultima uguaglianza si estende per $u \in W^{1,p}(\Omega)$ utilizzando lo stesso argomento di densità del punto (i).

Sia ora ρ_n una sequenza di mollificatori. Estendendo $H_{i\alpha}$ su tutto $\mathbb{R}^3$ ponendolo 0 fuori da Ω, è ben definita la convoluzione $\rho_n * H_{i\alpha}$. Osserviamo ora che per ogni $x \in \Omega$ ed n sufficientemente grande

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho_n * H_{i\alpha})(x) = \left(\frac{\partial \rho_n}{\partial x_\alpha} * H_{i\alpha}\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \rho_n}{\partial x_\alpha}(x - x')H_{i\alpha}(x')dx' = 0. \tag{3.9}$$

Infatti per $x \in \Omega$ fissato, per n sufficientemente grande $x' \mapsto \frac{\partial \rho_n}{\partial x_\alpha}(x - x')$ è a supporto compatto in Ω e si applica (3.8).

Grazie alla Proposizione 1.18 troviamo $u^{(n)} \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ tale che $u^{(n)} \to u$ in $W^{1,p}$. Adesso fissata $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ sia $\Omega \supset S \supset \operatorname{supp}\phi$ un compatto con frontiera di classe C^1. Allora

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{1}{3}\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x_\alpha}(\rho_n * H_{i\alpha})\phi dx = \int_S \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{1}{3}u_i^{(n)}(\rho_n * H_{i\alpha})\phi\right)dx-\\ - \int_S \frac{1}{3}u_i^{(n)}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho_n * H_{i\alpha})\phi dx - \int_S \frac{1}{3}u_i^{(n)}(\rho_n * H_{i\alpha})\frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha}dx\end{aligned}$$

in quanto tutte le funzioni sono regolari. Ora, il primo integrale è nullo per il teorema della divergenza, il secondo è nullo per n grande grazie a (3.9): notiamo che il limite inferiore per n affinché $x' \mapsto \frac{\partial \rho_n}{\partial x_\alpha}(x - x')$ sia a supporto compatto in Ω, e possa dunque applicarsi (3.9), è uniforme in $x \in S$ perché $S \subset \Omega$ è compatto.

Abbiamo dunque ottenuto che per n grande

$$\int_\Omega \frac{1}{3}\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x_\alpha}(\rho_n * H_{i\alpha})\phi dx = -\int_\Omega \frac{1}{3}u_i^{(n)}(\rho_n * H_{i\alpha})\frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha}dx.$$

Quindi, sapendo che $\rho_n * H_{i\alpha} \to H_{i\alpha}$ in $L^{p'}$ per la Proposizione 1.12, ragionando come nel punto (i), possiamo passare al limite per $n \to \infty$ ottenendo il risultato voluto.

□

Concludiamo questo paragrafo con un ultimo risultato tecnico.

Proposizione 3.3. Sia $2 \leq p$, $q \geq p' = \frac{p}{p-1}$, $r \geq 1$. Sia $\{u^{(n)}\} \subset W^{1,p}(\Omega)$ una sequenza tale che

$$\begin{aligned} u^{(n)} &\rightharpoonup u^* \quad \text{in } W^{1,p}(\Omega)\\ \operatorname{cof} Du^{(n)} &\rightharpoonup H \quad \text{in } L^q(\Omega)\\ \det Du^{(n)} &\rightharpoonup \delta \quad \text{in } L^r(\Omega).\end{aligned}$$

Allora $H = \operatorname{cof} Du^*$ e $\delta = \det Du^*$.

Dimostrazione. L'idea della dimostrazione è quello di mostrare che:

(i) se $u^{(n)} \rightharpoonup u^*$ in $W^{1,p}(\Omega)$ allora esiste una sottosuccessione $\{u^{(n_k)}\}$ tale che $\operatorname{cof} Du^{(n_k)} \to \operatorname{cof} Du^*$ in $\mathscr{D}'(\Omega)$;

(ii) se $u^{(n)} \rightharpoonup u^*$ in $W^{1,p}(\Omega)$ e $\operatorname{cof} Du^{(n)} \rightharpoonup \operatorname{cof} Du^*$ in $L^q(\Omega)$ allora esiste una sottosuccessione $\{u^{(n_k)}\}$ tale che $\det Du^{(n_k)} \to \det Du^*$ in $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Il risultato voluto allora seguirebbe immediatamente grazie al seguente lemma.

Lemma 3.4. Sia $1 \leq p < \infty$. Sia $\{f_n\} \subset L^p(\Omega)$ una sequenza tale che $f_n \rightharpoonup g$ in $L^p(\Omega)$ e $f_{n_k} \to f$ in $\mathscr{D}'(\Omega)$ con $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e n_k una sottosuccessione. Allora $f = g$ q.o.

Dimostrazione del Lemma 3.4. Grazie alla convergenza in $\mathscr{D}'(\Omega)$

$$\int_\Omega f_{n_k}\phi dx \to \int_\Omega f\phi dx \quad \text{per ogni } \phi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

D'altra parte $\mathscr{D}(\Omega) \subset L^{p'}(\Omega)$, pertanto

$$\int_\Omega f_{n_k}\phi dx \to \int_\Omega g\phi dx \quad \text{per ogni } \phi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

La tesi segue applicando la Proposizione 1.13 □

Dimostriamo il punto (i). Grazie all'identità fornita dal Lemma 3.2 basta mostrare che esiste una sottosuccessione $u^{(n_k)}$ tale che per ogni $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$

$$\int_\Omega \left(u_j^* \frac{\partial u_k^*}{\partial x_\gamma} - u_j^{(n_k)} \frac{\partial u_k^{(n_k)}}{\partial x_\gamma} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x_\beta} dx \to 0. \tag{3.10}$$

Essendo $p' \leq p$ per $p \geq 2$, grazie al Corollario 1.23, troviamo una sottosuccessione $u^{(n_k)} \to u^*$ in $L^{p'}(\Omega)$. Inoltre[2] $\frac{\partial u_k^{(n_k)}}{\partial x_\gamma} \rightharpoonup \frac{\partial u_k^*}{\partial x_\gamma}$ in $L^p(\Omega)$. Allora (3.10) segue grazie al seguente fatto generale.

Lemma 3.5. Sia $1 < p < \infty$. Se $f_n \to f$ in $L^{p'}(\Omega)$, $g_n \rightharpoonup g$ in $L^p(\Omega)$ e $h \in L^\infty(\Omega)$ allora

$$\int_\Omega (fg - f_n g_n) h dx \to 0.$$

Dimostrazione del Lemma 3.5. Abbiamo

$$\left| \int_\Omega (fg - f_n g_n) h dx \right| \leq \|h\|_\infty \int_\Omega |f - f_n||g_n| dx + \left| \int_\Omega fh(g - g_n) dx \right| \to 0,$$

dove si usa la disuguaglianza di Hölder, che $\|g_n\|_p$ è limitata e che $fh \in L^{p'}(\Omega)$. □

La dimostrazione del punto (ii) procede in modo identico. □

3.3.2 Spazio di ammissibilità

In base ai risultati della Sezione 3.3.1 completiamo la definizione di $\mathfrak{A}$ ponendo

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} = \{ u \in W^{1,p}(\Omega) \mid \ \operatorname{cof} Du \in L^q(\Omega),\ \det Du \in L^r(\Omega), \\ \det Du > 0 \text{ q.o.},\ u|_{\Gamma_1} = \overline{u} \}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

dove $p \geq 2$, $q \geq \frac{p}{p-1}$, $r > 1$ e $\overline{u} \in L^p(\Gamma_1)$.

3.3.3 Un altro lemma tecnico

Lemma 3.6. Sia $1 < p < \infty$ e Ω aperto connesso e limitato con frontiera di classe C^1. Sia $\Gamma_1 \subset \partial\Omega$ un insieme relativamente aperto di area strettamente positiva. Allora esiste $K > 0$ dipendente solo da p, Ω e Γ_1 tale che

$$\int_\Omega |u|^p dx \leq K \left(\int_\Omega |Du|^p dx + \left| \int_{\Gamma_1} u d\sigma \right|^p \right)$$

per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Dimostrazione. Per assurdo non esista K. Allora è possibile trovare una successione $\{u^{(n)}\} \subset W^{1,p}(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega |u^{(n)}|^p dx \geq n \left(\int_\Omega |Du^{(n)}|^p dx + \left| \int_{\Gamma_1} u^{(n)} d\sigma \right|^p \right). \tag{3.12}$$

Troviamo la contraddizione.

Passo 1. Per omogeneità si può assumere che $\int_\Omega |u^{(n)}|^p dx = 1$. In tale caso $\int_\Omega |Du^{(n)}|^p dx \to 0$. Quindi $\{u^{(n)}\}$ è limitata rispetto alla norma di $W^{1,p}(\Omega)$. Poiché $W^{1,p}(\Omega)$ è riflessivo esiste una sottosuccessione $\{u^{(n_k)}\}$ debolmente convergente, diciamo $u^{(n_k)} \rightharpoonup u^*$.

Passo 2. Per il teorema di Rellich–Kondrachov, a meno di estrarre ulteriormente una sottosuccessione, possiamo assumere che $u^{(n_k)} \to u^*$ in $L^p(\Omega)$. Quindi $\int_\Omega |u^*|^p dx = 1$.

Passo 3. Il funzionale definito su $W^{1,p}(\Omega)$ da $u \mapsto \int_\Omega |Du|^p dx$ è convesso e fortemente continuo. Per la Proposizione 1.8 è debolmente inferiormente semicontinuo. Usando il passo 1 si ottiene

$$\int_\Omega |Du^*|^p dx \leq \liminf_{k \to \infty} \int_\Omega |Du^{(n_k)}|^p dx = 0,$$

e quindi $\int_\Omega |Du^*|^p dx = 0$. Ne segue che $Du^* = 0$ q.o. Essendo Ω connesso allora $u^* = C$ q.o. dove $C \in \mathbb{R}$.

[2] In generale se $f_n \rightharpoonup f$ in $W^{1,p}(\Omega)$ allora $\nabla f_n \rightharpoonup \nabla f$ in $L^p(\Omega)$ perché la mappa $f \mapsto \nabla f$ è continua come mappa da $W^{1,p}(\Omega)$ a $L^p(\Omega)$.

Passo 4. Per il teorema di traccia

$$\|u^{(n_k)} - u^*\|_{L^p(\partial\Omega)} \lesssim \|u^{(n_k)} - u^*\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}
\|u^{(n_k)} - u^*\|_{W^{1,p}(\Omega)} &= \left[\|u^{(n_k)} - u^*\|^p_{L^p(\Omega)} + \|Du^{(n_k)} - Du^*\|^p_{L^p(\Omega)}\right]^{1/p} \leq \\
&\leq \left[\|u^{(n_k)} - u^*\|^p_{L^p(\Omega)} + \left(\|Du^{(n_k)}\|_{L^p(\Omega)} + \|Du^*\|_{L^p(\Omega)}\right)^p\right]^{1/p} = \\
&= \left[\|u^{(n_k)} - u^*\|^p_{L^p(\Omega)} + \|Du^{(n_k)}\|^p_{L^p(\Omega)}\right]^{1/p} \to 0.
\end{aligned}$$

Utilizzando il Lemma 1.14 otteniamo

$$\|u^{(n_k)} - u^*\|_{L^1(\Gamma_1)} \lesssim \|u^{(n_k)} - u^*\|_{L^p(\Gamma_1)} \leq \|u^{(n_k)} - u^*\|_{L^p(\partial\Omega)} \to 0.$$

Passo 5. Vale che

$$|C| \operatorname{area}\Gamma_1 = \left|\int_{\Gamma_1} u^* d\sigma\right| \leq \int_{\Gamma_1} |u^* - u^{(n_k)}| d\sigma + \left|\int_{\Gamma_1} u^{(n_k)} d\sigma\right| \to 0,$$

dove si usa il risultato del passo precedente e il fatto che $\left|\int_{\Gamma_1} u^{(n_k)} d\sigma\right| \to 0$, deducibile da (3.12). Essendo $\operatorname{area}\Gamma_1 > 0$ per ipotesi, allora $u^* = C = 0$ che contraddice $\int_\Omega |u^*|^p dx = 1$. □

Nota. Supponiamo che $u \in \mathfrak{A}$. Allora per il lemma

$$\int_\Omega |Du|^p dx \geq \frac{1}{K}\int_\Omega |u|^p dx - \left|\int_{\Gamma_1} \overline{u} d\sigma\right|^p.$$

Questa disuguaglianza esprime il seguente fatto intuitivo: se un corpo è soggetto al vincolo che una porzione della sua frontiera deve rimanere fissa, allora quando viene tirato il suo gradiente di deformazione deve in qualche modo crescere.

3.3.4 Ipotesi sul funzionale

Consideriamo il funzionale (3.2) e formuliamo alcune ipotesi sulle funzioni che compaiono nell'espressione. Saranno necessarie per ottenere il risultato di esistenza.

Le ipotesi su W sono riportate di seguito e verranno discusse in dettaglio nel Capitolo 5.

(W1) La funzione $W\colon \Omega \times \mathrm{Mat} \to [0, \infty]$ è *policonvessa* ovvero esiste $g\colon \Omega \times \mathrm{Mat} \times \mathrm{Mat} \times \mathbb{R} \to [0, \infty]$ non negativa e continua tale che per ogni $x \in \Omega$ la mappa

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Mat} \times \mathrm{Mat} \times \mathbb{R} \to [0, +\infty] \\
&(F, H, \delta) \mapsto g(x, F, H, \delta)
\end{aligned}$$

è convessa e $W(x, F) = g(x, F, \operatorname{cof} F, \det F)$.

(W2) Esistono costanti $c_1 > 0$ e c_2 tali che $g(x, F, H, \delta) \geq c_1 + c_2(|F|^p + |H|^q + |\delta|^r)$.

(W3) $g(x, F, H, \delta) < \infty$ se e solo se $\delta > 0$.

Le ipotesi sulla densità di massa, sul potenziale esterno e sullo sforzo al bordo sono le seguenti.

(P1) La funzione $\mu\colon \Omega \to \mathbb{R}_+$ è continua e si estende con continuità in $\overline{\Omega}$ e $\psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è continua e convessa. Inoltre esistono c_3 e c_4 costanti positive tali che $\psi(y) \geq -c_3 - c_4|y|^p$.

(P2) $\overline{s} \in L^2(\Gamma_2)$.

Aggiungiamo un'ulteriore ipotesi che dipende dalla geometria del problema al bordo. Essa è necessaria affinché la riposta elastica del materiale alle deformazioni sia sufficiente ad evitare che il potenziale esterno possa deformare indefinitamente il corpo impedendogli di assumere una configurazione di equilibrio.

(G) $\frac{c_2}{2K} > c_4\|\mu\|_\infty$, dove K è la costante che appare nel Lemma 3.6.

Osserviamo che il campo della forza peso è descritto dal potenziale $\psi(y) = gy_3$ che soddisfa la condizione (P1) con $c_4 = g$. In tale caso l'ipotesi (G) si riduce a $\frac{c_2}{2K} > \|\mu\|_\infty g$.

Nota. Con queste ipotesi il funzionale J è ben definito da $W^{1,p}(\Omega)$ in $(-\infty, \infty]$. In particolare è ben definito in $\mathfrak{A}$.

3.3.5 Teorema di esistenza

Possiamo ora enunciare e dimostrare il teorema di esistenza per il problema in forma debole.

Teorema 3.7 (Ball 1976)**.** Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aperto connesso e limitato con frontiera di classe C^1. Siano Γ_1 e Γ_2 insiemi disgiunti relativamente aperti di $\partial\Omega$ tali che $\partial\Omega \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ abbia superficie nulla e Γ_1 abbia superficie strettamente positiva.

Valgano le ipotesi (W1), (W2), (W3), (P1), (P2) e (G). Sia $\mathfrak{A}$ definito come in (3.11). Supponiamo esista almeno un $u \in \mathfrak{A}$ tale che $J(u) < \infty$.

Allora esiste u^* minimizzante globale di J su $\mathfrak{A}$.

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che, grazie al teorema di traccia, se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ allora esiste $K_1 > 0$ tale che

$$\int_{\Gamma_2} |u|^p d\sigma \leq \int_{\partial\Omega} |u|^p d\sigma \leq K_1 \left(\int_\Omega |u|^p dx + \int_\Omega |Du|^p dx \right). \tag{3.13}$$

Adesso, se $u \in \mathfrak{A}$ allora, grazie all'ipotesi (W2)

$$J(u) \geq c_1 \operatorname{vol}\Omega + c_2 \int_\Omega |Du|^p dx + c_2 \int_\Omega |\operatorname{cof} Du|^q dx + c_2 \int_\Omega |\det Du|^r dx + \\ + \int_\Omega \mu\psi(u) dx - \int_{\Gamma_2} \overline{s} \cdot u d\sigma.$$

Per il Lemma 3.6 abbiamo

$$J(u) \geq \text{cost.} + \frac{c_2}{2} \int_\Omega |Du|^p dx + \frac{c_2}{2K} \int_\Omega |u|^p dx - \frac{c_2}{2} \left| \int_{\Gamma_1} u d\sigma \right|^p + \\ + c_2 \int_\Omega |\operatorname{cof} Du|^q dx + c_2 \int_\Omega |\det Du|^r dx + \\ + \int_\Omega \mu\psi(u) dx - \int_{\Gamma_2} \overline{s} \cdot u d\sigma.$$

Osserviamo che:

(i) $\int_{\Gamma_1} u d\sigma = \int_{\Gamma_1} \overline{u} d\sigma$ è costante;

(ii) per l'ipotesi (P1) e il fatto che μ è limitata vale che

$$\int_\Omega \mu\psi(u) dx \geq \text{cost.} - c_4 \int_\Omega \mu |u|^p dx \geq \text{cost.} - c_4 \|\mu\|_\infty \int_\Omega |u|^p dx;$$

(iii) per $\epsilon > 0$ vale $-\overline{s} \cdot u = \frac{(\overline{s} - \epsilon u)^2}{2\epsilon} - \frac{|\overline{s}|^2}{2\epsilon} - \frac{\epsilon}{2}|u|^2 \geq \text{cost.} - \frac{\epsilon}{2}|u|^2$, per cui da (3.13) e dal Lemma 1.14 otteniamo

$$- \int_{\Gamma_2} \overline{s} \cdot u d\sigma \geq \text{cost.} - \epsilon K_2 \left(\int_\Omega |u|^p dx + \int_\Omega |Du|^p dx \right),$$

per una opportuna costante $K_2 > 0$ che non dipende da ϵ.

Allora

$$J(u) \geq \text{cost.} + \left(\frac{c_2}{2K} - \epsilon K_2 - c_4 \|\mu\|_\infty \right) \int_\Omega |u|^p dx + \left(\frac{c_2}{2} - \epsilon K_2 \right) \int_\Omega |Du|^p dx + \\ + c_2 \int_\Omega |\operatorname{cof} Du|^q dx + c_2 \int_\Omega |\det Du|^r dx.$$

Grazie all'ipotesi (G), scegliendo ϵ sufficientemente piccolo, esiste una costante positiva K_3 tale che

$$J(u) \geq \text{cost.} + K_3 \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} + c_2 \int_\Omega |\operatorname{cof} Du|^q dx + c_2 \int_\Omega |\det Du|^r dx. \tag{3.14}$$

Sia ora $\{u^{(n)}\} \subset \mathfrak{A}$ una sequenza minimizzante cioè $\lim_{n\to\infty} J(u^{(n)}) = l = \inf_{u \in A} J(u)$. Sappiamo che l è finito. Possiamo poi assumere che $l + 1 \geq J(u^{(n)})$. Allora per (3.14) abbiamo che $u^{(n)}$, $\operatorname{cof} Du^{(n)}$

e $\det Du^{(n)}$ sono limitate rispettivamente in $W^{1,p}(\Omega)$, $L^q(\Omega)$, $L^r(\Omega)$. Per il Teorema 1.5 troviamo una sottosuccessione $\{u^{(n_k)}\}$ tale che

$$\begin{aligned} u^{(n_k)} &\rightharpoonup u^* \quad \text{in } W^{1,p}(\Omega) \\ \operatorname{cof} Du^{(n_k)} &\rightharpoonup H \quad \text{in } L^q(\Omega) \\ \det Du^{(n_k)} &\rightharpoonup \delta \quad \text{in } L^r(\Omega). \end{aligned}$$

Grazie alla Proposizione 3.3 sappiamo che $H = \operatorname{cof} Du^*$ e $\delta = \det Du^*$.

Adesso, grazie al teorema di Rellich–Kondrachov abbiamo che $W^{1,p}(\Omega)$ è incluso con continuità in $L^2(\Omega)$ per $p \geq 2$. Dunque $u^{(n_k)} \rightharpoonup u^*$ in $L^2(\Omega)$ e quindi per il teorema di traccia anche in $L^2(\Gamma_2)$. Essendo $\overline{s} \in L^2(\Gamma_2)$ allora

$$\int_{\Gamma_2} \overline{s} \cdot u^{(n_k)} d\sigma \to \int_{\Gamma_2} \overline{s} \cdot u^* d\sigma.$$

Esiste allora il limite

$$\int_\Omega W(x, Du^{(n_k)})dx + \int_\Omega \mu\psi(u^{(n_k)})dx \to \left(l + \int_{\Gamma_2} \overline{s} \cdot u^* d\sigma\right).$$

Poi, se poniamo

$$f_k = (u^{(n_k)}, Du^{(n_k)}, \operatorname{cof} Du^{(n_k)}, \det Du^{(n_k)}) \qquad f = (u^*, Du^*, \operatorname{cof} Du^*, \det Du^*),$$

abbiamo che $f_k \rightharpoonup f$ in $L^1(\Omega)$, in quanto $L^1(\Omega)$ è incluso con continuità in $W^{1,p}(\Omega)$, $L^q(\Omega)$ e $L^r(\Omega)$. Quindi se definiamo $G(x, y, F, H, \delta) = g(x, F, H, \delta) + \mu(x)\psi(y)$ vengono soddisfatte le ipotesi del seguente lemma.

Lemma 3.8. Sia $G\colon \Omega \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$, $G = G(x, z)$, non negativa, continua in x, continua e convessa in z per ogni $x \in \Omega$. Sia $f_k \rightharpoonup f$ in $L^1(\Omega)$ tale che esista

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega G(x, f_k(x))dx. \tag{3.15}$$

Allora

$$\int_\Omega G(x, f(x))dx \leq \lim_{k\to\infty} \int_\Omega G(x, f_k(x))dx,$$

ovvero il funzionale $f \mapsto \int_\Omega G(x, f(x))dx$ è inferiormente semicontinuo per le successioni che ammettono il limite (3.15).

Dimostrazione del Lemma 3.8. Per il lemma di Mazur esiste una successione di combinazioni lineari finite convesse delle f_k, diciamo $\tilde{f}_k = \sum_{m=k}^\infty \lambda_m^{(k)} f_m$ tale che $\tilde{f}_k \to f$ in $L^1(\Omega)$. Grazie al teorema di Fischer–Riesz possiamo assumere che $\tilde{f}_k \to f$ q.o. Ora

$$\int_\Omega G(x, \tilde{f}_k)dx \leq \sum_{m=k}^\infty \lambda_m^{(k)} \int_\Omega G(x, f_m)dx \leq \sup_{m\geq k} \int_\Omega G(x, f_m)dx.$$

Prendendo il limite inferiore per $k \to \infty$ e usando il lemma di Fatou si ottiene

$$\int_\Omega G(x, f)dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega G(x, \tilde{f}_k)dx \leq \liminf_{k\to\infty} \sup_{m\geq k} \int_\Omega G(x, f_m)dx = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega G(x, f_k)dx,$$

da cui la tesi. □

Grazie al lemma otteniamo che $J(u^*) \leq \lim_{k\to\infty} J(u^{(n_k)}) \leq J(u^*)$ che dimostra che u^* è un minimizzante di J ammesso che appartenga ad $\mathfrak{A}$. Per verificarlo osserviamo che, dal momento che $J(u^*) < \infty$, allora per l'ipotesi (W3) deve essere $\det Du > 0$ q.o. Inoltre $u^{(n_k)}|_{\Gamma_1} \rightharpoonup u^*|_{\Gamma_1}$ grazie al teorema di traccia. Per cui $u^*|_{\Gamma_1} = \overline{u}$. □

Capitolo 4

Equazioni di Eulero–Lagrange

In questo capitolo tenteremo di chiarire se il minimizzante u^*, la cui esistenza è garantita dal Teorema 3.7, soddisfa il problema (3.1), naturalmente in senso debole dal momento che non sappiamo se u^* è sufficientemente derivabile. In altri termini affrontiamo il problema di stabilire se u^* è soluzione debole delle equazioni di Eulero–Lagrange associate al problema di minimizzazione.

4.1 Equazioni di Eulero–Lagrange in coordinate materiali

Guidati dai passaggi formali (3.3) diciamo che $u \in \mathfrak{A}$ è *soluzione debole* del problema (3.1) se

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial W}{\partial F_{i\alpha}}(x, Du) \frac{\partial \phi_i}{\partial x_\alpha} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial y_i}(u)\phi_i \right) dx - \int_{\Gamma_2} \overline{s} \cdot \phi d\sigma = 0 \tag{4.1}$$

per ogni $\phi \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ tale che $\phi|_{\Gamma_1} = 0$. Ci aspetteremmo che u^*, minimizzante di J su $\mathfrak{A}$, sia una soluzione debole. Tuttavia nel cercare di rendere rigorosi i passaggi formali (3.3) sorge il problema che una generica variazione $u^* + \tau\phi$ di u^*, con $\phi \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, potrebbe non appartenere ad $\mathfrak{A}$, nemmeno se $|\tau|$ è sufficientemente piccolo. Questo fatto è illustrato dall'esempio che segue.

Esempio. Sia $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 > 0, |x_2| < 1, |x_3| < 1\}$. In rifermento alla definizione di $\mathfrak{A}$ consideriamo il caso $p = q = r = 2$. Prendiamo $u(x) = \left(x_1^{3/4}, x_1^{3/4}x_2, x_3\right)$. Calcolando $\operatorname{cof} Du$ e $\det Du$ è facile vedere che $u \in \mathfrak{A}$. Prendiamo adesso $\phi \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ tale che $\phi(x) = x$ per $x \in V$ con V intorno di 0. Allora preso $\tau > 0$, in $V \cap \Omega$ abbiamo

$$\det(Du - \tau D\phi) = \det \begin{pmatrix} \frac{3}{4}x_1^{-1/4} - \tau & 0 & 0 \\ \frac{3}{4}x_1^{-1/4}x_2 & x_1^{3/4} - \tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \tau \end{pmatrix} = (1 - \tau)\left(\frac{3}{4}x_1^{1/2} - \frac{3}{4}\tau x_1^{-1/4} - \tau x_1^{3/4} + \tau^2\right).$$

Vediamo che per ogni $1 > \tau > 0$ si ha $\det(Du - \tau D\phi) \to -\infty$ per $x_1 \to 0^+$. Quindi, indipendentemente da τ, non è vero che $\det(Du - \tau D\phi) > 0$ q.o. su Ω, e quindi $u - \tau\phi \notin \mathfrak{A}$.

Per aggirare questi problemi siamo costretti a rimuovere il vincolo $\det Du > 0$ q.o. su Ω. Quindi sostituiamo lo spazio di ammissibilità $\mathfrak{A}$ con

$$\mathfrak{A}' = \{u \in W^{1,p}(\Omega) \mid \operatorname{cof} Du \in L^q(\Omega),\ \det Du \in L^r(\Omega),\ u|_{\Gamma_1} = \overline{u}\}$$

e sostituiamo l'ipotesi (W3) con la seguente ipotesi:

(W3′) $g < \infty$ su tutto il dominio di definizione di g.

Notiamo che con queste sostituzioni il teorema di esistenza è ancora valido.

Fatte queste semplificazioni otteniamo il seguente risultato.

Proposizione 4.1. Nelle ipotesi del Teorema 3.7 si sostituisca $\mathfrak{A}$ con $\mathfrak{A}'$ e (W3) con (W3′). Supponiamo che $p \geq q \geq r$. Valgano inoltre le seguenti ipotesi:

(W4) W è di classe C^1 in F ed esiste $c_5 > 0$ tale che

$$\left|\frac{\partial W}{\partial F}(x, F)\right| \leq c_5(1 + |F|^p + |\operatorname{cof} F|^q + |\det F|^r)$$

per ogni $x \in \Omega$ e $F \in \mathrm{Mat}$.

(P3) ψ è di classe C^1 ed esiste $c_6 > 0$ tale che $|\nabla\psi(y)| \leq c_6(1 + |y|^s)$ per ogni $y \in \mathbb{R}^3$, dove $1 \leq s < p^*$.

Allora, se u^* è un minimizzante di J su $\mathfrak{A}'$, vale (4.1).

Dimostrazione. Verifichiamo prima di tutto che $u^* + \tau\phi \in \mathfrak{A}'$ per ogni τ con $|\tau|$ sufficientemente piccolo e $\phi \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$. Ovviamente $u^* + \tau\phi \in W^{1,p}(\Omega)$. Poi

$$\operatorname{cof}(Du^* + \tau D\phi) = \operatorname{cof}(Du^*) + \tau[\epsilon_{ijk}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}(Du^*)_{j\beta}(D\phi)_{k\gamma}]e_i \otimes e_\alpha + \tau^2 \operatorname{cof}(D\phi)$$

e dunque $\operatorname{cof}(Du^* + \tau D\phi) \in L^q(\Omega)$ essendo che $p \geq q$. Analogamente

$$\det(Du^* + \tau D\phi) = \det(Du^*) + \frac{1}{3}\tau D\phi \cdot \operatorname{cof} Du^* + \frac{1}{3}\tau^2 Du^* \cdot \operatorname{cof} D\phi + \tau^3 \det(D\phi)$$

e quindi $\det(Du^* + \tau D\phi) \in L^r(\Omega)$ perché $r \leq q \leq p$.

L'idea è ora quella di mostrare che la derivata $\frac{d}{d\tau}J(u^* + \tau\phi)|_{\tau=0}$ esiste e coincide con il primo membro di (4.1). Essendo u^* un minimizzante questa derivata si annulla e si otterrebbe la tesi. Vediamo immediatamente che $\lim_{\tau\to 0}\int_{\Gamma_2} \overline{s} \cdot \frac{(u^*+\tau\phi)-u^*}{\tau} d\sigma = \int_{\Gamma_2} \overline{s} \cdot \phi d\sigma$. Calcoliamo $\lim_{\tau\to 0}\int_\Omega \mu \frac{\psi(u^*+\tau\phi)-\psi(u^*)}{\tau}dx$. Ora, per il teorema di Lagrange in ogni $x \in \Omega$

$$\frac{\psi(u^*(x) + \tau\phi(x)) - \psi(u^*(x))}{\tau} = \nabla\psi(u^*(x) + \eta(x)\phi(x)) \cdot \phi(x)$$

per qualche $\eta(x) \in [0, 1]$. Allora per (P3)

$$\begin{aligned}\left|\mu\frac{\psi(u^* + \tau\phi) - \psi(u^*)}{\tau}\right| &\leq c_6\mu|\phi| \left(1 + |u^* + \eta\phi|^s\right) \leq \\ &\leq c_6\mu|\phi| \left(1 + (|u^*| + |\phi|)^s\right) \in L^1(\Omega),\end{aligned}$$

dove si usa che $|u^*| \in L^s(\Omega)$ grazie al teorema di Rellich–Kondrachov. Pertanto per il teorema della convergenza dominata

$$\lim_{\tau\to 0}\int_\Omega \mu\frac{\psi(u^* + \tau\phi) - \psi(u^*)}{\tau}dx = \int_\Omega \mu\nabla\psi(u^*) \cdot \phi dx.$$

Per calcolare $\lim_{\tau\to 0}\int_\Omega \frac{W(x,Du^*+\tau D\phi)-\psi(Du^*)}{\tau}dx$ si procede in modo analogo utilizzando (W4) e $p \geq q \geq r$. Si ottiene

$$\lim_{\tau\to 0}\int_\Omega \frac{W(x, Du^* + \tau D\phi) - W(x, Du^*)}{\tau}dx = \int_\Omega \frac{\partial W}{\partial F_{i\alpha}}(x, Du^*)\frac{\partial \phi_i}{\partial x_\alpha}dx$$

come si voleva. □

4.2 Equazioni di Eulero–Lagrange in coordinate spaziali

Per evitare di dover introdurre le semplificazioni discusse nella sezione precedente, occorre limitare le possibili variazioni di u^* in modo che esse continuino ad appartenere ad $\mathfrak{A}$.

A tale proposito consideriamo $\phi \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ tale che ϕ e $D\phi$ siano limitate. Detta $u_\tau = u^* + \tau\phi(u^*)$, per il Teorema 1.19 si ha $u_\tau \in W^{1,p}(\Omega)$ ed inoltre $Du_\tau = (\mathbb{I} + \tau D\phi(u^*))Du^*$. Quindi

$$\begin{aligned}\operatorname{cof} Du_\tau &= \operatorname{cof}(\mathbb{I} + \tau D\phi(u^*)) \operatorname{cof} Du^* \in L^q(\Omega) \\ \det Du_\tau &= \det(\mathbb{I} + \tau D\phi(u^*)) \det Du^* \in L^r(\Omega)\end{aligned}$$

e $\det Du_\tau > 0$ q.o. su Ω perché $\det(\mathbb{I} + \tau D\phi(u^*)) \rightrightarrows 1$ uniformemente per $\tau \to 0$. Infatti $D\phi$ è limitata e il determinante è una mappa continua. Concludiamo che $u_\tau \in \mathfrak{A}$ per $|\tau|$ piccolo.

Possiamo dunque limitarci a considerare le variazioni della forma di u_τ.

Proposizione 4.2. Valgano le ipotesi del Teorema 3.7. Si assuma inoltre (P3) e la seguente ipotesi su W.

(W4′) W è di classe C^1 nelle $F \in \mathrm{Mat}^+$ ed esiste $c_7 > 0$ tale che

$$\left|\frac{\partial W}{\partial F}(x, F)F^T\right| \leq c_7(1 + |F|^p + |\operatorname{cof} F|^q + |\det F|^r)$$

per ogni $x \in \Omega$ e $F \in \mathrm{Mat}^+$.

Allora se u^* è un minimizzante di J su $\mathfrak{A}$, si ha

$$\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial W}{\partial F}(x, Du^*)(Du^*)^T \right) \cdot D\phi(u^*) + \mu \nabla\psi(u^*) \cdot \phi(u^*) \right] dx - \int_{\Gamma_2} \overline{s} \cdot \phi(u^*) d\sigma = 0 \tag{4.2}$$

per ogni $\phi \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ tale che $\phi(u^*)|_{\Gamma_1} = 0$ nel senso della traccia.

Dimostrazione. Calcoliamo $\lim_{\tau\to 0} \int_\Omega \frac{W(x,(\mathbb{I}+\tau D\phi(u^*))Du^*)-W(x,Du^*)}{\tau} dx$. Ora, per il teorema di Lagrange esiste $\eta \in [0,1]$ tale che

$$\begin{aligned}\frac{W(x,(\mathbb{I}+\tau D\phi(u^*))Du^*) - W(x,Du^*)}{\tau} &= \frac{\partial W}{\partial F}(x, (\mathbb{I}+\eta\tau D\phi(u^*))Du^*) \cdot [D\phi(u^*)(Du^*)] = \\ &= \left[\frac{\partial W}{\partial F}(x, (\mathbb{I}+\eta\tau D\phi(u^*))Du^*)(Du^*)^T \right] \cdot D\phi(u^*).\end{aligned}$$

Adesso facciamo uso del seguente lemma.

Lemma 4.3. Esiste $\gamma > 0$ tale che se $C \in \mathrm{Mat}^+$ e $|C - \mathbb{I}| < \gamma$ si ha

$$\left| \frac{\partial W}{\partial F}(x, CF)F^T \right| = 4c_7(1 + |F|^p + |\operatorname{cof} F|^q + |\det F|^r)$$

per ogni $F \in \mathrm{Mat}^+$ e $x \in \Omega$.

Dimostrazione del Lemma 4.3. Fissati $C \in \mathrm{Mat}^+$ e $F \in \mathrm{Mat}^+$ si ha che

$$\begin{aligned}\left| \frac{\partial W}{\partial F}(x, CF)F^T \right| = \left| \frac{\partial W}{\partial F}(x, CF)F^T C^T C^{-T} \right| &= \left| \frac{\partial W}{\partial F}(x, CF)(CF)^T C^{-T} \right| \\ &\leq c_7(1 + |CF|^p + |\operatorname{cof}(CF)|^q + |\det(CF)|^r)|C^{-T}|.\end{aligned}$$

Siccome $C \mapsto |C^{-T}|$ è continua allora esiste $\gamma > 0$ tale che se $|C - \mathbb{I}| < \gamma$ si ha $|C^{-T}| \leq 2$. Infatti $|\mathbb{I}| = \sqrt{3} < 2$. Inoltre

$$1 + |CF|^p + |\operatorname{cof}(CF)|^q + |\det(CF)|^r \leq 1 + |C|^p|F|^p + |\operatorname{cof} C|^p|\operatorname{cof} F|^q + |\det C|^p|\det F|^r.$$

È allora sufficiente scegliere $\gamma > 0$ in modo che se $|C - \mathbb{I}| < \gamma$ si abbia $|C|^p \leq 2$, $|\operatorname{cof} C|^p \leq 2$ e $|\det C|^p \leq 2$. □

Adesso per l'ipotesi di limitatezza di $D\phi$, quando $|\tau|$ è sufficientemente piccolo anche $|\eta\tau D\phi(u^*)|$ è piccolo, quindi applicando il lemma e la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz abbiamo che

$$\left| \frac{W(x,(\mathbb{I}+\tau D\phi(u^*))Du^*) - W(x,Du^*)}{\tau} \right| \lesssim (1 + |Du^*|^p + |\operatorname{cof} Du^*|^q + |\det Du^*|^r).$$

Ma il secondo membro appartiene ad $L^1(\Omega)$. Per cui si applica il teorema della convergenza dominata e si ottiene

$$\lim_{\tau\to 0} \int_\Omega \frac{W(x,(\mathbb{I}+\tau D\phi(u^*))Du^*) - W(x,Du^*)}{\tau} dx = \int_\Omega \left(\frac{\partial W}{\partial F}(x, Du^*)(Du^*)^T \right) \cdot D\phi(u^*) dx.$$

Con calcoli analoghi a quelli della dimostrazione della Proposizione 4.1, si ottengono i restanti termini nel membro di sinistra in (4.2). Abbiamo dunque mostrato che $\frac{d}{d\tau} J(u^* + \tau\phi(u^*))|_{\tau=0} = 0$ coincide con il primo membro in (4.2). □

Rimane ora da interpretare l'equazione in forma debole (4.2). Per farlo vorremmo effettuare il cambio di variabili $y = u^*(x)$ passando dalle coordinate materiali a quelle spaziali. Tuttavia non sapendo se u^* sia diffeomorfismo tra Ω e l'immagine $\mathscr{B} = u^*(\Omega)$ questo passaggio risulta essere critico e siamo costretti a supporlo a *a priori*. Otteniamo così il seguente teorema.

Teorema 4.4. Valgano le ipotesi della Proposizione 4.2. Si assuma inoltre che u^* sia un diffeomorfismo di classe C^2 tra Ω e $\mathscr{B} = u^*(\Omega)$ che si estende in modo continuo su $\overline{\Omega}$. Si supponga che $\mathscr{B}$ sia limitato. Allora per ogni $\phi \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ tale che $\phi|_{\mathcal{S}_1} = 0$ si ha

$$\int_{\mathscr{B}} [T(y) \cdot D\phi(y) + \rho(y)\nabla\psi(y) \cdot \phi(y)] dy - \int_{\mathcal{S}_2} \overline{t}(y) \cdot \phi(y) d\sigma(y) = 0 \tag{4.3}$$

dove $\mathcal{S}_i = u^*(\Gamma_i)$ con $i = 1, 2$ e T, ρ, $\overline{t}$ sono rispettivamente il tensore degli sforzi di Cauchy, la densità di massa e la trazione in coordiate spaziali.

Dimostrazione. Essendo $\mathscr{B}$ limitato non è restrittivo limitarsi a verificare (4.3) per $\phi \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ limitata e con $D\phi$ limitato. In tale caso è sufficiente effettuare il cambio di variabili nell'integrale (4.2). □

L'equazione (4.3) è la forma debole dell'equazione di bilancio locale delle forze in coordinate spaziali.

Capitolo 5

Disuguaglianze costitutive in elasticità non lineare

Come anticipato nella Premessa, è un problema fondamentale in Meccanica dei Continui quello di determinare delle restrizioni generali sulle relazioni costitutive. In particolare, per i materiali iperelastici, esse dovranno riguardare la densità di energia elastica. Queste restrizioni plausibilmente devono potersi esprimere come disuguaglianze, pertanto ad esse ci si riferisce con il nome di *disuguaglianze costitutive*.

Il metodo più appropriato per determinarle sarebbe quello di basarsi su principi fisici fondamentali. Truesdell e Noll sostengono [15, p. 47] che solo una teoria completa e unificata della termodinamica di non equilibrio e dell'elettrodinamica dei mezzi continui permetterebbe di dare una risposta definitiva al problema.

Un'alternativa a questo metodo è quella di ricercare delle ipotesi fisicamente ragionevoli sulle relazioni costitutive che allo stesso tempo garantiscono l'esistenza di soluzioni per certi problemi fisici rilevanti, come appunto quello dell'equilibrio trattato in questa tesi. Le ipotesi (W1) e (W2) che abbiamo formulato nel Capitolo 3 sono degli esempi di disuguaglianze costitutive determinate in questo modo.

In questo capitolo discuteremo l'ipotesi (W1) cioè la policonvessità, mettendola in relazione con altre nozioni di convessità e illustrandone per quanto possibile il significato fisico.

5.1 Un'analogia con un sistema termodinamico omogeneo

Consideriamo un sistema termodinamico omogeneo descritto dai parametri (v, T) dove v è il volume specifico e T la temperatura. Sia $f = f(v, T)$ la sua energia libera di Helmholtz specifica. È noto che allora la pressione è data da $p = -\frac{\partial f}{\partial v}$. Il coefficiente di comprimibilità isoterma è definito da $\alpha_T = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T$. Osserviamo che

$$\alpha_T = -\frac{1}{v\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T} = \frac{1}{v\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}}.$$

È naturale richiedere che $\alpha_T > 0$, quindi f deve essere una funzione convessa.

Consideriamo adesso un corpo continuo elastico Ω. Ragionando per analogia con il sistema termodinamico omogeneo che abbiamo appena decritto, siamo portati ad identificare la densità di energia elastica W con la densità di energia libera nella configurazione di riferimento. In questa analogia al volume specifico v corrisponde il gradiente di deformazione, alla pressione p corrisponde l'opposto del tensore degli sforzi di Piola S. La temperatura di Ω non viene presa in considerazione perché stiamo trascurando gli effetti termici.

5.2 Convessità

Da queste considerazioni saremmo indotti a imporre che W sia una funzione convessa di F. Sotto questa ipotesi, aggiungendo delle opportune condizioni di crescita, sarebbe effettivamente possibile ottenere un risultato di esistenza simile al Teorema 3.7. Tuttavia l'ipotesi che W sia convessa non è fisicamente plausibile. Essa, come infatti giustificheremo più sotto, esclude l'esistenza di minimizzanti *propriamente* locali del funzionale J e dunque la possibilità che il corpo elastico possa assumere molteplici configurazioni di equilibrio ad energie differenti. Quest'ultima situazione è invece comune perché spesso è possibile deformare un corpo elastico dalla sua configurazione "naturale", che ha la minima energia possibile, ad altre configurazioni di equilibrio che pur essendo compatibili con la configurazione naturale hanno tuttavia energia strettamente maggiore. Si pensi ad esempio ad un oggetto di gomma la cui superficie è parzialmente vincolata ad una posizione fissa, che viene deformato fino ad acquisire una configurazione “forzata”, che plausibilmente deve possedere un'energia maggiore.

Giustifichiamo dunque il fatto che la convessità di W esclude l'esistenza di minimizzanti propriamente locali. Per semplicità poniamo nulli il campo di forze esterno e la trazione su Γ_2. Scegliamo come spazio di ammissibilità $\mathfrak{A}'' = \{u \in W^{1,p}(\Omega) \mid \det Du > 0 \text{ q.o. e } u|_{\Gamma_1} = \overline{u}\}$. Assumiamo che $W\colon \mathrm{Mat} \to [0,\infty]$ sia continuo e *convesso*. Inoltre valga che $W(F) < \infty$ se e solo se $\det F > 0$. Consideriamo il funzionale

$$J(u) = \int_\Omega W(Du)dx,$$

ben definito da $W^{1,p}(\Omega)$ in $[0,\infty]$.

Definizione 5.1. Un elemento $u^{(0)} \in \mathfrak{A}''$ si dice minimizzante locale di J se esiste $\epsilon > 0$ tale che $J(u^{(0)}) \leq J(u)$ per ogni $u \in \mathfrak{A}''$ tale che $\|u - u^{(0)}\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \epsilon$.

Abbiamo allora il seguente risultato.

Proposizione 5.2. Sia $u^{(0)}$ un minimizzante locale di J e u^* un minimizzante globale di J su $\mathfrak{A}''$. Se W è convessa allora $J(u^{(0)}) = J(u^*)$.

Dimostrazione. Per assurdo $J(u^{(0)}) > J(u^*)$. Si ponga $u^{(\lambda)} = (1-\lambda)u^{(0)} + \lambda u^*$. Notiamo che, fissato $\lambda \in [0,1]$, vale una delle due seguenti alternative:

(i) $u^{(\lambda)} \in \mathfrak{A}''$;

(ii) $u^{(\lambda)} \notin \mathfrak{A}''$ ma $J(u^{(\lambda)}) = \infty$.

Infatti l'unico modo affinché $u^{(\lambda)}$ non sia elemento di $\mathfrak{A}''$ è che non valga la condizione $\det Du^{(\lambda)} > 0$ q.o.

Per convessità di W si ha $J(u^{(\lambda)}) \leq (1-\lambda)J(u^{(0)}) + \lambda J(u^*)$. Per $\lambda > 0$ abbastanza piccolo $\|u^{(\lambda)} - u^{(0)}\| < \epsilon$ dove $\epsilon > 0$ è quello della Definizione 5.1. In tale caso, $J(u^{(\lambda)}) \geq J(u^{(0)})$, indipendentemente dalla validità di (i) o (ii). Ma allora $(1-\lambda)J(u^{(0)}) + \lambda J(u^*) \geq J(u^{(0)})$ da cui $J(u^*) \geq J(u^{(0)})$ che contraddice l'ipotesi iniziale che fosse $J(u^{(0)}) > J(u^*)$. ◻

5.3 Policonvessità

Abbiamo dunque escluso la convessità di W rispetto ad F. L'ipotesi più debole individuata da Ball, maggiormente ragionevole dal punto di vista fisico, che abbiamo utilizzato per dimostrare il Teorema 3.7 sull'esistenza delle soluzioni, è l'ipotesi (W1) ovvero che W sia *policonvessa*. Per completezza ripetiamo, in forma più generale, la definizione di policonvessità.

Definizione 5.3. Una funzione $W\colon \mathrm{Mat} \to [0,\infty]$ si dice policonvessa se esiste $g\colon \mathrm{Mat}\times\mathrm{Mat}\times\mathbb{R} \to [0,\infty]$ convessa in $\mathrm{Mat}\times\mathrm{Mat}\times\mathbb{R}$ tale che $W(F) = g(F, \mathrm{cof}\, F, \det F)$.

Questa ipotesi permette l'esistenza di più minimizzanti locali ad energie diverse come si potrebbe mostrare mediante esempi espliciti.

5.4 Convessità di rango 1

L'ipotesi di policonvessità di W, pur essendo più debole della convessità, garantisce che W soddisfi ad una ulteriore proprietà, la convessità di rango 1, che è irrinunciabile per le sue implicazioni fisiche.

Definizione 5.4. Una funzione $W\colon \mathrm{Mat} \to [0,\infty]$ si dice convessa di rango 1 se per ogni $F \in \mathrm{Mat}$, $N \in \mathbb{R}^3$ e $a \in \mathbb{R}^3$ si ha che $t \mapsto W(F + ta \otimes N)$ è convessa.

Nota. Se W è di classe C^2 allora la convessità di rango 1 è equivalente alla *condizione di ellitticità* $\frac{\partial^2 W}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}} a_i a_j N_\alpha N_\beta \geq 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}^3$ e $N \in \mathbb{R}^3$.

Come abbiamo anticipato vale il seguente fatto.

Proposizione 5.5. La policonvessità implica la convessità di rango 1.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che $\operatorname{cof}(a \otimes N)_{i\alpha} = \frac{1}{2}(a \times a)_i (N \times N)_\alpha = 0$ e dunque anche $\det(a \otimes N) = 0$.

Allora abbiamo che

$$\operatorname{cof}(F + ta \otimes N) = \operatorname{cof} F + \epsilon_{ijk}\epsilon_{\alpha\beta\gamma} a_j N_\beta F_{k\gamma} e_i \otimes e_\alpha$$
$$\det(F + ta \otimes N) = \det F + t(a \otimes N) \cdot \operatorname{cof} F.$$

Quindi la mappa $\tau \colon t \mapsto (F + ta \otimes N, \operatorname{cof}(F + ta \otimes N), \det(F + ta \otimes N))$ è lineare.

Se ne conclude che $t \mapsto W(F + ta \otimes N) = g(\tau(t))$ è convessa perché composizione di una funzione lineare ed una convessa. □

Illustriamo una delle implicazioni fisiche della convessità di rango 1. Consideriamo un corpo omogeneo Ω di densità di massa μ e densità di energia elastica $W \in C^2(\mathrm{Mat}; \mathbb{R})$. Ci proponiamo di cercare le ipotesi necessarie affinché il problema elastodinamico ammetta soluzioni della forma $u(x,t) = Fx + af(N \cdot x - ct)$, cioè una deformazione omogenea $x \mapsto Fx$ sovrapposta con l'onda piana polarizzata lungo a che si propaga nella direzione di $N \in \partial B(0,1)$ con velocità c. Trattando l'onda piana come una perturbazione linearizziamo il problema attorno alla deformazione $x \mapsto Fx$. Sviluppiamo dunque il tensore degli sforzi di Piola $S = \frac{\partial W}{\partial F}$ attorno a F ottenendo

$$S(F+H)_{i\alpha} = \frac{\partial W}{\partial F_{i\alpha}}(F) + \frac{\partial^2 W}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}}(F) H_{j\beta} + \mathcal{O}(|H|^2).$$

Chiamiamo $\overline{S}$ il tensore degli sforzi linearizzato. Imponiamo ora che u sia soluzione dell'equazione di Cauchy con tensore degli sforzi di Piola $\overline{S}$. Osservando che $Du(x,t) = F + f'(x \cdot N - ct) a \otimes N$, l'equazione di Cauchy si scrive nel modo seguente:

$$\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\overline{S}(Du)_{i\alpha}\right] = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\frac{\partial W}{\partial F_{i\alpha}}(F) + \frac{\partial^2 W}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}}(F) f'(x \cdot N - ct) a_j N_\beta\right].$$

Da cui

$$c^2 \mu a_i = \frac{\partial^2 W}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}}(F) a_j N_\alpha N_\beta.$$

Prendendo il prodotto scalare per a otteniamo

$$c^2 \mu |a|^2 = \frac{\partial^2 W}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}}(F) a_i a_j N_\alpha N_\beta.$$

Poiché il primo membro è positivo, si vede che la convessità di rango 1 di W è una condizione necessaria per l'esistenza di soluzioni. Mostriamo che è anche sufficiente. Definiamo allora la matrice simmetrica $C_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial F_{i\alpha}\partial F_{j\beta}}(F) N_\alpha N_\beta$, chiamata *tensore acustico*. Con questa definizione il problema si riduce all'equazione $c^2 \mu a = Ca$. Dunque, fissato $N \in \mathbb{R}$, occorre trovare a autovettore di C con autovalore $c^2\mu > 0$. La condizione di convessità di rango 1 assicura che C sia definita positiva qualunque sia N. Per tale motivo, grazie al teorema spettrale, è sempre possibile trovare una base ortogonale di autovettori a con autovalori strettamente positivi, come si voleva.

Capitolo 6

Il modello di Mooney–Rivlin

In questo capitolo studiamo l'applicazione dei teoremi presentati nei capitoli precedenti al modello di Mooney–Rivlin, un modello di materiale iperelastico adatto per descrivere certi tipi di gomma.

Il modello fu sviluppato da Mooney nel 1940 nel tentativo di costruire una teoria adatta a descrivere materiali elastici isotropi e *incomprimibili* sottoposti a grandi deformazioni elastiche.

Nonostante il successo nel riprodurre i dati sperimentali, il modello è difficilmente utilizzabile nelle simulazioni numeriche a causa dei problemi connessi con l'implementazione del vincolo di incomprimibilità.

Per evitare queste difficoltà, solitamente si sviluppano modelli per materiali comprimibili che ammettono come limite incomprimibile il modello di Mooney–Rivlin. Nel seguito illustreremo come le ipotesi del teorema di esistenza possano essere di ausilio a questo scopo, in quanto forniscono indicazioni per poter formulare relazioni costitutive fisicamente ragionevoli.

6.1 Densità di energia elastica del modello di Mooney–Rivlin

Il modello di Mooney–Rivlin nella sua formulazione originale è caratterizzato dalla densità di energia elastica

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{MR}}(F) &= \alpha(I_1(F^T F) - 3) + \beta(I_2(F^T F) - 3) = \\ &= \alpha(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + \beta(\lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_2^2 - 3), \end{aligned}$$

dove α e β sono costanti positive.

6.2 Applicabilità del teorema di esistenza

La densità di energia elastica W_{MR} non soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza. Siamo dunque condotti a correggere il modello di Mooney–Rivlin introducendo un termine aggiuntivo dipendente dal determinante ottenendo la densità di energia elastica seguente:

$$W(F) = W_{\mathrm{MR}}(F) + w(\det F), \tag{6.1}$$

dove $w\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ è una funzione continua. Affinché venga soddisfatta l'ipotesi (W3) richiediamo che $w(\delta) < \infty$ se e solo se $\delta > 0$. Dobbiamo adesso imporre la validità delle ipotesi (W1) e (W2), cioè rispettivamente la policonvessità e le condizioni di crescita.

Condizioni di crescita

Abbiamo che

$$\begin{aligned} W(F) &= -3\alpha - 3\beta + \alpha \operatorname{tr}(F^T F) + \beta \operatorname{tr}(\operatorname{cof}(F^T F)) + w(\det F) = \\ &= -3\alpha - 3\beta + \alpha|F|^2 + \beta|\operatorname{cof} F|^2 + w(\det F), \end{aligned}$$

dove abbiamo usato che $\operatorname{cof}(F^T F) = \operatorname{cof}(F^T)\operatorname{cof}(F) = (\operatorname{cof} F)^T(\operatorname{cof} F)$. Vediamo allora che l'ipotesi (W2) è soddisfatta per $p \geq 2$, $q \geq 2$ e richiedendo che $w(\delta) \geq \text{cost.} + \delta^r$ per qualche $r > 1$.

Policonvessità

Riscriviamo la densità di energia in elastica (6.1) nel modo seguente:

$$W(F) = \alpha(\operatorname{tr}(F^T F) - 3) + \beta(\operatorname{tr}((\operatorname{cof} F)^T(\operatorname{cof} F)) - 3) + w(\det F) = g(F, \operatorname{cof} F, \det F)$$

dove $g(F, H, \delta) = \alpha(\operatorname{tr}(F^T F) - 3) + \beta(\operatorname{tr}(H^T H) - 3) + w(\delta)$. Adesso, siccome una somma di funzioni convesse è convessa, affinché g sia convessa, e dunque W policonvessa, è sufficiente che lo siano le mappe

$$F \mapsto \alpha(\operatorname{tr}(F^T F) - 3) \qquad H \mapsto \beta(\operatorname{tr}(H^T H) - 3) \qquad \delta \mapsto w(\delta).$$

Le prime due lo sono perché la funzione da Mat a $\mathbb{R}_+$ data da $A \mapsto |A|^2 = \operatorname{tr}(A^T A)$ è convessa. Infatti

$$|(1-\lambda)A + \lambda B|^2 \leq ((1-\lambda)|A| + \lambda|B|)^2 \leq (1-\lambda)|A|^2 + \lambda|B|^2,$$

dove usiamo che la funzione reale $t \mapsto t^2$ è convessa. Dunque è sufficiente richiedere che w sia convessa.

6.3 Applicabilità dei teoremi sulle equazioni di Eulero–Lagrange

Discutiamo adesso l'applicabilità dei teoremi del Capitolo 4. Discuteremo separatamente il caso delle equazioni di Eulero–Lagrange in coordinate materiali e quello delle equazioni di Eulero–Lagrange in coordinate spaziali.

Equazioni di Eulero–Lagrange in coordinate materiali

Occorre calcolare $\frac{\partial W}{\partial F}$ e controllare sotto quali condizioni essa soddisfa la condizione (W4).

Supponendo w di classe C^1, calcoliamo innanzitutto

$$\frac{\partial}{\partial F} w(\det F) = (\det F) w'(\det F) F^{-T},$$

dove abbiamo usato che $\frac{\partial}{\partial F} \det F = (\det F) F^{-T}$ come si verifica immediatamente. Dobbiamo ora calcolare $\frac{\partial W_{\mathrm{MR}}}{\partial F}$. Premettiamo il seguente lemma.

Lemma 6.1. Siano $\zeta \colon \mathrm{Mat} \to \mathbb{R}$ e $\theta \colon \mathrm{Sym}^+ \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tali che $\zeta(F) = \theta(F^T F)$ per ogni $F \in \mathrm{Mat}$. Allora[1]

$$\frac{\partial \zeta}{\partial F}(F) = 2F \frac{\partial \theta}{\partial C}(F^T F)$$

per ogni $F \in \mathrm{Mat}$.

Dimostrazione. Sia $t \mapsto F(t)$ una curva liscia a valori in Mat. Indichiamo con $C(t) = F(t)^T F(t)$. Allora

$$\frac{d}{dt}\zeta(F) = \frac{\partial \zeta}{\partial F}(F) \cdot \dot{F} = \frac{d}{dt}\theta(C) = \frac{\partial \theta}{\partial C}(C) \cdot \dot{C}.$$

Adesso $\dot{C} = \dot{F}^T F + F^T \dot{F} = \dot{F}^T F + (\dot{F}^T F)^T$. Inoltre poiché $\frac{\partial \theta}{\partial C}$ è evidentemente simmetrica allora

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial C}(C) \cdot [\dot{F}^T F] =& \frac{\partial \theta}{\partial C}(C) \cdot \frac{\dot{F}^T F + (\dot{F}^T F)^T}{2} + \frac{\partial \theta}{\partial C}(C) \cdot \frac{\dot{F}^T F - (\dot{F}^T F)^T}{2} = \\ =& \frac{\partial \theta}{\partial C}(C) \cdot \frac{\dot{F}^T F + (\dot{F}^T F)^T}{2}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\frac{\partial \zeta}{\partial F}(F) \cdot \dot{F} = 2\frac{\partial \theta}{\partial C}(C) \cdot [\dot{F}^T F] = \left[2\frac{\partial \theta}{\partial C}(C) F^T\right] \cdot \dot{F}^T = \left[2F\frac{\partial \theta}{\partial C}(C)\right] \cdot \dot{F},$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata la simmetria di $\frac{\partial \theta}{\partial C}$. Data l'arbitrarietà di $t \mapsto F(t)$ la tesi segue. □

[1] Qui si può intendere che θ è la restrizione su Sym^+ di una funzione $\Theta \colon \mathrm{Mat} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $\Theta(C^T) = \Theta(C)$. Alternativamente occorrerebbe trattare Sym^+ come una varietà differenziabile dotata della metrica $\cdot$ indotta dall'immersione in Mat. Data $\theta \colon \mathrm{Sym} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 è definito il suo differenziale $D\theta(C) \colon T_C(\mathrm{Sym}^+) \to \mathbb{R}$. Tramite la metrica è possibile definire il gradiente $\frac{\partial \theta}{\partial C}(C)$ come l'unico elemento di Sym^+ tale che $\langle D\theta(C), B\rangle = \frac{\partial \theta}{\partial C}(C) \cdot B$ per ogni $B \in \mathrm{Sym} \simeq T_C(\mathrm{Sym}^+)$. È immediato verificare che se θ è la restrizione su Sym^+ di Θ come descritto sopra, allora la definizione geometrica di $\frac{\partial \theta}{\partial C}$ coincide con $\frac{\partial \Theta}{\partial C}$.

Utilizzando il lemma abbiamo che

$$\frac{\partial W_{\mathrm{MR}}}{\partial F}(F) = 2F\left[\alpha\frac{\partial I_1}{\partial C}(F^TF) + \beta\frac{\partial I_2}{\partial C}(F^TF)\right] = 2(\alpha+\beta|F|^2)F - 2\beta FF^TF$$

Abbiamo usato le identità $\frac{\partial I_1}{\partial C}(C) = \mathbb{I}$ e $\frac{\partial I_2}{\partial C}(C) = \mathrm{tr}(C)\mathbb{I} - C$ che si verificano facilmente. Quindi

$$\frac{\partial W}{\partial F}(F) = 2(\alpha+\beta|F|^2)F - 2\beta FF^TF + (\det F)w'(\det F)F^{-T}. \tag{6.2}$$

Otteniamo allora la stima seguente:

$$\left|\frac{\partial W}{\partial F}\right| \leq 2\alpha|F| + 4\beta|F|^3 + |w'(\det F)||\operatorname{cof} F|.$$

Quindi una condizione sufficiente perché l'ipotesi (W4) venga soddisfatta è che esistano p, q ed r tali che

$$2\alpha|F| + 4\beta|F|^3 + |w'(\det F)||\operatorname{cof} F| \leq c_5(1 + |F|^p + |\operatorname{cof} F|^q + |\det F|^r)$$

per ogni $F \in \mathrm{Mat}^+$.

Equazioni di Eulero–Lagrange in coordinate spaziali

Studiamo la validità dell'ipotesi (W4'). Occorrerà il seguente lemma.

Lemma 6.2. Per ogni $F \in \mathrm{Mat}^+$

$$\left|\frac{\partial W_{\mathrm{MR}}}{\partial F}(F)F^T\right| \leq 2\alpha|F|^2 + 4\beta|\operatorname{cof} F|^2.$$

Dimostrazione. Poniamo anzitutto

$$\overline{W}_{\mathrm{MR}}(C) = \alpha(I_1(C) - 3) + \beta(I_2(C) - 3),$$
$$\Phi_{\mathrm{MR}}(\lambda) = \alpha(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + \beta(\lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_2^2 - 3).$$

Ora

$$\frac{\partial \overline{W}_{\mathrm{MR}}}{\partial C}(C) = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \Phi_{\mathrm{MR}}}{\partial \lambda_i}\frac{\partial \lambda_i}{\partial C} = \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{2\lambda_i}\frac{\partial \Phi_{\mathrm{MR}}}{\partial \lambda_i}\frac{\partial \chi_i}{\partial C},$$

dove $\chi_i = \lambda_i^2$ sono gli autovalori di C. Calcoliamo $\frac{\partial \chi_i}{\partial C}$. Per farlo consideriamo la decomposizione spettrale di C

$$C = \sum_{i=1}^{3}\chi_i w^{(i)} \otimes w^{(i)},$$

dove $w^{(i)}$ è una base ortonormale di autovettori di C. Abbiamo che $\chi_i = w^{(i)} \cdot Cw^{(i)}$. Pertanto, considerata una generica curva liscia $\lambda \mapsto C(\lambda)$ a valori in Sym^+

$$\frac{\partial \chi_i}{\partial C} \cdot \dot{C} = w^{(i)} \cdot \dot{C}w^{(i)} = \left[w^{(i)} \otimes w^{(i)}\right] \cdot \dot{C},$$

dove usiamo che $w^{(i)} \cdot \frac{d}{dt}w^{(i)} = 0$ essendo $w^{(i)}$ un versore. Pertanto, data l'arbitrarietà di $\lambda \mapsto C(\lambda)$ e il fatto che $\frac{\partial \chi_i}{\partial C}$ e $w^{(i)} \otimes w^{(i)}$ sono matrici simmetriche, si ha che $\frac{\partial \chi_i}{\partial C} = w^{(i)} \otimes w^{(i)}$. Abbiamo allora calcolato che

$$\frac{\partial \overline{W}_{\mathrm{MR}}}{\partial C}(C) = \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{2\lambda_i}\frac{\partial \Phi_{\mathrm{MR}}}{\partial \lambda_i}w^{(i)} \otimes w^{(i)}.$$

Adesso tenendo conto del teorema di decomposizione polare $F = RU$ abbiamo

$$U = C^{1/2} = \sum_{i=1}^{3}\lambda_i w^{(i)} \otimes w^{(i)} \implies F = \sum_{i=1}^{3}\lambda_i r^{(i)} \otimes w^{(i)},$$

dove $r^{(i)} = Rw^{(i)}$. Facendo uso del Lemma 6.1 si ottiene

$$\frac{\partial W_{\mathrm{MR}}}{\partial F}F^T = 2F\frac{\partial \overline{W}_{\mathrm{MR}}}{\partial C}(C)F^T = \sum_{i=1}^{3}\lambda_i\frac{\partial \Phi_{\mathrm{MR}}}{\partial \lambda_i}r^{(i)} \otimes r^{(i)}.$$

Con facili calcoli si vede che

$$\lambda_1 \frac{\partial \Phi_{\mathrm{MR}}}{\partial \lambda_1} = 2\alpha\lambda_1^2 + 2\beta(\lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2)$$

e in modo analogo per $i = 2, 3$.

Otteniamo quindi la stima

$$\left|\frac{\partial W_{\mathrm{MR}}}{\partial F} F^T\right| \leq 2\alpha(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) + 4\beta(\lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_2^2) = 2\alpha|F|^2 + 4\beta|\operatorname{cof} F|^2,$$

che è la tesi. □

Grazie al lemma abbiamo che

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial W}{\partial F} F^T\right| &\leq \left|\frac{\partial W_{\mathrm{MR}}}{\partial F} F^T\right| + |\det F||w'(\det F)| \leq \\ &\leq 2\alpha|F|^2 + 4\beta|\operatorname{cof} F|^2 + |\det F||w'(\det F)|.\end{aligned}$$

Quindi, perché venga soddisfatta l'ipotesi (W4'), si può ad esempio richiedere che esista $c_8 > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ si abbia $\delta|w'(\delta)| \leq c_8(1 + |\delta|^r)$.

6.4 Un esempio

Sulla base delle condizioni ricavate nella Sezione 6.2 consideriamo il modello costitutivo definito dalla densità di energia elastica

$$W(F) = W_{\mathrm{MR}}(F) + w(\det F)$$

con

$$w(\delta) = \begin{cases} -a \log \delta + b(\delta - 1)^2 & \text{se } \delta > 0 \\ \infty & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove a, b sono costanti positive. Osserviamo che w è convessa e ha crescita più che lineare quindi sono soddisfatte le ipotesi necessarie per applicare il teorema di esistenza.

Richiediamo che il tensore di Piola si annulli nella configurazione di riferimento, cioè $\frac{\partial W}{\partial F}(\mathbb{I}) = 0$. Utilizzando la formula (6.2) si ricava che questo accade se e solo se $a = 2\alpha + 4\beta$.

Applicabilità dei teoremi sulle equazioni di Eulero–Lagrange Non viene soddisfatta l'ipotesi (W4) necessaria per poter applicare il teorema sulle equazioni di Eulero–Lagrange in coordinate materiali. Se infatti scegliamo $F = \operatorname{diag}(\delta^{1/3}, \delta^{1/3}, \delta^{1/3})$, per $\delta \to 0^+$ abbiamo che $|\frac{\partial W}{\partial F}(F)| \to \infty$ mentre $c_5(1 + |F|^p + |\operatorname{cof} F|^q + |\det F|^r)$ è limitato. Invece viene soddisfatta la condizione sufficiente per la validità dell'ipotesi (W4') relativa al teorema sulle equazioni di Eulero–Lagrange in coordinate spaziali. Infatti $\delta|w'(\delta)| \leq a + 2b\delta|\delta - 1|$.

Bibliografia

[1] J.M. Ball. «Constitutive inequalities and existence theorems in nonlinear elastostatics». In: *Nonlinear Analysis and Mechanics*. A cura di Knops R.J. Vol. 1. Pitman, 1977.

[2] J.M. Ball. «Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity». In: *Arch. Rational Mech. Anal.* 63 (1976), pp. 337–403.

[3] J.M. Ball. «Some open problems in elasticity». In: *Geometry, Mechanics, and Dynamics*. Springer, 2002, pp. 3–59.

[4] J. Bonet e R.D. Wood. *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. Cambridge University Press, 2008.

[5] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer, 2011.

[6] I. Ekeland e R. Témam. *Convex Analysis and Variational Problems*. SIAM, 1999.

[7] L.C. Evans. *Partial Differential Equations*. AMS, 1999.

[8] G. Green. «On the laws of reflection and refraction of light at the common surface of two non-crystallised media». In: *Trans. Cambridge Phil. Soc.* 7 (1839), pp. 245–269.

[9] M.E. Gurtin. *An Introduction to Continuum Mechanics*. Academic Press, Inc., 1981.

[10] M.E. Gurtin, E. Fried e L. Anand. *The Mechanics and Thermodynamics of Continua*. Cambridge University Press, 2010.

[11] J. Hadamard. *Leçons sur la Propagation des Ondes et les Équations de l'Hydrodynamique*. Hermann, 1903.

[12] E. Hellinger. «Die allgemeinen Ansätze der Mechanick der Kontinua». In: *Enz. Math. Wiss.* 4 (1914), pp. 602–694.

[13] C.B. Morrey. *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*. Springer, 1966.

[14] M. Šilhavý. *The Mechanics and Thermodynamics of Continuous Media*. Springer, 1997.

[15] C. Truesdell e W. Noll. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. Springer, 2004.